

1 ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАДРОКОПТЕРА

1.1 Описание модели

Квадрокоптер обладает шестью степенями свободы:

- Линейные координаты X, Y, Z ,
- Угол крена ϕ соответствует углу вращения вокруг оси X .
- Угол тангажа θ соответствует углу вращения вокруг оси Y .
- Угол рыскания ψ соответствует углу вращения вокруг оси Z .

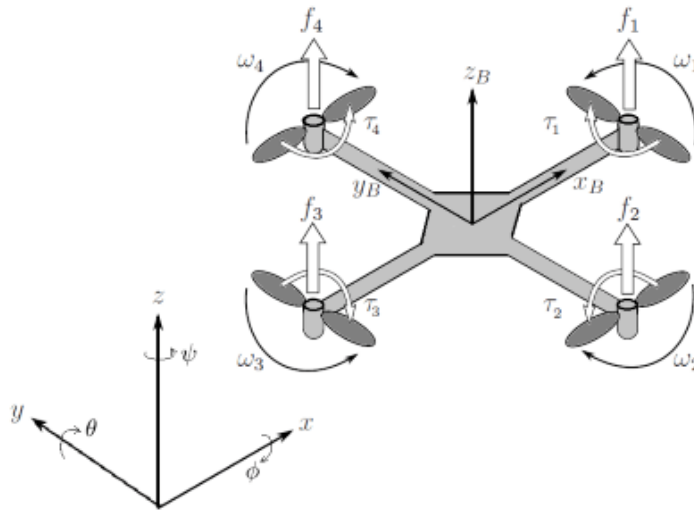


Рисунок 1 — Схематичное изображение квадрокоптера

1.2 Локальная и глобальная системы координат

Для линейных координат рассмотрим переход системы координат от глобальной X, Y, Z к системе координат связанной с квадрокоптером X_B, Y_B, Z_B .

Чтобы перейти к системе координат, связанной с центром масс квадрокоптера, необходимо использовать матрицу поворота или, как её ещё называют матрицу косинусов.

Эта матрица представляет собой перемноженные три матрицы, которые осуществляют поворот вокруг оси X , Y и Z соответственно по углам эйлера: ϕ , θ и ψ .

Рассмотрим пример получения матрицы поворота вокруг оси X . При повороте вокруг оси X координата x не меняется. Рассмотрим проекцию на плоскость OYZ , представленную на рисунке 2б.

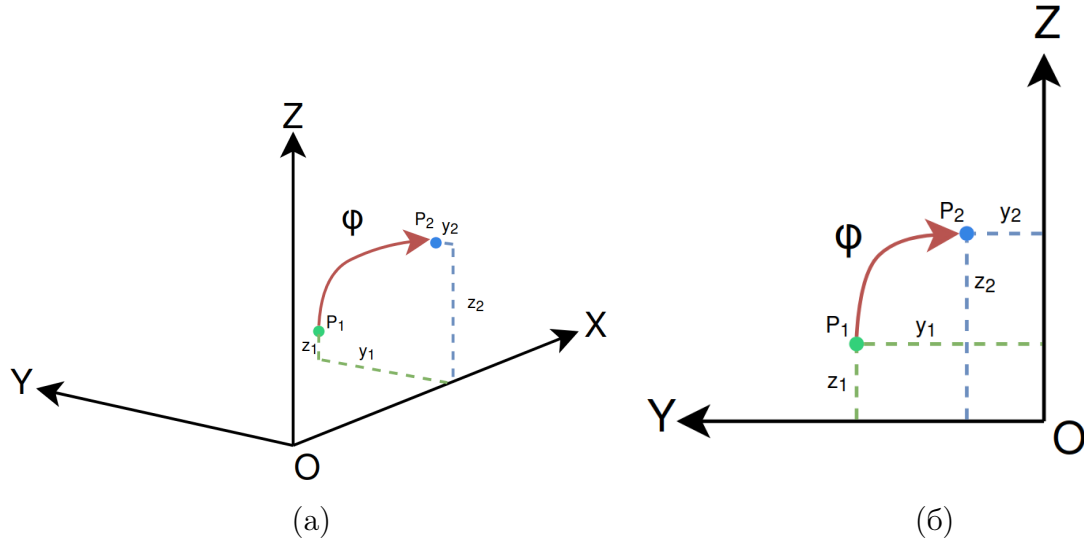


Рисунок 2 — Поворот точки вокруг оси. На рисунке (а) поворот точки в трёхмерном пространстве. На рисунке (б) поворот точки в плоскости OYZ .

В проекции OYZ перейдем к полярным координатам: расстояние от начала координат $r = \sqrt{y_1^2 + z_1^2}$, начальный угол будет $\alpha_1 = \arctan(\frac{y_1}{z_1})$.

После поворота на угол ϕ получим новый угол $\alpha_2 = \alpha_1 + \phi$, а расстояние от начала координат не изменилось.

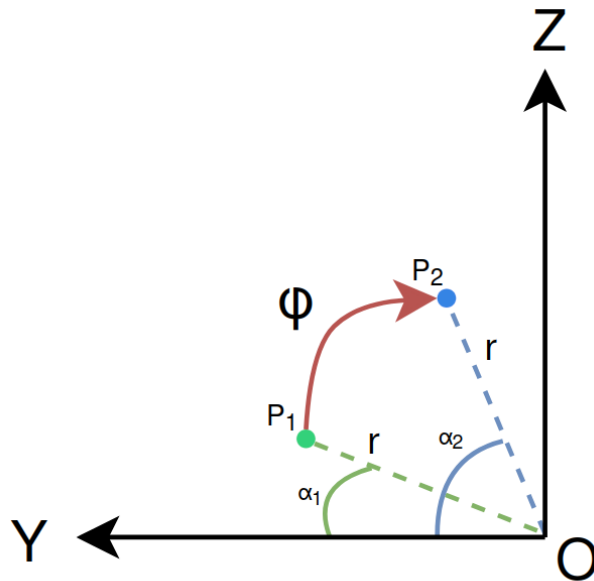


Рисунок 3 — Проекция на плоскость OYZ в полярных координатах

Выразим новые координаты y_2, z_2 через расстояние от начала координат и угол α_2 . Получим: $y_2 = r \cos(\alpha_2)$, $z_2 = r \sin(\alpha_2)$. Где $\cos(\alpha_2) = \cos(\alpha_1 + \phi) = \cos(\alpha_1) \cos(\phi) - \sin(\alpha_1) \sin(\phi)$ и $\sin(\alpha_2) = \sin(\alpha_1) \cos(\phi) + \cos(\alpha_1) \sin(\phi)$.

В итоге получаем следующую систему для перехода при повороте на угол ϕ вокруг оси X :

$$\begin{cases} x_2 = x_1; \\ y_2 = r(\cos(\alpha_1) \cos(\phi) - \sin(\alpha_1) \sin(\phi)); \\ z_2 = r(\sin(\alpha_1) \cos(\phi) + \cos(\alpha_1) \sin(\phi)). \end{cases} \quad (1)$$

Заменяем $\cos(\alpha_1) = \frac{y_1}{r}$ и $\sin(\alpha_1) = \frac{z_1}{r}$:

$$\begin{cases} x_2 = x_1; \\ y_2 = r \left(\frac{y_1}{r} \cos(\phi) - \frac{z_1}{r} \sin(\phi) \right); \\ z_2 = r \left(\frac{z_1}{r} \cos(\phi) + \frac{y_1}{r} \sin(\phi) \right). \end{cases} \quad (2)$$

Упростим выражения:

$$\begin{cases} x_2 = x_1; \\ y_2 = y_1 \cos(\phi) - z_1 \sin(\phi); \\ z_2 = y_1 \sin(\phi) + z_1 \cos(\phi), \end{cases} \quad (3)$$

а матричном виде:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Аналогичные матрицы поворота используются для поворота вокруг осей Y и Z .

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Матрица направляющих косинусов R получается путем перемножения матриц поворота вокруг осей Z, Y, X :

$$R = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\phi) = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi & C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $C - \cos$, $S - \sin$. Матрица R позволяет перейти от глобальной к локальной системе координат, а чтобы осуществить обратное преобразование необходимо взять обратную матрицу R^{-1} , но так как матрица R - ортогональная, то $R^{-1} = R^T$.

1.3 Поступательное и вращательное движение

В глобальной системе координат вводятся векторы линейных и угловых скоростей.

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где v, ω — векторы линейных и угловых скоростей соответственно в локальной системе координат, а v_x, v_y, v_z — проекции линейных скоростей на соответствующие оси, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — угловые скорости вокруг соответствующих осей.

1.3.1 Поступательное движение и силы сопротивления

Поступательное движение квадрокоптера описывается с помощью уравнения Ньютона-Эйлера.

$$m\ddot{r} = F_\Sigma, \quad (9)$$

где m — масса квадрокоптера, r — вектор положения центра масс, F_Σ — сумма сил, действующих на квадрокоптер.

Квадрокоптер движется за счет силы тяги, которая создается при помощи электродвигателей, расположенных по углам рамы. Силу тяги можно представить в следующем виде:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4; \quad (10)$$

$$T_i = k_i \omega_i^2, \quad (11)$$

где T — суммарная сила тяги, которая направлена вдоль оси OZ , поэтому представляет собой вектор $\begin{bmatrix} 0 & 0 & T \end{bmatrix}^T$. T_i — сила тяги отдельного электродвигателя с пропеллером. k — коэффициент тяги, который можно определить экспериментально, из данных об электродвигателе и пропеллерах или рассчитать приблизительное значение по формуле, предложенной в [Lysukho] $k_i = \frac{1}{2} \rho C_\gamma S_{prop_i} r_{prop_i}^2$, где ρ — плотность воздуха, C_γ — коэффициент подъемной силы, S_{prop_i} — площадь окружности, которую описывает винт радиусом r_{prop_i} .

Также на квадрокоптер действует сила тяжести и аэродинамические силы. Аэродинамические силы включают в себя флаттер лопастей, индуктивное сопротивление и лобовое сопротивление.

Флаттер лопастей — это явление, возникающее из-за прогиба лопастей пропеллера при движения квадрокоптера вперед. Лопасти, движущиеся вперед, создают больше подъемной силы, чем лопасти, движущиеся назад, что приводит к наклону подъемной силы и созданию силы сопротивления. В статье [1] представлено моделирование лопастного флаттера следующим образом:

$$F_{flap} = -T A_{flap} v, \quad (12)$$

где A_{flap} — матрица флаттера, равная:

$$A_{flap} = \begin{bmatrix} c_a & -c_b & 0 \\ c_b & c_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где c_a и c_b — коэффициенты флаттера. Однако коэффициент c_b связан с поперечным флаттером лопастей, поэтому им можно пренебречь, так как продольный флаттер намного больше, чем поперечный.

Индуктивное сопротивление — это сопротивление, вызванное вихрями на торцах пропеллеров. Вихри образуются перетеканием воздуха из области под лопастью в область над лопастью.

$$F_{ind} = -TA_{ind}v, \quad (14)$$

где $A_{ind} = \text{diag}(c_{dx}, c_{dy}, 0)$, c_{dx}, c_{dy} - коэффициенты индуктивного сопротивления. Однако в силу симметричности квадрокоптера можно принять, что $c_{dx} = c_{dy} = c_d$

Лобовое сопротивление — это сопротивление, вызванное трением воздуха о поверхность квадрокоптера. Лобовое сопротивление будем учитывать, используя стандартное выражение для расчета сопротивления

$$F_{drag} = -\frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|r\|r, \quad (15)$$

C_{drag} — коэффициент сопротивления, S — характерная площадь поверхности квадрокоптера. $\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Сумма всех сил действующих на квадрокоптер в глобальной системе координат с учетом силы тяжести, которая действует вдоль оси OZ , будет выглядеть следующим образом:

$$m\ddot{r} = TR - m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + F_{flap} + F_{ind} + F_{drag}; \quad (16)$$

$$m\ddot{r} = TR - m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - TRA_{ind}R^T\dot{r} - TRA_{flap}R^T\dot{r} - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\dot{r}. \quad (17)$$

Из этого уравнения можно получить систему уравнений для выражения положения квадрокоптера в глобальной системе координат:

$$\begin{cases} \ddot{r}_x = \frac{T(\cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi) - T(RA_{ind}R^T\dot{r})_x - T(RA_{flap}R^T\dot{r})_x - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_x}{m}; \\ \ddot{r}_y = \frac{T(\sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi) - T(RA_{ind}R^T\dot{r})_y - T(RA_{flap}R^T\dot{r})_y - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_y}{m}; \\ \ddot{r}_z = \frac{T\cos\theta \cos\phi - T(RA_{ind}R^T\dot{r})_z - T(RA_{flap}R^T\dot{r})_z - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_z}{m} - g. \end{cases} \quad (18)$$

1.3.2 Вращательное движение

Для перевода угловых скоростей из глобальной системы координат в локальной нужно ввести матрицу W . Для вывода этой матрицы последовательно рассмотрим поворот вдоль каждой оси. Также, как и в случае с матрицей поворота используется стандартная последовательность вращений: сначала вокруг оси Z , затем вокруг оси Y и затем вокруг оси X .

Пусть исходная система координат, совпадающая с глобальной будет X_0, Y_0, Z_0 , соответственно, после первого поворота на угол ψ система координат будет X_1, Y_1, Z_1 , после второго поворота на угол θ система координат будет X_2, Y_2, Z_2 и после третьего поворота на угол ϕ система координат будет X_3, Y_3, Z_3 .

Локальной системой координат является X_3, Y_3, Z_3 , в которой угловые скорости будут производными по соответствующим углам Эйлера, однако угловые скорости $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$ необходимо привести к локальной системе координат, так как они выполняются в других системах координат: X_2, Y_2, Z_2 и X_1, Y_1, Z_1 . Чтобы получить угловую скорость вокруг оси Y_3 нужно привести систему координат в состояние до поворота на угол ϕ , соответственно умножить вектор угловой скорости на матрицу поворота $R_x(\phi)^{-1} = R_x(-\phi)$, аналогично для получения угловой скорости вокруг оси Z_3 необходимо также привести систему координат до поворота на угол θ умножив на матрицу $R_y(-\theta)$.

Угловая скорость ω в локальной системе по компонентам:

$$\omega_\phi = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (19)$$

$$\omega_\theta = R_x(-\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{bmatrix}; \quad (20)$$

$$\omega_\psi = R_x(-\phi)R_y(-\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \dot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Вектор угловой скорости в локальной системе координат $\omega = \omega_x + \omega_y + \omega_z$:

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Для перевода из локальной в глобальную W^{-1}

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

1.3.3 Крутящие моменты

Маневрирование квадрокоптера осуществляется за счет создания крутящих моментов. Крутящие моменты можно вычислить следующим образом:

$$\begin{cases} \tau_\phi = \tau_{q\phi} + \tau_{m\phi} + \tau_{p\phi}; \\ \tau_\theta = \tau_{q\theta} + \tau_{m\theta} + \tau_{p\theta}; \\ \tau_\psi = \tau_{q\psi}, \end{cases} \quad (24)$$

где $\tau_{q\phi}, \tau_{q\theta}, \tau_{q\psi}$ - моменты, создаваемые разницей сил тяги, которые создаются парами винтов. Момент $\tau_{m\phi}, \tau_{m\theta}$ - гироскопические моменты двигателей, $\tau_{p\phi}, \tau_{p\theta}$ - гироскопические моменты винтов. Эти моменты могут быть выражены следующим образом:

$$\tau_{q\phi} = (T_3 - T_1)l; \quad (25)$$

$$\tau_{q\theta} = (T_2 - T_4)l; \quad (26)$$

$$\tau_{q\psi} = (T_2 + T_4 - T_1 - T_3); \quad (27)$$

$$\tau_{m\phi} = I_m \omega_\theta (\omega_1 + \omega_3 - \omega_2 - \omega_4); \quad (28)$$

$$\tau_{m\theta} = I_m \omega_\phi (\omega_2 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_3); \quad (29)$$

$$\tau_{p\phi} = I_p \omega_\theta (\omega_1 + \omega_3 - \omega_2 - \omega_4); \quad (30)$$

$$\tau_{p\theta} = I_p \omega_\phi (\omega_2 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_3). \quad (31)$$

Однако значения гироскопических моментов мало, поэтому ими можно пренебречь. Для вращательного движения второй закон Ньютона будет выглядеть следующим образом:

$$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) = \tau, \quad (32)$$

где $I = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$ - это матрица инерции квадрокоптера, $\omega \times (I\omega)$ - описывает гироскопические силы, которые возникают при вращении квадрокоптера.

$$\begin{cases} \tau_\phi = I_x \dot{\omega}_\phi + (I_z - I_y) \omega_\theta \omega_\psi; \\ \tau_\theta = I_y \dot{\omega}_\theta + (I_x - I_z) \omega_\phi \omega_\psi; \\ \tau_\psi = I_z \dot{\omega}_\psi + (I_y - I_x) \omega_\phi \omega_\theta. \end{cases} \quad (33)$$

Из этой системы уравнений можно выразить угловые ускорения в локальной системе координат:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_\phi = \frac{\tau_\phi + (I_z - I_y) \omega_\theta \omega_\psi}{I_x}; \\ \dot{\omega}_\theta = \frac{\tau_\theta + (I_x - I_z) \omega_\phi \omega_\psi}{I_y}; \\ \dot{\omega}_\psi = \frac{\tau_\psi + (I_y - I_x) \omega_\phi \omega_\theta}{I_z}. \end{cases} \quad (34)$$

1.4 Итоговая система уравнений динамики квадрокоптера

Таким образом, итоговая система уравнений динамики квадрокоптера:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{r}_x = \frac{T(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) - T(RA_{ind}R^T \dot{r})_x - T(RA_{flap}R^T \dot{r})_x - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_x}{m}; \\ \ddot{r}_y = \frac{T(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) - T(RA_{ind}R^T \dot{r})_y - T(RA_{flap}R^T \dot{r})_y - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_y}{m}; \\ \ddot{r}_z = \frac{T \cos \theta \cos \phi - T(RA_{ind}R^T \dot{r})_z - T(RA_{flap}R^T \dot{r})_z - \frac{1}{2}\rho C_{drag}S\|\dot{r}\|\dot{r}_z}{m} - g; \\ \dot{\phi} = \omega_\phi + \tan \theta (\omega_\theta \sin \phi + \omega_\psi \cos \phi); \\ \dot{\theta} = \omega_\theta \cos \phi - \omega_\psi \sin \phi; \\ \dot{\psi} = \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \omega_\theta + \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \omega_\psi; \\ \dot{\omega}_\phi = \frac{\tau_\phi + (I_z - I_y)\omega_\theta \omega_\psi}{I_x}; \\ \dot{\omega}_\theta = \frac{\tau_\theta + (I_x - I_z)\omega_\phi \omega_\psi}{I_y}; \\ \dot{\omega}_\psi = \frac{\tau_\psi + (I_y - I_x)\omega_\phi \omega_\theta}{I_z}. \end{array} \right. \quad (35)$$

В уравнениях квадрокоптера присутствует множество нелинейностей, которые осложняют синтез алгоритмов управления, в добавок к сложной модели - на квадрокоптер действуют внешние сопротивления. Поэтому для корректного управления с качественно хорошими переходными процессами необходимо синтезировать сложные системы управления.

2 РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ

2.1 LQR регулятор по линеаризованной модели

В качестве одного из базовых регуляторов можно использовать LQR регулятор по линеаризованной модели. Для синтеза регулятора определим модель системы в форме вход-состояние-выход.

Необходимо осуществлять управление по координатам r_x , r_y , r_z в соответствии с этим вектор выхода системы будет выглядеть следующим образом:

$$Y = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Система (35) в матричном виде вход-состояние-выход будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU + D; \\ Y = CX. \end{cases} \quad (37)$$

Вектор состояния расширен, добавлением положением по координатам r_x , r_y и r_z .

$$X = \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z & \dot{r}_x & \dot{r}_y & \dot{r}_z & \phi & \theta & \psi & \omega_\phi & \omega_\theta & \omega_\psi \end{bmatrix}^T. \quad (38)$$

Вектор управления:

$$U = \begin{bmatrix} T \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Матрица A будет выглядеть следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{drag1:1} & A_{drag1:2} & A_{drag1:3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{drag2:1} & A_{drag2:2} & A_{drag2:3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{drag3:1} & A_{drag3:2} & A_{drag3:3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_\theta S_\phi & T_\theta C_\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_\phi & -S_\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{S_\phi}{C_\theta} & \frac{C_\phi}{C_\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(I_z - I_y)\omega_\theta}{I_x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(I_x - I_z)\omega_\phi}{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(I_y - I_x)\omega_\phi}{I_z} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

где $C_\phi = \cos \phi$, $S_\phi = \sin \phi$, $C_\theta = \cos \theta$, $S_\theta = \sin \theta$, $T_\theta = \tan \theta$, матрица A_{drag} :

$$A_{drag} = -\frac{T}{m}R(A_{ind} + A_{flap})R^T - \frac{\rho C_{drag} S}{2m} \|\dot{r}\| I. \quad (41)$$

Матрица B :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos \theta \cos \phi}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Матрица D

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (43)$$

Матрица C :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

2.1.1 Линеаризация у точки равновесия

Для синтеза LQR регулятора необходимо сначала линеаризовать квадрокоптер.

Производится линеаризация около точки равновесия, в которой угловые скорости и ускорения равны нулю. Состояние системы, которое будет соответствовать точке равновесия будет определяться следующим образом:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{r}_x & \bar{r}_y & \bar{r}_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Линеаризация системы у точки (45):

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}_{drag1:1} & \bar{A}_{drag1:2} & \bar{A}_{drag1:3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}_{drag2:1} & \bar{A}_{drag2:2} & \bar{A}_{drag2:3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}_{drag3:1} & \bar{A}_{drag3:2} & \bar{A}_{drag3:3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

где

$$\bar{A}_{drag} = -\frac{T}{m}(A_{ind} + A_{flap}); \quad (47)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Матрицы C и D остаются без изменений.

LQR регулятор минимизирует критерий качества, который определяется как:

$$J = \int_0^\infty (X^T Q X + U^T R U) dt. \quad (49)$$

Для синтеза LQR регулятора необходимо определить матрицы Q и R , которые определяют весовые коэффициенты для состояния и управления соответственно. Пусть Q и R будут определены следующим образом:

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для обеспечения минимизации критерия качества J используется решение уравнения Риккати:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (48)$$

Из этого уравнения можно получить P — матрица, с помощью которой можно найти матрицу K для LQR регулятора:

$$K = R^{-1} B^T P. \quad (49)$$

Управление в системе будет осуществляться по следующему закону:

$$U = -KX. \quad (50)$$

Рассчитанные коэффициенты:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5.48 & 0 & 0 & 2.67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.16 & 0 & 0 & -1.54 & 0 & 3.69 & 0 & 0 & 0.13 & 0 & 0 \\ 3.16 & 0 & 0 & 1.54 & 0 & 0 & 0 & 3.69 & 0 & 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.16 & 0 & 0 & 0.17 \end{bmatrix}.$$

2.2 LQR регулятор с линеаризацией обратной связью

В линеаризации обратной связью необходимо упростить уравнения квадрокоптера вводом новых виртуальных управлений. Управления будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \nu_x = \frac{1}{m}(\cos \phi \sin \theta + \sin \psi \sin \phi)U_1; \\ \nu_y = \frac{1}{m}(\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi)U_1; \\ \nu_z = -g + \frac{1}{m} \cos \theta \cos \phi U_1; \\ \nu_\phi = \frac{I_z - I_y}{I_x} \omega_\psi \omega_\theta + \frac{1}{I_x} U_2; \\ \nu_\theta = \frac{I_x - I_z}{I_y} \omega_\phi \omega_\psi + \frac{1}{I_y} U_2; \\ \nu_\psi = \frac{I_y - I_x}{I_z} \omega_\phi \omega_\theta + \frac{1}{I_z} U_2. \end{cases} \quad (50)$$

Введение ошибок состояния:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_x &= r_x - r_x^d; & \tilde{v}_x &= v_x - v_x^d; \\ \tilde{r}_y &= r_y - r_y^d; & \tilde{v}_y &= v_y - v_y^d; \\ \tilde{r}_z &= r_z - r_z^d; & \tilde{v}_z &= v_z - v_z^d; \\ \tilde{\phi} &= \phi - \phi^d; & \tilde{\omega}_\phi &= \omega_\phi - \omega_\phi^d; \\ \tilde{\theta} &= \theta - \theta^d; & \tilde{\omega}_\theta &= \omega_\theta - \omega_\theta^d; \\ \tilde{\psi} &= \psi - \psi^d; & \tilde{\omega}_\psi &= \omega_\psi - \omega_\psi^d. \end{aligned} \quad (51)$$

Динамика ошибок преобразуется в линейные подсистемы:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{r}}_x = \tilde{v}_x; \\ \dot{\tilde{v}}_x = \nu_x; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{r}}_y = \tilde{v}_y; \\ \dot{\tilde{v}}_y = \nu_y; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{r}}_z = \tilde{v}_z; \\ \dot{\tilde{v}}_z = \nu_z; \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\phi}} = \tilde{\omega}_\phi; \\ \dot{\tilde{\omega}}_\phi = \nu_\phi; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{\theta}} = \tilde{\omega}_\theta; \\ \dot{\tilde{\omega}}_\theta = \nu_\theta; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{\psi}} = \tilde{\omega}_\psi; \\ \dot{\tilde{\omega}}_\psi = \nu_\psi. \end{cases} \quad (53)$$

Для каждой подсистемы применяется LQR регулятор:

$$\begin{cases} \nu_x = -k_1^x \tilde{r}_x - k_2^x \tilde{v}_x; \\ \nu_y = -k_1^y \tilde{r}_y - k_2^y \tilde{v}_y; \\ \nu_z = -k_1^z \tilde{r}_z - k_2^z \tilde{v}_z; \\ \nu_\phi = -k_1^\phi \tilde{\phi} - k_2^\phi \tilde{\omega}_\phi; \\ \nu_\theta = -k_1^\theta \tilde{\theta} - k_2^\theta \tilde{\omega}_\theta; \\ \nu_\psi = -k_1^\psi \tilde{\psi} - k_2^\psi \tilde{\omega}_\psi. \end{cases} \quad (54)$$

Для подсистеме по координате r_x синтез LQR регулятор выглядит следующим образом: Матрицы состояния и управления:

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Осуществляется выбор матриц Q и R для критерия качества. И решается уравнение Риккати:

$$A_x^T P + P A_x - P B_x R^{-1} B_x^T P + Q = 0. \quad (56)$$

Откуда получаем коэффициенты k_1^x и k_2^x :

$$k^x = R^{-1} B_x^T P. \quad (57)$$

Аналогично синтезируются регуляторы для остальных подсистем.

Полученные виртуальные управления обратно преобразуются в реальные управления:

$$\begin{cases} \bar{\phi} = \frac{v_x}{v_z + g}; \\ \bar{\theta} = \frac{v_y}{v_z + g}; \end{cases} \quad (58)$$

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m(\nu_z + g)}{\cos \bar{\phi} \cos \bar{\theta}}; \\ U_2 = I_x \nu_\phi - (I_y - I_z) \omega_\theta \omega_\psi; \\ U_3 = I_y \nu_\theta - (I_x - I_z) \omega_\phi \omega_\psi; \\ U_4 = I_z \nu_\psi - (I_x - I_y) \omega_\phi \omega_\theta. \end{cases} \quad (59)$$

Для управлений были выбраны различные матрицы Q и R , полученные коэффициенты регулятора:

$$K = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 & 141 & 141 & 0 \\ 10 & 10 & 3 & 1000 & 1000 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

2.3 Nonlinear MPC

Nonlinear MPC — один из самых эффективных регуляторов с точки зрения оптимизации управления и точности. Суть регулятора довольно простая, на вход поступает вектор состояний квадрокоптера и желаемое состояние на некоторое количество шагов вперед. Количество шагов называется горизонтом предсказания. Далее внутри регулятора происходит моделирование поведения квадрокоптера с управлением, которое может быть

изначально проинициализировано или получено с предыдущего шага. Затем происходит минимизация заданного критерия качества, который обычно имеет следующий вид:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (e_k^T Q e_k + u_k^T R u_k), \quad (59)$$

где X_k — состояние системы на k -м шаге, X_k^d — желаемое состояние на k -м шаге, U_k — управление на k -м шаге, Q и R — весовые матрицы, определяющие важность отклонения состояния и управления соответственно, N — горизонт предсказания.

Минимизация критерия качества осуществляется с учетом ограничений на динамику системы, которые задаются в виде:

$$X_{k+1} = f(X_k, U_k), \quad (60)$$

где $f(X_k, U_k)$ — нелинейная модель квадрокоптера, а также ограничений на управление и состояния, например:

$$U_{\min} \leq U_k \leq U_{\max}, \quad X_{\min} \leq X_k \leq X_{\max}. \quad (61)$$

Решение задачи оптимизации дает последовательность управлений $\{U_0, U_1, \dots, U_{N-1}\}$, из которых на выходе регулятора используется только первое управление U_0 . Это управление подается на квадрокоптер, после чего процесс повторяется на следующем временном шаге с обновленным состоянием системы.

Регулятор можно расширять и модифицировать, можно ввести ограничения, штрафные стоимости за быстрые переключения управления, изменить модель объекта, например учитывать характер внешних возмущений.

В среде Matlab/Simulink есть реализация Nonlinear MPC регулятора, но в текущей работе было принято решение полностью написать функцию Nonlinear MPC регулятора с введением некоторых модификаций, и чтобы в дальнейшем было проще перенести реализацию на реальную систему.

Система управления не разделена на контуры, и реализует вышеописанную логику. Схема регулятора представлена на рисунке 4. Для минимизации критерия J используется градиентный спуск, в математическом представлении:

$$U_{k+1} = U_k - \nabla J(U_k). \quad (62)$$

Также введены дополнительные мягкие ограничения на углы ϕ и θ , чтобы квадрокоптер не переворачивался в воздухе.

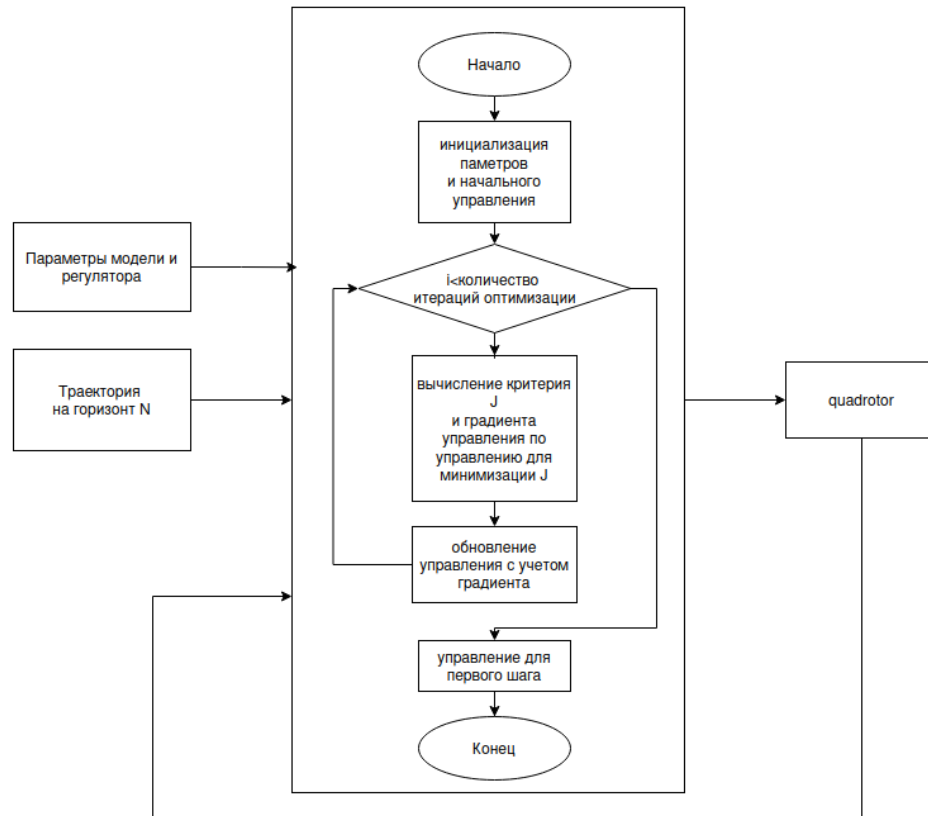


Рисунок 4 — Схема регулятора Nonlinear MPC

Different Linearization Control Techniques for a Quadrotor System

M. BELKHEIRI¹, A. RABHI², A. EL HAJJAJI² and C. PÉGARD²

Abstract—In this paper, we propose different linearization control algorithms to solve the stabilization problem of the quadrotor. First we introduce the nonlinear model of the quadrotor. Then using tangent linearization method, a linear model is generated of the system where decentralized and centralized LQR control methods are applied. The second strategy is based on exact feedback linearization of the nonlinear model of the quadrotor. The comparison between these methods is highlighted by simulations to show effectiveness of the proposed methods.

Index Terms—Quadrotor, Stability, Feedback linearization, LQR.

I. INTRODUCTION

Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) control problem attracts many researchers in the world due to the advantages that they provide in many civil and military applications like rescue and research, remote inspection, surveillance, therefore saving human pilots from dangerous flight conditions [1].

The miniature rotor craft flight formation control involves the integration of different domains such as, rotor craft control, coordination control among others. The work reported in the literature is by now quite vast and addresses different approaches for miniature rotor craft stabilization including linear control [5], robust control [8], nonlinear control [3], [7] among others. Many researchers have proposed different control algorithms based on nonlinear model of the quadrotor but these algorithms work based on simplifying the nonlinear model and supposing some decoupling conditions [4]. In this paper we are interested in developing different linearization control algorithms of the quadrotor that solves the problem of tracking of the quadrotor based on a nonlinear model of the quadrotor. The control strategy can be further robustified using other robust nonlinear control techniques [2] to overcome the problem of neglected aerodynamic perturbations and uncertainty in the model.

II. THE QUADROTOR MODELING

A. Description and Mechanical dynamics

A quadrotor helicopter consists of four rotors that are mounted at the end of two perpendicular axes as depicted in Fig 1 the quadrotor motion is controlled by the aerodynamic forces generated by the rotations of the propellers controlled by dc motors [1].

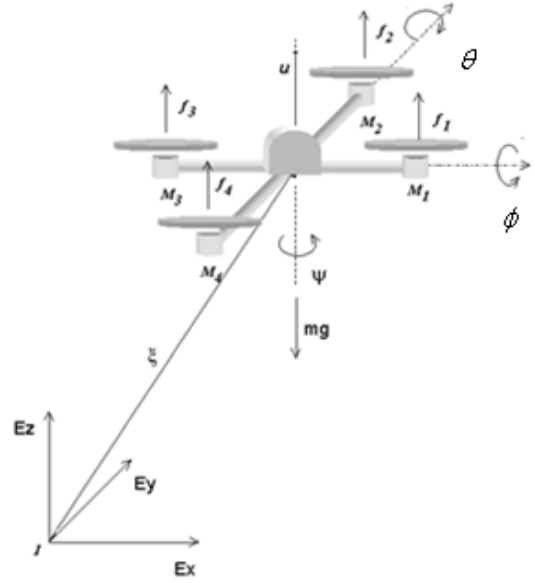


Fig. 1. Quadrotor system

The generalized coordinates for the quadrotor are

$$q = (x, y, z, \phi, \theta, \psi) \in R^6$$

where $\xi = (x, y, z) \in R^3$ denotes the position of the center of mass of the quadrotor relative to the earth fixed frame, and $\eta = (\phi, \theta, \psi) \in R^3$ are the Euler angles (yaw, pitch and roll) that give the orientation of the quadrotor in the body fixed frame.

The total kinetic energy of the quadrotor is

$$T = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T I \dot{\eta}$$

where m is the mass of the quadrotor and I is the inertia matrix. The potential energy is given by $U = mgz$

Using the Lagrangian

$$L(q, \dot{q}) = T - U = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T I \dot{\eta} - mgz$$

¹M. Belkheiri is with Laboratoire de Télécommunications, Signaux et Systèmes (LTSS), Department of Electronics, University of Amar Telidji, 03000 Laghouat, Algeria m.belkheiri@mail.lagh-univ.dz

²A. Rabhi, A. El Hajjaji and C. Pegard are with Laboratoire Modélisation, Information et Systèmes (MIS), University of Picardie Jules Verne, Amiens, 80000, France {a.rabhi, a.hajjaji, claude.pegard}@u-picardie.fr

one can derive the equations of motion of the quadrotor

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F(q) \quad (1)$$

where $F(q) = (F_\xi, \tau_\eta)$ is composed of the translational force vector F_ξ applied to the quadrotor and τ_η is the generalized moments. The forces generated by the dc motors are supposed to be linear with square of the propellers angular speed that drive the quadrotor Ω according to these relations:

$$\begin{cases} F_i = k_i \Omega_i^2 \\ \tau_i = k_d \Omega_i^2 \end{cases} \text{ for } i = 1, \dots, 4 \quad (2)$$

where k_i, k_d are coefficients depend on the rotor blades geometry and air density.

The thrust force vector F is expressed by the superposition of the command force

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = -F_1 - F_2 - F_3 - F_4 \end{cases} \quad (3)$$

The yaw, pitch and roll generated moments are given by :

$$\begin{cases} \tau_\phi = l(F_4 - F_2) \\ \tau_\theta = l(F_1 - F_3) \\ \tau_\psi = \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4 \end{cases} \quad (4)$$

where l is the distance between the mass of center and the motors. Using the transformation matrix representing the orientation of the quadrotor,

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}$$

$$F_\xi = RF.$$

According to the lagrangian equation and based on the assumption that the quadrotor is made of a rigid symmetrical structure with a diagonal inertia matrix I and in the absence of aerodynamic external perturbations, the equations that give the dynamics of the quadrotor can be written as:

$$m\ddot{\xi} = F_\xi - mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$I\ddot{\eta} + \dot{I}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T I \dot{\eta}) = \tau \quad (6)$$

Defining the Coriolis/Centripetal vector

$$\bar{C}(\eta, \dot{\eta}) = C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \dot{I}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T I \dot{\eta}) \quad (7)$$

we may write

$$I\ddot{\eta} + \bar{C}(\eta, \dot{\eta}) = \tau \quad (8)$$

B. Quadrotor State Space Model

In the literature, many studies deal with dynamic modeling and control for quadrotor [5], [10]. There are complex and nonlinear systems. The complete models are difficult to use in control applications. The most part of applications deal with simplified and partial models [3]. In this paper the derived state space model based on the mechanical equations and the chosen state vector will be useful for simplifying controller synthesis using either linear or nonlinear control theory methods.

Using the state vector composed of the following elements: $\chi^T = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]$, and the input vector is composed of the four control command signals: $u^T = [F_z, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]$

Partitioning the state space vector as follows

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}, \begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = \dot{y} \end{cases}, \begin{cases} z_1 = z \\ z_2 = \dot{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi \\ \phi_2 = \dot{\phi} \end{cases}, \begin{cases} \theta_1 = \theta \\ \theta_2 = \dot{\theta} \end{cases}, \begin{cases} \psi_1 = \psi \\ \psi_2 = \dot{\psi} \end{cases}$$

and considering the dynamic equations (5-8), the state space model of the quadrotor will be a multi-variable system composed of six 2^{nd} order nonlinear subsystems and it takes this form:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m} (\cos \phi_1 \sin \theta_1 + \sin \phi_1 \sin \psi_1) U_1 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{m} (\cos \phi_1 \sin \theta_1 \sin \psi_1 - \sin \phi_1 \cos \psi_1) U_1 \\ \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -g + \frac{1}{m} \cos \phi_1 \cos \theta_1 U_1 \\ \dot{\phi}_1 = \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 = \frac{I_y - I_z}{I_x} \theta_2 \psi_2 + \frac{J_{TP}}{I_y} \theta_2 \Omega + \frac{1}{I_x} U_2 \\ \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = \frac{I_z - I_x}{I_y} \phi_2 \psi_2 + \frac{J_{TP}}{I_y} \phi_2 \Omega + \frac{1}{I_y} U_3 \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = \frac{I_x - I_y}{I_z} \phi_2 \theta_2 + \frac{1}{I_z} U_4 \end{cases} \quad (9)$$

C. Control strategy

We are interested in stabilizing the quadrotor in hover, so our controller synthesis procedure aims to provide a control law that makes the quadrotor follows a given trajectory (x^d, y^d, z^d, ψ^d) and maintaining the two other angles bounded and small enough to be near the linearization trajectory.

III. LINEARIZED SYSTEM AND LQR CONTROL

A. Centralized Control

Using the state vector χ and defining the following vector fields:

$$F(\chi) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \\ z_2 \\ -g \\ \phi_2 \\ \frac{I_y - I_x}{I_x} \theta_2 \psi_2 + \frac{J_{TF}}{I_y} \theta_2 \Omega \\ \theta_2 \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} \phi_2 \psi_2 + \frac{J_{TF}}{I_y} \phi_2 \Omega \\ \psi_2 \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} \phi_2 \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$G(\chi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} (c\phi_1 s\theta_1 + s\phi_1 s\psi_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} (c\phi_1 s\theta_1 s\psi_1 - s\phi_1 c\psi_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} c\phi_1 c\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The output vector to be controlled is

$$Y = (x_1, y_1, z_1, \psi_1)$$

so the dynamics of the whole system in vector form is

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= F(\chi) + G(\chi, \bar{\Omega})U \\ Y &= C\chi \end{aligned} \quad (10)$$

This system is linearized at its equilibrium point $(\bar{\chi}, \bar{U})$ given by solving

$$\dot{\bar{\chi}} = 0 \Rightarrow F(\bar{\chi}) + G(\bar{\chi}, \bar{\Omega})\bar{U} = 0 \quad (11)$$

which gives $\bar{U}_2 = \bar{U}_3 = \bar{U}_4 = 0$ and $\phi_2 = \theta_2 = \psi_2 = 0$. Generally the objective of control is to make the Quadrotor follows a given trajectory (x^d, y^d, z^d) with a ϕ_d orientation angle about the vertical axis z . So for a given trajectory we have to find \bar{U}_1 that satisfies the equations

$$\begin{cases} \cos \bar{\phi}_1 \sin \bar{\theta}_1 + \sin \bar{\phi}_1 \sin \bar{\psi}_1 = 0 \\ \cos \bar{\phi}_1 \sin \bar{\theta}_1 \sin \bar{\psi}_1 - \sin \bar{\phi}_1 \cos \bar{\psi}_1 = 0 \\ \cos \bar{\phi}_1 \cos \bar{\theta}_1 \bar{U}_1 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

and

$$\begin{cases} \bar{U}_2 = lb(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) = 0 \\ \bar{U}_3 = lb(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) = 0 \\ \bar{U}_4 = d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_3^2 - \Omega_1^2) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Solving equations (12, and 13) and using $\bar{U}_1 = mg = b(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 + \Omega_3^2 + \Omega_1^2)$ we obtain

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1 = 0 \\ \bar{\theta}_1 = 0 \\ \bar{U}_1 = mg \\ \bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}_3 = \bar{\Omega}_4 = \bar{\Omega} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{b}} \end{cases}$$

Therefore, the equilibrium point is

$$\bar{\chi} = (\bar{x}_1 \ 0 \ \bar{y}_1 \ 0 \ \bar{z}_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\psi}_1 \ 0),$$

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{b}}, \text{ and } \bar{U} = (\bar{U}_1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

By defining the new error vectors $\tilde{\chi} = \chi - \bar{\chi}$, $\tilde{U} = U - \bar{U}$, and $\tilde{Y} = Y - \bar{Y}$, the linearized error dynamics become

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\chi}} = A\tilde{\chi} + B\tilde{U} \\ \tilde{Y} = C\tilde{\chi} \end{cases}$$

with $A = \frac{\partial F}{\partial \eta}|_{\eta=\bar{\eta}}$, $B = \frac{\partial GU}{\partial \eta}|_{\eta=\bar{\eta}} = G(\bar{\chi})$ substituting for the equilibrium points we get:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{pmatrix}$$

The objective of LQR control is to find a state feedback law $\tilde{U} = -K\tilde{\chi}$ that minimizes the objective function $J = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\infty} (\tilde{\chi}^T Q \tilde{\chi} + \tilde{U}^T R \tilde{U})$, with a right choice of the weighting matrices Q and R in a manner that the rate of convergence of the error on the orientation angles is faster than that of the position vector which makes the

linearized dynamics approximate the quadrotor dynamics. The optimal control problem reduces to solve the following linear algebraic Riccati equation for a given Q and R . and the optimal control law is

$$U^* = -K^* \tilde{\eta} = -R^{-1} B^T \tilde{\eta} \quad (14)$$

B. Decentralized Control

The linearized multi-variable system can be rewritten in decentralized form as follows:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{\theta}}_1 \\ \dot{\tilde{\theta}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_x} \end{pmatrix} \tilde{U}_2 \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{y}}_1 \\ \dot{\tilde{y}}_2 \\ \dot{\tilde{\phi}}_1 \\ \dot{\tilde{\phi}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_y} \end{pmatrix} \tilde{U}_3 \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \dot{\tilde{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \tilde{U}_1 \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\psi}}_1 \\ \dot{\tilde{\psi}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_z} \end{pmatrix} \tilde{U}_4 \quad (18)$$

The obtained four subsystems are adequate for linear control design thanks to their controller canonical form for each with single input and single output which makes the synthesis of linear controllers for tracking easier and straightforward.

IV. FEEDBACK LINEARIZATION CONTROL

Feedback linearization, known also by nonlinear decoupling, control is a nonlinear control strategy aims to decouple and linearize the system dynamics without approximation and using nonlinear transformation. Then linear control methods can be used for the linearized model and the nonlinear control law will be found by an inverse transformation [9], [6]. Considering the quadrotor model composed of six subsystems of 2nd order defined by equation (9), and using the following transformation that relates the actual command vector U with a fictitious control vector ν :

$$\begin{cases} \nu_x = (c\phi_1 s\theta_1 + s\phi_1 s\psi_1) \frac{1}{m} U_1 \\ \nu_y = (c\phi_1 s\theta_1 s\psi_1 - s\phi_1 c\psi_1) \frac{1}{m} U_1 \\ \nu_z = -g + c\phi_1 c\theta_1 \frac{1}{m} U_1 \\ \nu_\phi = \frac{I_y - I_z}{I_x} \theta_2 \psi_2 + \frac{J_{TP}}{I_x} \theta_2 \Omega + \frac{1}{I_x} U_2 \\ \nu_\theta = \frac{I_z - I_x}{I_y} \phi_2 \psi_2 + \frac{J_{TP}}{I_y} \phi_2 \Omega + \frac{1}{I_y} U_3 \\ \nu_\psi = \frac{I_x - I_y}{I_z} \phi_2 \theta_2 + \frac{1}{I_z} U_4 \end{cases} \quad (19)$$

Defining the errors between the measured states and their desired values, as

$$\tilde{x}_1 = x_1 - \bar{x}_1, \tilde{y}_1 = y_1 - \bar{y}_1, \tilde{z}_1 = z_1 - \bar{z}_1,$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 - \bar{x}_2, \tilde{y}_2 = y_2 - \bar{y}_2, \tilde{z}_2 = z_2 - \bar{z}_2,$$

$$\tilde{\phi}_1 = \phi_1 - \bar{\phi}_1, \tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \bar{\theta}_1, \tilde{\psi}_1 = \psi_1 - \bar{\psi}_1,$$

$$\tilde{\phi}_2 = \phi_2 - \bar{\phi}_2, \tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \bar{\theta}_2, \tilde{\psi}_2 = \psi_2 - \bar{\psi}_2,$$

So the error dynamics of the system are linearized and reduced to a system composed of six identical 2nd order linear systems as follows in the new error space with the fictitious input:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \nu_x \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_2 \\ \dot{\tilde{y}}_2 = \nu_y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{z}}_1 = \tilde{z}_2 \\ \dot{\tilde{z}}_2 = \nu_z \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\phi}}_1 = \tilde{\phi}_2 \\ \dot{\tilde{\phi}}_2 = \nu_\phi \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}_1 = \tilde{\theta}_2 \\ \dot{\tilde{\theta}}_2 = \nu_\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{\psi}}_1 = \tilde{\psi}_2 \\ \dot{\tilde{\psi}}_2 = \nu_\psi \end{cases} \quad (21)$$

The linearized subsystems are identical and control synthesis is simplified and reduces to finding a decentralized state feedback law that ensures the exponential convergence of the error dynamics in (20,21) between the nominal values and the measured values. The error convergence rate is controlled by the right choice of fictitious control gains:

$$\begin{cases} \nu_x = -k_1^x \tilde{x}_1 - k_2^x \tilde{x}_2 \\ \nu_y = -k_1^y \tilde{y}_1 - k_2^y \tilde{y}_2 \\ \nu_z = -k_1^z \tilde{z}_1 - k_2^z \tilde{z}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \nu_\phi = -k_1^\phi \tilde{\phi}_1 - k_2^\phi \tilde{\phi}_2 \\ \nu_\theta = -k_1^\theta \tilde{\theta}_1 - k_2^\theta \tilde{\theta}_2 \\ \nu_\psi = -k_1^\psi \tilde{\psi}_1 - k_2^\psi \tilde{\psi}_2 \end{cases} \quad (22)$$

After finding the fictitious control law ν using pole placement or LQR control, we get the actual control law U by inverse transformation of equation 19 as follows:

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1 = \arctan \frac{\nu_x}{\nu_z + g} \\ \bar{\phi}_1 = \arctan \frac{\nu_y}{\nu_z + g} \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} U_1 = \frac{m\nu_z + g}{\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\phi}_1} \\ U_2 = I_x \nu_\phi - (I_y - I_z) \theta_2 \psi_2 - J_{TP} \theta_2 \Omega \\ U_3 = I_y \nu_\theta - (I_z - I_x) \phi_2 \psi_2 - J_{TP} \phi_2 \Omega \\ U_4 = I_z \nu_\psi - (I_z - I_y) \phi_2 \theta_2 \end{cases} \quad (24)$$

The control strategy highlighted in section III can be explained well by the diagram shown in figure 2

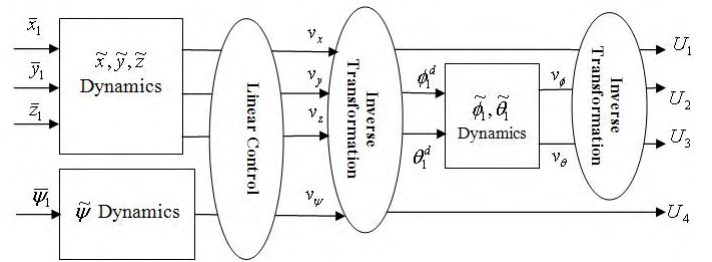


Fig. 2. Feedback Linearization Control Scheme

and then the command vector composed of the angular speeds Ω_i that are sent to the dc motor controller which is the real input vector is calculated by another inversion based on the following equations

$$\begin{pmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -lb & 0 & lb \\ -lb & 0 & lb & 0 \\ -d & d & -d & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \quad (25)$$

V. SIMULATION RESULTS

we have built the nonlinear model of the quadrotor on Matlab file to be used as an s-function in Simulink to test the control algorithms proposed in sections (III,IV) for the quadrotor.

The linear controller then is synthesized using control toolbox to calculate the LQR gains using different weighting Q and R matrices.

TABLE I
QUADROTOR SIMULATION PARAMETERS

Parameter	Description
$m = 1kg$	The weight of the quadrotor
$I_x = 8.1 \times 10^{-3}$	Moment of inertia along x
$I_y = 8.1 \times 10^{-3}$	Moment of inertia along y
$I_z = 14.2 \times 10^{-3}$	Moment of inertia along z
$b = 54.2 \times 10^{-6}$	Lift coefficient
$d = 4.1 \times 10^{-6}$	Drag coefficient
$l = 0.24m$	Distance

The tracking ability of the proposed linearisation algorithms is tested based on the objectif to follow a given trajectory in specified in cartesian coordinates x, y, z . The quadrotor starts at point $(X_0 = 0, Y_0 = 0, Z_0 = 0)$ at $t_0 = 0$ then reaches $(X_1 = 0.5m, Y_1 = 1m, Z_1 = 1m)$ at $t = 10s$. Finally it arrives back to $(X_0 = 0, Y_0 = 0, Z_0 = 1m)$ at $t = 20s$.

The simulation results based on the proposed design algorithms for a quadrotor with the parameters of table I

$$Q = 10^{-1} \times I_{12}, R = \begin{pmatrix} 10^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

are shown in Figures 3,4.

The results show that the LQR controller ensures the tracking of the reference signals and the error dynamics converge for both the decentralized and centralized cases. Feedback linearization control algorithms is implemented in Simulink block diagram as an s-function. The simulation is performed using a Matlab script which provided the model parameters and those of controller of table II, and starts the simulation to test the performance of this method of control to follow the above mentioned trajectory in 3d.

Simulations results in figures 6,7,8,9 show the effectiveness of the proposed algorithm which can be further made robust for parametric uncertainties.

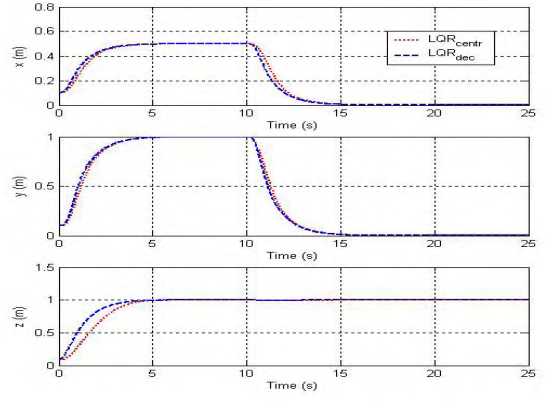


Fig. 3. Simulation results of (x, y, z) tracking

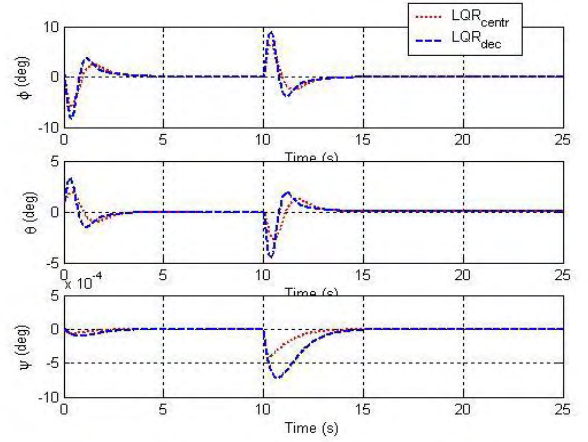


Fig. 4. Simulation results of (ϕ, θ, ψ) tracking

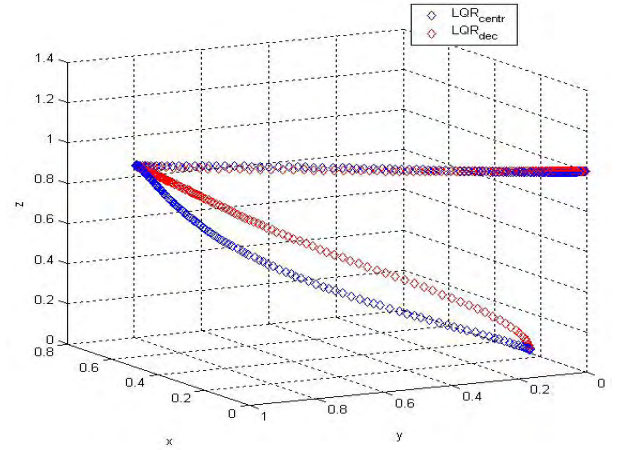


Fig. 5. Trajectory in 3-d for (x, y, z) tracking

TABLE II
FEEDBACK LINEARIZATION REGULATOR PARAMETERS

Feedback gain	closed loop poles
$K_\psi = K_\phi = K_\theta = \begin{pmatrix} 10 & 10.95 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -9.95$
$K_x = K_y = K_z = \begin{pmatrix} 3.16 & 4.04 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2.98$

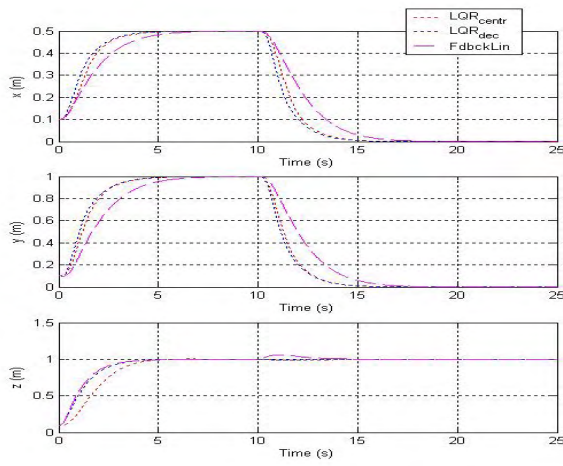


Fig. 6. Simulation results of (x, y, z) tracking

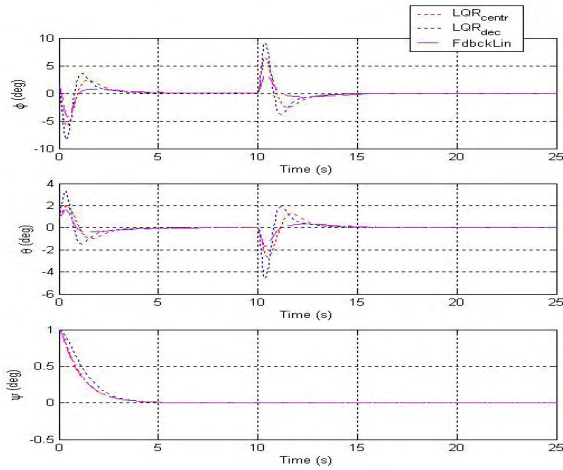


Fig. 7. Simulation results of (ϕ, θ, ψ) tracking

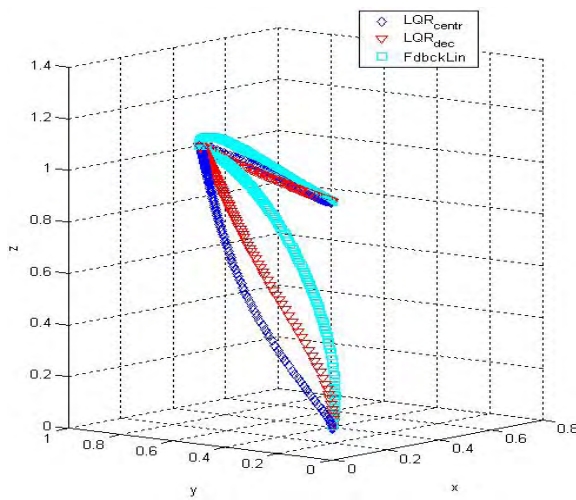


Fig. 8. Trajectory in 3-d for (x, y, z) tracking

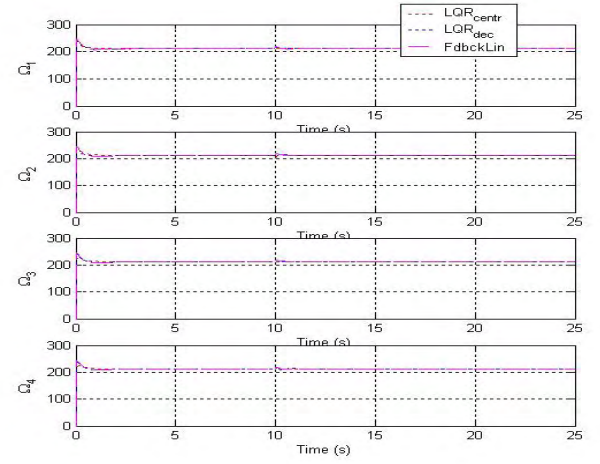


Fig. 9. Control signals $(\Omega_i, i = 1..4)$

VI. CONCLUSION

This paper proposes different linearization control techniques for the tracking and stabilization of a quadrotor system. The nonlinear model is first obtained and then represented by a state space model. We have designed a state feedback controller using centralized, decentralized LQR and Feedback linearization. Simulation results are carried out to show that the designed controllers ensure the global convergence of the error dynamics in closed-loop and the tracking of reference trajectory is well achieved. Some simulations in the presence of model parametric uncertainty and some external perturbation forces will be included to complete this study.

REFERENCES

- [1] S.Bouabdellah and R. Siegwart, "Backstepping and sliding mode techniques applied to an indoor microquadrotor" Proceeding of the IEEE, ICRA, Barcelona, Spain, April 2005.
- [2] M. Belkheiri, F. Boudjema, "Backstepping Control Augmented by Neural Networks For Robot Manipulators", in AIP conf. Proceedings of 1st Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation, CISA 2008.
- [3] H. Bouadi, M.Bouchoucha, M.Tadjine, "Sliding mode control based on backstepping approach for an UAV type-quadrotor, International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences, Vol.4, No.1, pp. 12-17, Barcelona; Spain 2007.
- [4] L. R. Garca Carrillo, E. Rondon, A. Sanchez, A. Dzul, R. Lozano, "Stabilization and Trajectory Tracking of a Quad-Rotor Using Vision, Journal of Intelligent Robotic Systems, Springer vol. 61, (2011) pp:103118.
- [5] P. Castillo, R. Lozano, and A. Dzul, "Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors. Control Systems Magazine, IEEE vol. 25, 2005, pp.45-55.
- [6] H.K. Khalil, "Nonlinear Systems", Prentice Hall, NJ, 2002.
- [7] A.Mokhtari, N.K.Msirdi, K.Meghriche and A.Belaidi, "feedback linearization and linear observer for a quadrotor unmanned aerial vehicle, Advanced Robotics, Vol.20, No.1, pp. 71-91, 2006.
- [8] A. Rabhi, M. Chadli, and C. Pegard, "Robust fuzzy control for stabilization of a quadrotor, in 15th International Conference on Advanced Robotics (ICAR), 20-23 June 2011 pp.471-475
- [9] J.-J. Slotine, W. Li, "Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1991.
- [10] M. Valenti, B. Bethke, G. Fiore, and J. How, "Indoor multi-vehicle flight testbed for fault detection, indoor multi-vehicle flight testbed for fault detection, isolation, and recovery, in Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 2006.