第二章

2-1

硅突变结二极管的掺杂浓度为：$N_d=10^{15}cm^{-3}$，$N_a=4\times10^{20}cm^{-3}$，在室温下计算：
(1)自建电势；(2)耗尽层宽度；(3)零偏压下的最大内建电场。

解：
（1）饱和电离区有：

N型区：$n=N_d=n_i\exp(\dfrac{E_{fN}-E_i}{kT}) \implies E_{fN}-E_i=kT\ln\dfrac{N_d}{n_i}$

P型区：$p=N_a=n_i\exp(\frac{E_i-E_{fP}}{kT}) \implies E_i-E_{fP}=kT\ln\frac{N_a}{n_i}$

两式相减可得：$q\psi_0=E_{fN}-E_{fP}=kT\ln\dfrac{N_dN_a}{n_i^2}$

代入数据：

$$\psi_0=\frac{kT}{q}\ln\frac{N_dN_a}{n_i^2}=V_T\ln\frac{N_aN_d}{n_i^2}=0.026V\times\ln\frac{4\times10^{20}\times10^{15}}{(1.5\times10^{10})^2}\approx0.91V$$

(2) 由$N_a x_p = N_d x_n \implies x_n = \frac{N_a}{N_d} x_p = \frac{4\times 10^{20}}{10^{15}} x_p = 4\times 10^5 x_p \implies x_n \gg x_p$

则有 $W \approx x_n$，且内建电势几乎全部降落在N侧的空间电荷区上。

由N侧泊松方程：$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{qN_d}{\epsilon}$，得通解为

$$\psi(x) = -\frac{qN_d}{2\epsilon}x^2 + C_1 x + C_2, \quad \text{其中} C_1, C_2 \text{为常数}$$

代入边界条件:$\begin{cases} -\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_n} = 0, & N\text{侧中性区无电场} \\ \psi(0) = 0, & \text{设两侧交界即}x=0\text{处电势为}0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = \frac{qN_d x_n}{\epsilon} \\ C_2 = 0 \end{cases}$

则有

$$\psi(x) = -\frac{qN_d}{2\epsilon}x^2 + \frac{qN_d x_n}{\epsilon}x$$

内建电势差$\psi_0 = \psi(x_n) - \psi(0) = \frac{qN_d x_n^2}{2\epsilon} \implies x_n = \sqrt{\frac{2\psi_0\epsilon}{qN_d}}$

耗尽区宽度$W \approx x_n = \sqrt{\frac{2\psi_0\epsilon}{qN_d}} = \sqrt{\frac{2\times 0.91\times 11.9\times 8.85\times 10^{-14}}{1.6\times 10^{-19} 10^{15}}}cm \approx 1.09\times 10^{-4}cm$

(3) 有$E(x) = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = -\frac{qN_d}{\epsilon}x + \frac{qN_d x_n}{\epsilon}$，显然当$x=0$时$E$取最大值

$$E_{max} = E(0) = \frac{qN_d x_n}{\epsilon} = \frac{1.6\times 10^{-19}\times 10^{15}\times 1.09\times 10^{-4}}{11.9\times 8.85\times 10^{-14}} V/cm \approx 1.66\times 10^4 V/cm$$

2-2

若突变结两边的掺杂浓度为同一数量级，试证明自建电势和耗尽层宽度可用下式表示：

$$\psi_0 = \frac{qN_aN_d(x_n+x_p)^2}{2k\epsilon_0(N_a+N_d)} \quad x_n = \sqrt{\frac{2k\epsilon_0\psi_0 N_a}{qN_d(N_a+N_d)}} \quad x_p = \sqrt{\frac{2k\epsilon_0\psi_0 N_d}{qN_a(N_a+N_d)}}$$

解：

令PN结交界处为$x=0$，P侧中性区边界为$x=-x_p$，N侧中性区边界为$x=x_n$，则有泊松方程：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{qN_a}{\epsilon}, & -x_p \le x \le 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{qN_d}{\epsilon}, & 0 \le x \le x_n \end{cases}$$

通解为：

$$\begin{cases} \psi(x) = \frac{qN_a}{2\epsilon}x^2 + C_1x + C_2, & -x_p \le x \le 0 \\ \psi(x) = -\frac{qN_d}{2\epsilon}x^2 + C_3x + C_4, & 0 \le x \le x_n \end{cases} \quad \text{其中} C_1, C_2, C_3, C_4 \text{为常数}$$

边界条件：

- 令PN结交界处即$x=0$处为内建电势的零点，即$\psi(0)=0$；
- 两侧中性区电场为零且连续：

$$E(-x_p)=-\left.\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-x_p}=0\,,\ E(x_n)=-\left.\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_n}=0$$

代入以上边界条件可得$C_1=\frac{qN_dx_p}{\epsilon}$，$C_3=\frac{qN_ax_n}{\epsilon}$，$C_2=C_4=0$

代入ψ表达式中

$$\begin{cases}\psi(x)=\frac{qN_a}{2\epsilon}x^2+\frac{qN_dx_p}{\epsilon}x, & -x_p\le x\le 0\\ \psi(x)=-\frac{qN_d}{2\epsilon}x^2+\frac{qN_ax_n}{\epsilon}x, & 0\le x\le x_n\end{cases}$$

有$N_dx_n=N_ax_p$，$W=x_n+x_p$，可得$x_n=\frac{N_a}{N_a+N_d}W$，$x_p=\frac{N_d}{N_a+N_d}W$

内建电势差：

$$\begin{aligned}\psi_0&=\psi(x_n)-\psi(-x_p)\\&=-\frac{qN_d}{2\epsilon}x_n^2+\frac{qN_ax_n}{\epsilon}x_n-\frac{qN_a}{2\epsilon}x_p^2+\frac{qN_dx_p}{\epsilon}x_p\\&=\frac{qN_d}{2\epsilon}x_n^2+\frac{qN_a}{2\epsilon}x_p^2\\&=\frac{qN_aN_d}{2\epsilon(N_a+N_d)}(x_nW+x_pW)\\&=\frac{qN_aN_d(x_n+x_p)^2}{2\epsilon(N_a+N_d)}\end{aligned}$$

则可求得：

$$\begin{aligned}W&=\sqrt{\frac{2\epsilon\psi_0(N_a+N_d)}{qN_aN_d}}\\x_n&=\frac{N_a}{N_a+N_d}W=\sqrt{\frac{2\epsilon\psi_0N_a}{qN_d(N_a+N_d)}}\\x_p&=\frac{N_d}{N_a+N_d}W=\sqrt{\frac{2\epsilon\psi_0N_d}{qN_a(N_a+N_d)}}\end{aligned}$$

2-3

推导出线性缓变PN结的下列表示式: (1)电场(2)电势分布(3)耗尽层宽度(4)内建电势差。

解：

令PN结交界处为$x=0$，P侧中性区边界为$x=-x_p$，N侧中性区边界为$x=x_n$

对于线性缓变结，空间电荷区关于$x=0$左右对称，即$x_n=x_p=\frac{W}{2}$

耗尽层电荷浓度分布$N(x)=N_d-N_a=\alpha x$，代入泊松方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\rho}{\epsilon}=-\frac{q\alpha x}{\epsilon}\implies\psi(x)=-\frac{q\alpha}{6\epsilon}x^3+C_1x+C_2\,,\quad \text{其中}C_1,C_2\text{为常数}$$

边界条件：

令PN结交界处即$x=0$处为内建电势的零点，即$\psi(0)=0$；

两侧中性区电场为零且连续，即$E(-\frac{W}{2})=E(\frac{W}{2})=-\left.\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=W/2}=0$

代入以上边界条件可得$C_1=\frac{q\alpha W^2}{8\epsilon}$， $C_2=0$，即

$$\psi(x)=-\frac{q\alpha}{6\epsilon}x^3+\frac{q\alpha W^2}{8\epsilon}x$$

(1) $E(x)=-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=\frac{q\alpha}{2\epsilon}x^2-\frac{q\alpha W^2}{8\epsilon}$

(2) $\psi(x)=-\frac{q\alpha}{6\epsilon}x^3+\frac{q\alpha W^2}{8\epsilon}x$

(3) $\psi_0=\psi(\frac{W}{2})-\psi(-\frac{W}{2})=2\psi(\frac{W}{2})=2[-\frac{q\alpha}{6\epsilon}(\frac{W}{2})^3+\frac{q\alpha W^2}{8\epsilon}\frac{W}{2}]=\frac{q\alpha W^3}{12\epsilon}$

$W=\sqrt[3]{\frac{12\epsilon\psi_0}{q\alpha}}$

(4) $\psi_0=\frac{q\alpha W^3}{12\epsilon}$

或用浓度表示

P侧N侧中性区杂质浓度：$p_{p0}=n_{n0}=\frac{\alpha W}{2}$，代入$\psi_0$浓度表达式

$$\psi_0=V_T\ln\frac{p_{p0}n_{n0}}{n_i^2}=2V_T\ln\frac{\alpha W}{2n_i}$$

2-4

推导出N^+N结(常称为高低结)内建电势差表达式。

解：

法一：热平衡时费米能级一致：

设N^+区杂质浓度N_d^+，N区杂质浓度N_d，饱和电离时有：

$$E_{fN^+}-E_i=kT\ln\frac{N_d^+}{n_i}\text{ , }E_{fN}-E_i=kT\ln\frac{N_d}{n_i}$$

两式相减可得：$q\psi_0=E_{fN^+}-E_{fN}=kT\ln\frac{N_d^+}{N_d}$

则有$\psi_0=E_{fN^+}-E_{fN}=V_T\ln\frac{N_d^+}{N_d}$

法二：静电势概念：

$\psi^+=V_T\ln\frac{N_d^+}{n_i}$, $\psi=V_T\ln\frac{N_d}{n_i}$

$\psi_0=\psi^+-\psi=V_T\ln\frac{N_d^+}{N_d}$

2-5

P^+N结空间电荷区边界分别为$-x_p$和x_n，利用$np=n_i^2e^{V/V_T}$导出一般情况下的$p_n(x_n)$表达式。给出N区空穴为小注入和大注入两种情况下的$p_n(x_n)$表达式。

解：

在N侧空间电荷区和中性区的边界，即$x=x_n$处

$$\begin{cases} p_n = p_{n0}+\Delta p \approx \Delta p, & \Delta p \gg p_{n0} \\ n_n = n_{n0}+\Delta n \approx n_{n0}+p_n\ , & \Delta n = \Delta p \end{cases}$$

代入$np=n_i^2e^{V/V_T}$可得$p_nn_n=p_n(n_{n0}+p_n)=p_nn_{n0}+p_n^2=n_i^2e^{V/V_T}$，解得

$$p_n=\frac{-n_{n0}+\sqrt{n_{n0}^2+4n_i^2e^{V/V_T}}}{2} \quad \text{或} \quad p_n=\frac{-n_{n0}-\sqrt{n_{n0}^2+4n_i^2e^{V/V_T}}}{2}(\text{舍去})$$

小注入时：$p_n\approx\Delta p\ll n_{n0}$，则$p_n^2\ll p_nn_{n0}$，则有

$$p_nn_{n0}=n_i^2e^{V/V_T} \implies p_n=\frac{n_i^2}{n_{n0}}e^{V/V_T}=p_{n0}e^{V/V_T}$$

大注入时：$p_n\approx\Delta p\gg n_{n0}$，则$p_n^2\gg p_nn_{n0}$，则有

$$p_n^2=n_i^2e^{V/V_T} \implies p_n=\sqrt{n_i^2e^{V/V_T}}=n_ie^{V/2V_T}$$

2-6

根据电子电流公式$I_n=qA(n\mu_nE+D_n\frac{\partial n}{\partial x})$推导方程$\psi_0=\psi_n-\psi_p=V_T\ln\frac{N_dN_a}{n_i^2}$。

解：

热平衡时，电子电流为零，即$I_n=qA(n\mu_nE+D_n\frac{\partial n}{\partial x})=0$

$$E=-\frac{1}{n\mu_n}D_n\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}=-\frac{V_T\,\mathrm{d}\ln n}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \implies \mathrm{d}\psi=V_T\,\mathrm{d}\ln n$$

对该式从$-x_p$到x_n积分：$\psi(x_n)-\psi(-x_p)=V_T[\ln n(x_n)-\ln n(-x_p)]$

则内建电势差$\psi_0=\psi_n-\psi_p=V_T\ln\frac{n_{n0}}{n_{p0}}=V_T\ln\frac{N_aN_d}{n_i^2}$

2-7

根据修正欧姆定律和空穴扩散电流公式证明，在外加正向偏压V作用下，PN结N侧空穴扩散区准费米能级的改变量为$\Delta E_{FP}=qV$。

解：

空穴电流修正欧姆定律$I_p=-qAp\mu_p\dfrac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}$

空穴扩散电流 $I_p=-qAD_p\dfrac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}x}$

两式电流相等，即

$$-qAp\mu_p\frac{\mathrm{d}\phi_p}{\mathrm{d}x}=-qAD_p\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}x}\implies\mathrm{d}\phi_p=\frac{D_p}{\mu_p}\frac{\mathrm{d}p_n}{p_n}=V_T\mathrm{d}(\ln p_n)$$

有准费米势：$\phi_p=-\dfrac{E_{FP}}{q}\implies\mathrm{d}\phi_p=-\dfrac{1}{q}\mathrm{d}E_{FP}$，代入上式得$\mathrm{d}E_{FP}=-kT\mathrm{d}(\ln p_n)$

对其在扩散区进行积分，由于扩散区外无扩散电流，可从x_n到W_x积分

$$\begin{aligned}\Delta E_{FP}=\int_{x_n}^{W_n}\mathrm{d}E_{FP}&=\int_{x_n}^{W_n}-kT\mathrm{d}(\ln p_n)\\&=-kT[\ln p_n(W_n)-\ln p_n(x_n)]\\&=-kT\ln\frac{p_{n0}}{p_{n0}e^{V/V_T}}\\&=\frac{kTV}{V_T}\\&=qV\end{aligned}$$

2-8

---

(1) PN结的空穴注射效率定义为在$x=0$处的I_p/I，证明此效率可写成$\gamma=\dfrac{I_p}{I}=\dfrac{1}{1+\sigma_nL_p/\sigma_pL_n}$;

(2)在实际的二极管中怎样才能使γ接近1。

解：

(1) $I_p(x_n)=\dfrac{qAD_p}{L_p}p_{n0}(e^{V/V_T}-1)$，$I_n(-x_p)=\dfrac{qAD_n}{L_n}n_{p0}(e^{V/V_T}-1)$

总电流$I=qA(\dfrac{p_{n0}D_p}{L_p}+\dfrac{n_{p0}D_n}{L_n})(e^{V/V_T}-1)$

$$\gamma=\frac{I_p}{I}=\frac{I_p(x_n)}{I}=\frac{\dfrac{qAD_p}{L_p}p_{n0}(e^{V/V_T}-1)}{qA(\dfrac{p_{n0}D_p}{L_p}+\dfrac{n_{p0}D_n}{L_n})(e^{V/V_T}-1)}=\frac{1}{1+\dfrac{n_{p0}D_n}{L_n}\dfrac{L_p}{p_{n0}D_p}}$$

有$D_n=\mu_nV_T$，$D_p=\mu_pV_T$，$\sigma_n=nq\mu_n$，$\sigma_p=pq\mu_p$，代入上式

$$\gamma=\frac{1}{1+\dfrac{n_{p0}D_n}{L_n}\dfrac{L_p}{p_{n0}D_p}}=\frac{1}{1+\dfrac{n_{p0}\mu_nV_TL_p}{p_{n0}\mu_pV_TL_n}}=\frac{1}{1+\dfrac{qn_{p0}\mu_nL_p}{qp_{n0}\mu_pL_n}}=\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_nL_p}{\sigma_pL_n}}$$

(2) 为使γ接近1，应使$\dfrac{\sigma_nL_p}{\sigma_pL_n}\ll 1$

$$\frac{\sigma_nL_p}{\sigma_pL_n}=\frac{qn_{p0}\mu_n\sqrt{\mu_pV_T\tau_p}}{qp_{n0}\mu_p\sqrt{\mu_nV_T\tau_n}}=\frac{N_dn_i^2\sqrt{\mu_n}\sqrt{\tau_p}}{N_an_i^2\sqrt{\mu_p}\sqrt{\tau_n}}=\frac{N_d}{N_a}\cdot\frac{\sqrt{\mu_n}}{\sqrt{\mu_p}}\cdot\frac{\sqrt{\tau_p}}{\sqrt{\tau_n}}$$

μ_n，μ_p相差不大，τ_n，τ_p相差不大，所以只需使$N_a\gg N_d$即PN结为P^+N结即可

2-9

长PN结二极管处于反偏压状态：
(1)解扩散方程求少子分布$n_p(x)$和$p_n(x)$并画出它们的分布示意图。
(2)计算扩散区内少子贮存电荷。
(3)证明反向电流$I=-I_0$为PN结扩散区内的载流子产生电流。

解：

（1）P侧电子连续方程$\dfrac{\partial n_p}{\partial t}=D_n\dfrac{\partial n_p}{\partial x}-\dfrac{n_p-n_{p0}}{\tau_n}$

稳态时，有$\dfrac{\partial n_p}{\partial t}=0$，即$D_n\dfrac{\partial n_p}{\partial x}-\dfrac{n_p-n_{p0}}{\tau_n}=0$

令$L_n^2=D_n\tau_n$，代入上式可得：$\dfrac{\mathrm{d}(n_p-n_{p0})}{\mathrm{d}x}-\dfrac{n_p-n_{p0}}{L_n^2}=0$，其通解为：

$$n_p=n_{p0}+Ae^{x/L_n}+Be^{-x/L_n}\ ,\ -W_p\le x\le -x_p\quad \text{其中}A,B\text{为常数}$$

设PN结空间电荷区P侧边界为$-x_p$，外部接触$-W_p$，可得
边界条件：

反偏状态时有反向抽取，即当$x=-x_p$时有$n_p=0$；

在外部接触位置即当$x=-W_p$时有$n_p=n_{p0}$

代入以上边界条件：

$$\begin{cases} n_p(-x_p)=n_{p0}+Ae^{-x_p/L_n}+Be^{x_p/L_n}=0 \\ n_p(-W_p)=n_{p0}+Ae^{-W_p/L_n}+Be^{W_p/L_n}=n_{p0} \end{cases}$$

长PN结中$W_n\gg L_n$，则可得$A=-n_{p0}e^{x_p/L_n}$，$B=0$，代入通解

$$n_p=n_{p0}-n_{p0}e^{(x_p+x)/L_n}=n_{p0}[1-e^{(x_p+x)/L_n}]\ ,\ -W_p\le x\le -x_p$$

同理可解得：

$$p_n=p_{n0}[1-e^{(x_n-x)/L_p}]\ ,\ x_n\le x\le W_n$$

（2）P侧扩散区有$\Delta n_p=n_p-n_{p0}=-n_{p0}e^{(x_p+x)/L_n}$，对其从$-W_p$到$-x_p$积分

$$Q_n=-qA\int_{-W_p}^{-x_p}-n_{p0}e^{(x_p+x)/L_n}\,\mathrm{d}x=qAL_nn_{p0}e^{(x_p+x)/L_n}\Big|_{-W_p}^{-x_p}=qAL_nn_{p0}[1-e^{(x_p-W_p)/L_n}]$$

长PN结有$W_p\gg L_n$，则可近似得到$Q_n=qAL_nn_{p0}$，符号为正是少子电子被抽取的结果。

N侧扩散区有$\Delta p_n=p_n-p_{n0}=-p_{n0}e^{(x_n-x)/L_p}$，对其从$x_n$到$W_n$积分

$$Q_p=qA\int_{x_n}^{W_n}-p_{n0}e^{(x_n-x)/L_p}\,\mathrm{d}x=qAL_pp_{n0}e^{(x_n-x)/L_n}\Big|_{x_n}^{W_n}=qAL_pp_{n0}[e^{(x_n-W_n)/L_p}-1]$$

长PN结有$W_n\gg L_p$，则可近似得到$Q_p=-qAL_pp_{n0}$，符号为负是少子空穴被抽取的结果。

（3）设P、N侧扩散区贮存电荷均匀分布在长为L_n、L_p的扩散区内。则有

$$\Delta n_p=\frac{Q_n}{-qAL_n}=-n_{p0}\ ,\ \Delta p_n=\frac{Q_p}{qAL_p}=-p_{n0}$$

P侧扩散区电子产生率$G_n=-U_n=-\dfrac{\Delta n_p}{\tau_n}=\dfrac{n_{p0}}{\tau_n}>0$，有产生电流。

N侧扩散区空穴产生率$G_p=-U_p=-\dfrac{\Delta p_n}{\tau_p}=\dfrac{p_{n0}}{\tau_p}>0$，有产生电流。

显然和$I=-I_0=-qA(\dfrac{n_{p0}}{\tau_n}L_n+\dfrac{p_{n0}}{\tau_p}L_p)$一致，即反向电流为扩散区载流子产生电流。

2-10

若 PN结边界条件为$x=W_n$处$p=P_{n0}$，$x=-W_p$处$n=n_{po}$。其中W_p和W_n分别与L_p与L_n具有相同的数量级，求$n_p(x)$、$p_n(x)$以及$I_n(x)$、$I_p(x)$的表达式。

解：

P侧电子连续方程$\dfrac{\partial n_p}{\partial t}=D_n\dfrac{\partial n_p}{\partial x}-\dfrac{n_p-n_{p0}}{\tau_n}$

稳态时，有$\dfrac{\partial n_p}{\partial t}=0$，即$D_n\dfrac{\partial n_p}{\partial x}-\dfrac{n_p-n_{p0}}{\tau_n}=0$

令$L_n^2=D_n\tau_n$，代入上式可得：$\dfrac{\mathrm{d}(n_p-n_{p0})}{\mathrm{d}x}-\dfrac{n_p-n_{p0}}{L_n^2}=0$，其通解为：

$$n_p=n_{p0}+Ae^{x/L_n}+Be^{-x/L_n}\text{，}-W_p\le x\le -x_p\quad \text{其中}A,B\text{为常数}$$

边界条件：

正偏时有正向注入，即当$x=-x_p$时有$n_p=n_{p0}e^{V/V_T}$；

在外部接触位置即当$x=-W_p$时有$n_p=n_{p0}$

代入以上边界条件：

$$\begin{cases}n_p(-x_p)=n_{p0}+Ae^{-x_p/L_n}+Be^{x_p/L_n}=n_{p0}e^{V/V_T}\\ n_p(-W_p)=n_{p0}+Ae^{-W_p/L_n}+Be^{W_p/L_n}=n_{p0}\end{cases}$$

联立可解得$A=\dfrac{e^{W_p/L_n}n_{p0}(e^{V/V_T}-1)}{2\sinh\dfrac{W_p-x_p}{L_n}}$，$B=\dfrac{e^{-W_p/L_n}n_{p0}(e^{V/V_T}-1)}{2\sinh\dfrac{x_p-W_p}{L_n}}$，代入通解：

$$\begin{aligned}n_p&=n_{p0}+\frac{e^{W_p/L_n}n_{p0}(e^{V/V_T}-1)}{2\sinh\dfrac{W_p-x_p}{L_n}}e^{x/L_n}+\frac{e^{-W_p/L_n}n_{p0}(e^{V/V_T}-1)}{2\sinh\dfrac{x_p-W_p}{L_n}}e^{-x/L_n}\\&=n_{p0}+n_{p0}(e^{V/V_T}-1)\frac{\sinh\dfrac{W_p+x}{L_n}}{\sinh\dfrac{W_p-x_p}{L_n}}\text{，}-W_p\le x\le -x_p\end{aligned}$$

同理可解得

$$p_n=p_{n0}+p_{n0}(e^{V/V_T}-1)\frac{\sinh\dfrac{W_n-x}{L_p}}{\sinh\dfrac{W_n-x_n}{L_p}}\text{，}x_n\le x\le W_n$$

电流强度分别是

$$I_n = qAD_n\frac{\mathrm{d}n_p}{\mathrm{d}x} = \frac{qAn_{p0}}{L_n}(e^{V/V_T}-1)\frac{\cosh\dfrac{W_p+x}{L_n}}{\sinh\dfrac{W_p-x_p}{L_n}}, \ -W_p \le x \le -x_p$$

$$I_p = -qAD_n\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}x} = \frac{qAp_{n0}}{L_p}(e^{V/V_T}-1)\frac{\cosh\dfrac{W_n-x}{L_p}}{\sinh\dfrac{W_n-x_n}{L_p}}, \ x_n \le x \le W_n$$

2-11

在P^+N结二极管中，N区的宽度W_n远小于L_p，用$I_p|_{x=W_n} = qS\Delta p_n A$ (S为表面复合速度)作为N侧末端的少数载流子电流，并以此为边界条件之一，推导出载流子和电流分布。绘出在$S=0$和$S=\infty$时N侧少数载流子的分布形状(计算机解)。

解：

设空间电荷区与N侧中性区交界为$x=0$的点，此时N侧外部接触点$x=W_n'=W_n-x_n$。

N侧少子连续方程为$\dfrac{\partial p_n}{\partial t} = D_p\dfrac{\partial p_n}{\partial x} - \dfrac{p_n-p_{n0}}{\tau_p} \Longrightarrow \dfrac{\partial \Delta p_n}{\partial t} = D_p\dfrac{\partial \Delta p_n}{\partial x} - \dfrac{\Delta p_n}{\tau_p}$。

稳态时有$\dfrac{\partial \Delta p_n}{\partial t} = D_p\dfrac{\partial \Delta p_n}{\partial x} - \dfrac{\Delta p_n}{\tau_p} = 0$，通解为：

$$\Delta p_n = C_1 e^{x/L_p} + C_2 e^{-x/L_p}, \quad \text{其中} C_1, C_2 \text{为常数}$$

边界条件：

当$x=0$时有$\Delta p_n|_{x=0} = C_1 + C_2 = p_{n0}(e^{V/V_T}-1)$；

当$x=W_n'$时$I_p|_{x=W_n'} = -qAD_p\dfrac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}x} = -qAD_p\dfrac{\mathrm{d}\Delta p_n}{\mathrm{d}x}q = S\Delta p_n A|_{x=W'}$即：

$$-\frac{qAD_p}{L_p}(C_1 e^{W_n'/L_p} - C_2 e^{-W_n'/L_p}) = qSA(C_1 e^{W_n'/L_p} + C_2 e^{-W_n'/L_p})$$

联立边界条件可得

$$C_1 = \frac{(D_p - L_pS)e^{-W_n'/L_p}}{2[D_p\cosh(\dfrac{W_n'}{L_p}) + L_pS\sinh(\dfrac{W_n'}{L_p})]}p_{n0}(e^{V/V_T}-1)$$

$$C_2 = \frac{(D_p + L_pS)e^{W_n'/L_p}}{2[D_p\cosh(\dfrac{W_n'}{L_p}) + L_pS\sinh(\dfrac{W_n'}{L_p})]}p_{n0}(e^{V/V_T}-1)$$

代入通解：

$$\Delta p_n = \frac{D_p\cosh(\dfrac{W_n'-x}{L_p})+L_pS\sinh(\dfrac{W_n'-x}{L_p})}{D_p\cosh(\dfrac{W_n'}{L_p})+L_pS\sinh(\dfrac{W_n'}{L_p})}p_{n0}(e^{V/V_T}-1)$$

$$I_p = \frac{qAD_p}{L_p}\frac{D_p\sinh(\dfrac{W_n'-x}{L_p})+L_pS\cosh(\dfrac{W_n'-x}{L_p})}{D_p\cosh(\dfrac{W_n'}{L_p})+L_pS\sinh(\dfrac{W_n'}{L_p})}p_{n0}(e^{V/V_T}-1)$$

当有$W_n \ll L_p$时，$W_n' \ll L_p$，

$$\cosh(\frac{W_n'-x}{L_p}) \approx 1 \quad \sinh(\frac{W_n'-x}{L_p}) \approx \frac{W_n'-x}{L_p}$$
$$\cosh(\frac{W_n'}{L_p}) \approx 1 \quad \sinh(\frac{W_n'}{L_p}) \approx \frac{W_n'}{L_p}$$

则通解化为

$$\Delta p_n = \frac{D_p+S(W_n'-x)}{D_p+SW_n'}p_{n0}(e^{V/V_T}-1)$$
$$I_p = \frac{qAD_p}{L_p^2}\frac{D_p(W_n'-x)+L_p^2S}{D_p+SW_n'}p_{n0}(e^{V/V_T}-1)$$

当$S=0$时

$$\Delta p_n = p_{n0}(e^{V/V_T}-1)$$
$$I_p = \frac{qAD_p}{L_p^2}p_{n0}(e^{V/V_T}-1)(W_n'-x)$$

当$S=\infty$时

$$\Delta p_n = \frac{(W_n'-x)}{W_n'}p_{n0}(e^{V/V_T}-1)$$
$$I_p = \frac{qAD_pp_{n0}}{W_n'}(e^{V/V_T}-1)$$

2-12

推导公式(2-6-7) 和(2-6-8)。

正偏压下，给定电流，电压随温度线性地减小：

$$\frac{dV}{dT} = \frac{V-E_{g0}/q}{T} \tag{2-6-7}$$

给定电压，电流随温度升高而迅速增加：

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dT} = \frac{E_{g0}-qV}{KT^2} \tag{2-6-8}$$

解：

(2-6-7)有$I_0 = qA(\dfrac{D_p}{L_pN_d}+\dfrac{D_n}{L_nN_a})n_i^2$，其中括号内参量对温度变化不敏感，则可得到

$$I_0 \propto n_i^2 \propto T^3e^{-E_{g0}/KT}$$

对温度T求导并除以I_0可得

$$\frac{1}{I_0}\frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}T}=\frac{3}{T}+\frac{E_{g0}}{KT^2}\approx\frac{E_{g0}}{KT^2}$$

正偏情况下$I=I_0e^{V/V_T}$，当I_0为常数时，对T求导

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\bigg|_{I_0=常数}=\frac{\mathrm{d}V_T}{\mathrm{d}T}\ln\frac{I}{I_0}-V_T(\frac{1}{I_0}\frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}T})=\frac{V}{T}-\frac{V_TE_{g0}}{KT^2}=\frac{V-E_{g0}/q}{T}$$

(2-6-8)当V为常数时，对T求导并除以I

$$\frac{1}{I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}T}=\frac{1}{I}(\frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}T}e^{V/V_T}-\frac{I_0V}{V_T^2}e^{V/V_T}\frac{\mathrm{d}V_T}{\mathrm{d}T})=\frac{E_{g0}}{KT^2}-\frac{V}{V_TT}=\frac{E_{g0}-qV}{KT^2}$$

2-13

把一个硅二极管用做变容二极管。在结的两边掺杂浓度分别为$N_a=10^{19}cm^{-3}$以及$N_d=10^{15}cm^{-3}$。二极管的面积为100平方密尔。
(1)求在$V_R=1$和$5V$时的二极管的电容。
(2)计算用此变容二极管及$L=2mH$的储能电路的共振频率。
(注:密耳(mil) 为长度单位，$1mil=10^{-3}in(英寸)=2.54\times10^{-5}m$)

解:

（1）$A=100mil^2=100\times(2.54\times10^{-5})^2m^2=6.4516\times10^{-8}m^2=6.4516\times10^{-4}cm^2$

内建电势差:

$$\psi_0=V_T\ln\frac{N_aN_d}{n_i^2}=0.026V\times\ln\frac{10^{19}\times10^{15}}{(1.5\times10^{10})^2}\approx0.817V$$

将势垒区宽度$W=\sqrt{\frac{2\epsilon(\psi_0+V_R)}{qN_d}}$代入变容二极管电容公式

$$C_T=\frac{A\epsilon}{W}=A\sqrt{\frac{q\epsilon_r\epsilon_0N_d}{2(\psi_0+V_R)}}$$

当$V_R=1V$ 时

$$C_T=6.4516\times10^{-4}cm^2\times\sqrt{\frac{1.6\times10^{-19}C\times11.9\times8.85\times10^{-14}F/cm\times10^{15}cm^{-3}}{2\times(0.817V+1V)}}\approx4.39\times10^{-12}F=4.39pF$$

当$V_R=5V$时

$$C_T=6.4516\times10^{-4}cm^2\times\sqrt{\frac{1.6\times10^{-19}C\times11.9\times8.85\times10^{-14}F/cm\times10^{15}cm^{-3}}{2\times(0.817V+5V)}}\approx2.46\times10^{-12}F=2.46pF$$

（2）有$\omega_r=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，分别代入$V_R=1V$和$V_R=5V$时的电容可得:

$$\omega_r|_{V_R=1V} = \frac{1}{\sqrt{2mH \times 4.39pF}} \approx 1.07 \times 10^7 rad/s$$

$$\omega_r|_{V_R=5V} = \frac{1}{\sqrt{2mH \times 2.46pF}} \approx 1.43 \times 10^7 rad/s$$

2-14

P^+N结杂质分布N_a=常数，$N_d = N_{d0}e^{-x/L}$，导出$C—V$特性表达式。

解：

在P^+N结中，有$x_n \approx W$，势垒大部分降落在N侧。

设PN结交界$x=0$为内建电场零点。

在N侧有泊松方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{qN_{d0}}{\epsilon}e^{-x/L} \quad (0 \le x \le x_n)$$

通解：

$$\psi = -\frac{qN_{d0}L^2}{\epsilon}e^{-x/L} + C_1x + C_2 \quad (0 \le x \le x_n) \quad \text{其中} C_1\text{，}C_2\text{为常数}$$

边界条件：

在$x=0$处定义为内建电场零点：$\psi(0)=0$

在$x=x_n$处电场连续，即$E|_{x=x_n} = -\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_n} = 0$

代入边界条件可解得

$$C_1 = -\frac{qN_{d0}L}{\epsilon}e^{-x_n/L} \quad C_2 = \frac{qN_{d0}L^2}{\epsilon}$$

可得电势分布方程

$$\psi = -\frac{qN_{d0}L^2}{\epsilon}e^{-x/L} - \frac{qN_{d0}L}{\epsilon}xe^{-x_n/L} + \frac{qN_{d0}L^2}{\epsilon} \quad (0 \le x \le x_n)$$

内建电势差：

$$\psi_0 = \psi(x_n) - \psi(0) = -\frac{qN_{d0}L^2}{\epsilon}e^{-x_n/L} - \frac{qN_{d0}L}{\epsilon}x_ne^{-x_n/L} + \frac{qN_{d0}L^2}{\epsilon}$$

当$x_n \ll L$时有$e^{-x_n/L} \approx 1 - \frac{x_n}{L}$代入上式

$$\begin{aligned}\psi_0 &= -\frac{qN_{d0}L^2}{\epsilon}(1-\frac{x_n}{L}) - \frac{qN_{d0}L}{\epsilon}x_n(1-\frac{x_n}{L}) + \frac{qN_{d0}L^2}{\epsilon} \\ &= -\frac{qN_{d0}L^2}{\epsilon} + \frac{qN_{d0}Lx_n}{\epsilon} - \frac{qN_{d0}Lx_n}{\epsilon} + \frac{qN_{d0}x_n^2}{\epsilon} + \frac{qN_{d0}L^2}{\epsilon} \\ &= \frac{qN_{d0}x_n^2}{\epsilon}\end{aligned}$$

在P^+N结中，有$x_n \approx W$，代入可得$W=\sqrt{\frac{\psi_0\epsilon}{qN_{d0}}}$

在偏压V_R下，$W=\sqrt{\frac{\epsilon(\psi_0+V_R)}{qN_{d0}}}$

空间电荷区N侧电荷

$$\begin{aligned}Q&=qA\int_0^{x_n}N_{d0}e^{-x/L}\,\mathrm{d}x=-qALN_{d0}e^{-x/L}\Big|_0^{x_n}=-qALN_{d0}e^{-x_n/L}+qALN_{d0}\\&=qALN_{d0}(1-e^{-x_n/L})=qALN_{d0}\frac{x_n}{L}=qAN_{d0}W\\&=A\sqrt{\epsilon(\psi_0+V_R)qN_{d0}}\end{aligned}$$

有$C=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_R}$可得

$$C=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V_R}=\frac{A\sqrt{\epsilon qN_{d0}}}{2\sqrt{\psi_0+V_R}}=\frac{A\epsilon}{2}\sqrt{\frac{qN_{d0}}{\epsilon(\psi_0+V_R)}}=\frac{A\epsilon}{2W}$$

2-15

若P^+N二极管N区宽度W_n是和扩散长度同一数量级，推导小信号交流空穴分布和二极管导纳，假设在$x=W_n$处表面复合速度无限大。

解:

设外加偏压$v=V+v_ae^{\omega t}$，电流为$i=I+i_ae^{\omega t}$，N侧少子分布$p_n(x,t)=P_n(n,t)+p_ae^{\omega t}$

则连续方程有:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p_n}{\partial t}&=D_p\frac{\partial^2p_n}{\partial x^2}-\frac{p_n-p_{n0}}{\tau_p}\\0&=D_p\frac{\partial^2P_n}{\partial x^2}-\frac{P_n-p_{n0}}{\tau_p}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\omega p_ae^{\omega t}=D_p\frac{\partial^2p_a}{\partial x^2}e^{\omega t}-\frac{p_ae^{\omega t}}{\tau_p}\Longrightarrow\frac{\partial^2p_a}{\partial x^2}-p_a\frac{\omega\tau_p+1}{D_p\tau_p}=0$$

令$L_p'^2=\frac{L_p^2}{\omega\tau_p+1}=\frac{D_p\tau_p}{\omega\tau_p+1}$则连续方程可化为

$$\frac{\partial^2p_a}{\partial x^2}-\frac{p_a}{L_p'^2}=0$$

可得通解为

$$p_a=C_1e^{x/L_p'}+C_2e^{-x/L_p'}\quad(0\le x\le x_n),\text{其中}C_1,C_2\text{为常数}$$

在$x=x_n$处

$$p_n(x_n)=p_{n0}e^{v/V_T}=p_{n0}e^{V/V_T}exp(\frac{v_ae^{\omega t}}{V_T})\approx p_{n0}e^{V/V_T}(1+\frac{v_ae^{\omega t}}{V_T})=P(x_n)+p_{a1}e^{\omega t}$$

其中$P(x_n)=p_{n0}e^{V/V_T}$，$\quad p_{a1}=\frac{v_ap_{n0}}{V_T}e^{V/V_T}$。

可得边界条件

$$p_a=\begin{cases}p_{a1} & x=x_n\\0 & x=W_n\end{cases}$$

代入边界条件可得

$$C_1 = \frac{p_{a1} e^{-W_n/L_p'}}{2\sinh(\dfrac{x_n - W_n}{L_p'})}, \quad C_2 = \frac{p_{a1} e^{W_n/L_p'}}{2\sinh(\dfrac{W_n - x_n}{L_p'})}$$

代入通解

$$p_a = p_{a1} \frac{\sinh(\dfrac{W_n - x}{L_p'})}{\sinh(\dfrac{W_n - x_n}{L_p'})} \quad (0 \le x \le x_n)$$

可得N侧交流电流分布

$$i_a = -qAD_p \frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}x} = \frac{qAD_p p_{a1}}{L_p'} \frac{\cosh(\dfrac{W_n - x}{L_p'})}{\sinh(\dfrac{W_n - x_n}{L_p'})}$$

交流少子电流

$$i \approx i_{pmax} = i_p(x_n) = \frac{qAD_p p_{a1}}{L_p'} \coth(\frac{W_n - x}{L_p'}) = \frac{qAD_p v_a p_{n0}}{V_T L_p'} e^{V/V_T} \coth(\frac{W_n - x}{L_p'})$$

可得交流导纳：

$$Y = \frac{i}{v} = \frac{qAD_p p_{n0}}{V_T L_p'} e^{V/V_T} \coth(\frac{W_n - x}{L_p'})$$

2-16

一个硅二极管工作在$0.5V$的正向电压下，当温度从$25^\circ C$上升到$150^\circ C$时，计算电流增加的倍数。假设$I \approx I_0 e^{V/2V_T}$，I_0每$10^\circ C$增加一倍。

解：

法一：有$V_T(27^\circ C) = 0.026V$可得

$$V_T(25^\circ C) = \frac{298}{300} \times 0.026V \quad V_T(150^\circ C) = \frac{423}{300} \times 0.026V$$

I_0每$10^\circ C$增加一倍：

$$\frac{I_0(150^\circ C)}{I_0(25^\circ C)} = 2^{\frac{150-25}{10}} = 2^{12.5}$$

前后电流比

$$\begin{aligned}\gamma = \frac{I(150^\circ C)}{I(25^\circ C)} &= \frac{I_0(150^\circ C)}{I_0(25^\circ C)} exp[\frac{V}{2}(\frac{1}{V_T(150^\circ C)} - \frac{1}{V_T(25^\circ C)})] \\ &= 2^{12.5} \times exp[\frac{0.5 \times 300}{2 \times 0.026}(\frac{1}{423} - \frac{1}{298})] \\ &\approx 331\end{aligned}$$

则增加了$(331-1) = 330$倍

法二：对T微分并除以I

$$\frac{1}{I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}T}=\frac{1}{I}(\frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}T}e^{V/2V_T}-I_0e^{V/2V_T}\frac{V}{2}\frac{1}{V_T^2}\frac{\mathrm{d}V_T}{\mathrm{d}T})=\frac{1}{I_0}\frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}T}-\frac{V}{2V_TT}$$

两边同乘dV并对其从$25^\circ C$到$150^\circ C$进行积分

$$\begin{aligned}&\int_{25^\circ C}^{150^\circ C}\frac{1}{I}\mathrm{d}I=\int_{25^\circ C}^{150^\circ C}\frac{1}{I_0}\mathrm{d}I_0-\frac{V}{2V_TT}\mathrm{d}T\\ \Longrightarrow&\ln\frac{I(150^\circ C)}{I(25^\circ C)}=\ln\frac{I_0(150^\circ C)}{I_0(25^\circ C)}+\frac{Vq}{2kT}\bigg|_{298K}^{423K}\approx 5.8\\ \Longrightarrow&\frac{I(150^\circ C)}{I(25^\circ C)}=e^{5.8}\approx 331\end{aligned}$$

则增加了$(331-1)=330$倍

2-17

采用电容测试仪在$1MHz$测量GaAs P^+N结二极管的电容反偏压关系。下面是从0—$5V$每次间隔$0.5V$测得的电容数据，以微微法为单位：19.9，17.3，15.6，14.3，13.3，12.4，11.6，11.1，10.5，10.1，9.8。计算ψ_0和N_d。二极管的面积为$4\times10^{-4}cm^2$。

解：P^+N结中有

$$\frac{1}{C_T^2}=\frac{2}{A^2\epsilon qN_d}(\psi_0+V_R)$$

令

$$\frac{1}{C_T^2}=KV_R+B,\quad \text{其中}\,K=\frac{2}{A^2\epsilon qN_d},B=\frac{2}{A^2\epsilon qN_d}\psi_0$$

代入题目数据并进行线性拟合可得

$$K=0.0016\,V^{-1}pF^{-2}\quad B=0.0025\,pF^{-2}$$

可得

$$\begin{aligned}N_d&=\frac{2}{A^2\epsilon qK}\\&=\frac{2}{(4\times10^{-4})^2\times13.2\times8.85\times10^{-14}\times1.6\times10^{-19}\times0.0016\times10^{24}}\\&\approx4.18\times10^{16}cm^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_0&=\frac{A^2\epsilon qN_dB}{2}\\&=\frac{(4\times10^{-4})^2\times13.2\times8.85\times10^{-14}\times1.6\times10^{-19}\times4.18\times10^{16}\times0.0025\times10^{24}}{2}\\&\approx1.56V\end{aligned}$$

2-18

在$I_f=0.5mA$，$I_r=1.0mA$条件下测量P^+N长二极管恢复特性。得到的结果是$t_s=350ns$。用严格解和近似公式两种方法计算τ_p。

解：

近似解：由$t_s=\tau_p\ln(1+\frac{I_f}{I_r})$可得

$$\tau_p=\frac{t_s}{\ln(1+\frac{I_f}{I_r})}=\frac{350ns}{\ln(1+\frac{0.5}{1.0})}\approx 863.2ns$$

严格解：有$erf\sqrt{\frac{t_s}{\tau_p}}=\frac{I_f}{I_f+I_r}=\frac{0.5}{0.5+1}=\frac{1}{3}$，查表可得$\sqrt{\frac{t_s}{\tau_p}}\approx 0.3046$，可得

$$\tau_p=\frac{350ns}{0.3046^2}\approx 3.77\mu s$$

2-19

用二极管恢复法测量P^+N二极管空穴寿命。
(1)对于$I_f=1mA$，$I_r=2mA$，在具有$0.1ns$上升时间的示波器上测得$t_s=3ns$，求τ_p。
(2)若(1)中快速示波器无法得到，只得采用一只具有$10ns$上升时间较慢的示波器，问怎样才能使测量精确？叙述你的结果。

解：

（1）由$t_s=\tau_p\ln(1+\frac{I_f}{I_r})$可得

$$\tau_p=\frac{t_s}{\ln(1+\frac{I_f}{I_r})}=\frac{3ns}{\ln(1+\frac{1}{2})}\approx 7.40ns$$

（2）$10ns$上升时间的示波器只可测$t_s\gg 10ns$的t_s，有$t_s=\tau_p\ln(1+\frac{I_f}{I_r})$，只需增大$I_f$或减小$I_r$即可

2-20

在硅中当最大电场接近$10^6V/cm$时发生击穿。假设在P侧$N_a=10^{20}cm^{-3}$，为要得到$2V$的击穿电压，采用单边突变近似，求N侧的施主浓度。

解：当雪崩击穿发生时有

$$1=\frac{AW|\epsilon_m|}{B}exp\frac{-B}{|\epsilon_m|}\left[1-exp\frac{-B}{|\epsilon_m|}\right]$$

可解得

$$\begin{aligned}W&=\frac{B}{A|\epsilon_m|}\exp\frac{B}{|\epsilon_m|}/\left[1-\exp\frac{-B}{|\epsilon_m|}\right]\\&=\frac{1.8\times 10^6V/cm}{9\times 10^5cm^{-1}\times 10^6V/cm}\times\exp\frac{1.8\times 10^6}{10^6}/\left[1-\exp\frac{-1.8\times 10^6}{10^6}\right]\\&\approx 1.45\times 10^{-5}cm\end{aligned}$$

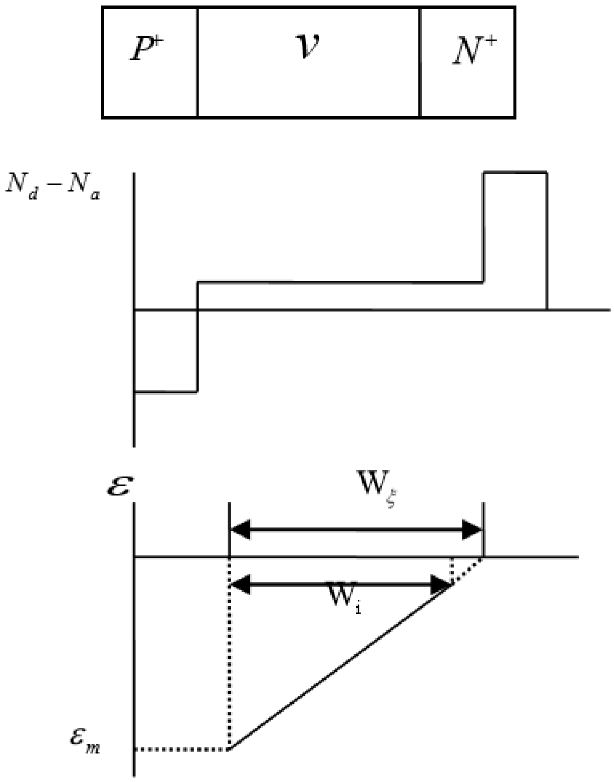
有$|\epsilon_m| = \dfrac{qN_dW}{\epsilon}$可得

$$N_d = \frac{\epsilon|\epsilon_m|}{qW} = \frac{11.8\times 8.85\times 10^{-14}}{1.6\times 10^{-19}\times 1.45\times 10^{-5}}cm^{-3} \approx 4.50\times 10^{17}cm^{-3}$$

2-21

对于下图中的$P^+—v—N^+$二极管，假设P^+和N^+区不承受任何外加电压，证明雪崩击穿的条件可表示为：

$$\frac{Ak\epsilon_0\epsilon_m^2}{qN_vB}exp(-\frac{B}{|\epsilon_m|})[1-exp(-\frac{qBN_vW_i}{k\epsilon_0\epsilon_m^2})] = 1$$



解：P^+vN^+二极管的雪崩击穿临界电场$|\epsilon_m|$与P^+N结相当。

设标准P^+N结的SCR宽度为W_ξ，则有：

$$\epsilon(x) = \epsilon_m(1-\frac{x}{W_\xi}), \quad 其中\epsilon_m = \frac{qN_vW_\xi}{\epsilon}$$

电离系数：

$$\alpha(x) = A\exp\left[-\frac{B}{|\epsilon_m|(1-\frac{x}{W_\xi})}\right]$$

当$x\to 0$时，取一阶泰勒展开

$$\alpha(x) \approx A\exp\left[-\frac{B}{|\epsilon_m|}(1+\frac{x}{W_\xi})\right]$$

对其从0到W_i积分

$$\begin{aligned}\int_0^{W_i}\alpha(x)\,\mathrm{d}x &= A\exp(-\frac{B}{|\epsilon_m|})\int_0^{W_i}\exp(-\frac{Bx}{|\epsilon_m|W_\xi})\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{A|\epsilon_m|W_\xi}{B}\exp(-\frac{B}{|\epsilon_m|})\exp(-\frac{Bx}{|\epsilon_m|W_\xi})\Big|_0^{W_i} \\ &= -\frac{A|\epsilon_m|W_\xi}{B}\exp(-\frac{B}{|\epsilon_m|})\left[\exp(-\frac{BW_i}{|\epsilon_m|W_\xi})-1\right]\end{aligned}$$

代入$W_\xi=\frac{|\epsilon_m|\epsilon}{qN_v}$，并代入雪崩击穿条件$\int_0^{W_i}\alpha(x)\,\mathrm{d}x=1$，可得

$$\frac{A\epsilon_m^2\epsilon}{qN_vB}\exp(-\frac{B}{|\epsilon_m|})\left[1-\exp(-\frac{qBN_vW_i}{\epsilon_m^2\epsilon})\right]=1$$