Математическая логика и теория алгоритмов. Лекция 4. Машина Тьюринга с полулентой.

2020

Композиция машин Тьюринга

Теорема 4.1.

Композиция двух вычислимых функций есть функция вычислимая.

Доказательство. Пусть $g(x) = f_2(f_1(x))$, где f_1, f_2 — правильно вычислимые функции. Тогда существуют две машины Тьюринга, правильно вычисляющие f_1 и f_2:

$$T_1 = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{11}, q_{01}, \varepsilon_1, *_1) \tag{4.1}$$

$$T_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{12}, q_{02}, \varepsilon_2, *_2). \tag{4.2}$$

Если нужно, переобозначим символы пустой ячейки и разделителя так, чтобы они совпадали: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $*_1 = *_2 = *$, а также переобозначим K_1 и K_2 так, чтобы они не пересекались.

Композиция машин Тьюринга

Построим машину Тьюринга:

$$T = (K_1 \cup K_2 \setminus \{q_{01}\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \Big|_{q_{01}}^{q_{12}} (\delta_1 \cup \delta_2), q_{11}, q_{02}, \varepsilon, *) \tag{4.3}$$

Построенная машина Тьюринга T выполняет следующие действия:

$$q_{11} 1^x \overset{*}{\Rightarrow}_{(T_1)} q_{01} 1^{f_1(x)} = q_{12} 1^{f_1(x)} \overset{*}{\Rightarrow}_{(T_2)} q_{02} 1^{f_2(f_1(x))}.$$

Если $g(x)$ не определена в точке x — это значит, что не определена либо $f_1(x)$, либо $f_2(t)$, где $t = f_1(x)$. В этом случае T зациклится соответственно либо на первом участке, работая как T_1, либо на втором, работая как T_2. □

Композиция машин Тьюринга

Определение

Машина Тьюринга T называется композицией машин Тьюринга T_1 и T_2, если она построена по правилам (4.1), (4.2), (4.3).

Таким образом, мы получили алгоритм построения из двух машин Тьюринга такой новой машины Тьюринга, которая последовательно выполняет действия двух исходных машин.

Композиция машин Тьюринга

Теорема 4.2.

Композиция n правильно вычислимых функций $f_1(x)$,$f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, есть правильно вычислимая функция $f_1(f_2(\ldots f_n(x)\ldots))$.

Доказательство. Воспользуемся принципом математической индукции.

Для $n = 2$ теорема доказана — это теорема 4.1.

Пусть теорема справедлива для некоторого $n \geq 2$, докажем ее для $n + 1$. Имеется композиция $f_1(f_2(\ldots f_{n+1}(x)))$. Функция $g(x) = f_2(\ldots f_{n+1}(x))$ является композицией n вычислимых функций и, следовательно, вычислима по индуктивному предположению. Тогда композиция $f_1(g(x))$ двух вычислимых функций $f_1(x)$ и $g(x)$ является вычислимой по теореме 4.1. □

Машина Тьюринга с полулентой

Рассмотренные нами определения машины Тьюринга использовали бесконечную ленту в обе стороны. Это значит, что на ленте нельзя оставить какие-нибудь данные, которые машина Тьюринга не будет использовать при движении влево или вправо. Ограничим ленту с одной стороны и покажем, что машина Тьюринга с полулентой (левой или правой) эквивалентна машина Тьюринга с бесконечной в обе стороны лентой.

Машина Тьюринга с полулентой

Теорема 4.3.

Функция, правильно вычислимая на машине Тьюринга с обычной лентой, правильно вычислима на машине Тьюринга с правой полулентой.

Доказательство. Главная идея доказательства основана на следующих положениях:
- ограничим рабочую область ленты двумя маркерами - неподвижным левым маркером $\triangle$ и подвижным правым $\otimes$;
- на внутренней части ограниченной области машина Тьюринга должна работать так, как обычная машина Тьюринга, а при выходе на маркеры она должна освобождать рабочее пространство, для чего правый маркер надо сдвинуть вправо, а при выходе на левый маркер придется сдвинуть всю цепочку;
- полученный результат, который находится где-то между маркерами, в конце работы необходимо сдвинуть вплотную к левому маркеру.

Машина Тьюринга с полулентой

Итак, пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - правильно вычислимая функция, для которой существует машина Тьюринга

$$T_f : p_1 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} p_0 1^{f(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Машина Тьюринга с полулентой

Построим вспомогательную машину Тьюринга T_1, которая получает на вход такую же цепочку, что и T_f, и ограничивает эту цепочку двумя маркерами $\triangle$ и $\otimes$ слева и справа соответственно:

T_1 :

$q_1 1 \to q_2 1L,$

$q_1 * \to q_2 * L,$

$q_1 \varepsilon \to q_2 \varepsilon L,$

$q_2 \varepsilon \to q_3 \triangle R,$

$q_3 1 \to q_3 1R,$

$q_3 * \to q_3 * R,$

$q_3 \varepsilon \to q_4 \otimes L,$

$q_4 1 \to q_4 1L,$

$q_4 * \to q_4 * L,$

$q_4 \triangle \to q_0 \triangle R.$

Машина Тьюринга с полулентой

Построенная машина Тьюринга T_1 выполняет следующие действия:

$$T_1 : q_1 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} q_0 \vartriangle 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \otimes .$$

Теперь можно считать, что машина Тьюринга T_f получает на вход цепочку, ограниченную маркерами. Преобразуем T_f так, чтобы на участке, ограниченном неподвижным и подвижным маркерами, новая машина Тьюринга T_{fn} выполняла те же действия, что и исходная машина Тьюринга.

Так как новая машина Тьюринга должна работать внутри ограниченной области так же, как T_f , то она должна содержать все команды этой машины Тьюринга. Разница в функционировании исходной T_f и конструируемой T_{fn} будет при выходе за границы обрабатываемых данных.

Машина Тьюринга с полулентой

Исходная машина Тьюринга T_f при выходе за границу участка требует пустую ячейку, новая машина Тьюринга T_{fn} в этой же ситуации выходит на маркеры. Освободим место на ленте для пустой ячейки. После этого для обеспечения эквивалентности переработки цепочки машина Тьюринга T_{fn} должна действовать точно так же, как и T_f, следовательно, она должна вернуться в то состояние p_i, в котором ей потребовалась пустая ячейка.

Машина Тьюринга с полулентой

Освободить ячейку в сторону подвижной границы очень просто - надо просто перенести подвижный маркер на одну ячейку вправо. Передвинуть левый маркер нельзя, придется передвинуть на одну ячейку вправо всю цепочку. Для этого введем дополнительные состояния и проведем сдвиг цепочки от неподвижного маркера к подвижному. На каждом такте прочитанный символ заменяется тем символом, который был прочитан на предшествующем шаге. Исключение составляет только первый шаг - на нем надо освободить пустую ячейку.

Построенная машина Тьюринга выполняет следующие действия:

$$T_{fn} : \triangle q_1 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \otimes \overset{*}{\Rightarrow} \triangle \varepsilon^r q_0 1^{f(x_1,\ldots,x_n)} \varepsilon^m \otimes .$$

Машина Тьюринга с полулентой

Построим вспомогательную машину Тьюринга T_2, которая начинает действовать из заключительной конфигурации T_{fn} и сдвигает последовательность единиц вплотную к левому маркеру. T_2 :

$q_1\varepsilon \to q_1\varepsilon R$,
$q_1 1 \to q_2\varepsilon L$,
$q_2\varepsilon \to q_2\varepsilon L$,
$q_2 1 \to q_3 1 R$,
$q_2\triangle \to q_3 \triangle R$,
$q_3\varepsilon \to q_1 1 R$,
$q_1\otimes \to q_4\varepsilon L$,
$q_4\varepsilon \to q_4\varepsilon L$,
$q_4 1 \to q_4 1 L$,
$q_4\triangle \to q_0 \triangle R$.

Машина Тьюринга с полулентой

Построенная машина Тьюринга выполняет следующие действия:

$$T_2 : \triangle \varepsilon^r q_1 1^{f(x_1,\ldots,x_n)} \varepsilon^m \otimes \overset{*}{\Rightarrow} \triangle q_0 1^z.$$

Рассмотрим композицию построенных машин Тьюринга: $T = T_2(T_{fn}(T_1))$. Она выполняет действия, соответствующие условию теоремы, следовательно функция f вычислима на машине Тьюринга с правой полулентой.$\square$

Машина Тьюринга с полулентой

Определение

Машина Тьюринга вычисляет функцию f с восстановлением, если:

$$q_1 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} q_0 1^{f(x_1,\ldots,x_n)} * 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n}.$$

Вычисление функции с восстановлением означает работу машины Тьюринга с сохранением исходных данных. Приведенное определение позволяет получать на ленте сначала результат, а затем исходные данные.

Иногда бывает удобно сделать наоборот:

$$q_1 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} q_0 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} * 1^{f(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Машина Тьюринга с полулентой

Аналогично теореме о правой полуленте можно доказать следующую теорему о левой полуленте.

Теорема 4.4.

Функция, правильно вычислимая на машине Тьюринга с обычной лентой, правильно вычислима на машине Тьюринга с левой полулентой.

Машина Тьюринга с полулентой

Теорема 4.5.

Всякая правильно вычислимая функция правильно вычислима с восстановлением.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - правильно вычислимая функция, тогда существует машина Тьюринга

$$T_f : q_1 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} q_0 1^{f(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Тогда по теореме о левой полуленте существует машина Тьюринга T_f^{left}, вычисляющая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на левой полуленте.

Машина Тьюринга с полулентой

Построим вспомогательную машину Тьюринга, которая копирует исходные данные на ленте:

$$T_{copy} : p_1 A \overset{*}{\Rightarrow} p_1 A \vartriangle A,$$

где $A \in \{1, *\}^*$.
Теперь рассмотрим композицию машин Тьюринга T_{copy} и T_f^{left}:

$$T_f^{left}(T_{copy}) : q_1 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} q_0 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \vartriangle 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow}$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} q_0 1^{f(x_1, \ldots, x_n)} \vartriangle 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n}$$

В заключение построим машину Тьюринга T_1, которая заменяет маркер на знак разделителя $*$. Композиция $T_1(T_f^{left}(T_{copy}))$ выполняет требуемые действия в соответствии с определением вычисления с восстановлением. $\square$.

Суперпозиция вычислимых функций

Теорема 4.6.

Суперпозиция вычислимых функций — вычислимая функция.

Доказательство. Пусть дана суперпозиция вычислимых функций

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Тогда существуют машины Тьюринга $T_h, T_1, \ldots, T_m$, правильно вычисляющие функции $h(y_1, \ldots, y_m)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, ... , $g_m(x_1, \ldots, x_n)$ соответственно.

Суперпозиция вычислимых функций

Введем вспомогательные машины Тьюринга:
T_{copy} для копирования исходной цепочки $1^{x_1} * \ldots 1^{x_n}$,
T_{mark} для разделения ленты на левую и правую так, что на правой полуленте остается скопированная цепочка $1^{x_1} * \ldots 1^{x_n}$,
T_{shift} для сдвига головки к началу цепочки $1^{x_1} * \ldots 1^{x_n}$,
T_{back} удаление с ленты исходной цепочки и возврата головки к началу ленты с заменой всех маркеров на знаки разделителя *.

Суперпозиция вычислимых функций

Тогда композиция данных вспомогательных машин Тьюринга вычисляет функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Например, для $m = 2$, получим:

$$T = T_h\left(T_{back}\left(T_{shift}\left(T_{2,right}\left(T_{mark}\left(T_{copy,right}\left(T_{shift}\left(T_{1,right}\left(T_{mark}\left(T_{copy}\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

Индекс right означает, что машина Тьюринга работает на правой полуленте. □