数学类(12)

$\mathrm{fa\,var\,d}$不等式：

设$f(x)$是$[0,1]$上非负连续上凸函数,$p\geq 1$, 证明：

$$\left[\int_0^1 f^p(x)dx\right]\leq\frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^p$$

分析：探索两点的拉格朗日插值的积分余项,

$f(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0)+r(x), r(x)=\int_0^1 k(x,y)f''(y)dy$

不妨设$f(0)=f(1)=0$, 求$k(x,y)$, 使得$f(x)=\int_0^1 f''(y)k(x,y)dy$

实际上$k(x,y)=\begin{cases}y(x-1),0\leq y\leq x\leq 1\\ x(y-1),0\leq x\leq y\leq 1\end{cases}$, 是如下找到的

$f(x)=-\int_0^1\frac{d}{dy}k(x,y)f'(y)dy$, 要这样分部积分, 只能有$k(x,1)=0,k(x,0)=0$, 即

$\delta_x(f)=f(x)$, 期望$\frac{d^2}{dy^2}k(x,y)=\delta_x$,

熟知δ_x函数的原函数$H(x)=\begin{cases}-1+c,y\geq x\\ c,y<x\end{cases}$, $\forall c\in\mathbb{R}$，即$\int_0^1 H(y)f'(y)dx=-\delta_x(f)$

积分一次:$\begin{cases}(-1+c)y+c_2,y\geq x\\ cy+c_1,y<x\end{cases}$, 需要连续, 因此$k(x,y)=\begin{cases}(-1+c)y+c_2,y\geq x\\ cy-x+c_2,y<x\end{cases}$,

零边界条件$\Rightarrow k(x,y)=\begin{cases}(-1+x)y+c_2,y\geq x\\ xy-x+c_2,y<x\end{cases}$，特别取$c_2=0$即可.

证明：不妨设$f(x)\in C^2[0,1]$, 则$f''(x)\leq 0$, 不妨设$f(0)=f(1)=0$

注意到恒等式$f(x)=\int_0^1 k(x,y)f''(y)dy$,

$\|f(x)\|_p=\left\|\int_0^1 k(x,y)f''(y)dy\right\|_p\leq\int_0^1\|k(x,y)f''(y)\|_p dy=\int_0^1\|k(x,y)\|_p(-f''(y))dy$

$=\int_0^1\frac{y(1-y)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}(-f''(y))dy=\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1 y(1-y)(-f''(y))dy=\frac{2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1 f(y)dy$

因此$\|f(x)\|_p^p\leq\frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^p$, 这就是$\left[\int_0^1 f^p(x)dx\right]\leq\frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^p$

为什么可以不放设$f(0)=f(1)=0$?,对一般情形：

$$g(x)=f(x)-[f(1)-f(0)]x-f(0),\ g''=f''\le 0,\ g=\frac{f''(\theta)}{2}x(x-1)\ge 0$$

因此对g使用刚才的证明,$\|g\|_p\le\frac{2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1 g(y)dy$,注意到$\|f\|_p\le\|f-g\|_p+\|g\|_p$

所以需要证明$\|f-g\|_p\le\frac{2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1[f(y)-g(y)]dy$

$$f-g=kx+b\ge 0,\ \|kx+b\|_p=\left(\int_0^1(kx+b)^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

只需证明$\left(\int_0^1(kx+b)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1[kx+b]dy$

当$b=0$是显然的,当$b=1$,直接计算只需证明不等式

$\frac{(k+1)^p-1}{(p+1)k}\le\frac{2^p}{p+1}\left[\frac{1}{2}k+1\right]^p$,注意到$k\ge -1$($x=1$代入直线非负)

令$x=k+1$,即证$\frac{x^{p+1}-1}{x-1}\le(x+1)^p$,当$x<1$,

$$(x+1)^p=\sum_{k=0}^{\infty}C_p^k x^k\ge\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}\ge\frac{x^{p+1}-1}{x-1}$$

当$x>1$,$x=\frac{1}{y}$代入,即证$\frac{y^{p+1}-1}{y-1}\le(y+1)^p$,这已经证明了.

$\left(\text{上课提到延拓至}[a,b]\text{邻域内保持非负上凸是做不到的, 得更强的修正磨光}\right)$

能否不妨设为光滑呢?

取磨光子j, 把f保持上凸的延拓到$\mathbb{R}$, , 则

$$f_\delta\left(\frac{x+z}{2}\right)=\int_{\mathbb{R}}f(y)j_\delta\left(\frac{x+z}{2}-y\right)dy=\int_{\mathbb{R}}f\left(\frac{x+z}{2}-y\right)j_\delta(y)dy$$

$$=\int_{\mathbb{R}}f\left(\frac{x-y+z-y}{2}\right)j_\delta(y)dy\le\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-y)+f(z-y)}{2}j_\delta(y)dy=\frac{f_\delta(x)+f_\delta(z)}{2}$$

故$f_\delta(x)=\int_{\mathbb{R}}f(y)j_\delta(x-y)dy=\int_{-\delta}^{\delta}f(x-y)j_\delta(y)dy$是$[a,b]$上的光滑上凸函数,

对$0<\delta<\dfrac{1}{2}$, $f_\delta(x)$只能是$[\delta,1-\delta]$上的光滑非负上凸函数,

因此我们需要$[a,b]$上此不等式的版本, 事实上对$h(x)\in C^2[a,b]$非负上凸

考虑$h_2(x)=h(a+(b-a)x)\in C^2[0,1]$非负上凸, 于是有

$$\left[\int_0^1 h^p(a+(b-a)x)dx\right]\le\frac{2^p}{p+1}\left[\int_0^1 h(a+(b-a)x)dx\right]^p$$

因此$\displaystyle\int_a^b h^p(x)dx\le\frac{2^p}{p+1}\frac{1}{(b-a)^{p-1}}\left[\int_a^b h(x)dx\right]^p$

因此$\displaystyle\int_\delta^{1-\delta} f_\delta{}^p(x)dx\le\frac{2^p}{p+1}\frac{1}{(1-2\delta)^{p-1}}\left[\int_\delta^{1-\delta} f_\delta(x)dx\right]^p$

所以令$\delta\to0^+$, 以及磨光子的性质$\|f_\delta-f\|_p\to0$, $\|f_\delta-f\|_1\to0$

我们容易看到需要的结果.

$f(x)\in C^2[0,1], f''(x)$下凸, 证明：

$$\int_0^1 f(x)dx \le \frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]$$

证明：

不妨设$f(x)\in C^3[0,1]$,否则扩充f定义使得$f''(x)$仍然下凸

令$f_\delta(x)=\int_{\mathbb{R}} f(y)j_\delta(x-y)dy$，$f_\delta''(x)=\int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{d^2}{dx^2}j_\delta(x-y)dy$

$$=\int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{d^2}{dy^2}j_\delta(x-y)dy=\int_{\mathbb{R}} f''(y)j_\delta(x-y)dy=(f'')_\delta(x),$$

因此$f_\delta(x)$满足题目条件.

左边是$\|\bullet\|_1$范数逼近,右边是点态逼近,因此可以如此不妨设

设$f(x)=p(x)+\frac{f^{(3)}(c(x))}{3!}x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$,

$p(x)$是二次拉格朗日插值多项式,$f^{(3)}(c(x))$是x的连续函数

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 p(x)dx+\int_0^1\frac{f^{(3)}(c(x))}{3!}x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)dx$$

注意到$\int_0^1 p(x)dx=\frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]$, 所以

$$\int_0^1\frac{f^{(3)}(c(x))}{3!}x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)dx$$

$$=f^{(3)}(c(x_1))\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{3!}dx+f^{(3)}(c(x_2))\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{3!}dx$$

这里$c(x_1)\le c(x_2)$, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{3!}dx=-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{3!}dx$

因为f''下凸, 所以f'''递增, 故$f^{(3)}(c(x_1))\le f^{(3)}(c(x_2))$, 因此

$$\int_0^1 f(x)dx \le \frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]$$

设$f(x), xf(x)$是$[0,+\infty)$平方连续正值函数, 证明：

$$\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^4 \le \pi^2\int_0^\infty f^2(x)dx\int_0^\infty x^2f^2(x)dx$$

证明：

即证:$\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^2 \le \pi\sqrt{\int_0^\infty f^2(x)dx\int_0^\infty x^2f^2(x)dx}$

$$\left(\int_0^\infty f(x)g(x)\frac{1}{g(x)}dx\right)^2 \le \left(\int_0^\infty f^2(x)g^2(x)dx\right)\left(\int_0^\infty \frac{1}{g^2(x)}dx\right)$$

待定$g^2(x)=s+tx^2, \int_0^\infty \frac{1}{g^2(x)}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{st}}$

$$\int_0^\infty f^2(x)g^2(x)dx = s\int_0^\infty f^2(x)dx + t\int_0^\infty x^2f^2(x)dx$$

取$s=\int_0^\infty x^2f^2(x)dx, t=\int_0^\infty f^2(x)dx$, 就有

$$\left(s\int_0^\infty f^2(x)dx + t\int_0^\infty x^2f^2(x)dx\right)\frac{\pi}{2\sqrt{st}} = \pi\sqrt{\int_0^\infty f^2(x)dx\int_0^\infty x^2f^2(x)dx}$$

设$p>1, f(x)$在$(0,+\infty)$非负可积$, F(x)=\int_0^x f(y)dy$, 则有：

$$\int_0^\infty\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f^p(x)dx$$

证明:

$$\int_0^\infty\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx = \int_0^\infty\left(\frac{\int_0^x f(y)dy}{x}\right)^p dx = \int_0^\infty\left(\int_0^1 f(xy)dy\right)^p dx = \left\|\int_0^1 f(xy)dy\right\|_p^p$$

$$\le\left[\int_0^1\|f(xy)\|_p dy\right]^p = \left[\int_0^1\left(\int_0^\infty f^p(xy)dx\right)^{\frac{1}{p}}dy\right]^p = \left[\int_0^1 dy\left(\int_0^\infty f^p(xy)dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p$$

$$=\left[\int_0^1\frac{1}{y^{\frac{1}{p}}}dy\left(\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f^p(x)dx$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1, f, g$是$p, q$次绝对可积函数，证明：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy \le \frac{\pi\|f\|_p\|g\|_q}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

证明：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(yt)g(y)}{t+1}dtdy = \int_0^\infty\left[\int_0^\infty \frac{f(yt)g(y)}{t+1}dy\right]dt$$

$$\le \int_0^\infty\left[\int_0^\infty \frac{|f(yt)|^p}{(t+1)^p}dy\right]^{\frac{1}{p}}\|g\|_q\,dt = \int_0^\infty\left[\int_0^\infty \frac{|f(yt)|^p}{(t+1)^p}dy\right]^{\frac{1}{p}}dt\cdot\|g\|_q$$

$$= \int_0^\infty\left[\int_0^\infty \frac{|f(y)|^p}{t(t+1)^p}dy\right]^{\frac{1}{p}}dt\cdot\|g\|_q = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[p]{t}\,(t+1)}dt\cdot\|f\|_p\|g\|_q = \frac{\pi\|f\|_p\|g\|_q}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[p]{t}\,(t+1)}dt = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$（由$beta$函数和$gamma$函数的关系可得，积分计算课讲）

附录：磨光逼近

设$p \geq 1$,定义$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$,没定义的地方补充为0

则$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$,当$f(x) \in C[a,b]$

给定$j(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-x^2}}, |x| < 1 \\ 0, |x| \geq 1 \end{cases}$,$j_\delta(x) = \frac{1}{\delta} j\left(\frac{x}{\delta}\right)$,对$[a,b]$上的$p$次绝对可积函数$f(x)$

取$c > 0$,使得$\int_{\mathbb{R}} j(x) dx = 1$

定义$f_\delta(x) = f * j_\delta = \int_{\mathbb{R}} f(y) j_\delta(x-y) dy \in C^\infty(\mathbb{R})$,则:

$f_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-z) j_\delta(z) dz$

(1):$\|f_\delta\|_p \leq \|f\|_p$,$\lim_{\delta \to 0^+} \|f_\delta - f\|_p = 0$

(2):对$n \in \mathbb{N}$,$f(x) \in C^{(n)}[a,b]$,则$\lim_{\delta \to 0^+} \sum_{k=0}^{n} \left\|f_\delta^{(k)} - f^{(k)}\right\|_\infty = 0$

(3):$f(x)$在$x_0 \in [a,b]$连续,则有$\lim_{\delta \to 0^+} f_\delta(x_0) = f(x_0)$

(4):如果f有紧支撑(f不为0的点的闭包),则f的磨光也有

思考一下,这个支撑集最多扩大到什么程度呢？

注：磨光的性质根据自己需要现场研究,没必要记,因为是显然的.
更详细的结果可以参考evans的sobolev空间部分,非数学无需掌握
非数全部默认函数性态足够好即可.此外上述区间可以是正负无穷.
考试中光滑性一般来说会给够,所以本套技术纯应试角度可以不学！