数学类(7)

非数可不掌握，看自己兴趣, 上下极限类型题:

设$a_{n+2021}=\sqrt[2022]{a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+2020}}$,$a_0,a_2,\ldots,a_{2020}\in(0,1)$

计算$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

分析：

$x=\sqrt[2022]{x+x+\ldots+x}=\sqrt[2022]{2021x}\Rightarrow x=\sqrt[2021]{2021}>1$

证明：

由$a_0,a_2,\ldots,a_{2020}<1<\sqrt[2021]{2021}$, 所以假定$a_n,a_{n+1},\ldots,a_{n+2020}<\sqrt[2021]{2021}$

显然有

$a_{n+2021}=\sqrt[2022]{a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+2020}}<\sqrt[2022]{\sqrt[2021]{2021}+\sqrt[2021]{2021}+\ldots+\sqrt[2021]{2021}}=\sqrt[2021]{2021}$

.....

由归纳法,显然有$a_n<\sqrt[2021]{2021}$恒成立.显然$a_n>0$

设$\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=A,\liminf\limits_{n\to\infty}a_n=a$

$A=\limsup\limits_{n\to\infty}a_{n+2021}\le\sqrt[2022]{A+A+\ldots+A}\Rightarrow A\le\sqrt[2021]{2021}$

$a=\liminf\limits_{n\to\infty}a_{n+2021}\ge\sqrt[2022]{a+a+\ldots+a}\Rightarrow a\ge\sqrt[2021]{2021}$

$\Rightarrow a=A=\sqrt[2021]{2021}$

$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}$

证明:$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$

分析：

上一个的递推很像一个纯递增的,所以容易操作

这里取一个纯递减的，就会稍微复杂一点点的

分析：

显然$a_n > 0, a_n, a_{n+1} \le M \Rightarrow a_{n+2} \ge \frac{2}{M}$

$a_n, a_{n+1} \ge m \Rightarrow a_{n+2} \le \frac{2}{m}$

希望构成归纳

期望$\frac{2}{M} \ge m, \frac{2}{m} \le M$,因此期望$mM = 2$

证明:取$C > 0$,使得$\frac{2}{C} \le a_1, a_2 \le C$

因此设$\frac{2}{C} \le a_n, a_{n+1} \le C$,由归纳法

$\frac{2}{C} \le a_{n+1}, a_{n+2} \le C$,故$\frac{2}{C} \le a_n, a_{n+1} \le C$恒成立

设$\limsup_{n\to\infty} a_n = B, \liminf_{n\to\infty} a_n = A$

$$B = \limsup_{n\to\infty} a_{n+2} = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\liminf_{n\to\infty} a_n} + \frac{1}{\liminf_{n\to\infty} a_{n+1}} = \frac{2}{A} \Rightarrow BA \le 2$$

$$A = \liminf_{n\to\infty} a_{n+2} \ge \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \ge \frac{2}{B} \Rightarrow AB \ge 2$$

故$AB = 2$,这递推类似递减的会有一个跨一项凑子列的操作

设$B=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+2},l_1=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k+1},l_2=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k},l_3=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k-1}$

$a_{n_k+2}=\dfrac{1}{a_{n_k}}+\dfrac{1}{a_{n_k+1}}\Rightarrow B=\dfrac{1}{l_2}+\dfrac{1}{l_1}$

$a_{n_k+1}=\dfrac{1}{a_{n_k-1}}+\dfrac{1}{a_{n_k}}\Rightarrow l_1=\dfrac{1}{l_3}+\dfrac{1}{l_2}$

$A\le l_1,l_2,l_3\le B\Rightarrow\dfrac{1}{l_2}+\dfrac{1}{l_1}\le\dfrac{2}{A}=B$

把l_2,l_1放小成A之后居然还是B, 根本没有放

只能是$l_2=l_1=A$,故$A=\dfrac{1}{l_3}+\dfrac{1}{l_2}\ge\dfrac{2}{B}=A$

把l_2,l_3放大成B之后居然还是A,根本没有放

只能是$l_2=l_3=B\Rightarrow B=A\Rightarrow A^2=2\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

递推即使既不是类递增也不类递减也是可以直接使用的

方法无非就是疯狂凑子列极限比大小，唯一需要注意的是

类递减时要跨项取子列，这一步在配凑时没有总结过会难以想到！

(4)(5)非数可以不必掌握

$cauchy$方程:

(4)若$f(x)$在某个正测集上有界,

则$cauchy$方程的解$f\left(x\right)=f\left(1\right)x$

结论$:mA>0,mB>0$

则$A+B$包含一个区间(可以通过卷积来证明)

回到原题,设$f\left(x\right)$在正测集E有上界,

$E+E$包含一个区间I，设$\left|f\left(x\right)\right|\leq M,\forall x\in E$

那么$\forall x\in I,\exists e_1,e_2\in E,$使得$x=e_1+e_2,$

那么就有$\left|f\left(x\right)\right|=\left|f\left(e_1\right)+f\left(e_1\right)\right|\leq 2M$

故$f\left(x\right)$在区间上有界,因此由之前的结论

故$f\left(x\right)=f\left(1\right)x$

$\left(5\right):$若$f\left(x\right)$可测，则$cauchy$方程的解是$f\left(x\right)=f\left(1\right)x$

由$lu\sin$定理，存在有正测度的紧集K和$\mathbb{R}$上的连续函数$F\left(x\right)$

使得$f\left(x\right)=F\left(x\right),\forall x\in K$

由$F(x)$在K上有界知$f\left(x\right)$在K上有界, 由之前结论

故$f\left(x\right)=f\left(1\right)x$

如果$cauchy$方程的解不是线性函数

由之前结论可以知道$f\left(x\right)$处处不连续.

$\left(6\right)$:如果$cauchy$方程的解不是线性函数

则$\left\{\left(x,f\left(x\right)\right):x\in\mathbb{R}\right\}$在$\mathbb{R}^2$稠密

我们用clA表示集合A的闭包

证明:

$f\left(rx\right)=rf\left(x\right),\forall r\in\mathbb{Q},x\in\mathbb{R}$成立

因为$f\left(x\right)$不是线性解：$\exists x_0\in\mathbb{R}$,使得

$f\left(x_0\right)\neq f\left(1\right)x_0$,显然$x_0\neq 0,1$

$\Rightarrow\left(1,f\left(1\right)\right),\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$线性无关

$\Rightarrow\mathbb{R}^2=\left\{a\left(1,f\left(1\right)\right)+b\left(x_0,f\left(x_0\right)\right):a,b\in\mathbb{R}\right\}$

$\Rightarrow\mathbb{R}^2=cl\left\{a\left(1,f\left(1\right)\right)+b\left(x_0,f\left(x_0\right)\right):a,b\in\mathbb{Q}\right\}$

$\Rightarrow\mathbb{R}^2=cl\left\{\left(a+bx_0,f\left(a+bx_0\right)\right):a,b\in\mathbb{Q}\right\}$

$\Rightarrow\mathbb{R}^2=cl\left\{\left(x,f\left(x\right)\right):x\in\mathbb{R}\right\}$

$\Rightarrow\left\{\left(x,f\left(x\right)\right):x\in\mathbb{R}\right\}$在$\mathbb{R}^2$中稠密

非数学通过这个题去了解数学分析中

开集, 闭集, 边界点, 聚点, 闭包, 孤立点, 稠密

内点以及聚点定理. . .

下面构造$cauchy$方程的非线性解:

本部分非数无需掌握

$$\begin{cases} f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right) \\ f\left(rx\right)=rf\left(x\right) \end{cases}, r\in\mathbb{Q}$$

显然把$\mathbb{R}$视为$\mathbb{Q}$上的线性空间,$cauchy$方程本质就是

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是个线性映射,

注意到$\mathbb{R}$视为$\mathbb{Q}$上的线性空间是无穷维的.

这可以由域扩张$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$是个超越扩张得到(即取无穷个线性无关的数)

取S是线性空间$\mathbb{R}$的基,S是无穷集, 令$g:S\to\mathbb{R}$是通常的函数

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{N}c_i\eta_i\to\sum_{i=1}^{N}c_i g\left(\eta_i\right)\eta_i,\ \forall\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\eta_N\in S,\ N\in\mathbb{N}$$

实际上这就是一个cauchy方程的非通常意义的线性解.

任何线性空间都有基$\left(这个结果依赖于zorn引理\right)$:

直观上，随便取一个非0向量, 如果不是基, 那么就添加一个向量
使得构成的集合线性无关, 如果还不是基, 就继续添加一个向量
使得构成的集合线性无关，如果还不是基. . . .
操作无穷次之后似乎就可以了, 这个逻辑似乎是对的又似乎是错的
所以在承认选择公理的情况下, 我们直接用$zorn$引理默认其是严谨的
(当然需要验证一些条件)

什么时候用$zorn$引理?: 需要操作无穷次的时候到底是对的还是错的
$zorn$: 若偏序集的每一个全序子集都有上界, 则必有极大元, 极大元
往往就是我们所构造的$\left(术语自行学习\right)$
向量空间V一定有基的严谨证明:
令$M=\left\{S:\ S\subset V，S线性无关\right\}$，按集合包含关系成为偏序集.
令T是M的全序子集. 要在M中构造一个T的上界(往往就是全部集合并起来)
令$K=\bigcup\limits_{A\in T}A$, 显然只需证明$K\in M$，显然只需证明$K$线性无关
$\forall x_1,x_2,...,x_n\in K$, 而这$x_1,x_2,...,x_n$只能属于有限个$A_i$
而全部A_i两两可比较, 则必有一个A_i包含这有限个A_i
$x_1,x_2,...,x_n\in$这个最大的$A_i\Rightarrow x_1,x_2,...,x_n$线性无关$\Rightarrow K$线性无关
故M存在极大元S_0, 无关是显然的, 只需证明能表出所有向量.
否则$\exists a\in V$, 否则$S_0\bigcup\left\{a\right\}$线性无关, 这是一比极大元更大的元, 矛盾！
故S_0能表出所有向量.