

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Хотя время и причисляют к непрерывным величинам, однако оно, будучи незримым и без тела, не целиком подпадает власти геометрии, <...> точка во времени должна быть приравнена к мгновению, а линия имеет сходство с длительностью известного количества времени <...>, и если линия делима до бесконечности, то и промежуток времени не чужд такого деления.

Леонардо да Винчи

Вывод изображения на экран дисплея и разнообразные действия с ним, в том числе и визуальный анализ, требуют от пользователя известной геометрической грамотности. Геометрические понятия, формулы и факты, относящиеся прежде всего к плоскому и трехмерному случаям, играют в задачах компьютерной графики особую роль. Геометрические соображения, подходы и идеи в соединении с постоянно расширяющимися возможностями вычислительной техники являются неиссякаемым источником существенных продвижений на пути развития компьютерной графики, ее эффективного использования в научных и иных исследованиях. Порой даже самые простые геометрические методики обеспечивают заметные продвижения на отдельных этапах решения большой графической задачи. С простых геометрических рассмотрений мы и начнем наш рассказ.

Заметим прежде всего, что особенности использования геометрических понятий, формул и фактов, как простых и хорошо известных, так и новых более сложных, требуют особого взгляда на них и иного осмысления.

Аффинные преобразования на плоскости

В компьютерной графике все, что относится к двумерному случаю, принято обозначать символом (2D) (2-dimension).

Допустим, на плоскости введена прямолинейная координатная система. Тогда каждой точке M ставится в соответствие упорядоченная пара чисел (x, y) ее координат (рис. 1). Вводя на плоскости еще одну прямолинейную систему

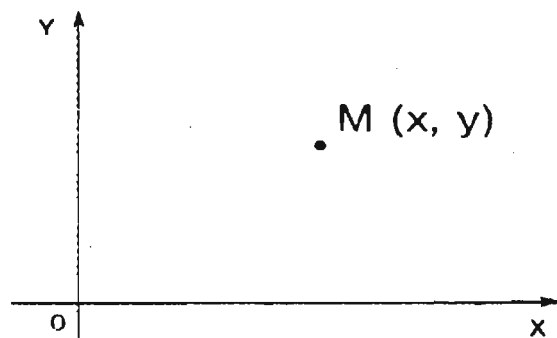


Рис. 1

координат, мы ставим в соответствие той же точке M другую пару чисел - (x^*, y^*) .

Переход от одной прямолинейной координатной системы на плоскости к другой описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x^* &= \alpha x + \beta y + \lambda, \\ y^* &= \gamma x + \delta y + \mu, \end{aligned} \quad (*)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ - произвольные числа, связанные неравенством

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Замечание

Формулы (*) можно рассматривать двояко: либо сохраняется точка и изменяется координатная система (рис. 2) - в этом случае произвольная точка M остается той же, изменяются лишь ее координаты

$$(x, y) \mid (x^*, y^*),$$

либо изменяется точка и сохраняется координатная система (рис. 3) - в этом случае формулы (*) задают отображение, переводящее произвольную точку $M(x, y)$ в точку $M^*(x^*, y^*)$, координаты которой определены в той же координатной системе.

В дальнейшем мы будем рассматривать формулы (*) как правило, согласно которому в заданной системе прямолинейных координат преобразуются точки плоскости.

В аффинных преобразованиях плоскости особую роль играют несколько важных частных случаев, имеющих хорошо прослеживаемые геометрические характеристики. При исследовании геометрического смысла числовых коэффициентов в формулах (*) для этих случаев нам удобно считать, что заданная система координат является прямоугольной декартовой.

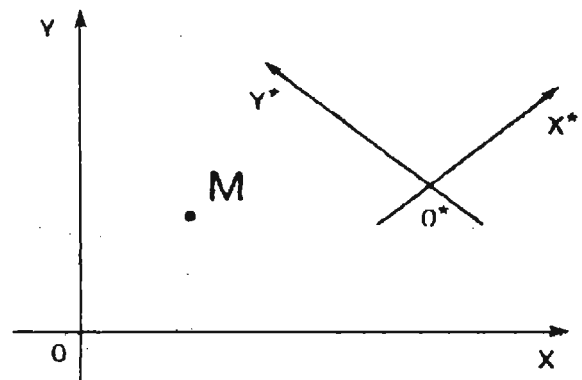


Рис. 2

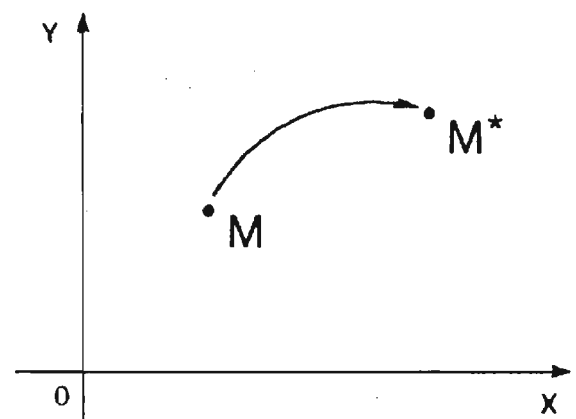


Рис. 3

- А.** Поворот (вокруг начальной точки на угол φ) (рис. 4) описывается формулами

$$\begin{aligned}x^* &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\y^* &= x \sin \varphi + y \cos \varphi.\end{aligned}$$

- Б.** Растяжение (сжатие) вдоль координатных осей можно задать так:

$$\begin{aligned}x^* &= \alpha x, \\y^* &= \delta y, \\ \alpha &> 0, \delta > 0.\end{aligned}$$

Растяжение (сжатие) вдоль оси абсцисс обеспечивается при условии, что $\alpha > 1$ ($\alpha < 1$). На рис. 5 $\alpha = \delta > 1$.

- В.** Отражение (относительно оси абсцисс) (рис. 6) задается при помощи формул

$$\begin{aligned}x^* &= x, \\y^* &= -y.\end{aligned}$$

- Г.** На рис. 7 вектор переноса MM^* имеет координаты λ и μ . Перенос обеспечивают соотношения

$$\begin{aligned}x^* &= x + \lambda, \\y^* &= y + \mu.\end{aligned}$$

Выбор этих четырех частных случаев определяется двумя обстоятельствами.

1. Каждое из приведенных выше преобразований имеет простой и наглядный геометрический смысл (геометрическим смыслом наделены и постоянные числа, входящие в приведенные формулы).

2. Как доказывается в курсе аналитической геометрии, любое преобразование вида (*) всегда можно представить как последователь-

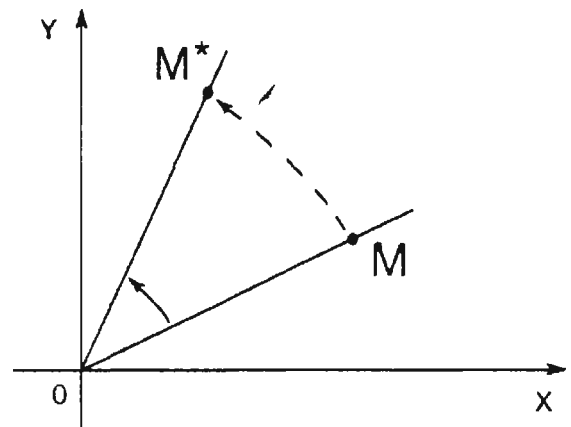


Рис. 4

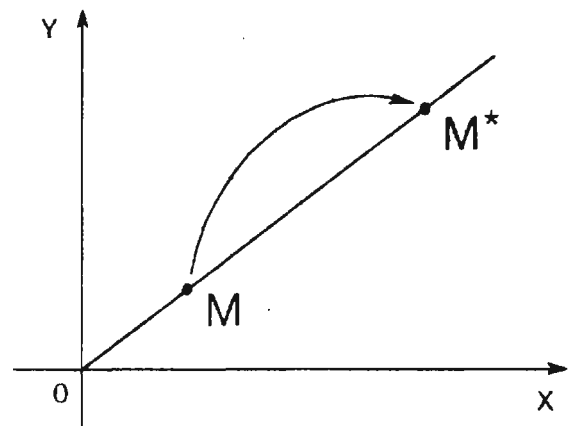


Рис. 5

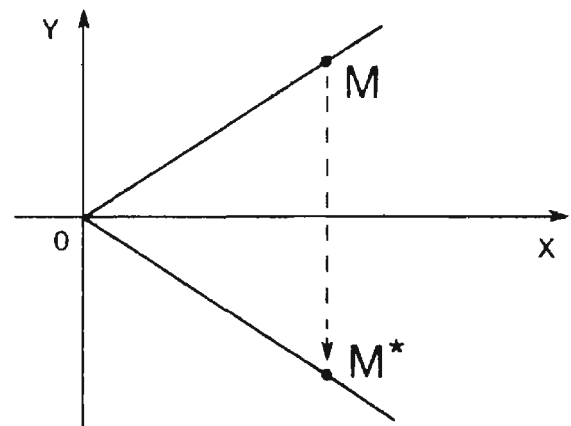


Рис. 6

ное исполнение (суперпозицию) простейших преобразований вида А, Б, В и Г (или части этих преобразований).

Таким образом, справедливо следующее важное свойство аффинных преобразований плоскости: любое отображение вида (*) можно описать при помощи отображений, задаваемых формулами А, Б, В и Г.

Для эффективного использования этих известных формул в задачах компьютерной графики более удобной является их матричная запись. Матрицы, соответствующие случаям А, Б и В, строятся легко и имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Однако для решения рассматриваемых далее задач весьма желательно охватить матричным подходом все четыре простейших преобразования (в том числе и перенос), а, значит, и общее аффинное преобразование. Этого можно достичь, например, так: перейти к описанию произвольной точки плоскости не упорядоченной парой чисел, как это было сделано выше, а упорядоченной тройкой чисел.

Однородные координаты точки

Пусть М - произвольная точка плоскости с координатами х и у, вычисленными относительно заданной прямолинейной координатной системы. Однородными координатами этой точки называется любая тройка одновременно неравных нулю чисел x_1, x_2, x_3 , связанных с заданными числами х и у следующими соотношениями:

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y.$$

При решении задач компьютерной графики однородные координаты обычно вводятся так: произвольной точке М(х, у) плоскости ставится в соответствие точка Мэ(х, у, 1) в пространстве (рис. 8).

Заметим, что произвольная точка на прямой, соединяющей начало координат, точку О(0, 0, 0), с точкой Мэ(х, у, 1), может быть задана тройкой чисел вида

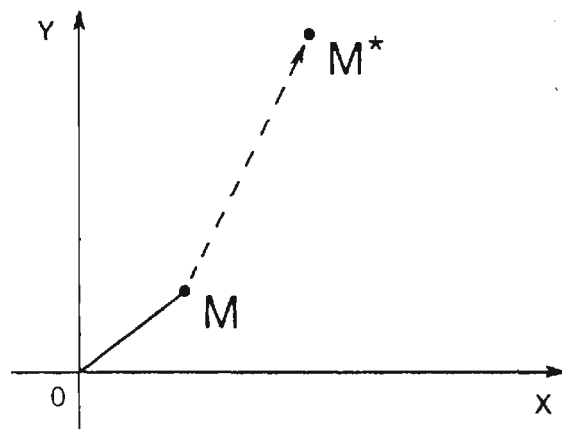


Рис. 7

(hx, hy, h) .

Будем считать, что $h \neq 0$.

Вектор с координатами hx, hy, h является направляющим вектором прямой, соединяющей точки $O(0, 0, 0)$ и $M^*(x, y, 1)$. Эта прямая пересекает плоскость $z = 1$ в точке $(x, y, 1)$, которая однозначно определяет точку (x, y) координатной плоскости xy .

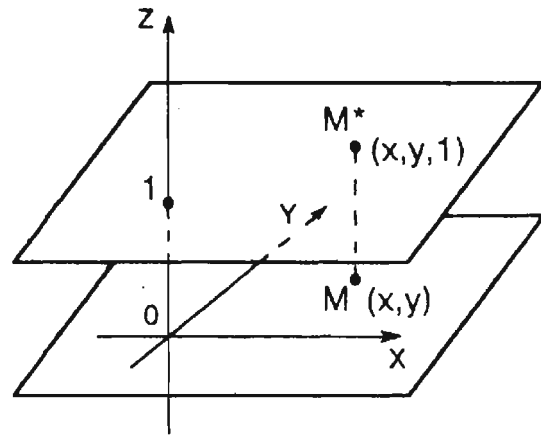


Рис. 8

Тем самым между произвольной точкой с координатами (x, y) и множеством троек чисел вида

$(hx, hy, h), h \neq 0,$

устанавливается (взаимно однозначное) соответствие, позволяющее считать числа hx, hy, h новыми координатами этой точки.

Замечание

Широко используемые в проективной геометрии однородные координаты позволяют эффективно описывать так называемые несобственные элементы (по существу, те, которыми проективная плоскость отличается от привычной нам евклидовой плоскости). Более подробно о новых возможностях, предоставляемых введенными однородными координатами, говорится в четвертом разделе этой главы.

В проективной геометрии для однородных координат принято следующее обозначение:

$x : y : 1$

или, более общо,

$x_1 : x_2 : x_3$

(напомним, что здесь непременно требуется, чтобы числа x_1, x_2, x_3 одновременно в нуль не обращались).

Применение однородных координат оказывается удобным уже при решении простейших задач.

Рассмотрим, например, вопросы, связанные с изменением масштаба. Если устройство отображения работает только с целыми числами (или если необходимо работать только с целыми числами), то для произвольного значения h (например, $h = 1$) точку с однородными координатами

$(0.5 \ 0.1 \ 2.5)$

представить нельзя. Однако при разумном выборе h можно добиться того, чтобы координаты этой точки были целыми числами. В частности, при $h = 10$ для рассматриваемого примера имеем

$$(5 \ 1 \ 25).$$

Рассмотрим другой случай. Чтобы результаты преобразования не приводили к арифметическому переполнению, для точки с координатами

$$(80000 \ 40000 \ 1000)$$

можно взять, например, $h=0,001$. В результате получим

$$(80 \ 40 \ 1).$$

Приведенные примеры показывают полезность использования однородных координат при проведении расчетов. Однако основной целью введения однородных координат в компьютерной графике является их несомненное удобство в применении к геометрическим преобразованиям.

При помощи троек однородных координат и матриц третьего порядка можно описать любое аффинное преобразование плоскости.

В самом деле, считая $h = 1$, сравним две записи: помеченную символом $*$ и нижеследующую, матричную:

$$(x * y * 1) = (x \ y \ 1) \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix},$$

Нетрудно заметить, что после перемножения выражений, стоящих в правой части последнего соотношения, мы получим обе формулы (*) и верное числовое равенство $1 = 1$.

Тем самым сравниваемые записи можно считать равносильными.

Замечание

Иногда в литературе используется другая запись - запись по столбцам:

$$\begin{bmatrix} x * \\ y * \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \lambda \\ \gamma & \delta & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Такая запись эквивалентна приведенной выше записи по строкам (и получается из нее транспонированием).

Элементы произвольной матрицы аффинного преобразования не несут в себе явно выраженного геометрического смысла. Поэтому чтобы реализовать то или иное отображение, то есть найти элементы соответствующей матрицы по заданному геометрическому описанию, необходимы специальные приемы. Обычно построение этой матрицы в соответствии со сложностью рассматриваемой задачи и с описанными выше частными случаями разбивают на несколько этапов.

На каждом этапе ищется матрица, соответствующая тому или иному из выделенных выше случаев А, Б, В или Г, обладающих хорошо выраженными геометрическими свойствами.

Выпишем соответствующие матрицы третьего порядка.

А. Матрица вращения (rotation)

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Б. Матрица растяжения(сжатия) (dilatation)

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В. Матрица отражения (reflection)

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Г. Матрица переноса (translation)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим примеры аффинных преобразований плоскости.

Пример 1

Построить матрицу поворота вокруг точки $A(a, b)$ на угол φ (рис. 9).

1-й шаг. Перенос на вектор $-A(-a, -b)$ для совмещения центра поворота с началом координат;

$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

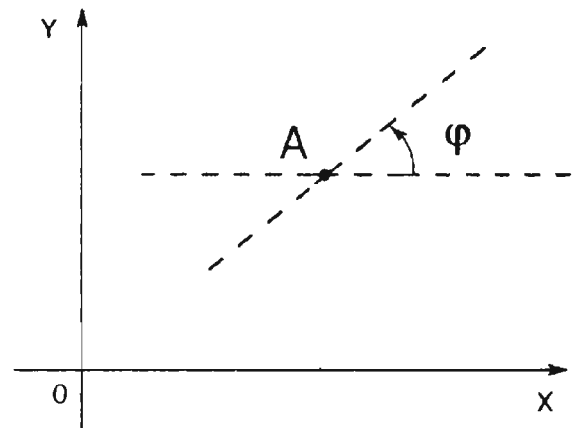


Рис. 9

матрица соответствующего преобразования.

2-й шаг. Поворот на угол φ ;

$$[R_{\varphi}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрица соответствующего преобразования.

3-й шаг. Перенос на вектор $A(a, b)$ для возвращения центра поворота в прежнее положение;

$$[T_A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

матрица соответствующего преобразования.

Перемножим матрицы в том же порядке, как они выписаны:

$$[T_{-A}][R_{\varphi}][T_A].$$

В результате получим, что искомое преобразование (в матричной записи) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x^* & y^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -a \cos \varphi + b \sin \varphi + a & -a \sin \varphi - b \cos \varphi + b & 1 \end{bmatrix}$$

Элементы полученной матрицы (особенно в последней строке) не так легко запомнить. В то же время каждая из трех перемножаемых матриц по геометрическому описанию соответствующего отображения легко строится.

Пример 2

Построить матрицу растяжения с коэффициентами растяжения α вдоль оси абсцисс и β вдоль оси ординат и с центром в точке $A(a, b)$.

1-й шаг. Перенос на вектор $-A(-a, -b)$ для совмещения центра растяжения с началом координат;

$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

матрица соответствующего преобразования.

2-й шаг. Растяжение вдоль координатных осей с коэффициентами α и δ соответственно; матрица преобразования имеет вид

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-й шаг. Перенос на вектор $A(a, b)$ для возвращения центра растяжения в прежнее положение; матрица соответствующего преобразования -

$$[T_A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

Перемножив матрицы в том же порядке

$$[T_{-A}][D][T_A],$$

получим окончательно

$$(x^* \ y^* \ 1) = (x \ y \ 1) \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ (1-\alpha)a & (1-\delta)b & 1 \end{bmatrix}$$

Замечание

Рассуждая подобным образом, то есть разбивая предложенное преобразование на этапы, поддерживаемые матрицами

$[R], [D], [M], [T]$,

можно построить матрицу любого аффинного преобразования по его геометрическому описанию.

Аффинные преобразования в пространстве

Обратимся теперь к трехмерному случаю (3D) (3-dimension) и начнем наши рассуждения сразу с введения однородных координат.

Поступая аналогично тому, как это было сделано в размерности два, заменим координатную тройку (x, y, z) , задающую точку в пространстве, на четверку чисел

$(x, y, z, 1)$

или, более общо, на четверку

$(hx, hy, hz), h \neq 0$.

Каждая точка пространства (кроме начальной точки O) может быть задана четверкой одновременно не равных нулю чисел; эта четверка чисел определена однозначно с точностью до общего множителя.

Предложенный переход к новому способу задания точек дает возможность воспользоваться матричной записью и в более сложных, трехмерных задачах.

Любое аффинное преобразование в трехмерном пространстве может быть представлено в виде суперпозиции вращений, растяжений, отражений и переносов. Поэтому вполне уместно сначала подробно описать матрицы именно этих преобразований (ясно, что в данном случае порядок матриц должен быть равен четырем).

А. Матрицы вращения в пространстве

Матрица вращения вокруг оси абсцисс на угол φ :

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица вращения вокруг оси ординат на угол ψ :

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица вращения вокруг оси аппликат на угол χ :

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \chi & \sin \chi & 0 & 0 \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Замечание

Полезно обратить внимание на место знака "-" в каждой из трех приведенных матриц.

Б. Матрица растяжения (сжатия):

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где

$\alpha > 0$ - коэффициент растяжения (сжатия) вдоль оси абсцисс;
 $\beta > 0$ - коэффициент растяжения (сжатия) вдоль оси ординат;
 $\gamma > 0$ - коэффициент растяжения (сжатия) вдоль оси аппликат).

В. Матрицы отражения

Матрица отражения относительно плоскости $xу$:

$$[M_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица отражения относительно плоскости yz :

$$[M_x] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица отражения относительно плоскости zx :

$$[M_y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Г. Матрица переноса (здесь (λ, μ, ν) - вектор переноса):

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & \nu & 1 \end{bmatrix}$$

Замечание

Как и в двумерном случае, все выписанные матрицы невырождены.

Приведем важный пример построения матрицы сложного преобразования по его геометрическому описанию.

Пример 1

Построить матрицу вращения на угол φ вокруг прямой L , проходящей через точку $A(a, b, c)$ и имеющую направляющий вектор (l, m, n) . Можно считать, что направляющий вектор прямой является единичным:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

На рис. 10 схематично показано, матрицу какого преобразования требуется найти.

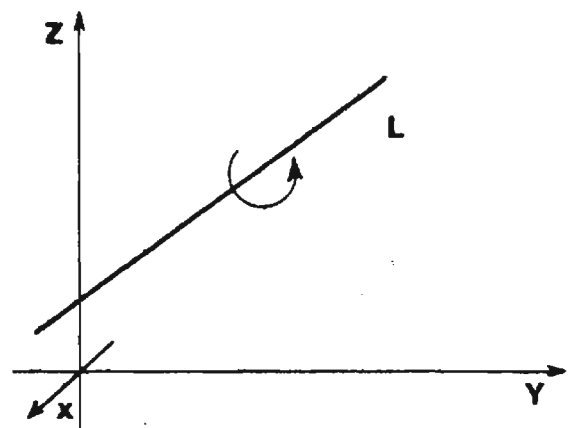


Рис. 10

Решение сформулированной задачи разбивается на несколько шагов. Опишем последовательно каждый из них.

1-й шаг. Перенос на вектор $-A(-a, -b, -c)$ при помощи матрицы

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{bmatrix}$$

В результате этого переноса мы добиваемся того, чтобы прямая L проходила через начало координат.

2-й шаг. Совмещение оси аппликат с прямой L двумя поворотами вокруг оси абсцисс и оси ординат.

1-й поворот - вокруг оси абсцисс на угол ψ (подлежащий определению). Чтобы найти этот угол, рассмотрим ортогональную проекцию L' исходной прямой L на плоскость $X = 0$ (рис. 11).

Направляющий вектор прямой L' определяется просто - он равен $(0, m, n)$.

Отсюда сразу же вытекает, что

$$\cos \psi = \frac{n}{d}, \quad \sin \psi = \frac{m}{d},$$

где $d = \sqrt{m^2 + n^2}$.

Соответствующая матрица вращения имеет следующий вид:

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & \frac{m}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Под действием преобразования, описываемого этой матрицей, координаты вектора (l, m, n) изменятся. Подсчитав их, в результате получим

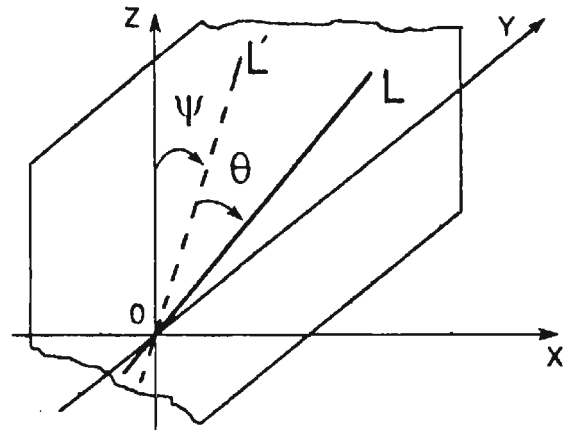


Рис. 11

$$(l, m, n, l)[R_x] = (l, 0, d, l).$$

2-й поворот - вокруг оси ординат на угол θ , определяемый соотношениями

$$\cos \theta = l, \quad \sin \theta = -d.$$

Соответствующая матрица вращения записывается в следующем виде:

$$[R_y] = \begin{bmatrix} l & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-й шаг. Вращение вокруг прямой L на заданный угол φ .

Так как теперь прямая L совпадает с осью аппликат, то соответствующая матрица имеет следующий вид:

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4-й шаг. Поворот вокруг оси ординат на угол $-\theta$.

5-й шаг. Поворот вокруг оси абсцисс на угол $-\varphi$.

Замечание

Вращение в пространстве некоммукативно. Поэтому порядок, в котором проводятся вращения, является весьма существенным.

6-й шаг. Перенос на вектор $A(a, b, c)$.

Перемножив найденные матрицы в порядке их построения, получим следующую матрицу:

$$[T][R_x][R_y][R_z][R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1}.$$

Выпишем окончательный результат, считая для простоты, что ось вращения L проходит через начальную точку:

$$\begin{pmatrix} l^2 + \cos \varphi (1 - l^2) & l(1 - \cos \varphi)m + n \sin \varphi & l(1 - \cos \varphi)n - m \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi)m - n \sin \varphi & m^2 + \cos \varphi (1 - m^2) & m(1 - \cos \varphi)n + l \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi)n + m \sin \varphi & m(1 - \cos \varphi)n - l \sin \varphi & n^2 + \cos \varphi (1 - n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассматривая другие примеры подобного рода, мы будем получать в результате невырожденные матрицы вида

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ \lambda & \mu & \nu & 1 \end{bmatrix}$$

При помощи таких матриц можно преобразовывать любые плоские и пространственные фигуры.

Пример 2

Требуется подвергнуть заданному аффинному преобразованию выпуклый многогранник.

Для этого сначала по геометрическому описанию отображения находим его матрицу $[A]$. Замечая далее, что произвольный выпуклый многогранник однозначно задается набором всех своих вершин

$$V_i(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

строим матрицу

$$V = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ . & . & . & . \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{pmatrix}$$

Подвергая этот набор преобразованию, описываемому найденной невырожденной матрицей четвертого порядка, $[V][A]$, мы получаем набор вершин нового выпуклого многогранника - образа исходного (рис. 12).

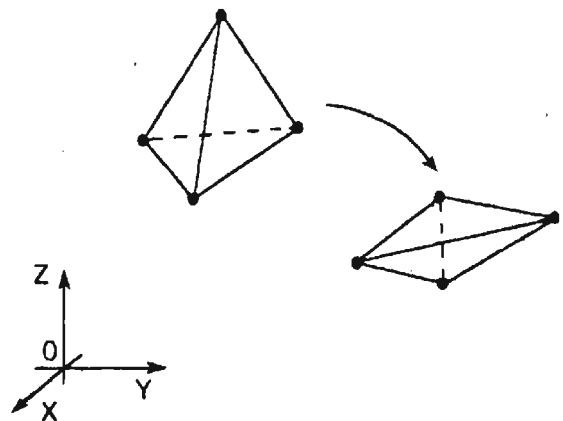


Рис. 12

Платоновы тела

Правильными многогранниками (платоновыми телами) называются такие выпуклые многогранники, все грани которых суть правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах равны между собой.

Существует ровно пять правильных многогранников (это доказал Евклид). Они - правильный тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Их основные характеристики приведены в следующей таблице.

Название многогранника	Число граней Γ	Число ребер P	Число вершин B
Тетраэдр	4	6	4
Гексаэдр	6	12	8
Октаэдр	8	12	6
Додекаэдр	12	30	20
Икосаэдр	20	30	12

Нетрудно заметить, что в каждом из пяти случаев числа Γ , P и B связаны равенством Эйлера

$$\Gamma + B = P + 2.$$

Правильные многогранники обладают многими интересными свойствами. Здесь мы коснемся только тех свойств, которые можно применить для построения этих многогранников.

Для полного описания правильного многогранника, вследствие его выпуклости, достаточно указать способ отыскания всех его вершин.

Операции построения первых трех платоновых тел являются особенно простыми. С них и начнем.

Куб (гексаэдр) строится совсем несложно (рис. 13).

Покажем, как, используя куб, можно построить тетраэдр и октаэдр.

Для построения тетраэдра достаточно провести скрещивающиеся диагонали противоположных граней куба (рис. 14).

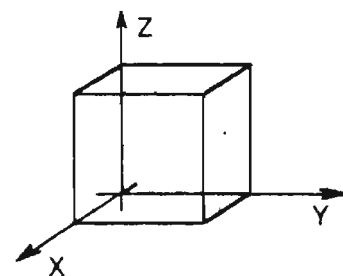


Рис. 13

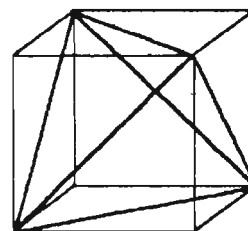


Рис. 14

Тем самым вершинами тетраэдра являются любые 4 вершины куба, попарно не смежные ни с одним из его ребер.

Для построения октаэдра воспользуемся следующим свойством двойственности: вершины октаэдра суть центры (тяжести) граней куба (рис. 15).

И значит, координаты вершин октаэдра по координатам вершин куба легко вычисляются (каждая координата вершины октаэдра является средним арифметическим одноименных координат четырех вершин содержащей ее грани куба).

Додекаэдр и икосаэдр также можно построить при помощи куба. Однако существует, на наш взгляд, более простой способ их конструирования, который мы и собираемся описать здесь.

Начнем с икосаэдра.

Рассечем круглый цилиндр единичного радиуса, ось которого совпадает с осью аппликат Z двумя плоскостями $Z=-0.5$ и $Z=0.5$ (рис. 16). Разобьем каждую из полученных окружностей на 5 равных частей так, как показано на рис. 17. Перемещаясь вдоль обеих окружностей против часовой стрелки, занумеруем выделенные 10 точек в порядке возрастания угла поворота (рис. 18) и затем последовательно, в соответствии с нумерацией, соединим эти точки прямолинейными отрезками (рис. 19). Стыгивая теперь хордами точки, выделенные на каждой из окружностей, мы получим в результате пояс из 10 правильных треугольников (рис. 20).

Для завершения построения икосаэдра выберем на оси Z две точки так, чтобы длины боковых ребер пятиугольных пирамид с вершинами в этих точках и основаниями, совпадающими с построенными пятиугольниками (рис. 21), были равны длинам сторон пояса из треугольников. Нетрудно видеть, что для этого годятся точки с аппликатами

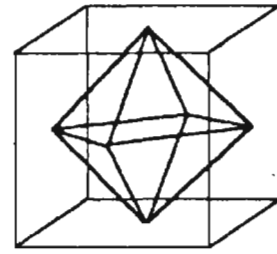


Рис. 15

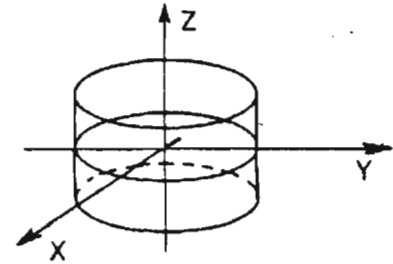


Рис. 16

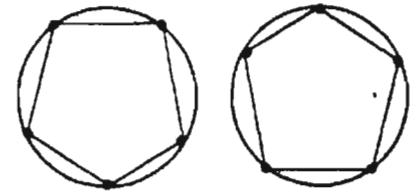


Рис. 17

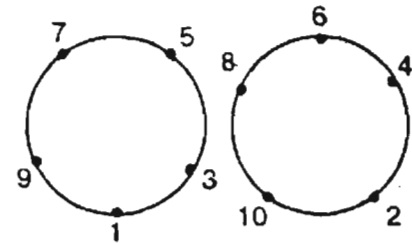


Рис. 18

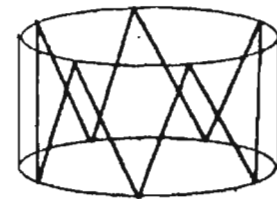


Рис. 19

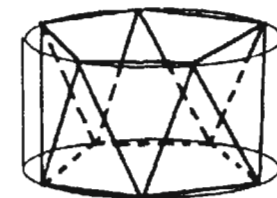


Рис. 20

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

В результате описанных построений получаем 12 точек. Выпуклый многогранник с вершинами в этих точках будет иметь 20 граней, каждая из которых является правильным треугольником, и все его многогранные углы при вершинах будут равны между собой. Тем самым результат описанного построения - икосаэдр (рис. 22).

Декартовы координаты вершин построенного икосаэдра легко вычисляются. Для двух вершин они уже найдены, а что касается остальных 10 вершин икосаэдра, то достаточно заметить, что полярные углы соседних вершин треугольного пояса разнятся на 36° , а их полярные радиусы равны единице.

Остается построить додекаэдр.

Оставляя в стороне способ, предложенный Евклидом (построение "крыш" над гранями куба), вновь воспользуемся свойством двойственности, но теперь уже связывающим додекаэдр и икосаэдр: вершины додекаэдра суть центры (тяжести) треугольных граней икосаэдра.

И значит, координаты каждой вершины додекаэдра можно найти, вычислив средние арифметические соответствующих координат вершин содержащей ее грани икосаэдра (рис. 23).

Замечание

Подвергая полученные правильные многогранники преобразованиям вращения и переноса, можно получить платоновы тела с центрами в произвольных точках и с любыми длинами ребер.

В качестве упражнения полезно написать по предложенным способам программы, генерирующие все платоновы тела.

Виды проектирования

Изображение объектов на картинной плоскости связано с еще одной геометрической операцией - проектированием при помощи пучка прямых. В компьютерной графике используется несколько различных видов проектирования (иногда называемого также проеци-

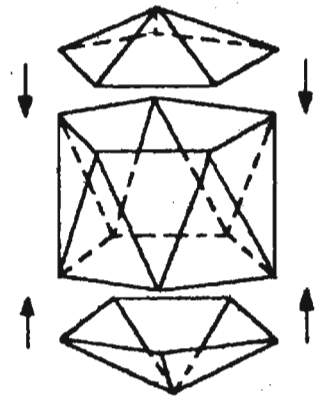


Рис. 21

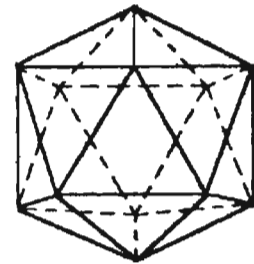


Рис. 22

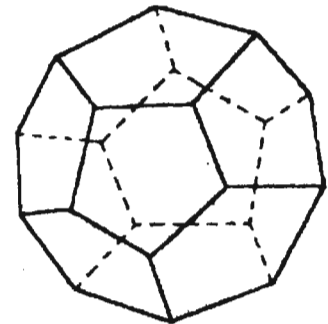


Рис. 23

рованием). Наиболее употребимые на практике виды проектирования суть параллельное и центральное.

Для получения проекции объекта на картинную плоскость необходимо провести через каждую его точку прямую из заданного проектирующего пучка (собственного или несобственного) и затем найти координаты точки пересечения этой прямой с плоскостью изображения. В случае центрального проектирования все прямые исходят из одной точки - центра собственного пучка. При параллельном проектировании центр (несобственного) пучка считается лежащим в бесконечности (рис. 24).

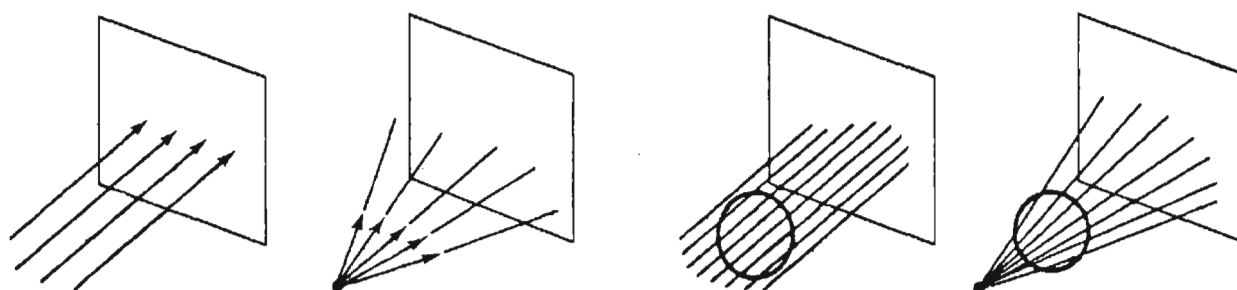


Рис. 24

Каждый из этих двух основных классов разбивается на несколько подклассов в зависимости от взаимного расположения картинной плоскости и координатных осей. Некоторое представление о видах проектирования могут дать приводимые ниже таблицы.

Таблица 1

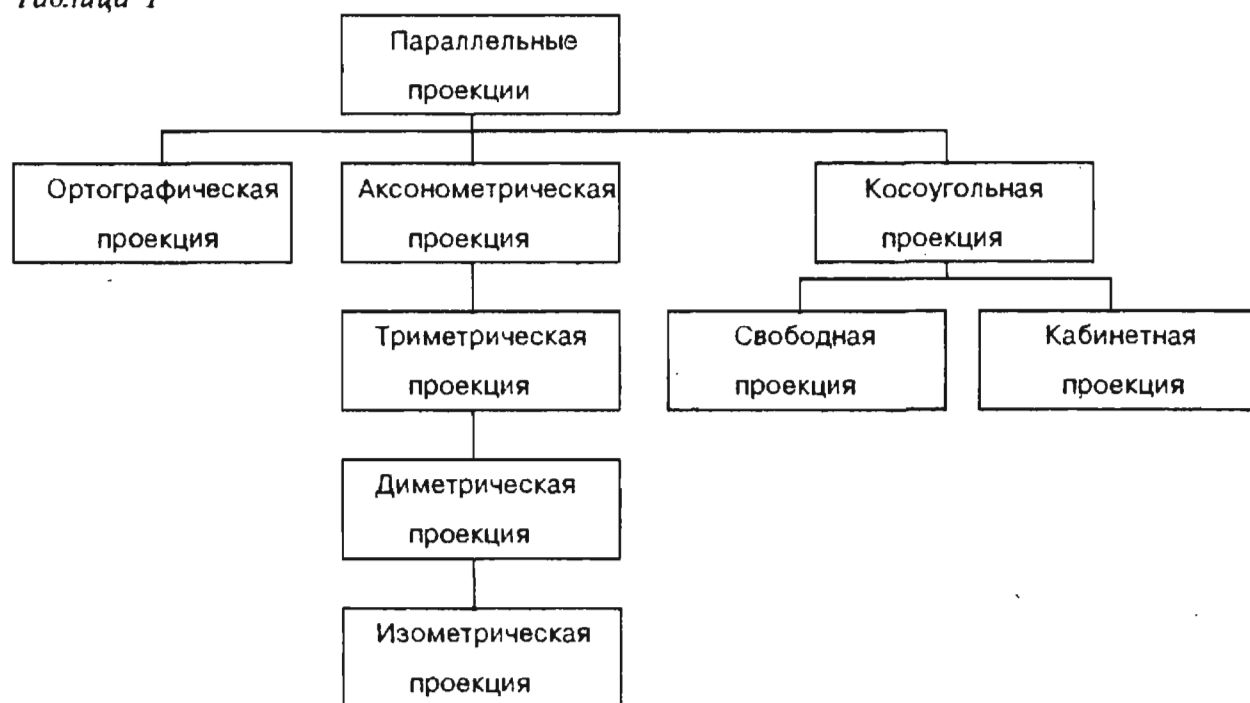
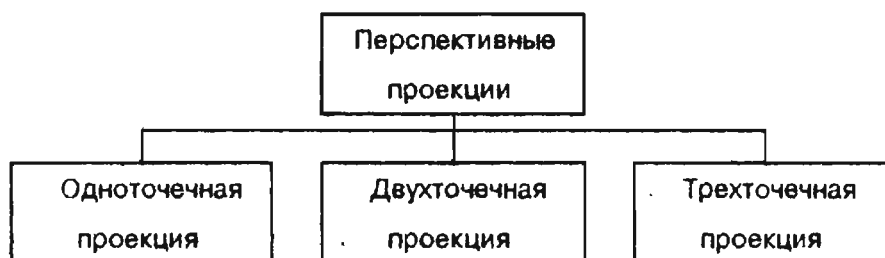


Таблица 2

**Важное замечание**

Использование для описания преобразований проектирования однородных координат и матриц четвертого порядка позволяет упростить изложение и зримо облегчает решение задач геометрического моделирования.

При ортогографической проекции картинная плоскость совпадает с одной из координатных плоскостей или параллельна ей (рис. 25). Матрица проектирования вдоль оси X на плоскость YZ имеет вид:

$$[P_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

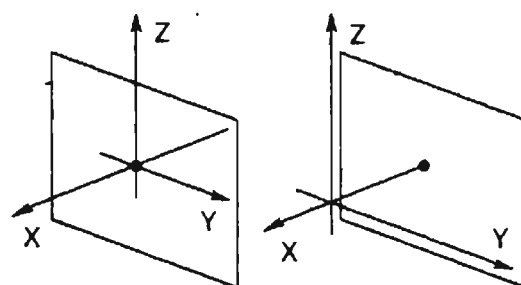


Рис. 25

В случае, если плоскость проектирования параллельна координатной плоскости, необходимо умножить матрицу $[P_x]$ на матрицу сдвига. В результате получаем

$$[P_x] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аналогично записываются матрицы проектирования вдоль двух других координатных осей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{bmatrix}$$

Замечание

Все три полученные матрицы проектирования вырождены.

При аксонометрической проекции проектирующие прямые перпендикулярны картинной плоскости.

В соответствии со взаимным расположением плоскости проектирования и координатных осей различают три вида проекций:

- триметрию - нормальный вектор картинной плоскости образует с осями координатных осей попарно различные углы (рис. 26);
- диметрию - два угла между нормалью картинной плоскости и координатными осями равны (рис. 27);
- изометрию - все три угла между нормалью картинной плоскости и координатными осями равны (рис. 28).

Каждый из трех видов указанных проекций получается комбинацией поворотов, за которой следует параллельное проектирование.

При повороте на угол ψ относительно оси ординат, на угол φ вокруг оси абсцисс и последующего проектирования вдоль оси аппликат возникает матрица

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

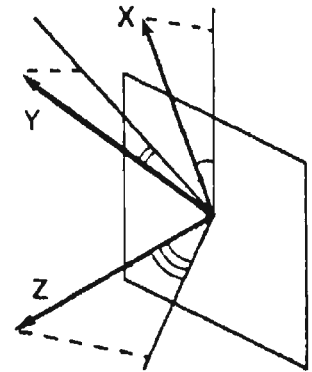


Рис. 26

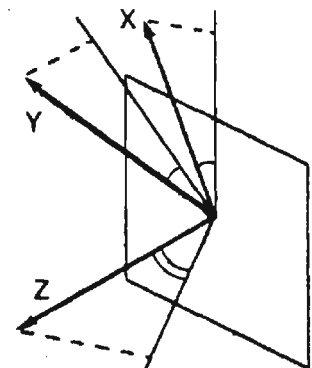


Рис. 27

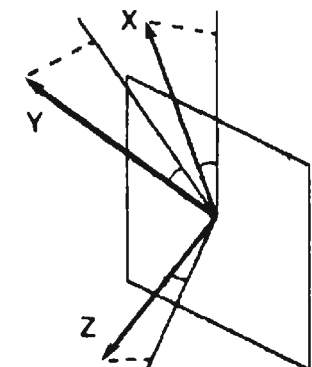


Рис. 28

$$= \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Покажем, как при этом преобразуются единичные орты координатных осей X, Y, Z :

$$(1 \ 0 \ 0 \ 1)[M] = (\cos \psi \ \sin \varphi \sin \psi \ 0 \ 1),$$

$$(0 \ 1 \ 0 \ 1)[M] = (0 \ \cos \varphi \ 0 \ 1),$$

$$(0 \ 0 \ 1 \ 1)[M] = (\sin \psi \ -\sin \varphi \cos \psi \ 0 \ 1).$$

Диметрия характеризуется тем, что длины двух проекций совпадают:

$$\cos^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi = \cos^2 \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\sin^2 \psi = \tan^2 \varphi.$$

В случае изометрии имеем

$$\cos^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi = \cos^2 \varphi,$$

$$\sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \cos^2 \psi = \cos^2 \varphi.$$

Из последних двух соотношений вытекает, что

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{3}, \quad \sin^2 \psi = \frac{1}{2}.$$

При триметрии длины проекций попарно различны.

Проекции, для получения которых используется пучок прямых, не перпендикулярных плоскости экрана, принято называть косоугольными.

При косоугольном проектировании орта оси Z на плоскость XY (рис. 29) имеем:

$$(0 \ 0 \ 1 \ 1) \rightarrow (\alpha \ \beta \ 0 \ 1).$$

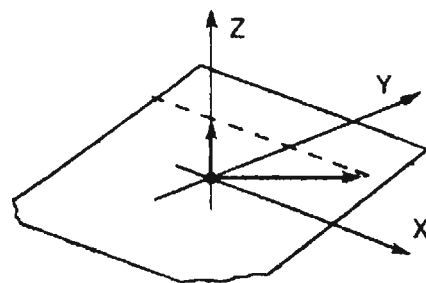


Рис. 29

Матрица соответствующего преобразования имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Выделяют два вида косоугольных проекций: свободную проекцию (угол наклона проектирующих прямых к плоскости экрана равен половине прямого) и кабинетную проекцию (частный случай свободной проекции - масштаб по третьей оси вдвое меньше).

В случае свободной проекции

$$\alpha = \beta = \cos \frac{\pi}{4},$$

в случае кабинетной -

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4}.$$

Перспективные (центральные) проекции строятся более сложно.

Предположим для простоты, что центр проектирования лежит на оси Z в точке $C(0, 0, c)$ и плоскость проектирования совпадает с координатной плоскостью XY (рис. 30). Возьмем в пространстве произвольную точку $M(x, y, z)$, проведем через нее и точку C прямую и запишем соответствующие параметрические уравнения.

Имеем:

$$X^* = xt, \quad Y^* = yt, \quad Z^* = c + (z - c)t.$$

Найдем координаты точки пересечения построенной прямой с плоскостью XY . Из условия $Z^* = 0$ получаем, что

$$t^* = \frac{1}{1 - \frac{z}{c}}$$

и далее

$$X^* = \frac{1}{1 - \frac{z}{c}} x, \quad Y^* = \frac{1}{1 - \frac{z}{c}} y.$$

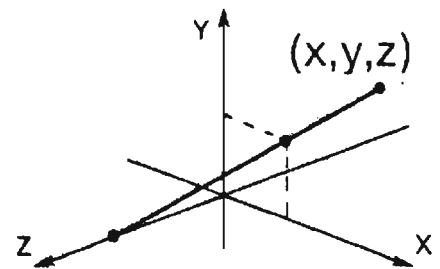


Рис. 30

Интересно заметить, что тот же самый результат можно получить, привлекая матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В самом деле, переходя к однородным координатам, прямым вычислением совсем легко проверить, что

$$(x \ y \ z \ 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(x \ y \ 0 \ 1 - \frac{z}{c} \right)$$

Вспоминая свойства однородных координат, запишем полученный результат в несколько ином виде:

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 & 1 \\ 1 - \frac{z}{c} & 1 - \frac{z}{c} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и затем путем непосредственного сравнения убедимся в том, что это координаты той же самой точки.

Замечание

Матрица проектирования, разумеется, вырождена.

Матрица соответствующего перспективного преобразования (без проектирования) имеет следующий вид:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(обратим внимание на то, что последняя матрица невырождена).

Рассмотрим пучок прямых, параллельных оси Z , и попробуем разобраться в том, что с ним происходит под действием матрицы $[Q]$.

Каждая прямая пучка однозначно определяется точкой (скажем, $M(x, y, 0)$) своего пересечения с плоскостью XY и описывается уравнениями

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = t.$$

Переходя к однородным координатам и используя матрицу $[Q]$, получаем

$$(x \ y \ t \ 1) [Q] = \left(x \ y \ t \ 1 - \frac{t}{c} \right)$$

или, что то же,

$$\left(\frac{x}{1 - \frac{t}{c}} \quad \frac{y}{1 - \frac{t}{c}} \quad -c \frac{t}{t - c} \quad 1 \right)$$

Устремим t в бесконечность.

При переходе к пределу точка $(x \ y \ t \ 1)$ преобразуется в $(0 \ 0 \ 1 \ 0)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно разделить каждую координату на t :

$$\left(\frac{x}{t} \quad \frac{y}{t} \quad 1 \quad \frac{1}{t} \right).$$

Точка $(0 \ 0 \ -c \ 1)$ является пределом (при t , стремящемся к бесконечности) правой части

$$\left(\frac{x}{1 - \frac{t}{c}} \quad \frac{y}{1 - \frac{t}{c}} \quad -c \frac{t}{t - c} \quad 1 \right)$$

рассматриваемого равенства.

Тем самым, бесконечно удаленный (несобственный) центр $(0 \ 0 \ 1 \ 0)$ пучка прямых, параллельных оси Z , переходит в точку $(0 \ 0 \ -c \ 1)$ оси Z .

Вообще, каждый несобственный пучок прямых (совокупность прямых, параллельных заданному направлению), не параллельный картинной плоскости,

$$X = x + lt, \quad Y = y + mt, \quad Z = nt, \quad n \neq 0$$

под действием преобразования, задаваемого матрицей $[Q]$, переходит в собственный пучок

$$(x + lt \ y + mt \ nt \ 1)[Q] = \left(x + lt \ y + mt \ nt \ 1 - \frac{nt}{c} \right)$$

Центр этого пучка

$$\begin{pmatrix} -\frac{lc}{n} & -\frac{mc}{n} & -c & 1 \end{pmatrix}$$

называют точкой схода.

Принято выделять так называемые главные точки схода, которые соответствуют пучкам прямых, параллельных координатным осям.

Для преобразования с матрицей $[Q]$ существует лишь одна главная точка схода (рис. 31). В общем случае (когда оси координатной системы не параллельны плоскости экрана)

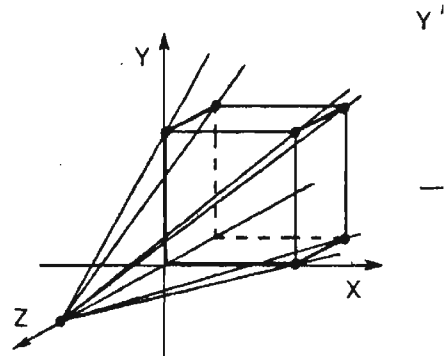


Рис. 31

таких точек три. Матрица соответствующего преобразования следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/a \\ 0 & 1 & 0 & -1/b \\ 0 & 0 & 1 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Пучок прямых, параллельных оси

OX OY

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переходит в пучок прямых с центром

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

или, что то же,

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Точки $(-a, 0, 0)$ и $(0, -b, 0)$ суть главные точки схода.

На рис. 32 изображены проекции куба со сторонами, параллельными координатным осям, с одной и с двумя главными точками схода.

Особенности проекций гладких отображений

В заключение этой главы мы остановимся на некоторых эффектах, возникающих при проектировании искривленных объектов (главным образом поверхностей) на картинную плоскость.

Важно отметить, что описываемые ниже эффекты возникают вне зависимости от того, является ли проектирование параллельным или центральным.

Будем считать для простоты, что проектирование проводится при помощи пучка параллельных прямых, идущих перпендикулярно картинной плоскости, а система координат (X, Y, Z) в пространстве выбрана так, что картинная плоскость совпадает с координатной плоскостью $X = 0$.

Укажем три принципиально различных случая.

1-й случай

Заданная поверхность - плоскость, описываемая уравнением $Z = X$ и проектируемая на плоскость $X = 0$ (рис. 33). Записав ее уравнение в неявном виде

$$X - Z = 0,$$

вычислим координаты нормального вектора. Имеем:

$$\vec{N} = (1, 0, -1).$$

Вектор \vec{L} , вдоль которого осуществляется проектирование, имеет координаты

$$\vec{L} = (1, 0, 0).$$

Легко видеть, что скалярное произведение этих двух векторов отлично от нуля:

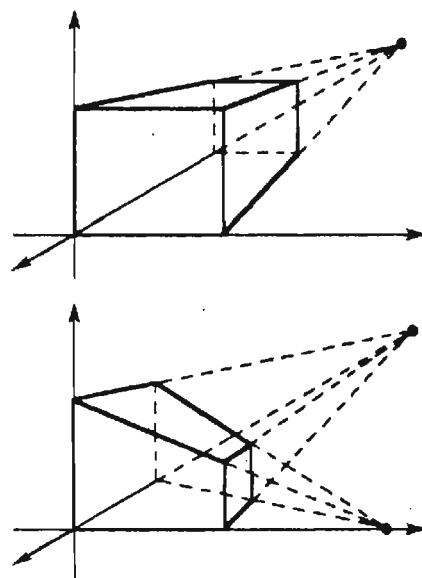


Рис. 32

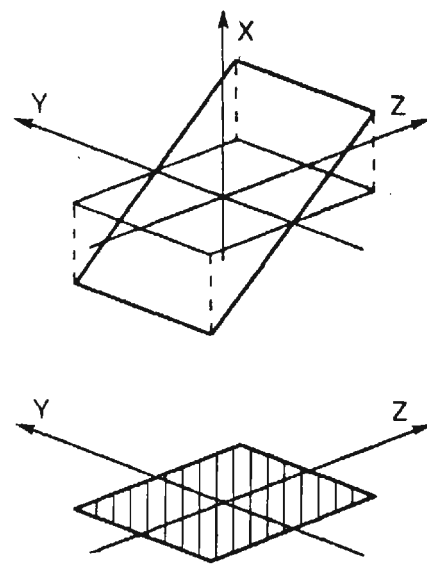


Рис. 33