10.3 Неявные функции

Неявный способ задания функции одной переменной рассматривался в 1 части пособия. В частности, мы учились дифференцировать функцию, неявно заданную уравнением **F(x**,**y)** = **0**. Здесь мы более точно сформулируем условия существования неявной функции, выведем формулу для её производной. Затем распространим эти результаты на неявные функции нескольких переменных.

Равенство **F(x**,**y)** = **0** может определять на плоскости самые разные множества точек, даже пустое множество или одну точку (приведите такие примеры!). Однако часто это множество представляет собой ***кривую****.* Например, уравнение  определяет эллипс. Но не всякая кривая является графиком функции **y** = **f(x)**. На эллипсе, например, каждому **x∈(**–**a**, **a)** соответствуют ***два*** различных значения **y**. Но если рассматривать не весь эллипс, а лишь его часть, лежащую в окрестности какой–либо точки, то получим график некоторой функции. Исключение составляют точки **(**–**a**, **0)**,  **(a**, **0)**. Даже в очень малой окрестности каждой из них эллипс не является графиком функции. Заметим, что как раз в этих точках касательная к эллипсу вертикальна (т.е. параллельна оси **OY**)

**Y .**

**-a 0 a x**

– **a a x**

Уточним понятие неявной функции. Будем говорить, что уравнение **F(x**,**y)** = **0** задаёт в окрестности точки **(x0**, **y0)**  неявную функцию, если существует **ε** > **0** такое, что на интервале **(x0**–**ε**, **x0**+**ε)** определена функция **y** = **y(x)**, для которой , причём **y(x0)** = **y0**.

Сформулируем точно условия существования неявной функции.

***Теорема 5***. Пусть в окрестности точки **(x0**, **y0)**  функция **F(x**, **y)** непрерывна, причём **F(x0**, **y0)** = **0**. Если частная производная  непрерывна в точке **(x0, y0)**, причём , то уравнение **F(x**, **y)** = **0** задаёт в окрестности **(x0**, **y0)** непрерывную неявную функцию **y** = **y(x)**.

Доказательство этой теоремы мы не рассматриваем. Отметим только, что условие  как раз и означает, что касательная в этой точке не является вертикальной.

**у**

**y0 ⎯ ⏐  • ⏐**

**⏐ ⏐**

**x0** – **ε x0  x0** + **ε x**

***Теорема 6***. Пусть уравнение **F(x**,**y)** = **0** определяет в окрестности точки **(x0**, **y0)** неявную функцию **y** = **y(x)**. Пусть  непрерывны в этой окрестности, . Тогда функция **y** = **y(x)** дифференцируема, причём

.

***Пример 5***. Найти производную функции **y** = **y(x)**, заданной неявно уравнением  в окрестности точки **(2**, –**3)**.

***Решение****.* Находим частные производные функции :

**y**

**0 2**

**-3**

**2**

–**3 •**

**x**



Так как , то неявная функция определена, и её производная .

В частности, 

***Замечание****.* В этом примере функцию **y** = **y(x)** можно задать явно:

, .

Теперь её производная вычисляется по обычным правилам:

.

Однако первый способ потребовал меньше вычислений. А иногда перейти к явному заданию невозможно.

***Пример 6***. Найти производную  функции, заданной в окрестности точки **(0**, **π)** уравнением **cos(x**+**y)**+**3x**+**y**  **π**–**1**.

***Решение****.* Здесь нельзя выразить **y** через **x** явно. Пусть

**F(x**, **y)** = **cos(x** + **y)** + **3x** + **y** – **π** + **1**. Тогда **F(0**, **π)** = **0**, а частная производная . Значит, по теореме 5, в окрестности точки **x** = **0** определена неявная функция. Так как , то её производная в точке **x** = **0**  равна: 

Функция нескольких переменных тоже может быть задана неявно. Условия существования такой функции и формулы для её частных производных аналогичны рассмотренным выше, приведём их без доказательства.

***Теорема 7***. Пусть в окрестности точки **P0(x01**, **x02**, ..., **x0n**, **y0)** пространства **Rn**+**1** функция **F(x1**, ..., **xn**, **y)** и её первые частные производные непрерывны. Если **F(P0)** = **0**, а , то равенство **F(x1**, ..., **xn**, **y)** = **0** задаёт в окрестности точки **(x01**, ..., **x0n)** функцию

**y** = **y(x1**, ..., **xn)**, причём её частные производные можно вычислить по формулам:



Рассмотрим теперь вопрос о системе неявных функций. По определению, система равенств

 (\*)

неявно задаёт функции



если эти функции **ϕ1**, ...,  **ϕm** определены на некоторой области **U⊆Rn** , причём

**∀(x1**, ..., **xn)∈U**,  **∀i** = **1**, ..., **m fi(x1**, ..., **xn**, **ϕ1(x1**, ..., **xn)**, **ϕ2(x1**, ..., **xn)**, ..., **ϕm(x1**, ..., **xn))** = **0**.

Сформулируем условия, при которых система (\*) определяет неявные функции **y1**, ..., **ym** . Для этого нам потребуется понятие якобиана. ***Якобианом*** (или определителем Якоби) системы функций **f1(x1**, ..., **xn**, **y1**, ..., **ym)**, ..., **fm(x1**, ..., **xn**, **y1**, ..., **ym)**

по переменным **y1**, ..., **ym** называется определитель

 .

Конечно, якобиан является функцией от переменных **x1**, ..., **xn**, **y1**, ..., **ym**.

***Теорема 8***. Пусть в системе (\*) функции **f1**, ..., **fm** и их частные производные первого порядка по всем переменным непрерывны в некоторой окрестности **E** точки **P0(x01**,...,**x0n**,**y01**,...,**y0m)**, причём **fi(P0)** = **0 (∀i)**. Пусть выполнено условие: . Тогда система (\*) неявно задаёт функции

**y1** = **ϕ1(x1**,...,**xn)**,  **y2** = **ϕ2(x1**,...,**xn)**, ..., **ym** = **ϕm(x1**,...,**xn)**

на некоторой окрестности **U⊆Rn** точки **(x01**, ..., **x0n)**, причём

**ϕi(x01**, ..., **x0n)** = **y0i** ,  **i** = **1**, **2**, ..., **m**.

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении частных производных функций **yi  = ϕi(x1**, ..., **xn)**,заданных неявно системой (\*). Пользуясь правилом дифференцирования сложных функций (теорема 13, 9.4.2), дифференцируем по **x1** каждое из равенств (\*):

,

…………………………………………………………..,

.

Получилась система линейных уравнений относительно . Её можно решить, если определитель этой системы , т.е. якобиан системы функций

**f1**, ..., **fm** по переменным **y1**, ..., **ym**,не равен в данной точке **0**.

***Пример 7***. Функции **y(x)**,  **z(x)**  заданы неявно системой равенств



в окрестности точки **(1**, –**3**, **1)**. Найти .

***Решение****.* Дифференцируем каждое равенство по **x**, по правилу дифференцирования сложных функций: . При **x** = **1**  получается система линейных уравнений:  . Решая её, находим:  .

10.4 Условные экстремумы

Постановку задачи сначала поясним на примере .

**Z**

**Y**

**(2, 1)**

**x**

**y**

**x**

**•**

**(2**,**1)**

***Пример 8***. На прямой **2x**+**y** = **5**  найти точку, в которой функция **z** = **x2**+**y2** имеет локальный минимум.

***Решение****.* Обратим внимание: минимум функции **z** = **x2**+**y2** требуется найти, рассматривая не произвольные точки **(x**, **y)**, а лишь те, которые удовлетворяют ***условию***  (или уравнению связи) **2x**+**y** = **5**. В данном случае задача решается просто: используя уравнение связи, исключим одну из переменных: **y** = **5**–**2x**. Получим функцию одной переменной: **z** = **x2**+**(5**–**2x)2** = **5x2**–**20x**+**25**.

Её экстремумы находим по обычным правилам:

**z′**=**10x**–**20**; **10x**–**20** = **0** ⇒ **x** = **2**.

Так как **z″** = **10**, **z″(2)** > **0** , то **x** = **2** – точка минимума. Из уравнения связи находим:

**y** = **5**–**2x** = **1**. Итак, **(2**, **1)** – точка условного минимума.

Однако в более сложных задачах не всегда можно аналитически выразить одну переменную через другие. Кроме того, уравнений связи может быть несколько. Поэтому мы рассмотрим общий метод решения таких задач – ***метод множителей Лагранжа***.Начнём с определения.

Пусть дана функция **f(x1**, ..., **xn**, **y1**, ..., **ym)**  и уравнения связи:

 (\*)

Точка **P0(x01**, ..., **x0n**, **y01**, ..., **y0m)**,удовлетворяющая условиям (\*), называется ***точкой условного минимума*** функции **f**, если существует окрестность **U**  точки **P0**  такая, что

**∀P∈U fi(P)** = **0 (i** = **1**, ..., **m) ⇒ f(P0)** ≤ **f(P)**.

Аналогично определяется и понятие условного максимума.

Для решения задачи о нахождении условных экстремумов рассмотрим так называемую ***функцию Лагранжа***:

**F(x1**, …, **xn**, **y1**, … , **ym**, **λ1**, … , **λm)** = **f(x1**, … , **xn**, **y1**, … , **ym)** +**fi(x1**, … , **xn**, **y1**, … , **ym)**.

Здесь новые переменные **λ1**, … , **λm** называются ***множителями*** Лагранжа. Их количество равно числу уравнений связи. С помощью функции Лагранжа дадим необходимое условие условного экстремума.

***Теорема* *9***. Пусть **P0** – точка условного экстремума функции **f(x1**, … , **xn**, **y1**, … , **ym)** при условии (\*), причём якобиан **(P0) ≠ 0**. Тогда существуют такие числа **λ1**, **λ2**, … , **λm** , что частные производные первого порядка функции Лагранжа в точке **P0** обращаются в **0**.

Ясно, что необходимое условие условного экстремума можно сформулировать и так:

**P0** – точка условного экстремума ⇒ **dF(P0)** = **0**.

Достаточные условия приведём без доказательства.

***Теорема* *10***. Пусть в точке **P0** выполнены необходимые условия экстремума функции **f(x1**, … , **xn**, **y1**, … , **ym)** с уравнениями связей **f1** = **0**, … , **fm** = **0** (т.е. **dF(P0)** = **0**). Если второй дифференциал функции Лагранжа **d2F(P0)** > **0** при всех значениях приращений **Δx1**, … , **Δxn**, **Δy1**, … , **Δyn**, для которых справедливы равенства **df1(P0)** = **0**, … , **dfn(P0)** = **0**, то **P0** – точка условного минимума. Аналогично, если **d2F(P0)** < **0** (при ***таких*** значениях приращений), то **P0** – точка условного максимума.

***Замечание***. Второй дифференциал **d2F(P0)** при указанных ограничениях является квадратичной формой от переменных **Δx1**, … , **Δxn**, **Δy1**, … , **Δyn**  (и не зависит от ****). Действительно, слагаемые , очевидно, равны **0**. Далее, так как , то, собирая слагаемые с **,** получим (в точке **P0** ):





***Пример* *9***. Исследовать функцию **z** = **xy** на экстремум при условии **y** + **x2** – **3** = **0**.

***Решение***. Конечно, это упражнение решается просто – методом исключения одной из переменных. Однако мы, для иллюстрации, применим метод множителей Лагранжа.

Рассмотрим функцию Лагранжа: **F(x**, **y**, **λ)** = **xy** + **λ(y** + **x2** – **3)**. Вычислим её частные производные, приравняем их к **0**:

 .

Из первых уравнений: **x** =– **λ**, **y** = **2λ2**. Подставим в последнее уравнение: **2λ2** + **λ2** – **3** = **0** ⇒ **λ** =±**1**. Для **λ** = **1** получаем точку **P1(**–**1**, **2)**, для **λ** =– **1** – точку **P2(1**, **2)**.

Чтобы исследовать найденные точки, рассмотрим второй дифференциал **d2F** :

**d2F** = **(Δx)2** + **2ΔxΔy** + **(Δy)2** = **2λ(Δx)2** + **2ΔxΔy**.

(В соответствии с замечанием, сделанным после теоремы 10, слагаемые с **Δλ** отсутствуют). Рассматривать следует лишь такие значения **Δx**,  **Δy**,при которых **d(y** + **x2** – **3)** == **2xΔx** + **Δy** = **0**.

Рассмотрим сначала точку **P1(**–**1**, **2)**,соответствующую **λ** = **1**.  **d2F(P1)** = **2(Δx)2** + **2ΔxΔy**. С учётом условия  **2xΔx** + **Δy** =– **2Δx** + **Δy** = **0**, получаем: **d2F(P1)** = **2(Δx)2** + **4(Δx)2** > **0**. Значит, **P1(**–**1**, **2)** – точка условного минимума.

Аналогично, **d2F(P2)** =– **2(Δx)2** + **2ΔxΔy**. С учётом условия **2xΔx**  + **Δy** = **2Δx** + **Δy** = **0**, получаем: **d2F(P2)** = – **2(Δx)2** – **4(Δx)2** < **0**. Значит, **P2(1**, **2)** – точка условного максимума.

**Выполнить домашнее задание.**

**1**. Проверить, что данное уравнение определяет в окрестности точки **P(x0**, **y0)** неявную функцию **y**  **y(x)**, найти в этой окрестности **y′(x)**, вычислить **y′(x0)**.

а) **2x2**+**y2**–**5x**+**7y**+**2**  **0**, **P(2**,–**7)**;

б) **xy** + **ln(xy)**  **1**, **P(1**,**1)**.

1. Проверить, что данное уравнение определяет в окрестности точки **P(x0**,**y0**,**z0)**  неявную функцию **z**  **z(x**,**y)**, вычислить , .

а) **x3**–**2yz**+**z3**–**3x**+**5**  **0**,  **P(1**, **2**, **1)**;

б) **x5**+**y5**+**z5**+**xsinz**  **1**, **P(1**, **0**, **0)**.

1. Проверить, что система равенств



задаёт в окрестности точки **(0**,**1**,**1)**  неявные функции **y(x)**, **z(x)**. Вычислить **y′(0)**, **z′(0)**.

1. Найти условные экстремумы:

а) , если ;

б) **f(x**,**y,z)**  **x**–**2y**+**2z**, если **x2**+**y2**+**z2**  **9**.

1. На эллипсе  найти точки, наименее и наиболее удалённые от

точки **P(1**, **0)**.