数学类(20)

设V是n维欧式空间,对V中的非零向量v,

定义$s_v:V\to V$为$s_v(u)=u-\dfrac{2(u,v)}{(v,v)}v,\forall u\in V$

定义$Gr_k(V)$为V的全体k维子空间组成的集合,对$W\in Gr_k(V)$

定义$s_{[W]}:V\to V,s_{[W]}=s_{v_1}s_{v_2}\cdots s_{v_k}$,其中$v_1,v_2,\cdots,v_k$是$W$的标准正交基.

(1):证明$s_{[W]}$良定.

证明:

把$v_1,v_2,\cdots,v_k$扩充为V上的标准正交基$v_1,v_2,\cdots,v_n$

$s_{[W]}(v_j)=s_{v_1}s_{v_2}\cdots s_{v_k}(v_j)$

对单位向量v,注意到$s_v(u)=\begin{cases}u,(u,v)=0\\-u,u=v\end{cases}$

因此对$n\geq j>k,s_{v_1}s_{v_2}\cdots s_{v_k}(v_j)=v_j$

因此对$k\geq j\geq 1,s_{v_1}s_{v_2}\cdots s_{v_k}(v_j)=s_{v_1}s_{v_2}\cdots s_{v_j}(v_j)=-v_j$

因此$s_{[W]}$把W中的元素变成相反数,把$W^\perp$保持不变.

P_W表示在W上的正交投影,由此有$s_{[W]}=-P_W+P_{W^\perp}=I-2P_W$

右边不依赖于正交基的选取, 因此$s_{[W]}$是良定的.

(2):证明${s_{[W]}}^2=I$

$(I-2P_W)^2=I^2+4P_W^2-4P_W=I^2+4P_W-4P_W=I$

(3): 证明：对$W, W' \in Gr_k(V)$, 如果$s_{[W]}(W') = W'$等价于

$W' = (W' \cap W) \oplus (W' \cap W^{\perp})$

证明：

$s_{[W]}(W') = W' \Leftrightarrow s_{[W]}(W') \subset W'$且$s_{[W]}|_{W'}$是满射(单射)

把W的标准正交基$v_1, v_2, \cdots, v_k$扩充为V上的标准正交基$v_1, v_2, \cdots, v_n$

把W'的标准正交基$v_1', v_2', \cdots, v_k'$扩充为V上的标准正交基$v_1', v_2', \cdots, v_n'$

$v_j' = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i, v_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} v_i'$，$j = 1, 2, \cdots, n$

显然有$c_{ij} = (v_j', v_i), d_{ij} = (v_j, v_i'), i, j = 1, 2, \cdots, n$

因此$c_{ij} = d_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots n$

设$(v_1', v_2', \cdots, v_k') = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, A是k阶矩阵, B是$(n-k) \times k$阶矩阵

$s_{[W]}(W') \subset W' \Leftrightarrow$ 关于矩阵X的线性方程组$\begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X$有解...$(i)$

$s_{[W]}(W') = W' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix} X = 0$只有0解...$(ii)$

注意到$\begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$的列向量组是$k$个标准正交的向量构成, 因此线性无关

$\begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}$恰有$k$列, $r\begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix} = k$, 因此$(ii)$天然成立.

现在充分必要条件转化为(i), 即等价于

$r\begin{pmatrix} A & -A \\ B & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = k$

$\begin{pmatrix} A & -A \\ B & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 2B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

现在充分必要条件转化为

$r(A) + r(B) = k$

那么注意到$r\left(A\right)=\dim W\cap W',r\left(B\right)=\dim W^{\perp}\cap W'$

因此充分必要条件转化为

$$\dim\left(W\cap W'\right)+\dim\left(W^{\perp}\cap W'\right)=k$$

注意到$\left(W\cap W'\right)\oplus\left(W^{\perp}\cap W'\right)\subset W'$天然成立.

因此$\left(W\cap W'\right)\oplus\left(W^{\perp}\cap W'\right)=W'\Leftrightarrow$

$$\dim\left(W\cap W'\right)+\dim\left(W^{\perp}\cap W'\right)=k$$

这样就我们完成了证明!

(4)：设$W, W' \in Gr_k(V)$, 证明：$s_{[W]}(W') = W' \Leftrightarrow s_{[W']}(W) = W$

证明：

为了更贴合课程，我们采用矩阵方法.

$$(v_1', v_2', \cdots, v_n') = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (v_1', v_2', \cdots, v_n')\begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix}$$

所以$s_{[W]}(W') = W' \Leftrightarrow r(A) + r(B) = k$

$s_{[W']}(W) = W \Leftrightarrow r(A^T) + r(C^T) = r(A) + r(C) = k$

本题是让我们证明, 对于正交矩阵$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$, $r(C) = r(B)$一定成立.

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T + CC^T & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^TA + B^TB & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$r(B) = r(B^TB) = r(I_k - A^TA) = r(I_k - AA^T) = r(CC^T) = r(C)$$

其中$r(I_k - A^TA) = A^TA$非1特征值个数, $r(I_k - AA^T) = AA^T$非1特征值个数

运用结论(待会证明)：AB和BA有完全一样的非0特征值的jordan块

由于A^TA，AA^T是可对角化的, 且A是方阵, 因此A^TA，AA^T特征值完全一样.

所以我们完成了证明.

(5): 定义 $Gr_k(V)$ 的一个子集 X 为有趣集, 若 $s_{[W]}(W')=W', \forall W,W'\in X$.
计算 X 中元素至多有多少个.
证明：

$s_{[W]}(W')=W'$ 且 $s_{[W']}(W)=W \Leftrightarrow W'=(W'\cap W)\oplus(W'\cap W^{\perp})$

$\Leftrightarrow W'$ 是 W 的一个子空间和 $W^{\perp}$ 一个子空间的直和.

记所求的 X 中元素至多有 $a_{n,k}$ 个

(不必严谨)猜一下最大有趣集有多少个:
$V=W\oplus W^{\perp}, W, W^{\perp}$ 对称且后者是 $n-k$ 维
猜想 $a_{n,k}=a_{n,n-k}$,
设 V 的标准正交基为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$
全体 $\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}, 1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$, 显然构成
有趣集 X，这里共有 C_n^k 个子空间.
猜想 C_n^k 为所求.

设 $V=W\oplus W^{\perp}=(V_1^{\perp}\cap W)\oplus V_1\oplus V_2\oplus(V_2^{\perp}\cap W^{\perp})$（大家自行验证）

其中 $V_1\subset W, V_2\subset W^{\perp}, W$ 和 $V_1\oplus V_2\in$ 有趣集 X

对 $U_1\subset V_1\oplus V_2, U_2\subset(V_1^{\perp}\cap W)\oplus(V_2^{\perp}\cap W^{\perp}), U_1\oplus U_2\in$ 有趣集 X

考虑 $(U_1\cap V_1),(U_1\cap V_2),(U_2\cap(V_1^{\perp}\cap W)),(U_2\cap(V_2^{\perp}\cap W^{\perp}))$

我们证明

$$(U_1\oplus U_2)\cap W=(U_1\cap V_1)\oplus(U_2\cap(V_1^{\perp}\cap W))$$

$$(U_1\oplus U_2)\cap W^{\perp}=(U_1\cap V_2)\oplus(U_2\cap(V_2^{\perp}\cap W^{\perp}))$$

只需证明第一个,第二个同理;

对 $x+y\in(U_1\oplus U_2)\cap W, x\in U_1, y\in U_2$

$x=b+d, y=b'+d', b\in V_1, d\in V_2, b'\in V_1^{\perp}\cap W, d'\in(V_2^{\perp}\cap W^{\perp})$

$b+d+b'+d'\in W$, 注意到 $b+b'\in W, d+d'\in W^{\perp}\Rightarrow d+d'=0$

而 $d\in V_2, d'\in V_2^{\perp}$, 因此 $d=d'=0, x=b\in V_1, y=b'\in V_1^{\perp}\cap W$

$x+y\in(U_1\cap V_1)\oplus(U_2\cap(V_1^{\perp}\cap W))$

因此 $(U_1\oplus U_2)\cap W\subset(U_1\cap V_1)\oplus(U_2\cap(V_1^{\perp}\cap W))$，另外半边显然, 完成了证明.

接下来构建$a_{n,k}$递推, $k>n,k<0$时约定为0

$V=W\oplus W^{\perp}$

W取子空间V_1,维数记s,那么任何一个$O\in$有趣集X，且$\dim(O\cap W)=s$

那么有$(O\cap V_1)\oplus(O\cap(V_1^{\perp}\cap W))=O\cap W,(O\cap V_2)\oplus(O\cap(V_2^{\perp}\cap W^{\perp}))=O\cap W^{\perp}$

分别在空间$W,W^{\perp}$中看,

相当于找k维空间的s维子空间构成的极大有趣集,

找$n-k$维空间的$k-s$维子空间构成的极大有趣集.

然后这两个极大有趣集的元素各取一个尽可能做直和,

这样就得到$a_{k,s}a_{n-k,k-s}$个我们需要的有趣集

s可遍历0到n,因此我们需要的极大有趣集个数是$=\sum_{s=0}^{k}a_{k,s}a_{n-k,k-s}$

显然$a_{n,0}=a_{n,n}=1,a_{n,n-1}=a_{n,1}=n$,那么由二重归纳法(百度)或者直接递推就有

$a_{n,k}=C_n^k$

数学专业对本题要求不高的同学只需要掌握充分必要条件的推导

后面的部分组合技巧过于浓厚，花时间思考了似乎也没啥大用！