Theorem1.08

2022 年 9 月 29 日

概要

直交座標系 Σ_o, Σ'_o は, 原点と, スケールが一致しているとき, ベクトル $\boldsymbol{p}$ が, Σ_o において,

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Σ'_o において,

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix}$$

と成分表示されるとき,

$$^{\exists}U, \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, U^t U = E \tag{1}$$

本証明

Σ_o の基底ベクトルを, $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^3$ とすると,

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{3} p_i \boldsymbol{e}_i \tag{2}$$

Σ'_o の基底ベクトルを, $\{\boldsymbol{e}'_i\}_{i=1}^3$ とすると, Σ'_o での 1 方向成分は,

$$p'_1 = \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{3} p_i \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_i \tag{3}$$

他の成分も同様なので, 縦に並べると,

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + p_3\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ p_1\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + p_3\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ p_1\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 + p_3\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

よって,

$$U = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

により, 座標変換が与えられることがわかった. この行列 U の (i, j) 成分は,

$$U_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{6}$$

と表されることに注意. (i,j) 成分表示を利用して, $U{}^tU$ を計算すると,

$$(U{}^tU)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} U_{ik}({}^tU)_{kj} = \sum_{k=1}^{3} U_{ik}U_{jk} \tag{7}$$

ここで, $U_{ik} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_k$ は, $\boldsymbol{e}'_i$ の, Σ_o 系での表示における, k 成分であり, $U_{ik}U_{jk}$ は, $\boldsymbol{e}'_i$, $\boldsymbol{e}'_j$ それぞれのベクトルの, Σ_o 系表示での成分の積である. したがって, 2 つのベクトルの成分の積を, 全 3 成分に対して加算している, 式 (7) の右辺は, $\boldsymbol{e}'_i$ と, $\boldsymbol{e}'_j$ の, Σ_o 系で計算する内積である. Σ'_o が直交座標系であったことから,

$$\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = 0, i \neq j \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = 1, i = j \tag{8b}$$

なので, $U{}^tU$ は, 対角成分が 1, それ以外のすべての成分が 0 の正方行列, すなわち単位行列 E である. よって, ${}^tU = U^{-1}$ であり, 前から ${}^tU$, 後ろから U を作用すれば,

$$U{}^tU = U{}^tU = E$$

である. なお, 式 (7) で, ${}^tUU$ を計算してしまうと, Σ'_o 系での, $\boldsymbol{e}_i$ と, $\boldsymbol{e}_j$ の内積計算の議論になってしまい, これは前提として次の Theorem が証明されるまで使えないので, 逆を計算している.