数学类(16)

本节课也是非数学类决赛线性代数基本结论总结

A,B,C,D是同阶方阵

若$AC=CA$，则$\left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = |AD-CB|$

证明：

当A可逆,$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$,因此

$$\left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}\right| = |A||D-CA^{-1}B| = |AD-ACA^{-1}B| = |AD-CB|$$

当A不可逆,取$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 0$,使得$A+\lambda_n E$可逆,$(A+\lambda_n E)C = C(A+\lambda_n E) \Rightarrow$

$\left|\begin{pmatrix} (A+\lambda_n E) & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = |(A+\lambda_n E)D-CB|$,左右都是$\lambda_n$多项式,因此连续,令$n\to\infty$

因此$\left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = |AD-CB|$

给定n阶矩阵A, A的特征多项式f满足$f(A)=0$,

定义：多项式$p(x)$满足, $p(A)=0$, 称为A的零化多项式

定义：次数最低的首1零化A的多项式$m(x)$称为A的极小多项式

定理：$m(x)\mid p(x)$, $p(x)$是A的零化多项式, $m(x)$是A的极小多项式

定理：$m(x), f(x)$有相同的零点(不计重数),

$f(x)$是A的特征多项式, $m(x)$是A的极小多项式.

定理：A可对角化等价于A的极小多项式分解为一次多项式的积.

例子: $A^2=A$, x^2-x是A的零化多项式, 极小多项式只可能有

$x, x-1, x^2-x$, 不管是哪一种都是一次多项式的积, 所以A一定可对角化.

定理: $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$的极小多项式=每个块极小多项式的最小公倍数.

$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$的特征多项式=每个块特征多项式的积.

定义：n阶矩阵$J_n(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}, a\in\mathbb{C}$称为$jordan$块.

以下习题以后可以直接使用，证明都是直接矩阵乘法计算.

习题1：计算$J_n^{\ 2}(0), J_n^{\ 3}(0), J_n^{\ 4}(0) \ldots, J_n^{\ n}(0)$感受他的漂亮

习题2：证明$J_n(a)$的特征多项式和极小多项式都是$(\lambda-a)^n$

习题3：设$g(x)$是多项式, 计算$g(J_n(a))$

习题4：设$AJ_n(a)=J_n(a)A$, 则存在多项式$p(x), A=p(J_n(a))$

(相对麻烦一点)习题5：求$J_n(a)X=XJ_m(a)$全部$m\times n$解X.

习题6：计算$J_n(a)$的伴随矩阵，可逆时计算出其逆矩阵, 并计算出转置.

在复数域上计算矩阵A的jordan(相似标准型)

定理：给定n阶复矩阵A，存在若干$jordan$块组成的矩阵, 使得A与之相似,
且这些$jordan$块除去排列次数外是唯一的.

定理：相同特征值的$jordan$块的块数是该特征值的几何重数, 特征值在对角线出

准确的$jordan$型确定见丘维声高等代数下册341页推论1，给出了每个特征值各
它由矩阵的秩刻画, 对于低阶的情况, 往往可以直接确定而不用去如此计算.

例子：

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix}$，特征多项式$(x-1)(x-3)^2$, 属于3的无关特征向量是1个.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

几何重数$\le$代数重数(从$jordan$来看, 这个结果是显然).

第十届决赛真题:

A是n阶方阵,若$A^2=0, r(A)=r, 1\le r<\dfrac{n}{2}$，证明：$A\sim\begin{pmatrix}0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$是$n$阶矩阵

证明：

$Ax=0$的解空间维数是$n-r$,因此几何重数$n-r$,

0特征值对应的$jordan$块恰好$n-r$个

$$A^2=0\Rightarrow A\text{特征值全为}0\Rightarrow A\sim\begin{pmatrix}J_1(0) & & & \\ & J_2(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n-r}(0)\end{pmatrix}$$

$A^2=0\Rightarrow A$的$jordan$块全是2阶或者1阶的(先完成要求的$jordan$块计算)

假设s个1阶,t个2阶,$s+t=n-r, 2t+s=n\Rightarrow t=r, s=n-2r>0$

所以满足$A^2=0, r(A)=r, 1\le r<\dfrac{n}{2}$的矩阵的$jordan$标准型

$\begin{pmatrix}0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2=0, r\begin{pmatrix}0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=r$, 所以$\begin{pmatrix}0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$也具有上述的$jordan$标准型.

因此$A\sim\begin{pmatrix}0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

结论：矩阵的相似不随域扩张而改变.
证明：
做为非数的应用, 我们设A,B都是实矩阵, 一般数域非数不必掌握.
若存在复可逆矩阵$P+iQ$,使得$\left(P+iQ\right)^{-1}A\left(P+iQ\right)=B$
$A\left(P+iQ\right)=\left(P+iQ\right)B\Rightarrow AP=PB, AQ=QB, P, Q$实矩阵
考虑$f\left(\lambda\right)=\left|P+\lambda Q\right|, f\left(i\right)\neq 0$是$n$次非0多项式, 因此存在$\lambda_0\in\mathbb{R}$
$f\left(\lambda_0\right)\neq 0$,此时$A\left(P+\lambda_0 Q\right)=\left(P+\lambda_0 Q\right)B\Rightarrow P+\lambda_0 Q$是我们需要的实过渡矩阵
涉及到需要在一些更大的域上考虑的问题,可以思考一下如果硬做
是不是一个线性方程组的解的问题, 线性方程组解的情况往往和域无关
这样如果在更大的域成立, 在本来的域也对.

证明：
结论:
设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则$A^*$全部特征值:
上述n个特征值任取$n-1$的积的全体
证明：不妨设A为$jordan$矩阵$\left(A^*\text{是}A\text{的多项式, 所以可以不妨设}\right)$

$$A=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}, A^*=\begin{pmatrix} J_1^* & & & \\ & J_2^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^* \end{pmatrix}$$

只需要针对具有的$jordan$矩阵J，计算出J_1^*即可.

结论：
设A是n阶矩阵，则$r\left(A^n\right)=r\left(A^{n+1}\right)$
方法1：$r\left(A^{n+1}\right)\leq r\left(A^n\right)\leq\cdots\leq r\left(A^2\right)\leq r\left(A\right)\leq n$
上面有$n+1$个不等号, 且每一项都是正整数, 故必有$1\leq s\leq n+1$
$r\left(A^s\right)=r\left(A^{s+1}\right)$,若$s=n$,则已经证明,若$s<n, A^s x=0$和$A^{s+1}x=0$同解.
对$t\geq 1, A^{s+t}x=0\Rightarrow A^{s+1}A^{t-1}x=0\Rightarrow A^s A^{t-1}x=0\Rightarrow A^{s+t-1}x=0$
又$A^{s+t-1}x=0\Rightarrow A^{s+t}x=0$，因此$A^{s+t}x=0$和$A^{s+t-1}x=0$同解
取$t=n-s+1$即可

方法2:

从$jordan$来看这个命题其实是显然的, 正是因为命题大多可标准型化, 从而直接

所以线性代数很难有非平凡的问题.

假设$A\sim\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}$, 对于可逆块$J$，无论怎么次方都是可逆的, 对于不可逆的

每次次方都会导致每个块提供的秩少1, 所以A在不断次方的过程中，秩在减少，

块变成1阶块为止。n次方之后肯定都变成1阶块了, 所以证毕!

结论：设A是$m\times n$实矩阵, 则$r\left(A^TA\right)=r\left(AA^T\right)=r\left(A\right)=r\left(A^T\right)$

类似的对共轭转置有复数版本

证明：$Ax=0\Rightarrow A^TAx=0, A^TAx=0\Rightarrow x^TA^TAx=0\Rightarrow\left(Ax\right)^T\left(Ax\right)=0\Rightarrow Ax=0$

因此$Ax=0$，$A^TAx=0$同解, 所以$r\left(A^TA\right)=r\left(A\right)$, 另外的等式显然

圆盘定理$\left(\text{包含对角占优,故略之}\right)$

n阶复矩阵$\left(a_{ij}\right)$特征值一定在某个$\left|z-a_{ii}\right| \le \sum_{j\ne i}\left|a_{ij}\right|$

证明：

$$
\text{设}Ax=\lambda x, x\ne 0,\text{即}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=\lambda x_i \Rightarrow
$$

$\left(\lambda-a_{ii}\right)x_i=\sum_{j\ne i}^{n} a_{ij}x_j$,取某个$x_i$，使得$\left|x_i\right|=\max_{1\le j\le n}\left|x_j\right|>0$

$$
\left|\left(\lambda-a_{ii}\right)x_i\right|=\left|\sum_{j\ne i}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \sum_{j\ne i}^{n}\left|a_{ij}x_j\right| \Rightarrow \left|\left(\lambda-a_{ii}\right)\right| \le \sum_{j\ne i}^{n}\left|a_{ij}\right|\frac{\left|x_j\right|}{\left|x_i\right|} \le \sum_{j\ne i}^{n}\left|a_{ij}\right|
$$

第十届数学类预赛真题:

设A是实方阵,$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a>0, \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|+\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ji}\right|<4a$,求$f=x^{T}Ax$的规范型

解：$f=x^{T}Ax=f=x^{T}\dfrac{A^{T}+A}{2}x$，由圆盘定理,$\dfrac{A^{T}+A}{2}$的特征值$z$满足

$$
\left|z-a\right|=\left|z-\frac{a_{ii}+a_{ii}}{2}\right| \le \sum_{j\ne i}\left|\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right| \le \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|+\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ji}\right|-2\left|a_{ii}\right|\right]<a
$$

因此$z>0$,所以f正定,因此f的规范型是$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$

与一切可逆矩阵可交换的矩阵只能是数量矩阵

$$
\text{证明：取}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{pmatrix}\text{直接矩阵乘法计算即可.}
$$

设A实对称, 则$\lambda_{\min}(A) \le \dfrac{x^T Ax}{x^T x} \le \lambda_{\max}(A)$

证明：看到实对称, 往往直接不妨设对角矩阵.

设T为正交矩阵,$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

换元$x = Ty$, $\dfrac{x^T Ax}{x^T x} = \dfrac{y^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} y}{y^T y} = \dfrac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$

$$\lambda_{\min}(A)\frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} \le \frac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} \le \lambda_{\max}(A)\frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

因此$\lambda_{\min}(A) \le \dfrac{x^T Ax}{x^T x} \le \lambda_{\max}(A)$且等号成立.

显然从证明可以看到, 设A, B是实对称的, 有如下特征值范围估计

则有$A + B$特征值$\in \left[\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(B), \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B)\right]$

需要自己补充完成结论证明

第五届决赛: 设A, B是两个正定矩阵, 证明AB正定的充要条件是$AB = BA$.

本题之后会会讲一般的版本, 省略.

第六届决赛：

A_1,A_2,B_1,B_2是n阶矩阵,A_2，B_2可逆, 证明：

存在可逆矩阵P,Q使得$PA_iQ=B_i,i=1,2$成立的充分必要条件是

$A_1A_2^{-1}\sim B_1B_2^{-1}$

证明：

本题是矩阵偶理论的一个简单的充要条件.

充分性：设$P^{-1}A_1A_2^{-1}P=B_1B_2^{-1}$，有$P^{-1}A_1A_2^{-1}PB_2=B_1$,

又$P^{-1}A_2A_2^{-1}PB_2=B_2$,充分性得证.

必要性：

设$PA_iQ=B_i,i=1,2$

$B_1B_2^{-1}=PA_1Q\left(PA_2Q\right)^{-1}=PA_1A_2^{-1}P^{-1}\Rightarrow A_1A_2^{-1}\sim B_1B_2^{-1}$

第八届决赛：

设n阶矩阵A,B满足$AB=A+B$,若存在正整数k,使得$A^k=0$, 证明：

$|B+2017A|=|B|$

证明：

$AB=A+B\Rightarrow AB=BA$(记住),

事实上,$(A-E)(B-E)=E\Rightarrow(B-E)(A-E)=E\Rightarrow BA=A+B$

故证明了结论

$A^k=0\Rightarrow A$特征值是0,

最自然的,直接设标准型,本题涉及这样一个结论(之后证明)

$AB=BA$,则A,B可以同时相似上三角化.

对于本题,不妨设A,B上三角，所以$B+2017A$也是上三角矩阵

A的对角线是0,$B+2017A$的对角线就是B的对角线,

因此$|B+2017A|=|B|$.

第十二届决赛：

设A是n阶实对称矩阵，证明：

(1): 存在实对称矩阵B, $AB = BA, B^{2021} = A$

(2): 存在实多项式p, $B = p(A)$

(3): 满足上述条件的B唯一.

证明：

(1)：不妨设A为对角矩阵$($考试中需要说明为什么不妨设$)$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{取} B = \begin{pmatrix} \sqrt[2021]{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt[2021]{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt[2021]{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(2): 取p为多项式, 使得$p(\lambda_i) = \sqrt[2021]{\lambda_i}, i = 1, 2, \cdots, n$, 由拉格朗日插值, p 显然存在.

此时$B = p(A)$

(3):

若$C^{2021} = A, C = p_2(A)$

因为A对角化的过程, 则B, C必然也对角化了, 所以显然$B = C$