数学类(4)

$x_1=\frac{c}{2}\geq -2, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(c+x_n^2\right)$, 讨论$x_n$收敛情况

解:

$2x=c+x^2\Rightarrow x^2-2x+c=0$

$\Delta=4-4c<0$, 故$c>1$时, x_n发散.

当$c=1, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(1+x_n^2\right)\geq x_n$, 而不动点是1

$x_1=\frac{1}{2}<1$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,

当$0\leq c<1$时: 不动点: $1+\sqrt{1-c}, 1-\sqrt{1-c}$, 由折线图,

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1-\sqrt{1-c}$

当$-4\leq c<0$: 此时折线图判断收敛性失效，

但是折线图能告诉我们$x_n\in(-\infty,0]$(自己尝试翻译成归纳法的语言)

以及

且$1-\sqrt{1-c}<x_{2n}<_{2n-2}, 1-\sqrt{1-c}>x_{2n+1}>x_{2n-1}$

问题转化为复合之后是否会产生$\left[x_2,x_1\right]$之间的不动点.

即$x=\frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{4}\left(c+x^2\right)^2\right)$在$\left[\frac{c}{2},\frac{1}{2}\left(c+\frac{c^2}{4}\right)\right]$是否会产生$1-\sqrt{1-c}$以外的解

将上述等式因式分解即:

$-\frac{\left(x^2-2x+c\right)\left(x^2+2x+4+c\right)}{8}$在$\left[\frac{c}{2},\frac{1}{2}\left(c+\frac{c^2}{4}\right)\right]$是否会有$1-\sqrt{1-c}$以外的根.

注意这里的因式分解手算可以完成，因为天然的有复合之前的

不动点，即因子$\left(x^2-2x+c\right)$.

故上面的问题转化为$x^2+2x+4+c$在$\left[\frac{c}{2},\frac{1}{2}\left(c+\frac{c^2}{4}\right)\right]$是否会有$1-\sqrt{1-c}$以外的根

$(i):4-4(4+c)<0\Rightarrow c>-3\Rightarrow x^2+2x+4+c$无解

$(ii):c=-3$时:

$x^2+2x+4+c$的根为-1, $\left[\frac{c}{2},\frac{1}{2}\left(c+\frac{c^2}{4}\right)\right]=\left[\frac{-3}{2},\ -\frac{3}{8}\right]$, $1-\sqrt{1-c}=-1$,

没有产生以外的根

$(iii):-3>c\geq -4:x^2+2x+4+c$的根是$-1\pm\sqrt{-3-c}$

$1-\sqrt{1-c}=-1+\sqrt{-3-c}\Rightarrow c=-3$

$-1-\sqrt{-3-c}=-1+\sqrt{-3-c}\Rightarrow c=-3$

接下来只需判断$-1\pm\sqrt{-3-c}$是否落在$\left[\frac{c}{2},\frac{1}{2}\left(c+\frac{c^2}{4}\right)\right]$

求导证明可知$\frac{c}{2}\leq -1+\sqrt{-3-c}\leq\frac{1}{2}\left(c+\frac{c^2}{4}\right)$, 此时产生新的不动点

综上所述当$c\in[-4,-3)\cup(1,+\infty)$, 发散, $c\in[-3,1]$收敛

强求通项方法:

$$a_{n+1}=b_n-\frac{na_n}{2n+1},\text{若}b_n\text{收敛,则}a_n\text{收敛.}$$

分析：

$$c_{n+1}a_{n+1}=c_{n+1}b_n-\frac{nc_{n+1}a_n}{2n+1}$$

$$\frac{nc_{n+1}}{2n+1}=-c_n\Rightarrow\frac{c_{n+1}}{c_n}=-\frac{(2n+1)}{n}$$

$$c_1=1,c_{n+1}=(-1)^n\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{n!}$$

$$waliis:\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}$$

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{n!}\sim\frac{\frac{(2n)!!}{\sqrt{\pi n}}(2n+1)}{n!}\sim\frac{2^{n+1}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

证明：

$$\text{取}c_1=1,c_{n+1}=(-1)^n\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{n!},n\geq1.\text{则有:}$$

$$c_{n+1}a_{n+1}=c_{n+1}b_n-\frac{nc_{n+1}a_n}{2n+1},\text{两边求和：}$$

$$c_{n+1}a_{n+1}-c_1a_1=\sum_{k=1}^{n}c_{k+1}b_k$$

$$a_{n+1}=\frac{c_1a_1}{c_{n+1}}+\frac{\sum_{k=1}^{n}c_{k+1}b_k}{c_{n+1}},\text{显然}\lim_{n\to\infty}\frac{c_1a_1}{c_{n+1}}=0$$

于是由$stolz$定理(分奇偶分别讨论)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}c_{k+1}b_k}{c_{n+1}}=\frac{2}{3}b\left(\text{如果计算不来看公众号}\right)$$

$$\text{故}\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}b$$

$a_n, b_n > 0, a_1 = b_1 = 1, b_n = a_n b_{n-1} - 2, n \geq 2,$ 求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$

分析：

取$c_1 = 1,$待定c_n：

$c_n b_n = c_n a_n b_{n-1} - 2c_n$

期望可以裂项求和, 即$c_n a_n = c_{n-1}$

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = a_n \Rightarrow c_n = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

$$c_n b_n - c_{n-1} b_{n-1} = -2c_n$$

$$c_n b_n - 1 = -2\sum_{k=2}^{n} c_k$$

$$c_n b_n - 3 = -2\sum_{k=1}^{n} c_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{3 - c_n b_n}{2} \leq \frac{3}{2}$$

证明：

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} b_n = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} a_n b_{n-1} - 2\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

两边求和

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_k} = \frac{3 - \dfrac{b_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}}{2} \leq \frac{3}{2}$$

因此$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_k} < \infty$

一类题的模板:朗伯W函数的渐进.

本质使用迭代法.

例如：$x^n+x=1$的根的渐进?

高中数学知道xe^x在$[-1,+\infty)$递增,且此时值域$\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$

于是可以定义一个反函数$W_0(x):\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)\to[-1,+\infty)$

$(xe^x)'\neq 0$在$(-1,+\infty)$上，根据隐函数定理:$W_0(x)\in C^{\infty}(-1,+\infty)$

由导数极限定理(见后面非数)容易证明:$W_0(x)\in C^{\infty}[-1,+\infty)$

由于实解析函数(见后面数学)$(xe^x)'|_{x=0}\neq 0$,存在0的邻域使得

$W_0(x)$实解析，且有$W_0(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}[\frac{x^n}{(xe^x)^n}]^{n-1}|_{x=0}\ x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^{n-1}}{n!}x^n$,

于是我们得到了$W_0(x)$在原点处的展开.

注意:

拉格朗日反演的系数在一次系数不为0时其实就是反函数导数公式算出来的.

泰勒公式的$peano$余项不需要级数收敛性，所以如果你不了解析函数,

不知道$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^{n-1}}{n!}x^n$的确收敛到$W_0(x)$也不要紧，知道可以构成0附近的渐进即可

这一块内容最要的：

朗伯W函数在无穷远点的渐进(迭代法的运用):

即$xe^x=n$,在$n\to+\infty$时,$x=x(n)=W_0(n)$的渐进计算方法：

$$\ln x+x=\ln n,0\le x=\ln n-\ln x\le\ln n\Rightarrow x=O(\ln n)$$

$$\ln x=\ln\ln n+\ln\left(1-\frac{\ln x}{\ln n}\right)=\ln\ln n-\frac{\ln x}{\ln n}+o\left(\frac{\ln x}{\ln n}\right)$$

$$=\ln\ln n-\frac{\ln\ln n+\ln O(1)}{\ln n}+o\left(\frac{\ln\ln n+\ln O(1)}{\ln n}\right)$$

$$=\ln\ln n-\frac{\ln\ln n}{\ln n}+o\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)$$

$$x=\ln n-\ln\ln n+\frac{\ln\ln n}{\ln n}+o\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)$$

$$\Rightarrow W_0(n)=\ln n-\ln\ln n+\frac{\ln\ln n}{\ln n}+o\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)$$

运用这种方法可以类似的迭代出$x^n+x=1$根的渐进

事实上稍微观察一下即可发现这个根相差初值外渐进和$W_0\left(n\right)$一样

见下次课内容,