数学类(1)

阶的估计基本手法

为引出黎曼引理, 我们暂时讲一下一个重要的逼近
更细致的逼近留到后面专题课系统讲解.

定积分的逼近:
设$f(x)\in R[a,b]$, 我们有$\forall\varepsilon>0$, 存在阶梯函数$g(x)$使得:
$$\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx\le\varepsilon$$

证明:
因为$f(x)$可积, $\forall\varepsilon>0$, 存在一组划分:
$$a=x_0<x_1\ldots.<x_n=b$$
$$\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i\le\varepsilon, w_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$$
取$g(x)=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x), x\in[x_{i-1},x_i]$
$$\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|f(x)-g(x)\right|dx\le\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}w_i dx=\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i\le\varepsilon$$

定积分的逼近:
设$f(x)\in R[a,b]$, 我们有$\forall\varepsilon>0$, 存在连续函数$g(x)$使得:
$$\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx\le\varepsilon$$

证明: 因为$f(x)$可积, $\forall\varepsilon>0$, 存在一组划分:
$$a=x_0<x_1\ldots.<x_n=b$$
$$\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i\le\varepsilon, w_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$$
取$g(x)$线性连接$\left(x_{i-1},f(x_{i-1})\right),\left(x_i,f(x_i)\right)$
则$\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx=\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|f(x)-g(x)\right|dx\le\sum\limits_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i\le\varepsilon$

注意:
本结果告诉我们, 在积分意义下, 可积函数和分段常值函数没有区别
阶梯函数：分段常值函数，段数有限, 且每个段为区间

一般版本：

设$A\subset\mathbb{R}$是可测集

$f(x)\in L(A), g(x)\in L[0,T], g(x+T)=g(x), T>0$

则成立：

$$\lim_{x\to+\infty}\int_A f(y)g(xy)dy=\frac{1}{T}\int_A f(y)dy\int_0^T g(y)dy$$

数分版本：

设$f(x)$定义在A上黎曼可积或者绝对可积，$g(x)\in R[0,T], g(x+T)=g(x)$

当$T>0$，则有：

$$\lim_{x\to+\infty}\int_A f(y)g(xy)dy=\frac{1}{T}\int_A f(y)dy\int_0^T g(y)dy$$

这里A是一个区间

证明:

(i)对闭区间以及沿$x=n$采用连续函数逼近法:

(1):不妨设$g(x)\ge 0$,这是如下保证的

$c=\inf g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_A f(y)(g(xy)-c)dy=\frac{1}{T}\int_A f(y)dy\int_0^T(g(y)-c)dy$$

(2)：不妨设$f(x)$连续,这是因为

记$M=\max\left\{\sup|g|,\frac{1}{T}|\int_0^T g(y)dy|\right\}$

$$|\int_A f(y)g(xy)dy-\frac{1}{T}\int_A f(y)dy\int_0^T g(y)dy|\le$$

$$|\int_A f(y)g(xy)dy-\int_A h(y)g(xy)dy|+\left|\int_A h(y)g(xy)dy-\frac{1}{T}\int_A h(y)dy\int_0^T g(y)dy\right|$$

$$+\left|\frac{1}{T}\int_A h(y)dy\int_0^T g(y)dy-\frac{1}{T}\int_A f(y)dy\int_0^T g(y)dy\right|$$

$$\le\int_A|f(y)-h(y)|\cdot|g(xy)|dy+\left|\int_A h(y)g(xy)dy-\frac{1}{T}\int_A h(y)dy\int_0^T g(y)dy\right|$$

$$+\frac{1}{T}\int_A|h(y)-f(y)|dy|\int_0^T g(y)dy|$$

$$\le 2M\int_A|f(y)-h(y)|dy+\left|\int_A h(y)g(xy)dy-\frac{1}{T}\int_A h(y)dy\int_0^T g(y)dy\right|$$

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}|\int_A f(y)g(xy)dy-\frac{1}{T}\int_A f(y)dy\int_0^T g(y)dy|\le 2M\int_A|f(y)-h(y)|dy$$

由逼近方法,即连续的h任意性,我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_A f(y)g(xy)dy=\frac{1}{T}\int_A f(y)dy\int_0^T g(y)dy$$

(3):不妨设$b-a=mT,m\in\mathbb{N}$

否则用特征函数调控区间,$\chi_S(x)=\begin{cases}1,x\in S\\0,x\notin S\end{cases}$

这里S包含A的一个满足条件的区间.

$$\lim_{x\to+\infty}\int_A f(y)g(xy)dy=\lim_{x\to+\infty}\int_S f(y)\chi_A(y)g(xy)dy$$

$$=\frac{1}{T}\int_S f(y)\chi_A(y)dy\int_0^T g(y)dy=\frac{1}{T}\int_A f(y)dy\int_0^T g(y)dy$$

(4): 其实$b-a=T$的情形足以, 因为可以分成若干段，一段一段的处理.

(5): 真正的证明:

$$\int_a^b f(y)g(ny)dy=\frac{\int_{na}^{nb} f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy}{n}$$

$$=\frac{\int_{na}^{na+nT} f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy}{n}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\int_{na+kT}^{na+(k+1)T} f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy}{n}$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\int_{na}^{na+T} f\left(\frac{y+kT}{n}\right)g(y)dy}{n}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\theta_k+kT}{n}\right)\int_{na}^{na+T} g(y)dy}{n}$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\theta_k+kT}{n}\right)\int_0^T g(y)dy}{n}$$

$$\to\int_0^1 f(a+Ty)dy\int_0^T g(y)dy=\frac{1}{T}\int_a^b f(y)dy\int_0^T g(y)dy$$

这里$\frac{\theta_k+kT}{n}\in\left[a+\frac{kT}{n},a+\frac{(k+1)T}{n}\right]$

(ii)阶梯函数逼近法$($对一般的x趋近$)$:

相比(i)的技术困难:类似的不妨设$f(x)$是分段常值函数,g非负

此时只需每一段处理,故此时可以不妨设$f(x)=1$

注意此时我们不能不妨设$b=a+mT$了,因为分段常值的时候会丢失掉区间的限

相比(i)的优势:(i)的推导不方便操作对一般的x趋近

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^b g(xy)dy=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{ax}^{bx}g(y)dy}{x}$$

对每个x,存在唯一的$n\in\mathbb{N}$,使得$n+1>x\geq n$

同理$\leq\dfrac{\int_{a(n+1)}^{bn}g(y)dy}{n+1}\leq\dfrac{\int_{ax}^{bx}g(y)dy}{x}\leq\dfrac{\int_{an}^{b(n+1)}g(y)dy}{n}=\dfrac{\int_{an}^{bn}g(y)dy+\int_{bn}^{bn+b}g(y)dy}{n}$

其中$\int_{bn}^{bn+b}g(y)dy=O(1)$,所以可以过度到一般的$x$,对$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b g(ny)dy$使用$(i)$

我们就完成了证明.

下面的后面讲.

(iii):绝对可积时可以用级数控制收敛定理.

(iv)一般情形证明$($了解$)$:

对$f(x)\chi_A(x)\in L(\mathbb{R})$,用$\varphi(x)\in C_c^\infty(\mathbb{R})$逼近.

经验性的:和式和积分等价(铺垫EM，更多计算见非数2)

计算$\sum_{k=1}^{n}\ln k$等价无穷大量

思维上:

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k\sim\int_{1}^{n}\ln xdx=n\ln n-n+1\sim n\ln n$$

严格证明：

$$\int_{0}^{n}\ln xdx=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln xdx\le\sum_{k=1}^{n}\ln k\le\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\ln xdx=\int_{1}^{n+1}\ln xdx$$

由上:

显然$\sum_{k=1}^{n}\ln k\sim n\ln n$

EM公式推导.(本质上就是一个简单的积分恒等式)

下面这个式子是核心:

设a,b

设$f(x)\in D[a,b], f'(x)\in R[a,b]$或者$f'(x)\in L[a,b]$，则有:

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)=\int_a^b f(x)dx+\frac{f(a)+f(b)}{2}+\int_a^b b_1(x)f'(x)dx$$

$b_1(x)=x-\frac{1}{2}, x\in[0,1)$做周期1延拓.

上述等式由$R-S$积分可以显然得到(等后续课程, 现在先记住)

证明:

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)dx=\sum_{k=a}^{b-1}\int_k^{k+1} b_1(x)f'(x)dx=\sum_{k=a}^{b-1}\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(k+x)dx$$

$$=\sum_{k=a}^{b-1}[\frac{f(k+1)+f(k)}{2}-\int_0^1 f(k+x)dx]$$

$$=\sum_{k=a}^{b-1}[\frac{f(k+1)+f(k)}{2}-\int_k^{k+1} f(x)dx]$$

$$=\sum_{k=a}^{b} f(k)-\frac{f(a)+f(b)}{2}-\int_a^b f(x)dx$$, 证毕!

接下来如果f有高阶光滑性:

设$a,b,m\geq 2\in\mathbb{N}$

设$f(x)\in D^m[a,b], f^{(m)}(x)\in R[a,b]$或者$f'(x)\in L[a,b]$，则有:

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)=\int_a^b f(x)dx+\frac{f(a)+f(b)}{2}+\int_a^b b_1(x)f'(x)dx$$

思想:分部积分有转移导数的作用

把b_1作为某个函数的导数转移到f'上去.

$$\int_a^b b_1(x)f'(x)dx$$

$$=\int_a^b f'(x)db_2(x)=b_2(b)f'(b)-b_2(a)f'(a)-\int_a^b b_2(x)f''(x)dx$$

注意这里的分部积分数分内严格来说要分段进行,

因为b_1不连续,但是继续往高阶推的时候就不用了.

即我们期望(其实是期望b_2周期为1)

$b_2(b)=b_2(a), b_2(x)=\int_0^x b_1(y)dy$, 这相当于$\int_a^b b_1(y)dy=0$

这相当于$\int_0^1 b_1(y)dy=0$, 类似的推到高阶导, 我们归纳定义出一族b_n

$b_n(x)=\int_0^x b_{n-1}(y)dy$, 且$\int_0^1 b_{n-1}(y)dy=0, n\geq 2$, 此时$b_n$会有越来越高的光滑性

由傅里叶级数, 我们可以算出$b_1(x)=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n}, x\neq[x]$

$$b_2(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{2n^2\pi}, b_3(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{(2\pi)^2 n^3}$$

....

$$b_{2k}(x)=\frac{(-1)^{k+1}2}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi x)}{n^{2k}}, b_{2k+1}(x)=\frac{(-1)^{k+1}2}{(2\pi)^{2k+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n^{2k+1}}$$

当$k\geq 1, b_{2k+1}(0)=0$

设$f(x)\in D^m[a,b], f^{(m)}(x)\in R[a,b]$，则有:

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)=\int_a^b f(x)dx+\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=2}^{m}\left[f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)\right]b_k(0)$$

$$+(-1)^{m+1}\int_a^b b_m(x)f^{(m)}(x)dx$$

推论:

设$f(x)\in D^{2m}[a,b], f^{(2m)}(x)\in R[a,b]$，则有:

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)=\int_a^b f(x)dx+\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{m}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right]b_{2k}(0)$$

$$-\int_a^b b_{2m}(x)f^{(2m)}(x)dx$$

定积分定义的无穷阶加边.

设$m\ge 1, m\in\mathbb{Z}, f\left(x\right)\in D^{2m}\left[0,1\right]$且$f^{(2m)}\left(x\right)\in R\left[0,1\right]$, 证明

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{f\left(1\right)-f\left(0\right)}{2n}+\int_0^1 f\left(x\right)dx+\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(f^{(2k-1)}\left(1\right)-f^{(2k-1)}\left(0\right)\right)b_{2k}\left(0\right)}{n^{2k}}+o\left(\frac{1}{n^{2m}}\right)$$

证明:

显然有恒等式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\int_0^n f\left(\frac{x}{n}\right)dx+\frac{f\left(1\right)+f\left(0\right)}{2n}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(f^{(2k-1)}\left(1\right)-f^{(2k-1)}\left(0\right)\right)b_{2k}\left(0\right)}{n^{2k}}-\frac{1}{n^{2m+1}}\int_0^n b_{2m}\left(x\right)f^{(2m)}\left(\frac{x}{n}\right)dx$$

$$=\int_0^1 f\left(x\right)dx+\frac{f\left(1\right)+f\left(0\right)}{2n}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(f^{(2k-1)}\left(1\right)-f^{(2k-1)}\left(0\right)\right)b_{2k}\left(0\right)}{n^{2k}}-\frac{1}{n^{2m}}\int_0^1 b_{2m}\left(nx\right)f^{(2m)}\left(x\right)dx$$

由黎曼引理:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 b_{2m}\left(nx\right)f^{(2m)}\left(x\right)dx=\int_0^1 b_{2m}\left(x\right)dx\int_0^1 f^{(2m)}\left(x\right)dx=0$$

故$\int_0^1 b_{2m}\left(nx\right)f^{(2m)}\left(x\right)dx=o\left(1\right)$

故$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{f\left(1\right)-f\left(0\right)}{2n}+\int_0^1 f\left(x\right)dx$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(f^{(2k-1)}\left(1\right)-f^{(2k-1)}\left(0\right)\right)b_{2k}\left(0\right)}{n^{2k}}+o\left(\frac{1}{n^{2m}}\right)$$

训练

(1)：求渐进$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$(两项即可)

提示：k和n同积走定积分定义类型, 但是$\frac{1}{\sin\pi x}$不可积

所以我们要抵消掉他的奇异部分转换为可积的,

考虑无瑕点的函数$\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}$即可!.

(2)：运用积分和求和等价, 找到$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}$等价无穷大量

(3)：运用欧拉麦克劳林公式把$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}$加一次边.

(4)：尝试直接用阶梯函数逼近证明沿一般x趋近的情形的黎曼引理(选做).