数学类(19)

双中心化子定理：

设A是数域F上的一个n阶矩阵,记$C\left(A\right)$为和A可交换的矩阵空间, 证明：

如果一个矩阵X和全部$C\left(A\right)$可交换, 那么一定存在一个数域F上的多项式,使得$X=p\left(A\right)$.

证明：

我们记$C^2\left(A\right)$和全部$C\left(A\right)$可交换的那些矩阵, 显然是个线性空间, 且$P\left(A\right)\subset C^2\left(A\right)\subset C\left(A\right)$

$P\left(A\right)$是A的全体多项式空间, 要证明的就是$P\left(A\right)=C^2\left(A\right)$

显然可以不放设$F=\mathbb{C}$,这是因为求p使得$p\left(A\right)=X$, 其实是关于p系数的线性方程组的问题.

因此可如此不妨设(注意$C\left(A\right)$在把A视为$\mathbb{C}$上矩阵时也会扩大, 你还需要说明这一点)

不妨设$A=\begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_s \end{pmatrix}$,这里$T_i$是相同特征值对应那些$jordan$块组成的分块对角矩阵.

设$XA=AX$，把X对应分块为X_{ij},$T_iX_{ij}=X_{ij}T_j\Rightarrow X=\begin{pmatrix} X_{11} & & & \\ & X_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & X_{ss} \end{pmatrix}$并且$X_{ii}T_i=T_iX_{ii}$

如果我们已经对只有一种特征值的情况证明了这个命题.

设$X\in C^2\left(A\right)$，$X=\begin{pmatrix} X_{11} & & & \\ & X_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & X_{ss} \end{pmatrix}$，$\forall Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & & & \\ & Y_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Y_{ss} \end{pmatrix}\in C\left(A\right)$,有$XY=YX$

$\Leftrightarrow X_{jj}Y_{ii}=Y_{ii}X_{jj}\Leftrightarrow X_{ii}\in C^2\left(T_i\right)$(因为$Y_{ii}$遍历$C\left(T_i\right)$)$\overset{\text{注意已经假设了}}{\Leftrightarrow}$ 存在$p_i\in\mathbb{C}[x]$,使得$X_{ii}=p_i\left(T_i\right)$

现在可取$q_i\in\mathbb{C}[x]$是T_i的极小多项式,因为特征值互不相同,所以互素.

由中国剩余定理,存在$p\left(x\right)\in\mathbb{C}[x]$使得,$p\equiv p_i\left(\bmod q_i\right)$, 此时

$$p\left(A\right)=\begin{pmatrix} p\left(T_1\right) & & & \\ & p\left(T_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p\left(T_s\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1\left(T_1\right) & & & \\ & p_2\left(T_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_s\left(T_s\right) \end{pmatrix}=X$$

因此$C^2\left(A\right)=P\left(A\right)$

下设A只有一个特征值,不妨设A幂零矩阵$\left(\text{否则}A-\lambda E\text{代替即可}\right)$

不妨设$A=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$,$J_i$是特征值0对应的$jordan$块.

设$Y\in C\left(A\right)$，对应分块为Y_{ij},$J_iY_{ij}=Y_{ij}J_j$ $\left(\text{注意这些}Y_{ij}\text{可以用矩阵乘法定义算出}\right)$

对矩阵方程$J_m\left(\lambda\right)X=XJ_n\left(\lambda\right)$,解空间维数$\min\left\{m,n\right\}$,全体$X$形如如下的

记住写法:(从右顶点开始写,对角线一致,写到不能写为止)

例如：$X=\begin{pmatrix} & d & c & b & a \\ & & d & c & b \\ & & & d & c \\ & & & & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} c & b & a \\ & c & b \\ & & c \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

回到原题,对$X\in C^2\left(A\right)$，取$\begin{pmatrix} J_1+E & & & \\ & J_2+2E & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s+sE \end{pmatrix}\in C\left(A\right)$

X对应分块为X_{ij},这之前一样,这逼迫$X=\begin{pmatrix} X_{11} & & & \\ & X_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & X_{ss} \end{pmatrix}$并且有$X_{ii}J_i=J_iX_{ii}$

因此存在多项式$p_i\in\mathbb{C}\left[x\right]$,使得$p_i\left(J_i\right)=X_{ii}$,注意到$J_i$极小多项式不互素,没法使用中国剩余定理.注意不能始终在对角线上操作,否则体现不出$C^2\left(A\right),C\left(A\right)$的区别.

因为$X\in C^2\left(A\right)$，所以$\forall Y\in C\left(A\right)$，都有$XY=YX$，

即$p_i\left(J_i\right)Y_{ij}=Y_{ij}p_j\left(J_j\right)$，这里$Y_{ij}$遍历整个$J_iY_{ij}=Y_{ij}J_j$解空间

显然，对任意$p\in\mathbb{C}\left[x\right]$,都有$p\left(J_i\right)Y_{ij}=Y_{ij}p\left(J_j\right)$,下证明$p_i=p_j$

因为$p_i\left(J_i\right)$的特征值就是p_i常数项的值,所以任意i,j,p_i,p_j常数项一致.

若p_i,p_j对于$0,1,\ldots,s-1$次的系数一致，来考察s次的系数,

$p_i=\tilde{p}_i+r,p_j=\tilde{p}_j+r,\deg r=s-1,r\left(J_i\right)Y_{ij}=Y_{ij}r\left(J_j\right)$,因此不妨设$r=0$

可不妨设$p_i\left(J_i\right)=\overset{o}{p}_i\left(J_i\right)\cdot J_i^s, p_j\left(J_j\right)=\overset{o}{p}_j\left(J_j\right)\cdot J_j^s$

这里$\overset{o}{p}_i,\overset{o}{p}_j\in\mathbb{C}[x]$,此时就有$\overset{o}{p}_i\left(J_i\right)\cdot J_i^s Y_{ij}=Y_{ij}\overset{o}{p}_j\left(J_j\right)\cdot J_j^s$

$\Leftrightarrow \overset{o}{p}_i\left(J_i\right)\cdot J_i^s Y_{ij}=Y_{ij}J_j^s\cdot\overset{o}{p}_j\left(J_j\right)$

注意到$J_i^s Y_{ij}=Y_{ij}J_j^s$,所以我们要证$\overset{o}{p}_i,\overset{o}{p}_j$常数项一致,

只需证明有一个Y_{ij}使得$J_i^s Y_{ij}\neq 0$

注意到p_i的取法,记J_i阶数为n_i,可以让$\deg p_i\le n_i-1$,

所以$s\le\min\left\{n_i-1,n_j-1\right\}$,此时直接矩阵乘法考察$J_i^s Y_{ij}, Y_{ij}$遍历$J_i Y_{ij}=Y_{ij}J_j$解空间

就得出$J_i^s Y_{ij}$不全为0,因此$\overset{o}{p}_i,\overset{o}{p}_j$常数项一致,至此我们证明了$p_i$一致

因此$X=p_1\left(A\right)$.

注意：上面的证明为了授课,写的过于详细,其实理解透彻了能极大减少步骤并且每一步都是显然的.

结论:

设A_a是一族两两可交换的复矩阵,证明:

存在一个可逆复矩阵P,使得$P^{-1}A_aP$是上三角矩阵

分析：归纳，矩阵有无穷个,甚至不可数,放弃对矩阵数量归纳

有限量只有维数,所谓归纳,只要把维数降下去就可以了,

特征子空间V_λ是最好的选择,为了能找真子空间V_λ,所以必须要有一个非数量矩阵.

证明：

设$V=\mathbb{C}^n$,A_a是V上的线性变换

(1):若A_a全部是数量矩阵，则没什么好证明的.

(2):否则取某个非数量矩阵A_1，取A_1的特征子空间V_λ,$\dim V_\lambda < n$

又V_λ是所有A_a-不变子空间,因此$A_a|V_\lambda$是一族两两可交换的复矩阵

归纳：

当$n=1$时,命题显然,设命题对$\le n-1$都成立,当n时,由归纳假设

$A_a|V_\lambda$可同时上三角化,将V_λ的基扩充为V的基,

A_a在这些基下的矩阵形如$\begin{pmatrix} \tilde{A}_a & B_a \\ 0 & C_a \end{pmatrix}$,$\tilde{A}_a$为上三角矩阵,显然$C_a$两两可交换

因此由归纳假设,

存在可逆的p，使得$p^{-1}C_ap$为上三角矩阵,再取$P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$即可,我们验证就有

$P^{-1}A_aP$为上三角矩阵,我们完成了证明.

结论:

设A_a是一族两两可交换的可对角化的复矩阵, 证明:

存在一个可逆复矩阵P, 使得$P^{-1}A_aP$是对角矩阵

证明：

设$V=\mathbb{C}^n$, A_a是V上的线性变换

(1): 若A_a全部是数量矩阵，则没什么好证明的.

(2): 否则取某个非数量矩阵A_1，因为A_1可对角化,

可设互不相同$\lambda_i, i=1,2,\cdots,s$是$A_1$的特征值，那么有直和分解

$V=\oplus_{i=1}^{s}V_{\lambda_i}$, 若$s=1$, 则$A_1$为数量矩阵, 因此$s\geq 2$, A的特征子空间V_{λ_i}, $\dim V_{\lambda_i}<n$

又V_{λ_i}是所有A_a $-$不变子空间, 因此$A_a|V_{\lambda_i}$是一族两两可交换的可对角化的复矩阵

$$\left(\begin{array}{l}\text{注意这里限制矩阵可对角化并非显然, 因为零化}A_a\text{的多项式}p\text{必然}\\ \text{零化}A_a|V_{\lambda_i}\text{, 所以}A_a|V_{\lambda_i}\text{的极小多项式整除}A_a\text{的极小多项式, }A_a\text{的极小多项式}\\ \text{无重根, 导致}A_a|V_{\lambda_i}\text{的极小多项式无重根, 故}A_a|V_{\lambda_i}\text{可对角化}\end{array}\right)$$

归纳：

当$n=1$时, 命题显然, 设命题对$\leq n-1$都成立, 当n时, 由归纳假设

取V_{λ_i}的基，使得$A_a|V_{\lambda_i}$为对角矩阵, 这些基合起来, 就完成了证明.

结论:

设A_a是一族两两可交换的实对称矩阵, 证明:

存在一个实正交矩阵P, 使得$P^{-1}A_aP$是对角矩阵

对应的复版本酉相似也有此结果, 留做习题.

结论:

设A_a是一族两两可交换的复矩阵, 证明: A_a有公共的特征向量.

证明：因为有P可逆, 使得$P^{-1}A_aP$上三角, 故P的第一列为所求

结论：

设A_a是一族两两可交换的奇数阶实矩阵, 证明他们有公共的实特征向量.

下次证明, 可先思考(难点是对维数归纳, 但是难以降维数!)

结论：

设X是域F上线性空间(维数可以无穷, 域随便), $f_1, f_2, \cdots f_n \in X^*$, 记$N = \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$

那么如下条件等价：对$f \in X^*$

$(a): f$可被$f_1, f_2, \cdots f_n$线性表出,

$(b): N \subset \ker f$

证明：

$(a) \Rightarrow (b)$显然

$(b) \Rightarrow (a)$(考研数学热点结论)

构造线性映射$\pi : X \to F^n, x \to \left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\right)$

$\ker \pi = N$, 定义$g : \pi(X) \to F, \pi(x) \to f(x)$

首先证明g是映射, 显然g线性, 设$\pi(x) = 0 \Rightarrow x \in N \Rightarrow x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0$

$N \subset \ker f$就是保证g良定的, 把g线性延拓到F^n上, $\exists c_1, c_2, \cdots, c_n \in F$, 使得

$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, f(x) = g(\pi(x)) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i), \forall x \in X$

我们完成了证明, 这里其实就是映射提升技巧.

推论: n维空间n个线性函数线性无关充分必要条件是他们可分点.

即$\forall a \neq 0$, 都有这n个线性函数里面的某个f, 使得$f(a) \neq 0$