Introduction au calcul matriciel et à l'algèbre linéaire

Arthur Blanleuil

19 janvier 2016

1 Shoubidou !

La recherche opérationnelle s'appuie énormément sur les outils mathématiques, notemment l'algèbre linéaire de ce fait, un minimum de connaissance dans ce domaine s'impose. Le but de cet article est d'apprendre ce "*minimum*" à toute personne qui voudrait apprendre les méthodes de résolutions de programmes linéaires.

Il y aura beaucoup d'allusions à l'informatique, par exemple, nous associeront les matrices à des tableaux à deux dimensions.

2 Vecteurs et Matrices

2.1 Les vecteurs

Un vecteur représente un assortiment de valeurs, chacunes appartenant à des ensembles. Par exemple, les coordonnées d'un point dans l'espace peuvent être représentées par un vecteur contenant 3 réels.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ses trois composantes sont dans l'ensemble des réels (on note $x, y, z \in \mathbb{R}$), par conséquent le vecteur $\vec{p}$ se trouve dans l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. On note $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$.

En C, on peut voir un vecteur comme une structure. Un vecteur comme $\vec{p}$ peut se représenter sous la forme d'une matrice contenant 3 `doubles`

Généralement, en mathématiques, les valeurs d'un vecteur viennent du même ensemble, on a rarement un vecteur qui contient un réel et un complexe.

Les valeurs d'un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$ donné sont appelés des scalaires dans l'ensemble $\mathbb{K}$

2.2 Les matrices

Les matrices sont des objets mathématiques qui peuvent s'apparenter à des tableaux à deux dimensions. Une matrice a un nombre de lignes, et un nombre de colonnes caractérisants ses dimensions.

L'ensemble des matrices avec m lignes, et n colonnes, dont les valeurs sont dans l'ensemble $\mathbb{K}$ se note ainsi : $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Une telle matrice A appartenant donc à cet ensemble se note $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors a, b, c, et d sont des réels, et sont appelés les coefficients de A

2.2.1 Notations sur les matrices

On appelle A_i la i-ème ligne de la matrice A. On appelle A^j la j-ième colonne de la matrice A.

Par composition, on appelle A_i^j la valeur de la matrice qui se trouve à la ligne i et à la colonne j (en C, on écrit `A[i][j]`).

On peut non pas utiliser des indices seuls, mais des ensembles d'indices.

Par exemple, si j'appelle I un ensemble d'indices entre 1 et m, la matrice A_I est la matrice qui contient toutes les lignes de A dont les indices se trouvent dans I.

Par conséquent, une telle matrice A_I contient $|I|$ lignes (la notation $|I|$ représente le cardinal de I, qui est le nombre d'élements dans I)

Soit $A \in \mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R})$; $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $I = \{1, 3\}$, la matrice A_I est alors égale à $\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$

On note de la même manière pour les colonnes. Si on prend la matrice A de l'exemple précédent, et $J = \{1, 2\}$ alors $A^J = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix}$

2.2.2 Opérations sur les matrices

L'addition s'effectue termes par termes, et les matrices DOIVENT avoir le même nombre de colonnes et de lignes. Cette opération est commutative ($A + B = B + A$) et associative ($A + (B + C) = (A + B) + C$)

Soient $A, B, C \in \mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$; $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$; $C = A + B$. Alors $C = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$

La multiplication est non commutative ($A \times B \neq B \times A$), mais elle est associative.

L'opération $A \times B$ ne peut s'effectuer que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B

Si $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors l'opération $A \times B$ est possible, et la matrice résultante de cette opération est une matrice avec m lignes et p colonnes.

Soit C la matrice résultante de $A \times B$. Alors $C \in \mathbb{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et $C_i^j = \sum_{k=1}^{n} A_i^k B_k^j$.

La valeur de la case au croisement de la ligne i et la colonne j est l'addition des coefficients de la ligne A_i multipliés uns à uns par ceux de la colonne B^j