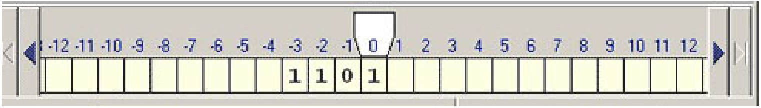
Математическая логика и теория алгоритмов. Лекция 3. Машины Тьюринга.

2020

Неформальное определение машины Тьюринга

Определение

Машина Тьюринга (МТ) это автомат, который имеет потенциально бесконечную в обе стороны ленту, считывающую головку и управляющее устройство.



Неформальное определение машины Тьюринга

Лента разделена на ячейки, в одной ячейке или записан один символ некоторого алфавита или она пуста.

Потенциальная бесконечность ленты понимается в том смысле, что в каждый данный момент времени она имеет конечную заполненную часть, и вместе с тем к этой заполненной части всегда можно добавить как слева, так и справа любые заполненные ячейки.

В каждый момент функционирования машины Тьюринга может быть заполнено только конечное число ячеек.

Имеется некоторое конечное множество символов ленты, которое называется алфавитом ленты и в каждый момент времени каждая ячейка ленты может быть заполнена не более чем одним символом.

Имеется читающая головка, которая в каждый данный момент времени обозревает одну из ячеек ленты.

Неформальное определение машины Тьюринга

Машина действует не непрерывно, а по тактам, в дискретные моменты времени.

На каждом такте работы машина Тьюринга может считать символ, записать вместо него новый и сдвинуть головку на одну ячейку или влево, или вправо или оставить ее на месте.

Для того, чтобы с пустой ячейкой машина Тьюринга могла действовать так же, как и с заполненной некоторым символом ячейкой, вводится специальный символ алфавита, обозначающий пустую ячейку. Таким образом, всегда можно считать, что в любой момент времени читающая головка обозревает ячейку с некоторым символом алфавита.

Неформальное определение машины Тьюринга

Машина обладает некоторым конечным множеством внутренних состояний.

В каждый момент времени машина находится в точности только в одном из этих состояний.

Управляющее устройство ответственно за функционирование машины Тьюринга по тактам.

На каждом такте управляющее устройство находится в каком— либо состоянии из конечного множества состояний и обозревает символ из конечного алфавита ленты.

В зависимости от текущего состояния и прочитанного символа записывает вместо прочитанного символа новый, сдвигает головку на одну позицию или оставляет ее на месте и переходит в новое состояние.

Неформальное определение машины Тьюринга

В множестве состояний выделяются два специальных состояния: начальное и заключительное.
Машина Тьюринга начинает работу из начального состояния и завершает ее, когда переходит в заключительное состояние.

Формальное определение машины Тьюринга

Определение

Алфавит это некоторое конечное множество символов.

Определение

Цепочка над алфавитом это последовательность символов алфавита.

Пример

Алфавит: $\Sigma = \{0, 1\}$, цепочка 0110011.

Определение

Длина цепочки это число символов в цепочке.

Пример

Если ε — пустая цепочка, то $|\varepsilon| = 0$, $|0110011| = 7$.

Формальное определение машины Тьюринга

Множество всех цепочек над алфавитом Σ обозначается Σ^*.

Замечание

Пустая цепочка ε является цепочкой над любым алфавитом.

Определение

Языком над алфавитом Σ называется некоторое подмножество множества Σ^*.

Определение

Конкатенацией цепочек x и y называется цепочка, полученная приписыванием символов цепочки y к цепочке x справа.

Для произвольной цепочки x и пустой цепочки ε справедливо равенство $x\varepsilon = \varepsilon x = x$, поэтому цепочка ε играет роль единицы для операции конкатенации.

Формальное определение машины Тьюринга

Определение

Машиной Тьюринга называется семерка вида:

$$T = (K, \Sigma, \delta, q_1, q_0, \varepsilon, *),$$

где K — конечное множество состояний,
Σ — алфавит ленты,
q_1 — начальное состояние,
q_0 — заключительное состояние,
ε — символ для обозначения пустой ячейки,
$*$ — специальный символ — разделитель цепочек на ленте,
δ —функция переходов, которая описывает поведение машины Тьюринга и представляет собой отображение вида $\delta : K \times \Sigma \to K \times \Sigma \times S$, где $S = \{R, L, E\}$ — направления сдвига головки по ленте.

Формальное определение машины Тьюринга

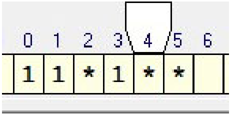
В соответствии с неформальным требованиям к алгоритму в определении машины Тьюринга можно выделить следующие характерные черты:
1) имеется вычислитель — сама машина Тьюринга;
2) машина Тьюринга работает по тактам, что соответствует дискретности выполнения алгоритма;
3) соблюдается требование конечности алгоритма, т.к. множества K и Σ конечны, а, следовательно, конечно и отображение δ;
4) требование детерминированности Машины Тьюринга соответствует детерминированности отображения δ (это значит, что множество команд машины Тьюринга не содержит различных команд с одинаковыми левыми частями).
Вывод: для согласования определения машины Тьюринга с требованиями к алгоритму требуется рассматривать только детерминированные машины Тьюринга (это требование уже учтено в определении функции переходов).

Конфигурации

Определение

Конфигурацией машины Тьюринга $T = (K, \Sigma, \delta, q_1, q_0, \varepsilon, *)$ называется $t = \langle \alpha q a \beta \rangle$, где
α — цепочка слева от головки, $\alpha \in \Sigma^*$;
q — состояние машины Тьюринга, $q \in K$;
a — символ под головкой, $a \in \Sigma$;
β — цепочка справа от головки, $\beta \in \Sigma^*$.

Конфигурация $\langle 11 * 1 q_6 * * \rangle$ означает, что машина Тьюринга находится в состоянии q_6, имеет на ленте цепочку $11 * 1 * *$, причем, слева от головки находится часть этой цепочки $11 * 1$, читающая головка обозревает символ $*$, справа от головки находится цепочка $*$.



Конфигурации

Определение

Элемент функции переходов $qa \to pbr$ (где $q, p \in K$, $a, b \in \Sigma$, $r \in S$) называется командой машины Тьюринга и описывает один такт ее функционирования.

Один такт работы означает следующее: если в состоянии q машина Тьюринга обозревает на ленте символ a, то она переходит в состояние p, записывает вместо a новый символ b и сдвигает головку в направлении r.

Конфигурации

Определение

Конфигурация $\langle \alpha q a \beta \rangle$ непосредственно переходит в конфигурацию $\langle \alpha_n q_n a_n \beta_n \rangle$, если новая конфигурация получилась в результате применения одной команды к исходной конфигурации:
1) команда $qa \to q_n a_n E$, тогда $\alpha = \alpha_n$, $\beta = \beta_n$ $(\langle \alpha_n q a \beta_n \rangle \Rightarrow \langle \alpha_n q_n a_n \beta_n \rangle)$,
2) команда $qa \to q_n bR$, тогда
а) $\beta \neq \varepsilon$, $\beta = a_n \beta_n$, $\alpha_n = \alpha b$ $(\langle \alpha q a a_n \beta_n \rangle \Rightarrow \langle \alpha b q_n a_n \beta_n \rangle)$,
б) $\beta = \varepsilon$, $a_n = \varepsilon$, $\beta_n = \varepsilon$, $\alpha_n = \alpha b$ $(\langle \alpha q a \varepsilon \rangle \Rightarrow \langle \alpha b q_n \varepsilon \varepsilon \rangle)$,
3) команда $qa \to q_n bL$, тогда
а) $\alpha \neq \varepsilon$, $\alpha = \alpha_n a_n$, $\beta_n = b\beta$ $(\langle \alpha_n a_n q a \beta \rangle \Rightarrow \langle \alpha_n q_n a_n b \beta \rangle)$,
б) $\alpha = \varepsilon$, $a_n = \varepsilon$, $\alpha_n = \varepsilon$, $\beta_n = b\beta$ $(\langle \varepsilon q a \beta \rangle \Rightarrow \langle \varepsilon q_n \varepsilon b \beta \rangle)$,
4) если в множестве команд отсутствует команда с левой частью qa; то машина Тьюринга оказывается блокированной, т.е. она никак не реагирует на символ a и до бесконечности продолжает оставаться в одной и той же конфигурации.

Конфигурации

Определение

Конфигурация t переходит в конфигурацию p (обозначается $t \overset{*}{\Rightarrow} p$), если существуют такие конфигурации $t_1, t_2, \ldots, t_k$, что:

$$t = t_1 \Rightarrow t_2 \Rightarrow t_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow t_k = p.$$

Определение

Конфигурация $\langle \alpha q_1 a \beta \rangle$ машины Тьюринга $T = (K, \Sigma, \delta, q_1, q_0, \varepsilon, *)$, содержащая начальное состояние q_1, называется начальной, а конфигурация $\langle \alpha q_0 a \beta \rangle$; содержащая заключительное состояние q_0, называется заключительной, причем если в данной конфигурации цепочка α слева от головки пустая $(\alpha = \varepsilon)$, то соответственно начальная конфигурация называется стандартной начальной конфигурацией, а заключительная — стандартной заключительной.

Способы представления МТ

1) представление машины Тьюринга с помощью множества команд. Правила формирования команд:

а) начальному пункту алгоритма ставится в соответствие начальное состояние q_1 машины Тьюринга;

б) циклы в алгоритме реализуются так, чтобы последнее действие цикла соответствовало переходу в то состояние, которое соответствует началу цикла;

в) последовательное выполнение пунктов алгоритма обеспечивается переходом в соответствующие этим пунктам смежные состояния;

г) последний пункт алгоритма вызывает переход в заключительное состояние q_0.

Способы представления МТ

2) представление машины Тьюринга графом.
Для того, чтобы представить машину Тьюринга в виде графа, надо каждое состояние сделать вершиной этого графа, а каждой команде поставить в соответствие помеченную дугу.
Команде $pa \to qbr$ соответствует дуга из вершины p в вершину q с меткой $a \to br$. Для того, чтобы обозначить начальную и конечную вершины, их обычно выделяют специальным образом ($\bullet$ — начальная вершина, $\circ$ — конечная вершина).

Способы представления МТ

3) представление машины Тьюринга таблицей.

Если каждому состоянию поставим в соответствие столбец таблицы, а каждому символу — строку, то для одной команды $pa \to qbr$ на пересечении строки a (читаемый символ a) и столбца p (исходное состояние p) указывается выполняемое действие brq (записать символ b, перейти в состояние q и сдвинуть головку в направлении r).

Пример

Пример

Построить машину Тьюринга, которая для заданной цепочки из 0 и 1 строит ее инверсию, т. е. заменяет в цепочке все знаки 0 на 1 и знаки 1 на 0.

Будем предполагать, что в начальный момент машина Тьюринга обозревает первый символ исходной цепочки, а после преобразования цепочки головка возвращается к начальному символу результата.

Пример

Алгоритм в словесной форме:
а) Пока не ε, читаем 0 или 1, записывая инверсию прочитанных символов — символы 1 или 0 соответственно, и сдвигаем головку право. Тем самым мы последовательно инвертируем каждый символ и в результате сдвигаем головку в позицию, непосредственно следующую за преобразованной цепочкой. За преобразованной цепочкой находится ячейка с "пустым" символом.
б) Читаем ε, пишем ε, сдвигаем головку влево. Следовательно, головка обозревает последний символ результирующей цепочки. Теперь необходимо вернуться к началу цепочки.
в) Пока не ε, читаем 0 или 1 с восстановлением и сдвигаем головку влево (термин "читать с восстановлением" означает, что прочитанный символ записывается на ленту без изменения).
г) Читаем ε с восстановлением и сдвигаем головку вправо; тем самым установили головку на первый символ результирующей цепочки.

Пример

Команды машины Тьюринга:

$q_1 1 \to q_1 0R$,

$q_1 0 \to q_1 1R$,

$q_1 \varepsilon \to q_2 \varepsilon L$,

$q_2 0 \to q_2 0L$,

$q_2 1 \to q_2 1L$,

$q_2 \varepsilon \to q_0 R$.

Таблица:

	q_1	q_2
0	$1Rq_1$	$0Lq_2$
1	$0Rq_1$	$1Lq_2$
ε	εLq_2	εRq_0

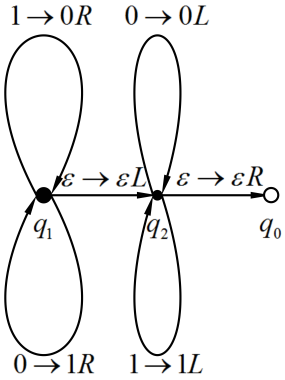
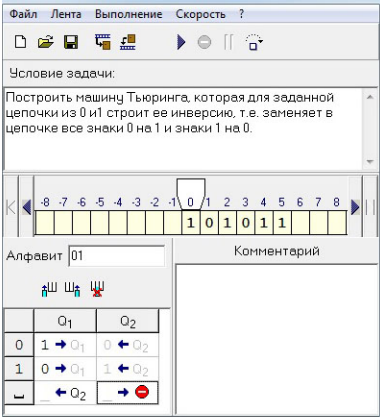


Рис.: 1



Тренажер можно найти по ссылке:
http://kpolyakov.spb.ru/prog/turing.htm

Функции, вычислимые по Тьюрингу

Мы можем с каждой машиной Тьюринга связать некоторый алгоритм. Возьмем произвольную цепочку над алфавитом Σ, запишем ее на ленте и запустим машину Тьюринга $T = (K, \Sigma, \delta, q_1, q_0, \varepsilon, *)$ из начального состояния q_1. Если машина Тьюринга когда–нибудь остановится, то появившуюся на ленте цепочку можно рассматривать как результат работы алгоритма.

Можно на любом алфавите рассматривать машины Тьюринга, которые:

а) никогда не прекращают работу;

б) на любых исходных данных машина Тьюринга всегда закончит свою работу через конечное число шагов;

в) на некоторых исходных данных машина Тьюринга работает бесконечно, а на некоторых завершает работу.

Функции, вычислимые по Тьюрингу

Для простоты будем записывать натуральные числа в единичном (унарном) коде, в котором число k представляется словом $\underbrace{11\ldots1}_{k} = 1^k$, состоящим из k единиц.

Для разделения числовых аргументов $1^{x_1}, 1^{x_2}, \ldots, 1^{x_n}$ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем использовать символ – разделитель $*$. Тогда аргументы функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ всегда имеют

$$1^{x_1} * 1^{x_2} * \ldots * 1^{x_n}.$$

Пример

Пусть дана функция $f(x, y, z) = x + y + z$, тогда запись аргументов этой функции на ленте машины Тьюринга имеет вид $1^x * 1^y * 1^z$, а значение функции — вид 1^{x+y+z}.

Функции, вычислимые по Тьюрингу

Определение

Машина Тьюринга $T = (K, \Sigma, \delta, q_1, q_0, \varepsilon, *)$ вычисляет функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если выполняются следующие условия:
1) для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащих области определения $Dom(f)$ функции f, машина Тьюринга из начальной конфигурации, имея на ленте представление аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, переходит в заключительную конфигурацию, имея на ленте представление значения функции:
$A_1 q_1 A_2 \overset{*}{\Rightarrow} B_1 q_0 B_2$,
$A_1 A_2 = 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n}$,
$B_1 B_2 = 1^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.
2) для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не принадлежащих $Dom(f)$, машина Тьюринга T из начальной конфигурации, имея на ленте представление аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, работает бесконечно: $A_1 q_1 A_2 \overset{*}{\Rightarrow} \infty$.

Функции, вычислимые по Тьюрингу

Определение

Если начальная конфигурация является стандартной начальной конфигурацией, а заключительная — стандартной заключительной, то говорят, что машина Тьюринга правильно вычисляет функцию f:
1)$q_1 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} q_0 1^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$;
2)$q_1 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} q_0 \infty$.

Определение

Функция называется вычислимой (правильно вычислимой), если существует машина Тьюринга, вычисляющая (правильно вычисляющая) эту функцию.

Замечание

В дальнейшем, если не оговорено противное, под вычислимостью будем понимать правильную вычислимость.

Функции, вычислимые по Тьюрингу

Для того, чтобы доказать вычислимость функции, а в перспективе и существование алгоритма, необходимо построить соответствующую машину Тьюринга. Непосредственные построения трудоемки, а часто представляют практически невыполнимый процесс в силу громоздкости и необозримости такого построения. Поэтому необходимо рассмотреть операции над машинами Тьюринга, чтобы получить инструменты для построения сложных машин Тьюринга из простых машин.

Функции, вычислимые по Тьюрингу

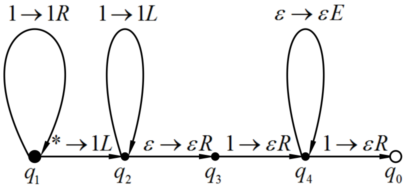
Пример

Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию $f(x, y) = x + y - 1$.

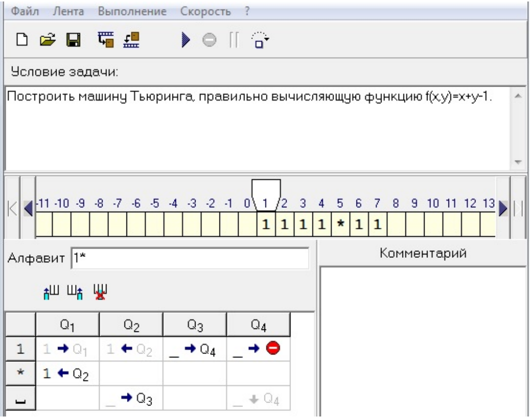
В соответствии с определением требуемая машина Тьюринга должна выполнять следующие действия:

$$q_1 \overset{*}{\Rightarrow} \begin{cases} \infty, & x + y = 0, \\ q_0 1^{x+y-1}, & x + y - 1 > 0. \end{cases}$$

Указанные действия выполняет следующая машина Тьюринга:



Пример



Тренажер можно найти по ссылке:
http://kpolyakov.spb.ru/prog/turing.htm