Recherche Operationelle
Chapitre 2 : Résolution de programmes linéaires

Arthur Blanleuil

18 janvier 2016

1 Quelques Théorèmes

1.1 Théorème 1

Soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\vec{b}$ un vecteur colonne de dimension m, pour la suite du cours, on considère le système linéaire suivant :

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

1.1.1 Définition 1

Deux systèmes linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ et $A'\vec{x} = \vec{b'}$ sont dits équivalents si et seulement si ils ont les mêmes solutions.

1.1.2 Théorème 1

Etant donné (1), on a trois cas possibles concernant le rang de A :

- $rang(A) = m$: on dit que le système est de **plein rang** dans ce cas, $m \leq n$ et l'ensemble des solutions $S = \{\vec{x}\ ;\ A\vec{x} = \vec{b}\}$ est non nul et $|S| = 1 \Leftrightarrow m = n$ (si la solution est unique, alors A est une matrice carré)
- $rang(A) < m$ et le système n'a pas de solutions alors $\exists \vec{y}\ ;\ \vec{y}A = \vec{0}$ et $\vec{y}.\vec{b} \neq 0$
- $rang(A) < m$ et le système a des solutions alors $\exists \vec{y} \neq \vec{0}\ ;\ \vec{y}A = \vec{0}$ et $\vec{y}.\vec{b} \neq 0$ ET $\exists I \in \{1..m\}\ ;\ A_I\vec{x} = \vec{b_I}$ et A est de plein rang.

1.1.3 Remarque

I n'est pas unique en général.

Si les systèmes $A\vec{x} = \vec{b}$ et $A'\vec{x} = \vec{b'}$ sont équivalents, alors il éxiste une matrice $B \in \mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ inversible telle que $A' = BA$ et $\vec{b'} = B\vec{b}$

1.1.4 Définition 2

La matrice $(A, \vec{b}) \in \mathbb{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$ est appelée la matrice augmentée du système linéaire (1)

1.2 Théorème 2

Soit $B \in \mathbb{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ une matrice non singulère (c'est à dire $rang(B) = m$) le système linéaire $BA\vec{x} = B\vec{b}$ est équivalent à (1)

Dit autrement, toute transformation linéaire de la matrice et du vecteur contrainte d'un système linéaire donne un système équivalent.

1.2.1 Remarque

Les transformations équivalentes d'un système linéaire à un autre peuvent s'exprimer sous la forme de matrices "presque comme" des matrice identités. On distingue 2 cas très utiles plus tard quand nous aborderons la méthode du simplex, pour faire apparaitre une certaine "forme" de système.

1. B est une matrice de cette forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & B_r^r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   c'est à dire une matrice consistuée d'une diagonale de 1, sauf à B_r^r où $r = rang(A)$ à ce moment, B est de plein rang si et seulement si $B_r^r \neq 0$ (En effet, le vecteur nul ne peut faire partie d'une base).

   Ce genre de matrice ne fait que modifier une ligne du système d'équations en la multipliant par un réel. Cette transformation est utile pour faire apparaitre un 1 dans les coefficients d'une ligne.

2. B est une matrice identitée avec la valeur $B_k^r = \alpha \neq 0$. Cette forme permet de remplacer la r-ième équation (qu'on appellera L_r) par cette valeur : $L'_r = L_r + \alpha L_k$. On peut ainsi faire apparaitre des 0 à des endroits de L_r.
   Attention, ici r n'a rien a voir avec le rang de B.

1.3 Définition 3

Résoudre le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ c'est :

- Démontrer qu'il n'a pas de solution
- Trouver un système équivalent tel que $\exists\ J \in \{1...n\}$ tel que A'^J est à une permutation de colonne près d'être l'identité.