数学类(5)

$f(x):[a,b]\to[a,b], |f(x)-f(y)|\le|x-y|$

$x_1\in[a,b], x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+f(x_n)\right)$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

证明:

小结论:闭区间到自身的连续函数必有不动点, 显然

记$f(x)$不动点x_0, 显然也有$x_0=\frac{1}{2}\left(x_0+f(x_0)\right)$

$$|x_{n+1}-x_0|=\frac{1}{2}|x_n+f(x_n)-x_0-f(x_0)|$$

$$\le\frac{1}{2}|x_n-x_0|+\frac{1}{2}|f(x_n)-f(x_0)|\le|x_n-x_0|$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x_0|=l$存在, 故$x_n$只有两个聚点.

$$|x_{n+1}-x_n|=\frac{1}{2}|x_n+f(x_n)-x_{n-1}-f(x_{n-1})|\le|x_n-x_{n-1}|$$

$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|$存在.

结论:若不收敛有界数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$, 则$\{x_n\}$的聚点是个区间.

设$c\in(\inf x_n,\sup x_n)$不是聚点, 故$\exists\delta>0$, 充分小, 使得

$(c-\delta,c+\delta)$中不含有x_n的项.由$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$, 可以找到一个$N$

使得$|x_{n+1}-x_n|<\delta,\forall n\ge N$, 显然存在$n_1,n_2\ge N$, 使得

$x_{n_1}\le c-\delta, x_{n_2}\ge c+\delta$，不妨设$n_2>n_1$, 显然, $\exists n_1<n_3<n_2$

使得$x_{n_3}\in(c-\delta,c+\delta)$, 这样就矛盾了！因此$\{x_n\}$的聚点是个区间.

回到原题:故如果x_n有两个聚点$\pm l+x_0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|\ne0$

取一个子列$\{n_k\}$使得, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=l+x_0$, $\{x_{n_k+1}\}$必有收敛子列

不妨仍然记为$\{n_k\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n_k+1}-x_{n_k}|\ne0$, 故$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k+1}=-l+x_0$

故

$$2l=\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-x_n|\le\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(x_0)-x_n+x_0|$$

$$\le\lim_{n\to\infty}|x_n-x_0|=l\Rightarrow l=0$$，这样就矛盾了！

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(l-\sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n}}}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{e}}{2}$$

显然$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n}}}=l$存在

想法：把$l-a_n$表示出来

结论：设正数列a_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$存在或为确定的无穷.

那么$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$（取对数$stolz$显然）

证明：

记$b_n=\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt{n+1+\sqrt{n+2+...+\sqrt{n+m}}}$

$$\le\lim_{m\to\infty}\sqrt{n+1+\sqrt{(n+2)+\sqrt{(n+2)^2...+\sqrt{(n+2)^{2^{m-2}}}}}}$$

$$\le\sqrt{n+1+\sqrt{(n+2)}\sqrt{1+\sqrt{1+1+....}}}=\sqrt{n+1+c\sqrt{(n+2)}}$$

$b_n\ge\sqrt{n+1}$,由夹逼准则,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{n}}=1$

$$l=\sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n+b_n}}}$$

$$l-a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n+b_n}}}-\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}}$$

$$=\frac{1}{2^n\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k+\sqrt{k+1+\ldots+\sqrt{n+\theta_n}}}},\theta_n\in\left(0,b_n\right)$$

这里$f\left(x\right)=\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n+x}}}$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2^n\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k+\sqrt{k+1+\ldots+\sqrt{n+x}}}}$$

$$l-a_n\le\frac{1}{2^n\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k}},$$

$$\sqrt{n}\left(l-a_n\right)^{\frac{1}{n}}\le\sqrt{n}\left(\frac{1}{2^n\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k}}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^n\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{2^n\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k+\sqrt{k+1+\ldots+\sqrt{n+\theta_n}}}}\ge\frac{1}{2^n\prod_{k=1}^{n}b_k}$$

$$\sqrt{n}\left(l-a_n\right)^{\frac{1}{n}}\ge\left(\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^n\prod_{k=1}^{n}b_k}\right)^{\frac{1}{n}}$$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(l-a_n\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{e}}{2}$

考研真题：

$f(x)$是$\mathbb{R}$上递增的函数且满足$f(x+1)=f(x)+1$

设$x_{n+1}=f(x_n)$

证明:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$存在且与$x_1$无关

证明:

(1):我们用$x_n=f^{n-1}(x), n\geq 1, f^0(x)=x, f^n(x)=f\left(f^{n-1}(x)\right)$

当$|x-y|\leq 1$时, 不妨设$y<x\leq y+1$, 此时

$$\left|f(y)-f(x)\right|=f(x)-f(y)\leq f(y+1)-f(y)=1$$

$$\Rightarrow\left|f^2(y)-f^2(x)\right|\leq 1\ldots\Rightarrow\left|f^n(y)-f^n(x)\right|\leq 1$$

(2): 显然$f^n(x+k)=f^n(x)+k, n\geq 0, k\in\mathbb{Z}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f^n(x)-f^n(y)\right|}{n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f^n(x)-f^n(x-[x])+f^n(x-[x])-f^n(y-[y])+f^n(y-[y])-f^n(y)\right|}{n}$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\left|[x]\right|+\left|[y]\right|+1}{n}=0$$

故如果有某一个初值x_0, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^n(x_0)}{n}$存在, 则所有$x$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^n(x)}{n}$存在.并且极限值$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^n(x)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^n(x_0)}{n}$.

(3):

$f^{jm}(x)=x+j\left(f^{m}(x)-x\right)$

$f^{m}\left(f^{jm}(x)\right)=f^{m}\left(x+j\left(f^{m}(x)-x\right)\right)$

$=x+f^{m}(x)-x+j\left(f^{m}(x)-x\right)$

$=x+(j+1)\left(f^{m}(x)-x\right)$

其实就是视f^{m}为初值和迭代来的.

如果对某个x,和某个$m\geq 1$,有$f^{m}(x)-x\in\mathbb{Z}$

对任何一个自然数n,可以$\bmod m$分类

即$n=jm+r,r=0,1,\ldots,m-1$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{f^{jm+r}(x)}{jm+r}=\lim_{j\to\infty}\frac{f^{r}\left(f^{jm}(x)\right)}{jm+r}=\lim_{j\to\infty}\frac{f^{r}\left(x+j\left(f^{m}(x)-x\right)\right)}{jm}$$

$$=\lim_{j\to\infty}\frac{f^{r}(x)+j\left(f^{m}(x)-x\right)}{jm}=\frac{f^{m}(x)-x}{m}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{n}(x)}{n}$

后见下次课.

真题:

设$\delta>0, a\in(0,1)$,实数列满足:

$x_{n+1}=x_n\left(1-\frac{h_n}{n^a}\right)+\frac{1}{n^{a+\delta}}, h_n$有正的上下界, 证明:

$\left\{n^\delta x_n\right\}$有界.

思想：加强归纳, 本题甚至不需要猜尾巴, 直接归纳即可.

一句话证明：若即$n^\delta x_n\le M$,如何推出$(n+1)^\delta x_{n+1}\le M$

即:$\left|x_{n+1}\right|=\left|x_n\left(1-\frac{h_n}{n^a}\right)\right|+\frac{1}{n^{a+\delta}}\le\frac{M}{n^\delta}\left(1-\frac{h_n}{n^a}\right)+\frac{1}{n^{a+\delta}}\le\frac{M}{(n+1)^\delta}$?

分析：

$$\frac{M}{n^\delta}\left(1-\frac{h_n}{n^a}\right)+\frac{1}{n^{a+\delta}}\le\frac{M}{(n+1)^\delta}?$$

$$\frac{M}{n^\delta}\left(1-\frac{c}{n^a}\right)+\frac{1}{n^{a+\delta}}\le\frac{M}{(n+1)^\delta}?$$

$$\Leftrightarrow M\left(\frac{1}{n^\delta}-\frac{c}{n^{a+\delta}}\right)+\frac{1}{n^{a+\delta}}\le\frac{M}{(n+1)^\delta}?$$

$$\Leftrightarrow M\left(\frac{n^{a+\delta}}{(n+1)^\delta}-n^a+c\right)\ge 1?$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a+\delta}}{(n+1)^\delta}-n^a=\lim_{n\to\infty}n^a[\frac{n^\delta}{(n+1)^\delta}-1]$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^a[\frac{n^\delta-(n+1)^\delta}{(n+1)^\delta}]=\lim_{n\to\infty}n^a[\frac{-\delta n^{\delta-1}}{(n+1)^\delta}]$$

$$=-\delta\lim_{n\to\infty}n^{a-1}=0$$

证明：

因为h_n有正的上下界,所以我们可以找到N,使得$n \geq N_2$,

$0<1-\frac{h_n}{n^a} \leq 1-\frac{c}{n^a}$,这里$c=\inf h_n>0$

显然$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{a+\delta}}{(n+1)^{\delta}}-n^a+c=c$,故$\exists N_1$，使$n \geq N_1$,使得

$\frac{n^{a+\delta}}{(n+1)^{\delta}}-n^a+c \geq \frac{c}{2}$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,$M=\max\left\{\frac{2}{c},|x_1|,2^{\delta}|x_2|,\ldots,N^{\delta}|x_N|\right\}$

当$n=1,2,\ldots,N$时,$n^{\delta}|x_n| \leq M$,设n时成立,下证$n+1$时成立：

$|x_{n+1}| \leq |x_n|\left(1-\frac{c}{n^a}\right)+\frac{1}{n^{a+\delta}} \leq \frac{M}{n^{\delta}}\left(1-\frac{c}{n^a}\right)+\frac{1}{n^{a+\delta}}$

$=M\left(\frac{1}{n^{\delta}}-\frac{c}{n^{a+\delta}}\right)+\frac{1}{n^{a+\delta}} \leq \frac{M}{(n+1)^{\delta}}$,由归纳法，我们证毕！