МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. И. И. ПОЛЗУНОВА»

Факультет информационных технологий

Кафедра Прикладная математика

А.В. Сорокин

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА»

Методические материалы к выполнению лабораторной работы

Барнаул 2022

УДК 681.3

Сорокин А.В. Транспортная задача. Методические материалы для лабораторной работы. - Алт. госуд. технич. ун-т им. И. И. Ползунова. - Барнаул, 2022. – 21 с.

В методических пособии изложены материалы по решению «Транспортных задач». Специально созданные и подобранные примеры позволяют в полной мере изучить основные особенности построения математических моделей, описывающих транспортные задачи. Методические материалы предназначены для студентов, обучающихся по направлению "Программная инженерия", "Информатика и вычислительная техника".

Содержание

1. Основные сведения

Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления A_1, A_2, ..., A_m в n пунктов назначения B_1, B_2, ..., B_n,.

В качестве критерия оптимальности (целевая функция) обычно задается минимальная суммарная стоимость перевозок всего груза или минимальная суммарная транспортная работа по доставке грузов, которая может быть пропорциональна времени доставки грузов потребителям или расстоянию между поставщиками и потребителями. Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная суммарная стоимость перевозок всего груза.

Обозначим C_j тарифы перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через a_i - запасы груза в i-ом пункте отправления, через b_j - потребности в грузе в j-ом пункте назначения, а через x_{ij} - количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Тогда математическая модель транспортной задачи состоит в определении минимального значения функции:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Поскольку переменные $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ удовлетворяют системам линейных уравнений (2) и (3) и условию неотрицательности (4), обеспечивается доставка необходимого количества груза в каждый из пунктов назначения, вывоз всего имеющегося груза из всех пунктов отправления, а также исключаются обратные перевозки.

Суммарное количество груза у поставщиков равна $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а суммарная потребность в грузе в пунктах назначения равна $\sum_{j=1}^{n} b_j$ единиц. Если суммарная потребность в грузе в пунктах назначения равна суммарному запасу груза в пунктах отправления, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \qquad (5)$$

то такая транспортная задача называется закрытой или сбалансированной. В противном случае - открытой или несбалансированной.

В случае превышения суммарного запаса над суммарной потребностью, т. е. если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

вводится фиктивный n+1-й потребитель (или пункт назначения) с потребностью, равной:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

а соответствующие транспортные тарифы от всех поставщиков до фиктивного потребителя полагаются равными нулю. Полученная задача становится закрытой транспортной задачей, для которой выполняется равенство (5).

В случае превышения суммарной потребности в грузе над суммарными запасами поставщиков, т. е. если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \,,$$

вводится фиктивный m+1-й пункт отправления с запасом груза в нем, равным:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \,,$$

а соответствующие транспортные тарифы от фиктивного поставщика до всех потребителей полагаются равными нулю. Полученная задача становится закрытой транспортной задачей, для которой выполняется равенство (5).

2. Пример

2.1. Постановка задачи

Четыре предприятия некоторого экономического района для производства продукции получают сырье от трех поставщиков. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 900, 600, 800 и 600 ед. Сырье сосредоточено у трех поставщиков, запасы у которых соответственно равны 600, 800 и 1000 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться от любого поставщика. Тарифы (стоимость перевозок единицы груза) перевозок cij (i - номер поставщика, j - номер потребителя) известны и задаются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Составить такой план перевозок, при котором суммарная стоимость всех перевозок будет минимальной.

2.2. Математическая модель

Обозначим через x_{ij} количество единиц сырья, перевозимого от i-го поставщика на j-е предприятие. Задача является открытой, так как сумма запасов грузов 600 + 800 + 1000 = 2400 у поставщиков не равна сумме потребностей грузов у потребителей: 900 + 600 + 800 + 600 = 2900. Так как потребности в грузах у потребителей превышают их запасы у поставщиков, данная транспортная задача является открытой. Для того чтобы она стала закрытой, вводим фиктивного поставщика с номером 4, у которого запас груза равен 2900-2400= 500. В этом случае суммарный запас у поставщиков станет равным 2900 и мы получим закрытую транспортную задачу. При этом все тарифы от фиктивного поставщика ко всем потребителям груза полагаются равными нулю. В матрице тарифов появится четвертая строка, в которой стоят все нули:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 600, \quad (6)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 800, \quad (7)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1000, \quad (8)$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 500, \quad (9)$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 900, \quad (10)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 600, \quad (11)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 800, \quad (12)$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 600, \quad (13)$$

$$x_{ij} > 0,\ i = 1, 2, 3, 4,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

При данном плане перевозок суммарная их стоимость составит (целевая функция):

$$F = 4\cdot x_{11} + 3\cdot x_{12} + 2\cdot x_{13} + 1\cdot x_{14} + 2\cdot x_{21} + 1\cdot x_{22} + 7\cdot x_{23} + 9\cdot x_{24} + 3\cdot x_{31} + \\ + 6\cdot x_{32} + 8\cdot x_{33} + 4\cdot x_{34} + 0\cdot x_{41} + 0\cdot x_{42} + 0\cdot x_{43} + 0\cdot x_{44} \to \min. \quad (14)$$

Таким образом, математическая постановка задачи состоит в нахождении такого неотрицательного решения системы линейных равенств-ограничений (6)-(13), при котором целевая функция (14) принимает минимальное значение.

3. Решение задачи средствами Microsoft Excel

Вызовите Microsoft Excel.

3.1. Задание исходных данных задачи

Начиная с ячейки с именем A1 на Листе окна Microsoft Excel постройте таблицу (см.рис. 1). Ячейки с адресами B4:E7 резервируются для переменных $x_{ij} > 0$, i =1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4 (рис. 1) − это изменяемые ячейки. В ячейках F4:F7 заносятся запасы грузов в пунктах отправления, включая и фиктивный, в ячейках B9:E9 заносятся потребности (спрос) в грузах в пунктах назначения.

После каждого занесения в ячейку числа или формулы необходимо нажимать клавишу Enter.

В ячейки с адресами B15:E18 занесены коэффициенты матрицы тарифов на перевозку грузов между всеми пунктами отправления и назначения. Четвертая строка этой матрицы (ячейки B18:E18) соответствует перевозкам от фиктивного поставщика.

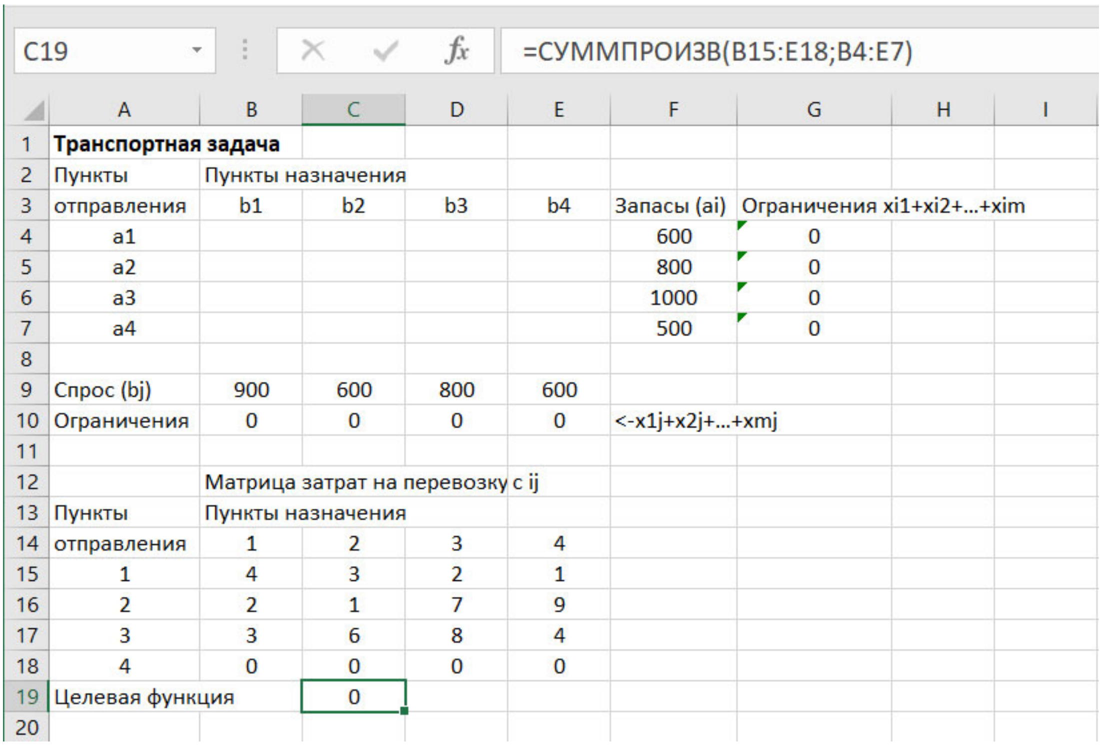
Ячейки G4:G7 содержат формулы для расчета ограничений (6)-(9).

Формула ограничения (6) занесена в ячейку G4 и имеет вид =СУММ(B4:E4). Соответственно ограничения (7), (8) и (9) занесены в ячейки G5, G6 и G7 в виде формул =СУММ(B5:E5), =СУММ(B6:E6) и =СУММ(B7:E7).

В ячейках B10:E10 содержатся формулы ограничений (10)-(13), которые соответственно имеют вид: =СУММ(B4:B7), =СУММ(C4:C7), =СУММ(D4:D7), =СУММ(E4:E7).

Формула для расчета целевой функции (14) занесена в ячейку C19 и имеет вид: =СУММПРОИЗВ(B15:E18;B4:E7). В эту же ячейку будет занесено вычисленное оптимальное значение целевой функции.

Занесение формул в ячейки может осуществляться как с клавиатуры, так и с помощью диалогового окна Мастер функций, вызываемого кнопкой *fx* строки формул.



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Транспортная задача**						
2	Пункты	Пункты назначения					
3	отправления	b1	b2	b3	b4	Запасы (ai)	Ограничения xi1+xi2+…+xim
4	a1					600	0
5	a2					800	0
6	a3					1000	0
7	a4					500	0
8							
9	Спрос (bj)	900	600	800	600		
10	Ограничения	0	0	0	0	<-x1j+x2j+…+xmj	
11							
12		Матрица затрат на перевозку с ij					
13	Пункты	Пункты назначения					
14	отправления	1	2	3	4		
15	1	4	3	2	1		
16	2	2	1	7	9		
17	3	3	6	8	4		
18	4	0	0	0	0		
19	Целевая функция		0				
20							

Рис. 1. Фрагмент Листа рабочей книги с исходными данными

3.2. Решение задачи с помощью надстройки Excel. Поиск решения

Поставить курсор мыши в ячейку C19, в которой будет содержаться вычисленное значение целевой функции, и нажать на левую кнопку мыши.

Войти в меню **«Данные»**, выбрать в нем «**Поиск решения**» и щелкнуть на нем левой кнопкой мыши. На экране появится диалоговое окно «**Поиск решения**» (рис. 2).

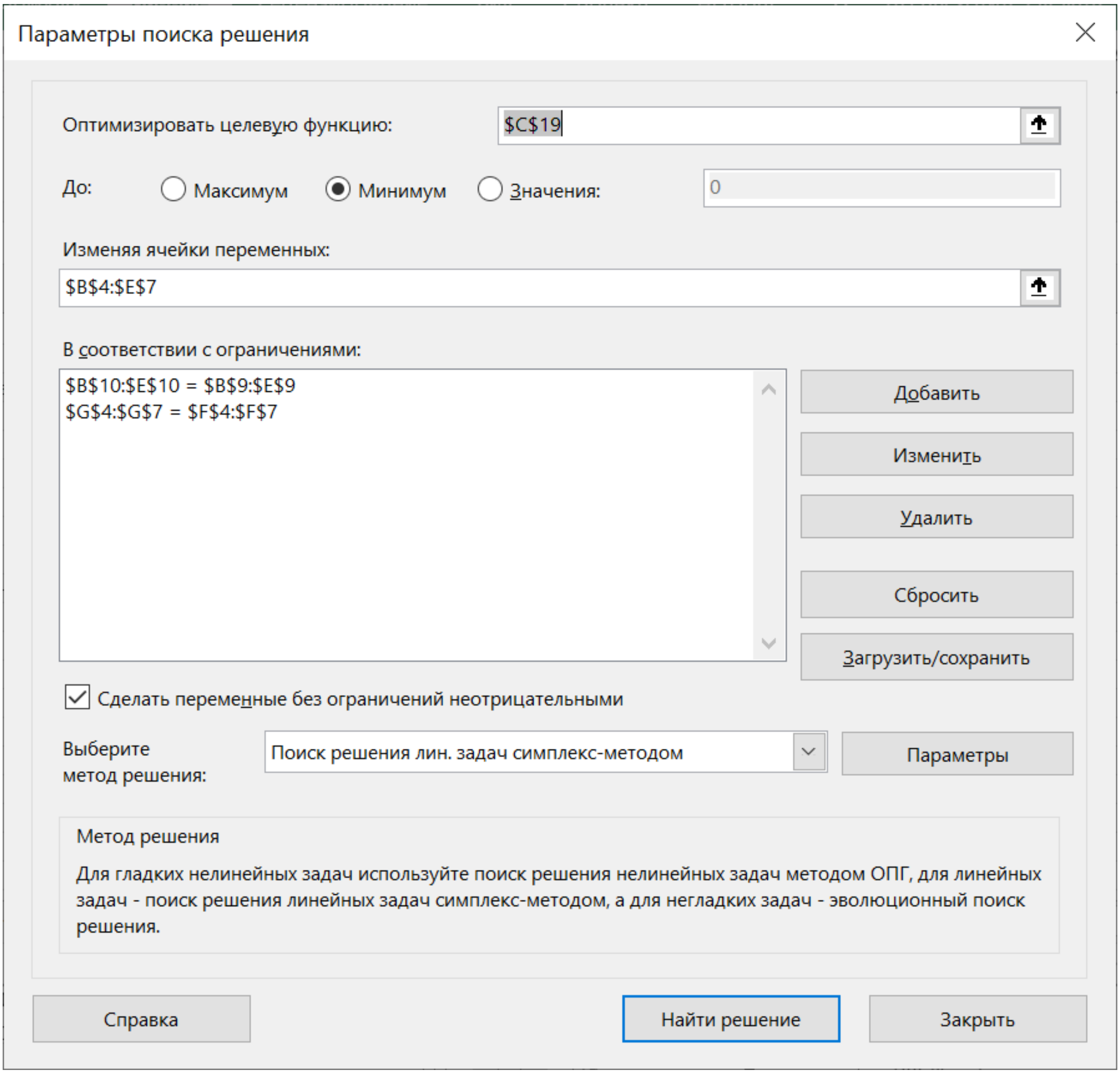


Рис. 2. Диалоговое окно «Поиск решения» с занесенными ограничениями

В поле «Установить целевую ячейку» заносится $C$19. Для этого проще всего установить курсор мыши внутрь ячейки в поле «Установить целевую ячейку», щелкнуть в ней левой кнопкой мыши, затем щелкнуть мышью на ячейке C19.

Поскольку ищется минимум целевой функции, то после слова «Равной» выделим «Минимальному значению», щелкнув в соответствующем кружочке мышью.

В поле «Изменяя ячейки» занесем диапазон $B$4:$E$7, так как именно эти ячейки отведены под значения вычисляемых переменных. Для этого поставим курсор в поле «Изменяя ячейки», затем переведем курсор на ячейку B4 и при нажатой левой кнопке мыши переведем курсор на ячейку E7. В поле «Изменяя ячейки» появится необходимый диапазон ячеек.

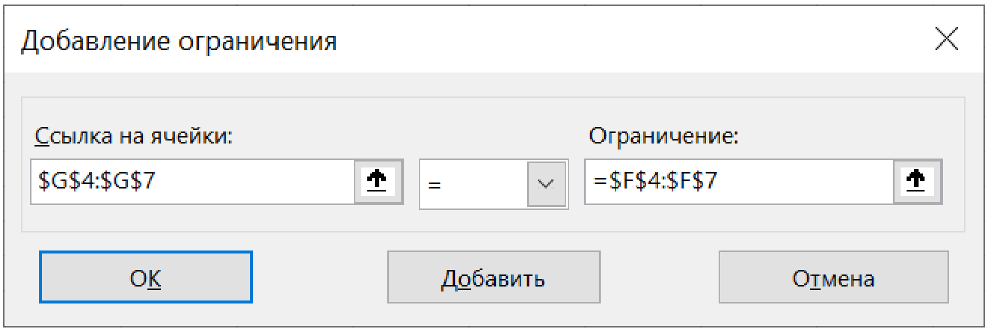


Рис. 3. Диалоговое окно «Добавление ограничения»

В поле «Ограничения» занесем ограничения (6)-(13). для этого щелкнем мышью на кнопке **«Добавить»**. Появится диалоговое окно **«Добавление ограничения»** (рис. 3). Например, второе ограничение (рис. 2) занесено следующим образом: в окне «Поиск решения» щелкнуть на кнопке **«Добавить»**. Откроется диалоговое окно «Добавление ограничения». В поле **«Ссылка на ячейки»** поставить курсор мыши и нажать на левую ее кнопку. Затем поставить курсор мыши на ячейку G4, где введено ограничение, и при нажатой кнопке мыши провести вплоть до ячейки с адресом G7. В среднем поле окна **«Добавление ограничения»** выбираем знак равенства, а в последнем поле описанным выше способом заносим ячейки F4:F7, содержащие величины запасов поставщиков. Аналогично заносятся и другие ограничения (рис. 2).

Снова в поле **«Поиск решения»** (рис. 2). В этом окне слева от поля «Сделать переменные без ограничений неотрицательными» поставьте галочку.

В поле **«Выберите метод решения»** выберите **«Метод решения лин. задач симплекс-методом».**

Щелкнуть мышью на кнопке **«Параметры»**. На экране появится диалоговое окно «Параметры поиска решения». В этом окне (рис. 4) во вкладке **«Все методы»**

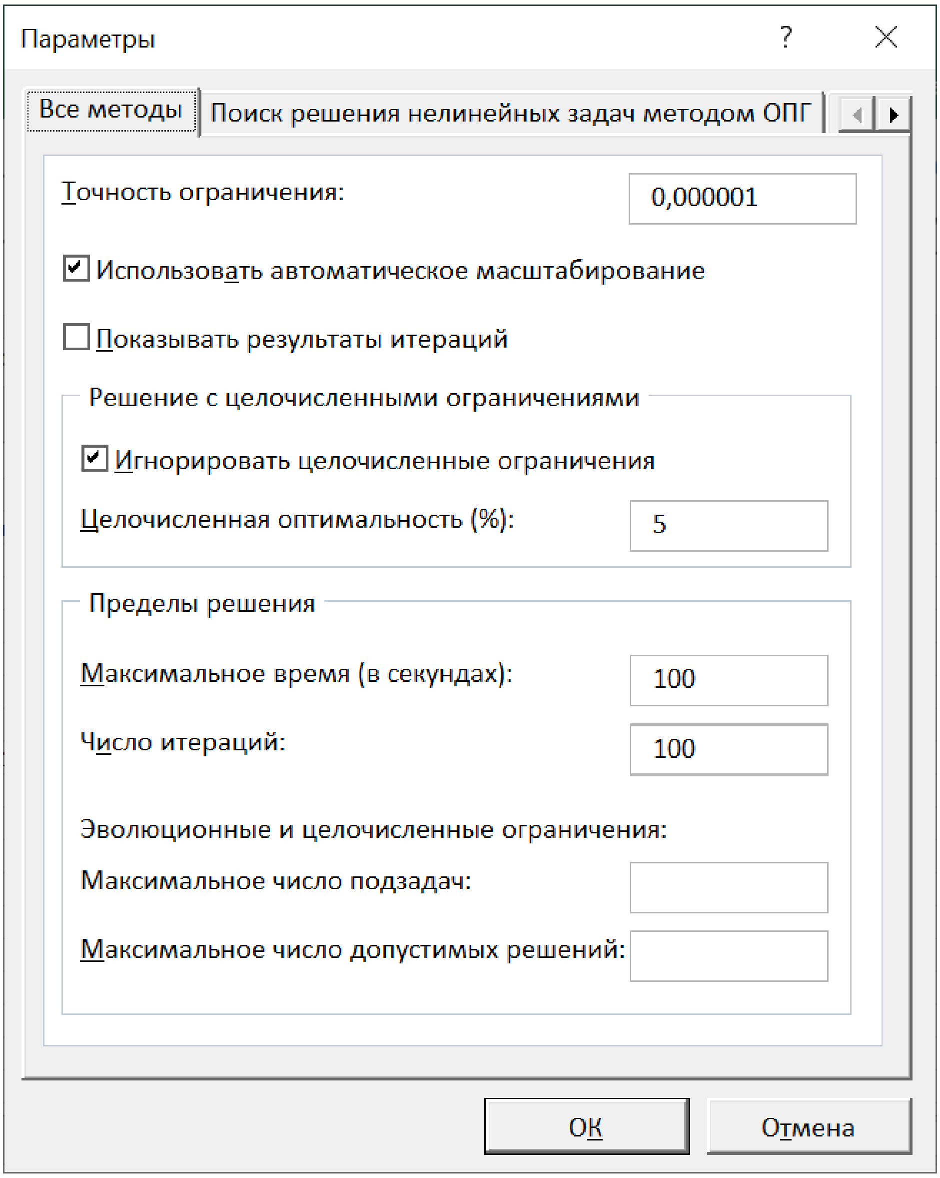


Рис. 4. Диалоговое окно «Параметры поиска решения»

устанавливаются параметры поиска решения, точно такие, как указаны на рисунке.

Точность решения: 0,000001. Поставьте галочки в полях: «Использовать автоматическое масштабирование», «Игнорировать целочисленные ограничения». Задайте пределы решения: «Максимальное время (в секундах)» -100, «Число итераций» -100.

Затем нужно щелкнуть на кнопке «ОК».

Снова попадаем в диалоговое окно **«Поиск решения».** В этом окне (рис. 2) щелкнем левой кнопкой мыши на кнопку «Найти решение». На экран выводится окно «Результаты поиска решения». Чтобы сохранить полученное решение, отметьте нажатием левой кнопки мыши кружок «Сохранить найденное решение» и затем нажмите кнопку «ОК».

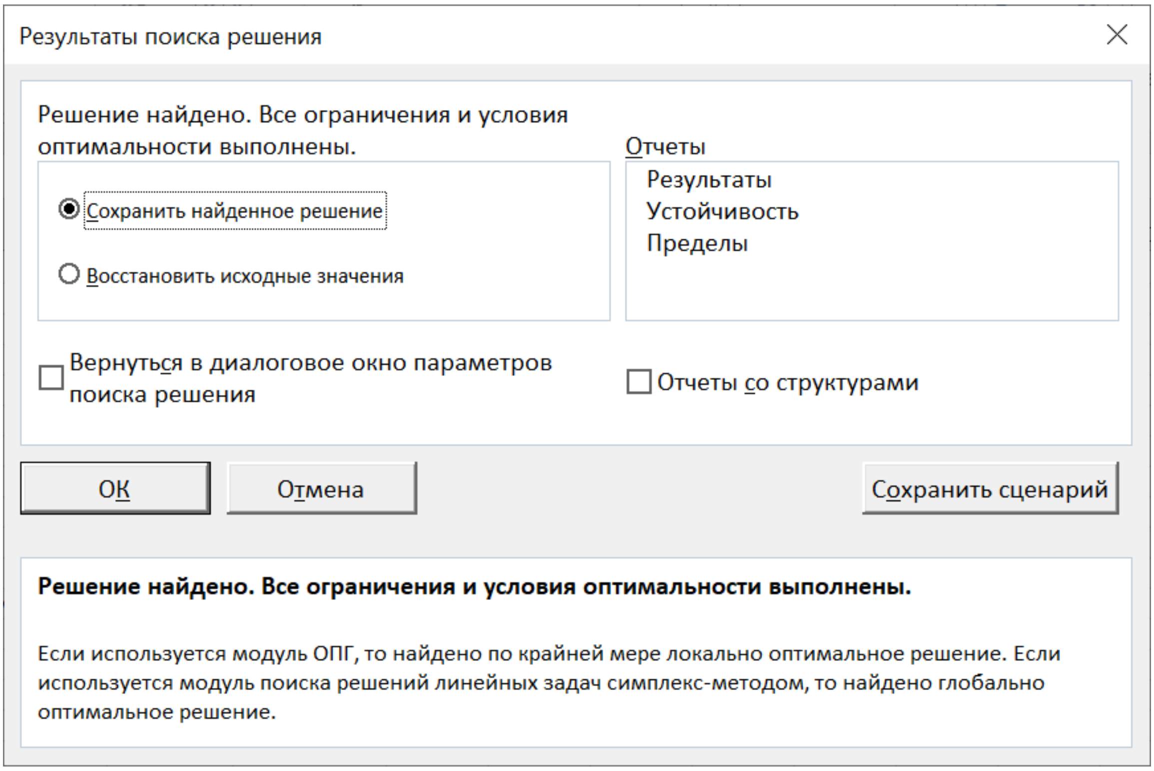


Рис. 5. Диалоговое окно «Результаты поиска решения»

Одновременно на Листе экрана также появятся результаты решения задачи (рис. 6): в столбце и строке Ограничения выводятся их рассчитанные значения; в ячейках B4:E7 содержатся значения рассчитанных переменных $x_{ij} > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3, 4$ - объемов перевозок от каждого пункта отправления к каждому пункту назначения; в ячейке с целевой функцией C19 - рассчитанное значение целевой функции.

Итак, найдено оптимальное решение: $F = 5200$, $x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 300$, $x_{14} = 300$, $x_{21} = 200$, $x_{22} = 600$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{31} = 700$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 0$, $x_{34} = 300$ и фиктивные переменные: $x_{41} = x_{42} = x_{44} = 0$, $x_{43} = 500$.

Замечание 1. Перед решением транспортной задачи необходимо сначала проверить, является ли транспортная задача открытой или закрытой. Если транспортная задача является открытой, то необходимо ввести фиктивного поставщика или фиктивного потребителя.

C19 =СУММПРОИЗВ(B15:E18;B4:E7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Транспортная задача**									
2	Пункты	Пункты назначения								
3	отправления	b1	b2	b3	b4	Запасы (ai)	Ограничения xi1+xi2+...+xim			
4	a1	0	0	300	300	600	600			
5	a2	200	600	0	0	800	800			
6	a3	700	0	0	300	1000	1000			
7	a4	0	0	500	0	500	500			
8										
9	Спрос (bj)	900	600	800	600					
10	Ограничения	900	600	800	600	<-x1j+x2j+...+xmj				
11										
12		Матрица затрат на перевозку с ij								
13	Пункты	Пункты назначения								
14	отправления	1	2	3	4					
15	1	4	3	2	1					
16	2	2	1	7	9					
17	3	3	6	8	4					
18	4	0	0	0	0					
19	Целевая функция		5200							
20										

Рис. 5. Результаты решения транспортной задачи в окне Microsoft Excel

Замечание 2. Оптимальное решение транспортной задачи при целочисленных правых частях ограничений всегда является целочисленным.

Замечание 3. В целевой функции

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

коэффициенты c_{ij}, могут быть как тарифами, так и расстояниями между пунктами отправления и получения грузов или временами доставки грузов. В двух последних случаях целевая функция представляет собой транспортную работу.

4. Задание к лабораторной работе

1. Изучить теорию по постановке задачи транспортной задачи и ее решению по теме 3. Транспортная задача.
2. Решить транспортную задачу для своего варианта применяя метода северо-западного угла или наименьшей стоимости и используя метод потенциалов. Если есть желание, то можете написать программу.
3. Решить транспортную задачу с использованием возможностей Microsoft Excel.
4. Оформить отчет о проделанной работе.

5. Варианты заданий к лабораторной работе

Задание 1. Продукты, находящиеся на четырех складах – С1, С2, С3, С4, необходимо развезти по пяти магазинам - М1, М2, М3, М4 и М5. Потребности этих магазинов в продуктах равны соответственно 15, 14, 25, 5 и 9 ед. Запасы продуктов на складах С1, С2, С3, С4 составляют соответственно 23, 15, 45, 15 ед. Тарифы по доставке продуктов (руб./ед. груза) приведены в таблице:

Склады	Магазины				
	М1	М2	М3	М4	М5
С1	10	3	4	5	3
С2	2		11	14	5
С3	4	13	3	2	8
С4	5	13	4	12	3

Составьте план перевозок продуктов, при котором суммарные расходы по их доставке будут минимальными.

Задание 2. Зерно, находящееся на четырех элеваторах - Э1, Э2, Э3, Э4, необходимо доставить на пять сельскохозяйственных предприятий для посева - СХП1, СХП2, СХП3, СХП4 и СХП5. Потребности в зерне сельскохозяйственных предприятий равны соответственно 100, 70, 30, 45 и 50 т. Запасы зерна на элеваторах Э1, Э2, Э3, Э4 составляют соответственно, 54, 32, 85, 162 т., Стоимость доставки одной тонны зерна (руб./т.) приведена в таблице

Элеваторы	Сельскохозяйственные предприятия				
	СХП1	СХП2	СХП3	СХП4	СХП5
Э1	12	14	32	20	3
Э2	8	10	12	24	12
Э3	6	8	12	24	8
Э4	10	18	4	8	9

Составьте оптимальный план перевозок зерна, при котором суммарные расходы по его доставке будут минимальными.

Задание 3. Груз, находящийся на четырех складах - 1, 2, 3, 4 необходимо доставить пяти потребителям - 1, 2, 3, 4 и 5. Потребность в грузе этих потребителей составляет соответственно 15, 10, 25, 5 и 9 т. Запасы груза на складах 1, 2, 3, 4 составляют соответственно 20, 15, 40, 15 т. Стоимость доставки 1 т груза задается матрицей (руб./т):

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Составьте оптимальный план перевозок груза, при котором суммарные расходы будут минимальными.

Задание 4. В области имеется три кирпичных завода - 1, 2 и 3, объем выпуска которых в сутки равен 60, 30 и 40 т. Заводы удовлетворяют потребность в кирпиче пяти строительных фирм - 1, 2, 3, 4 и 5 в количестве, соответственно равном 10, 20, 40, 30 и 65 т. Стоимость перевозок 1 т кирпича (руб./т) с заводов на фирмы задается матрицей:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 3 & 15 & 16 \\ 7 & 5 & 9 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 14 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Определите, с каких заводов, на какие фирмы и в каких объемах необходимо доставлять кирпич, чтобы суммарная стоимость перевозок была минимальной.

Задание 5. В пунктах А, Б, В и Г находятся соответственно 25, 36, 40 и 50 т горючего. В пунктах Е, Ж, З и К находятся потребители горючего, потребность которых составляет соответственно 20, 45, 15 и 25 т.

Стоимость перевозки 1 т горючего из пункта А в пункты Е, Ж, З и К составляет 5, 3, 7, 2 ден. ед./т; из пункта Б в пункты Е, Ж, З и К - 2, 6, 4, 5 ден. ед./т; из пункта В в пункты Е, Ж, З и К - 3, 7, 1, 9 ден. ед./т; из пункта Г в пункты Е, Ж, З и К - 6, 4, 8, 3 ден. ед./т.

Составьте план перевозок горючего, минимизирующий суммарную стоимость перевозок.

Задание 6. Для строительства пяти участков дороги необходимо завозить песок. Песок может быть доставлен из четырех карьеров. Расстояния от карьеров до участков дороги, а также объемы песка в карьерах и потребность в песке на каждом участке дороги приведены в таблице:

Карьеры	Расстояние от карьеров до различных участков дороги, км					Объем песка в карьерах, тыс. т
	1	2	3	4	5	
1	3	7	3	4	0	50
2	6	2	5	7	4	55
3	8	5	8	3	4	60
4	1	3	6	5	3	20
Потребность в песке на участках дороги, тыс. т	30	60	40	20	15	

Перевозка песка из карьеров на различные участки дороги осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности.

Составьте план перевозок песка, минимизирующий суммарную транспортную работу, равную сумме (по всем поставщикам и потребителям) произведений {проходимого грузовиками расстояния} x {объемов соответствующих поставок груза } .

Задание 7. Готовая продукция с заводов-изготовителей, расположенных в Волгограде, Сызрани, Вологде и Калуге, запасы которой на заводах составляют 35, 25, 30 и 40 т соответственно, поставляется заказчикам, расположенным в Твери, Казани, Кинешме, Владимире и Рязани, имеющим потребности в продукции, равные 30, 15, 25, 30 и 25 т соответственно. Тарифы (ден. ед./т) на перевозку продукции между городами-поставщиками и городами-потребителями приведены в таблице:

Заводы-изготовители	Заказчики				
	Тверь	Казань	Кинешма	Владимир	Рязань
Волгоградский	4	0,5	2	1	3
Сызранский	5	2	0,5	0	2
Вологодский	4	2	0	0,5	2
Капижский	2	1	4	4,5	3

Составьте план поставок продукции с заводов изготовителей заказникам, имеющий минимальную суммарную стоимость перевозок.

Задание 8. Имеются четыре овощехранилища, расположенных в различных районах, в которых сосредоточено 45, 50, 15 и 20 т овощей соответственно. Овощи необходимо перевезти в четыре магазина в количестве 30, 40, 20 и 25 т соответственно. Расстояния от овощехранилищ до магазинов приведены в таблице:

Овощехранилища	Расстояние от овощехранилищ до магаз инов, км			
	1	2	3	4
1	1	0	0,5	2
2	3	2	4	1
3	0	2,5	2	3
4	4	3	1,5	2

Учитывая, что транспортный тариф доставки грузов от овощехранилищ до магазинов одинаков и равен 1 ден. ед./т·км, определите оптимальный план перевозок овощей от хранилищ до магазинов (т. е. объемы поставки овощей из каждого хранилища в магазины), минимизирующий транспортные расходы.

Пояснение: транспортные расходы в данном случае представляют собой сумму (по всем поставщикам и потребителям) произведений {транспортного тарифа} х {расстояний перевозок} х {объемов перевозок } .

Задание 9. Три молочные фермы с суточным производством молока 40, 55 и 25 тыс. л. снабжают молоком пять молокозаводов, спрос которых составляет 20, 50, 40, 30 и 50 тыс. л. Время (ч), затрачиваемое на перевозку молока с ферм на молокозаводы, задается матрицей:

$$C = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 4 & 1 & 3 & 1{,}5 \\ 3{,}5 & 2 & 3 & 1{,}6 & 4 \\ 0 & 1 & 2{,}5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составьте оптимальный план перевозок, минимизирующий суммарную транспортную работу.

Пояснение: транспортная работа в данном случае представляет собой сумму (по всем поставщикам и потребителям) произведений { времен доставки} х {объемов перевозок}.

Задание 10. Торговая фирма «Времена года» включает в себя четыре предприятия-изготовителя продукции и пять складов в различных регионах страны. Ежемесячно каждое предприятие производит 50, 80, 50 и 60 ед. продукции. Вся производимая продукция направляется на склады вместимостью 30, 50, 50, 40 и 25 ед. продукции. Ежемесячная стоимость перевозок единицы продукции (ден. ед./ед. продукции) от предприятий на склады приведена в таблице:

Предприятия фирмы «Времена года»	Склады				
	1	2	3	4	5
1	2	3	1,5	2	1
2	5	6	4	5	0
3	3	2	2,5	3	3,5
4	1	3,5	1	0	1,5

Необходимо составить план перевозок продукции от предприятий к складам, минимизирующий ежемесячную суммарную стоимость перевозок.

Задание 11. Четыре цементных завода поставляют цемент четырем строительным фирмам. Каждый завод вырабатывает в день 50, 30, 35 и 40 т цемента. Потребность строительных фирм в цементе в день составляет 40, 50, 25 и 30 т. Расстояния (км) от цементных заводов до строительных фирм указаны в таблице:

Цементные заводы	Расстояния от цементных заводов до строительных			
	1	2	3	4
1	0	1	1,5	3
2	5	3	5	2
3	3	2,5	4	0
4	2	2	3	2

Определите, в каком объеме, с каких цементных заводов и в какие строительные фирмы должен доставляться цемент, чтобы обеспечить минимальную транспортную работу по перевозке цемента.

Пояснение: транспортная работа в данной задаче равна сумме (по всем поставщикам и потребителям) произведений {расстояний} х {объемов перевозок).

Задание 12. Минимизировать транспортные расходы на доставку грузов от четырех поставщиков к четырем потребителям. Запасы груза у поставщиков составляют 25, 30, 40 и 50 ед., спрос у потребителей - 20, 15, 30 и 25 ед. Тарифы (руб./ед. груза) на перевозку единицы груза указаны в таблице.

Составьте оптимальный план перевозок груза, минимизирующий суммарную стоимость перевозок.

Поставщики	Тарифы (руб./ед. груза) на перевозку			
	1	2	3	4
1	1	0	2	2,5
2	3	2,5	1,4	2
3	2	1	4	3
4	1,7	3	3,5	0,5

Задание 13. Составьте оптимальный план перевозок груза, минимизирующий суммарную транспортную работу по доставке грузов от четырех поставщиков четырем потребителям. Запасы груза у поставщиков составляют 25, 20, 30 и 10 ед., спрос у потребителей - 10, 20, 30 и 15 ед. Время (ч) на перевозку ед. груза указано в таблице:

Поставщики	Время поставки груза от поставщиков потребителям, ч			
	1	2	3	4
1	1,5	2	0,5	3
2	0,5	4	3	2,5
3	3		2	0
4	2	0,5	1,5	1

Пояснение: транспортная работа, в данном случае, представляет собой сумму (по всем поставщикам и потребителям) произведений { времени поставки} х {объемов перевозок).

Задание 14. Завод выпускает продукцию в трех цехах, расположенных в разных частях региона. Свою продукцию завод поставляет на четыре других завода. Цех 1-й производит 25 ед. изделий, цех 2-й -65 ед., цех 3-й - 15 ед. Потребность заводов в продукции составляет 20, 30, 15 и 22 ед. Транспортные тарифы на перевозку продукции (ден. ед. /ед. продукции) задаются матрицей:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0{,}5 & 1 & 2{,}5 \end{bmatrix}$$

Определите оптимальный план перевозок, минимизирующий суммарные затраты.

Задание 15. Три хлебозавода производят хлеб в количестве 25, 15 и 10 т в сутки. Хлеб поставляется в четыре магазина, имеющих потребность в хлебе в количестве 15, 20, 15 и 10 т в сутки. Расстояния от хлебозаводов до магазинов приведены в таблице:

Хлебозаводы	Расстояния от хлебозаводов до маг азинов, км			
	1	2	3	4
1	0	1	0,5	2
2	2	3	2	1
3	3	2	1	0,5

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарную транспортную работу по доставке хлеба магазинам.

Пояснение: транспортная работа в данной задаче равна сумме (по всем поставщикам и потребителям) произведений {расстояний} x {объемов перевозок}.

Задание 16. Четыре фермы выращивают фрукты и поставляют их четырем крупным отелям.

Каждая ферма ежемесячно выращивает 20, 35, 40 и 15 т фруктов. Потребность отелей во фруктах в месяц составляет 30, 20, 25 и 15 т фруктов. Расстояния (км) от ферм до отелей указаны в таблице.

Определите, в каком объеме, с каких ферм и в какие отели должны поставляться фрукты, чтобы обеспечить минимальную транспортную работу по перевозке фруктов.

Фермы, поставляющие фрукты	Расстояния между фермами и отелям, км			
	1	2	3	4
1		3	2	2,5
2	2	0,5	1,5	3
3	4	2	3	0
4	3,5	1,5	3	1

Пояснение: транспортная работа в данной задаче равна сумме (пвсем поставщикам и потребителям) произведений {расстояний} x {объемов перевозок}.

Задание 17. В пунктах А и В находятся соответственно 150 и 90 т. горючего. Пунктам 1, 2, 3 требуются соответственно 60, 70, 110 т горючего. Стоимость перевозки 1 т. горючего из пункта А в пункты 1, 2, 3 равна 6, 1, 4 тыс. руб. за 1 т. соответственно, а из пункта В в пункты 1, 2, 3 - 12, 2, 8 тыс. руб. за 1 т. соответственно. Составьте план перевозок горючего, минимизирующий общую сумму транспортных расходов.

Задание 18. Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. Первый завод поставляет 90 платформ грузовиков, второй - 30 платформ, третий – 40 платформ. Требуется поставить платформы следующим потребителям: первому - 70 шт., второму – 30, третьему – 20, четвертому – 40 шт. Стоимость перевозки одной платформы от поставщика до потребителя указана в следующей таблице (д. е.):

Поставщики				
	1	2	3	4
I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

Составьте оптимальный план доставки грузовых автомобилей.

Задание 19. Строительство магистральной дороги включает задачу заполнения имеющихся на трассе выбоин до уровня основной дороги и срезания в некоторых местах дороги выступов. Срезанным грунтом заполняются выбоины. Перевозка грунта осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности. Расстояние в километрах от срезов до выбоин и объем работ указаны в следующей таблице:

Поставщики	Потребители			Наличие грунта, т.
	I	II	III	
A	1	2	3	110
B	2	1	3	130
C	1	2	4	20
Требуемое количество грунта, т	100	140	60	

Составьте план перевозок, минимизирующий общий пробег грузовиков.

Задание 20. Груз, хранящийся на трех складах и требующий для перевозки 60, 80, 106 автомашин соответственно, необходимо перевезти в четыре магазина. Первому магазину требуется 44 машины груза, второму - 70, третьему - 50 и четвертому - 82 машины. Стоимость пробега одной автомашины за 1 км составляет 10 д. е. Расстояния от складов до магазинов указаны в следующей таблице:

Склады	Магазины			
	1	2	3	4
1	13	17	6	8
2	2	7	10	41
3	12	18	2	22

Составьте оптимальный по стоимости план перевозки груза от складов до магазинов.

Задание 21. На складах А, В, С находится сортовое зерно 100, 150, 250 т, которое нужно доставить в четыре пункта. Пункту 1 необходимо поставить 50 т. , пункту 2 - 100, пункту 3 - 200, пункту 4 - 150 т. сортового зерна. Стоимость доставки 1 т зерна со склада А в указанные пункты соответственно равна (д. е.) 80, 30, 50, 20; со склада В - 40, 10, 60, 70; со склада С - 10, 90, 40, 30. Составьте оптимальный план перевозки зерна из условия минимума стоимости перевозки.

Задание 22. Завод имеет три цеха - А, В, С и четыре склада - 1; 2; 3; 4. Цех А производит 30 тыс. шт. изделий, цех В - 40; цех С - 20 тыс. шт. изделий. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад 1 - 20 тыс. шт. изделий; склад 2 - 30; склад 3 - 30 и склад 4 - 10 тыс. шт. изделий. Стоимость перевозки 1 тыс. шт. изделий из цеха А на склады 1, 2, 3, 4 -соответственно (д. е.): 20, 30, 40, 40, из цеха В - соответственно 30, 20, 50, 10, а из цеха С - соответственно 40, 30, 20, 60. Составьте такой план перевозки изделий, при котором расходы на перевозку 90 тыс. шт. изделий были бы наименьшими.

Задание 23. На строительном полигоне имеется пять кирпичных заводов, объем производства которых в сутки равен 600; 600; 500; 650; 700 т. Заводы удовлетворяют потребности семи строительных объектов соответственно в количестве 350; 450; 300; 450; 300; 200; 450 т Оставшийся кирпич отправляют по железной дороге в другие районы. Кирпич на строительные объекты доставляется автомобильным транспортом. Расстояние в километрах от заводов до объектов указано в следующей таблице:

Заводы	Объекты						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
A_1	14	5	10	8	16	10	25
A_2	13	4	11	9	20	12	23
A_3	18	8	14	18	23	13	21
A_4	14	7	13	19	15	16	23
A_5	11	15	14	25	19	15	20

Определите, с каких заводов и на какие объекты должен доставляться кирпич, а также какие заводы и в каком количестве должны отправлять кирпич в другие районы, чтобы транспортные издержки по доставке кирпича автотранспортом были минимальными. Стоимость перевозки 1 т кирпича автотранспортом удовлетворяет условию $c = a + d(l - 1)$, где $a = 25$ д.е., $d = 5$ д.е., l - пробег, км.

Задание 24. Промышленный концерн имеет два завода и пять складов в различных регионах страны. Каждый месяц первый завод производит 40, а второй – 70 ед. продукции. Вся продукция, производимая заводами, должна быть направлена на склады. Вместимость первого склада равна 20 ед. продукции; второго – 30; третьего – 15; четвертого – 27; пятого – 28 ед. Издержки транспортировки продукции от завода до склада следующие (ед.):

Заводы	Склады				
	1	2	3	4	5
1	520	480	650	500	720
2	450	525	630	560	750

Распределите план перевозок из условия минимизации ежемесячных расходов на транспортировку.

Задание 25. Три нефтеперерабатывающих завода с суточной производительностью 10; 8 и 6 млн галлонов бензина снабжают три бензохранилища, спрос которых составляет 6; 11 и 7 млн галлонов. Бензин транспортируется в бензохранилища по трубопроводу. Стоимость перекачки бензина на 1 км составляет 5 д.е. на 100 галлонов. Завод 1 не связан с хранилищем 3. Расстояние от заводов до бензохранилищ следующее (км):

Номер завода	Бензохранилища		
	1	2	3
1	100	150	-
2	420	180	60
3	200	280	120

Сформулируйте соответствующую транспортную задачу и решите на минимум транспортных затрат.

Задание 26. Пусть в задании 25 производительность нефтеперерабатывающего завода 1 снизилась до 8 млн галлонов. Кроме того, обязательно полное удовлетворение спроса бензохранилиша 2. Недопоставки в хранилища 1 и 3 штрафуются на сумму 8 д. е. за каждый галлон.

Сформулируйте соответствующую транспортную задачу и решите на минимум издержек.

Задание 27. Задание 27. Автомобили перевозятся на трайлерах из трех центров распределения пяти продавцам. Стоимость перевозки в расчете на 1 км пути, пройденного трайлером, равна 60 д. е. Один трайлер может перевозить до 15 автомобилей. Стоимость перевозок не зависит от того, насколько полно загружается трайлер. В приведенной ниже таблице указаны расстояния (км) между центрами распределения и продавцами, а также величины, характеризующие ежемесячный спрос и объемы поставок, исчисляемые количеством автомобилей:

Центр распределения	Продавцы					Объем поставок, шт.
	1	2	3	4	5	
1	80	120	180	150	50	300
2	60	70	50	65	90	350
3	30	80	120	140	90	120
Спрос на автомобили, шт.	110	250	140	150	120	770

Определите минимальные затраты на доставку автомобилей.

Задание 28. В данной транспортной задаче суммарный спрос превосходит суммарный объем производства. Исходные данные следующие:

Заводы	Потребители			Объем производства, шт.
	1	2	3	
A_1	3	2	4	50
A_2	5	4	5	75
A_3	1	6	7	30
Потребность, шт.	60	40	70	

Найдите оптимальное решение.

Задание 29. В таблице представлена несбалансированная транспортная задача

Пункты хранения (склады)	Потребители			Запасы продукции, т
	1	2	3	
1	1	0	4	300
2	3	1	2	400
3	1	2	1	250
Спрос, т	280	320	200	

Найдите оптимальное решение.

Задание 30. три пункта поставки однородного груза — A_1; A_2; A_3 и пять пунктов потребления этого груза — B_1; B_2; B_3; B_4; B_5. В пунктах A1; A2; A3 находится груз a_1; a_2; а3 соответственно. Груз необходимо доставить в пункты B_1; B_2; B_3; B_4; B_5 в количестве b_1; b_2; b_3; b_4; b_5, соответственно. Расстояния между пунктами заданы следующей матрицей (км):

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & \dots & d_{35} \end{bmatrix}.$$

Требуется найти оптимальный план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза при условии минимизации общего пробега автомобилей, используя параметры, представленные ниже

$$A^T = [a_1 \ \ a_2 \ \ a_3] = [200 \ \ 175 \ \ 225]$$

$$B^T = [b_1 \ \ b_2 \ \ b_3 \ \ b_4 \ \ b_5] = [100 \ \ 130 \ \ 80 \ \ 190 \ \ 100]$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

6. Список вопросов по теме лабораторной работы

1. Приведите содержательную постановку транспортной задачи и ее математическую модель.
2. Каков смысл целевой функции в транспортной задаче?
3. Раскройте смысл каждого уравнения в системе ограничений транспортной задачи.
4. Какие критерии оптимальности перевозок может выражать целевая функция?
5. Раскройте понятия закрытой и открытой транспортной задач.
6. Как необходимо скорректировать транспортную модель, чтобы открытая транспортная задача стала закрытой?
7. Как необходимо скорректировать математическую модель транспортной задачи, если суммарный запас груза у поставщиков больше, чем спрос на груз у потребителей?
8. Как необходимо скорректировать математическую модель транспортной задачи, если суммарный спрос груза у потребителей больше суммарного запаса груза у поставщиков?
9. Что такое фиктивные поставщики и фиктивные потребители и в каких случаях они вводятся в транспортную модель?
10. Как изменяется матрица тарифов перевозок, если ввести: а) фиктивного поставщика; б) фиктивного потребителя?
11. Какую размерность имеют:
    а) транспортные тарифы на перевозку груза;
    б) целевая функция транспортной задачи, если коэффициенты c_{ij} в целевой функции представляют собой: транспортные тарифы; время доставки грузов; расстояния между поставщиками и потребителями грузов?
12. Могут ли в решении транспортной задачи получиться нецелочисленные решения при целых правых частях ограничений?
13. Как определяется транспортная работа по доставке грузов, если коэффициенты c_{ij} в целевой функции представляют собой:
    а) время доставки грузов;
    б) расстояния от поставщиков до потребителей грузов?
14. Как в Microsoft Excel задаются ограничения и целевая функция транспортной задачи?
15. Какие уравнения входят в модель транспортной задачи?
16. Как строятся уравнения транспортной задачи?
17. Как выглядит функция цели модели транспортной задачи?
18. В чем суть метода северо-западного угла?
19. В чем суть метода наименьшей стоимости?
20. В чем состоит метод потенциалов, используемый для решения транспортной задачи?
21. Каким образом происходит поиск улучшенной перевозки грузов, полученной методом северо-западного угла?

7. Список литературы

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие, 2-е изд. перераб. и доп., М.: Финансы и статистика, 2006. – 432 с.: ил.
2. Васильев А.Н. Числовые расчеты в Excel: Учебное пособие. – СПб: Изд-во «Лань», 2014, 608 с.
3. Гладких Б.А. Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики. Ч.1. Введение в исследование операций. Линейное программирование: Учебное пособие. – Томск: Из-во НТЛ, 2009, 200 с.
4. Горлач Б.А. Исследование операций: Учебное пособие. – СПб: Из-во «Лань», 2013, 448 с.
5. Есипов Б.А. Методы исследование операций: Учебное пособие. – СПб: Изд-во «Лань», 2013, 304 с.
6. Мадера А.Г. Математические модели в управлении: Компьютерное моделирование в Microsoft Excel: Лабораторные работы. - М.:РГГУ, 2007. – 121 с.
7. Новиков, А.И. Экономико-математические методы и модели : учебник / А.И. Новиков. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 532 с. : ил. - (Учебные издания для бакалавров). - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-394- 02615-7 ; Тот же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454090 (05.12.2020).
8. Ржевский С.В. Исследование операций: Учебное пособие. – СПб: Изд-во «Лань», 2013, 480 с.