数学类(29)

证明：

在n维欧式向量空间V中，两两夹角为钝角的非0向量个数至多只有$n+1$个

证明：

先构造$n+1$个两两夹角为钝角的单位向量，

$n=1$是显然的,假定对维数小于n的空间的确是存在的,

对n时, 在V的一个$n-1$维子空间中取n个夹角为锐角的向量.

记为$a_1, a_2, \ldots, a_n$, 考虑这个子空间的正交补空间的一个单位向量β

取$a_1-\lambda\beta, a_2-\lambda\beta, \ldots, a_n-\lambda\beta, \beta$

$\left(a_i-\lambda\beta, \beta\right)=-\lambda<0, i=1,2,\cdots,n,$ 只需$\lambda>0$

$\left(a_i-\lambda\beta, a_j-\lambda\beta\right)=\left(a_i, a_j\right)+\lambda^2<0, 1\le i<j\le n,$ 只需$\lambda^2<\min\limits_{1\le i<j\le n}-\left(a_i, a_j\right)$

于是,这样的λ肯定是存在的,

$a_i-\lambda\beta=\beta\Rightarrow\beta=\dfrac{a_i}{1+\lambda}\in$ 子空间矛盾！$a_i-\lambda\beta=a_j-\lambda\beta\Rightarrow a_i=a_j\Rightarrow i=j$

所以上述构造的确是互不同的, 我们完成了构造.

再证明任何两两夹角为钝角的单位向量个数至不超过$n+1$个

$n=1$显然, 设小于n的时候成立, 在n时，假定有$n+2$个单位向量

$a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, 两两夹角为钝角.

受存在性的构造启发, 我们把$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$相对$a_{n+2}$正交化$\left(\text{不必单位化}\right)$.

令$\beta_i=a_i-\left(a_i, a_{n+2}\right)a_{n+2}, i=1,2,\cdots,n+1$

于是$\left(\beta_i, a_{n+2}\right)=0, i=1,2,\cdots,n+1$

$\left(\beta_i, \beta_j\right)=\left(a_i, a_j\right)-\left(a_i, a_{n+2}\right)\left(a_j, a_{n+2}\right)<0, 1\le i<j\le n+1$

注意$\beta_1, \cdots, \beta_{n+1}$张成的空间至多是$n-1$维的, 由归纳假设

他应该至多只有n个两两正交的，矛盾！我们完成了证明.

证明：

实对称矩阵A正交相似于对角线全为0的矩阵充分必要条件是$tr\left(A\right)=0$

必要性显然.

充分性：

回忆复版本我们通过初等变换解决了他，类似的

(1)：如果有一个对角元为0, 不妨设为a_{11}（否则同时交换行列使得a_{11}移到左上角即可）

设$A=\begin{pmatrix}0 & \beta \\ \eta^T & A_{n-1}\end{pmatrix}$,$tr\left(A\right)=0\Rightarrow tr\left(A_{n-1}\right)\Rightarrow 0$, 运用归纳法, 存在正交矩阵$T$，使得

$T^{-1}A_{n-1}T$为对角线全为0的矩阵, 考虑$T_2=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & T\end{pmatrix}$，则$T_2^{-1}AT_2$对角元全为0

(2): 若对角线全不为0, 设A的二阶右下角$\begin{pmatrix}a_{n-1} & x \\ y & a_n\end{pmatrix}$, 且$a_{n-1}, a_n$不同号

（否则, 因为$tr\left(A\right)=0$, 必有两个对角元不同号, 那么交换行列即可.）

我们考虑这样的正交矩阵$\begin{pmatrix}E & 0 & 0 \\ 0 & -b & a \\ 0 & a & b\end{pmatrix}$, $a^2+b^2=1$

考虑$\begin{pmatrix}E & 0 & 0 \\ 0 & -b & a \\ 0 & a & b\end{pmatrix}^T A\begin{pmatrix}E & 0 & 0 \\ 0 & -b & a \\ 0 & a & b\end{pmatrix}$的二阶右下角是

$$\begin{pmatrix}-b & a \\ a & b\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}a_{n-1} & x \\ y & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b & a \\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ba_{n-1}+ay & -bx+aa_n \\ aa_{n-1}+by & ax+ba_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b & a \\ a & b\end{pmatrix}$$

考虑右下角的元素，期望他是0

$$\begin{cases}a^2a_{n-1}+ab\left(x+y\right)+b^2a_n=0 \\ a^2+b^2=1\end{cases}$$

能不能找到$\left(a,b\right)$, 使得上述成立？

$a=\cos\theta, b=\sin\theta$

考虑$f\left(\theta\right)=\cos^2\theta a_{n-1}+\cos\theta\sin\theta\left(x+y\right)+\sin^2\theta a_n$

注意$f\left(0\right)=a_{n-1}, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a_n$, 由零点定理, 我们知道这样的$a$, b存在，

从而我们把问题化归回了(1).证毕！

最难高代真题之一:

n维欧式空间V中的s个向量a_i满足$\sum_{i=1}^{s} c_i a_i = 0, c_i \ge 0, s \in \mathbb{N}$, 则$c_1 = c_2 \cdots = c_s = 0$

证明：存在$a \in V$, 使得$\left(a, a_i\right) > 0$

分析：

不妨设$V = \mathbb{R}^n$, 对集$E \subset \mathbb{R}^n$，我们记

$$coE = \left\{ \sum_{i=1}^{m} cx_i : \sum_{i=1}^{m} c_i = 1, c_i \ge 0, x_i \in E, i = 1, 2, ..., m, m \in \mathbb{N} \right\}$$

题目条件是说$0 \notin coE, E = \left\{a_1, a_2, \cdots, a_s\right\}$

现在泛函分析角度下思考这个问题(如果没学过可以暂时搁置)

方法1：点到闭凸集的最佳逼近元

在$Hilbert$空间里,点到闭凸集的最佳逼近元应该满足一个内积不等式

即某种意义下夹角为钝角(见张恭庆上册).

对于本题来说,取a是0到coE的最佳逼近元, 于是利用上面提到的内积不等式

$\forall y \in coE$, 有$\left(0 - a, y - a\right) \le 0, \Leftrightarrow \left(a, y\right) \ge \left(a, a\right) > 0$

特别的取$y = a_i$, 就有$\left(a, a_i\right) > 0, i = 1, 2, \cdots, s$

方法2 : 凸集分离定理和里斯表示定理($Ascoli$定理)

$E = \left\{a_1, a_2, \cdots, a_s\right\}$是紧的,由$coE$是紧的(后证)

因为$0 \notin coE$,以及coE闭凸, 由泛函分析中$Ascoli$定理(或直接证)

注意0是coE的外点,故由凸集分离定理

存在连续线性泛函f严格分离0和coE,即$\exists s \in \mathbb{R}$, 使得

$f\left(coE\right) > s > f\left(0\right) = 0$,由里斯表示定理, 存在$a \in V$, 使得

$f\left(x\right) = \left(a, x\right)$, 特别的取$x = a_i, \left(a, a_i\right) > 0, i = 1, 2, \cdots, s$

则a为所求.

方法3：线性代数和数学分析方法

构造$f\left(t_1,t_2,\cdots,t_s\right)=\left\|t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_sa_s\right\|_{\mathbb{R}^n}^2$

是紧集$K=\left\{\left(t_1,t_2,\cdots,t_s\right)\in\mathbb{R}^s:\sum_{i=1}^{s}t_i=1,t_i\geq 0,i=1,2,\cdots,s\right\}$上连续函数

故存在$\left(t_1^0,t_2^0,\cdots,t_s^0\right)\in\mathbb{R}^s$，使得$f\left(t_1,t_2,\cdots,t_s\right)$在$\left(t_1^0,t_2^0,\cdots,t_s^0\right)$达到$K$上的最小值.

下证$a=\sum_{i=1}^{s}t_i^0a_i$为所求.

对$a_i,i=1,2,\cdots,n$

$$\left(\left(1-t\right)a+ta_i,\left(1-t\right)a+ta_i\right)\geq\left(a,a\right),\forall t\in\left[0,1\right]$$

展开计算就有

$$\left(t^2-2t\right)\left(a,a\right)+2t\left(1-t\right)\left(a,a_i\right)+t^2\left(a_i,a_i\right)\geq 0,\forall t\in\left[0,1\right]$$

故

$$\left(t-2\right)\left(a,a\right)+2\left(1-t\right)\left(a,a_i\right)+t\left(a_i,a_i\right)\geq 0,\forall t\in\left[0,1\right]$$

令$t\to 0$，我们就有$\left(a,a_i\right)\geq\left(a,a\right)>0$

故a为所求，注意这个方法其实就是方法1的初等翻译.

我们运用线性代数来证明一个组合结论;

$\mathbb{R}^n$中集K的凸包coK中的元素可以由项数不超过$n+1$的K中的元素凸组合表示出来.

证明:

对$x\in coK$, 设$x=\sum_{i=1}^{k+1}c_i x_i, \sum_{i=1}^{k+1}c_i=1, c_i\geq 0, x_i\in k, i=1,2,\cdots,k+1$

如果$k\leq n$, 则没什么好证的, 如果$k>n$, 则构造

令Λ_x: $\mathbb{R}^{k+1}\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^{n+1}$

$(t_1,t_2,\cdots,t_{k+1})\to\left(\sum_{i=1}^{k+1}t_i x_i, \sum_{i=1}^{k+1}t_i\right)$, 显然$\cdot\Lambda_x$不能是单射.

即存在不全为0的$(t_1,t_2,\cdots,t_{k+1})$, 使得$\sum_{i=1}^{k+1}t_i x_i=0, \sum_{i=1}^{k+1}t_i=0$

取$\lambda\in\mathbb{R}$, 使得$\lambda t_i\leq c_i$, 且存在某个j, 使得$\lambda t_j=c_j$, 令

$x=\sum_{i=1}^{k+1}(c_i-\lambda t_i)x_i$, 注意到此时仍然是凸组合且必有一个系数为0.

如果此时表出项数还是$>n+1$, 则继续类似操作.

因此我们证明了$\mathbb{R}^n$中集K的凸包coK中的元素

可以由项数不超过$n+1$的K中的元素凸组合表示出来.

来证明一个线性代数结果, 即

$\mathbb{R}^n$中紧集K的凸包也是紧的

(学过泛函分析的同学想想看, 无穷维这个结果会怎么样)

分析：构造一个紧集上的连续函数，来利用连续保紧性即可.

下节课证明.