Theory1.23

2022 年 10 月 13 日

概要

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ が, 直方体の領域 R 全体で, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ を満たすとき, スカラー場 $f(\boldsymbol{x})$ が存在し, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -\mathrm{grad}f(\boldsymbol{x})$ と表される. $f(\boldsymbol{x})$ をスカラーポテンシャルと呼ぶ

本証明

スカラーポテンシャル ϕ が存在するという状況, すなわち,

$$\boldsymbol{A} = \nabla\phi \tag{1}$$

が成立するとは, すなわち, grad の逆演算を $\boldsymbol{A}$ に施した結果が値を持つこと, と読み替えられる. その演算は, 線積分であり, 次の章で学ぶ内容である. ここでは, それを前提にした, 天下り的な定義を行う.

関数 ϕ を以下のように定義する.

$$\phi = \int_{x_0}^{x} A_x(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} A_y(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} A_z(x, y, t)dt \tag{2}$$

x で偏微分すると,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\phi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} A_x(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial A_y}{\partial x}(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_z}{\partial x}(x, y, z)dz \\
&= A_x(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial A_x}{\partial y}(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_x}{\partial z}(x, y, t)dt \\
&= A_x(x, y_0, z_0) + [A_x]_{(x,y_0,z_0)}^{(x,y,z_0)} + [A_x]_{(x,y,z_0)}^{(x,y,z)} \\
&= A_x(x, y, z)
\end{aligned} \tag{3}$$

2 行目では, 積分に関係ない変数の微分と積分の順序を交換し, 3 行目では, $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ を利用した. これを同様に y, z 軸についても実施すれば, $\nabla\phi = \boldsymbol{A}$ が示せる.

なお, この積分は, $\boldsymbol{A}$ を, R 内の点 (x_0, y_0, z_0) から, (x, y, z) に向かって, x 軸と平行に進み, y 軸と平行に進み, 最後 z 軸と平行に進む経路を選び, 線積分したものである. 後に, $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を満たすベクトル場は, 線積分の値が, 経路に依存しない, ということを示せる.