数学类(11)

设$f(x)\in C(\mathbb{R})$,且$\lim\limits_{h\to+\infty}\left[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\right]=0$，$\forall x\in\mathbb{R}$, 证明$f(x)$是线性函数

证明:

$$\lim_{h\to+\infty}\left[f(-x+h)-2f(-x)+f(-x-h)\right]=0=\lim_{h\to+\infty}\left[f(-(x-h))-2f(-x)+f(-(x+h))\right]=0$$

于是我们注意到$f(-x)$也满足上面的极限

引理:实函数$f(x)$可以分解为偶函数和奇函数之和.

引理证明:假设$f_1(x)$偶函数,$f_2(x)$奇函数

$f(x)=f_1(x)+f_2(x), f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)-f_2(x)$

$f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, f_2(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$,引理完成了证明.

回到原题, 故只需要对$f(x)$是奇函数或者偶函数分别讨论即可,

当$f(x)$是偶函数,$x=0$代入, $\lim\limits_{h\to+\infty}\left[f(h)-2f(0)+f(-h)\right]=0$, 故$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{h\to+\infty}\left[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\right]=2f(0)-2f(x)=0\Rightarrow f(x)\equiv f(0)$

当$f(x)$是奇函数, $\forall x>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f(x+nx)-2f(x)+f(x-nx)\right]=0$

因此$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f((n+1)x)-f(nx-x)\right]=2f(x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f((n+1)x)-f((n-1)x)\right]=2f(x)$

回想:$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+p}-x_n=a$, 那么$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=\dfrac{a}{p}$, 因此有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(nx)}{n}=f(x)$, 由奇函数, 因此

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(nx)}{n}=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ 然后$\forall m\in\mathbb{N}_+, f(mx)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(nmx)}{n}=m\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(nmx)}{nm}=mf(x)$

因为$f(x)$奇函数, 故$f(mx)=mf(x), \forall m\in\mathbb{Z}, \forall\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$, 有$nf\left(\dfrac{m}{n}x\right)=f(mx)=mf(x)$

故$\forall\lambda\in\mathbb{Q}$, 有$f(\lambda x)=\lambda f(x)$, 对任何无理数$r$, 存在$\lambda_n\in\mathbb{Q}$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=r$, 因此,

由$f(x)$连续性, 故$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, 有$f(\lambda x)=\lambda f(x)$, 令$x=1, f(\lambda)=\lambda f(1)$, 故$f(x)$一定线性.

若$f(x)\in C[a,b]$,且对任意$x\in(a,b)$，成立$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=0$

证明: $f(x)$是线性函数.

分析：不妨设$f(a)=f(b)=0$,否则,$g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$即可

下证$f(x)\equiv 0,\forall x\in[a,b]$,若不然,不妨设$x_0\in(a,b)$, $f(x_0)>0$, (否则用$-f$代替f即可)

不妨设$f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}=0$，卡在临界处.

证明：

不妨设$f(a)=f(b)=0$,则,$g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$即可

反证, 如果命题不成立, 不妨设$x_0\in(a,b)$, $f(x_0)>0$, (否则用$-f$代替f即可)

构造$\varphi(x)=f(x)+\varepsilon(x-a)(x-b)$，这里$\varepsilon>0$,使得$f(x_0)+\varepsilon(x_0-a)(x_0-b)>0$

此时有$\varphi(a)=\varphi(b)=0$,不妨设$\varphi(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]}\varphi(x)>0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x_0+h)-2\varphi(x_0)+\varphi(x_0-h)}{h^2}=4\varepsilon>0$$

但是$\dfrac{\varphi(x_0+h)-2\varphi(x_0)+\varphi(x_0-h)}{h^2}\le 0$,矛盾！, 我们完成了证明.

仔细体会我这里反复修改证明的真实思路！

设$f(x)$在x_0邻域内有定义, 并且满足:$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$存在,
则称$f(x)$在x_0是$schwarz$可导的, 记为$f^s(x_0)$.
核心定理:
$schwarz$导数的拉格朗日中值定理:
如果$f(x)\in C[a,b]$,在(a,b) $schwarz$可导, 则存在$x_1,x_2\in(a,b)$, 使得

$$f^s(x_1)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le f^s(x_2)$$

证明：类比拉格朗日中值定理证明,我们先证罗尔中值定理的版本, 然后
对$f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$使用罗尔中值定理的版本即可.
$schwarz$导数的罗尔中值定理:
如果$f(x)\in C[a,b]$,在(a,b) $schwarz$可导,$f(a)=f(b)=0$
则存在$x_1,x_2\in(a,b)$,使得:$f^s(x_2)\le 0\le f^s(x_1)$
证明：
如果$f(x)\equiv 0$,显然,故不妨设存在$c\in(a,b)$, 使得$f(c)>0$ (否则用$-f$代替f即可)
取$k\in(0,f(c))$,构造$U=\{x\in[a,c]:f(x)>k\}$,U是非空有界集, 由确界原理
设$\inf U=x_1$,$\exists t_n\in U$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=x_1,t_n\ge x_1$, 如果$x_1\in U,f(x_1)>k$
因为f连续,必然存在比x_1小的数x_3, 使得$f(x_3)>k$, 此时和下确界矛盾,
因此$x_1\notin U$,故$t_n>x_1$

$$f^s(x_1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h}=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_1+t_n-x_1)-f(x_1-(t_n-x_1))}{2(t_n-x_1)}$$

$$\ge\lim_{n\to+\infty}\frac{k-k}{2(t_n-x_1)}=0$$

故x_1已找到,考虑$-f$,此时的x_1就是所需要的x_2,因此我们完成了证明.

若$f(x)$在$[a,b]$连续,(a,b) $schwarz$可导, 且$f^{s}(x)\geq 0$, 则$f(x)$递增.
证明：
对$x_2>x_1, x_1, x_2\in(a,b)$,由拉格朗日中值定理,$\exists\,\theta\in(x_1,x_2)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq f^{s}(\theta)\geq 0\Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1),\text{故}f(x)\text{递增}.$$

若$f(x)$在$[a,b]$连续,(a,b) $schwarz$可导, 且$f^{s}(x)\in C(a,b)$,
则$f(x)$在(a,b)可导, 且满足$f'(x)=f^{s}(x), x\in(a,b)$
证明：
对固定的$x_1\in(a,b)$,对$x_2>x_1$,由拉格朗日中值定理,$\exists\theta_1$，$\theta_2\in(x_1,x_2)$,使得

$$f^{s}(\theta_2)\geq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq f^{s}(\theta_1),$$

$$f^{s}(x_1)=\lim_{x_2\to x_1^{+}}f^{s}(\theta_2)\geq\lim_{x_2\to x_1^{+}}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq\lim_{x_2\to x_1^{+}}f^{s}(\theta_1)=f^{s}(x_1)$$

因此$f(x)$在x_1右可导, 且$f_{+}'(x_1)=f^{s}(x_1)$,类似的,讨论左导数即可,
最后我们有$f'(x)=f^{s}(x), x\in(a,b)$

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$,并且$f(x+1)=f(x),\forall x\geq 0$, 且$f(x)\in C[0,1]\bigcap D(0,1)$

并有$f(0)=0$, $f'(x)$在$(0,1)$递减, 证明:$f(nx)\leq nf(x),\forall n\in\mathbb{N}$

证明：

由$f'(x)$在$(0,1)$递减，因此$f(x)$在$(0,1)$上凸,由连续性, 显然$f(x)$在$[0,1]$是上凸的,

$\forall x\in[0,+\infty)$, $x=[x]+\{x\}$,因此, $f(nx)\leq nf(x)\Leftrightarrow f(n\{x\})\leq nf(\{x\})$

所有我们不妨设$x\in[0,1)$, $x=0$是显然的,所以不妨设$x\in(0,1)$, $n\geq 1$

注意到$nx\geq x$,因此当$nx\leq 1$时, 有$\dfrac{f(nx)-f(0)}{nx-0}\leq\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$,这便是$f(nx)\leq nf(x)$

当$nx>1$,设自然数$N\geq 1$，使得$nx=N+a, a\in[0,1)$, 只需证明$f(a)\leq nf(x)$

若$a\leq x$,则$f(x)\geq\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}(x-1)=\dfrac{f(a)}{a-1}(x-1)$, 显然$f(x)$非负

$\dfrac{f(a)}{a-1}(x-1)\geq\dfrac{f(a)}{n}\Leftrightarrow f(a)\left(\dfrac{x-1}{a-1}-\dfrac{1}{n}\right)\geq 0$，因此只需$\dfrac{x-1}{a-1}-\dfrac{1}{n}\geq 0$

因此只需$n-nx\geq 1-a$,因此只需要$n-N\geq 1$,注意到$n>nx=N+a\geq N$,

至此我们证明了$f(a)\leq nf(x)$.

对称的,若$a>x$,则$f(x)\geq\dfrac{f(a)-f(0)}{a}x=\dfrac{f(a)}{a}x$, 只需$\dfrac{x}{a}\geq\dfrac{1}{n}$

因此只需$nx\geq a$,注意到$nx=N+a\geq a$,因此有$f(a)\leq nf(x)$.