# 数学类(24)

## tauber 定理

回忆竞赛真题，

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-1,1)$收敛, 且$\lim_{n\to\infty} na_n$趋于0, 且$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$, 证明$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$

自然会问

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-1,1)$收敛, 且$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A, a_n$赋予什么条件, 有$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$?

如果趋于其他点,我们可以做旋转或者平移得到相同的结果

平凡的：若$a_n \ge 0$,则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$

证明：

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$关于$x>0$递增, 于是$\sum_{n=0}^{m} a_n x^n \le \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \le A, \forall m \ge 1$

因此两边令$x\to 1^- \Rightarrow \sum_{n=0}^{m} a_n \le A$,由$m$任意性, 我们知$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$收敛

而幂级数收敛,一定内闭一致收敛, 因此

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 1^-} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

证毕！

思想：连续版本和离散版本有着完全类似的性质，
我们直接证明连续版本, 从而离散版本是平凡推论.

对$\forall y>0$, 设$f(x)e^{-yx}$在$[0,+\infty)$广义可积, 且$\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^{\infty} f(x)e^{-yx}dx=A$,

若$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$, 证明$\int_0^{\infty} f(x)dx=A$

证明：

$$\left(1-e^{-yx}\right)\le yx \Leftrightarrow e^x\ge x+1$$

证明$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\int_0^t x|f(x)|dx}{t}=0$（注意分子被积函数没连续性, 此时构成一类经典习题）

$\forall\varepsilon>0,\exists t_0>0,\forall t\ge t_0, t|f(t)|\le\varepsilon$,

$$\frac{\int_0^t x|f(x)|dx}{t}=\frac{\int_0^{t_0} x|f(x)|dx+\int_{t_0}^t x|f(x)|dx}{t}\le\frac{\int_0^{t_0} x|f(x)|dx+\varepsilon(t-t_0)}{t}$$

令$t\to\infty$, $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\int_0^t x|f(x)|dx}{t}\le\varepsilon$, 由$\varepsilon$任意性, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\int_0^t x|f(x)|dx}{t}=0.$

回到原题

$\forall\varepsilon>0$, 当$y$充分小, $\exists t_0>0, x|f(x)|\le\varepsilon,\forall x\ge\dfrac{1}{y}$,

$$\left|\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} f(x)e^{-yx}dx\right|\le\varepsilon\int_{\frac{1}{y}}^{\infty}\frac{1}{x}e^{-yx}dx\le\varepsilon y\int_0^{\infty}e^{-yx}dx=\varepsilon.$$

因此$\lim\limits_{y\to 0^+}\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} f(x)e^{-yx}dx=0$, $\lim\limits_{y\to 0^+} y\int_0^{\frac{1}{y}} x|f(x)|dx=0$

$$\int_0^{\frac{1}{y}} f(x)dx-\int_0^{\infty} f(x)e^{-yx}dx=\int_0^{\frac{1}{y}} f(x)\left(1-e^{-yx}\right)dx+\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} f(x)e^{-yx}dx$$

$$\left|\int_0^{\frac{1}{y}} f(x)\left(1-e^{-yx}\right)dx\right|\le y\int_0^{\frac{1}{y}} x|f(x)|dx$$

故$\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^{\frac{1}{y}} f(x)dx=A$, 证毕！

设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-1,1)$收敛，且$\lim_{n\to\infty}na_n$趋于0，且$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$，证明$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$

证明：

取$f(x)=a_n, n\le x<n+1, n=0,1,2,\cdots$

对$t>0$，取$n$，使得$n\le t<n+1, t\sim n$

$$\int_0^t f(x)e^{-yx}dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)e^{-yx}dx+\int_n^t f(x)e^{-yx}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\int_k^{k+1}e^{-yx}dx+a_n\int_n^t e^{-yx}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\frac{e^{-ky}-e^{-(k+1)y}}{y}+a_n\frac{e^{-ny}-e^{-ty}}{y}$$

$$=\frac{1-e^{-y}}{y}\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left(e^{-y}\right)^k+\frac{a_ne^{-ny}-a_ne^{-ty}}{y}$$

当$t\to+\infty$，有$n\to+\infty$，上式第一项收敛.

$a_ne^{-ny}$是幂级数的末项，当然趋于0，$\left|a_ne^{-ty}\right|\le\left|a_n\right|e^{-ny}\to0$

因此$\int_0^{\infty}f(x)e^{-yx}dx=\frac{1-e^{-y}}{y}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(e^{-y}\right)^k$

$$\lim_{y\to0^+}\int_0^{\infty}f(x)e^{-yx}dx=\lim_{y\to0^+}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(e^{-y}\right)^k=A$$

$\lim_{t\to+\infty}tf(t)=\lim_{t\to+\infty}ta_n=\lim_{n\to\infty}na_n=0$，因此由连续版本的$tauber$定理

故$\int_0^{\infty}f(x)dx=A=\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}f(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}a_k$，证毕！

接下来是今天最困难的定理$\left(\text{核心就一句话,分部积分改善阶}\right)$,

对$\forall y>0$,设$f\left(x\right)e^{-yx}$在$\left[0,+\infty\right)$广义可积, 且$\lim\limits_{y\to0^+}\int_0^{\infty}f\left(x\right)e^{-yx}dx=A$,

证明$\int_0^{\infty}f\left(x\right)dx=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x tf\left(t\right)dt}{x}=0$

本定理需要使用$R-S$积分作为工具, 预先学习$rudin$数学分析对应的章节.

必要性:

若$\int_0^{\infty}f\left(x\right)dx=A$,我们来证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x tf\left(t\right)dt}{x}=0$

记$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(y\right)dy$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x tdF\left(t\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(F\left(x\right)-\dfrac{\int_0^x F\left(t\right)dt}{x}\right)=A-A=0$

注意$\int_0^x tf\left(t\right)dt=\int_0^x tdF\left(t\right)$是需要用$R-S$积分的$\left(f\text{可积},F\text{绝对连续}\right)$

充分性:

$R-S$积分的工具性就在于对于很弱的情况下, 我们都可以凑微分, 从而证明出我们缺乏光滑性时不能证明出来的结果.

第二积分中值定理就是$R-S$积分的产物.

回到原题，$F\left(x\right)=\int_0^x\left(t+1\right)f\left(t\right)dt, H\left(x\right)=\int_0^x tf\left(t\right)dt$, 先说明$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F\left(x\right)}{x}=0$

只需说明$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x f\left(t\right)dt}{x}=0$, 事实上,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x f\left(t\right)dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\frac{tf\left(t\right)}{t}dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\frac{1}{t}dH\left(t\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{H\left(x\right)}{x}+\int_1^x\frac{H\left(t\right)}{t^2}dt}{x}=0$$

这里$\dfrac{\int_1^x\frac{H\left(t\right)}{t^2}dt}{x}$可以洛必达.

$$\int_0^u f\left(x\right)e^{-yx}dx=\int_0^u\frac{\left(x+1\right)f\left(x\right)}{\left(x+1\right)}e^{-yx}dx=\int_0^u\frac{e^{-yx}}{\left(x+1\right)}dF\left(x\right)$$

$$=F\left(u\right)\frac{e^{-yu}}{u+1}+y\int_0^u\frac{F\left(x\right)e^{-yx}}{x+1}dx+\int_0^u\frac{F\left(x\right)e^{-yx}}{\left(x+1\right)^2}dx$$

注意$F\left(x\right)=o\left(x\right)$,因此令$u\to\infty$,

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-yx}dx = y\int_0^{\infty}\frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}dx + \int_0^{\infty}\frac{F(x)e^{-yx}}{(x+1)^2}dx$$

后一部分阶升高了,非常任意处理,所以

$\forall\varepsilon>0,\exists m>0,$当$x\geq m$时,$|F(x)|\leq\varepsilon(x+1)$

$$\lim_{y\to0^+} y\int_0^{\infty}\frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}dx = \lim_{y\to0^+} y\int_m^{\infty}\frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}dx + \lim_{y\to0^+} y\int_0^{m}\frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}dx$$

$$= \lim_{y\to0^+} y\int_m^{\infty}\frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}dx$$

而$\lim_{y\to0^+} y\int_m^{\infty}\left|\frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}\right|dx \leq \lim_{y\to0^+}\varepsilon y\int_0^{\infty}e^{-yx}dx=\varepsilon,$

因此$\lim_{y\to0^+} y\int_0^{\infty}\frac{F(x)e^{-yx}}{x+1}dx=0.$

因此$\lim_{y\to0^+}\int_0^{\infty} f(x)e^{-yx}dx = \lim_{y\to0^+}\int_0^{\infty}\frac{F(x)e^{-yx}}{(x+1)^2}dx = A$

对$\frac{F(x)}{(x+1)^2}$使用刚才证明的$tauber$定理,因此$\int_0^{\infty}\frac{F(x)}{(x+1)^2}dx=A$

然后再分部积分回去$\int_0^{u}\frac{F(x)}{(x+1)^2}dx = -\frac{F(u)}{u+1}+\int_0^{u}\frac{(x+1)f(x)}{x+1}dx$

当$u\to\infty$,有$\int_0^{\infty} f(x)dx = A$

注意：$R-S$广义积分可以建立，但是我们常见书上不容易找到,所以我们不在无穷区间上对$R-S$积分分部积分,而是采用上面的取极限的方式.

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-1,1)$收敛,且$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$,证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \text{充要条件是} \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} k a_k}{n} = 0$$

证明：

取$f(x) = a_n, n \le x < n+1$,上一个离散版本的时候已经说明了

$\int_0^{\infty} f(x) e^{-yx} dx$收敛,且$\lim_{y\to 0^+}\int_0^{\infty} f(x) e^{-yx} dx = A$,而

$\int_0^{\infty} f(x) dx$存在$\Rightarrow \int_0^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$存在

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$存在,$n \le t < n+1, \int_0^t f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x) dx + \int_n^t f(x) dx$

$\Rightarrow \left|\int_n^t f(x) dx\right| \le (t-n)|a_n| \le |a_n| \to 0$,因此$\int_0^{\infty} f(x) dx$存在

而若$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} k a_k}{n} = 0$,对$n \le x < n+1, x \sim n$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t f(t) dt}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^n t f(t) dt + \int_n^x t f(t) dt}{n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_k^{k+1} t dt}{n} + \frac{a_n \int_n^x t dt}{n}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right) a_k}{n} + \frac{a_n (x^2 - n^2)}{2n}$$

注意$\lim_{x\to\infty}\frac{\left|a_n (x^2 - n^2)\right|}{2n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|(2n+1)}{2n}, \frac{\sum_{k=1}^{n+1} k a_k}{n+1} - \frac{\sum_{k=1}^{n} k a_k}{n+1} = a_{n+1}$

因此$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{x\to\infty}\frac{a_n (x^2 - n^2)}{2n} = 0, \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k}{n} = 0$所以$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t f(t) dt}{x} = 0$

因此$\int_0^{\infty} f(x) dx = A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t f(t) dt}{x} = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$

故若$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} k a_k}{n} = 0$,则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$,反之设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$,早就结论了$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} k a_k}{n} = 0.$

接下来是$O-tauber$定理

设$f\left(x\right)>-\dfrac{B}{x},\forall x>0$, 且$\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^\infty f\left(x\right)e^{-yx}dx=s$, 则$\int_0^\infty f\left(t\right)dt=s$

分析：

$$F\left(y\right)=\int_0^\infty f\left(x\right)e^{-yx}dx, F\left(y\right)\in C\left[0,+\infty\right)$$

$$F'\left(y\right)=-\int_0^\infty xf\left(x\right)e^{-yx}dx$$

$$F''\left(y\right)=\int_0^\infty x^2f\left(x\right)e^{-yx}dx>-B\int_0^\infty xe^{-yx}dx=\frac{-C}{y^2}$$

故$\int_0^\infty [xf\left(x\right)+B]e^{-yx}dx\sim\dfrac{B}{y}$

所以问题转化为已知和函数的估计, 能不能推出系数的估计

也就是上节课最后提到的习题. 下节课继续.