数学类(23)

今天的主旨就一个,通过幂级数系数的阶,去估计幂级数的阶!

定理1:设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, x\in(-1,1)$,

$(1): b_n>0$, 且$a_n=o(b_n)$

$(2): \lim_{x\to1^-}g(x)=+\infty$

那么我们有$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, 即$f(x)=o(g(x)), x\to1^-$

证明:

$\forall\varepsilon>0$, 存在$N\geq1$,使得$\forall n\geq N$, 都有$|a_n|\leq\varepsilon b_n$, 于是就有

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right|\leq\left|\sum_{n=0}^{N}a_nx^n\right|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx^n\right|\leq\sum_{n=0}^{N}|a_n|x^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|x^n$$

$$\leq\sum_{n=0}^{N}|a_n|x^n+\varepsilon\sum_{n=N+1}^{\infty}b_nx^n\leq\sum_{n=0}^{N}|a_n|+\varepsilon g(x)$$,因此

$$\lim_{x\to1^-}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leq\lim_{x\to1^-}\frac{\sum_{n=0}^{N}|a_n|}{g(x)}+\varepsilon=\varepsilon$$,由ε任意性

我们知道$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, 因此我们完成了证明.

定理2:设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, x\in(-1,1)$,

$(1): b_n>0$, 且$a_n\sim b_n$

$(2): \lim_{x\to1^-}g(x)=+\infty$

那么我们有$f(x)\sim g(x), x\to1^-$

证明:

考虑$f-g=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n$, 由$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{b_n}=0$, 由定理1,于是

$$f-g=o(g), x\to1^-\Rightarrow f\sim g, x\to1^-$$

注：虽然假设比较特殊, 但其实可以转化到满足条件的情况,

例如：若是考虑$x \to z_0 \in \partial B_1$的阶, 我们可以选取幅角$\theta$, 使得$e^{i\theta} z_0 = 1$

然后在幂级数里面用$e^{-i\theta} x$代替x即可!

定理3：*Toeplitz*定理, 千万不要记住, 最好忘记

设二元序列a_{ij}满足$\lim_{n\to\infty} a_{nj} = 0$, 且$\sum_{j=1}^{\infty} \left| a_{nj} \right| \le c$, c不依赖n, $\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} = 1$.

对$\lim_{n\to\infty} x_n = x$, 有$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j = x$.

证明：

不妨设$x = 0$, 否则用$x_n - x$代替x

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \ge 1, \forall j \ge N$, 都有$\left| x_j \right| \le \varepsilon$, 于是

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j \right| \le \sum_{j=1}^{N} \left| a_{nj} x_j \right| + \sum_{j=N+1}^{\infty} \left| a_{nj} x_j \right| \le \sum_{j=1}^{N} \left| a_{nj} x_j \right| + \varepsilon \sum_{j=N+1}^{\infty} \left| a_{nj} \right|$$

$$\le \sum_{j=1}^{N} \left| a_{nj} x_j \right| + c\varepsilon$$

因此$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j \right| \le c\varepsilon$, 由$\varepsilon$任意性, 故$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j = 0$, 我们完成了证明.

定理4：设$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n, x\in\mathbb{R}$,

且满足$b_n>0$, 且$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=s<+\infty$

那么我们有 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=s$

证明：

对$x>0, \frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\frac{b_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}\right)$

令$x_n=\frac{a_n}{b_n}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=1, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|b_nx^n\right|}{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=1$

$0\le\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|b_nx^n\right|}{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}\le\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|b_nx^n\right|}{\sum_{k=0}^{n+1}b_kx^k}=0$, 所以由定理3, 我们有

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=s.$

注：虽然刚才的定理3是对j去说的, 但是忘记那个定理的原因就是因为条件随时可能都不一样, 比如本题, 是对$x\in\mathbb{R}$而言了, 却仍然是对的.

设$a_n \sim \ln n$,试确定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \to 1^-$的阶.

这种题就一个思想,把a_n替换为可以计算和式的等价量.

证:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$$

取$b_n \equiv 1$，$a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1, a_0 = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

故$\lim_{x \to 1^-} \frac{1-x}{\ln \frac{1}{1-x}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1$，因此$\lim_{x \to 1^-} \frac{1-x}{\ln \frac{1}{1-x}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$

$a_n \sim \frac{1}{\ln n}$，估计$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \to 1^-$的阶

分析：

注意$\frac{f}{g}$的阶完全可以通过$\frac{fh}{gh}$的阶来考虑

证明：

$$-\ln(1-x)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\cdot x^n$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\right)\cdot x^n$$

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k} \ge \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln(n-1)} \sim \frac{\ln(n-2)}{\ln(n-1)} \to 1$$

注意我们期望$\ln k$保持$\ln n$的极限信息，因此$\forall \varepsilon > 0$，

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k} = \sum_{2\le k\le \varepsilon n}\frac{1}{(n-k)\ln k} + \sum_{\varepsilon n\le k\le n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}$$

$$\le \frac{1}{(1-\varepsilon)n}\sum_{2\le k\le \varepsilon n}\frac{1}{\ln k} + \sum_{\varepsilon n\le k\le n-1}\frac{1}{(n-k)\ln(\varepsilon n)}$$

$$\le \frac{1}{\ln 2}\frac{\varepsilon n}{(1-\varepsilon)n} + \sum_{0\le k\le n-1}\frac{1}{(n-k)\ln(\varepsilon n)}$$

$$\sim \frac{1}{\ln 2}\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)} + \frac{\ln n}{\ln(\varepsilon n)} \to \frac{1}{\ln 2}\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)} + 1$$

由ε任意性，我们知道$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(n-k)\ln k}\right) = 1$

因此$-\ln(1-x)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\cdot x^n \sim \sum_{n=2}^{\infty}x^n \sim \frac{1}{1-x}$

所以$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\cdot x^n = 1$

习题：

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2x^2\right)}}dx$在$y \to 1^-$的阶是什么？

设$\sigma>0$,若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma}}$收敛,证明$\lim_{x\to1^-}(1-x)^{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=0$

分析：如果直接展开$\frac{1}{(1-x)^{\sigma}}$,用他的系数和a_n比较,得到的是

是否有$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma-1}}=0$,这显然是做不到的

这相当于$\sum a_n$收敛推$na_n\to0$,显然是做不到的,但是均值化可以证明：

因为$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma}}=0$,显然$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$x\in(-1,1)$收敛

又$(1-x)^{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=(1-x)^{\sigma+1}\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=(1-x)^{\sigma+1}\sum_{n=1}^{\infty}S_nx^n$

S_n是a_n的部分和

$$(1-x)^{-\sigma-1}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{-\sigma-1}^{k}(-1)^kx^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sigma+1)\cdots(\sigma+k)}{k!}x^k$$

我们熟知$\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\sigma}}{\sigma(\sigma+1)\cdots(\sigma+n)}=\Gamma(\sigma),\sigma>0$

事实上:

$$\frac{n!n^{\sigma}}{\sigma(\sigma+1)\cdots(\sigma+n)}=n^{\sigma}\frac{\Gamma(n)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(n+\sigma)}=n^{\sigma}\int_0^1x^{\sigma-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$=\int_0^n x^{\sigma-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx\to\int_0^{\infty}x^{\sigma-1}e^{-x}dx=\Gamma(\sigma),\sigma>0$$

因此$(1-x)^{\sigma+1}$幂级数系数的阶和n^{σ}相同,

要证$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=o\left(\frac{1}{(1-x)^{\sigma}}\right)$,只需说明$\sum_{n=1}^{\infty}S_nx^n=o\left(\frac{1}{(1-x)^{\sigma+1}}\right)$

只需说明$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\sigma}}=0$,现在有条件$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma}}$收敛

结论：若b_n递减于0,且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛,则$\lim_{n\to\infty}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)b_n=0$

证明：

$\forall \varepsilon>0$,存在$N\ge 1$，使得$\left|\sum_{n=N}^{N+p} a_n b_n\right|\le \varepsilon, \forall p\in \mathbb{N}$都成立

$$\sum_{k=N}^{n} a_k=\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{b_k}a_k b_k$$

$$=\left(\frac{1}{b_N}-\frac{1}{b_{N+1}}\right)a_N b_N+\left(\frac{1}{b_{N+1}}-\frac{1}{b_{N+2}}\right)\left(a_N b_N+a_{N+1}b_{N+1}\right)+\cdots+\frac{1}{b_n}\left(a_N b_N+\cdots+a_n b_n\right)$$

从而$\left|\sum_{k=N}^{n} a_k\right|\le \varepsilon\left|\left(\frac{1}{b_N}-\frac{1}{b_n}\right)\right|$

因此$\left|\sum_{k=N}^{n} a_k b_n\right|\le \varepsilon\left|\left(\frac{b_n}{b_N}-1\right)\right|$,因此

$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_n\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=N}^{n} a_k b_n\right|\le \lim_{n\to\infty}\varepsilon\left(1-\frac{b_n}{b_N}\right)=\varepsilon$,由$\varepsilon$任意性,我们完成了证明！

回到原题,取$b_n=\frac{1}{n^{\sigma}}$,就有$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\sigma}}=0$,因此我们完成了原题证明！

我们已经通过系数的阶估计和函数的阶,反之是否可以呢？

例如$\left(Hardy-littlewood\right)$：若$a_n>0$,且$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{1-x}, x\to 1^-$

是否有$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}=1$?

见下次课