数学类(8)

$\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ 聚点集是$[-1,1]$

这是数分里面涉及一点点数论味道的经典模板,需要记住.

引理:$\{x\}=x-[x]$,对a是正无理数,则有$\{\{na\}\}_{n=1}^{\infty}$在$[0,1)$中稠密

引理证明:

即证任意给定$\eta\in[0,1)$,$\forall\varepsilon>0$,都能找到$n\in\mathbb{N}_{+}$,使得$|\eta-\{na\}|<\varepsilon$

$\forall 1>\varepsilon>0$,取$m>\max\left\{\dfrac{1}{\varepsilon},\dfrac{1}{1-\eta}\right\}$

$[0,1)=\bigcup\limits_{k=1}^{m}\left[\dfrac{k-1}{m},\dfrac{k}{m}\right)$,$\{\{na\}\}_{n=1}^{\infty}$是无穷多个,于是对某个$k_0\in\mathbb{N}$,$\exists s>j\geq 1$,使得

$\left[\dfrac{k_0-1}{m},\dfrac{k_0}{m}\right)$含有$\{sa\},\{ja\}$,$|\{sa\}-\{ja\}|\leq\dfrac{1}{m}$,

由高中数学知$\{sa\}-\{ja\}=\{(s-j)a\}$或者$\{(s-j)a\}-1$

如果:$\{sa\}-\{ja\}=\{(s-j)a\}$,$|0-\{(s-j)a\}|\leq\dfrac{1}{m}<\varepsilon$,

记$t=\{(s-j)a\}>0$,$\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}[(p-1)t,pt)=[0,+\infty)$,

$\forall\eta\in[0,1)$,$\exists p\in\mathbb{N}_{+}$,使得$\eta\in[(p-1)t,pt)\eta<pt\leq t+\eta\leq\dfrac{1}{m}+\eta<1$,

于是$pt=p(s-j)a-p[(s-j)a]\in(0,1)$

于是$pt=\{p(s-j)a\}$,因此$|\{p(s-j)a\}-\eta|\leq\dfrac{1}{m}<\varepsilon$,取$n=p(s-j)$即可.

如果:$\{sa\}-\{ja\}=\{(s-j)a\}-1$,则$1>\{(s-j)a\}>1-\dfrac{1}{m}$,设$k\in\mathbb{N}$,使得:

$1-\dfrac{1}{m+k}<\{(s-j)a\}<1-\dfrac{1}{m+k+1}$,(这么做得目的是让上界不是1)

则$m+k-1<(m+k)\{(s-j)a\}<m+k-1+\dfrac{1}{m+k+1}$

即$(m+k)(s-j)a-(m+k)[(s-j)a]-m-k+1\in\left(0,\dfrac{1}{m+k+1}\right)$,因此,

$\{(m+k)(s-j)a\}<\dfrac{1}{m+k+1}\leq\dfrac{1}{m}$,

此时$t=\{(m+k)(s-j)a\}>0$类似上面操作即可. 故$\{\{na\}\}_{n=1}^{\infty}$在$[0,1)$中稠密.

原题分析:

$\forall x_0 \in [0, 2\pi)$,只需证明$\forall \varepsilon > 0$,能找到$n \in \mathbb{N}_+$,使得$|\sin n - \sin x_0| < \varepsilon$

只需找到$n \in \mathbb{N}_+$,使得$\left|\sin\left(2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\}\right) - \sin x_0\right| < \varepsilon.$

期望$2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\}$和$x_0$可以足够接近,实际上期望$\left\{\frac{n}{2\pi}\right\}$和$\frac{x_0}{2\pi}$可以足够接近

原题证明:

$\forall \varepsilon > 0$,因为$\sin x$连续,所以$\exists \delta > 0$,使得只要$|x - x_0| < \delta$,都有$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$

由引理,存在$n \in \mathbb{N}_+$,使得$\left|\left\{\frac{n}{2\pi}\right\} - \frac{x_0}{2\pi}\right| < \frac{\delta}{2\pi}$,故$\left|2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\} - x_0\right| < \delta$

$\left|\sin\left(2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\}\right) - \sin x_0\right| = |\sin n - \sin x_0| < \varepsilon$.我们完成了证明.

中科大数分考研压轴题.

给定周期为$T>0$的连续函数$g\left(x\right), a_1, a_2, \ldots, a_m>0, m\in\mathbb{N}_+$

令$f\left(x\right)=\sum\limits_{k=1}^{m}g\left(a_k x\right)$,则存在$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=+\infty$,

使得$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x+t_n\right)=f\left(x\right)$关于$x\in\mathbb{R}$一致收敛

证明:

先证明连续周期函数是一致连续的, 你可以使用

$\varepsilon-\delta$语言自行证明, 也可以把$g\left(x\right)$理解为$\mathbb{R}/\sim$上的函数

这里$\sim$定义为$x\sim y\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{N}_+$,使得$x=y+kT$,

而$\mathbb{R}/\sim$是紧的, 所以$g\left(x\right)$是一致连续的.

$$f\left(x+t_n\right)=\sum_{k=1}^{m}g\left(a_k x+a_k t_n\right)=\sum_{k=1}^{m}g\left(a_k x+\left\{\frac{a_k t_n}{T}\right\}T\right)$$

要让$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x+t_n\right)=f\left(x\right)$关于$x\in\mathbb{R}$一致收敛

就需要$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}g\left(a_k x+\left\{\frac{a_k t_n}{T}\right\}T\right)=\sum\limits_{k=1}^{m}g\left(a_k x\right)$

如果我们能找到满足条件的t_n使得:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{a_k t_n}{T}\right\}T=0, k=1,2,\ldots,m$, 那么

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 只要$\left|x-y\right|<\delta$, 由$\left|g\left(x\right)-g\left(y\right)\right|<\frac{\varepsilon}{m}$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{a_k t_n}{T}\right\}T=0, k=1,2,\ldots,m$, 故存在$N\geq 1$，使得$\left|\left\{\frac{a_k t_n}{T}\right\}T\right|<\delta, n\geq N$

于是$\sum\limits_{k=1}^{m}\left|g\left(a_k x+\left\{\frac{a_k t_n}{T}\right\}T\right)-g\left(a_k x\right)\right|\leq\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{m}=\varepsilon$, 故

$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x+t_n\right)=f\left(x\right)$关于$x\in\mathbb{R}$一致收敛

现在问题就转化为能否找到满足条件的t_n, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{a_k t_n}{T}\right\}=0, k=1,2,\ldots,m$

记$b_k = \dfrac{a_k}{T}$，找t_n, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\{b_k t_n\} = 0, k = 1,2,...,m$

考虑某些$\{\{nb_k\}\}_{n=1}^{\infty}$

$\forall q \in \mathbb{N}_+, [0,1) = \bigcup\limits_{j=1}^{q}[\dfrac{j-1}{q}, \dfrac{j}{q})$

于是存在j_1,使得$\{\{nb_1\}\}_{n=1}^{\infty}$有无穷多项落在$[\dfrac{j_1-1}{q}, \dfrac{j_1}{q})$

记做$\{\{r_n b_1\}\}_{n=1}^{\infty}$,考虑$\{\{r_n b_2\}\}_{n=1}^{\infty}$,存在$j_2$, $\{\{r_n b_2\}\}_{n=1}^{\infty}$有无穷多项落在$[\dfrac{j_2-1}{q}, \dfrac{j_2}{q})$

这里仍然用r_n表示

考虑$\{\{r_n b_3\}\}_{n=1}^{\infty}$，. . . ,$\{\{r_n b_k\}\}_{n=1}^{\infty}$,无穷多项落在$[\dfrac{j_i-1}{q}, \dfrac{j_i}{q}), i = 3,4,...,k$

如此我们就得到$\{\{r_n b_k\}\}_{n=1}^{\infty} \in [\dfrac{j_k-1}{q}, \dfrac{j_k}{q}), \forall n \geq 1, k = 1,2,...,m$, 于是

$\left|\{r_n b_k\} - \{r_{n'} b_k\}\right| \leq \dfrac{1}{q}, \forall n > n' \geq 1, k = 1,2,...,m$

对每个固定得k,有$\{r_n b_k\} - \{r_{n'} b_k\} = \{(r_n - r_{n'})b_k\}$或者$\{(r_n - r_{n'})b_k\} - 1$

取固定的充分大的n和n',使得对所有k上面两种情况之一的情况同时发生

这样我们证明$\{na\}$稠密性的方法可以知道, 存在某个t_q, $\left|\{t_q b_k\}\right| < \dfrac{1}{q}$

由q任意性,我们就找到了一串满足条件的t_n, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\{b_k t_n\} = 0, k = 1,2,...,m$

总结：对有限个b_k,能否找到一个一个公共的$t_n \to +\infty$.使得$\lim\limits_{n\to\infty}\{b_k t_n\} = 0$

上面的证明和$\{na\}$稠密性没有太大区别,只是说对于0这个聚点,

要找公共收敛子列，所以把必然存在两项在同一个区间

改为必然存在无穷项在同一个区间即完成了证明.

凸性$\left(\text{以下凸为例}\right)$总结：

连续的时候$jensen$凸和通常凸等价.

通常凸$\Rightarrow$ $jensen$凸显然任何时候都成立.

$jensen$凸$\Rightarrow$通常凸的证明：

如果能证明$f\left(\frac{m}{n}x+\frac{n-m}{n}y\right)\le\frac{m}{n}f\left(x\right)+\frac{n-m}{n}f\left(y\right),\forall\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}\cap\left[0,1\right]$

那么$\forall\lambda\in\left[0,1\right],\exists$有理数列$r_n\in\left[0,1\right]$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\lambda$

$f\left(r_nx+\left(1-r_n\right)y\right)\le r_nf\left(x\right)+\left(1-r_n\right)f\left(y\right)$

于是两边令$n\to\infty$,就得到.

$f\left(\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\right)\le\lambda f\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)f\left(y\right)$

所以我们只需证明$f\left(\frac{m}{n}x+\frac{n-m}{n}y\right)\le\frac{m}{n}f\left(x\right)+\frac{n-m}{n}f\left(y\right)$

由$jensen$不等式$\left(\text{归纳法, 可以在网上搜索证明}\right)$

$$f\left(\frac{m}{n}x+\frac{n-m}{n}y\right)=f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}x}{n}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-m}y}{n}\right)\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}f\left(x\right)}{n}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-m}f\left(y\right)}{n}$$

$$=\frac{m}{n}f\left(x\right)+\frac{n-m}{n}f\left(y\right)$$

因此连续的时候$jensen$凸和通常凸等价.

设$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$,即$jensen$凸.

如果$\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，那么$f(x)$在$x_0$处连续.

证明:记$\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)=l,\liminf\limits_{x\to x_0} f(x)=t$

对$f(x_0)\le\frac{f(x_0-x)+f(x_0+x)}{2}$

取子列极限使得$f(x_0-x)\to t\Rightarrow f(x_0)\le\frac{t+l}{2}$,且$t$有限

对$f(x)\le\frac{f(x_0)+f(2x-x_0)}{2}$,两边取上极限得

$l\le\frac{l+f(x_0)}{2}\Rightarrow l\le f(x_0)$

结合两个不等式$\frac{t+l}{2}\ge l\Rightarrow t\ge l\Rightarrow t=l=f(x_0)$

故完成了证明.

推论:若$f(x)$有上界,或者单调,则$jensen$凸等价于通常凸.

接下来在通常凸性下考虑.

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

凸性的几何意义(非常重要, 看到凸性就应该想几何意义)

(1)常规凸 $\Leftrightarrow$ 割线的单调性 $\Leftrightarrow$ 恒在切线上下方(可导)

$\Leftrightarrow$ 切线斜率单调性(可导) $\Leftrightarrow$ 导数单调性(可导)

(2)开区间 (a,b) 上凸函数满足内闭 L 条件

对 $[A,B]\subset(a,b)$, 取 $a<x<A, B<y<b, \forall t>s\in[A,B]$

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\right|\le \max\left\{\left|\frac{f(A)-f(x)}{A-x}\right|,\left|\frac{f(B)-f(y)}{B-y}\right|\right\}=L$$

故在 $[A,B]$ 上, f 满足 L 条件, 显然开区间凸函数 $f(x)$ 连续.

(3)开区间 (a,b) 上凸函数每一点左右导数都存在

作图可以知道 $\forall x_0\in(a,b)$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 是关于 x 的单调函数

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 都存在, 且成立: $f_+'(x_0)\ge f_-'(x_0)$

且左右导数都是递增的.

(4): 开区间 (a,b) 上的凸函数除去至多可数个点外, 是可微的.

证明依赖于左右导数存在且互不相同的点是至多可数的.

(5): 开区间上的凸函数几乎处处二阶可微,

因为 $f'(x)=f_+'(x)$, $a.e$ 单调递增, 故 $f''(x)$ 存在 $a.e$

(6): $[a,b]$ 上连续凸函数绝对连续.

(6)的意义是连续的凸函数你也可以用导函数来参与积分计算.

除去(4)(5)(6)外，需要掌握其余部分的完整证明和运用.

考试中建议结合几何意义简要叙述如何证明然后直接使用.