Formula1.21

2022 年 10 月 11 日

概要

$$\mathrm{rotgrad} f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \tag{1}$$

本証明

Formula1.19 の lemma を利用し, 成分計算する. 引数は省略する. 完全反対称と, 対称の積ゆえ, 当たり前だが, あえて計算する.

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{rotgrad} f)_i \\
&= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{j,k} \epsilon_{ikj} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{j,k} (-\epsilon_{ijk}) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{2}$$

3 行目では, 全く同じものを, j, k の文字を入れ替えただけのもので表現し, それとの和の半分, という表現をしている. 4 行目では, Formula1.19 の lemma の 5 番目の式を使い, 添え字を入れ替えている. しれっと, 偏微分の順序を入れ替えているが, これができる条件として, f_{xy}, f_{yx} がともに存在し, 連続である, という要請が暗にされている. `https://manabitimes.jp/math/1174` が詳しい.