shifted MINRES 法

1 概要

シフト線形方程式

$$(A + \sigma_k I)\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}, \qquad (k = 1, \ldots, M). \tag{1}$$

を shifted MINRES 法により解くソルバーライブラリ.

2 アルゴリズム

Algorithm 1 shifted MINRES method

$\mathbf{x}_0^{(\sigma)} = \mathbf{0},\ \mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$
$\beta_0 = 0,\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{0},\ \mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0/\|\mathbf{r}_0\|_2$
$f_1^{(\sigma)} = 1,\ h_0^{(\sigma)} = \|\mathbf{r}_0\|_2,\ \mathbf{p}_{-1}^{(\sigma)} = \mathbf{p}_0^{(\sigma)} = \mathbf{0}$
for $j = 1, 2, \cdots$ **do**
  $\mathbf{v}''_{j+1} = A\mathbf{v}_j$
  $\alpha_j = \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}''_{j+1} \rangle$
  $\mathbf{v}'_{j+1} = \mathbf{v}''_{j+1} - \alpha_j \mathbf{v}_i - \beta_{j-1}\mathbf{v}_{j-1}$
  $\beta_j = \|\mathbf{v}'_{j+1}\|_2$
  $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}'_{j+1}/\beta_j$
  for $k = 1, 2, \cdots, M$ **do**
    $\hat{T}^{(k)}_{j-2,j} = 0$
    $\hat{T}^{(k)}_{j-1,j} = \beta_{j-1},\ \hat{T}^{(k)}_{j,j} = \alpha_j + \sigma_k,\ \hat{T}^{(k)}_{j+1,j} = \beta_j$
    if $j \geq 3$ **then** $\begin{bmatrix} \hat{T}^{(k)}_{j,j-2} & \hat{T}^{(k)}_{j,j-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = G^{(k)}_{j-2} \begin{bmatrix} \hat{T}^{(k)}_{j,j-2} & \hat{T}^{(k)}_{j,j-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ **end if**
    if $j \geq 2$ **then** $\begin{bmatrix} \hat{T}^{(k)}_{j,j-1} & \hat{T}^{(k)}_{j,j} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = G^{(k)}_{j-1} \begin{bmatrix} \hat{T}^{(k)}_{j,j-1} & \hat{T}^{(k)}_{j,j} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ **end if**
    $\left(\hat{T}^{(k)}_{j,j}, G^{(k)}_j\right) = \textsc{Givens}\left(\hat{T}^{(k)}_{j,j}, \hat{T}^{(k)}_{j+1,j}\right)$
    $\mathbf{p}^{(k)}_j = \left(\mathbf{v}_j - \hat{T}^{(k)}_{j-2,j}\mathbf{p}^{(k)}_{j-2} - \hat{T}^{(k)}_{j-1,j}\mathbf{p}^{(k)}_{j-1}\right)/\hat{T}^{(k)}_{j,j}$
    $\mathbf{x}^{(k)}_j = \mathbf{x}^{(k)}_{j-1} + \|\mathbf{r_0}\| c^{(k)}_j f^{(k)}_j \mathbf{p}^{(k)}_j$
    $f^{(k)}_{j+1} = -\bar{s}_j f^{(k)}_j$
    $h^{(k)}_j = |-\bar{s}^{(k)}_j| \cdot h^{(k)}_{j-1}$
    Determine convergence by $h^{(k)}$
  end for
end for

3　使用方法