Formula1.20

2022 年 10 月 11 日

概要

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

本証明

Formula1.19 の lemma を利用し, 成分計算する. 引数は省略する.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \\
&= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A_j B_k \\
&= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \left(B_k \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + A_j \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_k B_k \sum_{i,j} \epsilon_{kij} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + \sum_j A_j \sum_{i,k} (-\epsilon_{jik}) \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \\
&= \sum_k B_k (\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_k - \sum_j A_j (\mathrm{rot}\boldsymbol{B})_j \\
&= \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}
\end{aligned} \tag{2}$$

3 行目では, 偏微分のライプニッツ則, 4 行目では, Formula1.19 の lemma の 4 番目と 5 番目の式を使い, 添え字を入れ替えている.