Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Алтайский государственный технический университет
им. И. И. Ползунова»

В. П. Зайцев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные понятия, поясняющие примеры и задания

Учебное пособие

*Рекомендовано
Алтайским государственным техническим университетом
им. И. И. Ползунова в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по всем направлениям бакалавриата*

Изд-во АлтГТУ
Барнаул • 2019

УДК 519.2 (075.8)

Зайцев, В. П. Теория вероятностей. Основные понятия, поясняющие примеры и задания: учебное пособие / В. П. Зайцев. – Барнаул : Изд-во АлтГТУ, 2019. – 101 с.

ISBN 978-5-7568-1302-9

Предлагаемое пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов инженерных и экономических направлений и специальностей всех форм обучения в виде выполнения индивидуальных домашних заданий или расчётного задания, если это предусмотрено учебным планом, по теории вероятностей – одному из важных разделов математики.

Материал разбит на 8 тем, по каждой из которых приводятся справочный теоретический материал, поясняющие примеры с подробными решениями. Для каждой темы составлено индивидуальное задание (25 вариантов).

Рекомендовано Алтайским государственным техническим университетом им. И. И. Ползунова в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по всем направлениям бакалавриата. Протокол № 7 НМС АлтГТУ от 20 марта 2019 г.

Рецензенты:

А. С. Киркинский, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика», АлтГТУ

Ю. А. Алтухов, д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретических основ информатики АлтГПУ

ISBN 978-5-7568-1302-9

Содержание

Предисловие

В обучении студентов технических и экономических направлений и специальностей важное место отводится теории вероятностей, которая занимается изучением явлений, связанных с понятием *случайности*. Оказывается, случайным явлениям свойственны закономерности. Например, молекулы газа в некотором сосуде, находясь в беспорядочном движении, сталкиваясь случайным образом со стенками сосуда, создают давление, которое, казалось бы, должно меняться случайным образом. Однако, это не так: давление газа подчиняется строгой закономерности (закон Бойля-Мариотта). Причина этой закономерности заключается в том, что давление газа на стенки сосуда есть средний результат воздействия большого числа молекул. Случайные воздействия отдельных молекул взаимно погашаются, нивелируются.

Именно эта *устойчивость среднего результата*, независимость его от случайных изменений отдельных составляющих приводит к возможности решать многие задачи методами теории вероятностей. Отметим, что в родственной дисциплине «Математическая статистика» широко используются понятия и результаты теории вероятностей.

Книга состоит из восьми тем. В начале каждой темы излагаются кратко основные теоретические положения, формулы, поясняющие примеры с подробными решениями. Эта информация ни в коей мере не освобождает студента от работы с учебниками и конспектом лекции. Изучение теории вероятностей обязательно нужно сопровождать решением примеров. В конце каждой темы для самостоятельной работы приводятся 25 вариантов индивидуальных заданий.

В темах 1-5 рассматриваются такие понятия теории вероятностей, как множество элементарных исходов в опыте, случайные события и операции над ними, классическое и геометрическое определения вероятности события. Формулируются и на примерах иллюстрируются понятия условной вероятности, зависимости и независимости событий, показывается как использовать формулу полной вероятности и формулу Байеса, схему независимых повторных испытаний (схему Бернулли).

Темы 6, 7 посвящены дискретным и непрерывным случайным величинам. Рассматривается понятие функции распределения случайной величины. Приводятся наиболее важные примеры распределений случайных величин.

В последней теме 8 рассматривается система двух дискретных величин, понятие совместного закона распределения, простейшая характеристика связи случайных величин (коэффициент корреляции).

Приведены необходимые таблицы и список рекомендуемой литературы.

Тема 1. Операции над случайными событиями

Важнейшими, изначальными понятиями теории вероятностей являются такие понятия как *опыт* (наблюдение, испытание), *множество элементарных исходов* (будем обозначать Ω), *случайное событие* в опыте.

Рассмотрим, например, такой простой опыт: один раз подбрасывается игральная кость (кубик, у которого каждая грань помечена числами от ***1*** до ***6***). Результатом этого опыта (элементарным исходом) будет число, которое можно будет наблюдать на верхней грани упавшей кости. В таком опыте множество всех элементарных исходов – это множество чисел (очков) от ***1*** до ***6***, т. е. $\Omega = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, ..., \boldsymbol{6}\}$.

Отметим, что в теории вероятностей рассматриваются только такие опыты, которые можно воспроизводить сколько угодно раз. Множество Ω должно содержать *все возможные взаимоисключающие (элементарные)* исходы опыта.

Случайное событие ***A*** в опыте отождествляется с некоторым подмножеством множества элементарных исходов Ω. Например, подмножество $\{\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{5}\} \subseteq \Omega$ соответствует случайному событию ***A***= {выпало простое число при бросании игральной кости}. Если при проведении опыта реализовался элементарный исход из ***A***, то это означает, что событие ***A*** *произошло* в данном опыте (наступило, осуществилось). Говорят, что исходы ***2, 3, 5*** «благоприятствуют» появлению события ***A***, а при возможных исходах ***1, 4, 6*** событие ***A*** не происходит в данном опыте.

Событие называется *невозможным*, если оно никогда не наступает в данном опыте, оно отождествляется с пустым множеством $\varnothing$. Событие является *достоверным* событием, если в опыте оно обязательно происходит, это Ω.

Так как события – это, вообще говоря, множества, элементами которых являются исходы, то все известные операции над множествами «похожи» на операции над событиями.

Пусть ***A*** и ***B*** – любые события в опыте. Операции над событиями определяют новые события следующим образом.

Произведение $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} =$ {совместное (одновременное) осуществление и события ***A***, и события ***B***}.

Сумма $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\{$происходит хотя бы одно из событий $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$ (или $\boldsymbol{A}$, или $\boldsymbol{B}$, или $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ $\}$.

Разность $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{A}$ происходит, а $\boldsymbol{B}$ не происходит$\}$.

Противоположное для $\boldsymbol{A}$ *событие* $\overline{\boldsymbol{A}}=\Omega-\boldsymbol{A}=\{$событие $\boldsymbol{A}$ не произошло$\}$.

Если $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\varnothing$, это означает, что у событий $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ нет общих исходов, эти события не могут происходить одновременно, их называют *несовместными*, иначе они *совместные*.

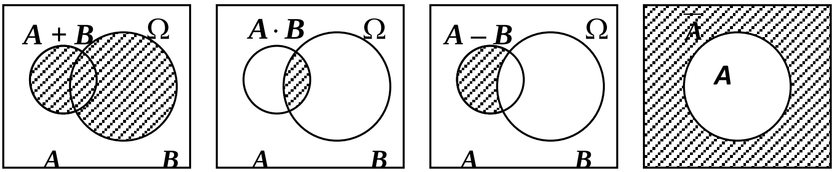
Говорят, что события $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_n}$ образуют *полную* группу событий в опыте, если

$$\boldsymbol{A_i}\cdot\boldsymbol{A_j}=\varnothing \quad (\boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{A_1}+\boldsymbol{A_2}+\ldots+\boldsymbol{A_n}=\Omega .$$

Первое условие – события попарно несовместны, второе условие – их сумма является достоверным событием.

Отметим, что если $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$ (все исходы $\boldsymbol{A}$ являются и исходами $\boldsymbol{B}$), то при появлении события $\boldsymbol{A}$ появится и событие $\boldsymbol{B}$.

Рассмотренные операции над событиями удобно иллюстрировать с помощью *диаграмм Эйлера-Венна* (события изображены кругами, множество Ω – прямоугольник, результаты операции – заштрихованные фигуры).



Для произвольных событий верны равенства :

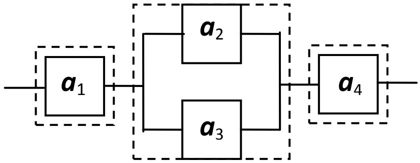
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}+\varnothing=\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}\cdot\overline{\boldsymbol{A}}=\varnothing, \quad \boldsymbol{A}\cdot\Omega=\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\varnothing=\varnothing, \quad \boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}=\Omega, \quad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}, \quad \overline{\overline{\boldsymbol{A}}}=\boldsymbol{A}.$$

$$\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}, \quad \overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}, \quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}.$$

Рассмотренные операции позволяют конструировать из одних событий другие.

Пример 1. Рассмотрим схему соединения элементов (деталей, узлов и т. п.):



Введём события: $A_i=$ {элемент a_i работает, $i=1,2,3,4$ },

$B=$ {схема работает}. Записать события B и $\overline{B}$ через A_i.

Решение. Если в схеме элементы соединены последовательно, то схема работает только при условии работы всех элементов, а при параллельном соединении – при условии работы хотя бы одного элемента.

Данная схема есть результат последовательного соединения 3-х блоков (на рисунке эти блоки обведены пунктирами). Значит, событие B произойдёт, если работает элемент a_1 (произошло событие A_1), и работает параллельное соединение элементов a_2 и a_3 (произошло событие A_2+A_3), и работает элемент a_4 (событие A_4), т.е. $B=A_1\cdot\left(A_2+A_3\right)\cdot A_4$.

Схема не работает (событие $\overline{B}$), если не работает или элемент a_1, или параллельное соединение элементов a_2 и a_3, или элемент a_4. Поэтому, $\overline{B}=\overline{A_1}+\overline{A_2+A_3}+\overline{A_4}=\overline{A_1}+\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_4}$.

Пример 2. Опыт: три хоккеиста по одному разу бросают шайбу в ворота. Рассмотрим события: $A_i=$ {i-й хоккеист попал, $i=1,2,3$ }. Выразить через них следующие события:

$A=$ {ровно одно попадание}, $B=$ {хотя бы одно попадание},

$C=$ {не менее двух попаданий}. В чём состоят события: $A+B,\ A\cdot B,\ B+C,\ A+B+C$?

Решение. Событие A означает, что будет попадание только 1-м хоккеистом ($A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$), или только 2-м ($\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}$), или только 3-м ($\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$), т. е. имеем сумму событий

$$A=A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3 .$$

Событие $\boldsymbol{B}$ означает, что будет попадание или 1-м хоккеистом (событие $\boldsymbol{A_1}$), или 2-м (событие $\boldsymbol{A_2}$), или 3-м (событие $\boldsymbol{A_3}$), или любыми двумя из них, или всеми вместе, т. е. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_2} + \boldsymbol{A_3}$.

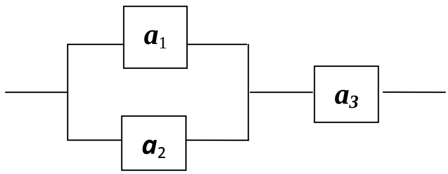
Событие $\boldsymbol{C}$ означает, что попадут или любые два хоккеиста (событие $\boldsymbol{A_1} \cdot \boldsymbol{A_2} \cdot \overline{\boldsymbol{A_3}} + \boldsymbol{A_1} \cdot \overline{\boldsymbol{A_2}} \cdot \boldsymbol{A_3} + \overline{\boldsymbol{A_1}} \cdot \boldsymbol{A_2} \cdot \boldsymbol{A_3}$), или все три (событие $\boldsymbol{A_1} \cdot \boldsymbol{A_2} \cdot \boldsymbol{A_3}$), т. е. сумма этих событий

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A_1} \cdot \boldsymbol{A_2} \cdot \overline{\boldsymbol{A_3}} + \boldsymbol{A_1} \cdot \overline{\boldsymbol{A_2}} \cdot \boldsymbol{A_3} + \overline{\boldsymbol{A_1}} \cdot \boldsymbol{A_2} \cdot \boldsymbol{A_3} + \boldsymbol{A_1} \cdot \boldsymbol{A_2} \cdot \boldsymbol{A_3}.$$

Нетрудно заметить, что $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ (из появления события $\boldsymbol{A}$ следует появление события $\boldsymbol{B}$). В этом случае $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$. Отметим, что и $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{B}$, поэтому $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$. Значит, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$.

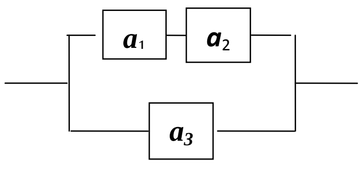
Варианты задания по теме 1

1.1 На рисунке изображена схема:



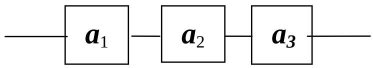
Рассмотрим события: $\boldsymbol{A_i} =$ {работает элемент $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1, 2, 3}$}, $\boldsymbol{B} =$ {схема работает}. Выразить события $\boldsymbol{B}$ и $\overline{\boldsymbol{B}}$ через $\boldsymbol{A_i}$.

1.2 На рисунке изображена схема:



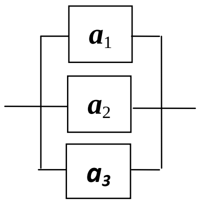
Рассмотрим события: A_i = {работает элемент a_i, $i = 1, 2, 3$ }, B = {схема работает}. Выразить события B и $\overline{B}$ через A_i.

1.3 На рисунке изображена схема:



Рассмотрим события: A_i = {работает элемент a_i, $i = 1, 2, 3$ }, B = {схема работает}. Выразить события B и $\overline{B}$ через A_i.

1.4 На рисунке изображена схема:



Рассмотрим события: A_i = {работает элемент a_i, $i = 1, 2, 3$ }, B = {схема работает}. Выразить события B и $\overline{B}$ через A_i.

1.5 Из множества {***а, б, в***} три раза наугад извлекается одна буква (выбор с возвращением). Введём следующие события

$A_i = \{$при i-м выборе взята буква $a\}$, $i = 1, 2, 3$. Выразить через них события: B = {выбрали ровно две буквы a},

C = {выбрали хотя бы одну букву a}, D = {выбрали не менее двух букв a}.

1.6 Три эксперта независимо друг от друга рецензируют одну и ту же статью. Рассмотрим события A_i = { i -й эксперт, $i = 1, 2, 3$, дал положительный отзыв на статью}. Выразить через них следующие события: B = {только один эксперт не дал положительный отзыв}, C = {хотя бы один эксперт не дал положительный отзыв}, $\boldsymbol{D}=$ {только второй эксперт дал положительный отзыв}.

1.7 Из 3-х стопок научных книг, в каждой из которых есть только книги по математике и по физике, наугад берётся по одной книге. Пусть события $\boldsymbol{A_i}=$ {из $\boldsymbol{i}$ -й стопки взята книга по математике, $\boldsymbol{i=1,2,3}$ }. Выразить через них следующие события: $\boldsymbol{B}=$ {взяты две книги по математике}, $\boldsymbol{C}=$ {взята хотя бы одна книга по физике}, $\boldsymbol{D}=$ {книг по математике взято больше, чем по физике}.

1.8 Учитель проверяет решения трёх задач домашнего задания школьника. Рассмотрим события: $\boldsymbol{A}=$ {все три задачи решены правильно}, $\boldsymbol{B}=$ {хотя бы две задачи решены правильно}. Какой смысл событий: $\boldsymbol{A+B,\ A\cdot B,\ A\cdot\overline{B}}$?

1.9 Два математика независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Рассмотрим события: $\boldsymbol{A}=$ {задачу решил 1-й математик}, $\boldsymbol{B}=$ {задачу решил 2-й математик}. Выяснить смысл событий: $\boldsymbol{A\cdot B,\ \overline{A}-B,\ A\cdot\overline{B},\ A+B+\left(\overline{A}-B\right)}$.

1.10 Три раза пытаемся попасть мячом в баскетбольную корзину. Рассматриваются события: $\boldsymbol{A}=$ {попаданий оказалось больше, чем промахов}, $\boldsymbol{B}=$ {в корзину не удалось попасть}, $\boldsymbol{C}=$ {хотя бы один раз удалось попасть в корзину}. Выяснить смысл событий: $\boldsymbol{\overline{B},\ A-B,\ A+B,\ A\cdot B,\ \overline{A}-C,\ \overline{A}\cdot C}$.

1.11 Из урны, в которой находятся 4 белых и 4 чёрных шара, производится последовательное извлечение шаров. Рассмотрим события $\boldsymbol{A_i}=$ {при $\boldsymbol{i}$ -м извлечении появится белый шар, $\boldsymbol{i=1,2,3,4}$ }. Выяснить смысл событий:

$$\boldsymbol{\overline{A_1}\cdot A_2,\ A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\overline{A_4},\ A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot\overline{A_4}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot A_4}.$$

1.12 Двухмоторный самолёт терпит аварию, если одновременно отказывают оба двигателя или выходит из строя система управления. Рассмотрим события: $\boldsymbol{A_i}=$ {отказывает $\boldsymbol{i}$ -й двигатель, $\boldsymbol{i=1,2}$ }, $\boldsymbol{B}=$ {выходит из строя система управления},

$\boldsymbol{C}$ = {самолёт терпит аварию}. Выразить события $\boldsymbol{C}$ и $\overline{\boldsymbol{C}}$ через $\boldsymbol{A_i}$ и $\boldsymbol{B}$.

1.13 Пусть известно, что событие $\boldsymbol{A_1}$ не произошло, а события $\boldsymbol{A_2}$ и $\boldsymbol{A_3}$ произошли. Произошли ли события: $\overline{\boldsymbol{A_1}} \cdot \boldsymbol{A_2} + \boldsymbol{A_3}$, $\boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_2} \cdot \boldsymbol{A_3}$, $\boldsymbol{A_1} \cdot \boldsymbol{A_2} \cdot \boldsymbol{A_3}$?

1.14 Пусть $\boldsymbol{A_i}, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1, 2, 3}$ – три события, наблюдаемые в опыте. Выразить через них следующие события: $\boldsymbol{B}$ = {из 3-х событий не произойдёт ни одного}, $\boldsymbol{C}$ = {произойдёт хотя бы два события из 3-х}, $\boldsymbol{D}$ = {из 3-х событий не произойдёт хотя бы одно}.

1.15 Из колоды в 36 карт наугад вытаскивается карта. Рассмотрим события: $\boldsymbol{A}$ = {вытащен король}, $\boldsymbol{B}$ = {вытащена карта чёрной масти}. Упростить выражение $\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right) \cdot \left(\overline{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{B}\right) \cdot \left(\boldsymbol{A} + \overline{\boldsymbol{B}}\right)$ и выяснить смысл полученного события.

1.16 Из числового множества {$\boldsymbol{1, 2, 3, 5, 6}$} выбирается случайно одно число. Рассмотрим события: $\boldsymbol{A}$ = {выбранное число – чётное}, $\boldsymbol{B}$ = {число делится на 3}, $\boldsymbol{C}$ = {число больше трёх}. Упростить выражение $\boldsymbol{A} \cdot \overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}$ и выяснить смысл полученного события.

1.17 Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – два события, наблюдаемые в опыте. Упростить выражение $\boldsymbol{A} + \overline{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{B} + \overline{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}}$ и выяснить смысл полученного события.

1.18 Футболист пробивает пенальти до первого попадания. Рассмотрим события: $\boldsymbol{A_i}$ = {попадание при $\boldsymbol{i}$-м ударе, $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1, 2, \ldots}$}. Выразить через них следующие события:

$\boldsymbol{B}$ = {будет выполнено 4 удара}, $\boldsymbol{C}$ = {будет выполнено менее 4-х ударов}, $\boldsymbol{D}$ = {будет выполнено либо 2, либо 3 удара}.

1.19 Пусть $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ – три случайных события в опыте. Объяснить, в каких случаях выполняются равенства:

а) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$; б) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$?

1.20 Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – два события, наблюдаемые в опыте. При каких условиях справедливы следующие равенства:

а) $\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$; б) $\boldsymbol{A}\cdot\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$; в) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$?

1.21 Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – два события, наблюдаемые в опыте. При выполнении каких условий справедливы следующие равенства:

а) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$; б) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$;

в) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$?

1.22 Три раза бросается монета. Сколько элементарных исходов содержит множество Ω? Укажите подмножества множества Ω, соответствующие событиям: $\boldsymbol{A}=$ {выпало не более одного герба}, $\boldsymbol{B}=$ {выпало ровно два герба}, $\boldsymbol{C}=$ {выпала хотя бы одна цифра}.

1.23 Из 4-х карточек с номерами ***1***, ***3***, ***5***, ***6*** последовательно наугад выбирают две. Составить множество всех элементарных исходов для этого опыта, если его элементами служат:

а) двузначные числа, образованные извлечёнными карточками;

б) суммы номеров извлечённых карточек.

1.24 Построить множество всех элементарных исходов для следующих опытов:

а) монета бросается до первого появления цифры или до тех пор, пока герб выпадет три раза подряд;

б) бросается игральная кость, а затем монета.

1.25 Из множества $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\boldsymbol{3},\boldsymbol{4}\}$ наугад извлекаются по одному два числа (выбор с возвращением). Построить множество всех элементарных исходов для этого опыта и найти число его элементов.

Тема 2. Классическое определение вероятности

Рассматривается важный случай, когда в опыте *конечное* число элементарных исходов и есть основание считать их *одинаково возможными*. В этой ситуации полагают, что *вероятность* каждого из этих исходов равна $\frac{1}{n}$. Так, например, при одном бросании симметричной монеты возможны 2 исхода (выпадет герб или выпадет цифра), вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$, а определённую карту из колоды 36-ти игральных карт можно наугад извлечь с вероятностью $\frac{1}{36}$.

Итак, опыт имеет конечное число $n(\Omega)$ одинаково возможных элементарных исходов, а случайное событие A состоит из $n(A)$ исходов (будем говорить, что событию A *благоприятствуют* $n(A)$ исходов). При таких предположениях *вероятность* $P(A)$ события A определяется равенством

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Это так называемое *классическое определение вероятности*.

Отметим некоторые свойства вероятности, которые следуют из определения:

$$0\le P(A)\le 1,\ P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=1.$$

Если события A и B несовместны, то, очевидно, $n(A+B)=n(A)+n(B)$, поэтому $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Если события A и B совместны, то $n(A+B)=n(A)+n(B)-n(A\cdot B)$, значит справедлива формула

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Пример 1. Пусть опыт состоит в подбрасывании один раз игральной кости. Найти вероятности событий:
$\boldsymbol{A}$ = {выпало число кратное трём}, $\boldsymbol{B}$ = {выпало чётное число}, $\boldsymbol{C}$ = {выпало число не менее четырёх}, $\boldsymbol{D}$ = {выпало число $\boldsymbol{0}$}, $\boldsymbol{E}$ = {выпало положительное число}, $\boldsymbol{F}$ = {выпало число меньше двух}.

Решение. В качестве множества всех элементарных исходов можно взять $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$. Все перечисленные события могут быть описаны как его подмножества. Действительно,

$$A = \{3, 6\}, \quad B = \{2, 4, 6\}, \quad C = \{4, 5, 6\},$$

$$D = \varnothing, \quad E = \{1, 2, ..., 6\} = \Omega, \quad F = \{1\}.$$

Согласно классическому определению вероятности имеем:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P(D) = 0, \quad P(E) = 1, \quad P(F) = \frac{1}{6}.$$

При вычислении классической вероятности мы видим необходимость подсчёта числа всех элементарных исходов и числа благоприятствующих появлению того или иного события. В этом плане будут полезными некоторые сведения из *комбинаторики*. Приведём основные из них.

Одним из простейших комбинаторных опытов является выбор элемента из некоторого множества, содержащего $\boldsymbol{k}$ элементов. Этот опыт может быть выполнен $\boldsymbol{k}$ способами (исходами). Для подсчёта числа способов более сложных опытов (например, выбор 2-х элементов, перестановка элементов и т. п.) часто применяется *правило умножения*. Сформулируем его. Пусть комбинаторный опыт $\boldsymbol{K_1}$ можно выполнить $\boldsymbol{m_1}$ способами, а другой опыт $\boldsymbol{K_2}$ можно выполнить $\boldsymbol{m_2}$ способами (независимо от способа выполнения опыта $\boldsymbol{K_1}$), тогда сложный опыт «сначала $\boldsymbol{K_1}$, затем $\boldsymbol{K_2}$» можно выполнить $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2}$ способами.

Пример 2. Из цифр $\boldsymbol{0, 1, 2, 3, 4, 5}$ случайным образом составили двузначное число. Чему равна вероятность события

$\boldsymbol{A}$ = {составленное число делится на $\boldsymbol{5}$}?

Решение. Составить двузначное число означает указать 1-ю слева цифру (опыт K_1, число способов $m_1 = 5$, т. к. можно использовать все указанные цифры, кроме 0), а затем нужно указать 2-ю цифру (опыт K_2, число способов $m_2 = 6$, здесь после выбора 1-й цифры можно использовать все 6 цифр). Применяя правило умножения, приходим к выводу, что из указанных цифр можно составить $5 \cdot 6 = 30$ двузначных чисел. Поэтому, $n(\Omega) = 30$. Отметим, что все исходы (полученные двузначные числа) одинаково возможные.

Найдём число благоприятствующих исходов для события A. Как и ранее, выбор 1-й цифры возможен 5-ю способами, а 2-я цифра должна быть 0 или 5 (по признаку делимости на 5), т. е. два варианта. По правилу умножения $n(A) = 5 \cdot 2 = 10$. Таким образом, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$.

В комбинаторике ключевым понятием является понятие выборки. Рассмотрим множество $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ из n элементов. Случайно выберем m элементов из этого множества. Говорят, что получена *выборка* объёма m.

Пусть каждый элемент множества X может быть выбран не более чем один раз (*выборки без повторения*). Если не важно, в каком порядке расположены выбранные элементы в выборке, то выборка называется *неупорядоченной*, или *сочетанием из n элементов по m*. Число сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m, оно равно

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}.$$

Если порядок важен, то выборка называется *упорядоченной*, или *размещением из n элементов по m*. Число таких размещений обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = C_n^m \cdot m! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

В частном случае, когда в размещении присутствуют все элементы множества $\boldsymbol{X}$, т. е. $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$, размещение называется *перестановкой* $\boldsymbol{n}$ *элементов*, число таких перестановок равно

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!\,.$$

Если в выборке допускается наличие некоторых элементов множества $\boldsymbol{X}$ более одного раза, то, говорят, *выборка с повторениями*.

Число размещений с повторениями из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ обозначается символом $\overline{A}_n^m$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^m = n^m\,.$$

Число сочетаний с повторениями из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ обозначается символом $\overline{C}_n^m$ и равно:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m\,.$$

Пример 3. В ящике содержится $\boldsymbol{4}$ занумерованных шара. Наугад, один за другим извлекают все шары. С какой вероятностью номера извлечённых шаров появятся в возрастающем порядке?

Решение. Элементарными исходами данного опыта являются перестановки четырёх шаров местами. Таким образом, число всех исходов рассматриваемого опыта равно $n(\Omega)=4!=24$. Событие $A=$ {номера извлечённых карточек появятся в возрастающем порядке} осуществится только в одном исходе {$\boldsymbol{1234}$}, т. е. $n(A)=1$. Поэтому,

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{1}{24}.$$

Пример 4. В некоторой организации работают $\boldsymbol{12}$ сотрудников, среди которых трое имеют трудовой стаж более 30-ти лет (ветераны). Случайно выбрали $\boldsymbol{4}$ сотрудника. Определить вероятность того, что среди них один ветеран.

Решение. Элементарными исходами являются сочетания из $\boldsymbol{12}$ сотрудников по $\boldsymbol{4}$ (не важно, в каком порядке расположены сотрудники в выборке). Таким образом,

$$n(\Omega)=C_{12}^{4}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495\ .$$

Рассмотрим интересующее нас событие A ={среди выбранных 4-х сотрудников один ветеран}. Определим число благоприятствующих исходов $n(A)$ для этого события. Число способов выбрать одного ветерана из 3-х равно $C_3^1=3$, а остальные 3 сотрудника в выборке не ветераны (их 9 в этой организации), выбираем их $C_9^3=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}=84$ способами. По правилу умножения $n(A)=C_3^1\cdot C_9^3=252$, значит,

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{252}{495}=\frac{28}{55}\ .$$

Варианты задания по теме 2

2.1 1) Слово АРМИЯ разрезается на буквы, которые затем перемешиваются. Наугад вынимают 3 буквы. Найти вероятности событий: $A=${вынута одна согласная буква}, $B=${вынута буква Я}, $C=${вынута хотя бы одна согласная буква}.

2) Из 36-ти игральных карт случайно отобрали 13 карт. Какая вероятность того, что среди них будет 7 карт одной масти?

2.2 1) Из девяти книг, из которых 4 по математике, наугад взяли 3 книги. Найти вероятности событий: $A=${только одна взятая книга по математике}, $B=${все взятые книги не по математике}, $C=${взято не более двух книг по математике}.

2) Из четырёх лампочек жёлтого и пяти зелёного цвета случайным образом составляется гирлянда. Найти вероятность того, что цвета в гирлянде будут чередоваться.

2.3 1) На восьми карточках написаны цифры от 1 до 8. Наугад вынимают 3 карточки. Найти вероятности событий:

$A=${вынута карточка с цифрой 1}, $B=${только на одной карточке чётная цифра}, $C=${на всех вынутых карточках цифры менее пяти}.

2) В концертном зале в первом ряду имеется ***10*** мест, на которых расположились ***6*** зрителей. Определить вероятность того, что все свободные места следуют одно за другим.

2.4 1) Имеются ***3*** белых и ***5*** красных роз. Наугад выбирают ***3*** розы. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$среди выбранных ровно две белые розы$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$взяты розы одного цвета$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$среди выбранных есть хотя бы одна красная роза$\}$.

2) На шахматную доску случайным образом поставили две ладьи (белую и черную) каждую в клетку своего цвета. Что вероятнее: побьют эти ладьи друг друга (событие $\boldsymbol{A}$), или нет (событие $\overline{\boldsymbol{A}}$)?

2.5 1) На книжной полке находятся ***6*** книг по математике и ***4*** - по химии. Наугад берут три книги. Определить вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$среди выбранных книг две книги по химии$\}$,
$\boldsymbol{B} = \{$среди взятых книг нет книг по химии$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$среди взятых книг есть хотя бы одна по математике$\}$.

2) Какая вероятность получить в 5-ти карточной раздаче (из 36 карт) 2 туза и 2 короля?

2.6 1) С какой вероятностью можно утверждать, что случайно взятое 3-значное число имеет в десятичной записи хотя бы одну цифру ***5***?

2) Опросили ***20*** телезрителей. Выяснилось, что ***15*** из них смотрят новости, ***8*** – спорт, ***5*** – фильмы, ***6*** – новости и спорт, ***3*** – новости и фильмы, ***7*** - спорт и фильмы, ***8*** любят все три вида программ. Определить вероятность того, что из пяти случайно взятых опрошенных телезрителей трое смотрят новости, но не смотрят спорт.

2.7 1) Наугад выбирают троих военнослужащих из группы, состоящей из двух офицеров и пяти солдат. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$среди выбранных только один офицер$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$среди выбранных будет не менее двух солдат$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$среди выбранных хотя бы один офицер$\}$.

2) Два приятеля стоят в очереди из девяти человек. Найти вероятность того, что их разделяют два человека.

2.8 1) Случайным образом из 5-ти элементного множества взяли подмножество. Найти вероятности событий:

$\boldsymbol{A} = \{$выбранное подмножество состоит из 2-х элементов$\}$,

$\boldsymbol{B} = \{$выбранное подмножество содержит не менее 3-х элементов$\}$.

2) Десять человек случайно разделили на две команды по ***5*** человек для игры в баскетбол. Какая вероятность, что два наиболее сильных игрока окажутся в разных командах?

2.9 1) В мастерскую для ремонта поступили ***8*** автомобилей. Известно, что ***2*** из них нуждаются в замене коробки передач. Наудачу берут четыре автомобиля. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$среди выбранных автомобилей только один нуждается в замене коробки передач$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$все выбранные автомобили не нуждаются в замене коробки передач$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$хотя бы один автомобиль нуждается в замене коробки передач$\}$.

2) Найти вероятность того, что наугад взятое шестизначное число начинается на три одинаковые цифры.

2.10 1) В лотерее имеется ***20*** билетов, из которых ***4*** выигрышных. Участник лотереи покупает ***4*** билета. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$среди купленных билетов нет выигрышных$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$половина билетов выигрышных$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$выигрышных билетов больше, чем билетов без выигрыша$\}$.

2) Десять картин, из них три картины одного художника, вывешивают в один ряд на стене в произвольном порядке. С какой вероятностью картины этого художника не окажутся рядом?

2.11 1) Из вариантов экзаменационных билетов с номерами от ***1*** до ***10***, написанных каждый на отдельной карточке, случайным образом выбираются ***3*** варианта для трёх студентов. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$студентам достанутся варианты только с чётными номерами$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$среди выбранных вариантов не будет номеров $\boldsymbol{1}$ и $5\}$, $\boldsymbol{C} = \{$среди выбранных вариантов будет 5-й вариант$\}$.

2) С какой вероятностью взятое наугад 6-значное число имеет в десятичной записи только ноль и единицу?

2.12 1) Есть $\boldsymbol{6}$ новых и $\boldsymbol{4}$ старых мячей. Для игры наугад берут $\boldsymbol{4}$ мяча. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$половина мячей новые$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$старых мячей не менее трёх$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$есть хотя бы один новый мяч$\}$.

2) Случайным образом расставили пять нулей и три единицы в ряд. Чему равна вероятность события $\boldsymbol{A} = \{$никакие две единицы не будут расположены рядом$\}$?

2.13 1) Из первых 6-ти букв русского алфавита случайно выбрали четыре буквы. Определить вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$в выборке только одна гласная буква$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$в выборке больше согласных букв$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$хотя бы одна буква среди выбранных гласная$\}$.

2) Имеются 3 ящика. В один из них можно поместить $\boldsymbol{4}$ шара, в другой – $\boldsymbol{3}$ шара, а в третий помещается только два. Случайным образом девять шаров с номерами от 1 до 9 раскладываются по этим ящикам. Какова вероятность, что шары с номерами 1 и 9 попадут в 3-й ящик?

2.14 1) В коллективе $\boldsymbol{5}$ женщин и $\boldsymbol{4}$ мужчины. Разыгрываются $\boldsymbol{4}$ билета в театр. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$среди обладателей билетов окажется две женщины и двое мужчин$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$женщин с билетами будет больше, чем мужчин$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$среди обладателей билетов окажется хотя бы 1 женщина$\}$.

2) С какой вероятностью взятое наугад натуральное число, меньшее миллиона, имеет в десятичной записи хотя бы две тройки?

2.15 1) Составили все 3-значные числа с помощью цифр ***1, 2, 3, 4***. Затем из них выбрали случайно три числа. Какая вероятность, что хотя бы одно из них окажется кратным трём?

2) В ряду расположены ***10*** предметов. Случайным образом берут ***4*** из них. С какой вероятностью были взяты не рядом расположенные предметы?

2.16 1) Среди ***12*** человек ***4*** родились летом. Наугад выбирают троих. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$среди выбранных только один родился летом$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$хотя бы двое не родились летом$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$все выбранные родились летом$\}$.

2) Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков кратно трём.

2.17 1) Имеется колода из ***36*** игральных карт. Наугад выбирают четыре карты. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$среди выбранных карт есть один туз$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$хотя бы одна карта пиковой масти$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$все карты одной масти$\}$.

2) Кубик бросается трижды. Чему равна вероятность того, что шестёрка выпадет хотя бы один раз?

2.18 1) На автостоянке находятся ***10*** автомобилей, в том числе ***4*** автомобиля российского производства. Наугад выбирают четыре автомобиля. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$среди выбранных половина автомобилей российского производства$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$хотя бы один автомобиль российского производства$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$среди выбранных не более одного автомобиля российского производства$\}$.

2) Задумано трёхзначное число. Какова вероятность угадать это число, если известно, что оно кратно ***7*** и ***3***?

2.19 1) Среди ***11*** фотографий ***3*** разыскиваемые. Наугад выбирают три фотографии. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$среди выбранных нет разыскиваемых фотографий$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$есть только одна разыскиваемая фотография}, $\boldsymbol{C}=${среди выбранных не менее одной из разыскиваемых фотографий}.

2) Какая вероятность получить при 5-карточной раздаче три десятки? Считать, что в колоде 36 карт.

2.20 1) В волейбольной команде ***10*** спортсменов, из них четверо – нападающие. Наугад выбирают пятерых. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A}=${среди выбранных двое нападающих}, $\boldsymbol{B}=${в выборке хотя бы один нападающий}, $\boldsymbol{C}=${среди выбранных не более одного нападающего}.

2) Взято наугад 3-значное число. Что более вероятно, событие $\boldsymbol{A}=${число в десятичной записи имеет хотя бы одну единицу} или событие $\overline{\boldsymbol{A}}$?

2.21 1) В корзине ***5*** груш и ***6*** яблок. Наугад выбирают ***4*** фрукта. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A}=${среди выбранных фруктов два яблока}, $\boldsymbol{B}=${хотя бы одна груша}, $\boldsymbol{C}=${яблок взято больше, чем груш}.

2) Два шарика разбрасывают случайно и независимо друг от друга по трём ячейкам. Найти вероятность того, что ровно одна ячейка окажется пустой.

2.22 1) Наугад выбрали три разных месяца. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A}=${названия всех взятых месяцев заканчиваются мягким знаком}, $\boldsymbol{B}=${все месяцы одного времени года}, $\boldsymbol{C}=$ {среди выбранных есть хотя бы один зимний месяц}.

2) Из полного набора костей домино случайно извлекают 3 кости. Какова вероятность того, что в выборке окажется один дубль?

2.23 1) Транспортное предприятие имеет ***11*** автомобилей, в том числе ***6*** грузовых. Наугад выбирают ***4*** автомобиля. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A}=${все выбранные автомобили грузовые}, $\boldsymbol{B}=${не менее двух грузовых автомобилей}, $\boldsymbol{C}=${среди выбранных автомобилей хотя бы один грузовой}.

2) Взяли случайное 4-значное число. Что более вероятно: сумма цифр в десятичной записи этого числа будет чётная или нечётная?

2.24 1) В спортивной команде ***9*** человек, среди которых ***4*** имеют звание мастера спорта. Наугад из этой команды выбирают троих спортсменов. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$среди выбранных два мастера спорта$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$среди выбранных есть хотя бы один мастер спорта$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$среди выбранных спортсменов мастеров спорта меньше, чем не мастеров$\}$.

2) Случайным образом поставили на шахматную доску белого и чёрного королей. Чему равна вероятность того, что получилась допустимая правилами игры позиция?

2.25 1) В коллективе работают ***8*** человек, из них ***3*** человека имеют возраст не менее 50 лет. Наугад выбирают ***4*** работника этого коллектива. Найти вероятности событий: $\boldsymbol{A} = \{$все выбранные моложе 50-ти лет$\}$, $\boldsymbol{B} = \{$среди выбранных хотя бы двое моложе 50 лет$\}$, $\boldsymbol{C} = \{$не менее трёх человек среди выбранных моложе 50 лет$\}$.

2) Из последовательности чисел ***1***, ..., ***100*** наугад выбираются три числа. Какова вероятность, что два из них меньше ***50***, а одно - больше ***50***?

Тема 3. Геометрические вероятности

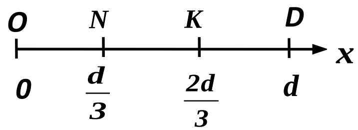
Возможны ситуации, когда элементарных исходов в опыте бесконечно много (вообще говоря, несчётно), поэтому невозможно использовать классическое определение вероятности. Пример такого опыта: случайный выбор точки в некоторой области Ω (Ω представляет собой либо отрезок, либо часть плоскости, либо тело в пространстве). Предполагается, что область Ω имеет *меру*. У отрезка – это длина, у части плоскости – её площадь, у тела – объём. Пусть в области выделено подмножество $\Omega_{\boldsymbol{A}} \subseteq \Omega$. Вероятность события $\boldsymbol{A} = \{$случайно выбранная в Ω точка попала в подмножество $\Omega_{\boldsymbol{A}}\}$ определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\text{мера } (\Omega_{\boldsymbol{A}})}{\text{мера } (\Omega)}.$$

Так определённую вероятность называют *геометрической вероятностью* события $\boldsymbol{A}$.

Пример 1. На отрезок $\boldsymbol{OD}$ длины $\boldsymbol{d}$ случайным образом нанесена точка $\boldsymbol{M}$. Найти вероятность события $\boldsymbol{A} = \{$точка $\boldsymbol{M}$ будет удалена от концов отрезка больше, чем на величину $\dfrac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{3}}\}$.

Решение. Расположим отрезок $\boldsymbol{OD}$ на числовой оси $\boldsymbol{Ox}$ так, как указано на рисунке:



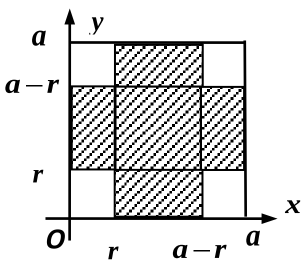
Множеству всех исходов соответствует отрезок $\boldsymbol{OD}$, т. е. $\Omega = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{d}\}$. Разобьём отрезок $\boldsymbol{OD}$ на 3 равных отрезка. Очевидно, событие $\boldsymbol{A}$ произойдёт, если точка $\boldsymbol{M}$ попадёт на отрезок $\boldsymbol{NK} = \left[\dfrac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{3}}, \dfrac{\boldsymbol{2d}}{\boldsymbol{3}}\right]$, т. е. $\boldsymbol{B} = \left\{\boldsymbol{x} : \dfrac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{3}} \le \boldsymbol{x} \le \dfrac{\boldsymbol{2d}}{\boldsymbol{3}}\right\} \subseteq \Omega$. Искомая геометрическая вероятность $P(A)=\frac{|NK|}{|OB|}=\frac{d/3}{d}=\frac{1}{3}$.

Пример 2. На плоскость с нанесённой квадратной сеткой (сторона квадрата равна a) наугад бросается монета радиуса $r<\frac{a}{2}$. Какова вероятность того, что монета пересечёт не более одной стороны квадрата?

Решение. Достаточно рассмотреть только тот квадрат, в который попал центр упавшей монеты. Выберем декартову систему координат, поместив начало координат в одну из вершин рассматриваемого квадрата, а оси направим по его двум смежным сторонам. Элементарный исход опыта – координаты (x, y) центра упавшей монеты. Множество всех элементарных исходов можем записать в виде $\Omega=\{(x, y): 0\le x\le a,\ 0\le y\le a\}$. Множество Ω_A, соответствующее событию $A=$ {монета пересечёт не более одной стороны квадрата}, имеет вид

$$\Omega_A=\{(x, y): r\le x\le a-r \text{ или } r\le y\le a-r\}.$$

Множества Ω (квадрат) и Ω_A (заштрихованная область) изображены на рисунке:



Так как площадь $S(\Omega_A)=a^2-4r^2$, а площадь $S(\Omega)=a^2$, то по определению геометрической вероятности находим

$$P(A)=\frac{S(\Omega_A)}{S(\Omega)}=\frac{a^2-4r^2}{a^2}=1-4\left(\frac{r}{a}\right)^2.$$

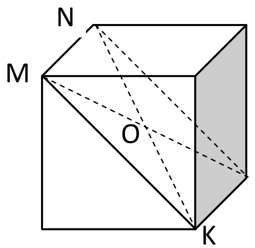
Пример 3. Случайно выбирается точка из шара радиуса $\boldsymbol{R}$. Какова вероятность события $\boldsymbol{A} = \{$точка выбрана из вписанного в шар куба$\}$?

Решение. Согласно определению геометрической вероятности, искомая вероятность равна

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{V}_{\text{k}}}{\boldsymbol{V}_{\text{ш}}},$$

где $\boldsymbol{V}_{\text{k}}$ – объём куба, а $\boldsymbol{V}_{\text{ш}}$ – объём шара.

Сделаем сечение шара плоскостью, проходящей через центр O и ребро MN вписанного куба (см. рисунок ниже).



Обозначим ребро куба через $\boldsymbol{x}$, тогда $\boldsymbol{MN} = \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{MK} = \sqrt{2}\boldsymbol{x}$. Так как $\boldsymbol{NK} = 2\boldsymbol{R}$, а $\Delta\boldsymbol{MNK}$ - прямоугольный, то по теореме Пифагора $\boldsymbol{x}^2 + \left(\sqrt{2}\boldsymbol{x}\right)^2 = \left(2\boldsymbol{R}\right)^2$. Отсюда $\boldsymbol{x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{R}$. Значит,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{V}_{\text{k}}}{\boldsymbol{V}_{\text{ш}}} = \frac{\boldsymbol{x}^3}{{}^4\!/_3\,\pi\boldsymbol{R}^3} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}.$$

Варианты задания по теме 3

3.1 1) На отрезок $[0,\ 5]$ случайно бросаются две точки. Какова вероятность того, что они будут удалены друг от друга больше, чем на 3.

2) На промежутке $[0,\ 1]$ случайно выбрали действительное число $\boldsymbol{x}$. Обозначим $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{max}\{\boldsymbol{x}, 1 - \boldsymbol{x}\}$. Определить вероятность $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S} > \boldsymbol{x})$.

3.2 1) На отрезок [$\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{8}$] случайно бросаются две точки. Определить вероятность того, что между ними расстояние будет меньше $\boldsymbol{1}$.

2) Из квадрата со стороной $\boldsymbol{1}$ случайно взяли точку. Какая вероятность того, что расстояние от этой точки хотя бы до одной из диагоналей квадрата будет меньше $\frac{\sqrt{2}}{8}$?

3.3 1) Наугад выбирают два числа из отрезка [-$\boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{5}$]. Какова вероятность события $\boldsymbol{A} = \{$одно число будет положительным, а другое отрицательным$\}$.

2) Взята случайным образом точка из кругового сектора радиуса $\boldsymbol{R}$ и с углом $\boldsymbol{60}$ градусов. Какая вероятность того, что точка окажется от вершины угла на расстоянии, большем $\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{R}$.

3.4 1) Наугад выбирают два числа из отрезка **[-*3*, *1*]**. Найти вероятность события $\boldsymbol{A} = \{$хотя бы одно число будет положительным$\}$.

2) Из ромба со стороной $\boldsymbol{2}$ и одним из углов в $\boldsymbol{45}$ градусов наугад взяли точку. Определить вероятность того, что эта точка будет удалена до любой из вершин ромба с острыми углами меньше, чем на $\boldsymbol{1}$.

3.5 1) На отрезке **[*0*, *5*]** случайно выбирают два числа. Найти вероятность того, что модуль разности их окажется больше одного из них.

2) Из правильного треугольника со стороной $\boldsymbol{6}$ случайно взяли точку. Определить вероятность того, что взятая точка будет отстоять от точки пересечения медиан меньше, чем на $\boldsymbol{1}$.

3.6 1) Пусть взяты наугад действительные числа $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, удовлетворяющие условиям: $\boldsymbol{0 \le x \le 2}$, $\boldsymbol{0 \le y \le x}$. С какой вероятностью их сумма не превосходит единицу?

2) В равнобедренном треугольнике с основанием $\boldsymbol{2}$ и противоположным углом $\boldsymbol{30}$ градусов наугад взята точка. Найти вероятность того, что эта точка будет удалена от каждой из вершин при основании треугольника больше, чем на $\boldsymbol{1}$.

3.7 1) Наугад взяли два положительных действительных числа x и y, каждое из которых не больше 4. Какая вероятность того, что эти числа будут удовлетворять неравенству $x + y \le 5$?

2) Внутри равностороннего треугольника со сторонами длиной a взята произвольная точка. Какая вероятность того, что эта точка удалена от каждой из вершин больше, чем на $0,5a$?

3.8 1) Из промежутка $[0, 10]$ случайным образом взяли два действительных числа x и y. Какая вероятность того, что будет верно неравенство $2x + y \le 4$?

2) Наугад взяли действительное число x_0 на промежутке $[0, 2\pi]$. Найти вероятность того, что величина $\sin x_0$ в этой точке больше $0,5$.

3.9 1) Два действительных числа x и y удовлетворяют системе неравенств: $-2 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 4$. С какой вероятностью можно утверждать, что $y > |x|$?

2) На отрезке $[0, \pi]$ наугад взяли точку x. Какова вероятность события $A = \{\sin x < \cos x\}$?

3.10 1) О двух действительных чисел x и y известно только, что $|x| \le 1, \quad 1 \le y \le 5 - x$. Чему равна вероятность того, что дробь $\dfrac{x}{y}$ будет отрицательной?

2) В круге радиуса R случайным образом рисуется горизонтальная хорда. Найти вероятность того, что длина этой хорды будет больше R.

3.11 1) На отрезке $[1, 7]$ наугад взяли точку. Чему равна вероятность того, что эта точка удалена от каждого из концов и от середины данного отрезка больше, чем на единицу?

2) Пусть α и β - действительные числа, случайно взятые из отрезков $[1, 2]$ и $[0, 2]$ соответственно. С какой вероятностью можно утверждать, что корни уравнения $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ будут комплексными?

3.12 1) Положительные действительные числа x и y выбираются случайно так, чтобы выполнялось неравенство $0 \le x + y \le 1$. Чему равна вероятность того, что хотя бы одно из этих чисел будет больше $0,9$?

2) Вычисляется определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & b \end{vmatrix}$, где a и b – произвольные действительные числа из отрезка $[0, 2]$. Найдите вероятность того, что этот определитель будет отрицательным.

3.13 1) Два действительных числа x и y выбираются наугад так, что $0 \le x \le 2, \quad |y| \le 2$. Чему равна вероятность события $A =$ {точка $M(x, y)$ удалена от точки $M_1(2,0)$ больше, чем на 1 }?

2) Предположим, что в любой момент времени в течение часа одинаково возможны два телефонных звонка. Какая вероятность того, что между 1-м и 2-м звонком будет меньше 10-ти минут?

3.14 1) Два действительных числа x и y выбираются наугад так, что $x^2 + y^2 \le 4, \quad y \ge 0$. Чему равна вероятность того, что их сумма отрицательна?

2) На терминал (пункт выгрузки грузов) могут прибыть в любой момент времени суток два железнодорожных состава с углём. Определить вероятность того, что одному из составов придётся ждать разгрузки, если один состав разгружается за 4 часа, а другой – за 2 часа.

3.15 1) На числовой оси случайно выбирается из промежутка $[0, 4]$ точка с координатой x. После этого из промежутка $[0, x]$ случайно берётся точка с координатой y. Какая вероятность того, что между выбранными точками расстояние меньше, чем 1?

2) Пусть произвольно выбраны три действительных числа x, y, z. Известно, что они положительны и меньше, чем 5. Определить вероятность того, что сумма этих чисел превысит 5.

3.16 1) Два действительных числа x и y удовлетворяют неравенству $x^2 \le 4y \le 4x$. Определить вероятность того, что число y при этом будет меньше 1.

2) Имеется треугольник с вершинами $O(0,0)$, $B(3,3)$, $C(6,0)$ и из него наугад взяли точку $M(x,y)$. Чему равна вероятность случайного события $A = \{$между точками M и B расстояние больше, чем 2 $\}$?

3.17 1) О двух действительных числах x и y известно, что они случайно выбраны из отрезка $[0, 3]$ и их сумма больше 3. Какая вероятность того, что их произведение меньше 2?

2) В равнобочной трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна 4, вернее основание $BC = 2$, а $\angle ABC = 120^\circ$. На нижнем основании наугад ставится точка M. Какова вероятность того, что $\angle AMB \in \left[60^\circ, 90^\circ\right]$.

3.18 1) Какая вероятность того, что произведение двух действительных чисел больше 2, если есть информация, что они положительны и меньше, чем 2?

2) Правильный треугольник вписан в круг радиуса R. Найти вероятность того, что случайно выбранная точка из круга не будет находиться внутри треугольника.

3.19 1) Два действительных числа x и y выбираются наугад на отрезке $[0, 1]$. Найти вероятность того, что $min(x, y) \le 0{,}2$.

2) На плоскость с нанесённой квадратной сеткой (сторона квадрата равна a) наугад бросается монета диаметром d ($d < a$). Какова вероятность того, что монета попадёт полностью внутрь одного квадрата?

3.20 1) Два действительных числа x и y выбираются наугад на отрезке $[0, 1]$. Найти вероятность того, что $max(x, y) \ge 0{,}3$.

2) В прямоугольнике (стороны 1 и 2) наугад выбраны две точки. Чему равна вероятность того, что только одна из этих точек ближе до ближайшей стороны прямоугольника, чем $0{,}1$?

3.21 1) Из промежутка [$\boldsymbol{0, 2}$] взято случайным образом число $\boldsymbol{x}$. Чему равна вероятность того, что меньшее из чисел $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{3-x}$ будет больше $\boldsymbol{1}$?

2) Из квадрата со стороной $\boldsymbol{2}$ случайно взяли две точки. Какая вероятность того, что расстояние хотя бы от одной из этих точек до любой стороны квадрата будет меньше $\boldsymbol{1{,}5}$?

3.22 1) Два действительных числа $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ выбираются наугад так, что $\boldsymbol{x^2+y^2\le 1}$. Найти вероятность того, что $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\le \boldsymbol{1}$.

2) В промежутке времени [$\boldsymbol{0, T}$] случайно приходят два сигнала длительностью $\boldsymbol{\tau_1=0{,}1\cdot T}$ и $\boldsymbol{\tau_2=0{,}4\cdot T}$. Найти вероятность того, что они не перекрываются.

3.23 1) Два действительных числа $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ выбираются наугад так, что $\boldsymbol{x^2\le y\le 1}$. Найти вероятность того, что $\boldsymbol{y}\le\boldsymbol{x}$.

2) Зафиксируем на окружности радиуса $\boldsymbol{R}$ точку $\boldsymbol{A}$. После этого отметим на окружности случайным образом точку $\boldsymbol{M}$ и проведём хорду $\boldsymbol{AM}$. Вычислить вероятность того, что длина хорды окажется больше радиуса.

3.24 1) Случайной точкой $\boldsymbol{M}$ разделим промежуток [$\boldsymbol{0, 4}$] на две части. Чему равна вероятность того, что меньшая часть окажется больше $\boldsymbol{1}$?

2) Правильный шестиугольник вписан в круг радиуса $\boldsymbol{R}$. Из круга случайным образом взята точка. Найти вероятность того, что эта точка принадлежала шестиугольнику.

3.25 1) На отрезке [$\boldsymbol{0, 5}$] случайно выбираются два действительных числа $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. С какой вероятностью будет справедливо неравенство $\boldsymbol{3\le x+y\le 5}$?

2) Вычислим определитель $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{2b}\\ \boldsymbol{2b} & \boldsymbol{a}\end{vmatrix}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ - любые числа на отрезке [$\boldsymbol{0, 1}$]. Чему равна вероятность того, что он окажется неотрицательным?

Тема 4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Рассмотрим случайные события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в некотором опыте и пусть $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{0}$. *Условной вероятностью* $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ события $\boldsymbol{A}$ при условии, что событие $\boldsymbol{B}$ произошло (кратко: вероятностью события $\boldsymbol{A}$ при условии $\boldsymbol{B}$), называется величина

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})}.$$

Отличие между *безусловной* $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ и *условной* $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ вероятностями события $\boldsymbol{A}$ состоит в том, что первое число определяет вероятность события $\boldsymbol{A}$ в опыте с множеством элементарных исходов Ω, а второе число – в опыте с множеством исходов $\Omega_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{B} \cdot \Omega = \boldsymbol{B}$ (т. е. рассматриваются только исходы, благоприятствующие для $\boldsymbol{B}$). Напомним, что события $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ мы рассматриваем как подмножества в Ω.

Из определения условной вероятности следует равенство $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$. Поменяв местами эти события, можно записать *формулу умножения вероятностей*

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}).$$

Формулу умножения вероятностей можно обобщить на большее число событий, например, для трёх событий $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}).$$

Пример 1. Из полного набора шахматных фигур одного цвета наугад одну за другой взяли $\boldsymbol{3}$ фигуры. Определить вероятность события $\boldsymbol{A}$ = {все взятые фигуры - пешки}.

Решение. Рассмотрим события $\boldsymbol{A_i}$ = {взятая фигура при $\boldsymbol{i}$-м извлечении – пешка, $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}$}. Так как $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_1} \cdot \boldsymbol{A_2} \cdot \boldsymbol{A_3}$, то $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A_1} \cdot \boldsymbol{A_2} \cdot \boldsymbol{A_3}) =$

$$= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A_1})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A_2}|\boldsymbol{A_1})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A_3}|\boldsymbol{A_1} \cdot \boldsymbol{A_2}) = \frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{16}} \cdot \frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{15}} \cdot \frac{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{14}} = \boldsymbol{0{,}1}.$$

Отметим, что пример можно решить, используя комбинаторику:

$$P(A)=\frac{C_8^3}{C_{16}^3}=\frac{\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}}{\dfrac{16\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3}}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{16\cdot 15\cdot 14}=0{,}1\,.$$

События A и B называются *независимыми*, если

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

В этом случае условные и безусловные вероятности совпадают:

$$P(A\,|\,B)=P(A),\ P(B\,|\,A)=P(B).$$

Независимость рассматриваемых событий часто следует из условий опыта.

Пример 2. Из множества чисел 3, 4, 5 наугад извлекают два числа (выбор осуществляется с возвращением). Убедиться, что события A = {1-й раз выбрано простое число} и B = {2-й раз выбрано чётное число} независимы.

Решение. Применим правило умножения при вычислении количества исходов: $n(\Omega)=3\cdot 3=9$ (по 3 варианта при каждом из 2-х извлечениях), $n(A)=2\cdot 3=6$ (1-м числом могут быть простые числа 3 или 5, а 2-м – любые числа данного множества, их три), $n(B)=3\cdot 1=3$ (1-е число – любое, три варианта, 2-е число – только чётное число 4), $n(A\cdot B)=2\cdot 1=2$ (1-е число – два варианта, 2-е число – один вариант). По классической схеме:

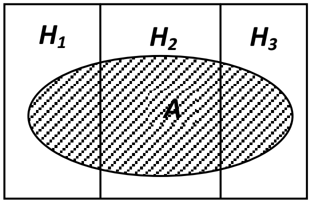
$$P(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},\ P(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\ P(A\cdot B)=\frac{2}{9}\ .$$

Получается, что $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$, следовательно, события A и B независимы.

В некоторых ситуациях нужно найти вероятность события в условиях «неполной определённости». Поясним на примере.

Пример 3. В классе 3 отличника, 10 «хорошистов», а всего 20 учеников. Вероятность решить трудную задачу для отличника равна ***0,8***, для хорошиста – ***0,6***, для остальных учеников – ***0,2***. Какова вероятность события A = {задачу решит ученик, выбранный случайным образом}?

Решение. Кто будет решать задачу, кого «выберет случай» – неизвестно. В такой ситуации нужно сделать предположения, или гипотезы. В рассматриваемом примере возьмём такие гипотезы: H_1 = {выбран отличник}, H_2 = {выбран хорошист}, H_3 = {выбран более слабый ученик}. События H_1, H_2, H_3 – полная группа событий, т. е. они несовместны и $\sum_i P(H_i) = 1$.



На рисунке видно, что $A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + A \cdot H_3$ – сумма несовместных событий. Значит,

$$P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + P(A \cdot H_3).$$

Применив понятие условной вероятности, получим:

$$P(A) = P(H_1)P(A\,|\,H_1) + P(H_2)(A\,|\,H_2) + P(H_3)P(A\,|\,H_3).$$

Это и есть *формула полной вероятности* (для 3-х гипотез).

В общем случае, когда гипотез n штук, формула имеет вид:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A\,|\,H_i).$$

Продолжим решение примера. Чтобы воспользоваться полученной формулой полной вероятности, вычислим вначале

$$P(H_1) = \frac{3}{20} = 0,15, \quad P(H_2) = \frac{10}{20} = 0,5, \quad P(H_3) = \frac{7}{20} = 0,35.$$

Условные вероятности даны в условиях примера:

$$P(A\,|\,H_1) = 0,8, \quad P(A\,|\,H_2) = 0,6, \quad P(A\,|\,H_3) = 0,2.$$

Итак, $P(A) = 0,15 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,6 + 0,35 \cdot 0,2 = 0,49$.

Если после проведения опыта стало известно, что событие $\boldsymbol{A}$ произошло, тогда условные вероятности $\boldsymbol{P(H_i \mid A)}$ гипотез можно определить по *формуле Байеса*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A \mid H_k)} .$$

С помощью этой формулы можно «переоценить» вероятности гипотез после поступления информации о появлении или не появлении тех или иных событий в опыте.

Пример 4. Пусть в условиях предыдущего примера 3 случайно выбранный ученик решил задачу, т. е. событие $\boldsymbol{A}$ произошло. А какова вероятность, что решал эту задачу отличник, хорошист, более слабый ученик?

Решение. Нас интересуют вероятности событий $\boldsymbol{H_i \mid A}$. Требуемые вероятности определим по формуле Байеса.

Вероятность того, что задачу решал (и решил!) отличник, равна

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0,15 \cdot 0,8}{0,49} \approx 0,25 .$$

Подобным образом определяются аналогичные вероятности для хорошистов и более слабых учеников:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,6}{0,49} \approx 0,61 ;$$

$$P(H_3 \mid A) = \frac{P(H_3)P(A \mid H_3)}{P(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,2}{0,49} \approx 0,14 .$$

Варианты задания по теме 4

4.1 1) В баскетбольной команде ***5*** человек, из них трое являются мастерами спорта, а остальные – перворазрядники. Вероятность того, что мастер спорта удачно выполнит штрафной бросок, равна ***0,9***; перворазрядник это делает с вероятностью ***0,7***.

С какой вероятностью можно утверждать, что взятый случайно спортсмен этой команды неудачно выполнит штрафной бросок?

2) Преподаватель наугад выбирает одну из десяти задач, среди которых ***3*** задачи по алгебре, ***2*** – по геометрии, ***5*** – по математическому анализу, и предлагает её решить студенту. Студент умеет решать из этих задач только две алгебраические, одну геометрическую и ***3*** задачи по математическому анализу. Обнаружено, что студент решил предложенную задачу. Найти вероятность того, что он решал задачу по геометрии.

4.2 1) Идёт отбор в сборную команду университета. В факультетском отборе приняли участие ***3*** студента 1-го курса, ***4*** студента 2-го курса, ***2*** – с 3-го, ***1*** студент – с 4-го. Пусть студент 1-го, 2-го, 3-го, 4-го курса может попасть в команду университета соответственно с вероятностью, равной ***0,2***; ***0,3***; ***0,4, 0,6***. Определить вероятность непопадания в сборную команду наугад взятого студента в этом отборе.

2) На двух полках находятся книги. На нижней полке – ***4*** книги по математике и ***2*** книги по истории, а на верхней расположены ***5*** книг по математике и ***3*** по физике. С верхней полки случайным образом переставляют одну книгу на нижнюю полку. После этого с нижней полки наугад выбирается одна книга. Эта книга оказалась по истории. Какова вероятность того, что была переставлена книга по математике?

4.3 1) На предприятии работают три линии по изготовлению однотипных изделий. За одну смену на 1-й и 2-й линиях изготавливается по ***15*** изделий, а на 3-й – ***25*** изделий. Вероятности того, что изготовленное изделие на 1-й, 2-й, 3-й линии будет бракованным, соответственно равны ***0,1***; ***0,15***; ***0,2***. По окончании смены случайным образом выбрали одно изготовленное изделие. Определить вероятность того, что это изделие будет не бракованным.

2) В коробку, где лежали четыре монеты, положили 10-ти рублёвую монету. После этого, из этой коробки наудачу извлекли одну монету, которая оказалась не 10-ти рублёвой монетой. Пусть любые изначальные количества 10-ти рублёвых монет в

коробке одинаково возможны. Какая вероятность того, что первоначально в коробке было три таких монеты?

4.4 1) У преподавателя есть списки трёх студенческих групп. Известно, что среди 18-ти студентов 1-й группы трое старше 20-ти лет, во 2-й группе таких четверо из 15-ти, а в 3-й группе только один из 16-ти. Преподаватель случайно выбрал группу и наугад выбрал студента этой группы. Найти вероятность того, что выбранный студент будет не старше 20-ти лет.

2) Некая система тестирования устроена следующим образом: с вероятностью ***0,8*** правильный ответ признаётся правильным и с вероятностью ***0,1*** неправильный ответ признается правильным. Тестируемому предложили ответить на один случайно взятый вопрос из десяти, из которых только на три он не знает правильные ответы. В результате тестирования ответ на предложенный вопрос признан неправильным. Какова вероятность того, что на самом деле тестируемый дал правильный ответ?

4.5 1) Торговая фирма имеет три филиала, для которых приводится следующая информация в таблице:

Номер филиала	1	2	3
Число работников	12	20	30
Из них с высшим образованием	3	5	8

Случайным образом выбрали филиал и наугад взяли работника этого филиала. Определить вероятность того, что этот работник не имеет высшего образования.

2) В автомастерской работают четыре мастера и два стажёра. Мастер может допустить брак при ремонте автомобиля с вероятностью ***0,05***, а стажёр – с вероятностью ***0,1***. За смену мастер ремонтирует два автомобиля, а стажёр – один. Из 10-ти автомобилей, отремонтированных в мастерской за смену, наугад взятый автомобиль оказался бракованным. Какова вероятность, что этот автомобиль ремонтировал стажёр?

4.6 1) В некотором городе имеются ***10*** автозаправочных станций (АЗС). Имеется информация, что у половины АЗС в любой момент времени есть в продаже бензин марки А-95. На 3-х АЗС такой бензин отсутствует с вероятностью ***0,1***, а у остальных АЗС – с вероятностью ***0,2***. С какой вероятностью можно утверждать, что у случайно взятой АЗС этого города есть в продаже данный бензин?

2) У Пети лежат в кармане пять монет: одна монета в 1 рубль, две монеты по 2 рубля и две по 5 рублей, а у Васи в кармане – четыре: две монеты по 1 рублю, одна в 2 рубля и одна в 5 рублей. Петя переложил Васе в карман одну свою случайно взятую монету. Затем Вася вынул наугад одну монету, которая оказалась в 1 рубль. Определить вероятность, что Петя передал Васе монету в 2 рубля.

4.7 1) Некий прибор куплен в одной из трёх стран C_1, C_2, C_3. Вероятность совершения покупки в стране C_1, C_2, C_3 оценивается как ***0,2***, ***0,3***, ***0,5*** соответственно. Вероятность того, что приобретаемый прибор у этих стран безотказно отработает определённый срок соответственно равна ***0,9***; ***0,8***; ***0,7***. Определить вероятность надёжной работы купленного прибора.

2) Приводится информация о некоторой спортивной команде:

Спортивный разряд	Мастер спорта	Кандидат в мастера спорта	1-й разряд
Число спортсменов	3	5	2
Вероятность выполнить спортивный норматив	0,8	0,6	0,3

Наугад взятый спортсмен выполнил спортивный норматив. Какова вероятность, что это сделал перворазрядник?

4.8 1) В аптеке имеются в продаже медицинские аппараты некоторого типа, изготовленные на трёх фармацевтических предприятиях: по ***40*** % аппаратов изготовлено на 1-м и 2-м предприятиях, остальные – на 3-м. Брак в продукции 1-го предприятия составляет ***3*** %, 2-го – ***2*** %, 3-го – ***4*** %. Найти вероятность того, что случайно выбранный аппарат окажется без брака.

2) Занумеровали восемь карточек номерами от ***1*** до ***6*** и случайным образом поровну распределили в две коробки. Затем наудачу извлекли из 1-й коробки две карточки, из 2-й – одну, и по-

ложили их в пустую 3-ю коробку. После этого из 3-й коробки наудачу взяли одну карточку. На ней оказался чётный номер. Какая вероятность того, что из 1-й коробки была взята карточка с нечётным номером.

4.9 1) Пусть вероятность получить отличную оценку по математике при тестировании у 20-ти студентов некоторой группы следующая: у пяти студентов – ***0,9***; у восьми – ***0,6***; у трёх – ***0,3***; у остальных – ***0,1***. Найти вероятность того, что случайно взятый студент этой группы получит отличную оценку при тестировании.

2) В жилом доме эксплуатируются ***10*** пассажирских лифтов двух моделей: ***8*** лифтов модели M_1 и ***2*** лифта модели M_2. Известно, что вероятность поломки лифта модели M_1 в течение года составляет ***0,2***, а для лифта модели M_2 такая вероятность равна ***0,4***. Случайным образом взяли два лифта в этом доме. Оказалось, что они отработали без поломок в течение года. Определить вероятность того, что это лифты модели M_1.

4.10 1) Из 1-й колоды игральных карт (36 карт) случайным образом перекладывают одну карту в аналогичную 2-ю колоду. После этого тщательно перемешивают карты во 2-й колоде и наугад выбирают тоже одну карту. Какова вероятность, что эта карта будет бубновой масти?

2) Известно, что ***40 %*** автобусов пассажирского предприятия имеют срок эксплуатации более пяти лет. Такие автобусы в течение смены остаются исправными с вероятностью ***0,7***, а для остальных автобусов аналогичная вероятность равна ***0,9***. Наугад выбранный автобус этого предприятия в течение смены оказался исправным. Найти вероятность того, что у этого автобуса срок эксплуатации не более пяти лет.

4.11 1) К трём книгам на полке добавили книгу по физике и книгу по математике. После этого наугад с полки взяли две книги. Найти вероятность того, что среди взятых книг только одна будет по математике. Считать, что одинаково возможны все предположения о первоначальном количестве книг по математике на полке.

2) На столе находятся пять карточек с номерами ***1**, **2**, **3**, **4**, **5***. Проведём такой опыт: наугад возьмём две карточки и увеличим на единицу их номера, после чего возвратим эти карточки снова на стол. Затем снова наугад выберем две карточки. Они обе оказались с чётными номерами. Какова вероятность, что 1-й раз были взяты карточки с нечётными номерами?

4.12 1) В цехе на трёх станках штампуют пробки для бутылок. В течение одного часа на 1-м станке производят ***1200*** пробок, на 2-м – ***1800***, а на 3-м – ***900***. Наблюдения показали, что на 1-м станке изготавливается ***2*** % бракованных пробок, на ***2***-м и ***3***-м станках брак соответственно равен ***3*** % и ***1*** %. Из изготовленных пробок в течение часа этим цехом наугад взяли одну пробку. Найти вероятность того, что она будет бракованной.

2) В 1-м списке четыре фамилии: Иванов, Петров, Сидоров и Семёнов, а во 2-м – три: Соловьёв, Попов и Быков. Случайным образом переносят из 2-го списка в 1-й список две фамилии. После чего наугад выбирают снова две фамилии из 1-го списка. Обе фамилии оказалось начинаются на букву «С». С какой вероятностью можно утверждать, что была перенесена фамилия «Попов».

4.13 1) В вагоне электрички находятся три человека. На ближайшей станции каждый из них может выйти с вероятностью ***0,4***. Пусть на этой станции с вероятностью ***0,6*** добавится в вагоне новый человек, а с вероятностью ***0,4*** не добавится. Найти вероятность того, что после отправления электрички в этом вагоне будет, по-прежнему, три человека.

2) На экспертизу поступили образцы некоторой продукции. Пусть с вероятностью ***0,8*** среди них есть бракованные, а с вероятностью ***0,2*** – таковых нет. В 1-м случае экспертиза определяет наличие бракованных образцов с вероятностью ***0,9***, а во 2-м случае - с вероятностью ***0,05***. Экспертиза обнаружила наличие брака. Найти вероятность того, что поступившие образцы не имели брак.

4.14 1) Три мастера собирают из комплектующих элементов электросчётчики. Известно, что производительность труда 1-го мастера в 2 раза больше, чем у 2-го, и в 2 раза меньше, чем у 3-го.

При этом, 1-й мастер допускает в своей работе 3 % брака, а 2-й и 3-й – по 5 %. В конце рабочего дня наугад выбрали один из собранных электросчётчиков. Найти вероятность того, что он окажется годным.

2) Имеются ***30*** задач, из которых компьютерная программа случайным образом формирует тест (3 задачи) для студента. Этот студент умеет правильно решать только ***20*** из ***30***-ти рассматриваемых задач. Для успешного прохождения теста нужно правильно решить более одной задачи. Тест студент не прошёл. Найти вероятность того, что он при этом правильно решил только одну задачу.

4.15 1) В городе N. имеются три университета: классический, технический и медицинский. В классическом университете выпуск специалистов в прошлом году составил ***400*** человек, в техническом – ***600***, а в медицинском – ***250***. Известно, что только ***300*** выпускников классического университета работают по специальности, число выпускников технического и медицинского университетов, которые работают по специальности, соответственно равны ***500*** и ***200.*** Найти вероятность того, что случайно выбранный выпускник прошлого года, получивший университетское образование, не работает по специальности.

2) Для проведения текущего контроля знаний по изученной теме были выданы ***20*** задач в качестве самостоятельной домашней работы группе из ***15***-ти студентов. Шесть студентов смогли решить ***18*** задач, четверо решили ***15*** задач, трое осилили ***10*** задач, а остальные справились только с тремя задачами. Домашняя работа считается успешно выполненной, если правильно решено более половины предложенных задач. Преподаватель случайным образом выбирает одну домашнюю работу. Она оказалась успешно выполненной. Какова вероятность, что в ней решено ***15*** задач?

4.16 1) Предприятие по изготовлению бытовых приборов использует комплектующие детали от трёх поставщиков. Поставщик N_1 предоставляет предприятию ***40*** % деталей, ***25*** % – поставщик N_2, а остальные комплектующие детали – поставщик N_3. Каждая деталь от поставщика N_1 с вероятностью ***0,05*** является нестандартной, от поставщиков N_2 и N_3 – соответственно ***0,04*** и ***0,02***. Найти вероятность того, что случайно выбранная комплектующая деталь будет стандартной.

2) Из десяти баскетболистов трое успешно выполняют штрафной бросок с вероятностью ***0,9*** (группа N_1), двое – с вероятностью ***0,7*** (группа N_2), остальные – с вероятностью ***0,6*** (группа N_3). Случайно выбранный баскетболист неудачно выполнил штрафной бросок. Какова вероятность того, что бросал спортсмен из группы N_2?

4.17 1) Для участия в конкурсе из трёх танцевальных коллективов берут ***3*** танцора из 1-го коллектива, ***6*** – из 2-го, а из 3-го коллектива – ***5***. Вероятность победить в конкурсе танцору из 1-го, 2-го и 3-го коллективов равна ***0,9***; ***0,7***; ***0,8*** соответственно. Найти вероятность того, что случайно взятый танцор этих коллективов победит в конкурсе.

2) Имеются числовые множества: $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{2,3,4,5}\}$, $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{6,3,8}\}$, $\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{3,5,8}\}$. Из множества С наугад берётся одно число. Если это число окажется чётным, то из множества ***A*** наугад выбирается два числа, в противном случае случайно выбираются два числа из множества ***B***. В результате оба числа оказались чётными. Определить вероятность того, что эти числа находились во множестве ***B***.

4.18 1) В составе факультета две выпускающие кафедры (K_1, K_2) и одна кафедра (K_3) - общеобразовательная. На кафедре K_1 имеют учёную степень ***8*** преподавателей из ***10***-ти, на кафедре K_2 – *4* из ***6***-ти, а на кафедре K_3 работают ***20*** преподавателей, из которых четверо не имеют учёной степени. От факультета наугад выбирается один преподаватель на конференцию. Найти вероятность того, что этот делегат имеет учёную степень.

2) В маршрутном такси едут ***2*** мужчины и ***3*** женщины. На 1-й остановке случайным образом выходят ***2*** пассажира и заходит мужчина. На 2-й остановке выходит один пассажир. Он оказался женщиной. Найти вероятность того, что на 1-й остановке вышли ***2*** мужчины.

4.19 1) На трёх полках книжного шкафа расположены только книги по химии, физике и математике:

Номер полки	1	2	3
Число книг по химии	2	7	1
Число книг по физике	4	8	3
Число книг по математике	5	5	2

Наугад выбираются две книги с одной полки. Найти вероятность того, что каждая взятая книга будет по математике.

2) Имеются два числовых множества: $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{2, 3, 4, 5, 7}\}$ и $\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{6, 7, 8, 9}\}$. Бросается два раза монета. Если хотя бы один раз выпадет герб, то случайным образом выбирается один элемент из множества $\boldsymbol{X}$, иначе – из множества $\boldsymbol{Y}$. В результате извлечённое число оказалось простым числом. Какова вероятность того, что на монете оба раза выпали цифры?

4.20 1) Бригада специалистов состоит из ***15*** человек, среди которых четверо имеют стаж работы более 20 лет, восемь – от 10 до 20 лет, а остальные – менее 10-ти. Вероятность допустить ошибку при выполнении ответственного задания для специалистов со стажем более 20 лет равна ***0,1***; для специалистов, имеющих стаж от 10 до 20 лет, такая вероятность равна ***0,15***, а для специалистов с меньшим стажем – ***0,2***. Найти вероятность того, что наугад выбранный специалист этой бригады не допустит ошибку при выполнении задания.

2) Приводится статистика запросов кредитов в банке за один год: ***80*** % – физические лица, ***5*** % – бюджетные организации, остальные – коммерческие структуры. Вероятности возврата кредита в установленные сроки равны ***0,8***, ***0,95*** и ***0,85*** соответственно. Из выданных кредитов за год наугад проверили один. Он оказался не возвращённым в срок. Определить вероятность того, что этот кредит взят физическим лицом.

4.21 1) Вероятности того, что за определённое время эксплуатации автомобиля поломка произойдёт в подвеске, моторе, в остальных устройствах, относятся как ***3:2:5***. Вероятность того, что при диагностике удаётся обнаружить поломку в рассматриваемых устройствах равна ***0,8***; ***0,6***; ***0,9*** соответственно. С какой вероятностью случившаяся в автомобиле поломка будет обнаружена?

2) Вероятность того, что оборот торговца мороженым летом в течение одного дня превысит 5000 руб., равна ***0,8***, если день будет солнечным; при переменной облачности - ***0,5***; а при дождливой погоде - ***0,1***. Летом в данной местности вероятность солнечной погоды в течение дня равна ***0,6***, вероятность переменной облачности и вероятность дождливой погоды - по ***0,2***. В наугад взятый летний день оборот торговца мороженым оказался не больше 5000 руб. Найти вероятность того, что этот день был дождливым.

4.22 1) Прибор работает ежедневно в течение недели. В субботу и в воскресенье вероятность поломки прибора равна ***0,05***, а в остальные дни – ***0,1***. Найти вероятность работы прибора без поломки в течение дня, взятого случайным образом.

2) Имеются 3 множества: $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{m}\}$, $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{c}\}$, $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m}\}$. Из каждого множества наугад выбирается по одному элементу. После этого из трёх выбранных элементов берут наугад два. Оказалось, что это обе буквы $\boldsymbol{m}$. Найти вероятность того, что из множества $\boldsymbol{B}$ была выбрана буквы $\boldsymbol{a}$.

4.23 1) Есть две группы людей: ***2*** мужчины и ***3*** женщины (группа N_1) и ***3*** мужчины и ***2*** женщины (группа N_2). Из группы N_1 наугад выбирают ***2*** человека, а из группы N_2 – ***3*** человека. Из выбранных пяти человек наугад выбирают одного. Найти вероятность того, что будет выбрана женщина.

2) В каждой из двух корзин находится по ***7*** красных яблок и ***3*** зелёных. Из 1-й корзины случайным образом переложили одно яблоко во 2-ю корзину. После этого из 2-й корзины наугад достали яблоко. Оно оказалось красным. Найти вероятность того, что переложено было яблоко зелёного цвета.

4.24 1) Семестровый рейтинг по математике в группе из 22-х студентов оказался таким: ***4*** студента получили не менее ***75*** баллов («отличники»), ***10*** студентов – меньше ***75***, но не меньше ***50*** баллов («хорошисты»), остальные студенты – от ***25*** до ***49*** баллов («середняки»). Вероятность получить на экзамене «отличникам» отличную оценку равна ***0,8***, а хорошую – ***0,2***. «Хорошисты» могут получить с одинаковой вероятностью хорошие и отличные оценки. У «середняков» одинаковые шансы на хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Найти вероятность того, что наугад взятый студент группы получит хорошую или отличную оценку.

2) В аудитории пишут диктант ***50*** детей разных возрастов: ***12*** детей в возрасте от 11 до 13 лет, двадцать детей имеют возраст 14-15 лет, а остальным больше 15 лет. Вероятность написать этот диктант на отличную оценку для детей этих возрастных категорий соответственно равна ***0,3***; ***0,5*** и ***0,6***. Наудачу взяли одну работу. Она оказалась отличная. Найти вероятность того, что её писал ребёнок из младшей возрастной группы.

4.25 1) Производится ***3*** независимых выстрела по цели. Каждый снаряд попадает в цель с вероятностью ***0,7***. Если будет одно попадание, то цель будет поражена с вероятностью ***0,6***; если попадут два снаряда, то цель поражается с вероятностью ***0,9***, при трёх попаданиях - достоверно. Найти вероятность поражения цели при 3-х выстрелах.

2) Прогноз погоды на ближайшие три дня такой: вероятность дождя в 1-й день равна ***0,2***, для 2-го и 3-го соответственно ***0,4*** и ***0,5***. Случайным образом из них выбрали два дня. Они оба оказались без дождя. Какова вероятность того, что это 1-й и 3-й день?

Тема 5. Схема Бернулли

Рассмотрим некоторое случайное событие A в опыте. Обозначим $P(A)=p$, тогда $P(\bar{A})=1-p=q$. Если событие A произошло в опыте, будем говорить, что произошёл «*успех*», иначе - «*неуспех*». Допустим, что этот опыт повторяется *в неизменных условиях* n раз, тогда успех происходит с вероятностью p в каждом опыте. Такая последовательность опытов называется *схемой Бернулли*, а сами опыты *независимыми*. Отметим, что схема Бернулли определяется заданием 2-х чисел: натурального числа n и числа p, $0 \le p \le 1$.

Например, если опытом является бросание игральной кости, а успехом – выпадение шестёрки (событие A, $P(A)=p=\frac{1}{6}$), то при трёх бросаниях ($n=3$) множество всех элементарных исходов можно записать в виде:

$$\Omega=\left\{AAA,\ \bar{A}AA,\ A\bar{A}A,\ AA\bar{A},\ \bar{A}\bar{A}A,\ \bar{A}A\bar{A},\ A\bar{A}\bar{A},\ \bar{A}\bar{A}\bar{A}\right\}.$$

Имеем $2^3=8$ элементарных исходов. А в общем случае, когда проводится n опытов, то 2^n элементарных исходов. Обратим внимание, что в схеме Бернулли элементарные исходы имеют вероятности $p^k q^{n-k}$, где k – число вхождений буквы A в исход (число успехов в исходе), т. е. не одинаково возможны!

Важная задача – найти вероятность события B = {в n независимых испытаниях успех произойдёт ровно k раз} – решается с помощью *формулы Бернулли*

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,\dots,n,$$

где $P_n(k)=P(B)$ так называемые *биномиальные вероятности.*

Пример 1. Случайным образом выбраны пять действительных чисел на промежутке $[0,\ 10]$. Найти вероятности событий: A = {ровно два числа меньше 1}, B = {больше трёх чисел меньше 1}, C = {хотя бы два числа меньше 1}.

Решение. Рассматривая выбор числа как отдельный опыт, можно сказать, что проводятся 5 опытов, т. е. $n=5$. Если выбранное число окажется меньше $\boldsymbol{1}$ (соответствующая точка попадёт на отрезок [$\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{1}$]) – это будем считать успехом. Вероятность успеха вычисляется как геометрическая вероятность $\boldsymbol{p} = \dfrac{\text{длина } [\boldsymbol{0,1}]}{\text{длина } [\boldsymbol{0,10}]} = \boldsymbol{0{,}1}$. По формуле Бернулли получаем $\boldsymbol{P(A) = P_5(2) = C_5^2 (0{,}1)^2 (0{,}9)^{5-2} = 0{,}0729}$. Событие $\boldsymbol{B}$ означает, что число успехов равно 4 или 5, поэтому

$$\boldsymbol{P(B) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 (0{,}1)^4 \cdot (0{,}9)^1 + C_5^5 (0{,}1)^5 \cdot (0{,}9)^0 =}$$
$$\boldsymbol{= 0{,}00045 + 0{,}00001 = 0{,}000046.}$$

Для вычисления $\boldsymbol{P(C)}$ удобнее перейти к противоположному событию $\boldsymbol{\overline{C}}$ = {менее двух успехов, т. е. 0 или 1 успех}. Имеем

$$\boldsymbol{P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P_5(0) - P_5(1) = 1 - C_5^0 (0{,}1)^0 \cdot (0{,}9)^5 -}$$
$$\boldsymbol{- C_5^1 (0{,}1)^1 \cdot (0{,}9)^4 = 1 - 0{,}59049 - 0{,}32805 = 0{,}08146.}$$

При больших значениях $\boldsymbol{n}$ вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. В этом случае пользуются *приближёнными формулами* для вычисления вероятностей $\boldsymbol{P_n(k)}$, а также для сумм вида $\boldsymbol{\sum\limits_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)}$. Укажем формулы такого рода.

Если число опытов $\boldsymbol{n}$ велико, а вероятности $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ не малы (достаточно выполнения условия $\boldsymbol{npq \geq 10}$), вероятность $\boldsymbol{P_n(k)}$ можно определить приближённо по *локальной формуле Лапласа*:

$$\boldsymbol{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)}, \text{ где } \boldsymbol{x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}}, \ \boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}.$$

Вероятность $\boldsymbol{P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)}$ можно вычислить приближённо по *интегральной формуле Лапласа*

$$P_n\left(k_1 \le k \le k_2\right) \approx \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right),$$

где $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}},\ i = 1,\ 2$, а $\Phi\left(x\right) = \int\limits_0^x \varphi\left(t\right)dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – *функция Лапласа*. Функция $\varphi(x)$ – чётная функция, что означает $\varphi(-x) = \varphi(x)$, а функция $\Phi(x)$ – нечётная функция, т. е. выполняется условие $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для этих функций составлены таблицы (в данном пособии – это таблица в приложении).

Если число n большое, а число p малое (достаточно выполнения условий $p < 0{,}1$; $npq < 10$), то точность приближённых формул Лапласа ухудшается. В этом случае лучше использовать для вычисления биномиальных вероятностей приближённые равенства (*формулы Пуассона*)

$$P_n\left(k\right) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda = np;$$

$$P_n\left(k_1 \le k \le k_2\right) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n\left(k\right) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Приведём примеры применения рассмотренных приближённых формул.

Пример 2. Стрелок сделал 80 выстрелов. Пусть стрелок при каждом выстреле попадает с вероятностью $0{,}7$. Определить вероятность того, что:

1) будет 56 попаданий;

2) стрелок попадёт не менее 50 и не более 60 раз.

Решение. Каждый выстрел – это отдельный опыт, успех – это попадание. Имеем $n = 80$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$, определяем число $npq = 16{,}8 > 10$.

1) Применяем локальную формулу Лапласа при $k = 56$:

$$P_{80}\left(56\right) \approx \frac{1}{\sqrt{16{,}8}}\varphi\left(\frac{56 - 80\cdot 0{,}7}{\sqrt{16{,}8}}\right) \approx \frac{1}{4{,}1}\varphi\left(0\right) \approx \frac{0{,}3989}{4{,}1} \approx 0{,}097.$$

2) Применим интегральную формулу Лапласа:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 80 \cdot 0,7}{\sqrt{16,8}} \approx \frac{-6}{4,1} \approx -1,46\,;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60 - 80 \cdot 0,7}{\sqrt{16,8}} \approx \frac{4}{4,1} \approx 0,98\,;$$

$$P_{80}\left(50 \le k \le 60\right) \approx \Phi\left(0,98\right) - \Phi\left(-1,46\right) \approx 0,3365 + 0,4279 \approx 0,76\,.$$

Пример 3. Пусть известно, что в работе сотовой связи при каждом вызове возможен «сбой» с вероятностью $0,001$. В течение определённого промежутка времени поступило 2000 вызовов. Найти вероятности событий:

1) произойдёт 5 «сбоев»;
2) произойдёт больше одного «сбоя».

Решение. Имеем $n = 2000$, $p = 0,001$, $npq \approx 2 < 10$.

1) Воспользуемся формулой Пуассона при $\lambda = np \approx 2$ и $k = 5$: $P_{2000}\left(5\right) \approx \frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda} = \frac{2^5}{5!} e^{-2} \approx 0,036$.

2) Для вычисления вероятности события A = {произойдёт больше одного «сбоя»} = {число «сбоев» $2 \le k \le 2000$} удобнее перейти к противоположному событию $\overline{A} =$ {число «сбоев» $k = 0$ или $k = 1$}. Имеем

$$P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - P_{2000}\left(0\right) - P_{2000}\left(1\right) \approx 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} =$$

$$= 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 3e^{-2} \approx 0,59.$$

Варианты задания по теме 5

5.1 1) Четыре предмета случайным образом раскладываются по трём занумерованным ящикам. Определить вероятность событий: а) в ящик с номером 1 попадёт ровно 2 предмета; б) хотя бы 1 предмет попадёт в ящик с номером 2.

2) Вероятность того, что случайный покупатель в магазине совершит покупку определённого изделия равна $0,7$. Найти веро-

ятность того, что из ***100*** покупателей ровно ***75*** сделают такую покупку.

5.2 1) Человек при работе на конвейере выполняет некие одинаковые операции. Вероятность того, что он не совершит ошибки в каждой такой операции, равна ***0,95***. Какова вероятность: а) совершить ровно одну ошибку в 4-х операциях; б) хотя бы одну ошибку в 5-ти операциях?

2) Оптовый магазин закупил партию автомобильных шин некоторой фирмы в количестве ***500*** штук для последующей продажи. Вероятность того, каждая шина отслужит два гарантийных срока, равна ***0,8***. Найти вероятность того, что таких шин в этой партии окажется не менее ***80*** и не более ***100*** .

5.3 1) В тесте четыре задачи. Для каждой задачи дано четыре возможных ответа, один из них правильный. Какова вероятность случайно угадать ответы: а) трёх задач; б) меньше, чем двух задач?

2) Пусть среднее число болезнетворных микробов в одном кубическом метре воды равно ***100***. На пробу берётся ***5*** литра воды. Определить вероятность того, что в пробе будет обнаружен хотя бы один микроб.

5.4 1) Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна ***0,1***. Куплено ***5*** билетов. Какова вероятность: а) двух выигрышей; б) хотя бы одного выигрыша?

2) Предположим, что нужный результат появляется в среднем ***2*** раза в ***100*** наблюдениях. Чему равна вероятность того, что нужный результат появится ***80*** раз в ***400***-х наблюдениях?

5.5 1) Пусть на станцию скорой помощи в среднем за один час поступает ***10*** вызовов, один из которых оказывается ложным. Какая вероятность получить в течение часа: а) два ложных вызова; б) хотя бы один ложный вызов?

2) Статистические наблюдения показали, что на факультете в среднем ***30***% студентов заканчивают сессию хотя бы с одной задолженностью. Число студентов, сдающих сессию, на этом факультете равно ***400***. Определить вероятность того, что после сессии на факультете будет от ***100*** до ***150*** задолжников.

5.6 1) В круге диаметра $\boldsymbol{D}$ случайно выбраны четыре точки. Определить вероятность того, что: а) расстояние до центра круга у половины точек будет менее $\dfrac{\boldsymbol{D}}{\sqrt{5}}$; б) хотя бы одна из точек окажется удалённой от центра круга больше, чем на $\dfrac{\boldsymbol{D}}{\sqrt{7}}$.

2) Пусть в ***40***% случаев изготовленная на определённом станке деталь отличается от номинала по весу не более, чем на ***10*** грамм (такая деталь считается отличной). Найти вероятность того, что из ***320*** случайно взятых деталей будет ***100*** отличных.

5.7 1) Допустим, некоторый спортсмен выполняет норматив при каждой попытке в ***80***% случаев и результат не зависит от результатов предыдущих попыток. Спортсмен сделал четыре попытки. Найти вероятности следующих событий:

а) удачной оказалась только одна попытка; б) зафиксировано не менее 3-х удачных попыток.

2) В некоторой местности снег выпадает в среднем один раз в ***25*** лет. Какова вероятность того, что в этой местности выпадет снег хотя бы два раза на протяжении ***50***-ти лет?

5.8 1) Некоторое устройство состоит из пяти независимо работающих элементов. Проводится испытание этого устройства. Известно, что каждый элемент может выдержать испытание с вероятностью ***0,8***. Определить вероятность того, что: а) три элемента не выдержат испытание; б) выдержат испытание не менее 3-х элементов.

2) В театре находятся ***500*** зрителей, из них ***125*** посещают этот театр первый раз. Каждому из ***100*** случайно выбранных зрителей задали вопрос: «Вы 1-й раз в этом театре?». Найти вероятность того, что число ответов «да» будет находиться между ***50*** и ***70***.

5.9 1) Факультет имеет пять кафедр. Ежедневно с вероятностью ***0,2*** на каждую кафедру, независимо от других, могут поступить сообщения из деканата. Определить вероятности следующих событий: а) сообщения поступили только на две кафедры; б) не менее трёх кафедр получат сообщения.

2) Пусть известно, что некоторое генетическое заболевание

появляется в среднем у одного из десяти тысяч людей. Случайным образом выбрали ***500*** человек. Какова вероятность того, что это заболевание будет хотя бы у одного из этих людей?

5.10 1) В электричку из 4-х вагонов садятся наугад пять человек. Найти вероятность того, что: а) два из них сядет в 1-й вагон; б) в 1-й вагон сядет не менее 3-х человек.

2) При эксплуатации в течение года автомобиля определённой марки вероятность серьёзной поломки равна ***0,05***. Определить вероятность того, что у ***100*** автомобилей этой марки в течение года будет не более 2-х поломок.

5.11 1) Что вероятнее: выпадение 3-х гербов при пяти бросаниях монеты (событие $\boldsymbol{A}$) или выпадения более 4-х очков хотя бы один раз при 3-х бросаниях игральной кости (событие $\boldsymbol{B}$)?

2) Сканируется текст, в котором ***1100*** символов. Вероятность неправильного сканирования каждого символа равна ***0,01***. Какая вероятность того, что после сканирования текста окажется не более ***20***-ти ошибок?

5.12 1) Пусть каждый саженец винограда приживается в семи случаях из десяти. Определить вероятность того, что из четырёх посаженных саженцев примутся: а) три саженца; б) не менее 3 саженцев.

2) Городское тестирование школьников 11-х классов по математике показало, что задачу по стереометрии правильно решили только ***20*** % учеников. Какова вероятность того, что из ***50***-ти случайно выбранных школьников 11-го класса не справились с задачей по стереометрии более ***10***-ти?

5.13 1) В группе детского сада ***10*** детей. Предполагая, что рождение мальчика или девочки равновозможное, определить вероятности событий: а) в группе четыре девочки; б) в группе хотя бы 4 мальчика.

2) Приёмная комиссия университета провела набор студентов на 1-й курс в количестве ***800*** человек. Известно, что среди зачисленных студентов ***10*** иностранцев. Найти вероятность того, что среди ***100*** случайно взятых первокурсников будет хотя бы один студент-иностранец.

5.14 1) Управляющая компания обслуживает пять многоквартирных домов. Вероятность просрочки платежей компании для каждого дома равна ***0,6***. Найти вероятности того, что: а) не рассчитаются вовремя три дома; б) просрочка платежей будет не более, чем у двух домов.

2) Производитель гарантирует, что ***80*** % окон, изготовленных на его предприятии, являются окнами высшего сорта (прослужат не менее 50-ти лет). Какова вероятность того, что среди ***500*** окон, поступивших в оптовый магазин, количество окон высшего сорта находится в пределах от ***300*** до ***350***?

5.15 1) Мебельная фабрика изготавливает столы. Каждый пятый стол имеет высшее качество. Чему равна вероятность событий: а) среди 4-х наугад взятых столов только один имеет высшее качество; б) среди 3-х наугад взятых столов хотя бы один имеет высшее качество.

2) Поликлиника обслуживает ***1000*** человек. Пусть в течение одного дня любой из них (независимо от остальных) может обратиться в эту поликлинику с вероятностью ***0,01***. Какова вероятность того, что за день было не более ***7*** обращений?

5.16 1) Пять человек купили медицинскую страховку «Клещевой энцефалит». Вероятность укуса клещом в данной местности в течение года равна ***0,2***. Найти вероятность того, что: а) воспользуется страховкой (один раз) только один из пяти; б) воспользуется страховкой (один раз) больше одного человека.

2) Известно, что на автозаправочной станции (АЗС) каждый подъехавший автомобиль будет заправлять бензин с вероятностью ***0,8***, а с вероятностью ***0,2*** – дизтопливо. В течение суток на АЗС заправились ***400*** автомобилей. Чему равна вероятность того, что из них ***310*** заправлялись бензином?

5.17 1) Контрольную работу по теории вероятности успешно выполняют в среднем ***75*** % студентов группы. Найти вероятность того, что среди шести случайно взятых студентов этой группы успешно выполнят контрольную работу: а) только половина студентов; б) не менее четырёх студентов.

2) Статистические наблюдения показали, что в некотором магазине ***70*** % покупателей расплачиваются за покупки с помо-

щью банковской карточки, а остальные – наличными. Какова вероятность того, что из ста случайно выбранных покупателей менее четверти расплатятся наличными?

5.18 1) Пусть ***60*** % жителей города выбирают для поездки на работу автомобильный транспорт. Случайно выбрали пять жителей, которые пользуются транспортом для поездки на работу. Найти вероятность того, что из них: а) на работу едут автомобильным транспортом только трое; б) по крайней мере двое едут автомобильным транспортом.

2) В аудитории сидят ***200*** слушателей, из них двое знают китайский язык. Какова вероятность того, что среди ***50***-ти случайно взятых слушателей не более одного слушателя со знанием китайского языка?

5.19 1) У биатлониста ***8*** патронов, ему нужно поразить ***5*** мишеней. Вероятность попадания в каждую мишень при каждом выстреле равна ***0,9***. Найти вероятность того, что этот биатлонист: а) поразит только четыре мишени, израсходовав все патроны; б) поразит все мишени, израсходовав ***6*** патронов.

2) Найти вероятность того, что при случайном выборе ***50***-ти действительных чисел на отрезке [***0***, ***10***] в выборку попадут не менее восьми чисел, больших шести.

5.20 1) Для стрелка вероятность попасть в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов других выстрелов и равна ***0,25***. Стрелок сделал четыре выстрела. Найти вероятность событий: а) $\boldsymbol{A}$ = {стрелок попал только один раз}; б) $\boldsymbol{B}$ = {стрелок попал не менее двух раз}.

2) В ящике лежат черные и белые шары в отношении 4:1. Проделаем такой опыт: наугад извлечём шар, запишем его цвет, и вернём шар в ящик. Определить вероятность того, что при повторении такого опыта ***100*** раз чёрный шар появится в половине случаев.

5.21 1) Оптовая база снабжает 5 магазинов. От каждого из них может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,6 независимо от заявок других магазинов. Найти вероятность того, что на базу поступит: а) две заявки; б) не менее двух заявок.

2) При транспортировке стеклянных бутылок могут быть

разбиты в среднем *2* % бутылок. Найти вероятность того, что при транспортировке *1000* бутылок окажутся разбитыми больше трёх.

5.22 1) В подъезде дома включено шесть новых лампочек освещения. Каждая лампочка в течение года перегорает с вероятностью *0,8*. Какова вероятность того, что за год в подъезде нужно будет заменить: а) две лампочки; б) более половины лампочек?

2) Пусть известно, что на каждых *100* туристов приходится в среднем 2 туриста, возраст которых превышает *80* лет. Определить вероятность того, что среди *300* случайно взятых туристов будет не менее трёх туристов такого возраста.

5.23 1) В некотором лесу деревья хвойных пород составляют *75* % . Случайным образом спилили шесть деревьев. Чему равна вероятность того, что: а) половина из них – деревья хвойной породы; б) хотя бы одно дерево будет не хвойной породы?

2) Имеется сорт пшеницы, всхожесть зёрен которой составляет *90* %. Определить вероятность того, что из посаженных *500* зёрен взойдут не менее *450*.

5.24 1) Вероятность получения удачного результата при выполнении физического опыта равна $\frac{2}{3}$. Чему равна вероятность того, что в шести независимо выполненных опытах: а) три опыта пройдут удачно; б) хотя бы один опыт будет неудачным?

2) В сложном устройстве *800* независимо работающих элементов. Вероятность поломки каждого элемента в течение гарантийного срока эксплуатации равна *0,05*. Определить вероятность поломки более двух элементов.

5.25 1) Баскетболист попадает при каждом броске в кольцо с вероятностью *0,7*. За игру он произвёл *5* бросков. Найти вероятность того, что он попал в кольцо: а) два раза; б) не менее 3-х раз.

2) Пусть вероятность успешно сдать 1-ю сессию у каждого студента 1-го курса математического факультета равна *0,8*. На этом факультете *75* первокурсников. Какая вероятность, что не менее 60-ти из них успешно сдадут сессию?

Тема 6. Дискретные случайные величины

Во многих задачах теории вероятностей при проведении опыта случайные события можно охарактеризовать числом X, которое, как и событие, носит случайный характер, зависит от наблюдаемого исхода опыта. Например:

1. X_1 – число нулей в десятичной записи случайно взятого двузначного числа.

2. X_2 – число дождливых дней в течение случайно взятой летней недели года.

3. X_3 – число бросаний игральной кости до первого появления 5-ти очков.

Величина X называется *дискретной случайной величиной*, если множество её возможных значений $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ *конечное* (например, $X_1 = \{0, 1\}$, $X_2 = \{0, 1, 2, ..., 7\}$) или *счётное* ($X_3 = \{1, 2, ..., n, ...\}$). Обязательным требованием является возможность определить вероятности $P(X = x_i) = p_i > 0$. Ясно, что должно выполняться равенство $\sum_i p_i = 1$, так как события $\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, ...$ образуют полную группу. Обычно возможные значения располагают по возрастанию: $x_1 < x_2 < x_3 < ...$

Таблица вида

X	x_1	x_2	$...$	x_i	$...$
P	p_1	p_2	$...$	p_i	$...$

называется *рядом (или законом) распределения* дискретной случайной величины X.

Пример 1. Получить ряд распределения для случайной величины X_1, описанной выше.

Решение. Множество всех элементарных исходов состоит из всех двузначных чисел, их 90 штук. Случайное событие $\{X = 0\}$ означает, что у двузначного числа обе цифры ненулевые, таких вариантов $9 \cdot 9 = 81$. Событие $\{X = 1\}$ содержит 9 благоприятствующих исходов (единственная цифра 0 в записи числа может находиться только в разряде единиц, при этом в разряде десятков могут быть все цифры, кроме ***0***). Вероятности этих событий легко вычислить, используя классическое определение вероятности:

$$P\left(X=0\right)=\frac{81}{90}=0{,}9\,,\; P\left(X=1\right)=\frac{9}{90}=0{,}1\,.$$

Итак, ряд распределения имеет вид

X	***0***	***1***
P	***0,9***	***0,1***

Важной вероятностной характеристикой случайной величины ***X*** служит её *функция распределения*:

$$F\left(x\right)=P\left(X<x\right),\quad -\infty<x<+\infty\,,$$

т. е. для каждого действительного числа ***x*** функция $F\left(x\right)$ – это вероятность того, что в результате опыта случайная величина ***X*** примет значение, меньшее ***x***.

Для дискретной случайной величины функция распределения, исходя из определения, может быть получена по формуле

$$F\left(x\right)=\begin{cases} 0, & x\le x_1; \\ p_1, & x_1<x\le x_2; \\ p_1+p_2, & x_1<x\le x_2; \\ p_1+p_2+p_3, & x_1<x\le x_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1, & x>x_n. \end{cases},$$

Пример 2. Из числового множества $M=\left\{5,6,7,8\right\}$ случайным образом, без возвращения, вынимают числа до тех пор, пока не появится число ***5***. Для случайной величины ***X*** – количества выбранных чисел – найти ряд распределения и составить функцию распределения.

Решение. Возможными значениями величины ***X*** являются числа ***1***, ***2***, ***3***, ***4***. Определим соответствующие вероятности.

Событие {***X = 1***} означает, что уже первое выбранное число будет $\boldsymbol{5}$, поэтому $P(X=1)=0{,}25$. Событие $\{X = 2\}$ означает, что приходится выбрать два числа, значит, первое число будет не $\boldsymbol{5}$, а второе – число $\boldsymbol{5}$. По формуле умножения вероятностей зависимых событий получим $P(X=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=0{,}25$. Событие $\{X = 3\}$ означает, что первые два числа оказались числами не $\boldsymbol{5}$, но 3-е число обязательно $\boldsymbol{5}$, поэтому $P(X=3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=0{,}25$. И, наконец, событие $\{X = 4\}$ выполнится, если среди первых трёх выбранных чисел нет числа $\boldsymbol{5}$ и, тогда, выбор четвёртого числа достоверно будет числом $\boldsymbol{5}$. Значит, $P(X=4)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=0{,}25$. Вывод: все значения этой случайной величины равновероятны.

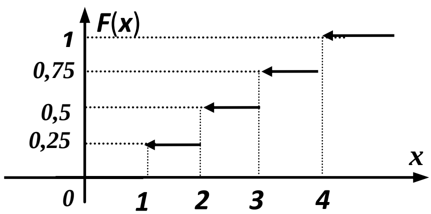
Итак, ряд распределения

X	*1*	*2*	*3*	*4*
P	*0,25*	*0,25*	*0,25*	*0,25*

Запишем функцию распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ 0{,}25, & 1<x\le 2 \\ 0{,}5, & 2<x\le 3 \\ 0{,}75, & 3<x\le 4 \\ 1, & x>4 \end{cases}.$$

Изобразим график полученной функции распределения:



Функции распределения дискретной случайной величины – это монотонные ступенчатые функции, имеющие в точках x_i скачки, равные величинам p_i.

Математическим ожиданием (*средним значением*) дискретной случайной величины X с законом распределения $P\{X = x_i\} = p_i$, $i = 1, 2, ..., n$ называется число (не случайное!)

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Характеристикой разброса (рассеяния) случайной величины X считают математическое ожидание квадрата отклонения величины X от её математического ожидания и называют это число *дисперсией*:

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right).$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X) = \sum_i x_i^2 p_i - \left(\sum_i x_i p_i\right)^2 .$$

Число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ носит название *среднего квадратичного отклонения* случайной величины X.

Пример 3. Производится стрельба из орудия по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна $0,8$, при каждом следующем выстреле вероятность попадания уменьшается в 2 раза. Произведено 3 выстрела. Рассматривается случайная величина X – число попаданий. Составить ряд распределения для X, найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Возможные значения величины X: $X = i$, где $i = 0, 1, 2, 3$. Для вычисления вероятностей $P(X = i)$ рассмотрим случайные события A_k = {попадание при k-м выстреле, $k = 1, 2, 3$}. Имеем

$P(A_1) = 0,8;$ $P(A_2) = 0,5P(A_1) = 0,4;$ $P(A_3) = 0,5P(A_2) = 0,2$;

$P(X = 0) = P\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3\right) = \left(1 - P(A_1)\right)\left(1 - P(A_2)\right)\left(1 - P(A_3)\right) = 0,096$;

$$P(X=1)=P\left(A_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3+\bar{A}_1\cdot A_2\cdot\bar{A}_3+\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot A_3\right)=$$
$$=P(A_1)(1-P(A_2))(1-P(A_3))+(1-P(A_1))P(A_2)(1-P(A_3))+$$
$$+(1-P(A_1))(1-P(A_2))P(A_3)=0,472;$$
$$P(X=2)=P\left(A_1\cdot A_2\cdot\bar{A}_3+A_1\cdot\bar{A}_2\cdot A_3+\bar{A}_1\cdot A_2\cdot A_3\right)=$$
$$=P(A_1)P(A_2)(1-P(A_3))+P(A_1)(1-P(A_2))P(A_3)+$$
$$+(1-P(A_1))P(A_2)P(A_3)=0,368;$$
$$P(X=3)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0,064.$$

Итак, ряд распределения:

X	0	1	2	3
P	$0,096$	$0,472$	$0,368$	$0,064$

Математическое ожидание

$$M(X)=0\cdot 0,096+1\cdot 0,472+2\cdot 0,368+3\cdot 0,064=1,4.$$

Дисперсия

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=$$
$$=0^2\cdot 0,096+1^2\cdot 0,472+2^2\cdot 0,368+3^2\cdot 0,064-(1,4)^2=0,56.$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,56}\approx 0,75.$$

Рассмотрим опыты (испытания) по схеме Бернулли. Пусть случайная величина X – число появлений события A (число *успехов*) в n испытаниях. Закон распределения такой дискретной случайной величины (согласно формуле Бернулли) имеет вид

$$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\dots,n,$$

и называется *биномиальным*. Это распределение зависит от двух параметров n и p. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей биномиальное распределение, могут быть найдены по простым формулам

$$M(X)=np,\ D(X)=np(1-p).$$

Варианты задания по теме 6

6.1 1) Пусть любой день недели с одинаковой вероятностью может быть дождливым днём. Случайная величина X – число дождливых дней за эту неделю. Определить для величины X: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) В спортивном тире независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень три стрелка. Вероятность попадания в мишень 1-го стрелка равна ***0,4***, 2-го – ***0,7***, 3-го – ***0,5***. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попаданий.

6.2 1) Человек 3 раза повторяет такой опыт – случайно из чисел 1, 2, 3, 4 выбирает одно число. Случайная величина X – количество выбранных единиц. Для величины X определить:

а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Имеется четыре ключа, из которых только одним можно открыть замок. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попыток при открывании замка (проверенный ключ второй раз не используется).

6.3 1) Случайная величина X – число отличных оценок, полученных студентом в сессию. Студент сдавал четыре экзамена, а вероятность получить «отлично» на каждом экзамене равна ***0,3***. Для величины X определить: а) ряд распределения;

б) функцию распределения.

2) Пешеход, идя на работу, должен перейти три дороги, оборудованные светофорами. Каждый светофор независимо друг от друга работает в следующем режиме: в течение ***20*** секунд - зеленый свет, в течение ***5*** секунд – желтый, а красный свет горит ***55*** секунд. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа ожиданий пешеходом зелёного света при переходе дорог.

6.4 1) Наблюдения за погодой в некоторой местности показали, что зимой в среднем ***25*** % дней, когда температура воздуха ниже ***20*** градусов мороза («морозные дни»). Наугад взяли пять зимних дней. Пусть случайная величина X – число морозных дней среди них. Для величины X найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Нужно обнаружить среди пяти предметов один предмет, который имеет скрытый дефект. Проверяющий берет случайно один за другим предметы и проверяет их качество. Если предмет с дефектом обнаруживается, то поиск прекращается. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа проверяемых предметов.

6.5 1) Пусть известно, что ***75*** % всех преподавателей некоторого ВУЗа имеют возраст более 50-ти лет. Рассмотрим случайную величину ***X*** – число преподавателей с возрастом не более 50-ти лет среди трёх наугад взятых преподавателей данного ВУЗа. Для величины ***X*** найти: а) ряд распределения;

б) функцию распределения.

2) В типографии напечатали ***500*** книг. Среди них ***100*** книг по литературе, ***250*** – по истории, остальные по математике. Случайным образом взяли четыре напечатанные книги. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа книг по математике среди взятых.

6.6 1) На некоторую железнодорожную станцию в течение суток приходит шесть электричек. Вероятность того, что каждая электричка приходит без опоздания, равна ***0,9***. Случайная величина ***X*** – число электричек, которые опоздали за сутки. Для величины ***X*** найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Два футболиста независимо друг от друга пробивают по три пенальти. Вероятность попадания при одном ударе равна ***0,6*** и ***0,9*** соответственно. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа забитых мячей.

6.7 1) Человек отправил ***3*** посылки. Вероятность повреждения в пути для каждой посылки равна ***0,05***. Случайная величина ***X*** – число повреждённых в пути посылок. Для величины ***X*** определить: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) В ящике ***4*** шара с номерами: ***0, 1, 2, 2, 4***. Наугад выбираются ***2*** шара (без возвращения). Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию произведения номеров у выбранных шаров.

6.8 1) На пути движения междугородного автобуса $\boldsymbol{4}$ населённых пункта. На каждом из них с вероятностью $\boldsymbol{0{,}6}$ могут зайти в автобус новые пассажиры. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число населённых пунктов по пути следования автобуса, на которых вошли пассажиры. Для величины $\boldsymbol{X}$ найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Из букв, составляющих слово «природа», случайным образом без возвращения выбираются $\boldsymbol{4}$ буквы. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа взятых гласных букв.

6.9 1) Вероятность справиться с решением трудной задачи у каждого из четверых школьников равна $\boldsymbol{0{,}2}$. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число школьников, которые правильно решат эту задачу, если они решали её независимо друг от друга. Для величины $\boldsymbol{X}$ найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Стрелок производит 3 выстрела по мишени, которая после каждого выстрела перемещается к стрелку ближе. При 1-м выстреле вероятность попадания $\boldsymbol{0{,}1}$, а при каждом следующем выстреле вероятность попадания увеличивается в $\boldsymbol{3}$ раза. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попаданий.

6.10 1) У предприятия по производству пластиковых окон три поставщика. Вероятность несвоевременной поставки комплектующих материалов каждым поставщиком равна $\boldsymbol{0{,}1}$. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число поставщиков, которые своевременно поставили свою продукцию на предприятие. Для величины $\boldsymbol{X}$ определить: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) В ящике два шара с одинаковыми номерами $\boldsymbol{1}$ и два шара с номерами $\boldsymbol{2}$ и $\boldsymbol{3}$. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию суммы номеров у $\boldsymbol{2}$-х случайно вынутых шаров.

6.11 1) Из натуральных чисел $\boldsymbol{1, 2, 3, 4, 5}$ случайно с возвращением выбираются $\boldsymbol{3}$ числа. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число выбранных чисел меньших, чем $\boldsymbol{3}$. Для величины $\boldsymbol{X}$ найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Три студента пошли сдавать экзамен. Вероятности получить отличную оценку равны ***0,6***; ***0,8***; ***0,2*** соответственно. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа студентов, получивших отличную оценку на экзамене.

6.12 1) Ученик при компьютерном тестировании может выбрать правильный ответ на каждый из пяти вопросов теста с вероятностью ***0,8***. Случайная величина ***X*** – число правильных ответов ученика после тестирования. Для величины ***X*** найти:

а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Из полного набора костей домино случайным образом выбрали четыре кости. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа дублей в выборке.

6.13 1) Один за другим прыгают в длину три легкоатлета. Вероятности установить личный рекорд у каждого из них не зависят от того, установили или нет рекорды другие, и равны ***0,3***. Случайная величина ***X*** – число спортсменов, установивших свой рекорд. Для величины ***X*** найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) В кошельке три банкноты по ***100*** рублей, две – по ***200*** рублей и одна банкнота в ***500*** рублей. Наугад берутся три банкноты. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию суммы (в рублях) выбранных денег.

6.14 1) Три раза из колоды игральных карт с возвращением извлекается одна карта. Случайная величина ***X*** – число извлечённых карт бубновой масти. Для величины ***X*** найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) В семье четверо детей: ***2*** мальчика и ***2*** девочки. Наугад выбраны трое детей. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа мальчиков среди выбранных детей.

6.15 1) Три человека наугад записывают на своей бумажке одно из чисел 1, 2, 3. Случайная величина ***X*** – число троек в этих записях. Для величины ***X*** найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Два выпускника школы выполняют работу на ЕГЭ по математике. Вероятность получить результат не менее ***80*** баллов для 1-го ученика равна ***0,7***, а для 2-го равна ***0,6***. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа этих учеников, набравших менее ***80*** баллов.

6.16 1) Пусть шина каждого колеса легкового автомобиля за время эксплуатации в течение определённого времени приходит в негодность и заменяется с вероятностью ***0,2***. Случайная величина ***X*** – число заменённых шин за это время (из исходных четырёх). Для величины ***X*** найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Бригада рабочих производит за смену в 3 раза больше свёрл по дереву, чем по железу. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа свёрл по дереву среди четырёх случайно отобранных.

6.17 1) Три предмета наугад распределяются по четырём коробкам. Случайная величина ***X*** – число предметов, попавших во 2-ю коробку. Для величины ***X*** найти: а) ряд распределения;
б) функцию распределения.

2) Известно, что среди 5-ти задач на контрольной работе студент две задачи решил неправильно. Преподаватель, желая найти такие задачи, проверяет задачи поочерёдно, и, найдя нужные, прекращает проверку. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа проверенных задач.

6.18 1) В аудитории четыре ряда стульев по пять мест в каждом ряду. Четыре первых слушателя рассаживаются наугад. Случайная величина ***X*** – число слушателей, севших на последний ряд. Для случайной величины ***X*** найти: а) ряд распределения;
б) функцию распределения.

2) Из команды волейболистов, в которой ***2*** мастера спорта и ***3*** перворазрядника, одного за другим случайно выбирают волейболиста до первого появления мастера спорта. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа выбранных спортсменов.

6.19 1) Пусть известно, что преступления некоторого вида не раскрываются в среднем в ***10***% случаев. Случайная величина ***X*** – число раскрытых преступлений этого вида из случившихся четырёх. Для величины ***X*** найти: а) ряд распределения;

б) функцию распределения.

2) Имеются четыре задачи. Предположим, что человек может правильно решить каждую задачу с вероятностью ***0,8***. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа задач, оставшихся после первого правильного решения задачи.

6.20 1) Проводится такой опыт: один раз бросается монета и игральная кость. Если выпадет герб и шестёрка, то это считаем успехом. Случайная величина ***X*** – число успехов в трёх таких опытах. Для величины ***X*** найти: а) ряд распределения;

б) функцию распределения.

2) Из колоды в ***36*** игральных карт наугад взяли три карты. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа тузов среди взятых карт.

6.21 1) Некоторый телевизионный канал активно рекламирует новый товар. Пусть известно, что в среднем каждый пятый телезритель увидит эту рекламу. Случайная величина ***X*** – число телезрителей, увидевших данную рекламу, среди случайно отобранных четырёх телезрителей. Для величины ***X*** найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Из колоды в ***36*** игральных карт наугад взяли три карты. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа карт бубновой масти среди взятых карт.

6.22 1) Известно, что из ***15*** выпускников-экономистов трое будут продолжать обучение в магистратуре. Случайная величина ***X*** – число будущих магистрантов среди случайно взятых трёх выпускников-экономистов. Для величины ***X*** найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Задержаны четыре подозреваемых в совершении преступления. Один из них оставил на месте преступления свои отпечатки. Поочерёдно проводят дактилоскопию у подозреваемых до тех

пор, пока нужные отпечатки будут найдены. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа проверенных подозреваемых.

6.23 1) В операционном зале банка независимо друг от друга принимают клиентов $\boldsymbol{3}$ оператора. Вероятность того, что в данный момент времени у оператора есть клиент, равна $\boldsymbol{0{,}7}$. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число операторов, которые в данный момент времени работают с клиентами. Для величины $\boldsymbol{X}$ найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Подброшены $\boldsymbol{2}$ игральные кости. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию разности выпавших очков.

6.24 1) Проводится следующий опыт: наугад выбираются два числа (с возвращением) из множества $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{1, 2, 3}\}$. Пусть считается успехом в опыте выбор одинаковых чисел. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число успехов при $\boldsymbol{3}$-х повторениях этого опыта. Для величины $\boldsymbol{X}$ найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) Человеку даются попытки справиться с некоторым заданием. Пусть при первой попытке положительный результат достигается с вероятностью $\boldsymbol{0{,}2}$, а при каждой следующей попытке вероятность увеличивается на $\boldsymbol{0{,}1}$. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию номера попытки, в которой был получен положительный результат.

6.25 1) Поступило $\boldsymbol{10}$ сообщений. Предположим, что среди них три содержат недостоверную информацию. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ – число недостоверных сообщений среди случайно взятых трёх сообщений из поступивших. Для величины $\boldsymbol{X}$ найти: а) ряд распределения; б) функцию распределения.

2) У человека имеются $\boldsymbol{3}$ банковские карты с разными пин-кодами. Он помнит пин-код только одной карты, но забыл какой из них. Вынув наугад карту, он пробует оплатить покупку. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попыток произвести оплату (проверенная карта второй раз не используется).

Тема 7. Непрерывные случайные величины

Говорят, что случайная величина X является *непрерывной*, если её функцию распределения $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad -\infty < x < +\infty..$$

Функция $f(x)$ называется *плотностью* распределения непрерывной случайной величины X.

Основные *свойства* непрерывных случайных величин.

1) Функция распределения $F(x)$ непрерывна для любых x.

2) Во всех точках непрерывности функции $f(x)$ справедливо равенство

$$f(x) = F'(x).$$

Это свойство позволяет находить плотность распределения $f(x)$ по функции распределения $F(x)$.

3) $f(x) \geq 0$ как производная неубывающей функции $F(x)$.

4) $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$.

5) $P(X = x_0) = 0$, т. е. любое фиксированное значение x_0 непрерывная случайная величина X принимает с нулевой вероятностью (в отличие от дискретных случайных величин!).

6) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (условие нормировки плотности распределения).

Для непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ *математическим ожиданием* называется число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx,$$

а *дисперсия* равна:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}))^{2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}^{2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}-\boldsymbol{M}^{2}(\boldsymbol{X}).$$

Пример 1. Дана плотность распределения случайной величины $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x})^{2}, & \boldsymbol{x}\in(-\boldsymbol{1},\boldsymbol{0}]\\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x}\notin(-\boldsymbol{1},\boldsymbol{0}]\end{cases}.$$

Определить: 1) число $\boldsymbol{c}$; 2) функцию распределения $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$;

3) вероятность $\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{0{,}5}<\boldsymbol{X}<\boldsymbol{0{,}5})$; 4) математическое ожидание $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})$ и дисперсию $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$. Нарисовать графики функций $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Решение. 1) Число $\boldsymbol{c}$ найдём, используя условие нормировки (свойство 6) плотности распределения. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}=\int_{-\infty}^{-1}\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{dx}+\int_{-1}^{0}\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x})^{2}\boldsymbol{dx}+\int_{0}^{+\infty}\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{dx}=$$

$$=\boldsymbol{c}\int_{-1}^{0}(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x})^{2}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{3}}(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x})^{3}\Big|_{-1}^{0}=\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{3}}=\boldsymbol{1}.$$

Отсюда следует, что $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{3}$.

2) Используем свойство аддитивности определённого интеграла:

если $\boldsymbol{x}<-\boldsymbol{1}$, то $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}=\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{0}\,\boldsymbol{dt}=\boldsymbol{0}$;

если $-\boldsymbol{1}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{0}$, то

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}=\int_{-\infty}^{-1}\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{dt}+\int_{-1}^{x}\boldsymbol{3}(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{t})^{2}\boldsymbol{dt}=(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{t})^{3}\Big|_{-1}^{x}=(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x})^{3}$$

;

если $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$, то

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}=\int_{-\infty}^{-1}\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{dt}+\int_{-1}^{0}\boldsymbol{3}(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{t})^{2}\boldsymbol{dt}+\int_{0}^{+\infty}\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{dt}=\boldsymbol{1}.$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ (1+x)^3, & -1<x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

3) Имеем

$$P(|X|<0,5)=P(-0,5<X<0,5)=F(0,5)-F(-0,5)=$$

$$=1-(1+(-0,5))^3=\frac{7}{8}.$$

4) Исходя из определений, вычисляем:

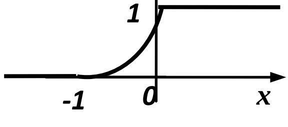
$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot dx+\int_{-1}^{0} x\cdot 3(1+x)^2 dx+\int_{0}^{+\infty} 0\cdot dx=$$

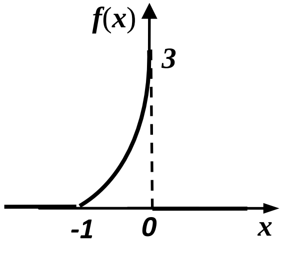
$$=3\int_{-1}^{0}\left(x+2x^2+x^3\right)dx=3\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{1}{4};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X)=\int_{-1}^{0} x^2\cdot 3(1+x)^2 dx-\frac{1}{16}=$$

$$=3\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x^3+x^4\right)dx-\frac{1}{16}=3\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{0}-\frac{1}{16}=\frac{3}{80}.$$

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$:





Приведём три важных распределения непрерывных случайных величин.

1. *Равномерное распределение на отрезке* [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$] случайной величины $\boldsymbol{X}$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,\,b],\\ 0, & x\notin[a,\,b].\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Для равномерного распределения

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Такое распределение получается тогда и только тогда, когда по условиям опыта величина $\boldsymbol{X}$ принимает возможные значения в конечном промежутке [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$], причём все значения из [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$] одинаково возможны. Например, по такому закону распределена случайная величина $\boldsymbol{X}$ – время ожидания транспорта человеком, пришедшим на остановку в случайный момент времени (на промежутке $[0,T]$, где $\boldsymbol{T}$ – интервал движения транспорта).

2. *Показательное распределение* случайной величины $\boldsymbol{X}$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}.$$

Здесь число $\lambda > 0$ является параметром распределения.

Для показательного распределения $M(X)=\dfrac{1}{\lambda},\ D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Характеристическим свойством показательно распределённой случайной величины $\boldsymbol{X}$ является *свойство отсутствия последействия* $P(X>x_0+x\,|\,X>x_0)=P(X>x)$. Таким свойством обладают некоторые величины в теории массового обслуживания (например, $\boldsymbol{X}$ – время ожидания в очереди; длительность телефонных разговоров) и в теории надёжности (например, $\boldsymbol{X}$ – время безотказной работы трансформатора, мобильного телефона).

3. Случайная величина $\boldsymbol{X}$, у которой плотность распределения имеет вид

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}},\quad \sigma>0,\ -\infty<x<+\infty,$$

называется величиной, распределённой по *нормальному закону* с параметрами a и σ (будем использовать символическую запись $X\in N\left(a,\sigma\right)$).

Математическое ожидание величины $X\in N\left(a,\sigma\right)$ равно числу a, а среднее квадратическое отклонение - числу σ, т. е. $a=M\left(X\right)$, $\sigma=\sigma\left(X\right)$.

Для $X\in N\left(a,\sigma\right)$ её функция распределения может быть записана в виде

$$F\left(x\right)=0,5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

а вероятность попадания величины X на заданный промежуток $\left[\alpha,\beta\right]$ равна

$$P\left(\alpha\le X\le\beta\right)=F\left(\beta\right)-F\left(\alpha\right)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Напомним, что функция Лапласа $\Phi\left(u\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^u e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ табличная (см. таблицу в приложении).

Нормальное распределение – наиболее распространённое на практике распределение. Оно часто используется для приближённого описания многих случайных явлений, когда на изучаемый признак воздействует большое число независимых случайных факторов. Например, ошибки измерений, всякого рода отклонения от стандарта являются нормально распределёнными случайными величинами.

Пример 2. Пусть случайная величина X равномерно распределена на промежутке $\left[a,b\right]$, при этом математическое ожидание $M\left(X\right)=3$, а дисперсия $D\left(X\right)=\frac{16}{3}$. Определить:

а) числа $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; б) плотность распределения $\boldsymbol{f(x)}$ и функцию распределения $\boldsymbol{F(x)}$; в) вероятность события $X \in [0,5]$.

Решение. а) Используя условия примера и вид $M(X)$ и $D(X)$ для равномерного распределения на $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, запишем систему уравнений и найдём значения $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{cases} M(X) = \dfrac{a+b}{2} = 3 \\ D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ b-a=8 \end{cases} \Rightarrow a=-1,\ b=7 \cdot$$

б) Плотности распределения и функция распределения при таких $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ имеют вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{1}{8}, & -1 \le x \le 7, \\ 0, & x > 7; \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0\ , & x < -1, \\ \dfrac{x+1}{8}\ , & -1 \le x \le 7, \\ 1\ , & x > 7. \end{cases}$$

в) Искомая вероятность равна

$$P(0 \le X \le 5) = F(5) - F(0) = \frac{5+1}{8} - \frac{0+1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Пример 3. Предположим, что величина X имеет показательное распределение с параметром λ и математическим ожиданием $M(X) = 0{,}2$. Найти: а) параметр λ; б) дисперсию $D(X)$;

в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность того, что значение случайной величины X будет принадлежать отрезку $[0;\ 0{,}2]$.

Решение. а) Так как для показательного распределения $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, то $\lambda = \dfrac{1}{M(X)} = \dfrac{1}{0{,}2} = 5$.

б) $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$.

в) Функции $f(x)$ и $F(x)$ показательного распределения с параметром $\lambda = 5$ имеют вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 5e^{-5x}, & x\ge 0;\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-5x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

г) $P(0\le X\le 0{,}2)=F(0{,}2)-F(0)=1-e^{-5\cdot 0{,}2}-0=1-\dfrac{1}{e}\approx 0{,}63$.

Пример 4. Случайная величина $X\in N(a,\sigma)$. Даны математическое ожидание $M(X)=1$ и дисперсия $D(X)=1$. Найти: а) параметры a и σ, б) вероятность $P(-3\le X\le 0{,}5)$;

в) значение x из условия $P(X\ge x)=0{,}1$.

Решение. а) У нормально распределённой случайной величины X

$$a=M(X)=1,\quad \sigma=\sqrt{D(X)}=1\,.$$

б) По формуле $P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ получим $P(-3\le X\le 0{,}5)=\Phi\left(\dfrac{0{,}5-1}{1}\right)-\Phi\left(\dfrac{-3-1}{1}\right)=$

$$=\Phi(-0{,}5)-\Phi(-4)=-\Phi(0{,}5)+\Phi(4)\approx -0{,}19+0{,}50=0{,}31\,.$$

в) Выполним равносильные преобразования:

$$P(X\ge x)=0{,}1\Leftrightarrow P(x\le X<+\infty)=0{,}1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi(+\infty)-\Phi\left(\frac{x-1}{1}\right)=0{,}1\Leftrightarrow \Phi(x-1)=0{,}4.$$

С помощью таблицы функции Лапласа находим

$$x-1\approx 1{,}28\Rightarrow x\approx 2{,}28\,.$$

Варианты задания по теме 7

7.1 1) Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c\cdot(x+3), & 1 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$;
в) $P(0 < X < 2)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[1, b]$. Известно, что $M(X)=4$. Найти: а) значение параметра b; б) $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[1,5]$.

7.2 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1 \\ c\cdot(1+x), & -1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $f(x)$;
в) $P(1 < X < 2{,}5)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X показательно распределена с параметром λ. Известно, что $D(X)=0{,}25$. Найти: а) параметр λ; б) $M(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[1, 2]$.

7.3 1) Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot x^3, & x \in (0, 2] \\ 0, & x \notin (0, 2] \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$; в) $P(1 < X < 3)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Дано: случайная величина $X \in N(a, \sigma)$, $M(X) = 0$, $P(|X - a| < 2) = 0,34$. Найти: а) параметры a и σ; б) $D(X)$;
в) $P(0 < X < 3)$; г) значение x из условия $P(X \ge x) = 0,003$.

7.4 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0,5 \\ c \cdot (2x - 1), & 0,5 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $f(x)$;
в) $P(X < 3)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a, 3]$. Известно, что $D(X) = \frac{1}{3}$. Найти: а) значение параметра a; б) $M(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[1,5;\ 2,25]$.

7.5 1) Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ c \cdot (x - 2), & 2 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$;
в) $P(1 < X < 3)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X показательно распределена с параметром λ. Известно, что $P(X < 2) = \frac{e - 1}{e}$. Найти: а) параметр λ; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[1, 4]$.

7.6 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ c\cdot(1-x^2), & -1<x\le 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $f(x)$;
в) $P(X<-0,5)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Дано: случайная величина $X\in N(a,\sigma)$, $D(X)=2,25$, $P(X<1)=0,08$. Найти: а) параметры a и σ; б) $M(X)$;
в) $P(|X-a|<1)$; г) значение x из условия $P(X\ge x)=0,05$.

7.7 1) Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot(x-1)^2, & x\in(1;2] \\ 0, & x\notin(1;2] \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$;
в) $P(X>1,5)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[3,b]$. Известно, что $D(X)=\dfrac{3}{4}$. Найти: а) значение параметра b; б) $M(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[4,6]$.

7.8 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -5 \\ c\cdot(x+5), & -5 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $f(x)$; в) $P(0 < X < 4)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X показательно распределена с параметром λ. Известно, что $P(X \ge 1)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$. Найти: а) параметр λ; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0; 0,5]$.

7.9 1) Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot x^2, & x \in (0,5] \\ 0, & x \notin (0,5] \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$;
в) $P(2 < X < 6)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью распределения $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}$. Найти: а) параметры a и σ; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) $P(0 < X < 2)$; г) значение x из условия $P(X < x)=0,115$.

7.10 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c\cdot\left(1-x^3\right), & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $f(x)$; в) $P\left(1,5 < X < 2\right)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a, 5]$. Известно, что $M(X)=3$. Найти: а) значение параметра a; б) $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0, 2]$.

7.11 1) Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c\cdot(x-0,5), & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}\cdot$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$; в) $P(X > 1,5)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X показательно распределена с параметром λ. Известно, что $M(X)+2D(X)=1$. Найти: а) параметр λ; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[1, 5]$.

7.12 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c\cdot x^2, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $f(x)$; в) $P(X<1)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Дано: случайная величина $X \in N(-2,\sigma)$, $P(X<-1,5)=0,94$. Найти: а) параметр σ; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) $P(|X-a|<2)$; г) значение x из условия $P(X \ge x)=0,007$.

7.13 1) Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2 \\ c\cdot(x-1), & 2<x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$; в) $P(X>3)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a,b]$. Известно, что $M(X)=4$, а $P(a\le X\le 5)=0,75$. Найти: а) значения параметров a, b; б) $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[-1,2]$.

7.14 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ c\cdot x^3, & 0<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $f(x)$; в) $P(1<X<2)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X показательно распределена с параметром λ. Известно, что $\sigma(X)=0,5$. Найти: а) параметр λ; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию

распределения $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$; г) вероятность попадания случайной величины $\boldsymbol{X}$ на отрезок $[0,25;1]$.

7.15 1) Случайная величина $\boldsymbol{X}$ имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot(x+1), & x\in(-1,1] \\ 0, & x\notin(-1,1] \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$; в) $P(X>0)$; г) $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})$ и $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$.

2) Дано: случайная величина $X\in N(a,\sigma)$, $M(X)=-2$, $D(X)=4$. Найти: а) параметры a и σ, б) вероятности $P(-5<X<-2)$ и $P(|X-a|<6)$; в) значение x из условия $P(X\geq x)=0,05$.

7.16 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 1 \\ c\cdot(x-1)^3, & 1<x\leq 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$; в) $P(0<X<1,5)$; г) $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})$ и $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$.

2) Случайная величина $\boldsymbol{X}$ равномерно распределена на отрезке $[a,b]$. Известно, что $D(X)=\dfrac{4}{3}$, а $P(2\leq X\leq b)=0,25$. Найти: а) значения параметров a, b; б) $M(X)$; в) плотность распределения $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и функцию распределения $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$; г) вероятность попадания случайной величины $\boldsymbol{X}$ на отрезок $[1,5]$.

7.17 1) Случайная величина $\boldsymbol{X}$ имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot(x+1)^2, & x\in(0,1] \\ 0, & x\notin(0,1] \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$; в) $P(X>0,5)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X показательно распределена с параметром λ. Известно, что $P(0<X<3)=1-\frac{1}{e^2}$. Найти: а) параметр λ; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[-2,2]$.

7.18 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ c\cdot(x+1)^2, & -1<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $f(x)$; в) $P(0<X<1)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Дано: случайная величина $X\in N(a,\sigma)$, $M(X)=2$, $D(X)=1,69$. Найти: а) параметры a и σ, б) вероятности $P(1<X<3)$ и $P(|X-a|<2,6)$; в) значение x из условия $P(X\ge x)=0,01$.

7.19 1) Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot(x+4), & x\in(0,2] \\ 0, & x\notin(0,2] \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$; в) $P(X<1)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a,b]$. Известно, что $P(X<3)=\frac{1}{2}$, а $P(X\geq 5)=\frac{1}{6}$. Найти: а) значения параметров a, b; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[-1,1]$.

7.20 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 2\\ c\cdot(x-2)^2, & 2<x\leq 4\\ 1, & x>4\end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $f(x)$; в) $P(0<X<3)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X показательно распределена с параметром λ. Известно, что $2M(X)-D(X)=1$. Найти:

а) параметр λ; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[-0{,}5; 2{,}5]$.

7.21 1) Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}c\cdot(2x-1), & x\in(1,2]\\ 0, & x\notin(1,2]\end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$; в) $P(X>0{,}5)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Дано: случайная величина $X\in N(a,\sigma)$, $M(X)=2$, $D(X)=9$. Найти: а) параметры a и σ; б) вероятности $P(1{,}5<X<4)$ и $P(|X-a|<1)$; в) значение x из условия $P(X\geq x)=0{,}001$.

7.22 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -2 \\ c\cdot(x-2), & -2 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $f(x)$; в) $P(X<0)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[2, b]$. Известно, что $P(X<5)=\frac{3}{4}$. Найти: а) значения параметров a, b; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0, 3]$.

7.23 1) Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot(3x+1), & x\in(0,3] \\ 0, & x\notin(0,3] \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$; в) $P(X<2)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X показательно распределена с параметром λ. Известно, что $M(X)=2-\lambda$. Найти: а) параметр λ; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[-1, 3]$.

7.24 1) Задана функция распределения величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -8 \\ c\cdot(x+8), & -8 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) плотность распределения $f(x)$; в) $P(X>0)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Дано: случайная величина $X \in N(a, \sigma)$, $M(X) = 3$, $D(X) = 1,44$. Найти: а) параметры a и σ, б) вероятности $P(0,5 < X < 2)$ и $P(|X - a| < 3,6)$; в) значение x из условия $P(X \geq x) = 0,04$.

7.25 1) Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (x+3)^2, & x \in (-1, 2] \\ 0, & x \notin (-1, 2] \end{cases}.$$

Найти: а) число c; б) функцию распределения $F(x)$; в) $P(0 < X < 1)$; г) $M(X)$ и $D(X)$.

2) Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[1, b]$. Известно, что $P(X \geq 7) = \frac{1}{4}$. Найти: а) значения параметров a, b; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) плотность распределения $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$; г) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[1, 3]$.

Тема 8. Система двух дискретных случайных величин

В одном и том же опыте можно рассматривать и изучать несколько случайных величин. Например, осуществим опыт: из множества чисел ***1, 2, 3*** наугад выберем с повторением два числа. Можно рассмотреть дискретную случайную величину $\boldsymbol{X}$ – число выбранных единиц, и дискретную случайную величину $\boldsymbol{Y}$ – число нечётных чисел среди выбранных. В дальнейшем ограничимся только случаем *двух дискретных* случайных величин.

Система случайных величин $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ (или, по-другому, двумерная случайная величина $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$) считается заданной, если указан её совместный *закон распределения*: известны её возможные значения $\left(x_i, y_j\right)$ и известны вероятности $p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$. Запись $\left(X = x_i, Y = y_j\right)$ соответствует произведению событий $\left\{X = x_i\right\}$ и $\left\{Y = y_j\right\}$. Очевидно, что должно выполняться условие $\sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = 1$, где суммирование производится по всем возможным значениям индексов i и j. Будем предполагать, что все возможные значения x_i для $\boldsymbol{X}$ различные и расположены в порядке возрастания, т. е. $x_i < x_{i+1}$. Аналогично для $\boldsymbol{Y}$.

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ можно записать в виде таблицы 1:

Таблица 1

X \ Y	y_1	y_2	…	y_j	…
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…
…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…
…	…	…	…	…	…

Найдём законы распределения для каждой из величин $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ в отдельности из рассмотренной таблицы. Эта задача решается довольно просто. Для этого, представим событие $\{X = x_i\}$ в виде: $\{X = x_i\} = \{X = x_i, Y = y_1\} +$

$$+\{X = x_i, Y = y_2\} + \dots + \{X = x_i, Y = y_j\} + \dots ,$$

заметив, что все события в правой части несовместные. Поэтому,

$$P(X = x_i) = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ij} + \dots = \sum_j p_{ij} = p(x_i), \; i = 1, 2, \dots$$

(сумма вероятностей по i-й строке).

Получен закон распределения величины X, который можно записать в виде таблицы 2:

Таблица 2

X	x_1	x_2	…	x_i	…
P	$p(x_1)$	$p(x_2)$	…	$p(x_i)$	…

Аналогично находится закон распределения величины Y:

Таблица 3

Y	y_1	y_2	…	y_j	…
P	$p(y_1)$	$p(y_2)$	…	$p(y_j)$	…

Здесь $p(y_j) = P(Y = y_j) = p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{ij} + \dots = \sum_i p_{ij}$, $j = 1, 2, \dots$

(сумма вероятностей по j-му столбцу).

Отметим, что из отдельных законов распределения для X и для Y получить закон распределения для (X, Y) в общем случае нельзя.

Важным является случай, когда случайные события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимые для любых действительных чисел x и y. В этом случае и случайные величины X и Y называются *независимыми*. Если же для некоторых x, y события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ зависимы, то и случайные величины X и Y называются *зависимыми*, между ними существует связь.

Для двумерной дискретной величины (X, Y) *условие независимости* величин X и Y можно записать в виде

$$P\left(X=x_i, Y=y_j\right)=P\left(X=x_i\right)\cdot P\left(Y=y_j\right), \text{ т. е. } p_{ij}=p\left(x_i\right)\cdot p\left(y_j\right).$$

В этом случае знание отдельных законов распределения для X и для Y достаточно для получения закона распределения для системы (X, Y).

Упорядоченная пара $\left(M(X), M(Y)\right)$ называется *математическим ожиданием* или *центром распределения* двумерной случайной величины (X, Y).

Простейшей характеристикой связи между случайными величинами X и Y служит *коэффициент корреляции*

$$r(X,Y)=\frac{M(X\cdot Y)-M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Если $r(X,Y)\neq 0$, то случайные величины X и Y называются *коррелированными* величинами. В противном случае их называют *некоррелированными*.

Верны утверждения:

1) две коррелированные величины являются зависимыми;

2) две некоррелированные величины могут быть как зависимыми, так и независимыми.

Пример 1. Из множества чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6$ наугад выбираются с повторением два числа. Рассмотрим дискретную случайную величину X – число выбранных единиц и дискретную случайную величину Y – число чётных чисел среди выбранных. Определить:

а) законы распределения для X и Y;

б) закон распределения двумерной величины (X, Y);

в) основные характеристики: $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $r(X, Y)$.

Решение. а) Множества возможных значений для X и Y совпадают, так как состоят из чисел $0, 1, 2$.

Случайная величина X имеет биномиальное распределение с вероятностью успеха (появление единицы) $p=\frac{1}{6}$ и числом испытаний $n = 2$. Закон распределения для X можно записать в виде

$$P(X = i) = C_2^i \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{2-i}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Вычислим эти вероятности и составим ряд распределения для X:

X	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Случайная величина Y также имеет биномиальное распределение с вероятностью успеха (появление чётной цифры) $p = \frac{1}{2}$ и числом испытаний $n = 2$. Значит,

$$P(Y = j) = C_2^j \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-j} = C_2^j \cdot \frac{1}{4}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Поэтому,

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

б) Вычислим вероятности p_{1j}, учитывая, что случайные величины X и Y являются зависимыми:

$$p_{ij} = P(X = i, Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j \mid X = i).$$

Имеем,

$$p_{0j} = P(X = 0) \cdot P(Y = j \mid X = 0) = \frac{25}{36} \cdot C_2^j \left(\frac{3}{5}\right)^j \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2-j},$$

так как при условии $\{X = 0\}$ (единицы нет) вероятность появления чётной цифры для каждого числа увеличилась и стала равной $\frac{3}{5}$. Итак,

$$p_{00} = \frac{25}{36} \cdot \frac{4}{25} = \frac{1}{9}, \quad p_{01} = \frac{25}{36} \cdot 2 \cdot \frac{6}{25} = \frac{1}{3}, \quad p_{02} = \frac{25}{36} \cdot \frac{9}{25} = \frac{1}{4}.$$

Контроль: $p_{00}+p_{01}+p_{02}=\frac{25}{36}=P\left(X=0\right)$.

При вычислении вероятностей p_{1j} нужно учесть, что при двух выборах числа один раз появилась единица. Поэтому

$$p_{10}=P\left(X=1\right)\cdot P\left(Y=0\,|\,X=1\right)=\frac{10}{36}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{9};$$

$$p_{11}=P\left(X=1\right)\cdot P\left(Y=1\,|\,X=1\right)=\frac{10}{36}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{6};$$

$$p_{12}=P\left(X=1\right)\cdot P\left(Y=2\,|\,X=1\right)=\frac{10}{36}\cdot 0=0.$$

При вычислении p_{2j} учтём, что при двух выборах числа появились две единицы, поэтому

$$p_{20}=P\left(X=2\right)\cdot P\left(Y=0\,|\,X=2\right)=\frac{1}{36}\cdot 1=\frac{1}{36};$$

$p_{21}=p_{22}=0$ (так как соответствующие события невозможны).

Получили закон распределения для (***X***, ***Y***):

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

в) Используя полученные законы распределения для ***X*** и ***Y***, вычислим:

$$M\left(X\right)=\sum_{i=0}^{2} i\cdot P\left(X=i\right)=0\cdot\frac{25}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+2\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{3};$$

$$M\left(Y\right)=\sum_{j=0}^{2} j\cdot P\left(Y=j\right)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1;$$

$$D(X)=\sum_{i=0}^{2} i^2\cdot P(X=i)-M^2(X)=0^2\cdot\frac{25}{36}+1^2\cdot\frac{10}{36}+2^2\cdot\frac{1}{36}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{18};$$

$$D(Y)=\sum_{j=0}^{2} j^2\cdot P(Y=j)-M^2(Y)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{4}-1^2=\frac{1}{2}.$$

$$M(X\cdot Y)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} i\cdot j\cdot P(X=i,Y=j)=0\cdot 0\cdot\frac{1}{9}+0\cdot 1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot 2\cdot\frac{1}{4}+$$

$$+1\cdot 0\cdot\frac{1}{9}+1\cdot 1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot 2\cdot 0+2\cdot 0\cdot\frac{1}{36}+2\cdot 1\cdot 0+2\cdot 2\cdot 0=\frac{1}{6}.$$

Итак,

$$r(X,Y)=\frac{M(X\cdot Y)-M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\cdot 1}{\sqrt{\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\approx -0,45\ .$$

Варианты задания по теме 8

8.1 В ящике ***3*** занумерованных шара (номера ***1, 2, 3)***. Наугад берут ***2*** шара. Случайные величины:

X – сумма очков;

$$Y=\begin{cases} 1\ , & \text{если произведение очков нечётное;}\\ 0\ , & \text{иначе.}\end{cases}$$

Определить:

а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;

б) закон распределения для системы (***X, Y***);

в) коэффициент корреляции ***r***(***X, Y***).

8.2 Из полного набора шахматных фигур (***32*** фигуры) наугад взяли ***2*** фигуры. Случайные величины: ***X*** – число белых фигур; ***Y*** – число коней в выборке.

Определить:

а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;

б) закон распределения для системы (***X, Y***);

в) коэффициент корреляции ***r***(***X, Y***).

8.3 В ящике $\boldsymbol{1}$ белый и $\boldsymbol{2}$ чёрных шара. Наугад взяли $\boldsymbol{2}$ шара. Случайные величины: $\boldsymbol{X}$ – число чёрных шаров; $\boldsymbol{Y}$ – число белых шаров среди выбранных.

Определить:

а) отдельные законы распределения для $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$;

б) закон распределения для системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$;

в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.4 Имеется лотерея из $\boldsymbol{10}$ билетов. Разыгрываются $\boldsymbol{2}$ выигрыша: один в $\boldsymbol{3000}$ рублей, а второй в $\boldsymbol{1000}$ рублей. Куплено $\boldsymbol{2}$ билета. Случайные величины: $\boldsymbol{X}$ – размер выигрыша на 1-й билет; $\boldsymbol{Y}$ – размер выигрыша на 2-й билет.

Определить:

а) отдельные законы распределения для $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$;

б) закон распределения для системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$;

в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.5 Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень независимо друг от друга. Вероятность промаха 1-м стрелком равна $\boldsymbol{0{,}3}$, а 2-й стрелок попадает с вероятностью $\boldsymbol{0{,}8}$. Случайные величины: $\boldsymbol{X} = \begin{cases} \boldsymbol{1}, & \text{если произошло х отя бы одно попадание;} \\ \boldsymbol{0}, & \text{иначе,} \end{cases}$

$\boldsymbol{Y}$ – число попаданий.

Определить:

а) отдельные законы распределения для $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$;

б) закон распределения для системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$;

в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.6 Два раза подброшена монета. Случайные величины: $\boldsymbol{X}$ – число выпадений «герба»; $\boldsymbol{Y}$ – число одинаковых результатов («герб» – «герб», либо «цифра» – «цифра»).

Определить:

а) отдельные законы распределения для $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$;

б) закон распределения для системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$;

в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.7 Вероятность попадания мячом при одном броске равна ***0,3***. Сделано ***2*** броска. Случайные величины: ***X*** – число попаданий; ***Y*** – разность между числом попаданий и промахов.

Определить:

а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;

б) закон распределения для системы (***X, Y***);

в) коэффициент корреляции ***r***(***X, Y***).

8.8 Два предмета наугад распределяются по трём ящикам. Случайные величины: ***X*** – число предметов в третьем ящике;

Y – число пустых ящиков.

Определить:

а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;

б) закон распределения для системы (***X, Y***);

в) коэффициент корреляции ***r***(***X, Y***).

8.9 В кармане ***3*** монеты: ***1*** рубль, ***5*** рублей и ***10*** рублей. Наугад вытаскивают ***2*** монеты. Случайные величины: ***X*** – сумма (в рублях); $\boldsymbol{Y} = \begin{cases} \boldsymbol{1}, & \text{если произведение цифр на монетах чётное;} \\ \boldsymbol{0}, & \text{иначе.} \end{cases}$

Определить:

а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;

б) закон распределения для системы (***X, Y***);

в) коэффициент корреляции ***r***(***X, Y***).

8.10 Сделано ***3*** выстрела по удаляющейся цели. Вероятность попадания при 1-м выстреле равна ***0,7***, а при каждом последующем выстреле уменьшается на ***0,2***. Случайные величины:

X – число попаданий; ***Y*** – число выстрелов до первого промаха.

Определить:

а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;

б) закон распределения для системы (***X, Y***);

в) коэффициент корреляции ***r***(***X, Y***).

8.11 Из полного набора костей домино (***28*** штук) наугад взяли ***2*** кости. Случайные величины: ***X*** – число дублей в выборке;

$$\boldsymbol{Y} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \text{если общая сумма очков меньше четырёх;} \\ \boldsymbol{1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определить:
а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;
б) закон распределения для системы (***X***, ***Y***);
в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.12 Бросаются ***2*** игральные кости. Случайные величины:

$$X = \begin{cases} 0\ , & \text{если сумма очков меньше шести,} \\ 1\ , & \text{иначе,} \end{cases}$$

Y – число выпадений «шестёрки».
Определить:
а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;
б) закон распределения для системы (***X***, ***Y***);
в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.13 Вероятность попадания мячом при одном броске равна ***0,6***. Сделано ***2*** броска. Случайные величины: ***X*** – число промахов; ***Y*** – произведение числа попаданий и числа промахов.
Определить:
а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;
б) закон распределения для системы (***X***, ***Y***);
в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.14 В ящике ***2*** белых и ***2*** чёрных шара. Наугад выбирают ***2*** шара. Случайные величины: $X = \begin{cases} 1\ , & \text{если нет белых шаров,} \\ 0\ , & \text{иначе;} \end{cases}$

Y – число чёрных шаров.
Определить:
а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;
б) закон распределения для системы (***X***, ***Y***);
в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.15 Дважды бросается монета. Случайные величины:

$$X = \begin{cases} 0\ , & \text{если цифра появилась хотя бы один раз,} \\ 1\ , & \text{иначе;} \end{cases}$$

Y – число появлений «герба».
Определить:
а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;

б) закон распределения для системы (X, Y);
в) коэффициент корреляции $r(X, Y)$.

8.16 По мишени проводится ***2*** выстрела. Вероятность попадания при 1-м выстреле равна ***0,6***, а при 2-м равна ***0,8***. Случайные величины:

X – число промахов;

$$Y = \begin{cases} \boldsymbol{1}, & \text{если произошло только одно попадание;} \\ \boldsymbol{0}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определить:
а) отдельные законы распределения для X и Y;
б) закон распределения для системы (X, Y);
в) коэффициент корреляции $r(X, Y)$..

8.17 Имеется лотерея, состоящая из пяти билетов. Из них только ***2*** выигрышных: один в ***500*** рублей, а другой в ***1000*** рублей. Наугад взято два билета. Рассматриваются случайные величины: X – размер выигрыша (в рублях) на два билета; Y – размер выигрыша на первый билет.
Определить:
а) отдельные законы распределения для X и Y;
б) закон распределения для системы (X, Y);
в) коэффициент корреляции $r(X, Y)$.

8.18 Две игральные кости одновременно бросают один раз. Случайные величины: X – число выпадений чётного числа очков на игральных костях одновременно; Y – число выпадений «пятёрки».
Определить:
а) отдельные законы распределения для X и Y;
б) закон распределения для системы (X, Y);
в) коэффициент корреляции $r(X, Y)$.

8.19 Три раза бросается монета. Случайные величины:
X – модуль разности числа появлений «герба» и числа по-

явлений «цифры»; $\boldsymbol{Y}$ – произведение числа появлений «герба» и числа появлений «цифры».

Определить:

а) отдельные законы распределения для $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$;

б) закон распределения для системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$;

в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.20 Независимо друг от друга делаются два выстрела по мишени с вероятностью попадания при каждом выстреле $\boldsymbol{0{,}8}$. Рассматриваются случайные величины: $\boldsymbol{X}$ – разность между числом попаданий и числом промахов; $\boldsymbol{Y}$ – произведение числа попаданий и числа промахов.

Определить:

а) отдельные законы распределения для $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$;

б) закон распределения для системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$;

в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.21 Одна за другой бросаются $\boldsymbol{2}$ игральные кости. Случайные величины: $\boldsymbol{X}$ – число очков на 1-й кости; $\boldsymbol{Y}$ – максимальное из двух выпавших на костях чисел.

Определить:

а) отдельные законы распределения для $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$;

б) закон распределения для системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$;

в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.22 Три сувенира по жребию разыгрываются среди трёх человек. Случайные величины: $\boldsymbol{X}$ – число человек, не получивших сувениров; $\boldsymbol{Y}$ – число человек, получивших один сувенир.

Определить:

а) отдельные законы распределения для $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$;

б) закон распределения для системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$;

в) коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

8.23 По мишени производятся три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна $\boldsymbol{0{,}4}$, а при последующих выстрелах вероятность попадания каждый раз увеличивается на $\boldsymbol{0{,}2}$. Случайные величины: $\boldsymbol{X}$ – число попаданий;

$$\boldsymbol{Y} = \begin{cases} \boldsymbol{0}\ , & \text{если нет промахов;} \\ \boldsymbol{1}\ , & \text{если один промах;} \\ \boldsymbol{2}\ , & \text{в иных случаях.} \end{cases}$$

Определить:
а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;
б) закон распределения для системы (***X***, ***Y***);
в) коэффициент корреляции ***r***(***X***, ***Y***).

8.24 В ящике ***4*** пронумерованных шара (номера ***1***, ***2***, ***3***, ***4)***. Наугад берут ***2*** шара. Случайные величины:

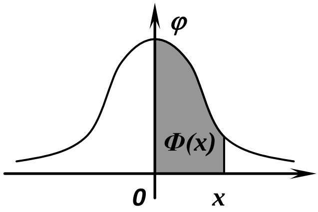
X – сумма очков;

$$\boldsymbol{Y} = \begin{cases} \boldsymbol{0}\ , & \text{если произведение очков чётное;} \\ \boldsymbol{1}\ , & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определить:
а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;
б) закон распределения для системы (***X***, ***Y***);
в) коэффициент корреляции ***r***(***X***, ***Y***).

8.25 Из колоды игральных карт (***36*** карт) наугад взяли две карты. Случайные величины: ***X*** – число карт пиковой масти;
Y – число тузов в выборке.
Определить:
а) отдельные законы распределения для ***X*** и ***Y***;
б) закон распределения для системы (***X***, ***Y***);
в) коэффициент корреляции ***r***(***X***, ***Y***).

Приложение. Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ и функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,dt$.



x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	**0,40**	0,3683	0,1554	**0,80**	0,2897	0,2881
01	3989	0040	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	**0,50**	0,3521	0,1915	**0,90**	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3186
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	98	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	**0,60**	0,3332	0,2257	**1,00**	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	**0,70**	0,3123	0,2580	**1,10**	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	3011	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,20	0,1942	0,3849	**1,60**	0,1109	0,4452	**2,40**	0,0224	0,4918
21	1919	3869	62	1074	4474	42	0213	4922
22	1895	3888	64	1040	4495	44	0203	4927
23	1872	3907	66	1006	4515	46	0194	4931
24	1849	3925	68	0973	4535	48	0184	4934
25	1826	3944	**1,70**	0,0940	0,4554	**2,50**	0175	4938
26	1804	3962	72	0909	4573	52	0167	4941
27	1781	3980	74	0878	4591	54	0158	4945
28	1758	3997	76	0848	4608	56	0151	4948
29	1736	4015	78	0818	4625	58	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	**1,80**	0,0790	0,4641	**2,60**	0,0136	0,4953
31	1691	4049	82	0761	4656	62	0129	4956
32	1669	4066	84	0734	4671	64	0122	4959
33	1647	4082	86	0707	4686	66	0116	4961
34	1626	4099	88	0681	4699	68	0110	4963
35	1604	4115	**1,90**	0,0656	0,4713	**2,70**	0104	4965
36	1582	4131	92	0632	4726	72	0099	4967
37	1561	4147	94	0608	4738	74	0093	4969
38	1539	4162	96	0584	4750	76	0088	4971
39	1518	4177	98	0562	4761	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	**2,00**	0,0540	0,4772	**2,80**	0,0079	0,4974
41	1476	4207	02	0519	4783	82	0075	4976
42	1456	4222	04	0498	4793	84	0071	4977
43	1435	4236	06	0478	4803	86	0067	4979
44	1415	4251	08	0459	4812	88	0063	4980
45	1394	4265	**2,10**	0440	4821	**2,90**	0060	4981
46	1374	4279	12	0422	4830	92	0056	4982
47	1354	4292	14	0404	4838	94	0053	4984
48	1334	4306	16	0387	4846	96	0050	4985
49	1315	4319	18	0371	4854	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	**2,20**	0,0355	0,4861	**3,00**	0,00443	0,49865
51	1276	4345	22	0339	4868	20	00238	49931
52	1257	4357	24	0325	4875	40	00132	49966
53	1238	4370	26	0310	4881	60	00061	49984
54	1219	4382	28	0297	4887	80	00029	49993
55	1200	4394	**2,30**	0283	4893	**4,00**	0,00013	0,499968
56	1182	4406	32	0270	4898	4,50	0,000016	0,499997
57	1163	4418	34	0258	4904	**5,00**	0,000002	0,499999
58	1145	4429	36	0246	4909			
59	1127	4441	38	0235	4913			

ЛИТЕРАТУРА

Учебники и учебные пособия

1. Бородин, А. Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики : учебное пособие [Электронный ресурс] / А. Н. Бородин. – 8-е изд., стер. – СПб. : Издательство «Лань», 2011. – 256 с. – Доступ из ЭБС «Лань». – Режим доступа: http://e.lanbook.com/

2. Горлач, Б. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие [Электронный ресурс] / Б. А. Горлач. – СПб. : Издательство «Лань», 2013. – 320 с. – Доступ из ЭБС «Лань». – Режим доступа : http://e.lanbook.com/

3. Зайцев, В. П. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие [Электронный ресурс] / В. П. Зайцев. – Барнаул : Изд-во АлтГТУ, 2014. – 268 с. – Доступ из ЭБС АлтГТУ. – Режим доступа : http://new.elib.altstu.ru/eum/download/vm/Zaytev-tvims.pdf

4. Солодовников, А. С. Теория вероятностей : учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. / А. С. Солодовников. – М. : Вербум, 1999. – 208 с.

5. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина. – М. : Инфра–М, 1997. – 302 с.

Задачники

1. Агапов, Г. И. Задачник по теории вероятностей : учеб. пособие для вузов / Г. И. Агапов. – 2-е изд., доп. – М. : Высш. шк., 1994. – 112 с.

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1979. – 333 с.

3. Сборник задач по математике. Специальные курсы / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича : в 3 т., Т. 3. – М. : Наука, 1984. – 608 с.