

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. И. И. ПОЛЗУНОВА»

Факультет информационных технологий

Кафедра Прикладная математика

А.В. Сорокин

ЗАДАНИЕ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕМЕ
«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

Методические материалы к выполнению упражнения
для построения моделей задач линейного программирования

Барнаул 2022

УДК 681.3

Сорокин А.В. Задание для упражнения по теме «Математические модели в задаче линейного программирования». Алт. госуд. технич. ун-т им. И. И. Ползунова. - Барнаул, 2022. – 21 с.

В учебных материалах изложены некоторые ответы на вопросы по теме «Математические модели в задаче линейного программирования». Специально созданные и подобранные примеры позволяют в полной мере изучить основные особенности построения математических моделей, используемых задачах линейного программирования. Учебные материалы предназначены для студентов, обучающихся по техническим и экономическим направлениям бакалавриата.

Содержание

1. Основные сведения	4
2. Задача.....	5
3. Математическая модель.....	5
3.1. Целевая функция.....	5
3.2. Ограничения	5
4. Задание к упражнению.....	6
5. Варианты заданий.....	8
6. Список вопросов по теме работы.....	20
7. Список литературы.....	21

1. Основные понятия

Задачи линейного программирования представляют собой оптимизационные задачи, описываемые линейными математическими моделями. В общем виде постановка оптимизационной задачи математического программирования состоит в определении таких значений переменных x_1, x_2, \dots, x_n , при которых целевая функция достигает наибольшего или наименьшего значения

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max \text{ (или min)},$$

а сами переменные удовлетворяют одновременно системе ограничений

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\geq) b_i, i=1,2,\dots,m$$

где f и g , - заданные функции, b_i - заданные числа. Приведенная оптимизационная задача и методы ее решения являются предметом изучения дисциплины «Математическое программирование».

Если все функции f и g , линейны, то соответствующая задача математического программирования является задачей линейного программирования. Линейность предполагает наличие двух свойств: *пропорциональности* и *аддитивности*. *Пропорциональность* означает, что вклад каждой переменной в целевую функцию и ограничения прямо пропорционален величине этой переменной. *Аддитивность* заключается в том, что и целевая функция, и ограничения для каждого значения индекса i представляют собой сумму вкладов от различных переменных. Математическая модель задачи линейного программирования в общем виде формулируется следующим образом.

Найти значения неотрицательных переменных x_1, x_2, \dots, x_n , доставляющих максимум (или минимум) линейной целевой функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \text{ (или min)}, \quad 1$$

удовлетворяющих одновременно всем ограничениям неравенствам/равенствам:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq (\geq, =) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq (\geq, =) b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq (\geq, =) b_m \end{aligned} \quad 2$$

Содержательный смысл рассматриваемых в линейном программировании задач требует также выполнения условий неотрицательности переменных $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$.

2. Задача. Руководство фирмы предполагает производить продукцию двух видов A_1 и A_2 . На их производство затрачиваются сырьевые ресурсы время работы оборудования и денежные средства. На изготовление одного изделия вида A_1 затрачивается 0,3 усл. ед. сырья 0,2 ч работы оборудования и 1,6 ден. ед. На одно изделие вида A_2 затрачиваются соответственно 0,4 усл. ед. сырья 0,5 ч работы оборудования и 1 ден. ед.

Фирма имеет на своем складе недельный запас сырья в количестве 170 усл. ед. и может использовать оборудования не больше чем 160 ч. в неделю. На изготовление продукции планируется выделять 800 ден. ед. в неделю.

Руководство фирмы желает знать, сколько изделий каждого вида следует выпускать фирме в неделю, если реализация одного изделия вида A_1 приносит 2 ден. ед. прибыли, а реализация одного изделия вида A_2 приносит 4 ден. ед. прибыли?

3. Математическая модель

Переменные. Так как необходимо определить объемы производства каждого вида изделий, переменными в модели являются: x_1 – количество выпущенных за неделю изделий вида A_1 и x_2 – количество выпущенных за неделю изделий вида A_2 .

3.1. Целевая функция. Руководство фирмы желает получить максимальную прибыль от реализации произведенных фирмой изделий. Поэтому целевая функция должна представлять собой суммарную прибыль от реализации произведенных изделий. Так как прибыль от реализации одного изделия A_1 равна 2 ден. ед., то недельная прибыль от его продажи составит $2x_1$ ден. ед. Аналогично, прибыль от реализации x_2 изделий вида A_2 составит $4x_2$ ден. ед. в неделю.

Целевая функция, выражающая суммарную недельную прибыль от реализации выпускаемой фирмой продукции, будет равна:

$$F = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

3.2. Ограничения. Ограничения в математической модели отражают ограниченность материальных, временных и денежных ресурсов, используемых при производстве продукции.

Запишем ограничение на расход сырья. Поскольку на одно изделие вида A_1 затрачивается 0,3 усл. ед. сырья, то на производство продукции A_1 в объеме x_1 в неделю будет затрачено древесины в объеме $0,3x_1$. Аналогично, поскольку на одно изделие вида A_2 затрачивается 0,4 усл. ед. сырья, то на производство продукции A_2 в объеме x_2 в неделю будет затрачено древесины в объеме $0,4x_2$. Тогда суммарный расход сырья составит $0,3x_1 + 0,4x_2$ и он не может превосходить имеющегося в наличии на складе объема сырья (170 усл. ед.). Таким образом получаем первое ограничение на расход сырья:

$$0,3x_1 + 0,4x_2 \leq 170.$$

Ограничение на время использования оборудования можно записать следующим образом. На изготовление одного изделия вида A_1 затрачивается 0,2 ч. работы оборудования, а на изготовление этих изделий в объеме x_1 будет затрачено $0,2x_1$ ч в неделю. Аналогично, если на изготовление одного изделия вида A_2 затрачивается 0,5 ч работы оборудования, то на изготовление изделий в объеме x_2 будет затрачено $0,5x_2$ ч в неделю. Суммарное время работы оборудования в неделю равно $0,2x_1 + 0,5x_2$ и не может превышать предельно допустимого времени (160 ч.) работы оборудования в неделю. Тогда ограничение на временной ресурс работы оборудования можно записать в виде:

$$0,2x_1 + 0,5x_2 \leq 160.$$

Точно так же составляется ограничение на денежные средства которые ограничены 800 ден. ед. в неделю. Денежные затраты на изготовление одного изделия вида A_1 составляют 1 6 ден. ед. а денежные затраты идущие на изготовление x_1 изделий составят $1\,6x_1$ ден. ед. в неделю денежные затраты на изготовление одного изделия вида A_2 составляют 1 0 ден. ед. а денежные затраты идущие на изготовление x_2 изделий составят $1\,0x_2$ ден. ед. в неделю. Суммарные недельные затраты на изготовление изделий обоих видов будут равны $1\,6x_1 + 1\,0x_2$ и они не должны превышать ассигнованной в неделю суммы в 800 ден. ед. Таким образом, получим третье ограничение:

$$1,6x_1 + 1x_2 \leq 800.$$

По смыслу задачи объемы выпускаемой продукции не могут быть отрицательными, поэтому к приведенным выше ограничениям необходимо добавить еще два: $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Таким образом, получаем следующую математическую модель задачи:

$$F = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$0,3x_1 + 0,4x_2 \leq 170, \quad (2)$$

$$0,2x_1 + 0,5x_2 \leq 160, \quad (3)$$

$$1,6x_1 + 1x_2 \leq 800, \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Математическая модель линейна, поскольку переменные x_1 и x_2 входят в нее в первой степени.

4. Задание к упражнению

1. Используя раздел 1 данного учебного материала и возможно литературу, указанную в конце материала, изучить постановку задачи линейного программирования (ЗЛП).
2. Научиться строить математическую модель задачи линейного программирования по формулировке неформальной задачи, описываемой некоторую предметную область.
3. Написать отчет о проделанной работе в текстовом редакторе Microsoft Word (LibreOffice Writer). Отчет должен содержать титульный лист по форме, содержание, Постановку задачи, решение задачи в виде математической модели, рассмотренной в данном учебном материале. В отчете можно использовать скриншоты. В отчете должно быть Заключение, где рассказывается о решенной задаче, и способах преодоления трудностей, возникших при решении данной задачи. Должен быть список литературы, за основу которого можно взять список из данного учебного материала.

5. Варианты заданий

Задание 1. Небольшая фабрика изготавливает два вида красок: для наружных (№ 1) и внутренних (№ 2) работ. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два вида ресурсов – А и В. Максимально возможные суточные запасы этих ресурсов составляют 6 т и 8 т соответственно. Суточные расходы ресурсов А и В на 1 т соответствующих красок приведены в таблице.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску для внутренних работ (№ 2) никогда не превышает спрос на краску для наружных работ (№ 1) более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску №2 никогда не превышает 2 т в сутки.

Прибыль в сутки от реализации одной тонны красок № 1 равна 3 тыс. ден. ед., а для краски № 2 – 2 тыс. ден. ед.

Вид ресурса	Расход ресурсов на изготовление 1 т		Суточный запас ресурса, Т
	Краска №1	Краска №2	
А	1	2	6
В	2	1	8

Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы суточная прибыль от реализации продукции была максимальной?

Задание 2. Пошивочное предприятие намечает выпуск двух видов костюмов — мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 чел./день трудозатрат. На мужской костюм требуется 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 чел./день трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 чел./день трудозатрат.

Определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль, если прибыль от реализации одного женского костюма составляет 10 ден. ед., а одного мужского — 20 ден. ед. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.

Задание 3. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в таблице. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Учитывая, что изделия А и В могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, кг
	А	В	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	30	40	

Задание 4. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на		Общее количество ресурсов
	Стол	Шкаф	
Древесина (м ³):			
1 вида	0,2	0,1	40
2 вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (человеко-час)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов следует изготавливать, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Задание 5. Для производства двух видов изделий - А и В - используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.

Найти план выпуска изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия, ч		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования, ч
	А	В	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	14	18	

Задание 6. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при каждом способе раскроя приведено в таблице. В ней же указаны величины отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок при раскрое по способам 1 и 2, шт.	
	1	2
1	2	6
2	5	4
3	2	3
Величина отходов (кв. см)	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

Задание 7. На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое

Вид корма	Ежедневное количество корма, усл. ед.		Общее количество корма, усл. ед.
	Лисица	Песец	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки (руб.)	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

Задание 8. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров - А и В. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для изготовления одной полки типа А требуется 2 кв. м материала, а для полки типа В требуется 3 кв. м материала. Компания может получить до 1200 кв. м материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин машинного времени, а для изготовления одной полки типа В требуется 30 мин машинного времени. Машину можно использовать 160 ч в неделю.

Считая что полки производятся круглосуточно в три смены прибыль от продажи одной полки типа А составляет 3 ден. ед. а от продажи одной полки типа В ден. ед. определить сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю чтобы получить максимальную прибыль от их продажи.

Задание 9. Небольшая фирма производит два вида продукции: столы и стулья. для изготовления одного стула требуется 3 фута древесины, а для изготовления одного стола - 7 футов. На изготовление одного стула уходит 2 часа рабочего времени, а на изготовление одного стола - 8 часов. Каждый стул приносит 1 долл. прибыли, а каждый стол - 3 долл. Сколько стульев и сколько столов должна изготовить эта фирма, если она располагает 420 футами древесины и 400 часами рабочего времени и хочет получить максимальную прибыль?

Задание 10. Некая фирма выпускает два набора удобрений для газонов - обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 фунта азотных, 4 фунта фосфорных и 1 фунт калийных удобрений, а в улучшенный - 2 фунта азотных, 6 фунтов фосфорных и 3 фунта калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10 фунтов азотных, 20 фунтов фосфорных и 7 фунтов калийных удобрений. Обычный набор удобрений стоит 3 долл., а улучшенный - 4 долл.

Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

Задание 11. На имеющихся у фермера 400 акрах земли он планирует посеять кукурузу и сою. Сев и уборка кукурузы требуют на каждый акр 200 долл. затрат, а сои - 100 долл. На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. долл. Каждый акр, засеянный кукурузой, приносит 40 бушелей урожая, а каждый акр, засеянный соей, - 80 бушелей.

Фермер заключил договор на продажу своего урожая, по которому каждый бушель кукурузы принесет ему 3 долл. прибыли, а каждый бушель сои - 1 долл. прибыли. Однако, согласно этому договору, фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. бушелей.

Фермеру хотелось бы знать, сколько акров земли нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль.

Задание 12. На заводе используется сталь трех марок - А, В и С, запасы которых равны соответственно 10, 16 и 12 ед. Завод выпускает два вида изделий. Для изделия 1 требуется по одной единице стали всех марок. Для изделия 2 требуется 2 ед. стали марки В, 1 ед. стали марки С и не требуется сталь марки А. От реализации единицы изделия первого вида завод получает 300 руб. прибыли, а вида 2 - 200 руб. прибыли.

Составить план выпуска продукции, дающий наибольшую прибыль.

Задание 13. Производитель безалкогольных напитков располагает четырьмя разливочными машинами типа А и четырьмя разливочными машинами типа В. Машина А спроектирована для пол-литровых бутылок, а машина В - для литровых. Машина А может выпускать до 50 пол-литровых бутылок в 1 мин, а машина В - до 30 литровых бутылок в 1 мин. Каждая из машин работает ежедневно по 6 ч, при пятидневной рабочей неделе. Прибыль от продажи одной пол-литровой бутылки составляет 4 цента, а одной литровой бутылки - 10 центов. Объем недельной продукции не может превосходить 259 200 л; рынок за неделю принимает не более 288 000 пол-литровых бутылок и не более 180 000 литровых бутылок.

Сколько бутылок пол-литровых и литровых должна выпускать каждая машина А и В за 1 мин, чтобы максимизировать недельную прибыль производителя от продажи безалкогольных напитков, при имеющихся средствах?

Задание 14. Телевизионная компания производит два вида телевизоров - "Астро" и "Космо". Имеются две производственные линии, каждая для своего типа телевизоров. Мощность линии по производству "Астро" составляет 70 телевизоров в день, а "Космо" - 50 единиц в день. Цех А производит LCD-экраны. В этом цехе на производство одного LCD-экрана к телевизору "Астро" требуется потратить 1,8 чел-ч, а на производство LCD-экрана к "Космо" - 1,2 чел-ч. В настоящее время в цехе А на производство LCD-экранов к обеим маркам телевизоров может быть затрачено не более 120 чел-ч в день. В цехе Б производятся шасси (корпус с электронной начинкой). В этом цехе на производство одной единицы шасси как к телевизору "Астро", так и к "Космо" требуется затратить 1 чел-ч. В цехе Б на производство шасси к обеим маркам телевизоров может быть затрачено не более 90 чел-ч. Продажа каждого телевизора марки "Астро" обеспечивает получение прибыли в размере 15 тыс.с.р., а марки "Космо" - 20 тыс.р.

1. Если компания может продать столько телевизоров марки "Астро", сколько она произведет, то каков должен быть ежедневный план производства телевизоров этой марки?
2. На сколько тыс.р. в день увеличится прибыль, если ресурс времени в цехе А возрастет на 2 чел-ч? (Ответ на этот вопрос можно дать, используя двойственные оценки.)

Задание 15. Чулочно-носочная фирма производит и продает два вида товаров. Фирма получает прибыль в размере 120 руб. от производства и продажи каждой единицы товара 1 и в размере 40 руб. от производства и продажи каждой единицы товара 2. Фирма состоит из трех подразделений. Затраты труда (чел-дни) на производство этих товаров в каждом из подразделений указаны в таблице.

Подразделение	Трудозатраты, чел-дней на 1 шт.	
	товар 1	товар 2
1	1	2
2	1	3
3	2	3

Руководство рассчитало, что в следующем месяце фирма будет располагать следующими возможностями обеспечения производства трудозатратами. 800 чел-дней в подразделении 1, 600 - в подразделении 2 и 2000 - в подразделении 3.

1. Какую максимальную прибыль может получить фирма (руб.)?
2. На сколько увеличится прибыль, если объем использования трудовых ресурсов в каждом из подразделений возрастет на 0,1% ?

Задание 16. Мастер Гамбс - владелец небольшого мебельного цеха. Он производит три типа столов: А, Б, и В. Каждая модель стола требует определенных затрат времени на выполнение трех операции производства заготовок, сбора заготовок и покраски. Мастер имеет возможность продать все столы, которые он производит. Более того, модель В может быть продана и без покраски. Мастер Гамбс нанимает несколько рабочих, которые работают у него по совместительству, так что количество чел-ч, отводимое на каждый вид работ, изменяется от месяца к месяцу. Используйте данные таблицы и постройте модель линейного программирования, которая помогла бы мастеру найти такую программу выпуска продукции, которая максимизировала бы его прибыль в следующем месяце. Предполагается, что по каждому виду работ возможны трудозатраты до 100 чел-ч.

Модель	Заготовка, чел-дней	Сборка, чел-дней	Покраска, чел-дней	Прибыль, тыс р./шт.
А	3	4	5	2,5
Б	1	2	5	2,0
В	4	5	4	5,0
Неокрашенные В	4	5	0	3,0

1. Какую максимальную прибыль может получить мастер Гамбс (тыс.р.)?
2. Следует ли продавать неокрашенные столы типа В?
3. На сколько увеличится прибыль, если объем использования трудовых ресурсов на каждой работе возрастет на 1 %? (Для ответа на этот вопрос не требуется проведения оптимизационных расчетов.)

Задание 17. Фирма "Пегас и Парнас" производит три типа химикатов. На предстоящий месяц фирма заключила контракт на поставку следующих количеств трех типов химикатов:

химикаты	продажи по контракту, кг
1	1000
2	2500
3	3800

Производство фирмы ограничено наличием времени на обработку в двух химических реакторах. Каждый вид химикатов должен быть обработан сначала в реакторе 1, а затем в реакторе 2. В следующей таблице приведен фонд рабочего времени в часах, имеющийся у каждого реактора в следующем месяце, а также время на обработку одного килограмма каждого химиката в каждом реакторе (ч/кг).

	Химикаты			Возможности реактора, ч
	1	2	3	
Реактор 1	0,05	0,04	0,01	200
Реактор 2	0,02	0,06	0,03	150

Из-за ограниченных возможностей, связанных с временем на обработку в реакторах, фирма "Пегас и Парнас" не имеет достаточных мощностей, чтобы удовлетворить спрос за счет

производимой продукции. Следовательно, она должна купить какие-то химикаты на стороне, расширив за счет этих покупок свои возможности и перепродав эти химикаты своим потребителям. Ниже приводится таблица затрат на производство химикатов самой компанией и на покупку их на стороне.

Химикаты	Затраты на производство, тыс р./кг	Затраты на покупку, тыс р./кг
1	2,50	2,80
2	1,75	2,50
3	2,90	3,25

Цель фирмы состоит в том, чтобы выполнить заказ клиента с минимальными издержками. Это позволит ей максимизировать прибыль. Другими словами, фирма должна принять решение: сколько и каких продуктов надо производить у себя, а сколько надо купить.

1. Каковы минимальные издержки на выполнение контракта (тыс.р.)?
2. Сколько химикатов вида 2 следует купить (кг)?
3. До какой величины должны увеличиться затраты на покуп-ку химикатов вида 2, чтобы фирма "Пегас и Парнас"отказалась от их приобретения на стороне? (Для ответа на этот вопрос не требуется проведения оптимизационных расчетов.)

Задание 18. Фирма "Полесов" испытывает необыкновенный рост спроса на два типа мангалов для приготовления шашлыков на открытом воздухе - газовые мангалы и угольные мангалы. Фирма заключила контракт на поставку ежемесячно 20 тыс. угольных и 10 тыс. газовых мангалов. Производство мангалов ограничивается возможностями трудозатрат на обработку в трех цехах: производства, сборки и упаковки. В таблице показано, сколько чел-ч. затрачивается в каждом цехе на производство каждой единицы продукции и сколько чел-ч. имеется в наличии в каждом из цехов.

Цех	Трудозатраты на один мангал, чел-ч./шт.		Количество чел-ч. в наличии, в месяц
	угольный	газовый	
производства	0,10	0,20	2500
сборки	0,15	0,25	4000
упаковки	0,05	0,05	2000

Из-за ограниченности количества человеко-часов фирма не может полностью удовлетворить спрос своими силами. Поэтому она провела переговоры с другим производителем, который и настоящее время располагает избыточными мощностями. Этот производитель согласился поставлять фирме в любом соотношении угольные мангалы по 5 тыс.р. за штуку и газовые мангалы по 10 тыс.р. за штуку. Эти цены превышают себестоимость мангалов на заводе фирмы "Полесов" на 1 тыс.р. за каждый угольный и на 1,5 тыс.р. за каждый газовый мангал. Задача фирмы состоит и том, чтобы найти такое соотношение закупаемых и производимых мангалов, которое привело бы к минимальным затратам при удовлетворении спроса.

1. Каковы минимальные издержки на выполнение контракта (тыс. р.)
2. Сколько газовых мангалов следует приобрести фирме "Полесов"?
3. До какой величины должны увеличиться издержки на приобретение одного газового мангала, чтобы фирма "Полесов" отказалась от их покупки на стороне? (Для ответа на этот вопрос не требуется проведения оптимизационных расчетов.)

Задание 19. Совхоз закупает корма трех видов. Цены на корма разные. В кормах содержатся питательные вещества четырех видов. Требуется так составить кормовой рацион, чтобы в нем содержалось необходимое количество питательных веществ и затраты на покупку кормов были минимальными. Данные приводятся в таблице.

Питательные вещества, кг/т	Виды кормов			Нормы содержания кормов в рационе
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	4	6	не менее 20
A_2	3	1	0	ровно 4,28
A_3	5	8	3	не менее 25, не более 35
A_4	2	0	4	не менее 40
Цена за 1 т корма, тыс руб	400	200	300	

1. Какое количество корма вида B_2 следует закупить (т)?
2. Какое общее количество кормов следует закупить (т)?
3. Каковы минимальные затраты на покупку кормов (тыс.р.)?

Задание 20. В аптеке продается семь наименований поливитаминов. Каждое наименование содержит витамины трех различных типов. Цены на витамины различны. Необходимо пройти профилактический курс, в течение которого с минимальными суммарными затратами получить 100 единиц витамина А, 80 - витамина С и 120 единиц витамина В₆. Необходимое количество поливитаминов покупается одновременно.

Витамины	Содержание витаминов, ед./г							Всего необходимо
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
А	5	0	2	0	3	1	2	100
С	3	1	5	0	2	0	1	80
В ₆	1	0	3	1	2	0	6	120
Цена за 1 г, тыс. р.	4	1	5	6	3,5	7	4	

1. Какое общее количество поливитаминов следует принять (г)?
2. Какое количество поливитамина P_1 следует принять (г)?
3. Каковы минимальные затраты на профилактический курс (тыс.р.)?

Задание 21. "Южная алкогольная компания" импортирует смеси трех сортов виски - ирландского, шотландского и канадского. Смешивают их согласно рецептам, устанавливающим максимум или минимум процентного содержания ирландского и

канадского виски в каждой смеси. Компания стремится к получению максимальной прибыли ежедневно.

Инструкция по составлению смесей

Смесь	Спецификация	Цена за 1 л смеси, тыс. р.
"Старый Джек"	не меньше, чем 60% ирландского не больше, чем 20% канадского	68
"Специальное"	не больше, чем 60% канадского не меньше, чем 15% ирландского	57
"Юный Френзи"	не больше, чем 50% канадского	45

Запасы трех основных видов виски и их стоимость показаны ниже.

Сорт виски	Наличие, л/день	Стоимость 1 л
Ирландское	2000	70
Шотландское	2500	50
Канадское	1200	40

1. Сколько ежедневно следует производить смеси "Старый джек" (л)?
2. Какова максимальная прибыль в день (тыс.р.)?

Задание 22. Мощности завода по производству удобрений позволяют произвести в текущем месяце 1000 т нитратов, 1800 т фосфатов и 1200 т поташа. В результате смешения этих активных ингредиентов с инертными, запасы которых не ограничены, могут быть получены три типа удобрений. В таблице указано содержание активных ингредиентов (нитратов, фосфатов и поташа) в смеси

Тип удобрений	Процентное содержание активных ингредиентов			Цена тыс. р./т
	нитраты	фосфаты	поташ	
1	5	10	5	40
2	5	10	10	50
3	10	10	10	60
Цена, тыс. р./т	160	40	100	

Цена инертных ингредиентов составляет 5 тыс.р./т. Затраты смешения, упаковки и продажи составляют 15 тыс.р./т для каждого типа удобрений. Существует соглашение о поставке 6000 т удобрений типа

1. Сколько удобрений типа 3 следует производить (т)?
2. Какова максимальная прибыль (тыс.р.)?

Задание 23. На кондитерской фабрике изготавливают три вида восточных сладостей, для которых используют миндаль, фундук и арахис. Миндаль покупается по цене 1,2 тыс. р. за кг, фундук - 1 тыс.р., арахис - 0,5 тыс.р.

Продукт 1 должен содержать не менее 50% миндаля и не более 25% фундука, продукт 2 - не менее 25% миндаля и не более 50% фундука, продукт 3 может содержать любое количество миндаля, фундука и арахиса. Продажная цена продукта 1 - 800 р. за кг, продукта

2 – 600 р., продукта 3 – 450 р. за кг. Запасы сырья ограничены: миндаля - 100 кг, фундука - 100 кг, арахиса - 60 кг.

1. Какое количество продукта 2 следует производить, чтобы фабрика получала максимальную прибыль (кг)?
2. Какова максимальная прибыль (тыс.р.)?

Задание 24. На заводе используется краска трех марок - А, В и С, запасы которых равны соответственно 12, 17 и 11 ед. Завод выпускает два вида изделий. Для изделия 1 требуется по одной единице краска всех марок. Для изделия 2 требуется 2 ед. краски марки В, 1 ед. краски марки С и не требуется краска марки А. От реализации единицы изделия первого вида завод получает 300 руб. прибыли, а вида 2 - 200 руб. прибыли.

Составить план выпуска продукции, дающий наибольшую прибыль.

Задание 25. Из 500 листов железа первого размера и 300 листов железа второго размера несколькими способами выкраиваются три вида деталей. Даны нормы одновременного выхода деталей по различным способам.

Виды детали	Листы размера 1			Листы размера 2	
	Способ раскроя				
	1	2	3	4	5
	Количество деталей				
1	0	2	9	6	5
2	4	3	4	5	4
3	10	16	0	8	0

1. Определите максимальное число комплектов деталей если комплект состоит из четырех деталей вида 1, трех деталей вида 2 и двух деталей вида 3?
2. Сколько листов железа размера 2 раскраивается по первому способу?
3. Каково максимальное количество комплектов?
4. На сколько изменится максимальное количество комплектов, если в комплект решено добавить третью деталь вида 3?

Задание 26. Небольшая фирма производит два вида продукции: шкафы и столы. Для изготовления одного стола требуется 6 футов древесины, а для изготовления одного шкафа - 14 футов. На изготовление одного стола уходит 5 часов рабочего времени, а на изготовление одного шкафа - 16 часов. Каждый стол приносит 20 долл. прибыли, а каждый шкаф - 50 долл. Сколько стульев и сколько столов должна изготовить эта фирма, если она располагает 620 футами древесины и 600 часами рабочего времени и хочет получить максимальную прибыль?

Задание 27. При раскрое деталей единственного изделия на швейной фабрике используются два артикула ткани. Изделие собирается из двух деталей, причем каждая из этих деталей может быть получена путем раскроя ткани любого типа. Ткани можно раскраивать тремя способами, выход деталей каждого типа указан в следующей таблице.

Способ раскроя	Ткань 1		Ткань 2	
	1-й тип детали	2-й тип детали	1-й тип детали	2-й тип детали
1	8	0	12	0
2	0	3	0	4
3	4	1	6	2

На фабрику ткани 1 поступает в два раза больше (по длине), чем ткани 2. Выход готовых изделий должен быть максимальным.

1. Какая доля ткани 2 должна раскраиваться по способу 1 ?
2. На сколько (%) изменится выход готовых изделий по сравнению с первоначальным, если на фабрику будет поступать равное количество обеих тканей ?

Задание 28. На кондитерской фабрике изготавливают три вида творожков, для которых используют творог, масло и сгущенка. Творог покупается по цене 200 р. за 1 кг, масло по цене 600 р. за 1 кг., сгущенка – 200 р за 1 кг.

Продукт 1 должен содержать не менее 50% творога и не более 25% масла, продукт 2 - не менее 25% творога и не более 50% сгущенки, продукт 3 может содержать любое количество творога, масла и сгущенки. Продажная цена продукта 1 - 900 р. за кг, продукта 2 – 600 р., продукта 3 – 750 р. за кг. Запасы сырья ограничены: творог - 100 кг, масло - 100 кг, сгущенки - 65 кг.

3. Какое количество продукта 2 следует производить, чтобы фабрика получала максимальную прибыль (кг)?
4. Какова максимальная прибыль (тыс.р.)?

Задание 29. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силы и оборудования, необходимыми для производства любого из четырех видов производимой продукции. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида продукции, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в следующей таблице.

Виды ресурсов	Виды продукции				Запасы ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила, ч	22	14	18	30	400
Оборудование, станко - ч.	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу продукции тыс. руб.	30	25	56	48	

По государственному заказу, принятому предприятием, должно быть выпущено не менее 1 ед. продукции первого вида и 5 ед. – второго вида.

Необходимо определить, сколько продукции каждого вида надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной, и не какой вид продукции (первый или второй) выгоднее всего принимать дополнительный заказ?

Задание 30. Имеется четыре вида продуктов питания: P_1, P_2, P_3, P_4 . Известна стоимость единицы каждого продукта $c_1=1$, $c_2=2$, $c_3=1,5$, $c_4=3$. Из этих продуктов необходимо составить пищевой рацион, который должен содержать не менее $b_1=100$ единиц белков, не менее $b_2=200$ единиц углеводов, не менее $b_3=110$ единиц жиров. Причем известно, в единице продукта P_1 содержится a_{11} единиц белков, a_{12} единиц углеводов и a_{13} единиц жиров и т.д. (см. таблицу 1).

Таблица 1. Содержимое белков, углеводов и жиров в продуктах.

Элемент	белки	углеводы	жиры
P_1	$a_{11}=25$	$a_{12}=38$	$a_{13}=24$
P_2	$a_{21}=15$	$a_{22}=48$	$a_{23}=29$
P_3	$a_{31}=34$	$a_{32}=58$	$a_{13}=32$
P_4	$a_{41}=45$	$a_{42}=28$	$a_{13}=42$

Требуется составить пищевой рацион x_1, x_2, x_3, x_4 продуктов P_1, P_2, P_3, P_4 , соответственно, чтобы обеспечить заданные условия при минимальной стоимости

$$F=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4 \rightarrow \min.$$

6. Список вопросов по теме работы

1. Что представляют собой задачи линейного программирования?
2. Приведите общую постановку оптимизационной задачи математического программирования.
3. Какая математическая модель называется линейной?
4. Что такое целевая функция?
5. Выберите правильный ответ. В максимизационной модели линейного программирования определяется:
 - а) максимум целевой функции;
 - б) переменные из области допустимых решений, доставляющие максимум целевой функции;
 - в) минимум целевой функции на множестве допустимых решений;
 - г) максимум целевой функции с последующим определением, является ли полученное решение допустимым.
6. Что такое область допустимых решений и допустимое решение?
7. Что понимается под пропорциональностью и аддитивностью в линейной математической модели?
8. Для чего в модель линейного программирования включается требование неотрицательности переменных:
 - а) такую модель легче решать;
 - б) такая модель больше соответствует реальности;
 - в) ни первое ни второе;
 - г) и первое и второе.
9. Какие из следующих математических выражений могут встретиться в модели линейного программирования? Если какие-то из них не могут входить в линейную модель, укажите почему.
 - а) $3x_1 + x_2 \leq \sqrt{0,58}$
 - б) $\sqrt{x_1 + x_2} \geq 4$
 - в) $x_1^2 + 5x_2 < 7^{1/3}$;
 - г) $x_1 + x_1 x_2 + x_2 = 3$;
 - д) $2,5x_1 + 3,3x_2 = 7$.
10. Приведите общую постановку задачи линейного программирования.
11. С помощью какой надстройки в Excel решаются на компьютере задачи линейного программирования?
12. Как в Excel заносятся ограничения математической модели?
13. Как в Excel задается неотрицательность переменных?
14. Занесите с клавиатуры в ячейку A1 формулу $3x_1 + x_2$, если переменная x_1 находится в ячейке B2, а переменная x_2 - в ячейке C4.
15. Как занести в Excel формулу $1,3x_1 + 4,8x_2 + 5,3x_3$ с помощью диалогового окна Мастер функций?

7. Список литературы

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие, 2-е изд. перераб. и доп., М.: Финансы и статистика, 2006. – 432 с.: ил.
2. Гладких Б.А. Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики. Ч.1. Введение в исследование операций. Линейное программирование: Учебное пособие. – Томск: Из-во НТЛ, 2009, 200 с.
3. Горлач Б.А. Исследование операций: Учебное пособие. – СПб: Из-во «Лань», 2013, 448 с.
4. Есипов Б.А. Методы исследование операций: Учебное пособие. – СПб: Изд-во «Лань», 2013, 304 с.
5. Мадера А.Г. Математические модели в управлении: Компьютерное моделирование в Microsoft Excel: Лабораторные работы. - М.:РГГУ, 2007. – 121 с.
6. Новиков, А.И. Экономико-математические методы и модели : учебник / А.И. Новиков. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 532 с. : ил. - (Учебные издания для бакалавров). - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-394-02615-7; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454090> (05.12.2020).
7. Ржевский С.В. Исследование операций: Учебное пособие. – СПб: Изд-во «Лань», 2013, 480 с.