数学类(18)

设A是$m\times m$矩阵,B是$n\times n$矩阵,X是$m\times n$矩阵, 研究$AX=XB$解空间

课内：$AX=XB$有非0解充要条件是A,B有公共特征值.

上述矩阵方程本质上是线性方程组的解, 因此$\left(\text{维数}\right)$不随域扩张而改变.

我们在代数闭域$\left(\text{复数域}\right)$上研究即可.

$$\text{不妨设}A=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_t \end{pmatrix}$$

J_i和T_j是相同特征值对应的$jordan$块的全体组成的分块对角矩阵.

不妨设$J_1,J_2,\cdots J_{s_0}$分别和$T_1,T_2,\cdots T_{s_0}$特征值对应相同,$0\le s_0\le\min\left\{s,t\right\}$

把X对应的分块为$X_{ij},1\le i\le s,1\le j\le t$

$AX=XB\Leftrightarrow J_iX_{ij}=X_{ij}T_j,,1\le i\le s,1\le j\le t$

$J_iX_{ij}=X_{ij}T_j,1\le i\le s,1\le j\le t$可以提供非0解$\Leftrightarrow 1\le i=j\le s_0$

$$\dim W=\sum_{i=1}^{s_0}\dim\left\{X:J_iX=XT_i\right\}$$

对固定的$1\le i\le s_0$, 计算

$$\text{我们把}J_i=\begin{pmatrix} J_{1'} & & & \\ & J_{2'} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{s'} \end{pmatrix},T_i=\begin{pmatrix} T_{1'} & & & \\ & T_{2'} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_{t'} \end{pmatrix}$$

每个对角成分都是$jordan$块！.

把X_{ii}对应分块为$X_{i'j'},J_{i'}X_{i'j'}=X_{i'j'}T_{j'}$, 此时不管$i',j'$取什么, 都有非0解！

由之前叫完成的计算习题,我们知道$\dim\left\{X:J_{i'}X=XT_{j'}\right\}=\min\left\{J_{i'}\text{阶数},T_{j'}\text{阶数}\right\}$

最终结果：

设s_0是A,B的公共特征值数,$J_1,J_2,\cdots J_{s_0}$分别和$T_1,T_2,\cdots T_{s_0}$特征值对应相同

设J_i由n_{i1},n_{i2},n_{ip_i}阶相同特征值对应$jordan$块组成

设T_i由t_{i1},t_{i2},t_{iq_i}阶相同特征值对应$jordan$块组成

故$\dim W\left(\text{交结数}\right)=\sum_{i=1}^{s_0}\sum_{r=1}^{p_i}\sum_{l=1}^{q_i}\min\left\{n_{ir},t_{il}\right\}$

推论：设s_0是A,B的公共特征值数, 则$AX=XB$必有一个秩$\geq s_0$的解.

证明：因为第一次对X分块时，对角线上有s_0个块都能提供非0解,

而提供一个非0解就至少提供一个秩, 因为就得到必有一个秩$\geq s_0$的解.

推论：

计算与n阶矩阵A可交换的矩阵空间的维数$\left(\text{不随域扩张而改变}\right)$

在上述结果中设$A=B,s_0$是A的特征值的个数$\left(\text{不计重数}\right)$

设J_i由$n_{i,1},n_{i,2},\cdots n_{i,m_i}$阶相同特征值对应$jordan$块组成

于是$\dim C\left(A\right)=\sum_{i=1}^{s_0}\sum_{r=1}^{m_i}\sum_{l=1}^{m_i}\min\left\{n_{i,r},n_{i,l}\right\}$

推论：

设$F\left(A\right)$是矩阵A的多项式空间, 熟知$\dim F\left(A\right)=A$极小多项式次数

$F\left(A\right)\subset C\left(A\right)$,那么

$F\left(A\right)=C\left(A\right)\Leftrightarrow\dim F\left(A\right)=\dim C\left(A\right)$

$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{s_0}\max\left\{n_{i,1},n_{i,2},\cdots n_{i,m_i}\right\}=\sum_{i=1}^{s_0}\sum_{r=1}^{m_i}\sum_{l=1}^{m_i}\min\left\{n_{i,r},n_{i,l}\right\}$

$\Leftrightarrow m_i=1,1\leq i\leq s_0$

$\Leftrightarrow$每种特征值只有一个$jordan$块

$\Leftrightarrow$每种特征值几何重数都是1

$\Leftrightarrow$对每个特征值$\lambda,r\left(\lambda E-A\right)=n-1$

$\Leftrightarrow$特征多项式=极小多项式

$\overset{\text{接下来核心任务}}{\Leftrightarrow}$不变子空间个数有限！

研究A的不设A是数域K上线性空间V的线性变换,设特征多项式$f(\lambda)$

有标准分解$p_1^{r_1}(\lambda)p_2^{r_2}(\lambda)\cdots p_s^{r_s}(\lambda)$,其中$p_i(\lambda), i=1,2,\cdots,s$两两互素变子空间

由课本定理,

$V=\ker f(A)=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker p_i^{r_i}(A)$,任取$A$的不变子空间$U$,下证明$U=\bigoplus_{i=1}^{s}\left(U\cap\ker p_i^{r_i}(A)\right)$

对$x\in U, \exists u_i\in\ker p_i^{r_i}(A), i=1,2,\cdots,s$,使得$x=\sum_{i=1}^{s}u_i$,只需证明$u_i, i=1,2,\cdots,s\in U$即可

我们想把u_i暴露出来,让其余$u_j=0(j\neq i)$,

于是由中国剩余定理,可取多项式$g_i(x)\in K[x]$,使得

$\begin{cases} g_i(x)\equiv 0\left(\bmod p_j^{r_j}(x)\right), j\neq i \\ g_i(x)\equiv 1\left(\bmod p_i^{r_i}(x)\right), j\neq i \end{cases}$,此时就有$g_i(A)x=\sum_{j=1}^{s}g_j(A)u_j=u_i\in U$

因此$U=\bigoplus_{i=1}^{s}\left(U\cap\ker p_i^{r_i}(A)\right)$(注意为什么仍然是直和?)

$\ker p_i^{r_i}(A)$显然是A的不变子空间,考虑$A|_{\ker p_i^{r_i}(A)}$,断言$A|_{\ker p_i^{r_i}(A)}$特征多项式是$p_i^{r_i}(\lambda)$

这是因为在$\bigoplus_{i=1}^{s}\ker p_i^{r_i}(A)$取好基后,$A$的矩阵是一个分块对角的,

且$A|_{\ker p_i^{r_i}(A)}$的特征值必然是A的特征值,因此$A|_{\ker p_i^{r_i}(A)}$特征多项式整除$p_i^{r_i}(\lambda)$,

如果$A|_{\ker p_i^{r_i}(A)}$是$p_i^{s_i}(\lambda), s_i<r_i$,那么会导致$A$的特征多项式的第$i$个成分恰好是$p_i^{s_i}(\lambda)$

这和假设是矛盾的!

注意到$U\cap\ker p_i^{r_i}(A)$是$A|_{\ker p_i^{r_i}(A)}$不变子空间,反之任取W_i是$A|_{\ker p_i^{r_i}(A)}$不变子空间

都有$\bigoplus_{i=1}^{s}W_i$是A的不变子空间.

因此我们只需要考虑

设A是数域K上线性空间V的线性变换,设特征多项式$f(\lambda)=p^r(\lambda)$,$p(\lambda)$不可约

研究A的不变子空间

首先有$V=\ker p^r(A)$,且$\ker p^s(A)$是A的不变子空间

设$0\le s\le r$,计算$\dim\ker p^s(A)$

$\dim\ker p^s(A)=n-r\left(p^s(A)\right)$,矩阵秩不随域扩张改变而改变!

设$\deg p=d>0,\dim V=rd$

在$\mathbb{C}$上考虑$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_d)$,$\lambda_i$两两互不相同

$$A=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_d\end{pmatrix},p^s(A)=\begin{pmatrix}p^s(J_1)&&&\\&p^s(J_2)&&\\&&\ddots&\\&&&p^s(J_d)\end{pmatrix}$$

其中J_i是$jordan$块,设J_i的特征值λ,$p^s(J_i)=(J_i-\lambda E)^s*$可逆

那么注意到如果特征多项式$\neq$极小多项式,

那么$(J_i-\lambda E)^s$的秩讨论起来比较复杂

但是当特征多项式$=$极小多项式,$J_i-\lambda E$一定是r阶的!$\Rightarrow$

$r\left(p^s(J_i)\right)=r(J_i-\lambda E)^s=r-s\Rightarrow r\left(p^s(A)\right)=d(r-s)$

此时期望任何一个A的不变子空间U，形如$U=\ker p^s(A)$

事实上$A|_U$，设$A|_U$的特征多项式是$p^s(\lambda)$,$p^s(A|_U)=0$

故$U\subset\ker p^s(A)$，而$sd=\dim U,\dim\ker p^s(A)=dr-d(r-s)=ds$

故$U=\ker p^s(A)$

因此在特征多项式$=$极小多项式的情况,不变子空间被完全刻画清楚了!

并且说明了,若特征多项式$=$极小多项式则不变子空间个数有限

反之,设特征多项式不等于极小多项式!,设极小多项式为$p^s(\lambda)$,$1\le s<r$

任取$a\neq 0\in V$,考虑a生成的A不变子空间$V_a=\left\langle a,Aa,A^2a,\ldots\right\rangle$

而$p^s(A)=0$,这告诉我们$V_a=\left\langle a,Aa,A^2a,\ldots,A^{ds-1}a\right\rangle$,$\dim V_a<\dim V=rd$

因此可取$a_2\notin V_a$,继续考虑a_2生成的A的不变子空间$V_{a_2},\ldots$,由覆盖定理

真子空间的并不能可能$=$全空间,因此这样的操作可以持续下去,这就是

无穷个不变子空间!