Theorem1.14

2022 年 10 月 7 日

概要

直交座標系 Σ_o, Σ'_o に対し, ある 3 次元ベクトル場が,

$$\boldsymbol{A} = (A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z)) \quad at \quad \Sigma_o \tag{1a}$$
$$\boldsymbol{A'} = (A'_x(x',y',z'), A'_y(x',y',z'), A'_z(x',y',z')) \quad at \quad \Sigma'_o \tag{1b}$$

と表されるとき,

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A'_x}{\partial x'} + \frac{\partial A'_y}{\partial y'} + \frac{\partial A'_z}{\partial z'} \tag{2}$$

すなわち, 発散は, 直交座標のとり方によらない.

1 本証明

直交座標系の属性は,

- 原点
- 基底ベクトル

であり, 原点の差異は並進, 基底ベクトルの差異は, 直交変換により, 表現されるので, それぞれの場合に分けて考えていく.

1.1 並進

並進変換は,

$$x' = x + \Delta x \tag{3a}$$
$$y' = y + \Delta y \tag{3b}$$
$$z' = z + \Delta z \tag{3c}$$

で表される, 原点のみの移動である. このとき, 基底ベクトルは, 変化しないので, 結局各成分について,

$$A_i(x,y,z) = A'_i(x',y',z'). \quad i = x, y, z \tag{4}$$

が成立する.

並進変換の関係は全射になっているので, $x'(x,y,z) = x + \Delta x$ のような媒介変数表示の関係であると捉えることができる. したがって, $A'_x(x',y',z')$ に対する, x の偏微分を考えることができ, 式 (4) から,

$$\frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial A'_x(x'(x,y,z), y'(x,y,z), z'(x,y,z))}{\partial x}. \tag{5}$$

Theorem1.07 を利用すると, 式 (5) は,

$$\frac{\partial A'_x(x'(x,y,z),y'(x,y,z),z'(x,y,z))}{\partial x} = \frac{\partial A'_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial A'_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial A'_x}{\partial z'}\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial A'_x}{\partial x'} \tag{6}$$

よって,

$$\frac{\partial A'_x}{\partial x'} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \tag{7}$$

他の軸についても同様の議論をすれば, 式 (2) が成立する.

1.2 直交変換

直交変換は,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad {}^tUU = E \tag{8}$$

である. x 成分だけを表現すると,

$$x' = U_{11}x + U_{12}y + U_{13}z. \tag{9}$$

この変換も空間全射になっており, Theorem1.08 により, U の逆行列が存在することから, 全単射になっている. また, 逆行列と転置行列が等しいので,

$$x = {}^tU_{11}x' + {}^tU_{12}y' + {}^tU_{13}z'. \tag{10}$$

も, 全単射である.

ここで,

$$V_{ij} \equiv \frac{\partial A_i(x,y,z)}{\partial x_j} \tag{11a}$$

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial A'_i(x',y',z')}{\partial x'_j} \tag{11b}$$

と定義すると, 式 (2) の左辺は, tr$V$, 右辺は, tr$W$ となる.

座標変換において, $\boldsymbol{A}$ も同じ変換を受けるので,

$$W_{ij} = \frac{\partial}{\partial x'_j}\sum_k U_{ik}A_k = \sum_k U_{ik}\frac{\partial A_k}{\partial x'_j}. \tag{12}$$

式 (10) も全単射であることから, 式 (12) 中の A_k の引数である, x, y, z は, x', y', z' によるパラメータ表示を C^1 級で行うことができ, Theorem1.07 を適用すれば,

$$\sum_k U_{ik}\frac{\partial A_k}{\partial x'_j} = \sum_k U_{ik}\sum_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} \tag{13}$$

式 (10) を, Theorem1.08 を利用すると,

$$\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = \sum_m {}^tU_{lm}\frac{\partial x'_m}{\partial x'_j} \tag{14}$$

であるが, 右辺の微分項は, $m = j$ のときは 1 で, それ以外は 0 になるので, m についての和の結果は, ${}^tU_{lj}$ になる. よって, 式 (13) は,

$$\sum_k U_{ik} \frac{\partial A_k}{\partial x'_j} = \sum_k U_{ik} \sum_l V_{kl} \, {}^tU_{lj} = (UV \, {}^tU)_{ij} \tag{15}$$

つまり, 行列として,

$$W = UV \, {}^tU. \tag{16}$$

行列のトレースの性質と, Theorem1.08 を利用し,

$$\mathrm{tr} W = \mathrm{tr}(UV \, {}^tU) = \mathrm{tr}({}^tUUV) = \mathrm{tr} V \tag{17}$$

により, 式 (2) が成り立つ.

1.3 直交変換ではない場合

逆変換が存在するが, 直交変換でない場合も, 主張は成立する. そもそも途中で使用した, Theorem1.08 の転置行列と逆行列が一致する, という性質は, 実は全く使う必要がなく, 逆行列として扱えばよかった話である. したがって, 本主張が成立する条件は, 変換が, 線形変換であり, その逆変換が定義できる, 全単射写像となっていること, である.