МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. И. И. ПОЛЗУНОВА»

Факультет информационных технологий

Кафедра Прикладная математика

А.В. Сорокин

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Учебно-методические материалы к выполнению упражнений
в редакторе Microsoft Excel

Барнаул 2022

УДК 681.3

Сорокин А.В.- Задача линейного программирования и графический метод ее решения. Учебно-методические материалы к выполнению упражнений в программе Microsoft Excel / А.В. Сорокин; Алт. госуд. технич. ун-т им. И. И. Ползунова. - Барнаул, 2022. – 24 с.

В учебно-методических материалах изложена тема дисциплины «Моделирование», используемая для решения задач линейного программирования и предназначенная для выполнения практических заданий по работе в Microsoft Excel. Специально созданные и подобранные примеры позволяют в полной мере изучить основные особенности решения задач в программе Microsoft Excel. Учебно-методические материалы предназначены для студентов, обучающихся по техническим и экономическим направлениям бакалавриата.

Содержание

1. Постановка задачи.

Задача линейного программирования (ЗЛП) является одной из важных экономико-математических задач оптимизации. Описывается ЗЛП математически с помощью оптимизируемой целевой функции

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – набор весовых коэффициентов, обычно являющихся числами в денежном эквиваленте, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – набор ресурсов, используемый для создания каких-то изделий.

Функцию F необходимо или минимизировать, или максимизировать посредством изменения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Записывается это так

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\min,$$

или

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max$$

Кроме целевой функции в ЗЛП имеется система ограничений вида

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2,$$

…………………………

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m,$$

или

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \ge b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \ge b_2,$$

…………………………

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \ge b_m,$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – набор величин, как правило положительных, являющихся объемом имеющихся ресурсов, имеющихся в наличии.

Нестрогие неравенства могут быть и строгими.

Предполагается, что значения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неотрицательны $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$.

Для решения ЗЛП используется известный симплекс метод, основанный на поиске решения на границе области, описываемой системой неравенств. Алгоритм, пробегая по граням и вершинам многогранника, ищет ту точку множества, которая дает оптимальное решение.

Наглядным способом решения ЗЛП является графический метод. Его реализация позволяет наглядно понять суть метода поиска ЗЛП.

Рассмотрим ЗЛП вида

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max$$

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m,$$

Использование графического метода возможно не всегда, а лишь в частных случаях, например таком

$$F=c_1x_1+c_2x_2 \rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \le b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2 \le b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2 \le b_m,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Рассмотрим частный случай этой задачи с заданными c_i,a_{ij} и b_j, i=1,2; j=1,2,3.

$$F=x_1+1.5x_2 \rightarrow \max$$

$$4x_1+2x_2 \le 12,$$

$$3x_1+3.5x_2 \le 10.5,$$

$$2x_1+6x_2 \le 12,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

2. Построение области допустимых решений

Построим область допустимых решений ЗЛП, в которой ищется решение. Для этого нужно ограничения-неравенства превратить в равенства

$$4x_1+2x_2 = 12,$$

$$3x_1+3.5x_2 =10.5,$$

$$2x_1+6x_2 = 12,$$

и построить соответствующие им прямые на плоскости с осями x_1, x_2. x_1 будет соответствовать обычному x, а x_2 – y.

Уравнения прямых

$$x_2 = 6-2x_1,$$

$$x_2 = 3-(3/3.5)x_1,$$

$$x_2 = 2 – (1/3)x_1,$$

Построим данные прямые линии в декартовой системе координат x_10x_2

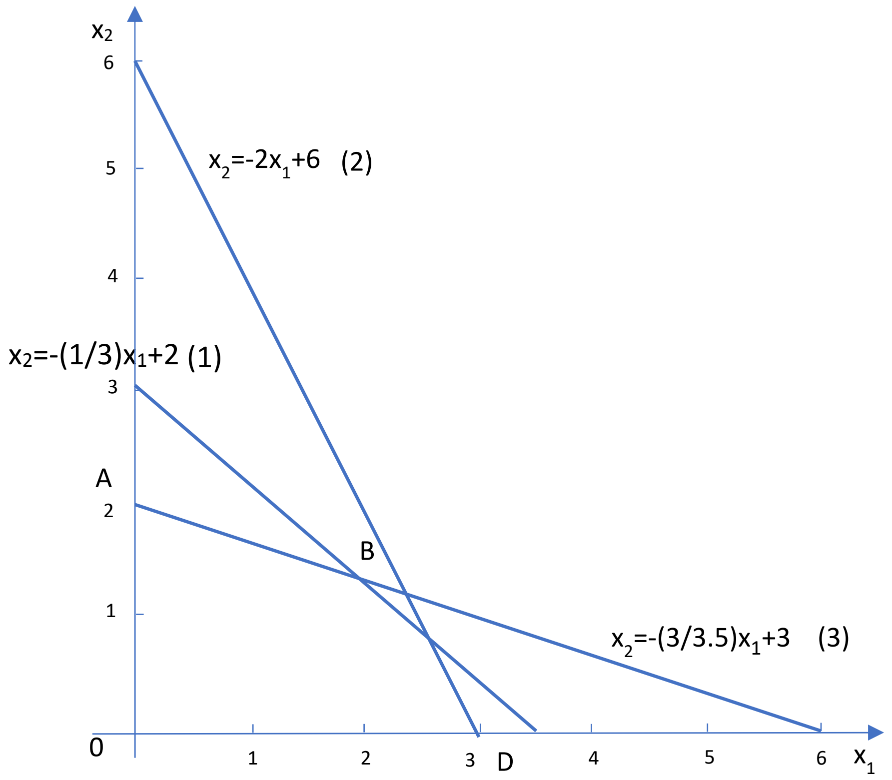


Рис.1 - Прямые линии, полученные из неравенств

Прямые можно нарисовать в MS Excel (см. раздел 5).

Подставим значения (x_1, x_2) возле каждой исследуемой прямой и определим с какой стороны от прямой находится допустимая область.

Возьмем первое неравенство $4x_1+2x_2\leq12$ и точку $(x_1,x_2)=(1,1)$, получим $6\leq12$, т.е. неравенство выполняется и допустимая область находится ниже прямой $4x_1+2x_2=12$.

Возьмем второе неравенство $3x_1+3.5x_2 \leq10.5$ и точку $(x_1,x_2)=(1,1)$, получим $6.5\leq10.5$, т.е. неравенство выполняется и допустимая область находится ниже прямой $3x_1+3.5x_2 =10.5$.

Возьмем третье неравенство $2x_1+6x_2 \leq 12$ и точку $(x_1,x_2)=(1,1)$, получим $8\leq12$, т.е. неравенство выполняется и допустимая область находится ниже прямой $2x_1+6x_2 \leq 12$.

Сделаем штриховку по ту сторону линии, где выполняется соответствующее неравенство

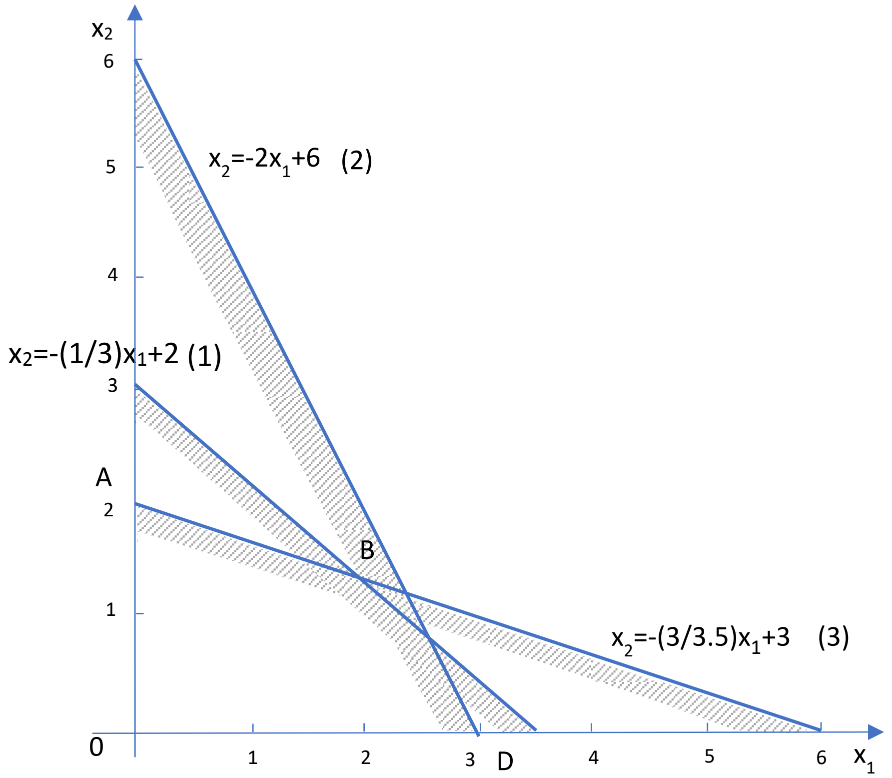


Рис.2 – Прямые линии, с указанием расположения точек, удовлетворяющих неравенствам (с помощью штриховки)

Таким образом, мы проверили расположение области допустимых решений относительно прямых линий, полученных из неравенств, и можем легко построить область допустимых решений, как указано на рисунке 3, область закрашена штриховкой.

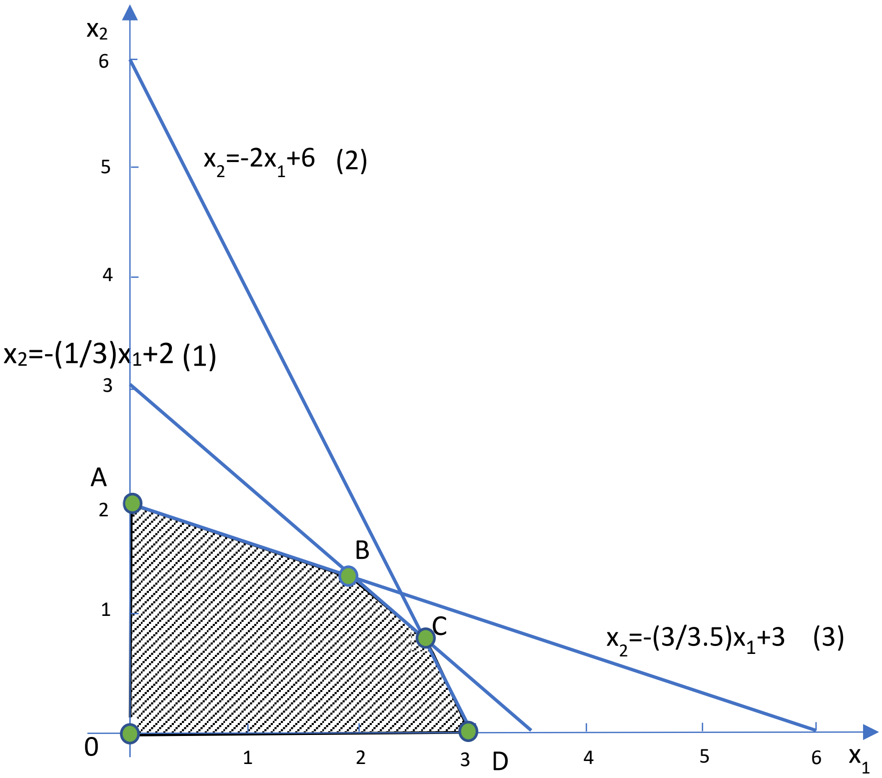


Рис.3 – Допустимая область решений

3. Определение максимума функции цели.

Определим направление возрастания функции цели F. Оно будет соответствовать направлению градиента $grad\ F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [1 \quad 1.5]$. Построим вектор градиента, исходящий из точки (0, 0) и приходящий в точку (1, 1.5) оранжевым цветом.

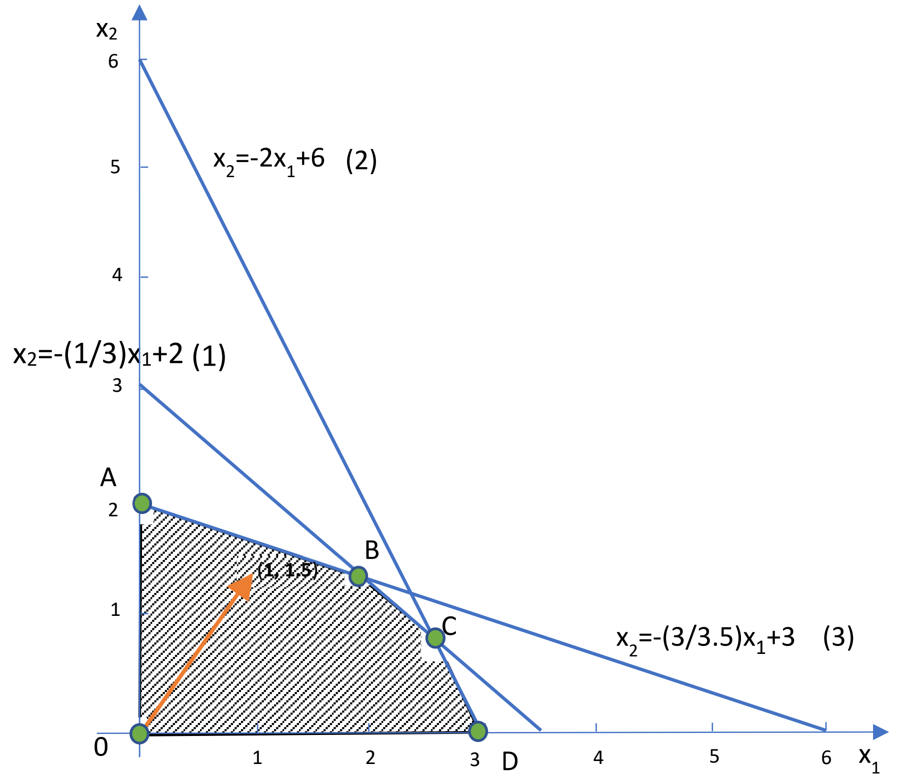


Рис.4 – Допустимая область решений с градиентом

Решение ЗЛП ищется на границе множества решений, представленного заштрихованной областью и ограниченного прямыми, построенными на основе неравенств.

Данное множество можно построить с использованием диаграмм MS Excel, используя обычные линии. Описание этой возможности будет дано в разделе 5.

Если начертить линию на острие стрелки градиента и двигать ее в направлении градиента, то последняя точка множества допустимых решений, которая встретится на пути этой линии, и будет оптимальной точкой (точкой максимума)

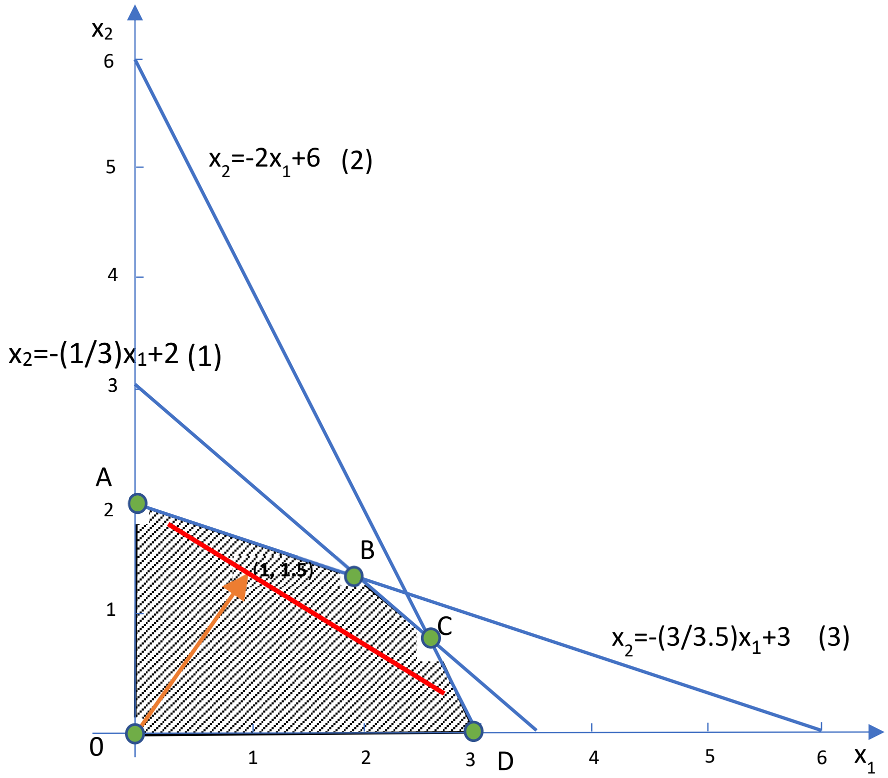


Рис.5 – Допустимая область решений с линией, перпендикулярной градиенту функции цели

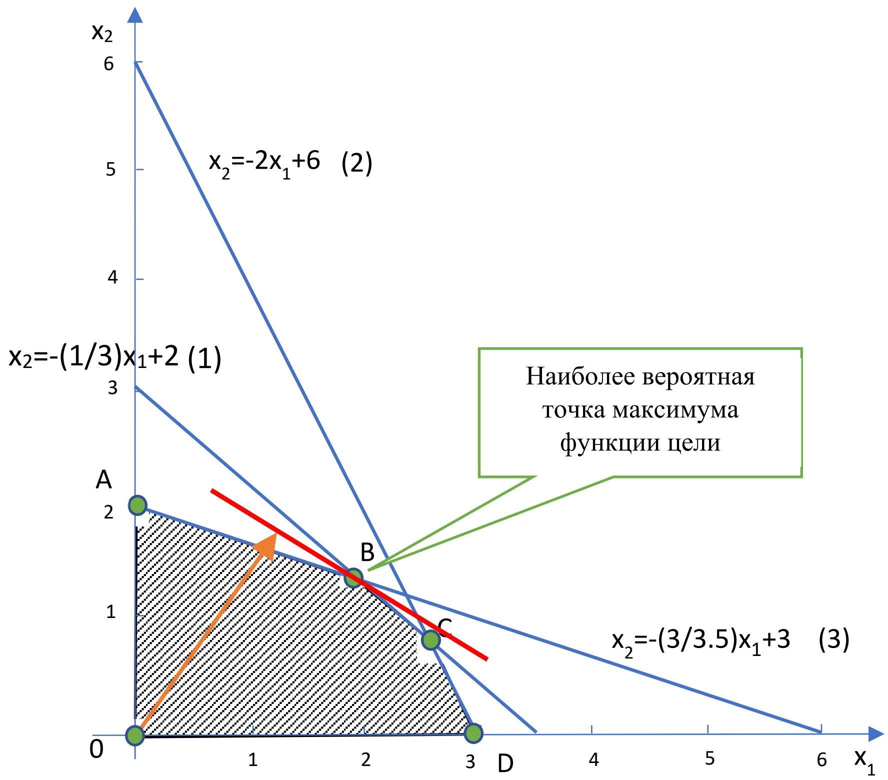


Рис.6 – Допустимая область решений с указанием наиболее вероятной точкой максимума F

Если ищется не максимум, минимум, то в качестве направления его поиска выбирается направление антиградиента $-grad\ F = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F}{\partial x_1} & -\frac{\partial F}{\partial x_2} \end{bmatrix}$. В нашем случае решением такой задачи была бы точка (0, 0).

Потенциальными точками максимума нашей задачи могут быть точки A, B, C и D. Проверим их. Координаты точек A и D легко определяются из уравнений прямых и равны соответственно (0,2) и (3,0). Чтобы найти координаты точки B нужно решить систему уравнений, состоящую из двух уравнения (2) и (3)

$$3x_1+3.5x_2 =10.5, \qquad (4)$$
$$2x_1+6x_2 = 12,$$

или в матричном виде

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3.5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10.5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

а для нахождения координат точки C, нужно решить систему уравнений, состоящую из двух уравнения (1) и (2)

$$4x_1+2x_2 = 12, \qquad (5)$$
$$3x_1+3.5x_2 =10.5,$$

или в матричном виде

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 10.5 \end{bmatrix}.$$

Для решения данных систем уравнений будем использовать функции Excel:

МОПРЕД() – вычисление определителя,

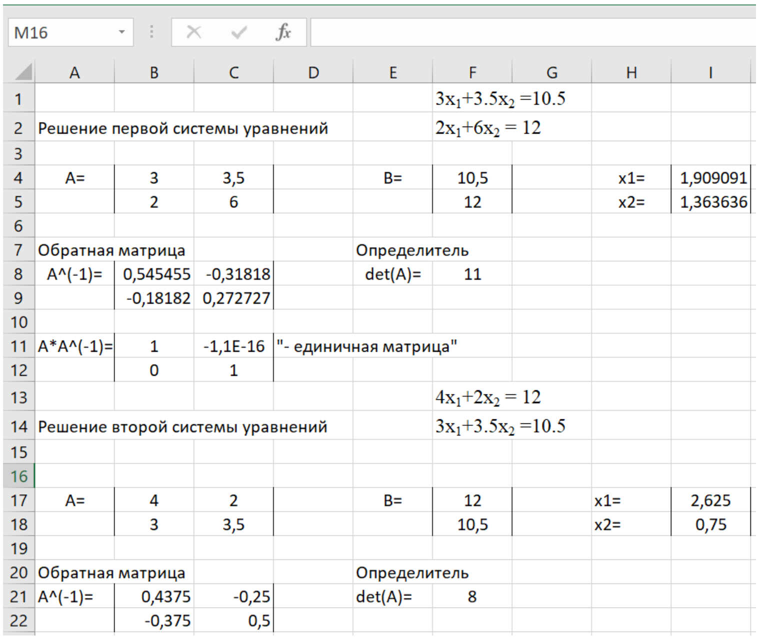
МОБР() – вычисление обратной матрицы,

МУМНОЖ() – умножение двух матриц.

При использовании функций МОБР() и МУМНОЖ() для правильного получения результата, не нужно нажимать кнопку ОК в окне мастера функций, а нужно поставить курсор в строку формулы и нажить комбинацию клавиш ctrl+shift+enter.

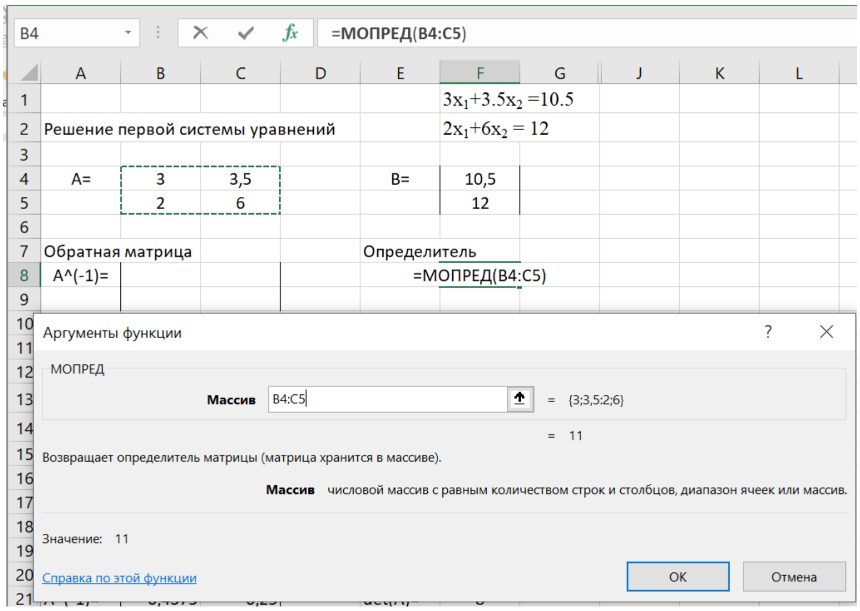
4. Решение системы уравнений в скриншотах.

Процесс решения одного из этих двух систем уравнений изображен на скриншотах

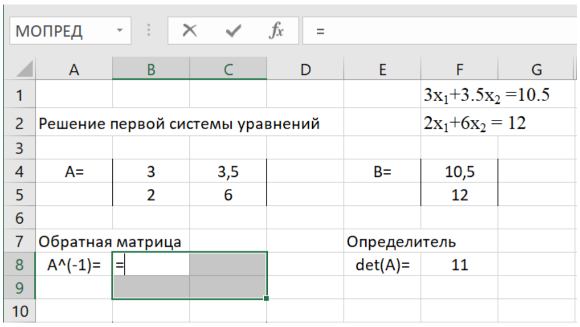


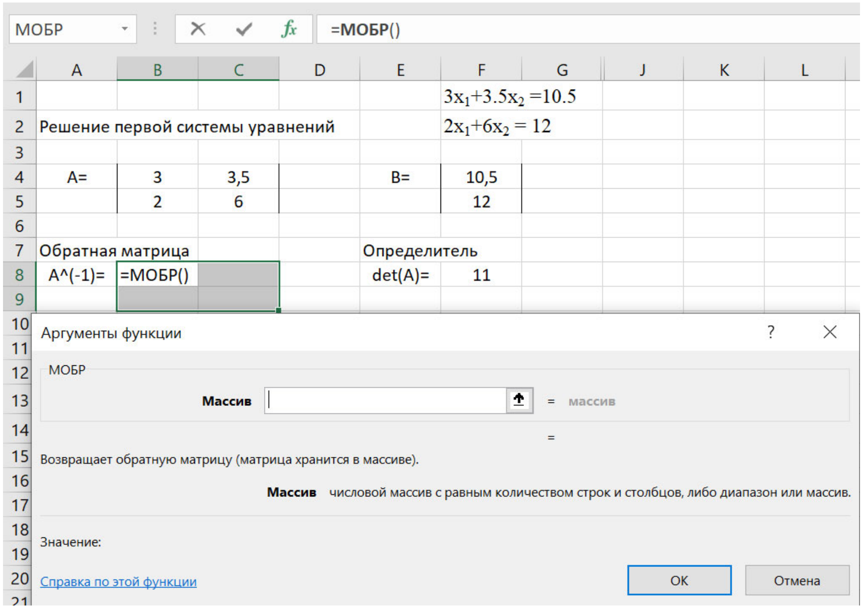
Рассмотрим последовательно процесс поиска решения.

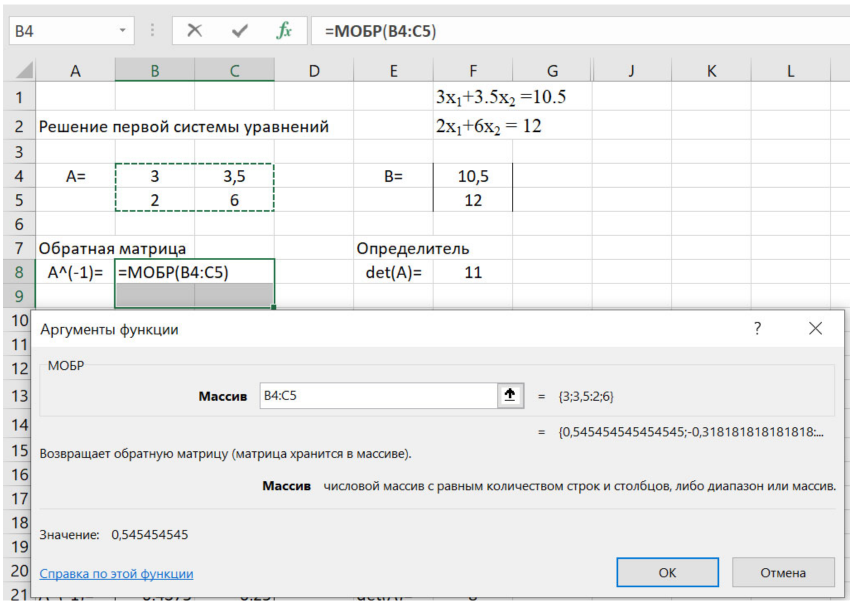
Сначала вычисляем определитель, используя функцию МОПРЕД(). Для этого выделяем ячейку, где будет расположено значение определителя, набираем знак =, и выбираем или набираем функцию МОПРЕД(), в качестве ее аргумента в окно массив или в аргумент функции в строке формул выбираем диапазон ячеек B4:C5.



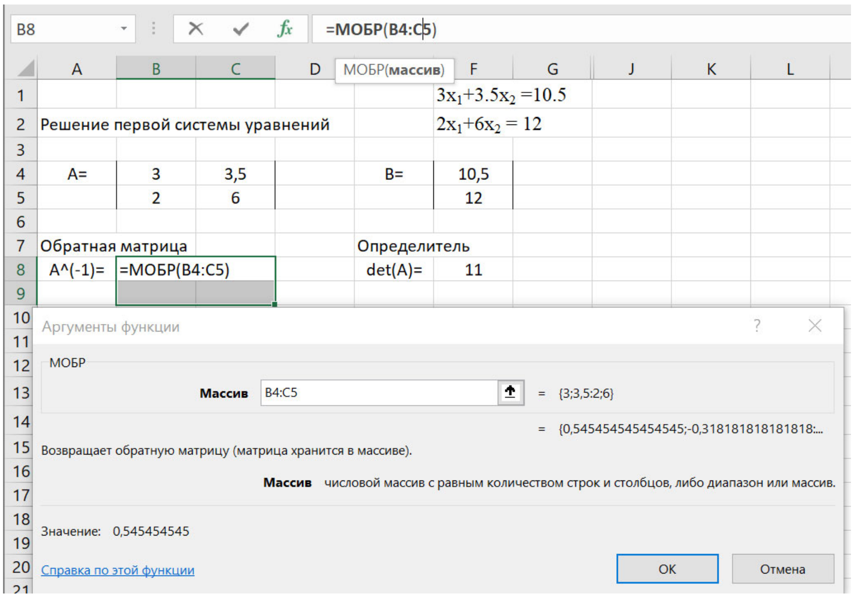
Затем вычисляем обратную матрицу, используя функцию МОБР(). Для этого выделяем диапазон ячеек, где будет расположено значение обратной матрицы, набираем знак =, и выбираем или набираем функцию МОБР(), в качестве ее аргумента в окно массив или аргумент функции в строке формул выбираем диапазон ячеек B4:C5.



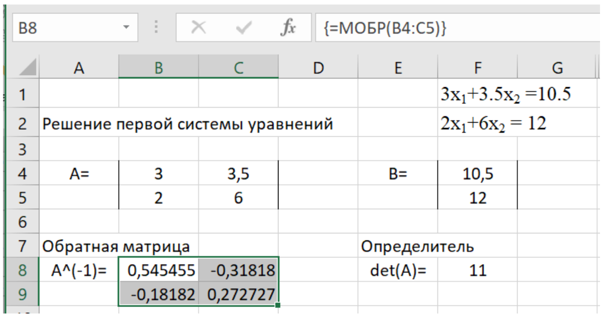




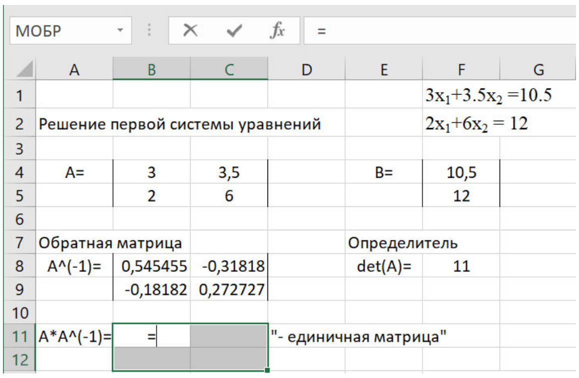
После этого не нажимаем кнопку ОК, а ставим курсор в строку формул

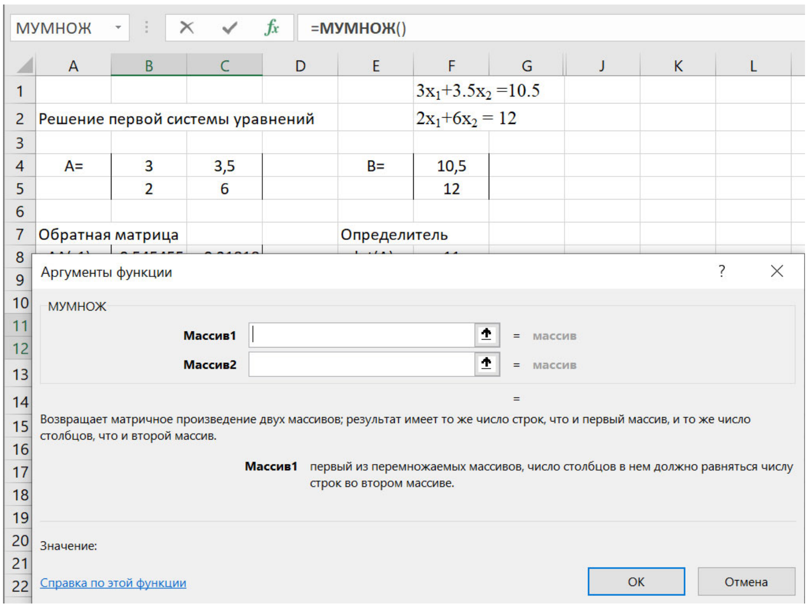


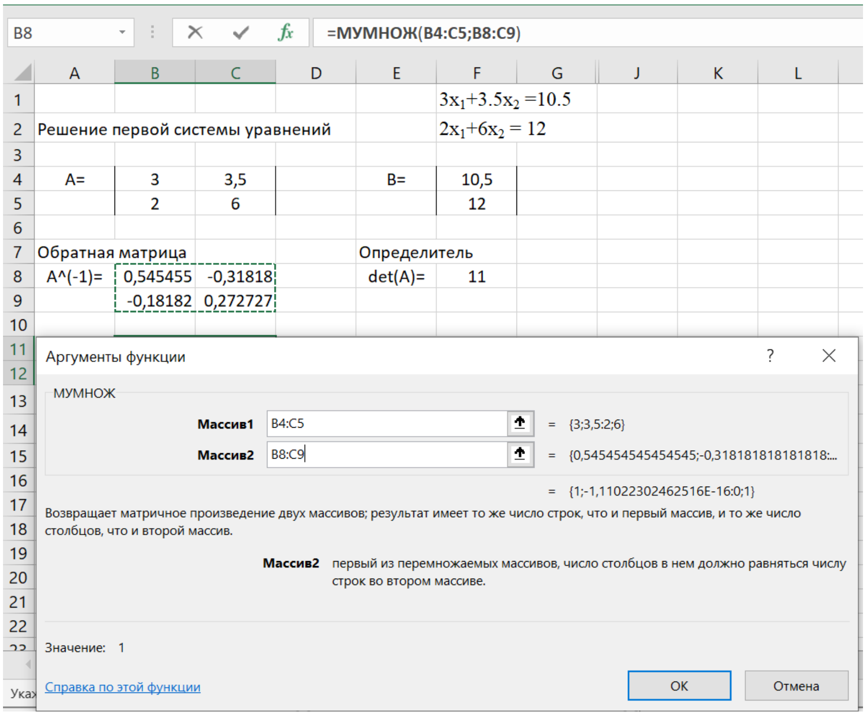
и нажимаем комбинацию клавиш ctrl+shift+enter. В результате получим



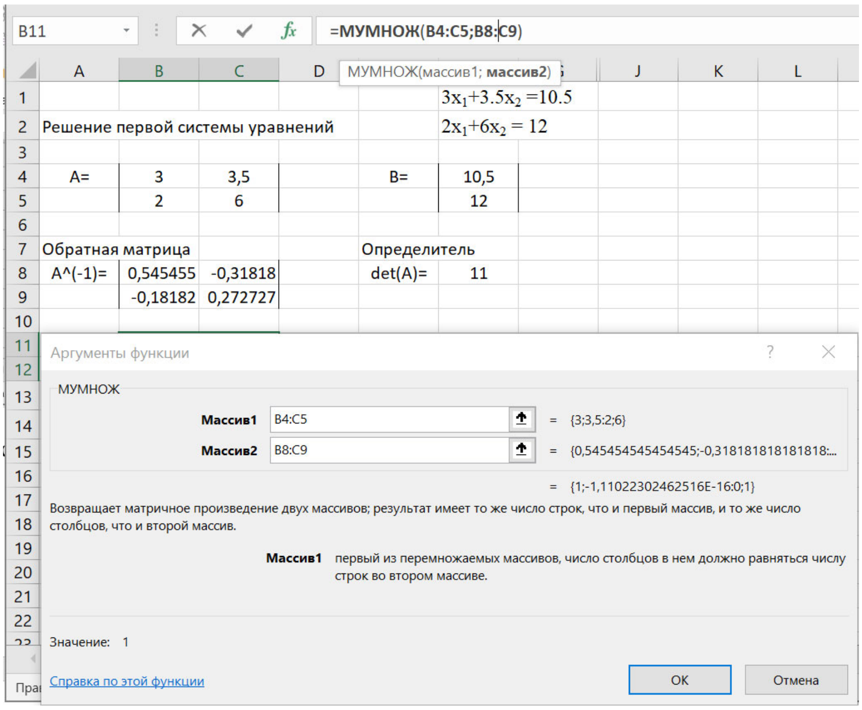
Осуществим проверку правильности вычисления обратной матрицы. Для этого умножим ее на исходную матрицу, получим единичную матрицу. Для умножения будем использовать функцию МУМНОЖ(). Сначала выделяем диапазон ячеек, где будет расположено значение произведения матриц B11:C12, набираем знак =, и выбираем или набираем функцию МУМНОЖ(), в качестве ее аргумента в окно массив1 или в первый аргумент функции в строке формул, выбираем диапазон ячеек B4:C5. Затем, в качестве ее аргумента в окно массив2 или в второй аргумент функции в строке формул, выбираем диапазон ячеек B8:C9.



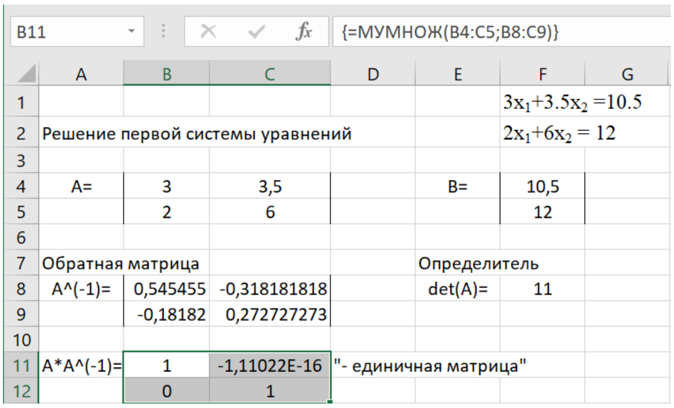




После этого не нажимаем кнопку ОК, а ставим курсор в строку формул

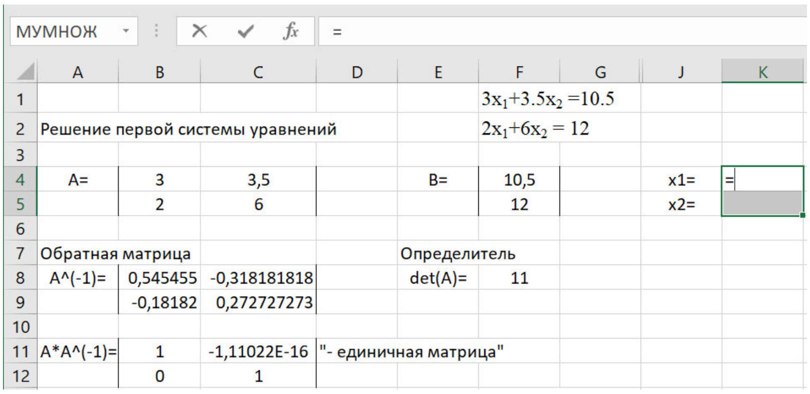


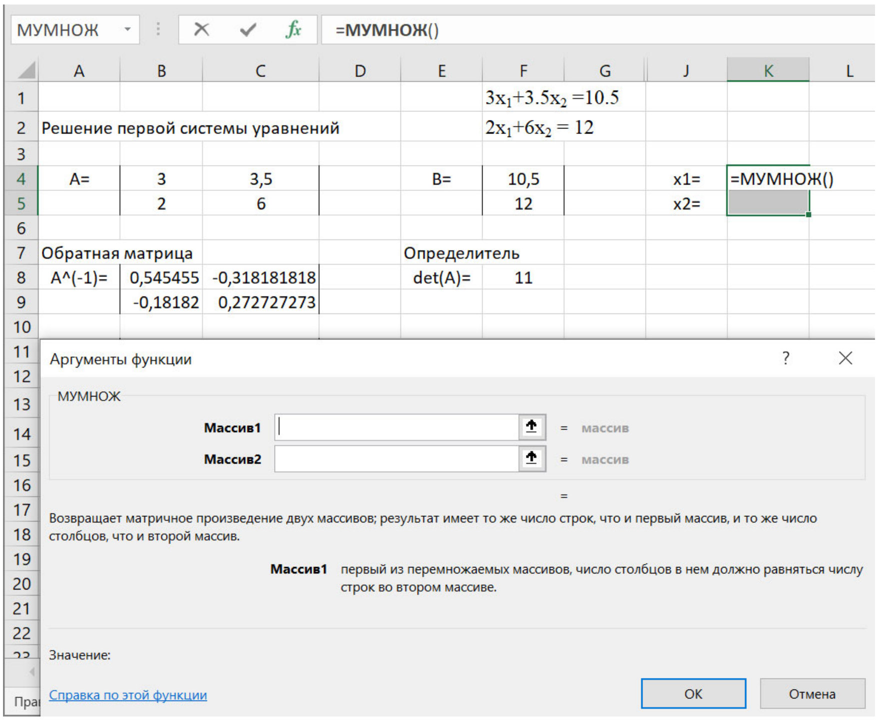
и нажимаем комбинацию клавиш ctrl+shift+enter. В результате получим

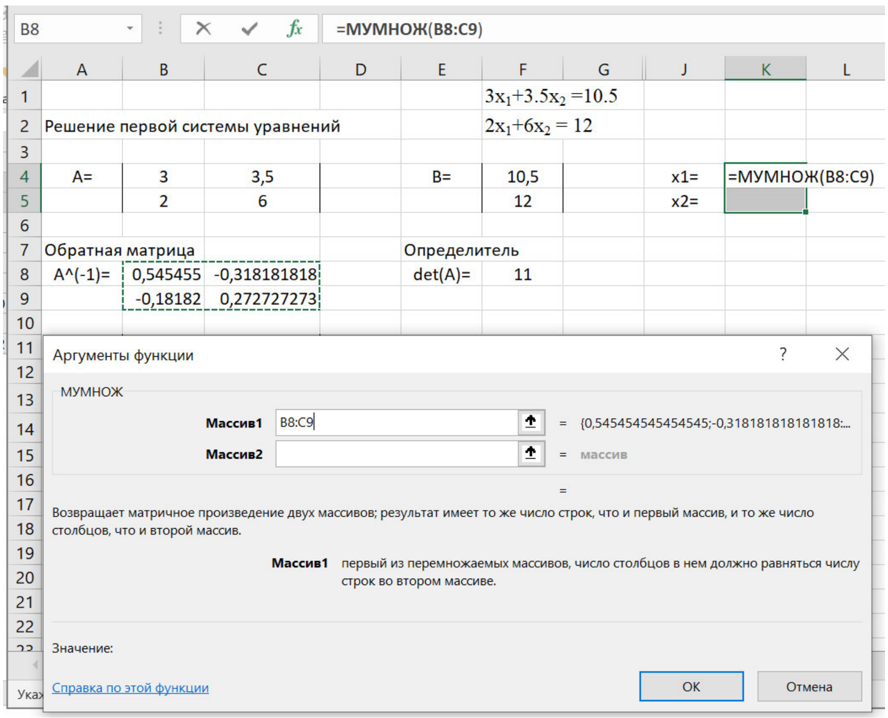


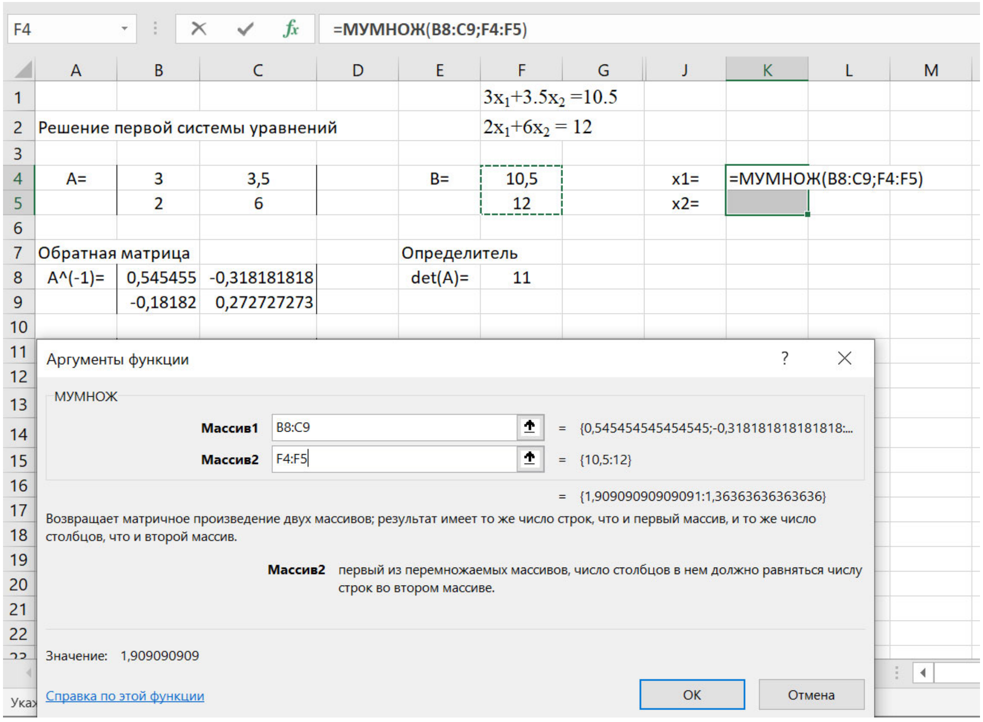
Найдем решение системы уравнений AX=B в виде $X=A^{-1}B$. Для этого будем использовать функцию МУМНОЖ().

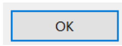
Для этого сначала выделяем диапазон ячеек, где будет расположено значение произведения матриц K4:K5, набираем знак =, и выбираем или набираем функцию МУМНОЖ(), в качестве ее аргумента в окно массив1 или в первый аргумент функции в строке формул, выбираем диапазон ячеек B8:C9. Затем, в качестве ее аргумента в окно массив2 или во второй аргумент функции в строке формул, выбираем диапазон ячеек F4:F5.


МУМНОЖ
=
Решение первой системы уравнений
3x1+3.5x2 =10.5
2x1+6x2 = 12
A=
B=
x1=
x2=
Обратная матрица
Определитель
A^(-1)=
det(A)=
A*A^(-1)=
"- единичная матрица"

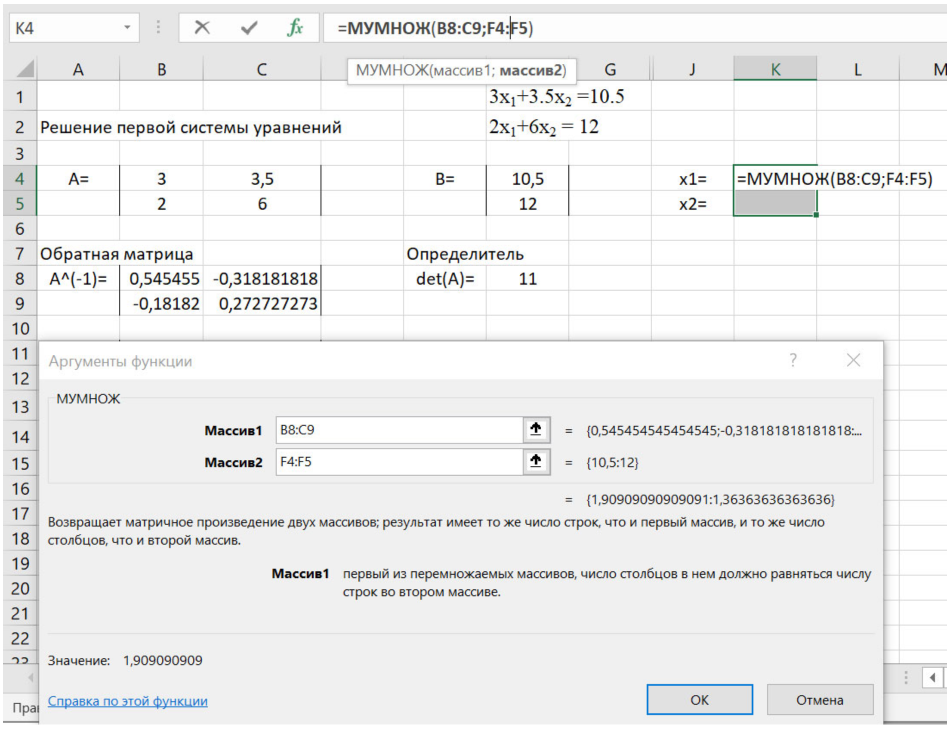

МУМНОЖ
=МУМНОЖ()
Аргументы функции
Массив1
Массив2
Возвращает матричное произведение двух массивов; результат имеет то же число строк, что и первый массив, и то же число столбцов, что и второй массив.
Массив1 первый из перемножаемых массивов, число столбцов в нем должно равняться числу строк во втором массиве.
Значение:
Справка по этой функции
ОК
Отмена


B8
=МУМНОЖ(B8:C9)
Аргументы функции
Массив1
B8:C9
Массив2
Возвращает матричное произведение двух массивов; результат имеет то же число строк, что и первый массив, и то же число столбцов, что и второй массив.
Массив1 первый из перемножаемых массивов, число столбцов в нем должно равняться числу строк во втором массиве.
Значение:
Справка по этой функции
ОК
Отмена



После этого не нажимаем кнопку 

, а ставим курсор в строку формул



и нажимаем комбинацию клавиш ctrl+shift+enter. В результате получим

K4 | {=МУМНОЖ(B8:C9;F4:F5)}

	A	B	C	D	E	F	G	J	K
1						$3x_1+3.5x_2=10.5$			
2	Решение первой системы уравнений					$2x_1+6x_2 = 12$			
3									
4	A=	3	3,5		B=	10,5		x1=	1,909091
5		2	6			12		x2=	1,363636
6									
7	Обратная матрица				Определитель				
8	A^(-1)=	0,545455	-0,318181818		det(A)=	11			
9		-0,18182	0,272727273						
10									
11	A*A^(-1)=	1	-1,11022E-16	"- единичная матрица"					
12		0	1						

Итак, получили решение $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}909091 \\ 1{,}363636 \end{bmatrix}$.

Если округлить до одного знака после запятой, получим

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}9 \\ 1{,}4 \end{bmatrix}.$$

В результате мы получим координаты всех потенциальных точек, дающих максимум, функции цели F. Приведем их в таблице с вычисленной в Excel функцией цели

Точки	A	B	C	D
x_1	0	1,9	2,6	3
x_2	2	1,4	0,8	0
$F=x_1+1.5x_2$	3	4	3.8	3

Из этой таблице видно, что оптимальной является точка B с координатами (1.9 ,1.4) и значением функции цели F=4.

5. Процесс построения области допустимых решений в MS Excel в скриншотах.

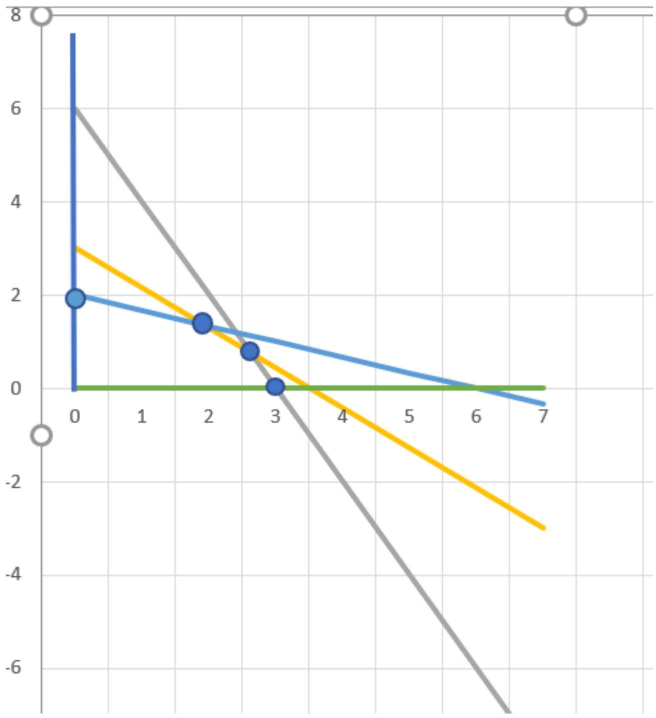
E27 | =2*B21+4*E21

	A	B	D	E	F
1	**Построение данных для диаграммы маркером автозаполне**				
2	x1	ось x1	линия 1	линия 2	линия 3
3	0	0	6	3	2
4	1	0	4	2,142857	1,66666667
5	2	0	2	1,285714	1,33333333
6	3	0	0	0,428571	1
7	4	0	-2	-0,42857	0,66666667
8	5	0	-4	-1,28571	0,33333333
9	6	0	-6	-2,14286	0
10	7	0	-8	-3	-0,33333333

В ячейку A3 помещаем начальное значение переменной x_1. В ячейки A4:A10 ее следующие значения с шагом 1, хотя можно брать шаг меньше. Для прямых линий это не существенно. Ось x1 содержит одни нули – это нужно4, чтобы построить ось в мастере диаграмм. В ячейки D3, E3, F3 заносятся правые части выражений прямых соответственно

=6-2*A3, =3-(3/3,5)*A3, =2-(1/3)*A3/. Далее эти формулы копируются в нижние ячейки маркером автозаполнения.

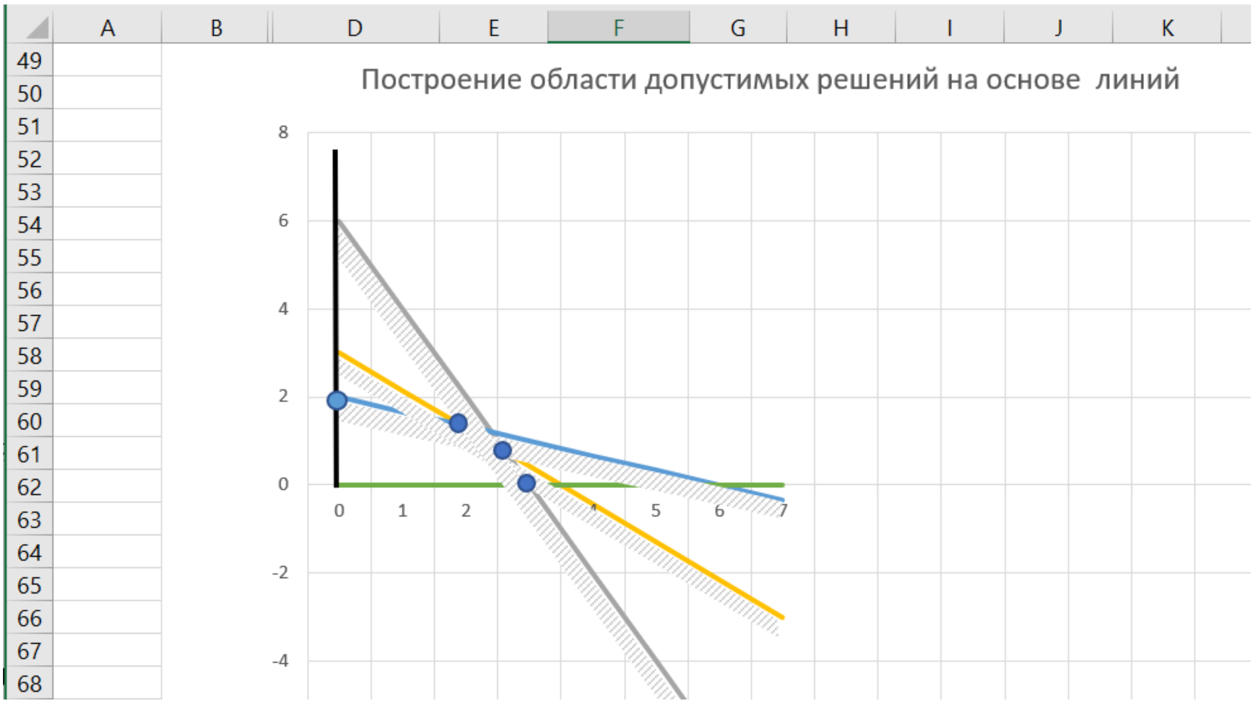
Далее используя вышеприведенные столбцы с помощью мастера диаграмм строятся линии



Синие кружки нарисованы через команды меню Excel **Вставка | Иллюстрации | Фигуры.**

	A	B	C	D	E	F	G	H
19								
20	Определение допустимой области							
21	x1=	0,5		x2=	1	Условие выполнения неравенства		
22								
23	$4x_1+2x_2 = 12$ (1)			4x1+2x2=	4	4<12		
24								
25	$3x_1+3.5x_2=10.5$ (2)			$3x_1+3.5x_2 =$	1,42857	1.43<3		
26								
27	$2x_1+6x_2 = 12$ (3)			$2x_1+6x_2 =$	7	7<12		

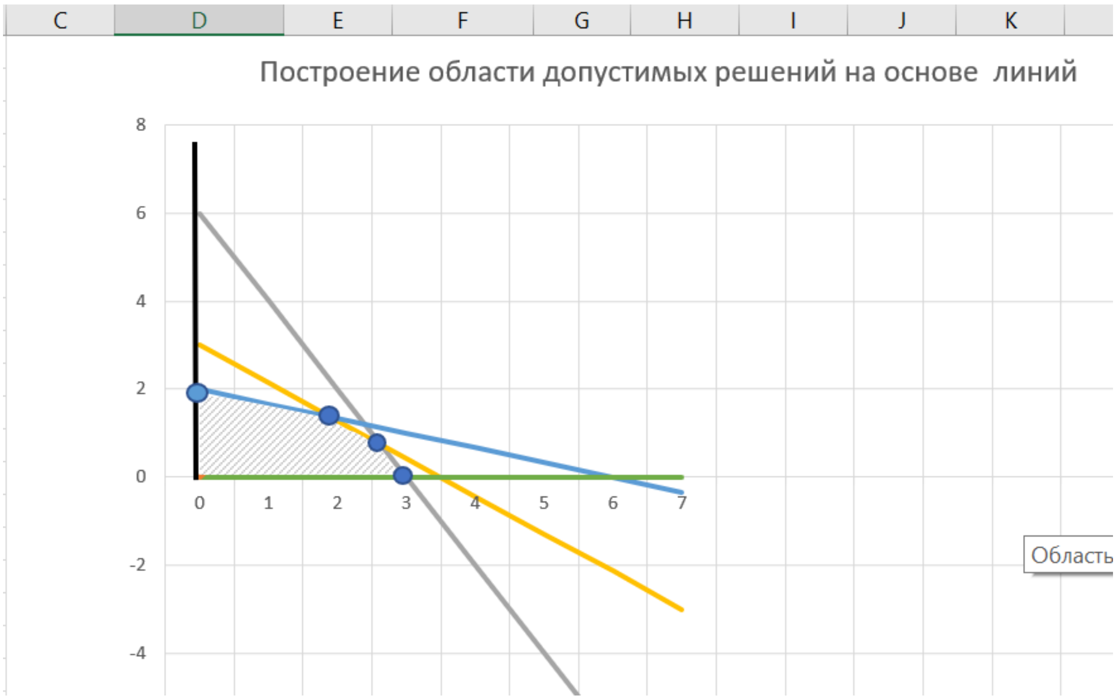
Здесь выполняется анализ с какой стороны от прямой линии находится область допустимых решений, и с этой стороны она штрихуется.



Штриховка нарисована через команды меню Excel **Вставка | Иллюстрации | Фигуры** с помощью полилинии  . Затем построенная фигура через команду **Формат объекта** контекстного меню, вызываемого правой кнопкой мыши, заполняется нужной штриховкой. Если нужно, через контекстное меню можно изменить расположение узлов созданной области, добавить или удалить ненужные узлы.

Вертикальная линия в рисунке нарисована через команды меню Excel **Вставка | Иллюстрации | Фигуры.**

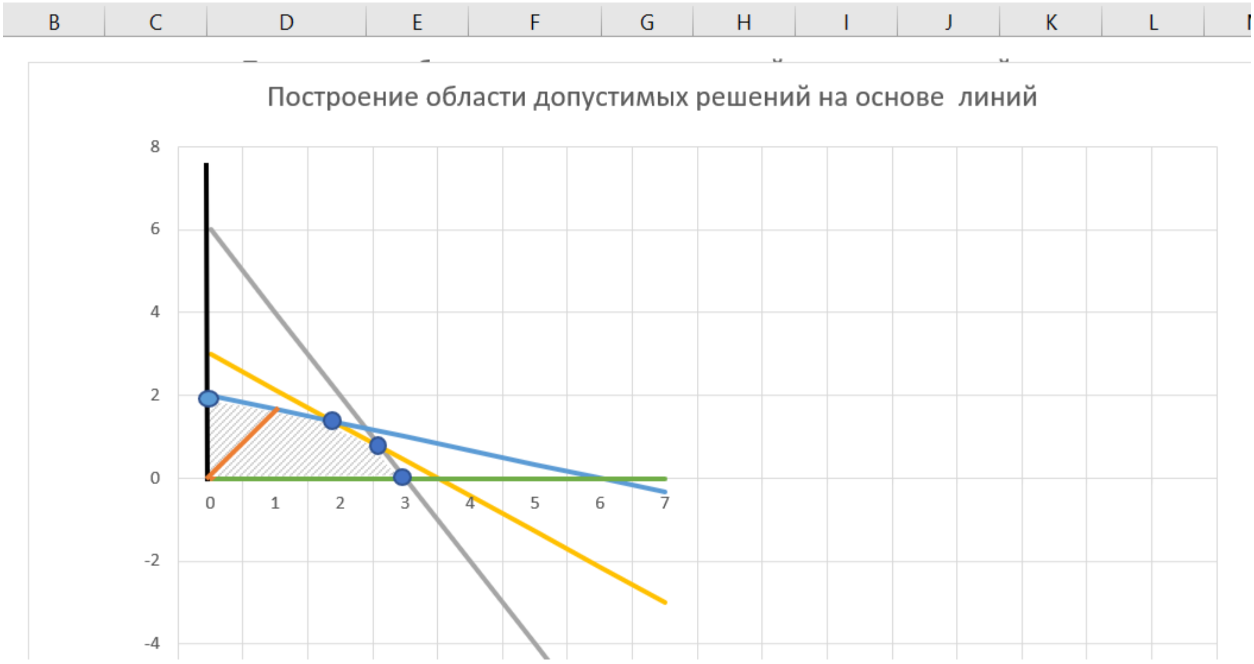
Определив расположение области решений,



построим ее и нарисуем градиент, показывающий направление максимального возрастания функции $grad\ F = \left[\frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}\right] = [1 \quad 1.5]$. Его можно добавить в диаграмму через контекстное меню диаграммы с помощью команды «изменить данные». Он нарисован оранжевым цветом. Поскольку он закрывался штриховкой, его пришлось подрисовать сверху штриховки оранжевым отрезком.

Таблица значений градиента расположена в самом начале

G	H	I	J
градиент-направление			
x1	x2	gradF	Таблица 2
0	0	0	
1	1,5	1,5	



Оранжевый градиент указывает направление и поэтому под подозрение подпадают две точки при пересечении линий желтая-синяя, желтая-серая.

6. Список вопросов по теме

1. В чем состоит суть задачи линейного программирования?
2. Какой вид имеет функция цели в задачи линейного программирования?
3. Что представляют собой ограничения в задаче линейного программирования?
4. Когда можно решать задачу линейного программирования графическим методом?
5. Как находить точки пересечения прямых линий, полученных из ограничений?
6. Что такое область допустимых решений?
7. Как построить область допустимых решений, в задаче, решаемой графическим методом?
8. В чем состоит суть поиска решения задачи линейного программирования?
9. Для чего нужен градиент функции цели, и как его вычислить?
10. Что нужно сделать в задаче линейного программирования?
11. Какие функции программы Excel используются для поиска точек пересечения прямых?
12. Какой инструмент Excel позволяет нарисовать прямые линии, полученные из ограничений?
13. Как нарисовать ось абсцисс в задаче линейного программирования с помощью Excel?
14. В чем состоит алгоритм поиска решения задачи линейного программирования?
15. В чем состоит суть Симплекс-метода для решения задачи линейного программирования?

7. Список литературы

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие, 2-е изд. перераб. и доп., М.: Финансы и статистика, 2006. – 432 с.: ил.
2. Васильев А.Н. Числовые расчеты в Excel: Учебное пособие. – СПб: Изд-во «Лань», 2014, 608 с.
3. Гладких Б.А. Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики. Ч.1. Введение в исследование операций. Линейное программирование: Учебное пособие. – Томск: Из-во НТЛ, 2009, 200 с.
4. Горлач Б.А. Исследование операций: Учебное пособие. – СПб: Из-во «Лань», 2013, 448 с.
5. Есипов Б.А. Методы исследование операций: Учебное пособие. – СПб: Изд-во «Лань», 2013, 304 с.
6. Мадера А.Г. Математические модели в управлении: Компьютерное моделирование в Microsoft Excel: Лабораторные работы. - М.:РГГУ, 2007. – 121 с.
7. Новиков, А.И. Экономико-математические методы и модели : учебник /А.И. Новиков. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. -532 с. : ил. - (Учебные издания для бакалавров). - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-394-02615-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454090 (05.12.2020).
8. Ржевский С.В. Исследование операций: Учебное пособие. –СПб: Изд-во «Лань», 2013, 480 с.