数学类(25)

大 Otauber 定理

上课的时候,是根据思维过程,一步一步联想 tauber 定理,pdf 的顺序是严谨的逻辑顺序,可以先读懂一遍证明,再去看视频.
体会思维过程.

今天的核心定理, 设$f(x)>-\dfrac{B}{x},\forall x>0$, 且$\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^{\infty}f(x)e^{-yx}dx=s$, 则$\int_0^{\infty}f(t)dt=s$

设$a>0,\varepsilon>0$

对$g(x)\in C[c,1],g(x)=0,0\le x<c<1$, 必然存在两个连续函数$p,q$使得

$p(x)\le g(x)\le q(x),x\in[0,1]$, 满足$\int_0^1\ln^{a-1}\dfrac{1}{x}(q(x)-g(x))dx\le\varepsilon$

$\int_0^1\ln^{a-1}\dfrac{1}{x}(g(x)-p(x))dx\le\varepsilon$

这里$g(c^+)>0$

分析:

$g(x)$在$x=c$唯一不连续, 我们直接在这个点做一个细小的变换, 使得连续

证明:

$$q(x)=\begin{cases}g(x),x\in(c,1)\\ \text{线性连接},x\in(c-\delta,c]\\ 0,x\in[0,c-\delta]\end{cases}=\begin{cases}g(x),x\in(c,1)\\ g(c^+)\dfrac{x-c+\delta}{\delta},x\in(c-\delta,c]\\ 0,x\in[0,c-\delta]\end{cases}$$

那么取δ足够小, 使得

$$\int_0^1\ln^{a-1}\frac{1}{x}(q(x)-g(x))dx=g(c^+)\int_{c-\delta}^{c}\ln^{a-1}\frac{1}{x}\frac{x-c+\delta}{\delta}dx$$

$\le g(c^+)\int_{c-\delta}^{c}\ln^{a-1}\dfrac{1}{x}dx\le\varepsilon$, 类似的可取$p(x)$, 我们完成了证明

$\forall x>0, e^{-xt}f(t)$在$[0,+\infty)$广义可积,f非负, 设$F(x)=\int_0^{\infty}e^{-xt}f(t)dt$

若$F(x)=\int_0^{\infty}e^{-xt}f(t)dt\sim\dfrac{s}{x^a}, a>0, x\to 0^+$,

则对$g(x)\in C[c,1], g(x)=0, 0\le x<c<1, g(c^+)>0$, 有

$$\int_0^{\infty}e^{-xt}g(e^{-xt})f(t)dt\sim\frac{s}{\Gamma(a)x^a}\int_0^{\infty}e^{-t}g(e^{-t})t^{a-1}dt$$

证明：

$$\frac{1}{(n+1)^a}=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{-(n+1)t}t^{a-1}dt$$

$$\int_0^{\infty}e^{-xt}e^{-nxt}f(t)dt\sim\frac{s}{((n+1)x)^a}=\frac{s}{\Gamma(a)x^a}\int_0^{\infty}e^{-t}e^{-nt}t^{a-1}dt$$

对多项式$p(x)$, 于是就有

$$\int_0^{\infty}e^{-xt}p(e^{-xt})f(t)dt\sim\frac{s}{\Gamma(a)x^a}\int_0^{\infty}e^{-t}p(e^{-t})t^{a-1}dt$$

对连续函数$h(x)$, $\forall\varepsilon>0$, 存在多项式$p(x)$, 使得$|h(x)-p(x)|\le\varepsilon, \forall x\in[0,1]$

$$\left|x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}h(e^{-xt})f(t)dt-\frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{-t}h(e^{-t})t^{a-1}dt\right|$$

$$\le\left|x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}[h(e^{-xt})-p(e^{-xt})]f(t)dt-\frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{-t}[h(e^{-t})-p(e^{-t})]t^{a-1}dt\right|$$

$$+\left|x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}p(e^{-xt})f(t)dt-\frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{-t}p(e^{-t})t^{a-1}dt\right|$$

$$\le\varepsilon x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}f(t)dt+\frac{s\varepsilon}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{a-1}dt,\text{故}$$

$$\varlimsup_{x\to 0^+}\left|x^a\int_0^{\infty}e^{-xt}h(e^{-xt})f(t)dt-\frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{-t}h(e^{-t})t^{a-1}dt\right|\le 2\varepsilon s$$

由ε任意性, 故$\int_0^{\infty}e^{-xt}h(e^{-xt})f(t)dt\sim\dfrac{s}{\Gamma(a)x^a}\int_0^{\infty}e^{-t}h(e^{-t})t^{a-1}dt, x\to 0^+$

自然会提出,是否可以加强到可积函数, 对$g \in R[0,1]$

我们知道$\forall \varepsilon > 0$,存在连续函数$h(x)$, 使得$\int_0^1 |h(x) - g(x)| dx \le \varepsilon$

$$x^a \int_0^\infty e^{-xt} [h(e^{-xt}) - g(e^{-xt})] f(t) dt \overset{y=e^{-xt}}{=} x^a \int_1^0 y [h(y) - g(y)] f\left(\frac{-\ln y}{x}\right) dt$$

$$dy = -xe^{-xt} dt = -xy dt$$

$$= x^{a-1} \int_0^1 [h(y) - g(y)] f\left(\frac{-\ln y}{x}\right) dy$$

注意$\frac{-\ln y}{x}$很难有一致性, 因此是做不到的.

但是此时对于我们需要的特殊情况, 确实是可以继续逼近的, 即

对$g(x)\in C[c,1], g(x)=0, 0\le x<c<1, g(c^{+})>0$, 有

$$\int_0^\infty e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)f(t)dt \sim \frac{s}{\Gamma(a)x^{a}}\int_0^\infty e^{-t}g\left(e^{-t}\right)t^{a-1}dt$$

注意可以找到连续函数$q(x), q(x)\ge g(x), x\in[0,1]$

成立$\int_0^1 \ln^{a-1}\frac{1}{x}\left(q(x)-g(x)\right)dx\le\varepsilon$

即$\int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\left(q\left(e^{-t}\right)-g\left(e^{-t}\right)\right)dx\le\varepsilon$

$$x^{a}\int_0^\infty e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)f(t)dt-\frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-t}g\left(e^{-t}\right)t^{a-1}dt$$

$$\le x^{a}\int_0^\infty e^{-xt}q\left(e^{-xt}\right)f(t)dt-\frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-t}q\left(e^{-t}\right)t^{a-1}dt$$

$$+\frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-t}\left[q\left(e^{-t}\right)-g\left(e^{-t}\right)\right]t^{a-1}dt$$

$$\le x^{a}\int_0^\infty e^{-xt}q\left(e^{-xt}\right)f(t)dt-\frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-t}q\left(e^{-t}\right)t^{a-1}dt+\varepsilon$$

故

$$\lim_{x\to0^{+}}x^{a}\int_0^\infty e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)f(t)dt-\frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-t}g\left(e^{-t}\right)t^{a-1}dt\le\varepsilon$$

类似的, 可以得到下半的界, 由ε任意性, 我们知道

$$\lim_{x\to0^{+}}x^{a}\int_0^\infty e^{-xt}g\left(e^{-xt}\right)f(t)dt=\frac{s}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-t}g\left(e^{-t}\right)t^{a-1}dt$$

我们完成了证明.

设$f(x)>-\frac{B}{x},\forall x>0$, 且$\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^\infty f(y)e^{-yx}dy=s$, 则$\int_0^\infty f(t)dt=s$

证明：

$F(x)=\int_0^\infty f(y)e^{-yx}dy$, 条件即$F(x)\sim s$,

先证明$F'(x)=\int_0^\infty -yf(y)e^{-yx}dy$，事实上,$-xf(x)<B$

即$\int_0^\infty -yf(y)e^{-yx}dy$内闭一致收敛, 事实上, 对$x\in[a,b]$, 有

$$\int_0^\infty \left|-yf(y)\right|e^{-yx}dy\le\int_{-yf(y)<0} ye^{-y\frac{a}{2}}f(y)e^{-y\left(x-\frac{a}{2}\right)}dy+\int_0^\infty Be^{-yx}dy$$

$$\le\int_{-yf(y)<0} ye^{-y\frac{a}{2}}f(y)e^{-y\left(a-\frac{a}{2}\right)}dy+\int_0^\infty Be^{-ay}dy$$

因此在$[a,b]$一致收敛, 所以$F'(x)=\int_0^\infty -yf(y)e^{-yx}dy$

类似的, $F''(x)=\int_0^\infty y^2f(y)e^{-yx}dy>-B\int_0^\infty ye^{-yx}dy=-\frac{B}{x^2}$

由之前视频中的反向洛必达的结果, 我们有$\lim\limits_{x\to 0^+}xF'(x)=0$

$$\int_0^\infty yf(y)e^{-yx}dy=o\left(\frac{1}{x}\right), \text{即}\int_0^\infty \left[yf(y)+B\right]e^{-yx}dy=\frac{B}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

可以取$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},\frac{1}{e}\le x\le 1\\ 0,0\le x<\frac{1}{e}\end{cases}$,

因此$\int_0^\infty e^{-xt}p\left(e^{-xt}\right)\left[tf(t)+B\right]dt\sim\frac{s}{\Gamma(a)x^a}\int_0^\infty e^{-t}p\left(e^{-t}\right)t^{a-1}dt$

$$\int_0^{\frac{1}{x}}\left[tf(t)+B\right]dt\sim\frac{B}{x}\int_0^1 t^{a-1}dt$$

$$\int_0^{\frac{1}{x}}\left[tf(t)+B\right]dt\sim\frac{B}{x}\int_0^1 t^{a-1}dt=\frac{B}{x}\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{x}}tf(t)dt=o\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow\int_0^x tf(t)dt=o(x),$$

由上一次讲的小$otauber$定理充分必要条件, 我们就有$\int_0^\infty f(t)dt=s$

习题：

将上述所有结果(除了逼近部分)翻译成离散版本, 并证明.

注意大$Otauber$定理的证明已经蕴含了通过和函数的阶去估计系数的阶这一类经典习题.