数学类(17)

对一般的代数闭域都对,对非代数闭域,需要其特征值在域里面

$jordan$乘法及加法分解

设$A\in M_n(\mathbb{C})$,则存在$B,C\in M_n(\mathbb{C})$,使得

$(1): A=C+B,(2): C$幂零,B可对角化,$(3): BC=CB$

更强的,存在无常数项的多项式p,q,使得$B=p(A),C=q(A)$

且满足$(1)(2)(3)$的B,C是唯一的.

设$A\in M_n(\mathbb{C})$且可逆,则存在$B,C\in M_n(\mathbb{C})$,使得

$(1): A=CB,(2): C$特征值全为单位元,B可对角化,$(3): BC=CB$

更强的,存在无常数项的多项式p,q,使得$B=p(A),C=q(A)$

且满足$(1)(2)(3)$的B,C是唯一的.

存在性：

可以找到可逆矩阵$P\in M_n(\mathbb{C})$,使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$

J_i是属于特征值λ_i的所有$jordan$块组成的分块对角矩阵,其中λ_i两两互不相同
故可以不仿设

$$A=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_1-\lambda_1 I & & & \\ & J_2-\lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s-\lambda_s I \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda_1 I & & & \\ & \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I \end{pmatrix}$$

$=C+B$,显然C,B满足(1),(2),(3)，
只需构造没有常数项的多项式$p\in\mathbb{C}[x]$,
使得$p(A)=B$,令$q=x-p\in\mathbb{C}[x]$,就有$q(A)=c$,并且q没有常数项,
下构造p使得$p(J_i)=\lambda_i I,i=1,2,...,s,p(0)=0$

就有$p(A)=\begin{pmatrix} p(J_1) & & & \\ & p(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(J_s) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 I & & & \\ & \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I \end{pmatrix}$

设J_i的极小多项式是$(\lambda-\lambda_i)^{s_i},s_i\geq 1,i=1,2,...,s$,

因为$(\lambda-\lambda_i)^{s_i}$两两互素,所以有小学数学的中国剩余定理.

我们知道如下同余方程组$p(x)\equiv\lambda_i\left(\mathrm{mod}(\lambda-\lambda_i)^{s_i}\right),i=1,2,...,s$有解.

如果这些λ_i里面有一个为0,此时显然有$p(0)=0$,

如果这些λ_i里面没有0,此时在同余方程组补上一个方程$p(x)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\lambda)$即可

此时就有$p(J_i)=\lambda_i I,i=1,2,...,s$,因此$p(A)=B$满足我们的要求 存在性证毕！

唯一性：

设A还有一组分解满足(1),(2),(3),$A=C'+B'=C+B$

注意C',B'不一定是A的多项式,$C'-C=B-B'$

因为C'和B',C'可交换,所以C'和A可交换,所以C'和C可交换，类似的B'和B可交换

利用结论：可对角化的两个矩阵可同时相似对角化(后证)

故可不妨设B,B'都是对角矩阵,取n足够大,$(C'-C)^n=(B-B')^n$

利用C'，C幂零性，就有$(B-B')^n=0\Rightarrow B=B'\Rightarrow C=C'$,因此证明了唯一性

存在性：

可以找到可逆矩阵$P\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$,使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$

J_i是属于特征值λ_i的所有$jordan$块组成的分块对角矩阵,其中λ_i两两互不相同
故可以不仿设

$$A=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{J_1}{\lambda_1} & & & \\ & \frac{J_2}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{J_s}{\lambda_s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 I & & & \\ & \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I \end{pmatrix}$$

$=C+B$,显然C,B满足(1),(2),(3),

只需构造没有常数项的多项式$p\in\mathbb{C}\left[x\right]$,就有$h\in\mathbb{C}\left[x\right]$,使得$C=Ap\left(A\right)^{-1}=Ah\left(P\right.$

使得$p\left(A\right)=B$,令$q=x\cdot h\circ p\in\mathbb{C}\left[x\right]$,就有$q\left(A\right)=C$,并且$q$没有常数项,

下构造p使得$p\left(J_i\right)=\lambda_i I, i=1,2,...,s, p\left(0\right)=0$

$$就有p\left(A\right)=\begin{pmatrix} p\left(J_1\right) & & & \\ & p\left(J_2\right) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p\left(J_s\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 I & & & \\ & \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I \end{pmatrix}$$

设J_i的极小多项式是$\left(\lambda-\lambda_i\right)^{s_i}, s_i\geq 1, i=1,2,...,s$,

因为$\left(\lambda-\lambda_i\right)^{s_i}$两两互素,所以有小学数学的中国剩余定理.

我们知道如下同余方程组$p\left(x\right)\equiv\lambda_i\left(\bmod\left(\lambda-\lambda_i\right)^{s_i}\right), i=1,2,...,s$有解.

如果这些λ_i里面有一个为0,此时显然有$p\left(0\right)=0$,

如果这些λ_i里面没有0,此时在同余方程组补上一个方程$p\left(x\right)\equiv 0\ \left(\bmod\lambda\right)$即可

此时就有$p\left(J_i\right)=\lambda_i I, i=1,2,...,s$,因此$p\left(A\right)=B$满足我们的要求.存在性证毕!

唯一性：

设A还有一组分解满足(1),(2),(3), $A=C'B'=CB$

注意C',B'不一定是A的多项式, $C^{-1}C'=B\left(B'\right)^{-1}$

因为C'和B',C'可交换, 所以C'和A可交换, 所以C'和C可交换，

类似的B'和B可交换

利用结论：两个可交换的复矩阵可同时相似上三角化(后证)

有$C^{-1}C'$特征值全为1，故$B\left(B'\right)^{-1}$特征值全为1.

之后便可以不妨设$B,\left(B'\right)^{-1}$是对角矩阵, 这样$B\left(B'\right)^{-1}=E$, 故$B=B'$

因此证明了乘法版本的唯一性.

应用：

设A为n阶复矩阵，考虑线性变换：

σ_A：$M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), X \to AX - XA$

证明：A可对角化$\Leftrightarrow \sigma_A$可对角化.

证明：

先来看一个漂亮的结果：

设A有$j-c$分解$B+C$，B可对角化，C幂零

$\sigma_A = BX - XB + CX - XC = \sigma_B + \sigma_C$

$\sigma_B \circ \sigma_C(X) = \sigma_B(CX - XC) = B(CX - XC) - (CX - XC)B = \sigma_C \circ \sigma_B(X)$

断言σ_C是幂零变换，设$\sigma_C X = \lambda X \Leftrightarrow CX - XC = \lambda X \Leftrightarrow (C + \lambda E)X = XC$

利用结论：$AX = XB$有非0解的充分必要条件是A, B有公共特征值(后证)

C的特征值全为0，若$\lambda \neq 0, C + \lambda E$特征值全为$\lambda$，因此$X = 0$，故$\sigma_C$是幂零变换

断言σ_B可对角化，因为B是可对角化的，不妨设B为对角矩阵(见视频交换图).

设$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, (\sigma_B X)_{i,j} = (\lambda_i - \lambda_j) X_{ij}$,

显然σ_B在基$\{E_{i,j}\}_{i,j=1}^n$下的矩阵是对角矩阵，σ_B可对角化

故σ_B, σ_C是A的$j-c$分解

A可对角化$\Leftrightarrow A$的$j-c$分解的幂零部分是0

这是因为$A = B + C = A + 0, B$可对角化，C幂零，$BC = CB$，

由$jordan$分解的唯一性我们知道，$B = A, C = 0$

记住上面的结果

回到原题：因此$\Rightarrow$已经证明过了，对于$\Leftarrow$：

若σ_A可对角化，$\sigma_C X = 0, \forall X \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow CX = XC \Rightarrow C$是幂零的数量矩阵

因此A可对角化，我们完成了证明.

奇异值分解$\left(\text{对应复版本可类似写出}\right)$:

设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$,存在实正交矩阵$U\in\mathbb{R}^{m\times m}$和$V\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得

$U^TAV=\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,$\Lambda$是$r$阶对角矩阵且对角线为正数,$r=r\left(A\right)$.

证明:

如果已经证明了命题, 那么我们有:

$$\left(U^TAV\right)^TU^TAV=V^TA^TAV=\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

A^TA半正定, Λ对角线上的元素是A^TA非0特征值全体开方.

原题证明:

因为A^TA是实对称半正定的矩阵，故可以找到正交矩阵$V\in\mathbb{R}^{n\times n}$,使得

$$V^TA^TAV=\begin{pmatrix}\Lambda^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}，V=\left(V_1，V_2\right)，V^TA^TAV=\begin{pmatrix}V_1^TA^TAV_1 & V_1^TA^TAV_2\\ V_2^TA^TAV_1 & V_2^TA^TAV_2\end{pmatrix}$$

V_1是$n\times r$矩阵，V_2是$n\times\left(n-r\right)$矩阵

$V_2^TA^TAV_2=0\Rightarrow\left(AV_2\right)^T\left(AV_2\right)=0\Rightarrow AV_2=0,V_1^TA^TAV_1=\Lambda^2$ $\left(\text{用之于}U_1\text{的取法}\right)$

$$V^TV=E\Rightarrow\begin{pmatrix}V_1^TV_1 & V_1^TV_2\\ V_2^TV_1 & V_2^TV_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$$

考虑$U=\left(U_1,U_2\right),U^TAV=\begin{pmatrix}U_1^TAV_1 & U_1^TAV_2\\ U_2^TAV_1 & U_2^TAV_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_1^TAV_1 & 0\\ U_2^TAV_1 & 0\end{pmatrix}$

$U_1:m\times r,U_2:m\times\left(m-r\right)$

$U_1^TAV_1=\Lambda$，$U_1=AV_1\left(\Lambda\right)^{-1}$，$U_1^TU_1=\left(\Lambda\right)^{-1}V_1^TA^TAV_1\left(\Lambda\right)^{-1}=E$，

所以U_1列向量组是标准正交向量组,我们可以把U_1扩充为正交矩阵

$U_2^TAV_1=U_2^TU_1\Lambda=0$

奇异值分解的证明过程就是计算过程, 算一下高年级组决赛真题熟悉一下.