数学类(21)

设V是有限维线性空间, $A \in Hom(V,V)$

$B : V^* \to V^*, g \to goA$

证明：$f, Bf, B^2 f, \cdots, B^{n-1} f$构成$V^*$的基

$\Leftrightarrow$ A的任一非0不变子空间都不是$\ker f$子空间

证明：

$$f, Bf, B^2 f, \cdots, B^{n-1} f \text{构成} V^* \text{的基} \Leftrightarrow \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker B^k f = \{0\}$$

$$x \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker B^k f \Leftrightarrow \forall i = 0,1,2,\cdots,n-1, \text{有} f\left(A^i x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 0,1,2,\cdots,n-1, A^i x \in \ker f \Leftrightarrow \forall i \ge 0, A^i x \in \ker f$$

$$\Leftrightarrow span\left\langle x, Ax, A^2 x, A^3 x, \cdots \right\rangle \subset \ker f \Leftrightarrow \text{包含} x \text{的} A \text{的最小不变子空间} \subset \ker f$$

积累想法：$span\left\langle x, Ax, A^2 x, A^3 x, \cdots \right\rangle$是包含$x$的$A$的最小不变子空间.

故$\bigcap_{k=0}^{n-1} \ker B^k f = \{0\} \Leftrightarrow$ 含于$\ker f$的不变子空间只能是0

$\Leftrightarrow$ A的任一非0不变子空间都不是$\ker f$子空间

一族两两可交换奇数阶实矩阵必有公共特征向量.

证明：

设这些矩阵的一个极大无关组$\left(在M_k\left(\mathbb{R}\right)\right)$为$A_1, A_2, \cdots, A_n$

取定某个$A_1 \in M_k\left(\mathbb{R}\right)$,取$\lambda$是$A$的$r$重实特征值，$r$为奇数.

运用经典结论,$\dim\ker\left(\lambda E - A\right)^r = r$ (见之前视频的证明, 化$jordan$爆算即可)

可令$W = \ker\left(\lambda E - A\right)^r$,显然$W$是它们的不变子空间且

$A_2|_W$，$A_3|_W$，$\cdots$，$A_n|_W$ 是两两可交换的.

如果对矩阵个数进行归纳.

所以运用归纳假设, $A_2|_W$，$A_3|_W$，$\cdots$，$A_n|_W$ 在W上公共的特征向量.

那么翻译过来就是, 存在$A_i|_W$ 特征值$\lambda_i, i = 2, 3, \cdots, n$, 使得

$$W' = \bigcap_{i=2}^{n} \ker\left(\lambda_i E - A_i|_W\right) \neq \{0\}$$

注意到$A_1|_{W'}$ 的特征值只有λ, 这是因为只需证明$A_1|_W$ 特征值只有λ

事实上, 若$a \in W, Aa = \mu a, \mu \neq \lambda$，$a \neq 0$

$$0 = \left(\lambda E - A\right)^r a = \left(\lambda E - A\right)^{r-1}\left(\lambda a - \mu a\right) = \left(\lambda - \mu\right)\left(\lambda E - A\right)^{r-1} a \cdots$$

$$= \left(\lambda - \mu\right)^r a = 0 \Rightarrow \lambda = \mu, 矛盾！$$

因此$A_1|_{W'}$ 的特征值只有λ, 任取W'中A_1一个特征向量β,此时

它为$A_1, A_2, \cdots, A_n$的公共特征向量.

那么$\forall A = \sum_{j=1}^{n} c_j A_j, A\beta = \sum_{j=1}^{n} c_j A_j \beta = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j\right)\beta$, 因此$\beta$是$A$的特征向量.

所以我们完成了证明.

非负矩阵引入

定义：一个$n\left(n\geq 2\right)$阶矩阵A, 如果满足所有元素都非负, 称为非负矩阵$\left(A\geq 0\right)$

$\left|A\right|$定义为所有元素加绝对值之后的矩阵, 全体非负n维列向量记作$\mathbb{R}_n^+$.

定义：

一个$n\left(n\geq 2\right)$阶矩阵A,

如果存在置换矩阵P(初等单位矩阵交换一次列或者行得到的矩阵),

使得$P^T AP=\begin{pmatrix} A_m & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$, A_m是m阶矩阵, $1\leq m\leq n-1$, 称A可约.

注意：一个$n\left(n\geq 2\right)$阶矩阵A可约就是说, 同时交换行列可以变成上面这种样子

注意： 0是$m\times\left(n-m\right)$矩阵,

显然, A可约充要条件是有一个行数和列数恰好错开的子矩阵为0

核心引理$(*)$设A是$n\geq 2$阶不可约非负矩阵, $y\in\mathbb{R}_n^+$, 则有

$(1):(I+A)y$的0分量个数会减少或者不变.

$(2):y$有0分量$\Rightarrow(I+A)y$的0分量个数会严格减少

证明：

对于$(1):(I+A)y=y+Ay$, 故$((I+A)y)_i=y_i+(Ay)_i$

故$((I+A)y)_i=0\Leftrightarrow y_i=0,(Ay)_i=0$, 则故证明了$(1)$

对于(2):

$(I+A)y$的0分量个数不变$\Leftrightarrow y_i=0$则必有$(Ay)_i=0$

取置换矩阵P(不取也可以只是放到上面去好看一些),

使得$x=Py=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, x_j\neq 0, j=1,2,\cdots,k$故

$(I+A)y$的0分量个数不变$\Leftrightarrow Py_i=0$则必有$(PAy)_i=0$

$\Leftrightarrow x_i=0$, 必有$(PAP^Tx)_i=0$.

若$(I+A)y$的0分量个数没变, 则$(PAP^Tx)_i=0, i=k+1,\cdots,n$

因此$(PAP^Tx)_i=\sum_{j=1}^{k}(PAP^T)_{ij}x_j=0, i=k+1,\cdots,n$

故$(PAP^T)_{ij}=0, j=1,2,\cdots,k$

所以行列错开的子矩阵为0, 故PAP^T可约，矛盾！

引理：

设A是$n\ge 2$的不可约非负矩阵, 对$y\in\mathbb{R}_n^+/\{0\}$, 必有$(I+A)^{n-1}y>0$

证明：总共最多才$n-1$个0分量，每$(I+A)$乘一次严格减少一个0分量,

最多减少$n-1$次就没0分量了

引理：

设A是$n\ge 2$的非负矩阵, A不可约$\Leftrightarrow (I+A)^{n-1}>0$

证明：充分性：若A可约, 设置换矩阵P，使得$PAP^T=\begin{pmatrix} A_m & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$

$P(I+A)^{n-1}P^T=\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, 这和$(I+A)^{n-1}>0$矛盾！

必要性：

若A不可约，有上一引理, $y\in\mathbb{R}_n^+/\{0\}$, $(I+A)^{n-1}y>0$, 因此

取$y=e_i$, e_i是第i个分量为1，其余分量为0的向量, 故$(I+A)^{n-1}$的第i列元素为正!

当i遍历$1,2,\cdots,n$, 因此$(I+A)^{n-1}>0$! 我们完成证明.

结论：一个$n\ge 2$阶的不可约的非负矩阵的非负特征向量是正向量！

设$Ax=\lambda x, x\ge 0$, 若x有零分量, $(I+A)x=(1+\lambda)x$

左边0分量个数严格减少, 右边零分量个数要么不变, 要么$\lambda=-1$

$\lambda=-1$显然不可能, 所以这是一个矛盾！因此$x>0$!

结论:(留做习题)

证明：$n\ge 2$阶非负矩阵A不可约$\Leftrightarrow$ 对每个$1\le i,j\le n$, 都存在$k\in\mathbb{N}_+$,

使得A^k的(i,j)元是正数！

注意：如果不引入术语. 其实就是一个这样的简单的线性代数习题：

$n\ge 2$阶元素都为非负数的矩阵A没有一个行列恰好错开的子矩阵为0矩阵的

充分必要条件是: 对每个$1\le i,j\le n$, 都存在$k\in\mathbb{N}_+$,

使得A^k的(i,j)元是正数！

$(Perron-Frobenius)$核心定理：

设A是一个$n\geq 2$阶不可约非负矩阵, 则下面结果成立：

(1)：A的谱半径$\rho(A)>0$, 且恰好是A的一个单特征值

(2): A有一个对应于$\rho(A)$的正特征向量

(3): A的所有非负特征向量都对应于$\rho(A)$

这里$\rho(A)\triangleq A$的特征值的模长的最大值.

证明：

构造$Collatz-Wielandt$函数, 构造$f_A:\mathbb{R}_n^+/\{0\}\to\mathbb{R}, x\to\min\limits_{x_i\neq 0}\dfrac{(Ax)_i}{x_i}$

显然$f_A(tx)=f_A(x), \forall t>0, f_A(x)=\max\limits_{\rho\in\mathbb{R}}\{\rho: Ax-\rho x\geq 0\}$

$A(I+A)^{n-1}x-f_A(x)(I+A)^{n-1}x=(I+A)^{n-1}(Ax-f_A(x)x)$

若$Ax-f_A(x)x\neq 0$, 则$A(I+A)^{n-1}x-f_A(x)(I+A)^{n-1}x>0$, 因此

由连续性, $f_A(x)$可以稍微大一点，这告诉我们$f_A\left((I+A)^{n-1}x\right)>f_A(x)$

若$Ax-f_A(x)x=0$, 则$A(I+A)^{n-1}x-f_A(x)(I+A)^{n-1}x=0$，故

$f_A\left((I+A)^{n-1}x\right)\geq f_A(x)$，综上所述$f_A\left((I+A)^{n-1}x\right)\geq f_A(x)$.

还可以

注意到$f_A(x)$小于等于A的最大的行和且非负(矩阵乘法写出来即可,留做习题)

我们期望$f_A(x)$能在$\mathbb{R}_n^+/\{0\}$里达到最大值, 齐次性暗示我们可以约束到

紧集上去, 但是$f_A(x)$不一定连续, 所以我们还需要做一些操作!

留到下次课！

课后任务：

了解$schaucer$不动点定理非负矩阵有正特征向量和正特征值的证明！