

Министерство образования и науки Российской Федерации Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И
ОПТИКИ**

**Факультет систем управления и робототехники Реферат-конспект по теме:
“Математическая модель робота-дрона”**

Выполнил студент гр. **R3135**
Носов А. С.
Преподаватель: Перегудин А. А.,
ассистент фак. СУиР

Санкт-Петербург 2021

Содержание

1. [Введение](#)
2. [Вывод математической модели](#)
3. [Математическая модель Simulink](#)
4. [Графики моделирования](#)
5. [Источники](#)

1. Введение

Дрон или квадрокоптер – это летающее беспилотное устройство. Он имеет шесть степеней свободы(Fig. 1). Для поступательного движения необходимо получить наклон устройства, получить этот наклон можно, меняя тягу на двигателях робота, однако при изменении тяги на некоторых двигателях, это приводит к неустойчивости системы, Для обеспечения стабильного полета используются высокоточные датчики с быстрым и надежным алгоритмом управления. При построении этой математической модели будем рассматривать квадрокоптер с жесткой рамой и четырьмя двигателями(Fig. 2).

Поворот по рысканию(рыскание — поворот относительно вертикальной оси) осуществляется с помощью разницы реактивных моментов, производимых двигателями, а изменение углов ориентации квадрокоптера в пространстве происходит за счет разницы в подъемных силах.

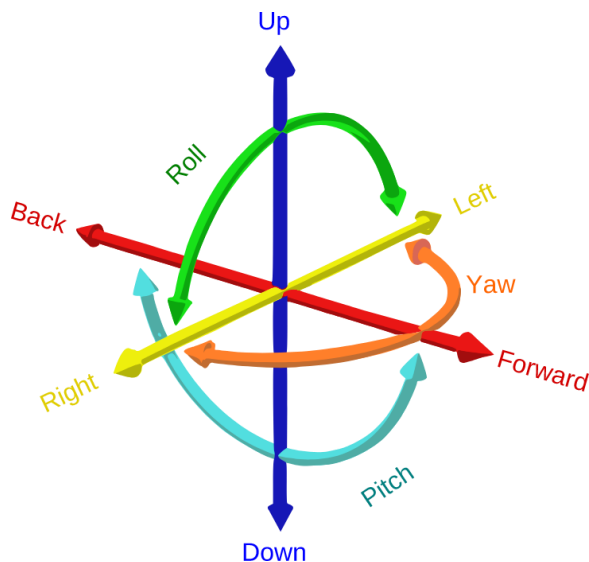


Figure 1.Шесть степеней свободы дрона

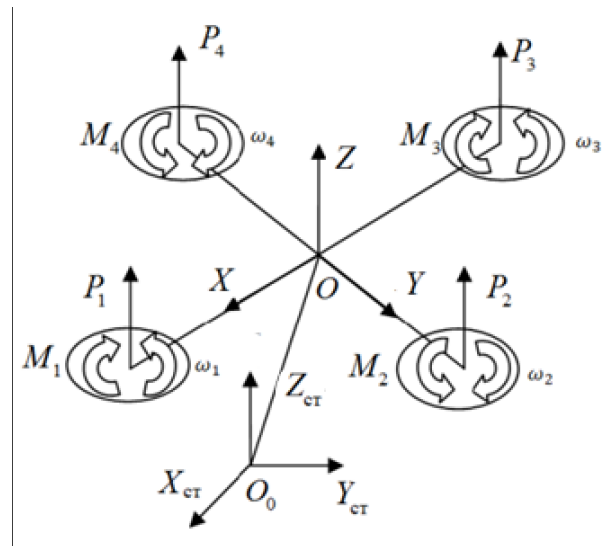


Figure 2. стартовая и связанные системы координат

2. Вывод математической модели

2.1 Системы координат

Мы будем рассматривать движение квадрокоптера относительно стартовой системы координат $O_{CT}X_{CT}Y_{CT}Z_{CT}$, а угловые скорости двигателей, подъемные силы и реактивные моменты будем рассматривать относительно системы OXYZ связанной с устройством. Соотношение между стартовой и связанной системами координат можно записать в виде матрицы направляющих косинусов:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Переход из стартовой системы координат в связанную с квадрокоптером выглядит таким образом: $r_{CB} = R r_{CT}$, следовательно: $r_{CT} = R^{-1} r_{CB}$, так как R – ортогональная, то $R^{-1} = R^T$, где

$$R^T = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \theta \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi & \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix}$$

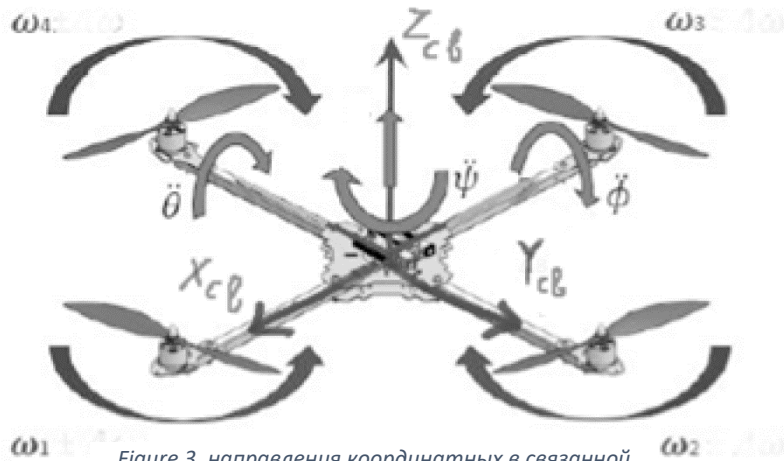


Figure 3. направления координатных в связанной системе

2.2 Математическая модель динамики квадрокоптера

Движение квадрокоптера – это движение центра масс и вращательное движение относительно центра масс. В первую очередь Рассмотрим поступательное движение, которое зависит от силы тяги.

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \quad P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \quad P_i = k \omega_i^2 \quad k = \frac{\rho K_Y s r^2}{2}$$

Здесь P – сила тяги, P_i – сила тяги каждого двигателя, k – коэффициент силы тяги, ρ – плотность воздуха ($1,225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ при 15°C и давлении 101330 Па), K_Y – коэффициент подъемной силы (от 0.2 до 1.3), S – площадь окружности, которую описывает крутящийся винт радиусом r. Соответственно проекция силы тяги в стартовой системе координат $P_{CT} = R^T P$

Учитывать силу сопротивления воздуха в модели не будем, так как её адекватное моделирование весьма сложно. Однако в модели будем учитывать силу тяжести mg .

$$m\ddot{r} = R^T P_{cb} - [0 \ 0 \ 1] \cdot mg$$

Исходя из полученного уравнения получим систему для выражения координат квадрокоптера.

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{P \cdot (\cos \psi \sin \theta \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta)}{m} \\ \ddot{y} = \frac{P \cdot (\cos \psi \cos \theta \sin \varphi + \sin \psi \sin \theta)}{m} \\ \ddot{z} = \frac{P \cdot (\cos \theta \sin \varphi) - mg}{m} \end{cases}$$

Крутящий момент состоит из трех моментов вращения в направлении соответствующих углов.

$$M = \begin{bmatrix} M_\varphi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lk(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ lk(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ \sum_{i=1}^4 (b\omega_i^2 + I_M \dot{\omega}_i) \end{bmatrix}$$

Здесь, l – расстояние между ротором и центром масс квадрокоптера. k – коэффициент силы тяги, b – коэффициент момента, и равен $\frac{\rho K_T S r^3}{2}$. $I_M \dot{\omega}_i$ – это часть очень мала, поэтому в модели её учитывать не будем.

Так как наш квадрокоптер обладает жесткой рамой, то его можно описать с помощью уравнений Эйлера (в компонентной форме $N_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3$; $N_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3$; $N_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1$).

$$\begin{cases} M_\varphi = I_x \dot{\omega}_\varphi + (I_z - I_y) \omega_\theta \omega_\psi \\ M_\theta = I_y \dot{\omega}_\theta + (I_x - I_z) \omega_\varphi \omega_\psi \\ M_\psi = I_z \dot{\omega}_\psi + (I_y - I_x) \omega_\theta \omega_\varphi \end{cases}$$

Из этой системы уравнений можем выразить угловые скорости.

$$\begin{cases} \dot{\omega}_\varphi = (M_\varphi + (I_z - I_y) \omega_\theta \omega_\psi) / I_x \\ \dot{\omega}_\theta = (M_\theta + (I_x - I_z) \omega_\varphi \omega_\psi) / I_y \\ \dot{\omega}_\psi = (M_\psi + (I_y - I_x) \omega_\theta \omega_\varphi) / I_z \end{cases}$$

Углы тангажа (Угол тангажа — угол между продольной осью летательного аппарата или судна и горизонтом) φ, θ, ψ можно рассчитать через угловые скорости

$$\bar{\omega} = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\varphi}$$

Здесь $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ — не являются взаимно перпендикулярными, но они являются компонентами $\bar{\omega}$.

Можно записать суммы их ортогональных проекций на оси x, y, z

$$\omega_x = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta;$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi$$

В отличие от представленной картинке, у нас в системе тройка векторов правая, следовательно знаки поменяются на противоположные.

$$\omega_x = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta;$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi$$

Или по-другому:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega_x - \operatorname{tg} \theta (\omega_y \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi) \\ \dot{\theta} = \omega_y \sin \varphi + \omega_z \sin \varphi \\ \dot{\psi} = \frac{\omega_y \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi}{\cos \theta} \end{cases}$$

2.3 Модели моторов

Модели моторов были взяты из Лекции №2 “Входы, выходы, состояния и более полная модель ДПТ”.

$$\ddot{\omega} = -\frac{R}{L} \dot{\omega} - \frac{k_m k_e}{JL} \omega + \frac{k_m}{JL} U$$

2.4 Итоговая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{P \cdot (\cos \psi \sin \theta \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta)}{m} \\ \ddot{y} = \frac{P \cdot (\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi)}{m} \\ \ddot{z} = \frac{P \cdot (\cos \theta \sin \varphi) - mg}{m} \\ \dot{\omega}_\varphi = (M_\varphi + (I_z - I_y) \omega_\theta \omega_\psi) / I_x \\ \dot{\omega}_\theta = (M_\theta + (I_x - I_z) \omega_\varphi \omega_\psi) / I_y \\ \dot{\omega}_\psi = \frac{M_\psi + (I_y - I_x) \omega_\theta \omega_\varphi}{I_z} \\ \dot{\varphi} = \omega_x - \operatorname{tg} \theta (\omega_y \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi) \\ \dot{\theta} = \omega_y \sin \varphi + \omega_z \sin \varphi \\ \dot{\psi} = \frac{\omega_y \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi}{\cos \theta} \\ \ddot{\omega} = -\frac{R}{L} \dot{\omega} - \frac{k_m k_e}{JL} \omega + \frac{k_m}{JL} U \end{array} \right.$$

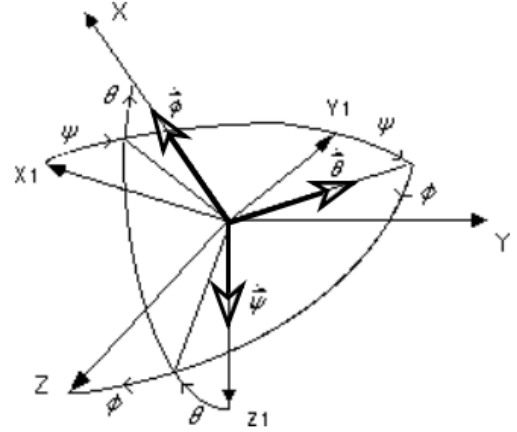


Figure 4. направления углов тангажа

3. Моделирование в Simulink

Модель полностью построена по выше выведенной системе уравнений. Все параметры модели указаны в коде.

3.1 Код для модели:

```
1. clc
2. clear
3. close all
4. %%%%%%%%% Квадрокоптер %%%%
5. m=1; %масса квадрокоптера
6. %%%%%%%%% размеры рамы квадрокоптера %%%%%%%%%
7. a=0.07*3;
8. b=0.07*3;
9. l=0.2*3;
10. c=0.02*2;
11. %%%%%%%%% Параметры двигателя %%%%%%%%%
12. R=8.31;
13. J=0.0023;
14. L=0.0047;
15. %%%%%%%%%
16. airDensity=1.225; %плотность воздуха
17. ks=0.7; %коэффициент подъемной силы
18. r=0.07; %радиус лопастей
19. Sblade=pi*r^2; %площадь окружности, описываемой лопастью
20. Ke=0.49; %
21. Km=Ke;
22. maxU=8; %Максимальное напряжение подаваемое на моторы
23. %%%%%%%%% Расчет некоторых постоянных %%%%%%%%%
24. S=l*c^4+a*b; %площадь поверхности дрона
25. kf=ks*r^2*airDensity*Sblade/2; %коэффициент силы тяги
26. Ip=(1.8*r)^2*0.015/12; %момент инерции лопасти
27. Im=0.0135^2*0.045/2; %момент инерции мотора
28. Ix=(m-0.045*4)*a^2/12+2*0.045*1^2; %момент инерции относительно x
29. Iy=(m-0.045*4)*a^2/12+4*0.045*1^2; %момент инерции относительно y
30. Iz=(m-0.045*4)*a^2/4+2*0.045*1^2; %момент инерции относительно z
31. g=9.8; %ускорение свободного падения
32. U1=90; %напряжение на моторы в %(на каждый из моторов)
33. U2=90;
34. U3=90;
35. U4=90;
36. Simulation = sim('DroneModel_2.slx');
37. plot3(Simulation.x.Data, Simulation.y.Data, Simulation.z.Data,
'r');
38. hold on
39. grid minor
```

3.2 Фото модели

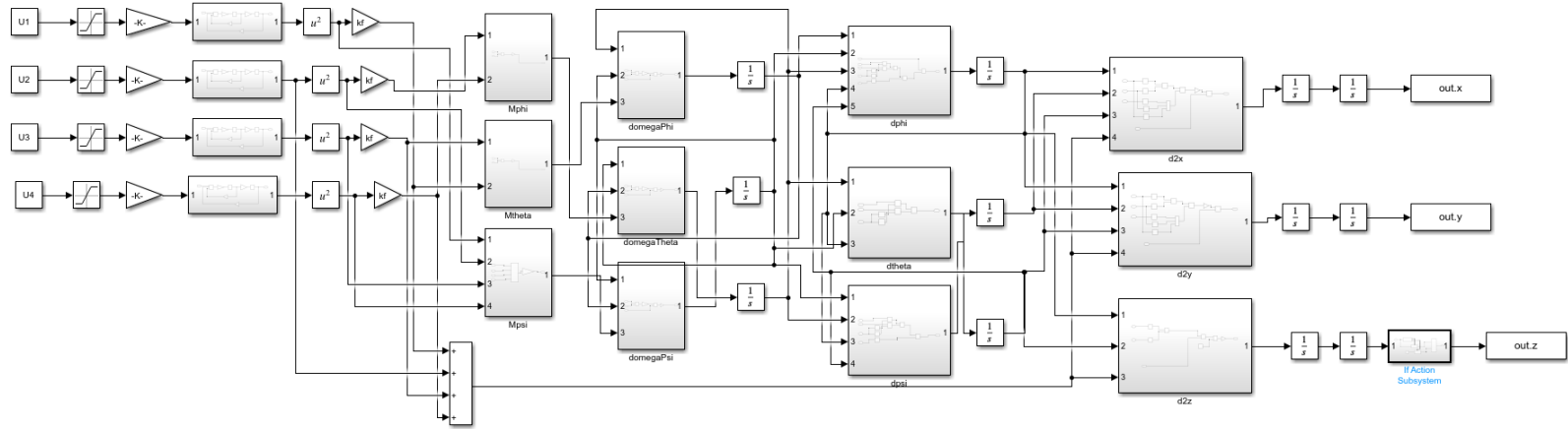


Figure 5. Модель Simulink

Скачать модель можно [здесь\(MatlabDrive\)](#) или [здесь\(GoogleDrive\)](#)

4. Графики моделирования

Больше графиков на дисках.

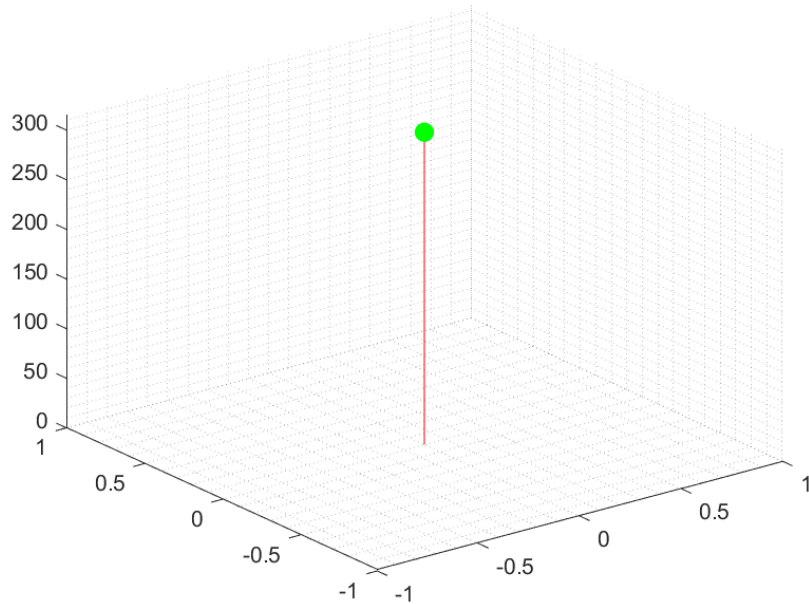


Figure 6. График при поданных максимальных напряжениях на двигатели

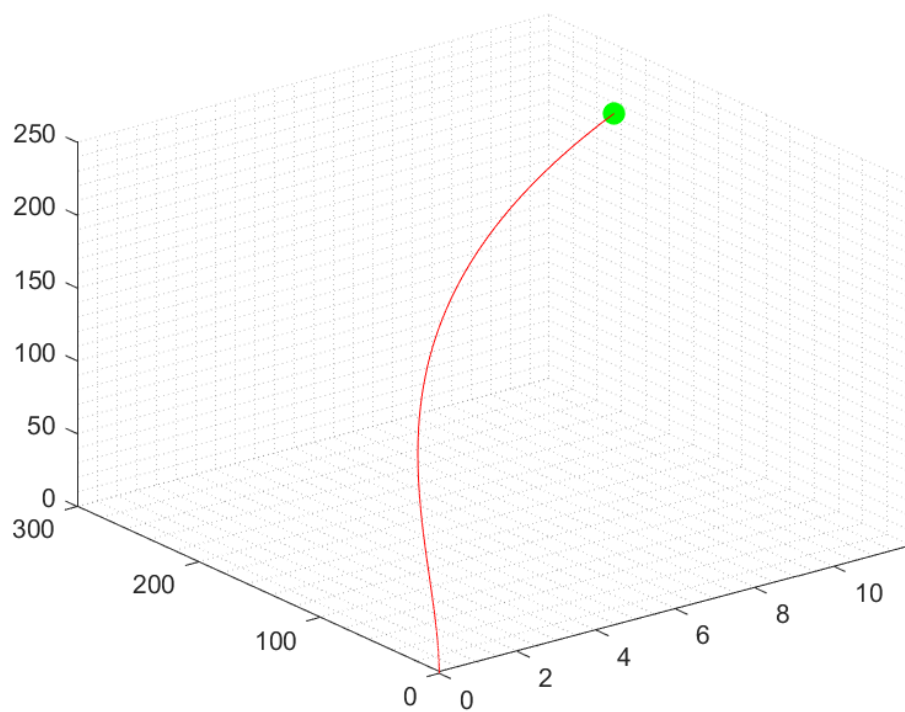


Figure 7. График при поданных напряжениях на двигатели: $U_1=100$ $U_2=100$ $U_3=100$ $U_4=80$

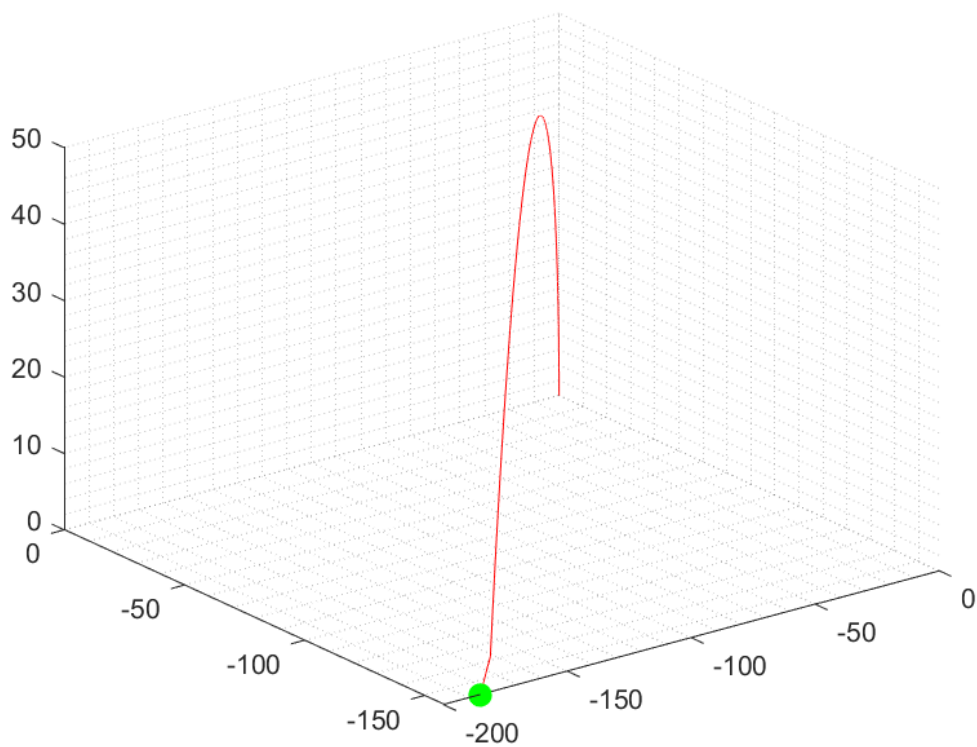


Figure 8. График при поданных напряжениях на двигатели: $U_1=100$ $U_2=80$ $U_3=80$ $U_4=100$

5. Источники

- [1] Teppo Luukkonen, "Modelling and control of quadcopter" School of Science Mat-2.4108 Independent research project in applied mathematics Espoo, August 22, 2011 https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf
- [2] Г.В. Лысухо, А.Л. Масленников, "КВАДРОКОПТЕР: ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ". МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация. DOI: 10.18698/2541-8009-2020-04-604.
<http://hoster.bmstu.ru/~amas/pubs/2020.%20Лысухо%20%20Квадрокоптер.%20Динамика%20и%20Управление.pdf>
- [3] Thomas S. Alderete, "SIMULATOR AERO MODEL IMPLEMENTATION"
<https://aviationsystems.arc.nasa.gov/publications/hitl/rtsim/Toms.pdf>
- [4] Zoran Benić, Petar Piljek, Denis Kotarski, "MATHEMATICAL MODELLING OF UNMANNED AERIAL VEHICLES WITH FOUR ROTORS" DOI: 10.7906/indecs.14.1.9, 20 January 2016
https://www.researchgate.net/publication/292176923_Mathematical_Modelling_of_Unmanned_Aerial_Vehicles_with_Four_Rotors
- [5] Алексей Алексеевич Перегудин, "Лекции №2. Входы, выходы, состояния и более полная модель ДПТ".
- [6] Трефилов П. М., Тевяшов Г. К., "МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БПЛА МУЛЬТИРОТОРНОГО ТИПА В СРЕДЕ MATLAB " ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва.
https://ubs2021.ipu.ru/sites/default/files/pub_files_pdf/07-08%2028%20-%20ТрефиловТевяшов.pdf
- [7] Wikipedia
https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page