数学类(10)

若$f\left(x\right)\in C\left[a,b\right]\bigcap D\left(a,b\right)$,则存在$x_0\in\left(a,b\right)$,使得$f\left(x\right)$在$x_0$切线上方或者下方.

证明：

$$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\left(x-a\right)-f\left(a\right)$$

$g\left(a\right)=g\left(b\right)=0$,如果$g\left(x\right)\equiv 0$,那显然.

若$g\left(x_0\right)>0$,不妨设x_0是最大值点,于是$f'\left(x_0\right)=\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$

且$g\left(x\right)\le g\left(x_0\right)\Rightarrow f\left(x\right)-f'\left(x_0\right)\left(x-a\right)-f\left(a\right)\le f\left(x_0\right)-f'\left(x_0\right)\left(x_0-a\right)-f\left(a\right)$

$\Rightarrow f\left(x\right)\le f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-a\right)$

若$g\left(x_0\right)<0$同理.

真题:

若$f\left(x\right)\in C\left[a,b\right]\bigcap D\left(a,b\right)$且不恒为线性函数

则存在$x_0\in\left(a,b\right)$,使得$f\left(x\right)$在x_0去心邻域严格在切线上方或者下方.

分析：

$h\left(x\right)=f\left(x\right)-k\left(x\right)$,找最大值点$\theta\in\left(a,b\right)$,$f\left(x\right)-k\left(x\right)\le f\left(\theta\right)-k\left(\theta\right)\Rightarrow$

$f\left(x\right)\le f\left(\theta\right)+k\left(x\right)-k\left(\theta\right)<f\left(\theta\right)+k'\left(\theta\right)\left(x-\theta\right)=f\left(\theta\right)+f'\left(\theta\right)\left(x-\theta\right)$

能否找到一个好的k,使得对k来说,这个切线是严格在上下方的.

显然k是二次函数的话,无论你怎么找切线,都是严格的.

证明：

$$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\left(x-a\right)-f\left(a\right),\ g\left(a\right)=g\left(b\right)=0,$$

不妨设存在$x_0\in\left(a,b\right)$

$g\left(x_0\right)>0$,取$\varepsilon>0$使得$g\left(a\right)+\varepsilon\left(a-x_0\right)^2<g\left(x_0\right),g\left(b\right)+\varepsilon\left(b-x_0\right)^2<g\left(x_0\right)$

$h\left(x\right)=g\left(x\right)+\varepsilon\left(x-x_0\right)^2,h\left(a\right),h\left(b\right)<h\left(x_0\right)\Rightarrow$ 不妨设x_0是$h\left(x\right)$的最大值

$h\left(x\right)=f\left(x\right)-k\left(x\right),f\left(x\right)-k\left(x\right)\le f\left(x_0\right)-k\left(x_0\right)\Rightarrow$

$f\left(x\right)\le f\left(x_0\right)+k\left(x\right)-k\left(x_0\right)<f\left(x_0\right)+k'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$

因此$f\left(x\right)<f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$，当$x\ne x_0$,我们完成了证明.

16丘赛决赛压轴题：

$f(x)\in C[0,+\infty),\forall h\geq 0,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+h)-f(x)=0$

证明:$\exists g(x)\in C[0,+\infty),\exists h(x)\in C^1[0,+\infty)$, 使得:

$f(x)=g(x)+h(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h'(x)=0$

证明：令$h(x)=\int_x^{x+1}f(y)dy,g(x)=f(x)-\int_x^{x+1}f(y)dy$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h'(x)=0,$

下证:$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}[f(x)-f(y)]dy=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^1[f(x)-f(x+y)]dy=0$

引理1:若$f(x)$在$[0,+\infty)$一致连续, 则有$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^1[f(x)-f(x+y)]dy=0$

引理1证明:

$\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}$, 使得$\forall|y-x|\leq\frac{1}{n}$, 有$|f(y)-f(x)|\leq\varepsilon.$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[f(x)-f(x+y)]dy\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(x)-f\left(x+\frac{k}{n}\right)+f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+y)\right]dy\right|$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|dy+\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+y)\right|dy$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|f(x)-f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|}{n}+\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}1dy=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|f(x)-f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|}{n}+\varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sup\left|\int_0^1[f(x)-f(x+y)]dy\right|\leq\lim_{x\to+\infty}\sup\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|f(x)-f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|}{n}+\varepsilon=\varepsilon$$

由ε任意性, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^1[f(x)-f(x+y)]dy=0$.引理1证毕！

分析：$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall |x-y|<\delta$, 都有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \sup\limits_{h\in[0,\delta]}|f(x+h)-f(x)|\le \varepsilon, \forall x\in[0,+\infty)$

引理2:

若 $f(x)\in C[0,+\infty)$，且 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \exists X>0, \sup\limits_{h\in[0,\delta]}|f(x+h)-f(x)|\le \varepsilon, \forall x\in[X,+\infty)$

则有 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \sup\limits_{h\in[0,\delta]}|f(x+h)-f(x)|\le \varepsilon, \forall x\in[0,+\infty)$.

引理2证明:

$\forall 1>\varepsilon>0$, 由条件, $\exists 1>\delta_1>0, \exists X>0, \sup\limits_{h\in[0,\delta]}|f(x+h)-f(x)|\le \varepsilon, \forall x\in[X,+\infty)$

在 $[0,X+1]$ 上, $f(x)$ 一致连续, $\exists \delta\in(0,\delta_1)$, 使得 $\sup\limits_{h\in[0,\delta]}|f(x+h)-f(x)|\le \varepsilon, \forall x\in[0,X]$,

此时 $\forall x\in[0,+\infty)$, 都有 $\sup\limits_{h\in[0,\delta]}|f(x+h)-f(x)|\le \varepsilon$, 引理2证毕！

(最难的一步)引理3：

若 $f(x)\in C[0,+\infty)$，且 $\forall h\ge 0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x+h)-f(x)=0$, 则有

$\forall \varepsilon>0, \exists [a,b]\subset[0,+\infty), \exists X>0$, 使得 $\sup\limits_{h\in[a,b]}|f(x+h)-f(x)|\le \varepsilon, \forall x\in[X,+\infty)$

引理3证明：反证：

$\exists \varepsilon_0>0$, 使得 $\forall [a,b]\subset[0,+\infty), \forall X, \exists x\ge X$, 使得 $\sup\limits_{h\in[a,b]}|f(x+h)-f(x)|>\varepsilon_0$

取定 $[a_1,b_1]\subset[0,+\infty), \exists x_1$, 使得 $\sup\limits_{h\in[a_1,b_1]}|f(x_1+h)-f(x_1)|>\varepsilon_0$

把 $|f(x_1+h)-f(x_1)|$ 视为 h 的连续函数, 则有

存在区间 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$, 使得 $\inf\limits_{h\in[a_2,b_2]}|f(x_1+h)-f(x_1)|>\varepsilon_0$

对 $[a_2,b_2]\subset[0,+\infty), \exists x_2>x_1$, 使得 $\sup\limits_{h\in[a_2,b_2]}|f(x_2+h)-f(x_2)|>\varepsilon_0$

存在区间 $[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]$, 使得 $\inf\limits_{h\in[a_3,b_3]}|f(x_2+h)-f(x_2)|>\varepsilon_0$

....

存在区间 $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}], \exists x_n>x_{n-1}$, 使得 $\inf\limits_{h\in[a_n,b_n]}|f(x_n+h)-f(x_n)|>\varepsilon_0$

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\ne\varnothing$, 取 $h_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$, 此时 $|f(x_n+h_0)-f(x_n)|>\varepsilon_0$, 这和

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+h_0)-f(x)=0$ 矛盾, 因此, 我们完成了引理3的证明.

分析：

$$x+m-(x+h)\in[a,b]\Leftrightarrow m-h\in[a,b]\Leftrightarrow m-\delta\geq a,m\leq b$$

引理4:

若$f(x)\in C[0,+\infty)$，且$\forall h\geq 0,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+h)-f(x)=0$, 则有

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\exists X>0,$ 使得 $\sup\limits_{h\in[0,\delta]}\left|f(x+h)-f(x)\right|\leq\varepsilon,\forall x\in[X,+\infty)$

引理4证明：

$\forall\varepsilon>0,$由引理3, 有$\exists[a,b]\subset[0,+\infty),\exists X>0,$ 使得

$\sup\limits_{h\in[a,b]}\left|f(x+h)-f(x)\right|\leq\varepsilon,\forall x\in[X,+\infty).$

取$b-a>\delta>0,m=\dfrac{b+a+\delta}{2}$, 此时$x+m-(x+h)\in[a,b],\forall x\geq X$, 因此

$$\sup_{h\in[0,\delta]}\left|f(x+h)-f(x)\right|\leq\sup_{h\in[0,\delta]}\left|f(x+h)-f(x+m)\right|+\sup_{h\in[0,\delta]}\left|f(x+m)-f(x)\right|$$

$$\leq\varepsilon+\left|f(x+m)-f(x)\right|$$

$\exists X_1>X,$ 使得$\left|f(x+m)-f(x)\right|\leq\varepsilon,\forall x\geq X_1,$ 因此我们就有

$\sup\limits_{h\in[0,\delta]}\left|f(x+h)-f(x)\right|\leq 2\varepsilon,\forall x\in[X_1,+\infty)$，我们完成了有引理4的证明.

原命题此时已经完成了证明.

设$f(x)\in C[0,+\infty),\forall x\in(0,+\infty),\lim\limits_{n\to\infty}f(nx)$存在且相同, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在

分析：

把极限存在用集合的语言翻译一下, 这是实分析常用技巧之一.

并是存在,交是任意

数学分析中的$baire$纲定理:$\mathbb{R}^n$中无内点可数无内点闭集之并也无内点

建议数学系大家掌握完整的$baire$空间那套理论,可以阅读那本经典的点集拓扑.

考试可直接使用.

期望对充分大的那些x, 可以用$x=nt,t\in[a,b]$表示出来, 就完成了证明.

前后两个区间是否相交呢?$(n+1)a\le nb\Leftrightarrow n\ge\dfrac{a}{b-a}$

证明:

记$[\ \ ]$是向下取整, 不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}f(nx)=0$

$\forall\varepsilon>0$, 记$A_n=\{x:|f(nx)|\le\varepsilon\}$, $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}A_n=(0,+\infty)$,

显然$\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}A_n$是闭集, $\forall N\ge1$是闭集.

$\exists N_0$, 使得$\bigcap\limits_{n=N_0}^{\infty}A_n\supset[a,b]$, 即$\forall x\in[a,b]$, 有$|f(nx)|\le\varepsilon,\forall n\ge N_0$

$$\bigcup_{n=\max\left\{N_0,\left[\frac{a}{b-a}+1\right]\right\}}^{\infty}[na,nb]=\left[\max\left\{N_0,\left[\frac{a}{b-a}+1\right]\right\}a,+\infty\right)$$

我们可取$X=\max\left\{N_0,\left[\dfrac{a}{b-a}+1\right]\right\}a+1$,

当$x\ge X$, 存在$t\in[a,b],n_0\ge\max\left\{N_0,\left[\dfrac{a}{b-a}+1\right]\right\}$

使得$x=nt$, 此时$|f(x)|=|f(nt)|\le\varepsilon$, 故$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$