Continuité uniforme de $x \to x^2$

Arthur Blanleuil

25 janvier 2020

1 Définitions

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ est uniformément continue dans un intervalle $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{A}$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall (x, y) \in \mathbb{I}^2,\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Autrement dit, pour tout ϵ assez petit (mais non nul), il existe une distance non nulle δ telle que pour tout x et y dans $\mathbb{I}$, si la distance de x à y est plus petite que δ alors la distance entre $f(x)$ et $f(y)$ est plus petite que ϵ.

2 Dans $\mathbb{R}$

Supposons $f : x \to x^2$ uniformément continue dans $\mathbb{R}$. Prenons $\epsilon = 1$. Si f est uniformément continue, alors il existe un δ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |x - y| < \delta \implies |x^2 - y^2| < 1$$

Prenons

$$x = \frac{1}{\delta} \qquad y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$$

Alors

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Vérifions que ces valeurs vérifient la continuité uniforme : $|x^2 - y^2| < 1$

$$\begin{aligned}
|x^2 - y^2| &= \left| \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 \right| \\
&= \left| \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2} - 2\frac{1}{\delta}\frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{4} \right| \\
&= \left| -1 - \frac{\delta^2}{4} \right| \\
&= \left| -\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) \right| \\
|x^2 - y^2| &= \boxed{1 + \frac{\delta^2}{4}}
\end{aligned}$$

Nous avons trouvé un x et un y qui contredisent la définition de la continuité uniforme pour $\epsilon = 1$. La fonction $f : x \to x^2$ n'est donc **pas uniformément continue sur** $\mathbb{R}$.

3 Dans un intervalle fermé borné $[a;\ b]$

Intéressons-nous à $f : x \to x^2$ sur l'intervalle $[a;\ b]$. Prenons la borne de notre intervalle la plus éloignée de 0 : $A = max(|a|, |b|)$.

Par l'inégalité triangulaire de la valeur absolue, on a :

$$\forall (x, y) \in [a;\ b]^2, |x + y| \leq |x| + |y| \leq A + A = 2A$$

Si pour tout $\epsilon > 0$, on prend

$$\delta = \frac{\epsilon}{2A}$$

Alors pour tout $(x, y) \in [a;\ b]^2$ on a :

$$\begin{aligned}
|x^2 - y^2| &= |(x - y)(x + y)| \\
&= |x - y||x + y| \\
&\leq |x - y| 2A \\
&< \frac{\epsilon}{2A} 2A \quad (*) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

$(*)$ On se permet de passer de $\leq$ à $<$ parce que d'après la définition de la continuité uniforme, on ne s'occupe que des x et y qui vérifient $|x - y| < \delta$

On a bien vérifié que la fonction $f : x \to x^2$ est uniformément continue sur un intervalle fermé et borné quelconque $[a;\ b]$.

Donc normalement, quel que soit l'intervalle ($[1; 2]$, $[-10000000; 10000000]$), tant qu'il est fermé (bornes incluses) et borné (bornes finies), genre pas de borne infinie comme $]-\infty; 0]$, bah ta fonction carré sur cet intervalle est uniformément continue.