数学类(30)

$\mathbb{R}^n$中紧集K的凸包也是紧的.

$$coK=\left\{\sum_{i=1}^{m}c_ix_i:\sum_{i=1}^{m}c_i=1,c_i\ge 0,x_i\in K,i=1,2,...,m,m\in\mathbb{N}\right\}$$

难点在于m的任意性, 但是由上节课的结论, 可以知

$$coK=\left\{\sum_{i=1}^{n+1}c_ix_i:\sum_{i=1}^{n+1}c_i=1,c_i\ge 0,x_i\in K,i=1,2,...,n+1\right\}$$

构造连续映射φ: $\mathbb{R}^{(n+1)^2}\to\mathbb{R}^n,\left(c_1,c_2,\cdots,c_{n+1},x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}\right)\to\sum_{i=1}^{n+1}c_ix_i$

其中$S=\left\{\left(c_1,c_2,\cdots,c_{n+1}\right)\in\mathbb{R}^{n+1}:\sum_{i=1}^{n+1}c_i=1,c_i\ge 0,i=1,2,\cdots,n+1\right\}$是紧集.

$S\times K^{n+1}\subset\mathbb{R}^{(n+1)^2}$,熟知紧集的任意笛卡尔积都是紧的(吉洪诺夫定理)

由$coK=\varphi\left(S\times K^{n+1}\right)$知$coK$是紧的.

$\phi:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n},\phi(AB)=\phi(A)\phi(B)$

(1):若$r(A)=r(B)$,证明$r(\phi(A))=r(\phi(B))$,

(2):若$\phi(0)=0$,存在秩1矩阵$W,\phi(W)\neq 0$,证明存在可逆矩阵R.

$\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1}$

证明：

(1)：$r(A)=r(B)$知$\exists n$阶可逆矩阵P,Q,使得$PAQ=B$,那么

$r(\phi(B))=r(\phi(PAQ))=r(\phi(P)\phi(A)\phi(Q))\le r(\phi(A))$

反之,$r(\phi(A))\le r(\phi(B))$,故$r(\phi(A))=r(\phi(B))$

(2):

分析：类比相似矩阵的定理的证明,我们设$R=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$

即需要$\phi(E_{ij})(v_1,v_2,\cdots,v_n)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)E_{ij}=\left(0,0,\cdots,\overset{j}{v_i},0,\cdots,0\right)$

我们的目标转化为寻找一组v_k满足$\phi(E_{ij})v_k=\begin{cases}0,k\neq j\\ v_i,k=j\end{cases}$

特别的,令$i=j=k,\phi(E_{ii})v_i=v_i$

利用基本的恒等式$E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il},\phi(E_{ii}^2)=\phi(E_{ii})=\phi^2(E_{ii})$

这给出了$\phi(E_{ii})$是幂等矩阵,注意$r(E_{ii})=1$,由第一问

$r(\phi(E_{ii}))>0$,因此$\phi(E_{ii})$有特征值1

于是我们可取v_i是$\phi(E_{ii})$的对应特征值1的特征向量.

如此取的v_i是否满足$\phi(E_{ij})v_k=\begin{cases}0,k\neq j\\ v_i,k=j\end{cases}$?

当$k\neq j,\phi(E_{ij})v_k=\phi(E_{ij})\phi(E_{kk})v_k=0$

当$k=j,\phi(E_{ik})v_k=\phi(E_{ik})\phi(E_{kk})v_k=\phi(E_{ik})v_k$,这没任何用处

因此v_i可能还需要改造!

如果$\sum_{i=1}^{n}c_iv_i=0,\phi(E_{kk})\sum_{i=1}^{n}c_iv_i=0=\phi(E_{kk})c_kv_k=c_kv_k\Rightarrow c_k=0$

由k的任意性,故$\{v_i\}_{i=1}^{n}$线性无关.

设$\phi\left(E_{ij}\right)v_j=t_1v_1+t_2v_2+t_3v_3\cdots+t_nv_n$

取$k\neq i,\phi\left(E_{kk}\right)\phi\left(E_{ij}\right)v_j=t_k\phi\left(E_{kk}\right)v_k=t_kv_k=0\Rightarrow t_k=0$

设$\phi\left(E_{ij}\right)v_j=r_{ij}v_i$

接下来想办法改造v_i,要让v_i仍然保有刚才良好的性质

我们用$c_i\neq 0$,考虑$\phi\left(E_{ii}\right)c_iv_i=c_iv_i$,即$c_iv_i$仍然是$\phi\left(E_{ii}\right)$对应特征值1的特征向量.

之前推导的性质没有改变,现在期望$\phi\left(E_{ij}\right)c_jv_j=c_iv_i$,即$r_{ij}=\dfrac{c_i}{c_j}$

那么r_{ij}能否表示成这种形式呢?,这诱使我们继续考察r_{ij}的样子.

$\phi\left(E_{il}\right)\phi\left(E_{lj}\right)v_j=\phi\left(E_{il}\right)r_{lj}v_l=r_{il}r_{lj}v_i=r_{ij}v_i\Rightarrow r_{ij}=r_{il}r_{lj}$

为了统一形式,我们写成$r_{ij}=\dfrac{r_{il}}{r_{jl}}$，是否存在$l$,使得$r_{il}\neq 0,\forall i$

事实上一定存在,如若不然,$\forall l,\exists i_l$,使得$r_{i_l l}=0$,但是$\forall i,j$

$r_{ij}=r_{ii_l}r_{i_l l}r_{lj}=0$,即所有$r_{ij}=0$,这不可能！这样分析完毕！

证明：

由(1),和$\phi(W)\neq 0\Rightarrow\phi(E_{ii})\neq 0, i=1,2,\cdots,n$

又$\phi\left(E_{ii}^2\right)=\phi(E_{ii})=\phi^2(E_{ii})\Rightarrow\phi(E_{ii})$是非0幂等矩阵, 所以

$\exists\{v_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{R}^n$,使得$v_i\neq 0,\forall i=1,2,\cdots,n$, 并满足$\phi(E_{ii})v_i=v_i,\forall i=1,2,\cdots,n$

又当$k\neq j,\phi(E_{ij})v_k=\phi(E_{ij})\phi(E_{kk})v_k=0$, 再证明$\{v_k\}_{k=1}^n$线性无关

如果$\sum_{i=1}^n c_iv_i=0,\phi(E_{kk})\sum_{i=1}^n c_iv_i=0=\phi(E_{kk})c_kv_k=c_kv_k\Rightarrow c_k=0$

由k的任意性,故$\{v_i\}_{i=1}^n$线性无关.

设$\phi(E_{ij})v_j=t_1v_1+t_2v_2+t_3v_3\cdots+t_nv_n$

取$k\neq i,\phi(E_{kk})\phi(E_{ij})v_j=t_k\phi(E_{kk})v_k=t_kv_k=0\Rightarrow t_k=0$

因此存在r_{ij},使得$\phi(E_{ij})v_j=r_{ij}v_i, i,j=1,2,\cdots,n$

又$\phi(E_{il})\phi(E_{lj})v_j=\phi(E_{il})r_{lj}v_l=r_{il}r_{lj}v_i=r_{ij}v_i\Rightarrow r_{ij}=r_{il}r_{lj}$

$\forall l,\exists i_l$,使得$r_{i_l l}=0$,但是$\forall i,j$,我们有$r_{ij}=r_{ii_l}r_{i_l l}r_{lj}=0$,即所有$r_{ij}=0$,这不可能！

因此存在l_0,使得$r_{il_0}\neq 0,\forall i=1,2,\cdots,\ n$

现取$w_i=r_{il_0}v_i, i=1,2,\cdots,n$

于是有$\phi(E_{ij})w_j=w_i,\forall i,j=1,2,\cdots,n$

取$R=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$即为所求.

设$m,n\in\mathbb{N}$,且有映射$f:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$，满足

$(1):f\left(E_n\right)=E_m$

$(2):f\left(AB\right)=f\left(A\right)f\left(B\right),\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$(3):f\left(A+B\right)=f\left(A\right)+f\left(B\right),\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$

证明：$n\mid m$

证明：

$E_m=f\left(AA^{-1}\right)=f\left(A\right)f\left(A^{-1}\right)$,即$f\left(A^{-1}\right)=\left[f\left(A\right)\right]^{-1}$,$f\left(A^k\right)=f^k\left(A\right)$

若$A\sim B$，则$f\left(A\right)\sim f\left(B\right)$.

现在考虑f在E_{ij}上的效果,事实上$f\left(E_{ii}\right)=f\left(E_{ii}^2\right)=f^2\left(E_{ii}\right)$,

$E_{jj}\sim E_{ii}$,所以$f\left(E_{ii}\right)\sim f\left(E_{jj}\right)$,即全体$f\left(E_{ii}\right)$是两两相似的幂等矩阵.

$E_m=f\left(\sum_{i=1}^{n}E_{ii}\right)=\sum_{i=1}^{n}f\left(E_{ii}\right)$,注意幂等矩阵的际= 秩

$m=tr\left(E_m\right)=\sum_{i=1}^{n}tr\left[f\left(E_{ii}\right)\right]=ntr\left[f\left(E_{ii}\right)\right]=nr\left[f\left(E_{ii}\right)\right]$

故$n\mid m$.

则有如下经典结论：

函数$f_1,f_2,\cdots,f_m$线性无关的充要条件是，存在m个数x_i，使得

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \neq 0$$

证明：充分性：

若存在m个数x_i，使得$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \neq 0$,

那么设$\sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) = 0$，令$x = x_j, j = 1,2,\cdots,m$

构成关于c_i的齐次线性方程组，其系数矩阵恰好是$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix}$

因此函数$f_1,f_2,\cdots,f_m$线性无关

必要性：假定$f_1,f_2,\cdots,f_m$线性无关，不妨设定义域有大于等于m个不同的点

否则命题是显然的，$m=1$，显然命题成立，假设命题对小于等于$m-1$时成立，考虑m时，

现在对$f_1,f_2,\cdots,f_{m-1}$使用归纳假设，找好$x_1,x_2,\cdots x_{m-1}$，使得对应的行列式不为0

考虑$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \end{vmatrix}$按最后一排展开，$f_m(x)$系数不为0

因为$f_1,f_2,\cdots,f_m$线性无关，$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \end{vmatrix}$不恒等于0

故可以找到x_m，使得$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \neq 0$

习题：

(1): 确定全部线性映射 $\delta: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, 使得

$\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B), \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(2): 设 $f(A) = tr\left(AA^T\right), \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若 $\mathbb{R}$ 上的可逆矩阵 P 满足

$f\left(PAP^{-1}\right) = f(A), \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 证明：$\exists c \in \mathbb{R}$, 使得 $PP^T = cE_n$

上述两题核心思路就是作用于 E_{ij}, 确定其形状.

$\left(\text{丘赛真题}\right)$设$X \subset C\left[0,1\right]$是有限维子空间,

证明：X中的函数列逐点收敛蕴含着一致收敛.

想法：把函数列逐点收敛转化成系数的收敛, 从而一致收敛.

证明:

设X中的一组基$f_1, f_2, \cdots f_m$,我们设

$$f^{(k)}\left(x\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j^{(k)} f_j\left(x\right), \text{且} \lim_{k\to\infty} f^{(k)}\left(x\right) = f\left(x\right)$$

由上一结论,我们知道存在m个点, 使得$\begin{vmatrix} f_1\left(x_1\right) & f_2\left(x_1\right) & \cdots & f_m\left(x_1\right) \\ f_1\left(x_2\right) & f_2\left(x_2\right) & \cdots & f_m\left(x_2\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1\left(x_m\right) & f_2\left(x_m\right) & \cdots & f_m\left(x_m\right) \end{vmatrix} \neq 0$

现在令$x = x_j, j = 1, 2, \cdots, m$, 于是我们得到

$$\begin{pmatrix} f_1\left(x_1\right) & f_2\left(x_1\right) & \cdots & f_m\left(x_1\right) \\ f_1\left(x_2\right) & f_2\left(x_2\right) & \cdots & f_m\left(x_2\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1\left(x_m\right) & f_2\left(x_m\right) & \cdots & f_m\left(x_m\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_m^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(k)}\left(x_1\right) \\ f^{(k)}\left(x_2\right) \\ \vdots \\ f^{(k)}\left(x_m\right) \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ \vdots \\ c_m^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\left(x_1\right) & f_2\left(x_1\right) & \cdots & f_m\left(x_1\right) \\ f_1\left(x_2\right) & f_2\left(x_2\right) & \cdots & f_m\left(x_2\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1\left(x_m\right) & f_2\left(x_m\right) & \cdots & f_m\left(x_m\right) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f^{(k)}\left(x_1\right) \\ f^{(k)}\left(x_2\right) \\ \vdots \\ f^{(k)}\left(x_m\right) \end{pmatrix}$$

因此$\forall j = 1, 2, \cdots, m$, 我们知道, 存在$c_j$, 使得$\lim_{k\to\infty} c_j^{(k)} = c_j$

此时$\lim_{k\to\infty} f^{(k)}\left(x\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j f_j\left(x\right)$

$$\left|f^{(k)}\left(x\right) - f\left(x\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^{m}\left(c_j^{(k)} - c_j\right) f_j\left(x\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{m}\left|c_j^{(k)} - c_j\right| \cdot \left|f_j\left(x\right)\right|$$

$$\leq \sup_{x\in[0,1], j=1,2,\cdots,m} \left|f_j\left(x\right)\right| \cdot \sum_{j=1}^{m}\left|c_j^{(k)} - c_j\right| \to 0$$

显然, 这里的趋近不依赖于x, 我们完成了证明.