数学类(22)

$(Perron-Frobenius)$核心定理：

设A是一个$n\geq 2$阶不可约非负矩阵, 则下面结果成立：

(1)：A的谱半径$\rho(A)>0$, 且恰好是A的一个单特征值.

(2): A有一个对应于$\rho(A)$的正特征向量.

(3): A的所有非负特征向量都对应于$\rho(A)$

这里$\rho(A)\triangleq A$的特征值的模长的最大值.

证明：

构造$Collatz-Wielandt$函数, 构造$f_A:\mathbb{R}_n^+/\{0\}\to\mathbb{R}, x\to\min\limits_{x_i\neq 0}\frac{(Ax)_i}{x_i}$

显然

$(a)\ f_A(tx)=f_A(x),\forall t>0,$

$(b)\ f_A(x)=\max\limits_{\rho\in\mathbb{R}}\{\rho: Ax-\rho x\geq 0\}$

$(c)\ f_A\left((I+A)^{n-1}x\right)\geq f_A(x).$

$(d)\ f_A(x)$小于等于A的最大的行和且非负

记$\Omega_n=\left\{x\in\mathbb{R}_n^+:\sum_{j=1}^n x_j=1\right\}$是紧集, 因为分母可能取到0

导致$f_A(x)$不一定连续,回忆$(I+A)^{n-1}y>0$,因此考虑新的紧集

$\Gamma=(I+A)^{n-1}(\Omega_n)$,并且$\Gamma$里面都是正向量,$f_A$在$\Gamma$上连续, 于是存在$y^0\in\Gamma$

使得f_A在Γ上达到最大值,注意$\frac{y^0}{\sum_{j=1}^n y_j^0}\in\Omega_n, f_A\left(\frac{y^0}{\sum_{j=1}^n y_j^0}\right)=f_A(y^0)$

$\forall x\in\Omega_n, f_A(x)\le f_A\left((I+A)^{n-1}x\right)\le f_A(y^0)$

因此f_A在Ω_n达到最大值, 由性质(a)(正齐性),f_A在$\mathbb{R}_n^+/\{0\}$达到最大值.

现在记$r=f_A(x^0)$是f_A的最大值,$x^0\in\mathbb{R}_n^+/\{0\}$, 我们来这么$r$是特征值,$x^0$是正特征

取$x=1_n, f_A(1_n)=\min_{x_i\ne0}\frac{(Ax)_i}{x_i}>0$, 因此$r>0$.

期望证明$Ax^0-rx^0=0$,假定$(I+A)^{n-1}(Ax^0-rx^0)>0$, 此时有

$A\left[(I+A)^{n-1}x^0\right]-r\left[(I+A)^{n-1}x_0\right]>0\overset{\text{连续性}}{\Rightarrow}f_A\left((I+A)^{n-1}x^0\right)>r$

和r是最大矛盾, 因此$Ax^0-rx^0=0$，由上节课结论, x^0是正向量

可以看到任何一个$\mathbb{R}_n^+/\{0\}$使得f_A达到最大的向量都是属于f_A最大值的特征向量

并且是正向量.

下证$r=\rho(A)$, 设$\lambda\in\mathbb{C}, x\ne0, Ax=\lambda x, A|x|-|\lambda||x|\ge0\Rightarrow f_A(x)\ge|\lambda|$

因此$r\ge f_A(x)\ge|\lambda|$, 故$r=\rho(A)$.

下证对所有非负特征向量x, 都是属于特征值r的，假设$Ax=\lambda x$

显然, $x>0$, 因为A^T也是非负不可约的, 所以存在$y>0$

使得$A^Ty=ry, y^TAx=ry^Tx=\lambda y^Tx$, 而$y^Tx>0$, 因此$\lambda=r$.

故所有非负特征向量x都是属于特征值r的.

下证r的几何重数是1，设$y\ne0$, 使得$Ay=ry$, 类似上面的操作有$A|y|=r|y|$

故$|y|>0$, 即A对应r的特征向量不含0分量, 设y,z都是对应r的特征向量

考虑z_1y-y_1z仍然是对应r的特征向量, z_1y-y_1z第一个分量为0, 故$z_1y-y_1z=0$

即y,z线性相关, 因此几何重数是1.

下证代数重数是1

结论：$\frac{d}{d\lambda}|\lambda I-A|=tr\left(\left(\lambda I-A\right)^{*}\right)$（复习行列式求导公式）

证明是显然的.

只需证明$=tr\left(\left(\lambda I-A\right)^{*}\right)\neq 0$

事实上$\left(rI-A\right)\left(\lambda I-A\right)^{*}=0, r\left(\left(rI-A\right)\right)=n-1$（几何重数1）

因此$\left(\lambda I-A\right)^{*}\neq 0$, $\left(\lambda I-A\right)^{*}$的非0列向量$b$必然是$A$属于特征值$r$的特征向量

并且不能有0分量，所以$b<0, b>0$必居其一，A^{T}也有类似的性质，对应的

$\left(\lambda I-A\right)^{*}$的行向量要么$>0$，要么$<0$，这告诉我们$\left(\lambda I-A\right)^{*}>0$，要么$\left(\lambda I-A\right)^{*}<0$

恒成立，此时$tr\left(\left(\lambda I-A\right)^{*}\right)\neq 0$，因此$r$的代数重数是1

应用：没有n阶实矩阵A，A^{2}元素都为负数.

证明：

假定$A^{2}<0, -A^{2}>0$，所以$-A^{2}$是非负不可约矩阵，

故$-A^{2}$有单的正特征值a，故存在$\lambda\in\mathbb{C}/\mathbb{R}$是$A$的特征值使得

$-\lambda^{2}=a, -\bar{\lambda}^{2}=a$，而$\lambda, \bar{\lambda}$是$A$的不同的特征值，因此$a$代数重数至少是2

矛盾！

$perron$定理是说任何非负不可约矩阵有那样的性质

定理：

设A是一个非负矩阵,则$\rho\left(A\right)$是A的特征值,且A有一个对应于$\rho\left(A\right)$的特征向量

证明：

当$n=1$显然，当$n\geq 2$,考虑$A_k=A+\frac{1}{k}J$是非负不可约矩阵,

存在对应于$\rho\left(A_k\right)$的A_k的正特征向量$x^k\in\Omega_n$,故由聚点定理,存在

$\lim\limits_{i\to\infty}x^{k_i}=x\in\Omega_n, A_{k_i}x^{k_i}=\rho\left(A_{k_i}\right)x^{k_i}$

技术性：多项式的特征值连续的依赖于多项式的系数$\left(\text{见公众号}\right)$

注意这个表述是不严谨的.严格的表述见公众号推文，可记住结论直接使用

回到原题,此时就有$\lim\limits_{i\to\infty}\rho\left(A_{k_i}\right)=\rho\left(A\right)$,因此$Ax=\rho\left(A\right)x$，我们完成了证明.

注：上节课叫大家查阅的不动点定理证明的也是这个结果！

定理：设A是一个非负矩阵,则r_i是A的第i行行和,c_i是A的第i列列和,那么有

$\min\limits_{1\leq i\leq n}r_i\leq\rho\left(A\right)\leq\max\limits_{1\leq i\leq n}r_i,\left(1\right)$

$\min\limits_{1\leq i\leq n}c_i\leq\rho\left(A\right)\leq\max\limits_{1\leq i\leq n}c_i,\left(2\right)$

并且当A不可约,上面不等式$\left(1\right)$有一个等号成立等价于所有行和相同

上面不等式$\left(2\right)$有一个等号成立等价于所有列和相同

证明：

设$x\geq 0$是A^T的一个对应于$\rho\left(A\right)$的特征向量,则$A^Tx=\rho\left(A\right)x$

即$\rho\left(A\right)x_i=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}x_k$,因此对$i$求和就有$\rho\left(A\right)=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}r_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}$,因此证明了不等式

列和同理,若A不可约,则必有$x>0$,因此上面的放缩都是严格的

所以等号成立只能等价所有的行和相同！

应用:数学类补赛:

设$n\ge 2$阶矩阵每行都是$a_1,a_2,\cdots,a_n$的排列,$a_i>0$, 和为1

求特征值1的代数重数几何重数以及特征空间

证明:

显然A是正矩阵不可约,所有行和相同为1,因此$\rho\left(A\right)=1$

1_n是一个属于特征值1的特征向量, 故1的几何重数和代数重数都是1

并且特征空间是$c1_n,c\in\mathbb{C}$

重要定理：

B是n阶矩阵,A是$n\geq 2$阶不可约非负矩阵,若$|B|\leq A$,则$\rho(B)\leq\rho(A)$

并且等号成立充分必要条件是存在对角酉矩阵D和$\theta\in\mathbb{R}$使得

$B=e^{i\theta}DAD^{-1}$,这里$\rho(A)e^{i\theta}$是B的特征值.

证明：

首先证明不等式

设$Bx=\lambda x,x\neq 0,\lambda\in\mathbb{C}$，则$A|x|\geq|B||x|\geq|\lambda||x|,\rho(A)\geq f_A(|x|)\geq|\lambda|$

这样不等式就成立了

充分性显然！

只需证明必要性：

若$\rho(B)=\rho(A)>0$,存在$\theta\in\mathbb{R}$,使得$\rho(A)e^{i\theta}$是B的特征值.

在不等式的证明中就令$\lambda=\rho(A)e^{i\theta}$,那么

$f_A(|x|)=\rho(A),x>0,A|x|=\rho(A)|x|,A=|B|$

取$D=diag\left(\frac{x_1}{|x_1|},\frac{x_2}{|x_2|},\frac{x_3}{|x_3|},\cdots,\frac{x_n}{|x_n|}\right)$

于是$Bx=BD|x|=\lambda D|x|$,结合这些等式

$BD|x|=e^{i\theta}DA|x|\Rightarrow e^{-i\theta}D^{-1}BD|x|=A|x|\Rightarrow e^{-i\theta}D^{-1}BD|x|=|B||x|$

因此

$\left|e^{-i\theta}D^{-1}BD\right|\overset{\text{把矩阵乘法写出来}}{=}|B|\Rightarrow\left(\left|e^{-i\theta}D^{-1}BD\right|-e^{-i\theta}D^{-1}BD\right)|x|=0$

注意到上面可以推出$\left|e^{-i\theta}D^{-1}BD\right|\overset{\text{把矩阵乘法写出来}}{=}e^{-i\theta}D^{-1}BD$,运用初等结果

即$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j=\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}x_j\right|\overset{\text{用复数定义即可}}{\Rightarrow}c_{ij}x_j\geq 0\Rightarrow c_{ij}\geq 0$,因此$e^{-i\theta}D^{-1}BD=A$

注：从证明可以看到如果λ是B的模长为$\rho(A)$的特征值,那么设

$\rho(A)e^{i\theta}$,取特征值对应的一个特征向量x, 取上面中证明的那个D，

就有$B=e^{i\theta}DAD^{-1}$.

注：对不等式$\rho(B)\leq\rho(A)$本身而言,不需要A的不可约性, 逼近即可

注：对非负不可约A，设$\rho\left(A\right)e^{i\theta_j}, j=1,2,\cdots,t$是$A$全部模为$\rho\left(A\right)$的特征值

那么$A=e^{i\theta_j}D_jAD_j^{-1}, A\sim e^{i\theta_j}A$,因此$A$全部模为$\rho\left(A\right)$的特征值都是单特征值！

同时$=e^{i(\theta_j+\theta_k)}D_jD_kA\left(D_jD_k\right)^{-1}$,于是$e^{i(\theta_j+\theta_k)}\in\left\{e^{i\theta_i}:1\le i\le t\right\}$

因此$\left\{e^{i\theta_i}:1\le i\le t\right\}$是全体$t$次单位根, 同时$A$的全体特征值旋转$\frac{2\pi}{t}$不改变,

旋转少于$\frac{2\pi}{t}$,模长$\rho\left(A\right)$特征值发生改变.

注：

对非负不可约A，可以计算A全部模为$\rho\left(A\right)$的特征值个数t

设$\lambda^n+a_1\lambda^{n_1}+\cdots+a_k\lambda^{n_k}, n>n_1>n_2>\cdots>n_k, a_j\ne 0$是$A$特征多项式

考虑$e^{\frac{i2\pi}{m}}A$的特征多项式,可以证明$t=\gcd\left(n-n_1,n-n_2,\cdots,n-n_k\right)$