数学类(2)

十三届数a补赛压轴题:

证明:

$$\lim_{a\to1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+1\right)}{n^a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+1\right)}{n},\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^a}=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}$$

分析:

本题的核心想法是:分部积分提升阶.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\cos\left(n+1\right)\right|}{n}$发散是问的难点,所以需要分部积分去提升阶

从而使得可以换序,因为这里是求和,所以我们需要离散的分部积分,

即$abel$恒等式:

$\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[(a_k-a_{k+1})\sum\limits_{j=1}^{k}b_j\right]+a_n\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$,证明的想法:强行裂项

即:$\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[(a_k-a_{k+1})\sum\limits_{j=1}^{k}b_j\right]+a_n\sum\limits_{j=1}^{n}b_j=\sum\limits_{k=1}^{n-1}[a_k\sum\limits_{j=1}^{k}b_j-a_{k+1}\sum\limits_{j=1}^{k}b_j]+a_n\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}[a_k\sum_{j=1}^{k}b_j-a_{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}b_j]+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}b_{k+1}+a_n\sum_{j=1}^{n}b_j$$

$$=a_1b_1-a_n\sum_{j=1}^{n}b_j+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}b_{k+1}+a_n\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

结论:$\sum\text{正余弦函数}\left(\text{等差数列}\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\text{公差}}{2}\right)\sum\text{正余弦函数}\left(\text{等差数列}\right)}{\sin\left(\dfrac{\text{公差}}{2}\right)}$

然后积化和差即可裂项求和.

$$\sum_{j=1}^{m}\cos\left(j+1\right)=\csc\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\cos\left(j+1\right)=\frac{1}{2}\csc\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[\sin\left(\frac{3}{2}+j\right)+\sin\left(-\frac{1}{2}-j\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\csc\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[\sin\left(\frac{3}{2}+j\right)-\sin\left(\frac{1}{2}+j\right)\right]=\frac{1}{2}\csc\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{3}{2}+m\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

故$\left|\sum\limits_{j=1}^{m}\cos\left(j+1\right)\right|\le\csc\frac{1}{2}$

证明:

$\forall a>0$,由$abel$变换,我们有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos(n+1)}{n^a}=\sum_{n=1}^{m}[\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)\sum_{j=1}^{n}\cos(j+1)]+\frac{\sum_{j=1}^{m}\cos(j+1)}{m^a}$$

令$m\to+\infty$,故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)}{n^a}=\sum_{n=1}^{\infty}[\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)\sum_{j=1}^{n}\cos(j+1)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)\sum_{j=1}^{n}\cos(j+1)|\le\csc\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)$$

不要把和求出来，目的是找控制函数,运用拉格朗日中值定理

$$=\csc\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{\theta^{a+1}}\le\csc\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^{a+1}}\le\csc\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}<\infty$$

故由控制收敛定理,我们有:

$$\lim_{a\to1^+}\sum_{n=1}^{\infty}[\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)\sum_{j=1}^{n}\cos(j+1)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}\right)\sum_{j=1}^{n}\cos(j+1)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)}{n}$$

故$\lim\limits_{a\to1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)}{n^a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+1)}{n}$

$$\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^a}=$$

分析:回顾刚才的证明,一次分部积分,提升1阶,

但是0提升1阶还是1,仍然无法找到控制级数,

所以再分部一次才能找到控制级数,

但是$\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sin k$其实是无界的,所以我们需要分成

可计算的部分和有界的部分从而完成计算.

所以为了计算方便,我们运用欧拉公式在复数下计算

证:

令$z=e^{i\theta},\theta\in(0,2\pi)$,真题的结果相当于$\theta=1$的虚部,计算

$$\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^a}=\lim_{a\to0^+}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{z^n}{n^a}=\lim_{a\to0^+}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1}[\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}]\sum_{j=1}^{n}z^j+\frac{\sum_{j=1}^{m}z^j}{m^a}$$

$$=\lim_{a\to0^+}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1}[\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}]\sum_{j=1}^{n}z^j+\frac{\frac{z-z^{m+1}}{1-z}}{m^a}=\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}]\sum_{j=1}^{n}z^j$$

$$=\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}]\frac{z-z^{n+1}}{1-z}$$

$$=\lim_{a\to0^+}\frac{z}{1-z}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}]-\lim_{a\to0^+}\frac{z}{1-z}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}]z^n$$

$$=\frac{z}{1-z}-\lim_{a\to0^+}\frac{z}{1-z}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}]z^n$$

$$=\frac{z}{1-z}-\lim_{a\to0^+}\frac{z}{1-z}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^a}-\frac{2}{(n+1)^a}+\frac{1}{(n+2)^a}]\sum_{j=1}^{n}z^j$$

类似的,知道

$\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^a}=\frac{z}{1-z}$,故$\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n^a}=\operatorname{Im}\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$

$\lim_{a\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^a}=\operatorname{Re}\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=-\frac{1}{2}$,特别的:

$\theta=1$,真题的答案$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}$,$\theta=\pi$,就是非数$(2)$最后一题

强调：laplace 是方法不是定理,当成定理学的绝对学不会.

$laplace$方法:计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}}{e^n}$$

结论:

$taylor$公式的积分余项:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(y)(x-y)^n dy$$

证:

$$e^n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^y(n-y)^n dy$$

$$故\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n-\frac{1}{n!}\int_0^n e^y(n-y)^n dy}{e^n}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!e^n}\int_0^n e^y(n-y)^n dy$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}\int_0^n e^y(n-y)^n dy=1-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2\pi n}}\int_0^1 e^{ny}(1-y)^n dy$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{ny}(1-y)^n dy=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1\left(e^y(1-y)\right)^n dy$$

$laplace$方法:

(1)问题集中在$e^y(1-y)$的最大值点附近,求导可知$e^y(1-y)$在$[0,1]$递减,

$$\sqrt{n}\int_\delta^1\left(e^y(1-y)\right)^n dy\le\sqrt{n}\left[e^\delta(1-\delta)\right]^n(1-\delta)=o\left(指数级别趋于0\right)$$

(2)对于其他的f,最大值点可能不唯一,那么怎样的最大值点是重要的呢?

$$1-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1\left(e^y(1-y)\right)^n dy=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\delta e^{n(y+\ln(1-y))}dy$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\delta e^{n(y+\ln(1-y))}dy=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\delta e^{-n\frac{y^2}{2}}dy$$

$$\overset{y=\sqrt{\frac{2}{n}}z}{=}1-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\delta e^{-n\frac{y^2}{2}}dy=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}\delta}e^{-z^2}dz=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-z^2}dz$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\left(y+\ln(1-y)\right)=-\frac{y^2}{2}+o\left(y^2\right)$$

本题严格书写:

由$y+\ln(1-y)=-\dfrac{y^2}{2}+o\left(y^2\right)$

$\forall\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得$\forall y\in\left[0,\delta\right]$有

$-\dfrac{y^2}{2}-\varepsilon y^2\le y+\ln(1-y)\le-\dfrac{y^2}{2}+\varepsilon y^2$,于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 e^{n\left(y+\ln(1-y)\right)}dy$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\delta} e^{n\left(y+\ln(1-y)\right)}dy+\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{\delta}^1 e^{n\left(y+\ln(1-y)\right)}dy$$

$$=I_1+I_2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|I_2\right|\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(e^{\delta}\left(1-\delta\right)\right)^n\left(1-\delta\right)=0$$

$$I_1\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\delta}e^{-n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)y^2}dy=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{n\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I_1\ge\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\delta}e^{-n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)y^2}dy=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

令$\varepsilon\to0^+$,故$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 e^{n\left(y+\ln(1-y)\right)}dy=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

第九届数学类的压轴题为什么是显然的?:

$f\left(x\right)\in C\left[0,1\right]$计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n f\left(x\right)dx}{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n dx}$$

$1-x^2+x^3$在$\left[0,\frac{2}{3}\right]$递减,$\left[\frac{2}{3},1\right]$递增

最大值点$\left(0,1\right)$和$\left(1,1\right)$，分子分母都是$laplace$方法型可以直接估阶：

$\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n f\left(x\right)dx$

问题集中在$\left(1-x^2+x^3\right)^n$最大值点附近,因为其余部分是指数级别趋于0

回忆上一题,$y+\ln\left(1-y\right)=-\frac{y^2}{2}+o(y^2)$诱导了根号$n$级别的阶.

对于本题我们计算一下$\ln(1-x^2+x^3)$在两个最大值点taylor展开：

$\ln(1-x^2+x^3)=-x^2+x^3....$

$\ln(1-x^2+x^3)=x-1+\frac{3}{2}\left(x-1\right)^2...$

一般的在最大值点0处如果有展开

$f\left(x\right)=ax^m+o\left(x^m\right)$,最后相当于计算的是

$$\int_0^\infty e^{-nx^m}dx\overset{x=n^{\frac{1}{m}}y^{\frac{1}{m}}}{=}C\frac{1}{n^{\frac{1}{m}}}\int_0^\infty e^{-y}y^{\frac{1}{m}-1}dy=\frac{C'}{n^{\frac{1}{m}}}$$

记这个最大值点的泰勒展开第一个非0项的次数m

$laplace$方法在最大值处诱导的等价量是$\frac{1}{n^{\frac{1}{m}}}$

m越大，具有越小的阶,所以应该构成主项.

一句话总结:$laplace$方法会把问题集中在具有最高m的最大值点处

显然的$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n f\left(x\right)dx=Cf\left(0\right)$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n dx=C$

故$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n f\left(x\right)dx}{\int_0^1\left(1-x^2+x^3\right)^n dx}=f\left(0\right)$

下次严格证明

想提前知道的同学可以学习一道一般性极限命题pdf.

或者直接自己理解上面的想法自己书写.