Recherche Operationelle
Chapitre 1 : Programme Linéaire

Arthur Blanleuil

18 janvier 2016

1 Formes Canonique et Standard

1.1 Définitions

— Un programme linéaire est un programme dans lequel les variables sont des réels qui doivent satisfaire des inéquations linéaires (contraintes) visant à maximiser ou minimiser une fonction linéaire (fonction objective).
— Un point satisfaisant les contraintes est une solution.
— Une solution minimisant ou maximisant la fonction objective est dite optimale.

1.2 Remarque

On distingue 3 cas de programmes différents. Ainsi pour des problème à une variable :

1. Le problème n'a pas de solution :
   $\{x \in R; x \geq 0 \text{ et } x \leq -1\}$
2. Le problème a une seule solution optimale :
   trouver $max(x)$ pour $x \leq 0$
3. La fonction objective n'est pas bornée :
   trouver $max(x)$ pour $x \geq 0$

1.3 Définition : Forme Canonique

Un programme linéaire peut se représenter sous la forme d'un système comprenant une matrice (contraintes) et un vecteur (fonction objective). Si A est la matrice du système, $\vec{x}$ le vecteur des inconnues, $\vec{c}$ le vecteur des contraintes, et $\vec{f}$ le vecteur de la fonction objective, on peut écrire le programme P sous sa forme canonique PC :

$$PC = \begin{cases} A\vec{x} \leq \vec{c},\, \vec{x} \geq 0 \\ \vec{f}\vec{x} = z(max) \end{cases}$$

1.3.1 Exemple :

Soit le programme linéaire P à deux variables x et y ayant pour contraintes le système d'inéquations suivant :

$$c = \begin{cases} 2x + 3y \leq 4 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$$

et la fonction objective f à maximiser telle que :

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &f : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mapsto x + y \end{aligned}$$

On note A la matrice ayant autant de lignes que de contrainte, et autant de colonnes que de variables, et dont les valeurs correspondent aux coefficients des inéquations.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur des inconnues x et y, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur des contraintes, et $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ le vecteur associé à la fonction linéaire f

On peut alors écrire la forme canonique PC du programme P :

$$\begin{aligned} PC = \begin{cases} A\vec{x} \leq \vec{c},\ \vec{x} \geq 0 \\ \vec{f}\vec{x} = z(max) \end{cases} &= \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ x, y \geq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z(max) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x - y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ x, y \geq 0 \\ x + y = z(max) \end{cases} \end{aligned}$$

Si on applique ligne par ligne l'opérateur $\leq$, on trouve :

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 4,\ x, y \geq 0 \\ x - y \leq 1 \\ x + y = z(max) \end{cases}$$

1.4 Définition : Forme Standard

Un programme P est dit sous forme standard quand ses contraintes sont des équations, et non plus des inéquations.

$$PS = \begin{cases} A\vec{x} = \vec{c},\ \vec{x} \geq 0 \\ \vec{f}\vec{x} = z(max) \end{cases}$$

1.4.1 Exemple :

Soit P, un programme linéaire comprenant le système d'équations suivant :

$$c = \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$$

ainsi qu'une fonction f définie par le vecteur $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ à maximiser.

Alors en suivant les mêmes règles que pour la forme canonique, sa forme standard PS s'écrit :

$$PS = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ x, y \geq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z(max) \end{cases}$$

1.5 Cas de programmes non canoniques/standards

Il se peut qu'un programme ne soit pas composé seulement de contraintes $\leq$, mais aussi d'équations ou d'inéquations $\geq$. Il existe des règles permettant d'écrire un programme sous forme canonique ou standard, en ré-écrivant certaines règles.

1.5.1 Mauvais opérateur d'inéquation canonique ($\geq$ ou $=$)

Quand on traite des inéquations, transformer un $\geq$ en $\leq$ s'effectue en multipliant chaque coté par -1.
Exemple : $x \geq 5 \Leftrightarrow -x \leq -5$

Pour transformer un $=$, il suffit de contraindre deux fois. En effet, si $x \leq y$ ET $x \geq y$ alors x ne peut être que égal à y. En appliquant la méthode du dessus, on peut transformer ces deux contraintes en $\leq$, en écrivant :

$$\begin{cases} x & \leq y \\ -x & \leq -y \end{cases}$$

1.5.2 Mauvaise, ou aucune contrainte de signe pour une variable

Normalement, chaque variable est sensée être positive, c'est ce qu'indique le $x, y \geq 0$ dans les formes canoniques et standards.

Si jamais une variable est contrainte d'être négative et non pas positive, il suffit de la contraindre positive, et de changer son signe dans les (in)équations, et dans la fonction objective.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 4,\ x \leq 0, y \geq 0 \text{ (notez le } x \leq 0 \text{ dans les contraintes de signe)} \\ x - y \leq 1 \\ x + y = z(max) \end{cases}$$

en effectuant la transformation $x' = -x$ on obtient :

$$\begin{cases} -2x' + 3y \leq 4,\ x', y \geq 0 \text{ (la contrainte est revenue à la normale, x' est positif)} \\ -x' - y \leq 1 \\ -x' + y = z(max) \end{cases}$$

ici, toutes les occurrences de x sont transformées en $-x'$.

Si une variable n'est pas contrainte, il faut transformer cette variable en une soustraction de deux variables intermédiaires. En effet, si $x = x' - x''$ et $x', x'' \geq 0$, le cas où $x \leq 0$ est rencontré si jamais $x' \geq x''$:

$$\begin{array}{ll} x \geq 0 & \Leftrightarrow \\ x' - x'' \geq 0 & \Leftrightarrow \\ x' \geq x'' & \end{array}$$

et le cas où $x \leq 0$ est rencontré si $x' \leq x''$:

$$\begin{array}{ll} x \leq 0 & \Leftrightarrow \\ x' - x'' \leq 0 & \Leftrightarrow \\ x' \leq x'' & \end{array}$$

Exemple :

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 4,\ y \geq 0 \text{ (notez l'absence de } x \text{ dans les contraintes de signe)} \\ x - y \leq 1 \\ x + y = z(max) \end{cases}$$

deviendra :

$$\begin{cases} 2x' - 2x'' + 3y \leq 4,\ x', x'', y \geq 0 \text{ (la contrainte est revenue à la normale, x' et x" sont positifs)} \\ x' - x'' - y \leq 1 \\ x' - x'' + y = z(max) \end{cases}$$

ici, toutes les occurrences de x sont remplacées par les variables x' et x''.

1.5.3 Mauvais opérateur d'équation standard ($\leq$ ou $\geq$)

Si deux valeurs sont différentes, alors il existe une distance entre les deux. Si $x \leq y$ alors il existe un réel δ tel que $x + \delta = y$.

Démonstration :

$$\text{Si } \delta = y - x \text{ alors } x + \delta = x + y - x = y$$

De ce fait, il suffit d'introduire une variable qui fait office de <u>distance</u> ou d'<u>écart</u> entre les deux parties de l'inéquation.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x - y \leq 5,\ x, y \geq 0 \\ -x + 5y = 10 \\ x + y = z(max) \end{cases}$$

deviendra :

$$\begin{cases} 2x - y + \delta = 5,\ x, y, \delta \geq 0 \\ -x + 5y = 10 \\ x + y = z(max) \end{cases}$$

ici, la variable δ correspond a la distance entre $2x - y$ et 5.

De la même manière que $x' etx''$ apparaissent comme des variables dans la partie **1.5.2** dans cet exemple, la variable δ fait pratie des inconnues, le vecteur des inconnues n'est donc plus $\vec{x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mais $\vec{x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \delta \end{pmatrix}$. La matrice A et le vecteur $\vec{f}$ associés devront par conséquent avoir une colonne de plus pour chaque variable d'écart ajoutée.

Ici, A change de : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{f}$ change de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Il faut ajouter autant de variables d'écart que d'inéquation $\leq$ ou $\geq$ dans les contraintes!! Se faisant, on augmente d'autant la taille du vecteur d'inconnues, et de la matrice!!

2 Dual d'un programme linéaire

A tout programme linéaire P on peut associed un dual D qui lui aussi est un programme linéaire.

2.1 Définition

Soit un programme linéaire PC (qu'on appelle ici primal, en opposition à dual) sous forme canonique :

$$PC = \begin{cases} A\vec{x} \leq \vec{c},\, \vec{x} \geq 0 \\ \vec{f}\vec{x} = z(max) \end{cases}$$

On appelle dual de PC le programme linéaire suivant

$$D = \begin{cases} \vec{y}A \geq \vec{f},\, \vec{y} \geq 0 \\ \vec{y}\vec{c} = w(min) \end{cases}$$

Avec $\vec{y}$ le vecteur des inconnues de D, A la matrice du programme et de son dual, $\vec{f}$ le vecteur de contrainte de D, et $\vec{c}$ sa fonction objective.

2.1.1 Remarque :

Le vecteur de contraintes $\vec{c}$ de PC est devenu la fonction objective de D, et inversement, $\vec{f}$ est devenu le vecteur contrainte de D. Le sens de l'inégalité a aussi changé. Toutes les règles de construction d'un dual sont expliquées dans la partie **2.4**

Le vecteur $\vec{y}$ est un vecteur ligne, avec autant d'éléments que de contraintes dans PC. $\vec{y}$ étant un vecteur ligne, il est à gauche pour la multiplication avec A et $\vec{c}$ pour respecter les règles de mutliplication des matrices.

2.1.2 Exemple :

Si

$$P = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 5 \;\; x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = z(max) \end{cases}$$

Alors

$$D = \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 \geq 2 \;\; y_1, y_2 \geq 0 \\ 3y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ -y_1 + 4y_2 \geq 3 \\ 5y_1 + 3y_2 = w(min) \end{cases}$$

Ecrit sous forme matricielle, avec $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ on obtient :

Si

$$P = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \times \vec{x} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{x} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \vec{x} = z(max) \end{cases}$$

Alors

$$D = \begin{cases} \vec{y} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \vec{y} \geq 0 \\ \vec{y} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = w(min) \end{cases}$$

2.2 Remarques

— Il y a autant de variables y_i que de contraintes de PC.
— On peut associer chaque variable y_i à la contrainte c_i*.
— L'imposition de signe d'une variable y_i dépend du type de la contrainte c_i ($\leq$, $\geq$, ou $=$). Dans l'exemple, toutes les contraintes étaient du style $\leq$, alors les variables $\vec{y}$ sont positives.

** c_i représente la ième (in)équation du primal.*
Dans l'éxemple du dessus, c_2 est $4x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 3$

2.3 Théorème

Le dual du dual est le primal.

2.4 Règles de construction du dual

Primal	**Dual**
fonction à maximiser	fonction à minimiser
fonction à minimiser	fonction à maximiser
contrainte c_i est $\leq$	variable y_i positive
contrainte c_i est $\geq$	variable y_i négative
contrainte c_i est $=$	y_i n'a pas d'imposition de signe
variable x_i positives	contrainte i est $\geq$
variable x_i négatives	contrainte i est $\leq$
variable x_i n'a pas de signe	contrainte i est $=$