数学类(九)

$f(x)\in C^2(\mathbb{R}), f(x), f'(x), f''(x)>0$, 假设存在$a,b>0$, 有

$f''(x)\le af(x)+bf'(x)$, 求最小常数c, 使得$f'(x)\le cf(x)$

分析:

$$x^2-bx-a=0\Rightarrow x_1=\frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2}, x_2=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$$

证明:

取$x_1=\dfrac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2}<0, x_2=\dfrac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}>0$，显然有

$f''(x)-x_2f'(x)\le x_1\left[f'(x)-x_2f(x)\right]$, 令$g(x)=f'(x)-x_2f(x)$

$$g'(x)\le x_1g(x)\Rightarrow h(x)=\frac{g(x)}{e^{x_1x}}, h'(x)\le 0\Rightarrow h(x)\le \lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{e^{x_1x}}$$

f, f'都是递增有下界的, $\lim\limits_{x\to-\infty} f, f'$存在, 显然$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0$

$$h(x)\le \lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{e^{x_1x}}\le \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{e^{x_1x}}=0\Rightarrow g(x)\le 0\Rightarrow f'(x)\le x_2f(x)$$

取$f(x)=e^{x_2x}$，容易知道满足条件且$f'(x)=x_2f(x)$, 因此最小的$c=\dfrac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$

$f(x)$是$\mathbb{R}$上有上界或者下界的连续函数, 且存在正数a使得

$f(x)+a\int_{x-1}^{x}f(t)dt$为常数, 证明$f(x)$为常数.

经验性的: 解局部的微分方程来得到可能的构造函数是常用技巧.

证明:

不妨设$f(x)$有下界, 否则用$-f(x)$代替即可,

不妨设$\inf\limits_{y\in\mathbb{R}}f(x)=0$, 否则用$f(x)-\inf\limits_{y\in\mathbb{R}}f(y)$代替即可

$$\left[e^{ax}f(x)\right]'e^{-ax}-af(x-1)=f'(x)+af(x)-af(x-1)=0$$

$\left[e^{ax}f(x)\right]'=ae^{ax}f(x-1)\ge 0\Rightarrow e^{ax}f(x)$单调递增的函数.

$$C=f(x)+a\int_{x-1}^{x}f(t)e^{at}e^{-at}dt\le f(x)+af(x)e^{ax}\int_{x-1}^{x}e^{-at}dt$$

$$=f(x)+f(x)e^{ax}\int_{ax-a}^{ax}e^{-t}dt$$

$$=f(x)+f(x)\int_{ax-a}^{ax}e^{ax-t}dt=f(x)+f(x)\int_{0}^{a}e^{t}dt=e^{a}f(x)\Rightarrow f(x)\ge e^{-a}C$$

故当$C>0,\inf\limits_{y\in\mathbb{R}}f(x)\ge e^{-a}C>0$, 这是一个矛盾! 因此$C=0$

故$f(x)+a\int_{x-1}^{x}f(t)dt=0\Rightarrow f(x)\equiv 0$, 因此我们完成了证明.

设$f(x)\in C^1(\mathbb{R})$，满足

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)-f^4(x)=0$或者$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)\right]^2+f^3(x)=0$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

分析：

直观上对于$f'=0$的那些点都会有f趋于0, 也就是说f所有极值趋于0,

f夹在极值之间, 应该也有f趋于0.

证明：

若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$,则存在递增趋于$+\infty$的$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得$\left|f(x_n)\right|\geq \varepsilon_0>0$

不妨假设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中有无穷多项$f(x_n)\geq\varepsilon_0$,不妨仍然记为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,

设$N\geq 1$,使得$\left|f'(x)-f^4(x)\right|<\varepsilon_0^4$或者$\left|\left[f'(x)\right]^2+f^3(x)\right|<\varepsilon_0^3$

假如对任意$X>0$, $f(x)$在$[X,+\infty)$不单调,$\exists t_2>x_{n_0}>t_1>N$, 使得

$f'(t_1)=f'(t_2)=0$, 此时$\left|f(t_1)\right|,\left|f(t_2)\right|<\varepsilon_0$, 所以在$[t_1,t_2]$上,

$f(x)$取得在$[t_1,t_2]$上的最大值$f(x')\geq f(x_{n_0})\geq\varepsilon_0\Rightarrow f'(x')=0, x'\in(t_1,t_2)$

而$\left|f(x')\right|<\varepsilon_0$, 矛盾, 所以$\exists X>0$, $f(x)$在$[X,+\infty)$上单调.

当$f(x)$在$[X,+\infty)$单调, 对于$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)-f^4(x)=0$

如果$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=A^4\Rightarrow A=0$, 矛盾.

对于$\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)]^2+f^3(x)=0$

如果$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)]^2=A^3\Rightarrow A=0$, 矛盾

因此 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$

对于: $f'(x) - f^4(x) = o(1)$, 存在某个 $c > 0$, 存在 $X' > X$,

使得 $f'(x) - f^4(x) \geq -c$, $f^4(x) - c > 0, \forall x > X'$

$\dfrac{f'(x)}{f^4(x) - c} \geq 1, \int_{X'}^{x} \dfrac{f'(x)}{f^4(x) - c} dx \geq x - X'$, 于是

$\int_{f(X')}^{f(x)} \dfrac{1}{y^4 - c} dy \geq x - X'$, 于是当 $x \to +\infty$, 左边是一个数字, 矛盾!

对于: $\left[f'(x) \right]^2 + f^3(x) = o(1), \int_{X}^{x} \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{-f^3(x) + o(1)}} dx = x - X$

当 $x \to +\infty$, 左边是一个数字, 矛盾!

注意讨论 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 是必要的，否则你上述积分分母可能取到0

给定$n\in\mathbb{N}$,设$f\left(x\right)\in C^n[a,b)$,并且满足

$$f^{(n)}\left(x\right)\le c_n+c_{n-1}\left|f^{(n-1)}\left(x\right)\right|+c_{n-2}\left|f^{(n-2)}\left(x\right)\right|+...+c_0\left|f\left(x\right)\right|,x\in[a,b)$$

证明:$f\left(x\right)$在$[a,b)$有上界.

证明:

归纳法,当$n=0$显然,设小于n时成立,对于n得时候

不妨设$c_i>0$且全部相同都为$c,i=0,2,...,n$,否则调大系数即可.

注意到只有$x\to b^-$,$f\left(x\right)$可能无上界,因此我们可以假定$b-a$充分小

不妨设$a=0$,因为可以平移区间,考虑$x^n=c\left(1+x+x^2+...+x^{n-1}\right)$的正根$x_0>0$

令$g\left(x\right)=e^{-x_0x}f\left(x\right)$,显然$g\left(x\right)$是否有上下界是等价的,显然若$f,g$的某阶导数有

则f有上界(运用$taylor$中值定理,因为多项式肯定有上界)

$$f^{(k)}\left(x\right)=\sum_{j=0}^{k}C_k^jx_0^{k-j}e^{x_0x}g^{(j)}\left(x\right),k=0,1,2,...,n,$$代入不等式

$$\sum_{j=0}^{n}C_k^jx_0^{k-j}e^{x_0x}g^{(j)}\left(x\right)\le c+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}C_k^jx_0^{k-j}e^{x_0x}\left|g^{(j)}\left(x\right)\right|,$$即

$$\sum_{j=0}^{n}C_k^jx_0^{k-j}g^{(j)}\left(x\right)\le ce^{-x_0x}+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}C_k^jx_0^{k-j}\left|g^{(j)}\left(x\right)\right|,$$化简即得(系数放大为$c'>0$)

$$g^{(n)}\left(x\right)\le c'e^{-x_0x}+c'\sum_{k=1}^{n-1}\left|g^{(k)}\left(x\right)\right|+x_0^n\left[\left|g\left(x\right)\right|-g\left(x\right)\right]$$

如果$f\left(x\right)$有下界,$g\left(x\right)$有下界,此时$\left|g\left(x\right)\right|-g\left(x\right)$有上界.

因此$g^{(n)}\left(x\right)\le c''+c''\sum_{k=1}^{n-1}\left|g^{(k)}\left(x\right)\right|$(系数放大为$c''>0$)

由归纳假设,$g'\left(x\right)$有上界,因此$g\left(x\right)$有上界.

$$g^{(n)}(x)\le c'e^{-x_0x}+c'\sum_{k=1}^{n-1}\left|g^{(k)}(x)\right|+x_0^n\left[\left|g(x)\right|-g(x)\right]$$

当$g(x)$没有下界,也没有上界,则$f(x)$亦然,此时$f(x)$极具震荡,因此

存在$0<x_1<x_2<...<b$,使得$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=b, f^{(n-1)}(x_k)=0, k=1,2,...$

当$0\le x\le x_k$时,

$$f^{(n-1)}(x)\le f^{(n-1)}(0)+\sup_{x\in[0,x_k]}f^{(n)}(x)\cdot x\le\left|f^{(n-1)}(0)\right|+\sup_{x\in[0,x_k]}f^{(n)}(x)b$$

$$f^{(n-1)}(x)\ge f^{(n-1)}(x_k)+\sup_{x\in[0,x_k]}f^{(n)}(x)\cdot(x-x_k)$$

$$\ge\sup_{x\in[0,x_k]}f^{(n)}(x)(x-x_k)\ge-\left|f^{(n-1)}(0)\right|-\sup_{x\in[0,x_k]}f^{(n)}(x)b$$

于是$\left|f^{(n-1)}(x)\right|\le\left|f^{(n-1)}(0)\right|+\sup\limits_{x\in[0,x_k]}f^{(n)}(x)b$,对$j=0,1,2,...,n-2$

$$\left|f^{(j)}(x)\right|=\left|\sum_{i=j}^{n-2}\frac{f^{(i)}(0)x^{i-j}}{(i-j)!}+\frac{f^{(n-1)}(\theta)x^{n-1-j}}{(n-1-j)!}\right|\le\sum_{i=j}^{n-1}\frac{\left|f^{(i)}(0)\right|b^{i-j}}{(i-j)!}+\frac{\sup\limits_{x\in[0,x_k]}f^{(n)}(x)b^{n-j}}{(n-1-j)!}$$

因此对$x\in[0,x_k]$,我们有

$$f^{(n)}(x)\le c+c\sum_{j=0}^{n-1}\left|f^{(j)}(x)\right|$$

$$\le c+c\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{i=j}^{n-1}\frac{\left|f^{(i)}(0)\right|b^{i-j}}{(i-j)!}+\frac{\sup\limits_{x\in[0,x_k]}f^{(n)}(x)b^{n-j}}{(n-1-j)!}\right]$$

$$\le C+cb^n\left[\sum_{j=0}^{n-1`}\frac{b^{-j}}{(n-1-j)!}\right]\sup_{x\in[0,x_k]}f^{(n)}(x)$$

取b充分小,使得$cb^n\left[\sum\limits_{j=0}^{n-1`}\frac{b^{-j}}{(n-1-j)!}\right]<\frac{1}{2}$,

两边对x取上确界,有$\sup\limits_{x\in[0,x_k]}f^{(n)}(x)\le 2C$,于是$f^{(n)}(x)$有上界

和$f(x)$有上界矛盾!我们完成了证明.