间 t，而只是空间变量 x 的函数：$u=u(x)$，因此$\frac{\partial u}{\partial t}=0$. 这样，式(1)－(6)可改写为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\ t>0,\ x\in(l_{j-1},l_j)(j=1,2,3,4), \tag{16}$$

$$x=l_0:-k_1\frac{\partial u}{\partial x}+k_e u=k_e u_e, \tag{17}$$

$$x=l_4:k_4\frac{\partial u}{\partial x}+k_s u=k_s u_s, \tag{18}$$

$$x=l_j:\begin{cases}u^-=u^+, & (19)\\ \left(k_j\frac{\partial u}{\partial x}\right)^-=\left(k_{j+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+, & (20)\end{cases}\quad j=1,2,3.$$

显然，由方程(16)，对每个区间$(l_{j-1},l_j)(j=1,2,3,4)$，$u(x)$都是 x 的线性函数

$$u(x)=a_jx+b_j,\ x\in(l_{j-1},l_j)(j=1,2,3,4). \tag{21}$$

由交界面条件(19)和(20)，有

$$\begin{aligned}&a_jl_j+b_j=a_{j+1}l_j+b_{j+1},\\&k_ja_j=k_{j+1}a_{j+1},\end{aligned}\quad j=1,2,3,$$

由此得到

$$a_2=\frac{k_1}{k_2}a_1, \tag{22}$$

$$a_3=\frac{k_1}{k_3}a_1, \tag{23}$$

$$a_4=\frac{k_1}{k_4}a_1 \tag{24}$$

及

$$b_2=a_1l_1+b_1-a_2l_1, \tag{25}$$

$$b_3=a_2l_2+b_2-a_3l_2, \tag{26}$$

$$b_4=a_3l_3+b_3-a_4l_3. \tag{27}$$

将式(25)－(27)相加，可得

$$b_4=a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3-a_2l_1-a_3l_2-a_4l_3+b_1. \tag{28}$$

由边界条件(17)和(18)，有

$$\begin{gathered}-k_1a_1+k_e(a_1l_0+b_1)=k_eu_e,\\k_4a_4+k_s(a_4l_4+b_4)=k_su_s,\end{gathered}$$

由此得到

$$b_1=u_e-\left(l_0-\frac{k_1}{k_e}\right)a_1 \tag{29}$$

及

$$(k_4+k_sl_4)a_4+k_sb_4=k_su_s. \tag{30}$$

将式(22)－(24)及式(28)－(29)代入式(30)，得到关于 a_1 的方程

$$\left(\frac{1}{k_s}+\frac{1}{k_e}+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k_j}(l_j-l_{j-1})\right)a_1=\frac{1}{k_1}(u_s-u_e),$$

由此解得

$$a_1=\frac{\frac{1}{k_1}(u_s-u_e)}{\frac{1}{k_s}+\frac{1}{k_e}+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k_j}(l_j-l_{j-1})}.$$

最后由式(22)－(24)及式(29)，(25)－(27)求得 $a_j(j=2,3,4)$和 $b_j(j=1,2,3,4)$.

利用稳态模型精确解的公式，可以验证隐式差分格式的计算结果. 图 4 显示了用稳态模型(16)－(20)计算的热防护服系统各点处的温度与用非稳态模型(1)－(6)计算的热防护服系统各点处在终止时刻的温度的绝对误差，其中，$k_e=120.0\ \mathrm{W/(m^2\cdot ℃)}$，$k_s=8.36\ \mathrm{W/(m^2\cdot ℃)}$，其他参数见问题 1. 可以看到，最大误差为 8.9548×10^{-10}，几乎没有误差.

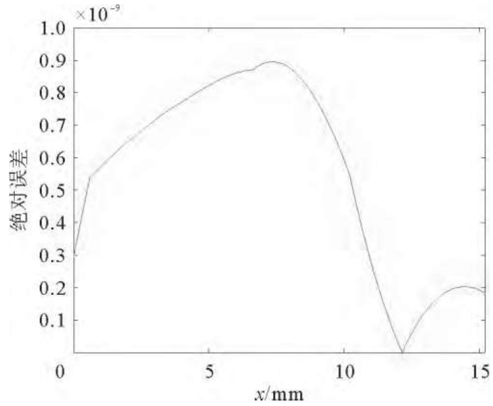

图 4 稳态模型与非稳态模型的计算误差图

5 热交换系数的确定

第 I 层与高温环境之间的热交换系数 k_e 和皮肤与第 IV 层之间的热交换系数 k_s 是未知的，需要利用测量得到的假人皮肤外侧的温度来确定. 记测量得到的温度为 u_M^{n*}，表示 $t=t^n$ 时测量得到的假人皮肤外侧的温度，那么确定热交换系数 k_e 和 k_s 的数学模型可以归结为如下的优化问题：

$$\min E(k_e,k_s)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(u_M^n-u_M^{n*})^2,$$

其中：u_M^n 表示 $t=t^n$ 时假人皮肤外侧的计算温度；而 $M(=M_4)$ 表示差分格式中的剖分总数，其所在的位置恰好是在假人皮肤外侧处.

由式(21)可以得到皮肤外侧稳态时的温度为

$$u(l_4)=\frac{\frac{1}{k_s}}{\frac{1}{k_s}+\frac{1}{k_e}+\sum\limits_{j=1}^{4}\frac{l_j-l_{j-1}}{k_j}}u_e+\frac{\frac{1}{k_e}+\sum\limits_{j=1}^{4}\frac{l_j-l_{j-1}}{k_j}}{\frac{1}{k_s}+\frac{1}{k_e}+\sum\limits_{j=1}^{4}\frac{l_j-l_{j-1}}{k_j}}u_s. \tag{31}$$

记 $u_M=u(l_4)$，由式(31)可得

$$\left(\frac{1}{k_s}+\frac{1}{k_e}+\sum_{j=1}^{4}\frac{l_j-l_{j-1}}{k_j}\right)u_M=\frac{1}{k_s}u_e+\left(\frac{1}{k_e}+\sum_{j=1}^{4}\frac{l_j-l_{j-1}}{k_j}\right)u_s,$$

即

$$\frac{1}{k_s}=\frac{u_M-u_s}{u_e-u_M}\left(\frac{1}{k_e}+\sum_{j=1}^{4}\frac{l_j-l_{j-1}}{k_j}\right).$$

这就得到了 k_s 和 k_e 的关系，从而热交换系数的确定问题就转化为单参数的辨识问题：

$$\min E(k_e)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(u_M^n-u_M^{n*})^2.$$

6 第 II 层厚度的最优设计

记 $u(t,x)$ 为式(1)－(6)的解，则 t 时刻皮肤外侧的温度为 $u(t,l_4)$.

记 $T(=60\ \mathrm{min}=3\,600\ \mathrm{s})$ 为工作时间，此时皮肤外侧的温度不能超过 $u_{\max}(=47\ ℃)$，即

$$u(T,l_4)\leqslant u_{\max}.$$

记 t^* 为允许超过 $u^*(=44\ ℃)$ 的最长时间($t^*=5\ \mathrm{min}=300\ \mathrm{s}$)，则

$$u(T-t^*,l_4)\leqslant u^*.$$

第 II 层的厚度为 l_2-l_1，由于 l_1 是固定的，因此第 II 层厚度最小就是 l_2 最小. 由此，第 II 层厚度的最优设计模型可以归结为

$$\min\ l_2 \tag{32}$$

$$\text{s.t.}\ u(T,l_4)\leqslant u_{\max}, \tag{33}$$

$$u(T-t^*,l_4)\leqslant u^*, \tag{34}$$

$$d_{2\min}\leqslant l_2-l_1\leqslant d_{2\max}, \tag{35}$$

其中：$u(t,x)$ 是热量传递模型(1)－(6)的解；$d_{2\min}(=0.6\ \mathrm{mm})$ 为第 II 层的最小允许厚度；$d_{2\max}(=25\ \mathrm{mm})$ 为