

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет Систем управления и робототехники  
Образовательная программа: Робототехника и искусственный интеллект  
Направление подготовки (специализация): Интеллектуальная  
робототехника

ОТЧЁТ  
по учебной ознакомительной практике  
Тема: Обзор математической модели квадрокоптера

Выполнил: Носов Александр Сергеевич  
Руководитель: Перегудин Алексей Алексеевич  
Куратор: Захаров Дмитрий Николаевич

Санкт-Петербург  
2025

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАДРОКОПТЕРА ...	5
1.1 Описание модели .....	5
1.2 Локальная и глобальная системы координат.....	5
1.3 Поступательное и вращательное движение .....	8
1.3.1 Поступательное движение и силы сопротивления .....	8
1.3.2 Вращательное движение.....	11
1.3.3 Крутящие моменты .....	12
1.4 Итоговая система уравнений динамики квадрокоптера .....	13
2 КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ .....	15
2.1 Моделирование в Matlab/Simulink.....	15
2.1.1 Модель.....	15
2.1.2 Графики моделирования .....	16
2.2 Моделирование в САПР Solidworks .....	19
2.2.1 Фотографии квадрокоптера .....	19
2.2.2 Модель САПР .....	20
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	21
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	22

## ВВЕДЕНИЕ

В современном мире мультикоптерные летательные аппараты, в частности квадрокоптеры, находят применение во всем большем количестве сфер. Они используются для сбора информации об окружающей среде, мониторинга территорий, доставки грузов, расследований и даже съемок кино. Широкое распространение квадрокоптеров обусловлено их маневренностью, относительной простотой конструкции и возможностью выполнения задач в условиях, недоступных для других типов летательных аппаратов. Также растет и доступность многороторных летательных аппаратов за счет удешевления компонентов.

Квадрокоптер представляет собой сложную механическую систему, состоящую из четырех электродвигателей расположенными симметрично по углам рамы. Винты, раскручиваемые электродвигателями, создают тягу, которая поднимает квадрокоптер в воздух, позволяя ему удерживаться и маневрировать. В современных квадрокоптерах используются бесколлекторные электродвигатели, получившие широкое распространение в последние десятилетия за счет их эффективности, простой и надежной конструкции. Также одними из наиболее важных компонентов является микроконтроллер, называемый полетным контроллером - он отвечает за управление напряжением на моторах. Помимо этого квадрокоптеры оснащены драйверами двигателей, средствами коммуникации и различными датчиками: акселерометрами, gps-датчиками, камерами и в некоторых случаях лидарами.

Для создания законов управления и компьютерного моделирования необходима математическая модель динамики летательного аппарата. Поведение мультироторного устройства описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, их количество может различаться в зависимости от количества электродвигателей и учета внешних возмущений. Математическая модель может быть синтезирована с использованием уравнений Эйлера-Лагранжа или Ньютона-Эйлера, учитывающими поступательное и вращательное движение аппарата. Квадрокоптер обладает шестью степенями свободы: тремя поступательными - движение вдоль осей X, Y, Z, и тремя вращательными - углы крена, тангажа, рыскания. Для упрощения

задачи синтеза законов управления используется линеаризованная модель квадрокоптера, полученная путем аппроксимации нелинейных уравнений около состояния равновесия, что позволяет применять классические методы теории управления для анализа системы и синтеза законов управления.

В настоящей работе рассматривается исследование и разработка математической модели квадрокоптера, учитывающей его динамику и возможные внешние возмущения.

# 1 ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАДРОКОПТЕРА

## 1.1 Описание модели

Квадрокоптер обладает шестью степенями свободы:

- Линейные координаты  $X, Y, Z$ ,
- Угол крена  $\phi$  соответствует углу вращения вокруг оси  $X$ .
- Угол тангажа  $\theta$  соответствует углу вращения вокруг оси  $Y$ .
- Угол рыскания  $\psi$  соответствует углу вращения вокруг оси  $Z$ .

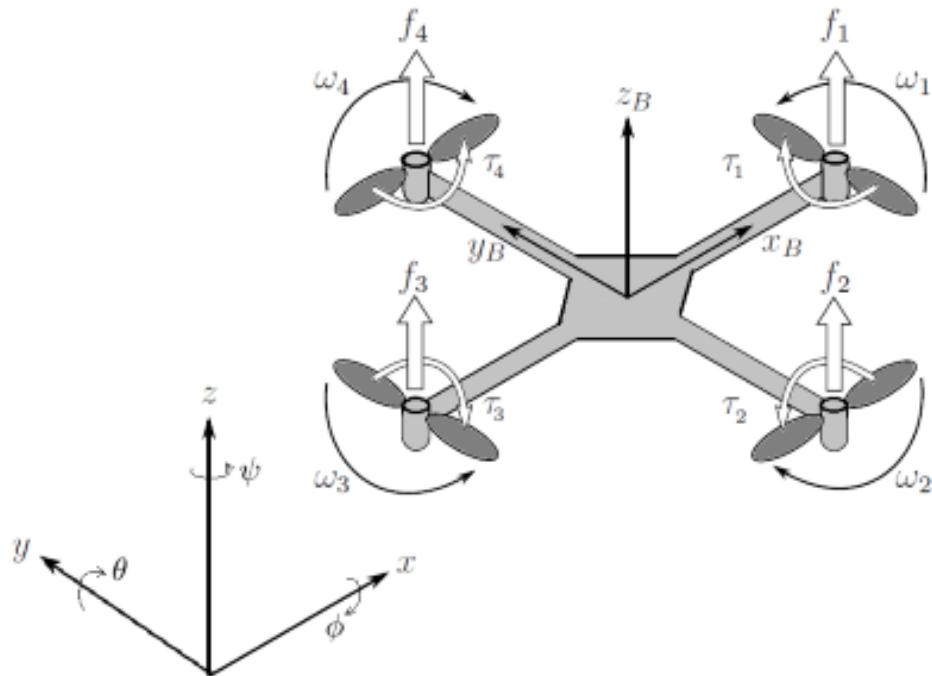


Рисунок 1 — Схематичное изображение квадрокоптера

## 1.2 Локальная и глобальная системы координат

Для линейных координат рассмотрим переход системы координат от глобальной  $X, Y, Z$  к системе координат связанной с квадрокоптером  $X_B, Y_B, Z_B$ .

Чтобы перейти к системе координат, связанной с центром масс квадрокоптера, необходимо использовать матрицу поворота или, как её ещё называют матрицу косинусов.

Эта матрица представляет собой перемноженные три матрицы, которые осуществляют поворот вокруг оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно по углам Эйлера:  $\phi$ ,  $\theta$  и  $\psi$ .

Рассмотрим пример получения матрицы поворота вокруг оси  $X$ . При повороте вокруг оси  $X$  координата  $x$  не меняется. Рассмотрим проекцию на плоскость  $OYZ$ , представленную на [рисунке 2б](#).

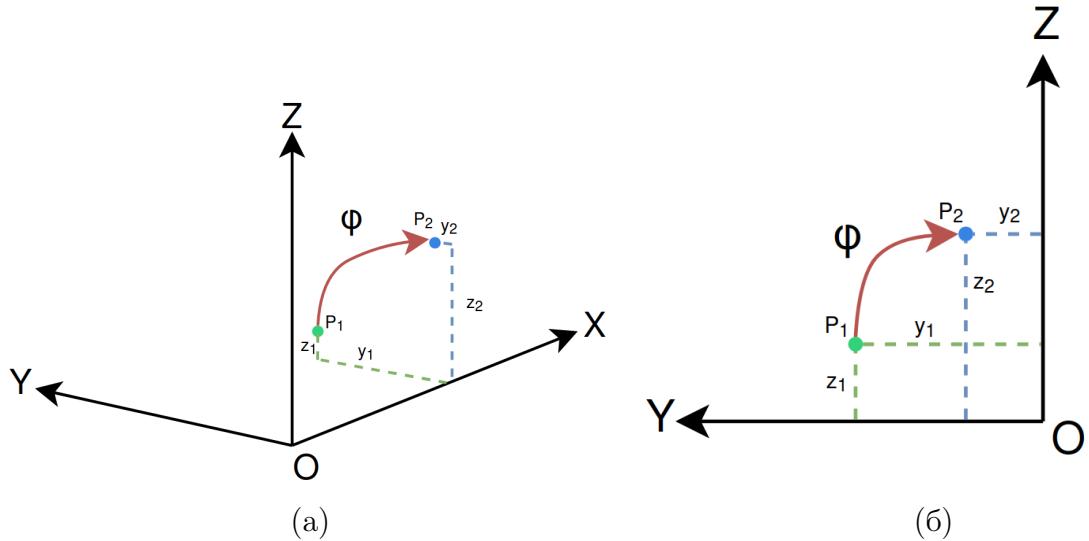


Рисунок 2 — Поворот точки вокруг оси. На рисунке (а) поворот точки в трёхмерном пространстве. На рисунке (б) поворот точки в плоскости  $OYZ$ .

В проекции  $OYZ$  перейдем к полярным координатам: расстояние от начала координат  $r = \sqrt{y_1^2 + z_1^2}$ , начальный угол будет  $\alpha_1 = \arctan(\frac{y_1}{z_1})$ .

После поворота на угол  $\phi$  получим новый угол  $\alpha_2 = \alpha_1 + \phi$ , а расстояние от начала координат не изменилось.

Выразим новые координаты  $y_2, z_2$  через расстояние от начала координат и угол  $\alpha_2$ . Получим:  $y_2 = r \cos(\alpha_2)$ ,  $z_2 = r \sin(\alpha_2)$ . Где  $\cos(\alpha_2) = \cos(\alpha_1) \cos(\phi) - \sin(\alpha_1) \sin(\phi)$  и  $\sin(\alpha_2) = \sin(\alpha_1) \cos(\phi) + \cos(\alpha_1) \sin(\phi)$ .

В итоге получаем следующую систему для перехода при повороте на угол  $\phi$  вокруг оси  $X$ :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = r(\cos(\alpha_1) \cos(\phi) - \sin(\alpha_1) \sin(\phi)) \\ z_2 = r(\sin(\alpha_1) \cos(\phi) + \cos(\alpha_1) \sin(\phi)) \end{cases} \quad (1)$$

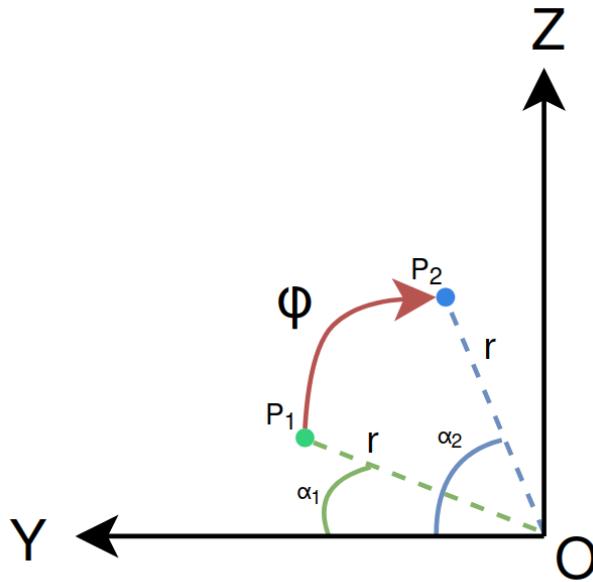


Рисунок 3 — Проекция на плоскость ОYZ в полярных координатах

Заменим  $\cos(\alpha_1) = \frac{y_1}{r}$  и  $\sin(\alpha_1) = \frac{z_1}{r}$ :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = r \left( \frac{y_1}{r} \cos(\phi) - \frac{z_1}{r} \sin(\phi) \right) \\ z_2 = r \left( \frac{z_1}{r} \cos(\phi) + \frac{y_1}{r} \sin(\phi) \right) \end{cases} \quad (2)$$

Упростим выражения:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 \cos(\phi) - z_1 \sin(\phi) \\ z_2 = y_1 \sin(\phi) + z_1 \cos(\phi) \end{cases} \quad (3)$$

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Аналогичные матрицы поворота используются для поворота вокруг осей  $Y$  и  $Z$ .

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Матрица направляющих косинусов  $R$  получается путем перемножения матриц поворота вокруг осей  $Z, Y, X$ :

$$R = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\phi) = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi & C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $C = \cos$ ,  $S = \sin$ . Матрица  $R$  позволяет перейти от глобальной к локальной системе координат, а чтобы осуществить обратное преобразование необходимо взять обратную матрицу  $R^{-1}$ , но так как матрица  $R$  ортогональная, то  $R^{-1} = R^T$ .

### 1.3 Поступательное и вращательное движение

В глобальной системе координат вводятся векторы линейных и угловых скоростей.

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где  $v, \omega$  — векторы линейных и угловых скоростей соответственно в локальной системе координат, а  $v_x, v_y, v_z$  — проекции линейных скоростей на соответствующие оси,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — угловые скорости вокруг соответствующих осей.

#### 1.3.1 Поступательное движение и силы сопротивления

Поступательное движение квадрокоптера описывается с помощью уравнения Ньютона-Эйлера.

$$m\ddot{r} = F_{\Sigma}, \quad (9)$$

где  $m$  — масса квадрокоптера,  $r$  — вектор положения центра масс,  $F_{\Sigma}$  — сумма сил, действующих на квадрокоптер.

Квадрокоптер движется за счет силы тяги, которая создается при помощи электродвигателей, расположенных по углам рамы. Силу тяги можно представить в следующем виде:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (10)$$

$$T_i = k_i \omega_i^2, \quad (11)$$

где  $T$  — суммарная сила тяги, которая направлена вдоль оси  $OZ$ , поэтому представляет собой вектор  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & T \end{bmatrix}^T$ .  $T_i$  — сила тяги отдельного электродвигателя с пропеллером.  $k$  — коэффициент тяги, который можно определить экспериментально, из данных об электродвигателе и пропеллерах или рассчитать приблизительное значение по формуле, предложенной в [1]  $k_i = \frac{1}{2}\rho C_{\gamma} S_{prop_i} r_{prop_i}^2$ , где  $\rho$  — плотность воздуха,  $C_{\gamma}$  — коэффициент подъемной силы,  $S_{prop_i}$  — площадь окружности, которую описывает винт радиусом  $r_{prop_i}$ .

Также на квадрокоптер действует сила тяжести и аэродинамические силы. Аэродинамические силы включают в себя флаттер лопастей, индуктивное сопротивление и лобовое сопротивление.

Флаттер лопастей - это явление, возникающее из-за прогиба лопастей пропеллера при движении квадрокоптера вперед. Лопасти, движущиеся вперед, создают больше подъемной силы, чем лопасти, движущиеся назад, что приводит к наклону подъемной силы и созданию силы сопротивления. В статье [1] представлено моделирование лопастного флаттера следующим образом:

$$F_{flap} = -TA_{flap}v, \quad (12)$$

где  $A_{flap}$  — матрица флаттера, равная:

$$A_{flap} = \begin{bmatrix} c_a & -c_b & 0 \\ c_b & c_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где  $c_a$  и  $c_b$  — коэффициенты флаттера. Однако коэффициент  $c_b$  связан с поперечным флаттером лопастей, поэтому им можно пренебречь, так как продольный флаттер намного больше, чем поперечный.

Индуктивное сопротивление — это сопротивление, вызванное вихрями на торцах пропеллеров. Вихри образуются перетеканием воздуха из области под лопастью в область над лопастью.

$$F_{ind} = -TA_{ind}v, \quad (14)$$

где  $A_{ind} = diag(c_{dx}, c_{dy}, 0)$ ,  $c_{dx}, c_{dy}$  - коэффициенты индуктивного сопротивления. Однако в силу симметричности квадрокоптера можно принять, что  $c_{dx} = c_{dy} = c_d$

Лобовое сопротивление — это сопротивление, вызванное трением воздуха о поверхность квадрокоптера. Лобовое сопротивление будем учитывать, используя стандартное выражение для расчета сопротивления

$$F_{drag} = -\frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|r\|r, \quad (15)$$

$C_{drag}$  — коэффициент сопротивления,  $S$  — характерная площадь поверхности квадрокоптера.  $\|v\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$

Сумма всех сил действующих на квадрокоптер в глобальной системе координат с учетом силы тяжести, которая действует вдоль оси  $OZ$ , будет выглядеть следующим образом:

$$m\ddot{r} = TR - m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + F_{flap} + F_{ind} + F_{drag} \quad (16)$$

$$m\ddot{r} = TR - m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - TRA_{ind}R_T\dot{r} - TRA_{flap}R_T\dot{r} - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\dot{r} \quad (17)$$

Из этого уравнения можно получить систему уравнений для выражения положения квадрокоптера в глобальной системе координат:

$$\begin{cases} \ddot{r}_x = \frac{T \cos \theta \cos \psi - T(RA_{ind}R^T\dot{r})_x - T(RA_{flap}R^T\dot{r})_x - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_x}{m} \\ \ddot{r}_y = \frac{T \cos \theta \sin \psi - T(RA_{ind}R^T\dot{r})_y - T(RA_{flap}R^T\dot{r})_y - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_y}{m} \\ \ddot{r}_z = \frac{-T \sin \theta - T(RA_{ind}R^T\dot{r})_z - T(RA_{flap}R^T\dot{r})_z - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_z}{m} - g \end{cases} \quad (18)$$

### 1.3.2 Вращательное движение

Для перевода угловых скоростей из глобальной системы координат в локальной нужно ввести матрицу  $W$ . Для вывода этой матрицы последовательно рассмотрим поворот вдоль каждой оси. Также, как и в случае с матрицей поворота используется стандартная последовательность вращений: сначала вокруг оси  $Z$ , затем вокруг оси  $Y$  и затем вокруг оси  $X$ .

Пусть исходная система координат, совпадающая с глобальной будет  $X_0, Y_0, Z_0$ , соответственно, после первого поворота на угол  $\psi$  система координат будет  $X_1, Y_1, Z_1$ , после второго поворота на угол  $\theta$  система координат будет  $X_2, Y_2, Z_2$  и после третьего поворота на угол  $\phi$  система координат будет  $X_3, Y_3, Z_3$ .

Локальной системой координат является  $X_3, Y_3, Z_3$ , в которой угловые скорости будут производными по соответствующим углам Эйлера, однако угловые скорости  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\psi}$  необходимо привести к локальной системе координат, так как они выполняются в других системах координат:  $X_2, Y_2, Z_2$  и  $X_1, Y_1, Z_1$ . Чтобы получить угловую скорость вокруг оси  $Y_3$  нужно привести систему координат в состояние до поворота на угол  $\phi$ , соответственно умножить вектор угловой скорости на матрицу поворота  $R_x(\phi)^{-1} = R_x(-\phi)$ , аналогично для получения угловой скорости вокруг оси  $Z_3$  необходимо также привести систему координат до поворота на угол  $\theta$  умножив на матрицу  $R_y(-\theta)$ .

Угловая скорость  $\omega$  в локальной системе по компонентам:

$$\omega_\phi = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\omega_\theta = R_x(-\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\omega_\psi = R_x(-\phi)R_y(-\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \dot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (21)$$

Вектор угловой скорости в локальной системе координат  $\omega = \omega_x + \omega_y + \omega_z$ :

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Для перевода из локальной в глобальную  $W^{-1}$

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

### 1.3.3 Крутящие моменты

Маневрирование квадрокоптера осуществляется за счет создания крутящих моментов. Крутящие моменты можно вычислить следующим образом:

$$\begin{cases} \tau_\phi = \tau_{q\phi} + \tau_{m\phi} + \tau_{p\phi} \\ \tau_\theta = \tau_{q\theta} + \tau_{m\theta} + \tau_{p\theta} \\ \tau_\psi = \tau_{q\psi}, \end{cases} \quad (24)$$

где  $M_{q\phi}, M_{q\theta}, M_{q\psi}$  - моменты, создаваемые разницей сил тяги, которые создаются парами винтов. Момент  $M_{m\phi}, M_{m\theta}$  - гироскопические моменты двигателей,  $M_{p\phi}, M_{p\theta}$  - гироскопические моменты винтов. Эти моменты могут быть выражены следующим образом:

$$\tau_{q\phi} = (T_3 - T_1)l \quad (25)$$

$$\tau_{q\theta} = (T_2 - T_4)l \quad (26)$$

$$\tau_{q\psi} = (T_2 + T_4 - T_1 - T_3) \quad (27)$$

$$\tau_{m\phi} = I_m \omega_\theta (\omega_1 + \omega_3 - \omega_2 - \omega_4) \quad (28)$$

$$\tau_{m\theta} = I_m \omega_\phi (\omega_2 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_3) \quad (29)$$

$$\tau_{p\phi} = I_p \omega_\theta (\omega_1 + \omega_3 - \omega_2 - \omega_4) \quad (30)$$

$$\tau_{p\theta} = I_p \omega_\phi (\omega_2 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_3) \quad (31)$$

Однако значения гироскопических моментов мало, поэтому ими можно пренебречь. Для вращательного движения второй закон Ньютона будет выглядеть следующим образом:

$$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) = \tau, \quad (32)$$

где  $I = diag(I_x, I_y, I_z)$  - это матрица инерции квадрокоптера,  $\omega \times (I\omega)$  - описывает гироскопические силы, которые возникают при вращении квадрокоптера.

$$\begin{cases} \tau_\phi = I_x \dot{\omega}_\phi + (I_z - I_y) \omega_\theta \omega_\psi \\ \tau_\theta = I_y \dot{\omega}_\theta + (I_x - I_z) \omega_\phi \omega_\psi \\ \tau_\psi = I_z \dot{\omega}_\psi + (I_y - I_x) \omega_\phi \omega_\theta \end{cases} \quad (33)$$

Из этой системы уравнений можно выразить угловые ускорения в локальной системе координат:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_\phi = \frac{\tau_\phi + (I_z - I_y) \omega_\theta \omega_\psi}{I_x} \\ \dot{\omega}_\theta = \frac{\tau_\theta + (I_x - I_z) \omega_\phi \omega_\psi}{I_y} \\ \dot{\omega}_\psi = \frac{\tau_\psi + (I_y - I_x) \omega_\phi \omega_\theta}{I_z} \end{cases} \quad (34)$$

#### 1.4 Итоговая система уравнений динамики квадрокоптера

Таким образом, итоговая система уравнений динамики квадрокоптера будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{r}_x = \frac{T \cos \theta \cos \psi - T(RA_{ind}R^T\dot{r})_x - T(RA_{flap}R^T\dot{r})_x - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_x}{m} \\ \ddot{r}_y = \frac{T \cos \theta \sin \psi - T(RA_{ind}R^T\dot{r})_y - T(RA_{flap}R^T\dot{r})_y - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_y}{m} \\ \ddot{r}_z = \frac{-T \sin \theta - T(RA_{ind}R^T\dot{r})_z - T(RA_{flap}R^T\dot{r})_z - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_z}{m} - g \\ \dot{\phi} = \omega_\phi + \tan \theta (\omega_\theta \sin \phi + \omega_\psi \cos \phi) \\ \dot{\theta} = \omega_\theta \cos \phi - \omega_\psi \sin \phi \\ \dot{\psi} = \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \omega_\theta + \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \omega_\psi \\ \dot{\omega}_\phi = \frac{\tau_\phi + (I_z - I_y)\omega_\theta \omega_\psi}{I_x} \\ \dot{\omega}_\theta = \frac{\tau_\theta + (I_x - I_z)\omega_\phi \omega_\psi}{I_y} \\ \dot{\omega}_\psi = \frac{\tau_\psi + (I_y - I_x)\omega_\phi \omega_\theta}{I_z} \end{array} \right. \quad (35)$$

В данной модели представлены динамические уравнения описывающие поступательное и вращательное движение квадрокоптера. Управление квадрокоптером осуществляется за счет изменения скорости вращения четырех электродвигателей, которые создают тягу. Соответственно, меняя соотношения скоростей вращения электродвигателей, можно менять положение квадрокоптера в пространстве по 6 степеням свободы. Однако для корректного управления с качественно хорошими переходными процессами необходимо синтезировать сложные системы управления.

## 2 КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

### 2.1 Моделирование в Matlab/Simulink

В программной среде Matlab/Simulink была сделана модель по системе уравнений (35). Ниже представлены фото модели и графики моделирования при разных подаваемых напряжениях на электродвигатели. Модели бесколлекторных электродвигателей были созданы на основе моделей представленных в [2].

#### 2.1.1 Модель

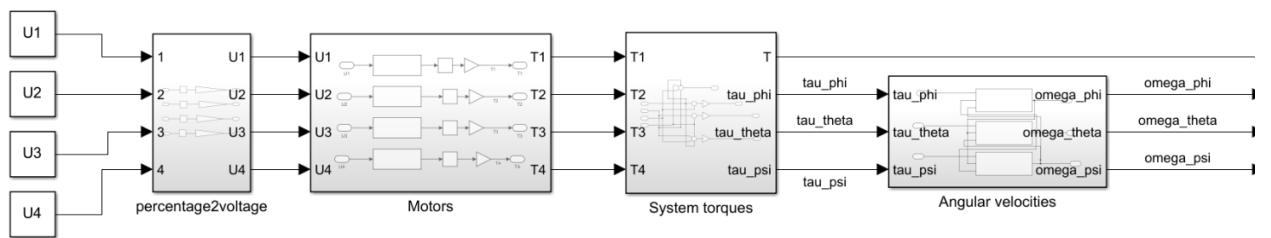


Рисунок 4 — Модель в общем виде

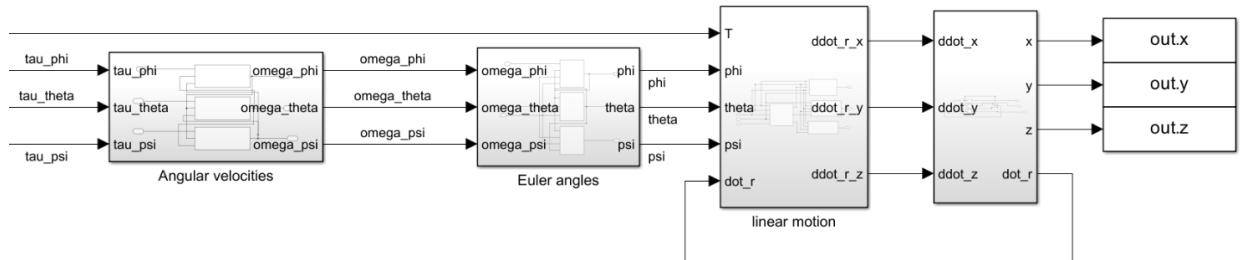


Рисунок 5 — Модель в общем виде

## 2.1.2 Графики моделирования

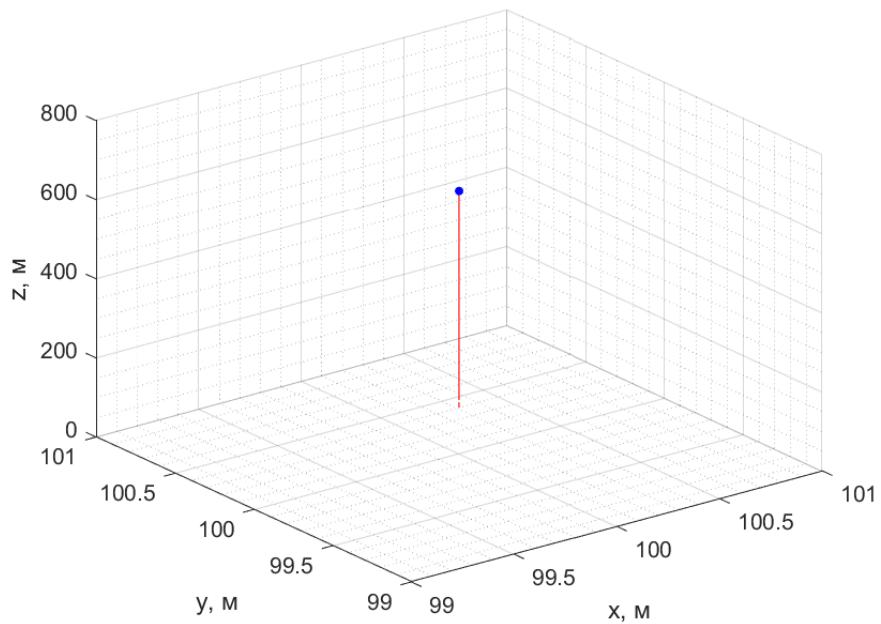


Рисунок 6 — График моделирования квадрокоптера при входных напряжениях:  $U_1 = 5.5\text{В}$ ,  $U_2 = 5.5\text{В}$ ,  $U_3 = 5.5\text{В}$ ,  $U_4 = 5.5\text{В}$ . Внешнее сопротивление отсутствует.

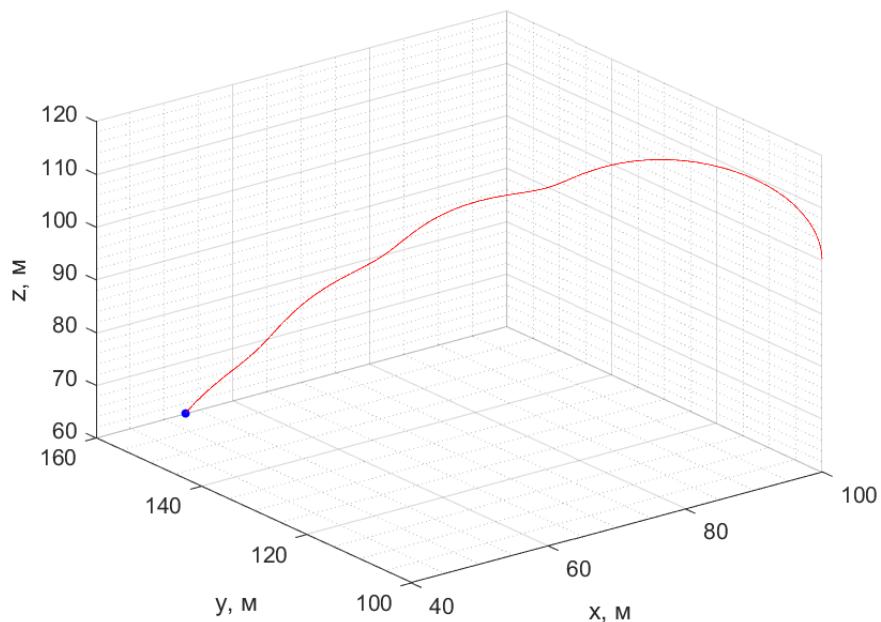


Рисунок 7 — График моделирования квадрокоптера при входных напряжениях:  $U_1 = 5.5\text{В}$ ,  $U_2 = 5.5\text{В}$ ,  $U_3 = 0\text{В}$ ,  $U_4 = 0\text{В}$ . Внешнее сопротивление отсутствует.

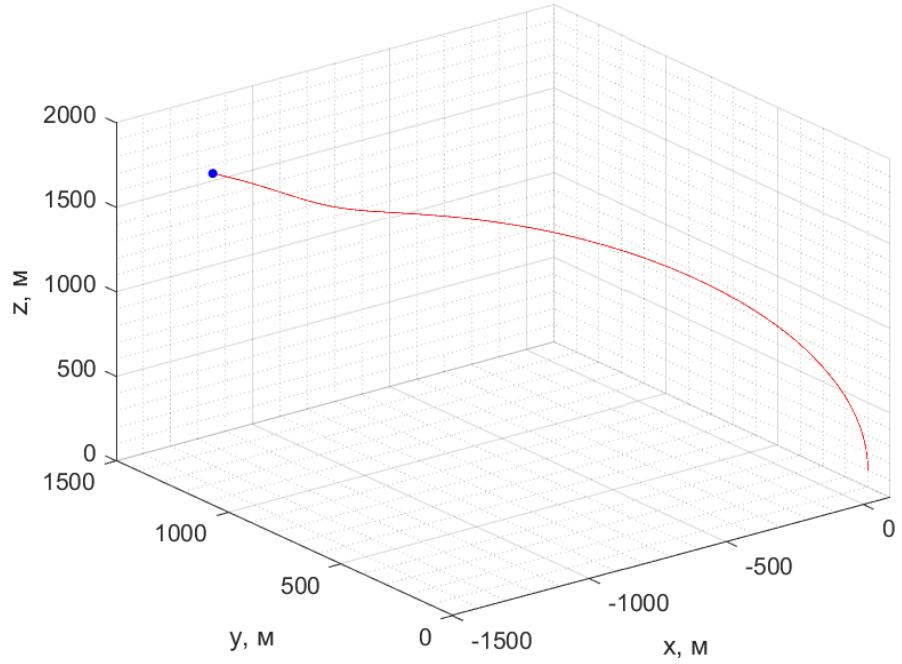


Рисунок 8 — График моделирования квадрокоптера при входных напряжениях:  $U_1 = 5.5\text{В}$ ,  $U_2 = 5.5\text{В}$ ,  $U_3 = 5.4\text{В}$ ,  $U_4 = 5.4\text{В}$ . Внешнее сопротивление отсутствует.

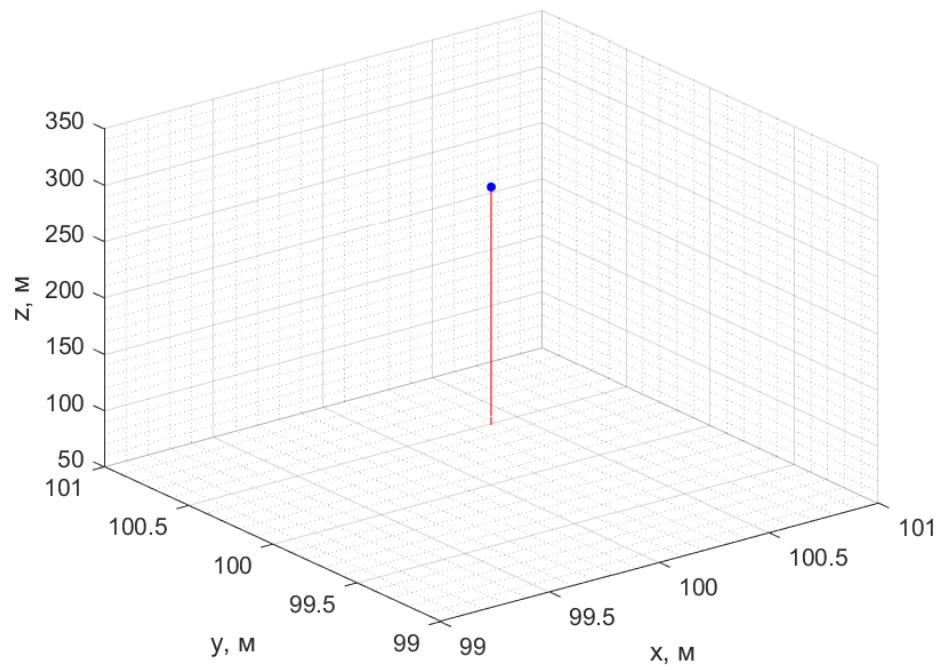


Рисунок 9 — График моделирования квадрокоптера при входных напряжениях:  $U_1 = 5.5\text{В}$ ,  $U_2 = 5.5\text{В}$ ,  $U_3 = 5.5\text{В}$ ,  $U_4 = 5.5\text{В}$ . Коэффициенты внешних сопротивлений  $C_a = C_b = 0.1$ ,  $C_{drag} = 1.1$ .

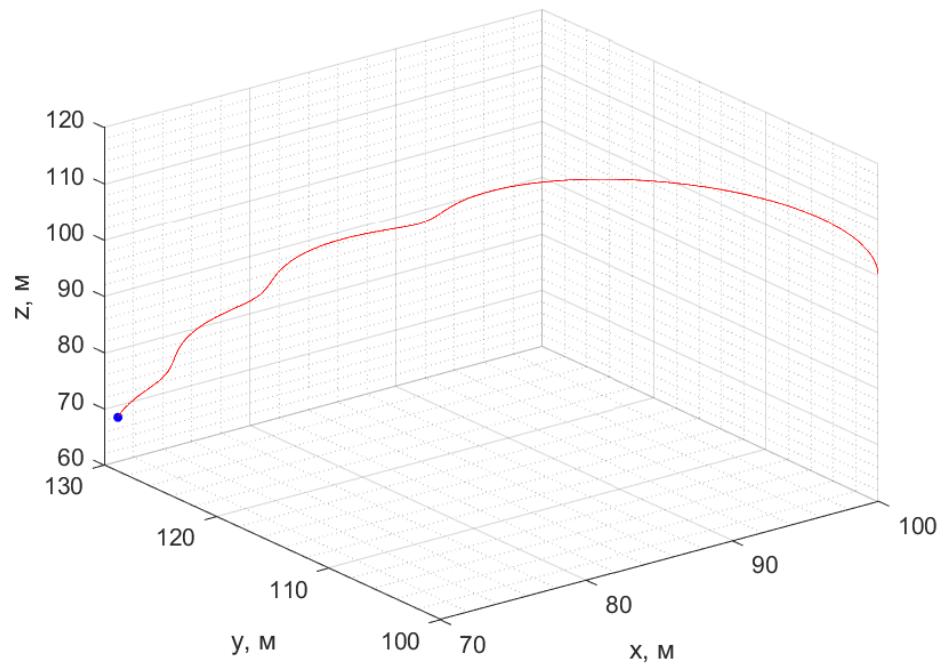


Рисунок 10 — График моделирования квадрокоптера при входных напряжениях:  
 $U_1 = 5.5\text{В}$ ,  $U_2 = 5.5\text{В}$ ,  $U_3 = 0\text{В}$ ,  $U_4 = 0\text{В}$ . Коэффициенты внешних сопротивлений  
 $C_a = C_b = 0.1$ ,  $C_{drag} = 1.1$ .

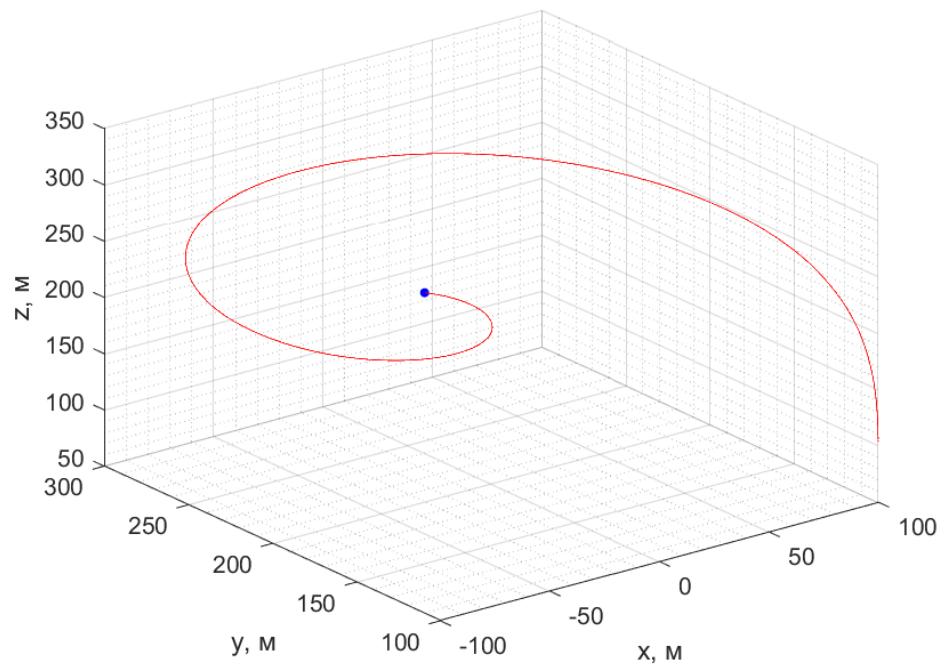


Рисунок 11 — График моделирования квадрокоптера при входных напряжениях:  
 $U_1 = 5.5\text{В}$ ,  $U_2 = 5.5\text{В}$ ,  $U_3 = 5.4\text{В}$ ,  $U_4 = 5.4\text{В}$ . Коэффициенты внешних сопротивлений  
 $C_a = C_b = 0.1$ ,  $C_{drag} = 1.1$ .

## 2.2 Моделирование в САПР Solidworks

Также была создана модель квадрокоптера в САПР Solidworks. Многие компоненты модели были найдены в интернете в свободном доступе. В дальнейшем планируется добавить САПР модель квадрокоптера в Simulink для более точного и наглядного моделирования.

### 2.2.1 Фотографии квадрокоптера



Рисунок 12 — Фотография квадрокоптера

## 2.2.2 Модель САПР



Рисунок 13 — Модель квадрокоптера в Solidworks

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы была рассмотрена математическая модель динамики квадрокоптера. Модель основана на уравнениях Ньютона-Эйлера, которые описывают поступательное и вращательное движение аппарата. Учитываются шесть степеней свободы: три линейных (X, Y, Z) и три угловых (крен, тангаж, рыскание).

Также была создана компьютерная модель на основании синтезированных уравнений. Проведено компьютерное моделирование и построены графики, судя по которым модель вполне соответствует реальности.

Помимо математической модели была создана 3D модель квадрокоптера в системе САПР Solidworks. Эта модель в дальнейшем будет интегрирована в среду Simulink.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки системы управления квадрокоптером.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Г.В. Лысухо А.М. КВАДРОКОПТЕР: ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ //. — 2020.
2. Khan, Grigorie T., Botez R., Mamou M., Mebarki Y. Fuzzy Logic-Based Control for a Morphing Wing Tip Actuation System: Design, Numerical Simulation, and Wind Tunnel Experimental Testing // Biomimetics. — 2019. — Sept. — Vol. 4. — P. 65.
3. Omari S., Hua M.-D., Ducard G., Hamel T. Nonlinear control of VTOL UAVs incorporating flapping dynamics //. — 2013.
4. Sabatino F. Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation : Master's thesis / Sabatino Francesco. — Stockholm, Sweden : KTH Royal Institute of Technology, 2015. — URL: [https://www.kth.se/polopoly\\_fs/1.588039.1600688317!/Thesis%20KTH%20-%20Francesco%20Sabatino.pdf](https://www.kth.se/polopoly_fs/1.588039.1600688317!/Thesis%20KTH%20-%20Francesco%20Sabatino.pdf).
5. Alderete T.S. Simulator Aero Model Implementation : tech. rep. / NASA Ames Research Center. — URL: <https://aviaionsystems.arc.nasa.gov/publications/hitl/rtsim/Toms.pdf>.
6. Luukkonen T. Modelling and Control of Quadcopter : tech. rep. / Aalto University, School of Science. — 2011. — URL: [https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluull\\_public.pdf](https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluull_public.pdf).