数学类(28)

结论：

设$\mathbb{C}$上的矩阵A是$m\times n$矩阵,B是$n\times m$矩阵,则AB和BA有完全一样的非$0\cdot jordan$块

证明：

设P是m阶复可逆矩阵, 设Q是n阶复可逆矩阵, 考虑

$PAQQ^{-1}BP^{-1}, Q^{-1}BP^{-1}PAQ$,所以我们可以不妨设

$$A=\begin{pmatrix} E_r & 0' \\ 0'' & 0''' \end{pmatrix},\text{对应分块}B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}$$

注意到AB,BA的所有非0特征值都集中在B_1上, 所以非0特征值完全一致.

设$\lambda\neq 0$，是AB,BA的特征值,那么有

回忆课本结果,

矩阵C属于特征值λ的$jordan$块唯一的被秩$r\left(\lambda E-C\right)^k, k\geq 0$所决定

$$\left(\lambda E-AB\right)^k=\begin{pmatrix} \left(\lambda E-B_1\right)^k & D \\ 0 & \lambda^k E \end{pmatrix},\left(\lambda E-BA\right)^k=\begin{pmatrix} \left(\lambda E-B_1\right)^k & 0 \\ D' & \lambda^k E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\lambda E-B_1\right)^k & D \\ 0 & \lambda^k E \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \left(\lambda E-B_1\right)^k & 0 \\ 0 & \lambda^k E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\lambda E-B_1\right)^k & 0 \\ D' & \lambda^k E \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \left(\lambda E-B_1\right)^k & 0 \\ 0 & \lambda^k E \end{pmatrix}$$

因此$r\left(\lambda E-AB\right)^k=r\left(\lambda E-BA\right)^k$,所以我们完成了证明.

习题：采用类似的想法,证明第八届数学类决赛低年级组的高等代数问题！

推论：

如果A,B都是n阶复矩阵，那么$AB\sim BA$的充要条件是

$r\left(AB\right)^{i}=r\left(BA\right)^{i},\forall i=1,2,\cdots,n-1$

证明：

直接写出$jordan$之后乘法计算知是显然的

真题：

已知$AB=\begin{pmatrix}8&0&-4\\-\dfrac{3}{2}&9&-6\\-2&0&1\end{pmatrix}$, A:3×2矩阵, B:2×3矩阵，求BA

$AB\sim diag(0,9,9)\Rightarrow BA\sim diag\left(9,9\right)=9E\Rightarrow BA=9E$

结论：

实正规矩阵的正交相似标准型

回忆教材

在$\mathbb{C}$上矩阵A, 如果满足$AA^{*}=A^{*}A$, 称A复正规

复正规矩阵A是酉相似对角化的充分必要条件.

在$\mathbb{R}$上矩阵A, 如果满足$AA^{T}=A^{T}A$, 称A实正规

实正规矩阵A是正交相似标准型如下：

设A特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,a_1\pm ib_1,a_2\pm ib_2,\cdots,a_t\pm ib_t$

其中所有$\lambda_j,a_j,b_j\in\mathbb{R}$, 并且$b_j\neq 0$, 则标准型为

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\lambda_2&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&\begin{pmatrix}a_1&-b_1\\b_1&a_1\end{pmatrix}&&\\&&&&\begin{pmatrix}a_2&-b_2\\b_2&a_2\end{pmatrix}&\\&&&&&\ddots\end{pmatrix}$$

使用归纳法证明这个问题.

当$n=1$时，没什么好证的，$n=2$时其实证明方法蕴含在$n>2$的时候的证明中.
设命题对于$\leq n-1$的所有实正规矩阵成立，现在
考虑n阶实正规矩阵A.
第一种情况：
若A有特征值$\lambda\in\mathbb{R}$，取对应λ的单位实特征向量α
扩充为$\mathbb{R}^n$的标准正交基，
在这组基下(正交基下切换矩阵表示，所以是正交相似的)

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & C\\ 0 & H\end{pmatrix},A^TA=AA^T$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\lambda^2 & \lambda C\\ \lambda C^T & C^TC+H^TH\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+CC^T & CH^T\\ HC^T & HH^T\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow CC^T=0\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}^n,x^TCC^Tx=0\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}^n,\left(C^Tx\right)^TC^Tx=0$$

$$\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}^n,C^Tx=0\Rightarrow C=0\Rightarrow H^TH=HH^T\Rightarrow H\text{是}n-1\text{阶实正规矩阵.}$$

运用归纳假设，即知A正交相似上述的标准型.
第二种情况：
若A有特征值$a\pm bi\in\mathbb{C},a,b\in\mathbb{R},b\neq0,$
设$A(\beta+\eta i)=(a+bi)(\beta+\eta i),\beta,\eta\in\mathbb{R}^n$

于是就有$\begin{cases}A\beta=a\beta-b\eta\\ A\eta=a\eta+b\beta\end{cases}\Rightarrow A(\beta,\eta)=(\beta,\eta)\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$

这自然诱使我们想到β, η是标准正交的.

引理：若A实正规，λ是A的特征值，则$\bar{\lambda}$是A^T的特征值.

证明：设$Aa=\lambda a\Leftrightarrow(A-\lambda E)a=0\Leftrightarrow a^*\left(A^T-\bar{\lambda}E\right)(A-\lambda E)a=0$

$$\Leftrightarrow a^*(A-\lambda E)\left(A^T-\bar{\lambda}E\right)a=0\Leftrightarrow\left(A^T-\bar{\lambda}E\right)a=0$$

$$\Leftrightarrow A^Ta=\bar{\lambda}a$$

回到原题

由引理, $A^T\left(\beta+\eta i\right)=\left(a-bi\right)\left(\beta+\eta i\right)$

$$\begin{cases}A\beta=a\beta-b\eta\\A\eta=a\eta+b\beta\end{cases},\begin{cases}A^T\beta=a\beta+b\eta\\A^T\eta=a\eta-b\beta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta^TA\beta=a\beta^T\beta-b\beta^T\eta\\\beta^TA^T\beta=a\beta^T\beta+b\beta^T\eta\end{cases}\Rightarrow a\beta^T\beta-b\beta^T\eta=a\beta^T\beta+b\eta^T\beta$$

$$\Rightarrow\beta^T\eta+\eta^T\beta=0\Rightarrow\beta^T\eta=\eta^T\beta=0$$

以及

$$\Rightarrow\begin{cases}\eta^TA^T\beta=a\eta^T\beta+b\eta^T\eta\\\beta^TA\eta=a\beta^T\eta+b\beta^T\beta\end{cases}\Rightarrow\eta^T\eta=\beta^T\beta$$

因此想要的β,η是标准正交的.

不妨设β, η是单位向量, 将其扩充到全空间的标准正交基

此时A在此基下矩阵形如$\begin{pmatrix}a&-b&C_1\\b&a&C_2\\0&0&H\end{pmatrix}$

类似一个实特征值的情形, 我们知$C_1=0,C_2=0,H$实正规，由归纳假设即证

应用:

设A是可逆实反对称矩阵, 证明A的秩是偶数且, $|A|>0$.

证明：因为A是实正规的, 以及A的特征值是0或纯虚数, 我们就有

$$A\sim\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-b_1\\b_1&0\end{pmatrix}&&\\&\ddots&\\&&\begin{pmatrix}0&-b_s\\b_s&0\end{pmatrix}\end{pmatrix},b_i\neq0,i=1,2\cdots,s$$

于是我们完成了证明.

结论：
实对称矩阵的同时合同对角化.
回忆：
一个正定矩阵A和一个实对称矩阵B可以同时合同对角化.
证明也很简单，不妨设$A=E$,然后取T，使得$T^{-1}BT=$ 对角矩阵.
$T^{-1}ET=T$,因此我们完成了证明.

两个半正定矩阵可以同时合同对角化.
辅助结论：设A是半正定矩阵,如果A的(i,i)元为0,则所在行列全为0.
证明：
不妨设为左上角$(1,1)$元(否则可以同时交换行列到左上角).

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \Rightarrow 0\cdot a_{22}-a_{12}^2\geq 0 \Rightarrow a_{12},a_{21}=0$$

类似的知第一行第一列全为0.
现在来证明结论：
$A+B$是n阶半正定,存在实可逆矩阵C,使得

$$C^T(A+B)C=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=C^TAC+C^TBC$$

而C^TAC,C^TBC都是半正定的,且对角元非负.
因此C^TAC,C^TBC后$n-r$个对角元都是0,从而结合辅助结论

$$C^TAC=\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},C^TBC=\begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},A'+B'=E_r$$

取r阶正交矩阵T',使得$(T')^{-1}B'T=\Lambda$为对角矩阵

取$D=\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,令$P=DC$，直接验证就有

P^TAP,P^TBP是对角的.

复数域上矩阵A相似于对角线为全为0的矩阵充分必要条件是$tr\left(A\right)=0$

证明：

必要性显然

充分性：

若A有一个对角元为0,交换行列使得恰为左上角,设

$A=\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \eta^{T} & A' \end{pmatrix}$，$tr\left(A\right)=0\Rightarrow tr\left(A'\right)=0$,归纳即知存在可逆的$P$,使得

$P^{-1}A'P$对角线全为0,所以取$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$,直接计算就有$C^{-1}AC$对角线全为0.

如果A的对角线没有0,我们强行初等变换把对角线搞出0,

我们假设某个非对角元a_{ij}不为0,则$-\dfrac{a_{ii}}{a_{ij}}$倍j列加到第i列,再同时初等变换

使得是相似变换，此时$a_{ii}=0$.

我们假设所有非对角元a_{ij}都为0且对角线都不为0,把第一列加到第二列,

再同时初等变换使得是相似变换，

此时得到的矩阵有非对角元不为0,因此回到了上述的情况.

我们完成了证明.