# Theorem1.09

2022 年 9 月 30 日


**概要**

直交座標系 $\Sigma_o \to \Sigma_o'$ は, 直交変換. 位置ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が, $\Sigma_o$ において,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\Sigma_o'$ において,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix}$$

と成分表示されるとき,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3' \tag{1}$$


## 本証明

Theorem1.08 により, 直交行列 $U$ があって,

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3' = \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} \tag{3}$$

なので, $U$ を使用して書き換えると,

$$a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3' = {}^t\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = {}^t\left(U \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) U \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} {}^tUU \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Theorem1.08 より, ${}^tUU = E$ なので,

$$a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{5}$$