数学类(15)

本节课主要是为非数学专业决赛选手所准备的,线性代数基本结论,未说明数域的，代表一切数域皆成立,对于实对称矩阵性质来说，一般可以平行推广到复 hermite 矩阵,非数学是不需要掌握的.

分块矩阵初等变换$\left(\text{相应分块初等矩阵左乘和右乘}\right)$:

1:交换行列

2:用某一行矩阵左乘一个矩阵加到另一行,

或者用某一列矩阵右乘一个矩阵加到另一列

3：某一行左倍乘一个可逆矩阵,或某一列右乘一个可逆矩阵

例子:$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ C+A^2 & D+AB \end{pmatrix}$相当于$\begin{pmatrix} E & 0 \\ A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+A^2 & D+AB \end{pmatrix}$

效果：不改变秩,保持行列式信息$\left(\text{具体不必记忆}\right)$,打洞可计算分块矩阵的逆,伴随.

结论：设A是$m*n$矩阵,B是$n*m$矩阵，则有$\left|E-AB\right| = \left|E-BA\right|$

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_m - AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & B \\ 0 & E_m - AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & B \\ A & E_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n - BA & B \\ A & E_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n - BA & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}$$

注意上面需要的初等变换都是$\begin{pmatrix} E & 0 \\ * & E \end{pmatrix},\begin{pmatrix} E & * \\ 0 & E \end{pmatrix}$去左右乘,因此保持行列式不变.

于是我们完成了证明.

当$\lambda \neq 0, \left|\lambda E_m - AB\right| = \lambda^m \left|E_m - \dfrac{1}{\lambda}AB\right| = \lambda^m \left|E_n - \dfrac{1}{\lambda}BA\right| = \lambda^{m-n}\left|\lambda E_n - BA\right|$

注意到左边右边$\left(\text{不妨设}m \geq n\right)$都是关于$\lambda$的多项式，因此特别的$\lambda$=0也是对的.

结论：设A,B,C是矩阵$\left(\text{未必方阵,只要下面式子有意义,就有}\right)$

$r\left(ABC\right) \geq r\left(AB\right) + r\left(BC\right) - r\left(B\right)$

$$\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & 0 \\ BC & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -AB \\ BC & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}$$

利用课内结论：$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$,于是我们有$r\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BC \end{pmatrix}$

课内结论的证明只需要取A的最高阶非0子式和B的最高阶非零子式

组成一个新的非0子式即可!

变式：倍乘初等变换如果倍乘的不可逆, 则秩只可能会减少.

设A,B是方阵, 有$AB=BA$, 证明：$r\left(A\right)+r\left(B\right)\geq r\left(A+B\right)+r\left(AB\right)$

证明：

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & B \\ -A & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{退化}} \begin{pmatrix} A+B & B\left(A+B\right) \\ -A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & \left(A+B\right)B \\ -A & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ -A & AB \end{pmatrix}$$

故$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ -A & AB \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, 完了证明.

设A是n阶矩阵,C是m阶矩阵, 若$\left|A\right|\neq 0,\left|D-CA^{-1}B\right|\neq 0$, 计算$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

设A是n阶矩阵,C是m阶矩阵，对一般情况计算$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{*}$

若$\left|A\right|\neq 0,\left|C\right|\neq 0$,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{*}=\left|\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1}=\left|\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\left|A\right|\left|C\right|\begin{pmatrix} \dfrac{A^{*}}{\left|A\right|} & -\dfrac{A^{*}BC^{*}}{\left|A\right|\left|C\right|} \\ 0 & \dfrac{C^{*}}{\left|C\right|} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left|C\right|A^{*} & -A^{*}BC^{*} \\ 0 & \left|A\right|C^{*} \end{pmatrix}$$

对于一般情况,取$\lambda_k\to 0$, 使得$\lambda_k E+C,\lambda_k E+A$可逆, 考虑

$$\begin{pmatrix} \lambda_k E+A & B \\ 0 & \lambda_k E+C \end{pmatrix}^{*}=\begin{pmatrix} \left|\lambda_k E+C\right|\left(\lambda_k E+A\right)^{*} & -\left(\lambda_k E+A\right)^{*}B\left(\lambda_k E+C\right)^{*} \\ 0 & \left|\lambda_k E+A\right|\left(\lambda_k E+C\right)^{*} \end{pmatrix}$$

注意到取伴随和取行列式的运算都是多项式级别的, 那么是连续的, 令$\lambda_k\to 0$

就有$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{*}=\begin{pmatrix} \left|C\right|A^{*} & -A^{*}BC^{*} \\ 0 & \left|A\right|C^{*} \end{pmatrix}$

结论：A^*, A^{-1} (当A可逆)是A的多项式并且计算A^*的特征值

证明：$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$是$A$的特征多项式,$a_n=1, f(A)=0,$

当A可逆,$a_0\neq 0,$

$$A\left(a_1E+\cdots A^{n-1}\right)=-a_0E\Rightarrow A^{-1}=-\frac{a_1E+\cdots A^{n-1}}{a_0}$$

$$A^*=|A|A^{-1}=(-1)^n a_0A^{-1}=(-1)^{n-1}\left(a_1E+\cdots A^{n-1}\right)$$

当A不可逆的时候, 取$\lambda_k\to 0$, 使得λ_kE+A是可逆的, 因此

$\left(\lambda_kE+A\right)^*=(-1)^{n-1}\left(a_1E+\cdots\left(A+\lambda_kE\right)^{n-1}\right)$, 注意到

取伴随是矩阵元的多项式级别的操作,因此是连续的，令$\lambda_k\to 0$

$$A^*=(-1)^{n-1}\left(a_1E+\cdots A^{n-1}\right)$$

结论：求逆矩阵的形式幂级数法(先猜后证, 收敛性都不必管),

设A是m阶矩阵, 若$A^n=0$，对$a\neq 0$, 求$(aE-A)^{-1}$

$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{a^k}$$

故猜出$(aE-A)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{A^k}{a^{k+1}}$

初等变换下的相似合同$\left(\text{证明是显然的,验证初等矩阵即可}\right)$：

合同：对行列做相同的初等变换得到矩阵是合同的.

相似：

1：同时交换行列$\left(\text{更强的, 正交相似}\right)$

$2: j$行的k倍加到第i行,同时i列的$-k$倍加到第j列

$3:$某一行乘以非0的k,同时对应的列乘$\dfrac{1}{k}$

$A \sim B$或者$A \cong B$都是存在可逆P，使得$P^{-1}AP = B$,$P^{T}AP = C$

P是初等矩阵的积, 因此上述初等变换还是充要的.

但是对于正交相似，实际上面只是一阶操作，并不是充要的.

当然会有二阶,三阶操作,见后面.

例：证明:$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$

因为上课打字不方便, 举一个四阶例子，一般类似的

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{同时}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{同时}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{同时}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

因此$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

分块初等变换下的相似合同(证明只需写出初等矩阵验证即可):

合同:

1:同时交换行列(更强的, 正交相似)

2:i行(列)左(右)乘C倍加到第j行(列), 同时i列(行)右(左)C^T加到第j列(行).

3:i行(列)左(右)乘可逆C倍，同时i列(行)右(左)乘C^T倍

相似:

1：同时交换行列(更强的, 正交相似)

2：i行(列)左(右)乘C倍加到第j行(列), 同时j列(行)右(左)$-C$加到第i列(行).

3:i行(列)左(右)乘可逆C倍，同时i列(行)右(左)乘C^{-1}倍.

半正定矩阵：实对称, 且$x^T Ax \geq 0, \forall x$

作业：非数学专业的同学学习半正定矩阵定义及其性质.

结论：半正定矩阵的行列式小于等于对角线之积, a_{ii}是A的对角元.

证明:

不妨设是矩阵A是正定的, 否则, 考虑$A+\lambda E$，$\lambda > 0$

$x^T(A+\lambda E)x \geq 0, \forall x$, 若$x^T(A+\lambda E)x = x^T Ax + \lambda x^T x = 0 \Rightarrow \lambda x^T x = 0 \Rightarrow x = 0$

故$A+\lambda E$正定, 那么$|A+\lambda E| \leq \prod_{i=1}^{n}(a_{ii}+\lambda)$, 令$\lambda \to 0$, $|A| \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

当A正定时证明

(配合矩阵打洞, 只要能把维数降低, 就可通过归纳法完成证明):

A_{n-1}可逆

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \beta \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_{n-1} & \beta \\ 0 & a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1}\beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{同时}} \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1}\beta \end{pmatrix}$$

$A \cong \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1}\beta \end{pmatrix}$, 因为上述初等变换不改变行列式且$A_{n-1}^{-1}$正定, 所以

$|A| = |A_{n-1}|\left(a_{nn} - \beta^T A_{n-1}^{-1}\beta\right) \leq a_{nn}|A_{n-1}| \Rightarrow$ 由归纳法我们完成了证明.

A,B是同阶方阵.

若$AB=BA$，则$\left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right|=\left|AD-BC\right|$

给定n阶矩阵A, A的特征多项式f满足$f(A)=0$,

定义：多项式$p(x)$满足, $p(A)=0$, 称为A的零化多项式

定义：次数最低的首1零化A的多项式$m(x)$称为A的极小多项式.

定理：$m(x) \mid p(x)$, $p(x)$是A的零化多项式, $m(x)$是A的极小多项式

定理：$m(x)$, $f(x)$有相同的零点(不计重数),

$f(x)$是A的特征多项式, $m(x)$是A的极小多项式.

定理：A可对角化等价于A的极小多项式分解为一次多项式的积.

定理：$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$的极小多项式=每个块极小多项式的最小公倍数.

定义：n阶矩阵$J_n(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}, a\in\mathbb{C}$称为$jordan$块.

以下习题以后可以直接使用，证明都是直接矩阵乘法计算.

习题1：计算$J_n^{\,2}(0), J_n^{\,3}(0), J_n^{\,4}(0)\ldots, J_n^{\,n}(0)$感受他的漂亮

习题2：证明$J_n(a)$的特征多项式和极小多项式都是$(\lambda-a)^n$

习题3：设$g(x)$是多项式, 计算$g(J_n(a))$

习题4：设$AJ_n(a)=J_n(a)A$, 则存在多项式$p(x), A=p(J_n(a))$

$($相对麻烦一点$)$习题5：求$J_n(a)X=XJ_m(a)$全部$m\times n$解X.

在复数域上计算矩阵A的jordan(相似标准型）