数学类(26)

a_n是递减到0的正数列, 证明:$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$一致收敛的充分必要条件是$\lim_{n\to\infty} na_n =0$

证明:

必要性:

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$一致收敛,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin\frac{\pi x}{4n} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin\frac{\pi n}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2} na_{2n}, \text{因此}\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} \leq \lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n} = 0, \text{故}\lim_{n\to\infty} na_n = 0$$

充分性:

若$\lim_{n\to\infty} na_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} na_n \frac{\sin nx}{n}$是不能如此说明收敛的, 网上流传的解答是错的.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$是周期$2\pi$的奇函数, 所以只需对$x \in [0,\pi]$说明

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \sin kx\right| = \frac{\left|\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right] - \cos\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right]\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

记$S_{n,m} = \sum_{k=n}^{m} \sin kx$

对$x \in \left[\frac{\pi}{n},\pi\right]$, 由$abel$恒等式, 以及$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \sin(kx)\right| \leq \sum_{k=n}^{m-1}(a_k - a_{k+1})\left|S_{n,k}\right| + a_m\left|S_{n,m}\right|$$

$$\leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left[\sum_{k=n}^{m-1}(a_k - a_{k+1}) + a_m\right] = \frac{a_n}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{\pi a_n}{|x|} \leq na_n$$

对$x \in \left[0,\frac{\pi}{m}\right], \left|\sum_{k=n}^{m} a_k \sin(kx)\right| \leq |x|\sum_{k=n}^{m} ka_k \leq \frac{\pi\sum_{k=n}^{m} ka_k}{m}$

对$x\in\left[\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right],\frac{\pi}{l+1}\le x\le\frac{\pi}{l}\Rightarrow l=\left[\frac{\pi}{x}\right]$

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin(kx)\right|\le\left|\sum_{k=n}^{l}a_k\sin(kx)\right|+\left|\sum_{k=l+1}^{m}a_k\sin(kx)\right|$$

$$\le\frac{\pi\sum_{k=n}^{l}ka_k}{l}+(l+1)a_{l+1}$$

故$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin(kx)\right|\le\begin{cases}na_n,\pi\ge x\ge\frac{\pi}{n}\\ \frac{\pi\sum_{k=n}^{l}ka_k}{l}+(l+1)a_{l+1},\frac{\pi}{l+1}\le x\le\frac{\pi}{l},l=n,n+1,\cdots,m\\ \frac{\pi\sum_{k=n}^{m}ka_k}{m},0\le x\le\frac{\pi}{m}\end{cases}$

$\forall\varepsilon>0,$存在$N\ge1$，使得$\forall J\ge N,\frac{\sum_{k=1}^{J}ka_k}{J}\le\varepsilon,Ja_J\le\varepsilon$

从而当$m\ge n\ge J$时,$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin(kx)\right|\le C\varepsilon,C$是一个正常数,

因此$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin(kx)$一致收敛.

结论：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\le 2\sqrt{\pi}$$

证明：

对$x\in[0,\pi)$证明即可.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\le\sum_{k=1}^{q}x+\left|\sum_{k=q+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|$$

$$\le qx+\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left[\sum_{k=q+1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{n}\right]$$

$$=qx+\frac{1}{(q+1)\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\le qx+\frac{\pi}{(q+1)x}$$

取$q=\left[\frac{\sqrt{\pi}}{x}\right],qx+\frac{\pi}{(q+1)x}\le\sqrt{\pi}+\frac{\pi}{\sqrt{\pi}}=2\sqrt{\pi}$

证毕！

判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\left[n^{\alpha}\right]}}{n^{\beta}}$的收敛性

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散, 证明：$\forall x\in\mathbb{R}, \exists\{t_n\}\subset\{-1,1\}$, 使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n a_n=x$

证明：

$$t_1\text{随意}, \text{对}n\geq 2,\ \text{令}t_n=\begin{cases}1, \text{若}\sum\limits_{k=1}^{n-1} t_k a_k<x\\ -1, \text{若}\sum\limits_{k=1}^{n-1} t_k a_k\geq x\end{cases}$$

如果$\sum\limits_{n=1}^{m} t_n a_n<x, \forall m\geq 1$, 则$n$充分大时, $t_n=1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty$

这是一个矛盾, 如果$\sum\limits_{n=1}^{m} t_n a_n\geq x, \forall m\geq 1$, n充分大时, $t_n=-1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} -a_n=-\infty$

这还是一个矛盾！

设n_0=0, n_k是严格递增正整数列, 不妨设$t_{n_0+1}, t_2, \ldots, t_{n_1}, t_{n_1+1}, t_{n_2+1}, \ldots, t_{n_2}, \ldots$

$t_j=1, n_{2m-2}+1\leq j\leq n_{2m-1}, m=1,2,\cdots,$

$t_j=-1, n_{2m-1}+1\leq j\leq n_{2m}, m=1,2,\cdots$

即$\sum\limits_{k=1}^{n_{2m-1}} t_k a_k\geq x, \sum\limits_{k=1}^{n_{2m-1}-1} t_k a_k<x$, 又$t_{n_{2m-1}}=1$

$$\sum_{k=1}^{n_{2m-1}-1} t_k a_k+a_{n_{2m-1}}=\sum_{k=1}^{n_{2m-1}} t_k a_k\geq x\Rightarrow a_{n_{2m-1}}\geq x-\sum_{k=1}^{n_{2m-1}-1} t_k a_k\geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n_{2m-1}-1} t_k a_k=x$$

又$\sum\limits_{k=1}^{n_{2m}} t_k a_k<x, \sum\limits_{k=1}^{n_{2m}-1} t_k a_k\geq x$, 又$t_{n_{2m}}=-1$

$$\sum_{k=1}^{n_{2m}-1} t_k a_k-a_{n_{2m}}=\sum_{k=1}^{n_{2m}} t_k a_k<x$$

$$0\leq\sum_{k=1}^{n_{2m}-1} t_k a_k-x\leq a_{n_{2m}}\Rightarrow\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n_{2m}-1} t_k a_k=x$$

对于其余的j, j必然属于某个$n_u-1, n_{u+1}-1$之间

此时$\sum\limits_{k=1}^{j} t_k a_k$相比$\sum\limits_{k=1}^{n_u-1} t_k a_k$更靠近$x$轴, 因此$\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{j} t_k a_k=x$

为了便于理解,实际上不妨设意味着:

$$\sum_{k=1}^{n_{2m-2}+1} t_k a_k < \sum_{k=1}^{n_{2m-2}+2} t_k a_k < \cdots < \sum_{k=1}^{n_{2m-1}-1} t_k a_k < x \le \sum_{k=1}^{n_{2m-1}} t_k a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n_{2m-1}+1} t_k a_k > \sum_{k=1}^{n_{2m-1}+2} t_k a_k > \cdots > \sum_{k=1}^{n_{2m}-1} t_k a_k \ge x > \sum_{k=1}^{n_{2m}} t_k a_k$$

第三届数学类真题,

对任何$\alpha \in \mathbb{R}$,证明存在取值$\{-1,1\}$的数列$\{a_n\}$,满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\alpha$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{a_k}{n}}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a_k}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}$$

构造$a_{n+1}=\begin{cases}1,\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}<\alpha\\ -1,\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}\ge\alpha\end{cases}$

因此直接验证,就有$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}=\alpha$

类比上一题,自行书写一下步骤

结论：

设$a_n > 0, \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散, 证明$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$聚点$[0,1]$

分析：

看到聚点是区间,就应该联想到聚点为区间的一些充分条件

证明：

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 于是$\{S_{n+1}\} - \{S_n\} = S_{n+1} - S_n - ([S_{n+1}] - [S_n]) \le a_{n+1}$

如果我们证明了$\limsup_{n\to\infty}\{S_n\} = 1, \liminf_{n\to\infty}\{S_n\} = 0$, 那么

若$a \in (0,1)$, 不是$\{S_n\}$聚点, 那么$\exists \varepsilon > 0$, 使得$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$没有$\{S_n\}$的点

$\forall \varepsilon > 0$, 当n充分大, $\{S_{n+1}\} - \{S_n\} \le \varepsilon$

必然存在充分大的n_1, 使得$\{S_{n_1}\} \le a - \varepsilon, \{S_{n_1+1}\} \ge a + \varepsilon$

因此$2\varepsilon \le \{S_{n_1+1}\} - \{S_{n_1}\} \le \varepsilon$, 矛盾！

接下来证明$\limsup_{n\to\infty}\{S_n\} = 1$. 其中, $\liminf_{n\to\infty}\{S_n\} = 0$是类似的

若$\limsup_{n\to\infty}\{S_n\} < 1$, 即存在$N, \forall n \ge N, \{S_n\} \le C < 1, a_n < 1 - C$

此时

$[S_N] \le S_N \le S_{N+1} = S_N + a_{N+1} = [S_n] + \{S_N\} + a_{N+1} < [S_n] + 1$

即$[S_N] = [S_{N+1}]$

进一步, 迭代有$[S_{N+p}] = [S_N], \forall p \ge 1$, 这和$\lim_{p\to\infty}[S_{N+p}] = +\infty$矛盾！

因此其聚点是$[0,1]$.

例：数列$\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi i}{k}}$的聚点是单位圆周$S^1$.

$$x_{n+1}=\sin x_n, x_1=x>0, \text{计算}\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^3}{x}$$

$$a_n>0, \text{递增}, \text{证明}:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\text{收敛}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}\text{收敛此外}, \text{必要性证明可不需要}a_n\text{递增条件}$$