Theorem1.07

2022 年 9 月 29 日

概要

$f(x(t), y(t))$, $f(x(t), y(t), z(t))$ の微分

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{2}$$

$f(x(u, v), y(u, v))$, $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ の u による偏微分

$$\frac{\partial f}{du} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \tag{4}$$

1 独立変数としての計算

$x = x(t)$, $y = y(t)$ というのは, $f(x, y)$ が定義される, 全ての (x, y) が成す点の集合の, 部分集合である. したがって, まずは x, y を独立変数と見て, 微分の計算を行った上で, 部分集合としての縛りを入れていく.

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{5}$$

一方, 証明すべき式中の, 偏微分は以下のように定義される.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{6}$$

この式の形を作り込むために, 式 (5) を, 以下のように変形する.

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{7}$$

式 (7) の第一, 二項は, 式 (6) の右辺分子の, y を $y + \Delta y$ としたもので, 第三, 四項は, 式 (6) の y に関する偏微分の分子そのものになっている.

偏微分の式の定義は, 極限の意味を考えると, $\Delta x \to 0$ において, 右辺の項が, 左辺に収束する, すわなち, ある十分小さな Δx において, 右辺の項は, 左辺の項に対し, Δx と同等かそれ以上早く, 0 に収束する項の差しかない, ということであり, 以下のように読み替えられる.

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + O(\Delta x) \tag{8}$$

ここは, テイラー展開の知識を少し動員した方が, もう少しエレガントな説明になるかもしれない. ちなみに, O はランダウ記号と呼ばれ, o と, O では意味が違う. 前者は, Δx と同等の早さで, 後者は, より早く, という意味になる. 意外とちゃんとわかって使ってなかった. 今回の場合は, ビッグオーである必要がある.

式 (7) を式 (8) を用いて書き換えると

$$\Delta f=\left(\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial x}+O(\Delta x)\right)\Delta x+\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+O(\Delta y)\right)\Delta y=\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x+o(\Delta x)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+o(\Delta y) \tag{9}$$

ただし, $O(\Delta x)\Delta x$ は,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{O(\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=0$$

により, 定義から, スモールオーになる.

式 (9) の右辺第一項は, f が, (x,y) について, C^∞ 級であるという前提がある (本の最初の章で, この本で扱う関数はすべて何回でも微分可能, と述べている) ので,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\equiv g(x,y)$$

とすると, $g(x,y)$ も微分可能で,

$$\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}=g(x,y+\Delta y)=g(x,y+\Delta y)-g(x,y)+g(x,y)=\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\Delta y+o(\Delta y)+g(x,y) \tag{10}$$

式 (9) に代入すると,

$$\Delta f=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x\Delta y+o(\Delta y)\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+o(\Delta x)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+o(\Delta y) \tag{11}$$

この議論は, 3 変数の場合でも同様.

2　パラメータによる拘束

2.1　パラメータ 1 つの場合

Sec.1 の議論は, $f(x,y)$ が定義されるすべての点集合 (x,y) に対しての議論であったが, ここに, $x=x(t)$, $y=y(t)$ という媒介変数を入れることは, すなわち, (x,y) で表される平面領域の中を通る, 連続曲線という, 部分集合に議論を限定するということであり, したがって, この媒介変数が存在しても, Sec.1 の結論は有効である. ただし, 平面領域, その中を通る連続曲線, というのは, あくまで対象関数が連続, かつ微分可能という前提があるからである.

式 (11) を利用すると,

$$\frac{df}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}+o(\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{o(\Delta x)}{\Delta t}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{o(\Delta y)}{\Delta t} \tag{12}$$

$x(t)$, $y(t)$ ともに微分可能, すなわち, $\Delta x/\Delta t$, $\Delta y/\Delta t$ ともに有限値に収束するということであり, それを利用すると, $\Delta t\to 0$ において, 式 (12) の第一項は,

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta y}{\Delta t}\Delta t=O(\Delta t)$$

により, 無くなる. 第二項については, $\Delta y \to 0$ なので, 無くなる. 第四, 六項については,

$$\frac{o(\Delta x)}{\Delta t} = \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

により, スモールオーの定義から, 無くなる. よって, 式 (12) は,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{13}$$

となる.

2.2 2 変数の場合

パラメータが, 複数の場合は, 式 (11) における, Δx, Δy が, 複数パラメータにより変動する, という考え方になる. 式 (3) の場合, パラメータ u,v ともに動きうるが, u による偏微分なので, u のみの変動により引き起こされる変化である. 式で書くならば,

$$\Delta x = x(u+\Delta u, v) - x(u,v) \tag{14a}$$
$$\Delta y = y(u+\Delta u, v) - y(u,v) \tag{14b}$$

式 (14a), (14b) は, x, y が微分可能ならば,

$$\Delta x = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\Delta u + o(\Delta u) \tag{15a}$$
$$\Delta y = \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\Delta u + o(\Delta u) \tag{15b}$$

であり, 計算処理としては, 式 (12) と全く同様であり,

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta u} = \frac{\Delta x}{\Delta u}\frac{\Delta y}{\Delta u}\Delta u = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{o(\Delta u)}{\Delta u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{o(\Delta u)}{\Delta u}\right)\Delta u$$

により, $\Delta u \to 0$ において無くなり, 第四, 六項の処理は全く同様なので無くなる. 第三, 五項の処理は, 式 (15a), (15b) により,

$$\frac{\Delta x}{\Delta u} \to \frac{\partial x}{\partial u}$$

であるため, 式 (3) が成立する.

3 図形的な解釈

$z = f(x,y)$ とし, 点 (x,y,z) の集合を考えると, これは, 3 次元空間内での曲面を表す. $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ は, 曲面上の点 $(x,y,z=f(x,y))$ と, $(x+\Delta x, y+\Delta y, z' = f(x+\Delta x, y+\Delta y))$ の, z 成分の差である.

一方, x に関する偏微分の定義の分子,

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

は, 点 (x,y,z) を通り, y が一定, すなわち, xz 平面に並行な面で, 曲面を切断したときの, 曲線の, 点 (x,z) における接線に沿った, x 成分が Δx のベクトルの, z 成分である. y に関する偏微分も同様に, yz 平面に平行な

面に見える, 曲線の, 点 (y,z) における接線に沿った, y 成分が Δy のベクトルの, z 成分である. この事実により, 式 (11) が意味するところは,

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta y \\ f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \end{pmatrix} + O(\Delta x) + O(\Delta y) \tag{16}$$

右辺第一項, 第二項は, 切断面が, xz 平面か, yz 平面かの違いだけで, どちらも (x,y,z) における接線であること, 及び, それらが直行することから, 2 本の独立したベクトルであり, 平面を構成する. 式の意味はすなわち, 曲面 $z=f(x,y)$ 上での, ある点 (x,y,z) からの, 微小な近傍点 $(x+\Delta x, y+\Delta y, f(x+\Delta x, y+\Delta y))$ は, (x,y,z) における x 方向, y 方向の接線で張られる, 平面上の点 $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ に対し, $\Delta x, \Delta y \to 0$ の極限において, 一致する, という意味である. つまり, これは, この平面が, $z=f(x,y)$ の (x,y,z) における接平面となる, ということを意味する. 以上により, 偏微分の概念により, 一変数関数の微分の拡張となっていることがわかる.

複数パラメータによる微分でも偏微分で表現できたという事実により, 微分可能な関数による座標変換であれば, 好きな座標系を選んで, 微分を計算することできる, ということになる.