# 数学类(6)

$f(x)$是$\mathbb{R}$上递增的函数且满足$f(x+1)=f(x)+1$

设$x_{n+1}=f(x_n)$

证明:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$存在且与$x_1$无关

续证:

我们只需证明某个点处$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^n(x)}{n}$存在即可.

$\mathbb{N}=\{n\in\mathbb{Z}:n\geq 1\}$

如果$\forall x\in\mathbb{R},m\in\mathbb{N}$,都有$f^m(x)-x\notin\mathbb{Z}$,

故$\exists k_m(x)\in\mathbb{Z}$,使得

$k_m(x)<f^m(x)-x<k_m(x)+1$,下证$k_m(x)$与$x$无关.

若有某个$y$,不妨设$x<y$,使得

$f^m(y)-y<k_m(x)<f^m(x)-x$

注意：因为$f$缺乏连续性,所以介值定理不存在

我们期望找一个$z\in\mathbb{R}$,使得$f^m(z)-z=k_m(x)\in\mathbb{Z}$来导出矛盾

的目标失败了！，但是这里其实是一个经典竞赛题,

单调的时候有种类介值性！

回到原题：

记$z_0=\sup\{z\in[x,y]:f^m(z)-z>k_m(x)\}$

故$\exists z_n\in\{z\in[x,y]:f^m(z)-z>k_m(x)\}$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$

当$z>z_0$,$f^m(z)-z<k_m(x)$.

$f^m(z_n)-z_n>k_m(x)>f^m(z)-z$,令$z\to z_0^+,n\to\infty$

$f^m(z_0^-)-z_0\geq k_m(x)\geq f^m(z_0^+)-z_0$

因为递增,$f^m(z_0^+)\geq f^m(z_0^-)$自然成立, 因此

$f^m(z_0)-z_0=k_m(x)\in\mathbb{Z}$,故矛盾

上面的单调函数介值性的处理手法需要积累记忆.

综上, $k_m(x)$与$x$无关.

$k_m < f^m(x) - x < k_m + 1, \forall m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

令$x = f^{jm}(0), j = 0,1,2,...,$ 此时

$k_m < f^m\left(f^{jm}(0)\right) - f^{jm}(0) < k_m + 1$

故$k_m < f^{(j+1)m}(0) - f^{jm}(0) < k_m + 1$

$$nk_m < f^{nm}(0) = \sum_{j=0}^{n-1}\left[f^{(j+1)m}(0) - f^{jm}(0)\right] < n(k_m + 1)$$

故$nk_m < f^{nm}(0) < n(k_m + 1)$.接下来是经典竞赛题处理手法

由$\dfrac{k_m}{m} < \dfrac{f^{nm}(0)}{nm} < \dfrac{k_m + 1}{m}$,故$\dfrac{k_m}{m} < \dfrac{f^m(0)}{m} < \dfrac{k_m + 1}{m}$

故$\left|\dfrac{f^{nm}(0)}{nm} - \dfrac{f^m(0)}{m}\right| \le \dfrac{1}{m}$,有$m,n$轮换对称，可以有

$\left|\dfrac{f^{nm}(0)}{nm} - \dfrac{f^n(0)}{n}\right| \le \dfrac{1}{n}$,进一步利用绝对值不等式

$\left|\dfrac{f^m(0)}{m} - \dfrac{f^n(0)}{n}\right| \le \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} \Rightarrow$ 故$\left\{\dfrac{f^n(0)}{n}\right\}_{n\ge1}$ 是$cauchy$列

故完成了这个考研题的证明.

反向$stolz$和反向洛必达以及函数$stolz$

$f(x)\in C[0,+\infty)\cap C^{2}(0,+\infty),f''(x)>-\dfrac{C}{x^{2}}$

证明:$\lim\limits_{x\to0}xf'(x)=0$

分析：这就是反向$stolz$的连续版本,只是写法不一样.

总结：微分学方法和积分学方法可以相互转化,

但是导函数不一定存在可积性，所以微分学方法

其实处理的结果其实不如积分学方法强.

证明：

对$h>0$,

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\theta)}{2}h^{2}$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f''(\theta)}{2}h$$

$$f'(x)\le\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}+\frac{C}{2\theta^{2}}h\le\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}+\frac{C}{2(x+h)^{2}}h$$

令$h=\eta x,\eta>0$,

$$xf'(x)\le\frac{|f(x+\eta x)-f(x)|}{\eta}+\frac{C\eta}{2(1+\eta)^{2}}$$

$$\limsup_{x\to0^{+}}xf'(x)\le\frac{C\eta}{2(1+\eta)^{2}}$$

$$f(x-\eta x)=f(x)-f'(x)\eta x+\frac{f''(\theta)}{2}\eta^{2}x^{2}$$

$$\Rightarrow xf'(x)\ge-\frac{|f(x)-f(x-\eta x)|}{\eta}-\frac{C}{2}\eta$$

$$\liminf_{x\to0^{+}}xf'(x)\ge-\frac{C}{2}\eta$$

由$\eta$任意性,故$\lim\limits_{x\to0^{+}}xf'(x)=0$,我们完成了证明.

注意对比和离散版本的关系.

设$m>0, yg'(y)$是$[a,+\infty)$上连续递增函数, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(y)}{y^m}=A,$$

证明: $\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(y)}{y^{m-1}}=mA$

留个习题：既然离散版本和连续版本有着类似的操作手法

那么$na_n$单调是否是反向$stolz$的一个充分条件呢, 留作思考.

联想:

$$\int g'(y)dy=\int\frac{yg'(y)}{y}dy=xg'(x)\int\frac{1}{y}dy,$$ 要保证$\ln x$不出现

证明：

对$c>1$

$g(cx)-g(x)$

$$=\int_x^{cx}g'(y)dy=\int_x^{cx}\frac{yg'(y)}{y}dy\geq xg'(x)\int_x^{cx}\frac{1}{y}dy=xg'(x)\ln c$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(cx)}{x^m}=c^mA, \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^m}=A$$

故$\limsup_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{x^{m-1}}\leq\frac{1}{\ln c}\left(c^m-1\right)A$

令$c\to1^+$, 故$\limsup_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{x^{m-1}}\leq mA$

对$0<c<1$, 我们

$$\int_{cx}^{x}g'(y)dy=g(x)-g(cx)\leq xg'(x)\ln\frac{1}{c}$$

显然有$\liminf_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{x^{m-1}}\geq\frac{1-c^m}{\ln\frac{1}{c}}A$, 令$c\to1^-$

故$\liminf_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{x^{m-1}}\geq mA$, 综上$\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{x^{m-1}}=mA$

反向$stolz$:

如果对某个$C>0$,有$n\left(a_n-a_{n-1}\right)\geq -C, n\geq 2$且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}=a\in\mathbb{R},\text{证明}\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

分析：

不妨设$a=0$,否则用$a_k-a$代替$a$即可.

设$b_n=a_n-a_{n-1}, n\geq 2, b_1=1, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

如此改写并没有什么技术改进,

纯属是为了方便(我第一次看到这题解答时是如此做的)

唯一难点：想到把$a_n$用$S_n, S_{n+m}$表示出来,这里$m$待定

这个难点的解决办法是由连续版本想到的

证明:

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$，使得$\forall n\geq N$,都有$\left|S_n\right|\leq n\varepsilon$

注意到$S_{n+m}=S_n+ma_n+mb_{n+1}+\left(m-1\right)b_{n+2}+...+b_{n+m}$

$$a_n=\frac{S_{n+m}-S_n}{m}-\frac{mb_{n+1}+\left(m-1\right)b_{n+2}+...+b_{n+m}}{m}$$

$$\leq\frac{\left|S_{n+m}\right|+\left|S_n\right|}{m}+\frac{1}{m}\left[m\frac{C}{n+1}+\left(m-1\right)\frac{C}{n+2}+...+\frac{C}{n+m}\right]$$

故当$n\geq N$时,就有

$$a_n\leq\frac{2n+m}{m}\varepsilon+\frac{1}{m}\left[m\frac{C}{n}+\left(m-1\right)\frac{C}{n}+...+\frac{C}{n}\right]$$

$$\leq\frac{2n+m}{m}\varepsilon+\frac{C\left(m+1\right)}{2n}$$

取$m=\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]$,就有:

$$a_n\leq\frac{2n+\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}{\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}\varepsilon+\frac{C\left(\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]+1\right)}{2n}$$

$$\limsup_{n\to\infty}a_n\leq\frac{2+\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}\varepsilon+\frac{C\sqrt{\varepsilon}}{2}$$

另外一方面的不等号,不再仔细讲如何找$m$,我们直接给出证明:
(目的是给出一个在卷子上呈现的版本).

对$0<\varepsilon<1$

当$n\geq\dfrac{N}{1-\sqrt{\varepsilon}}>N$时,

$$有a_n=\frac{S_n-S_{n-\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}}{\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}+\frac{\left(\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]-1\right)b_n+\left(\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]-2\right)b_{n-1}+\ldots+b_{n-\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]+2}}{\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}$$

$$\geq-\frac{\left|S_n\right|+\left|S_{n-\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}\right|}{\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}-\frac{\left(\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]-1\right)\frac{C}{n}+\left(\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]-2\right)\frac{C}{n-1}+\ldots+\frac{C}{n-\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]+2}}{\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}$$

$$\geq-\frac{2n\varepsilon}{\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}+\varepsilon-\frac{\left(\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]-1\right)\frac{C}{n-\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}+\left(\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]-2\right)\frac{C}{n-\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}+\ldots+\frac{C}{n-\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}}{\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}$$

$$=-\frac{2n\varepsilon}{\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}+\varepsilon-\frac{C}{2}\frac{\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]-1}{n-\left[n\sqrt{\varepsilon}\right]}$$

$$\liminf_{n\to\infty}a_n\geq-2\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon-\frac{C}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\varepsilon}}$$

由$\varepsilon$任意性,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,故我们完成了证明.

函数$stolz$:

设$T>0, f(x), g(x)$内闭有界, 且$g(x+T)>g(x)$

若$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=A\in\mathbb{R}$，或者$+\infty,-\infty$, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

则$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，或者$+\infty,-\infty$

证明：

我们仅仅考虑$A\in\mathbb{R}$，其余情况类似,为了书写方便,

不妨设$A=0$,否则用$f-Ag$代替$f$即可,

不妨设$T=1$,否则用$f(Tx)$代替$f$即可

$\forall\varepsilon>0$,一定有某个$X\in\mathbb{N}$,使得:$\forall x>X$,

$$\left|f(x+1)-f(x)\right|<\varepsilon\left|g(x+1)-g(x)\right|$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]}[f(x-k+1)-f(x-k)]}{g(x)}\right|+\frac{|f(x-[x])|}{|g(x)|}$$

$$\le\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}[f(x-k+1)-f(x-k)]+\sum\limits_{k=[x]-X+1}^{[x]}[f(x-k+1)-f(x-k)]}{g(x)}\right|+\frac{|f(x-[x])|}{|g(x)|}$$

$$\le\frac{\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{[x]-X}[g(x-k+1)-g(x-k)]+\left|\sum\limits_{k=[x]-X+1}^{[x]}[f(x-k+1)-f(x-k)]\right|}{|g(x)|}+\frac{|f(x-[x])|}{|g(x)|}$$

$$=\frac{\varepsilon\left(g(x)-g(x-[x]+X)\right)+\left|f(x-[x]-X)-f(x-[x])\right|}{|g(x)|}+\frac{|f(x-[x])|}{|g(x)|}$$

故$\limsup\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\le\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varepsilon g(x)+\left|f(x-[x]-X)-f(x-[x])\right|}{|g(x)|}+\dfrac{|f(x-[x])|}{|g(x)|}=\varepsilon$

由$\varepsilon$任意性,故$\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=0$,故完成了证明.