

Voronoi decompositions of flat surfaces and origamis

熊谷 駿 (東北大・情報)

静岡複素解析幾何セミナー (2023/7/31, 静岡県立大学)

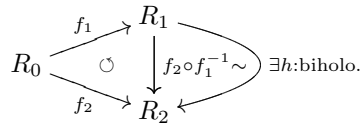
1	背景	2
1.1	タイヒミュラー空間	2
1.2	平坦曲面	3
1.3	圏	5
2	Edwards-Sanderson-Schmidt method	8
3	主結果	13
3.1	折り紙と Delaunay 三角形分割	13
3.2	Edwards-Sanderson-Schmidt method の圏を用いた構成	18

1 背景

本稿では解析的有限型の双曲リーマン面 $((g, n)$ 型, $2g - 2 + n > 0$) を扱うものとする. R_0 をそのようなリーマン面とする.

1.1 タイヒミュラー空間

定義 1 向きを保つ同相写像 $f: R_0 \rightarrow R$ を R_0 を基点とする**標識付きリーマン面**という. 標識付きリーマン面 f_1, f_2 が**タイヒミュラー同値** $f_1 \sim f_2$ とは, $f_2 \circ f_1^{-1}: R_1 \rightarrow R_2$ がある双正則写像 $h: R_1 \rightarrow R_2$ にホモトピー同値であることをいう.



$T(R_0) = \{f: R_0 \rightarrow R: \text{標識付きリーマン面}\} / \sim$ を R_0 を基点とする**タイヒミュラー空間**という. これは単連結な複素 $(3g - 3 + n)$ -次元多様体の構造をもち (Ahlfors-Bers), **写像類群** $MCG(R_0) = \{\gamma: R_0 \rightarrow R_0: \text{向きを保つ同相写像}\} / \text{ホモトピー}$ が引き戻し

$$[\gamma]^*: [f] \mapsto [f \circ \gamma^{-1}], [\gamma] \in MCG(R_0), [f] \in T(R_0)$$

により真性不連続に作用する. **モジュライ空間** $M(R_0) = \{R_0 \text{ に同相なリーマン面}\} / \text{双正則}$ は複素 $(3g - 3 + n)$ -次元軌道体 $T(R_0)/MCG(R_0)$ である.

1.2 平坦曲面

定義 2 平面上の**半並進**の群 $\text{HTrans}(\mathbb{C}) := \{z \mapsto \pm z + c \mid c \in \mathbb{C}\}$ を座標変換群とするアトラスを備えた曲面を**平坦曲面**という。平面上の平行移動の群 $\text{Trans}(\mathbb{C}) := \{z \mapsto z + c \mid c \in \mathbb{C}\}$ を座標変換群とするサブアトラスがある場合、これを**並進**であるという。

リーマン面 R とその上の正則二次微分 $\phi = \phi(z)dz^2$ に対し、各 $p_0 \in R^* := R \setminus \text{Zero}(\phi)$ の周りで定義される ϕ -座標

$$p \mapsto \pm z_\phi(p) = \pm \int_{p_0}^p \sqrt{\phi(z)} dz$$

は R^* 上の $\text{HTrans}(\mathbb{C})$ -アトラスを定める。これをもって平坦曲面 (R, ϕ) という。

ユークリッド計量を ϕ -座標で引き戻した (R^*, ϕ) 上の平坦計量を考える。以下では面積有限 $\|\phi\| := \int_R |\phi| < \infty$ を仮定するものとする、 ϕ -座標系は完備化 \bar{R} の各特異点 $p \in \text{Sing}(R, \phi) := \text{Zero}(\phi) \cup \partial R$ の周りで座標変換が $z \mapsto \frac{2}{k+2} z^{\frac{k+2}{2}}$, $k = \text{ord}_p(\phi) \geq -1$ の形 (とくに p は角度 $(k+2)\pi$ の錘点) になるよう一意に拡張される。

定義 3 平坦曲面の間の向きを保つ同相写像 $F : (R, \phi) \rightarrow (S, \psi)$ であって至るところ局所的に平面アフィン写像、すなわちある $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ に対し

$$z_\psi \circ F \circ z_\phi^{-1}(x + iy) = (ax + cy + e) + i(bx + dy + f), \quad \forall x + iy \in \text{Im} z_\phi$$

の形であるとき**アフィン変形**という。ここで $D_F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$ は $\text{HTrans}(\mathbb{C})$ -不変で $\|\psi\| = |D_F| \|\phi\|$ をみたし、とくに自己アフィン変形 $((S, \psi) = (R, \phi)$ の場合) においては $D_F \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ である。自明 ($D_F = I$) なアフィン変形を**半並進**とよぶ。

命題 4 (Teichmüller [1]) 任意の $[f : R \rightarrow S] \in T(R)$ に対しある $0 < k < 1$, R 上の正則二次微分 ϕ , S 上の正則二次微分 ψ , タイヒミュラー同値類の代表元 $F = F_{[f]} \in [f]$ が存在して次が成り立つ.

1. $F : (R, \phi) \rightarrow (S, \psi)$ はアフィン変形 $z_\psi \circ F \circ z_\phi^{-1}(z) = \frac{z + k\bar{z}}{1 - k}$ である.
2. F は $K(h) := \frac{1 + \|h_{\bar{z}}/h_z\|_\infty}{1 - \|h_{\bar{z}}/h_z\|_\infty}$ ($h \in [f] : x, y$ -弱微分可能) の最小値 $K(F) = \frac{1 + k}{1 - k}$ を実現する.

さらに, 2. をみたすような F は半並進の合成を除き一意である.

各 $[f_1], [f_2] \in T(R)$ に対し $d_T([f_1], [f_2]) := \frac{1}{2} \log \inf \{ K(h) \mid h \in [f_2 \circ f_1^{-1}] : x, y\text{-弱微分可能} \}$ とおくと $T(R)$ 上の完備距離 (タイヒミュラー距離) を定める. R 上の正則二次微分 ϕ を固定することに定義される次の写像 ι_ϕ は命題 4 より等長埋め込みになる.

$$\iota_\phi : \mathbb{H} \rightarrow T(R) : t \mapsto [f_t] \text{ s.t. } f_t^* \phi = \operatorname{Re}(\phi) + t \operatorname{Im}(\phi)$$

命題 5 (Earle-Gardiner [4]) $[\gamma] \in MCG(R)$ に対し, $[\gamma]^*(\iota_\phi(\mathbb{H})) \cap \iota_\phi(\mathbb{H}) \neq \emptyset$ であるためには $F_{[\gamma]}$ が (R, ϕ) の自己アフィン変形であることが必要十分である. また, このとき

$$F_{[\gamma]}^* \iota_\phi(t) = \iota_\phi \left(\frac{-at + b}{ct - d} \right), \quad \forall t \in \mathbb{H}, \quad D_{F_{[\gamma]}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}).$$

群 $\Gamma(R, \phi) := \{ D_F \mid F : (R, \phi) \text{ の自己アフィン変形} \} < PSL(2, \mathbb{R})$ を平坦曲面 (R, ϕ) の **Veech 群** という. ここで $\operatorname{proj}_{M(R)}(\iota_\phi(\mathbb{H})) \cong \mathbb{L}/\Gamma(R, \phi)$ である.

1.3 圏

合成可能な概念を**対象** (object) の間を結ぶ**射** (矢印, arrow) とみなし, その合成の系を**圏** [15] という. 射の間を結ぶ “射” は **2-射** (arrow^2), 2-射の間を結ぶ “射” は **3-射** (arrow^3), ... という. 2つの圏 C_1, C_2 の間の対応

$$F = (F_o : \text{Obj}_{C_1} \rightarrow \text{Obj}_{C_2}, F_a : \text{Arr}_{C_1} \rightarrow \text{Arr}_{C_2})$$

が $F_a(o_1 \xrightarrow{f} o_2) = (F_o(o_1) \xrightarrow{F_a(f)} F_o(o_2))$ のように始域終域と両立していて, さらに射の合成, 単位射を保つとき**関手**という.

例 A (群) 対象が一点 $\text{Obj} = \{\bullet\}$, 射が全て可逆な圏は群に相当する.

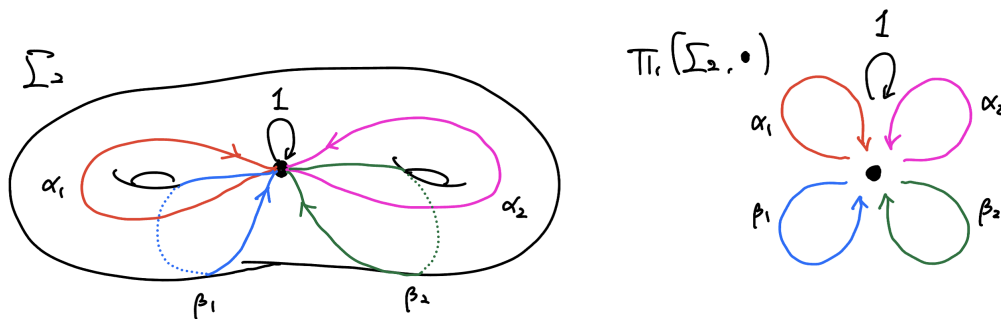


図1 基本群 $\pi_1(\Sigma_2, \bullet)$ の元は射 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 : \bullet \rightarrow \bullet$ とそれらの逆射の合成からなる.

例 B (群の圏) 群を対象として, その間を結ぶ準同型 ($G_1 \rightarrow G_2$) を射とする圏を考えられる.

例 C (Teichmüller vs Flat)

Teich

$$[\gamma] \curvearrowright R \begin{array}{c} \xrightarrow{[f]} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{[f \circ \gamma^{-1}]} \end{array} S \longrightarrow \cdots \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{obj: リーマン面/双正則} \\ \text{arr: 向きを保つ同相写像/ホモトピー} \\ \text{arr}^2: \text{写像類の引き戻し} \end{array} \right.$$

▷ $\text{Obj} = M(R)$, $\text{Arr}(R, -) = T(R)$, $\text{Arr}^2([f], -) = \text{Mod}(\text{dom}([f]))$ (ただし $\text{dom}([f])$ は $[f]$ の始域)

Flat

$$\begin{array}{ccc} (R, \phi) & \xrightarrow{F_{[f]}} & (S, \psi) \longrightarrow \cdots \\ \downarrow \times & \Downarrow & \downarrow \times \\ R_{\phi'} & \xrightarrow{F_{[f \circ \gamma^{-1}]}} & S_{\psi'} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{obj: 平坦曲面/半並進} \\ \text{arr: アフィン変形} \\ \text{arr}^2: \text{Teichmüller の定理} \circ \text{写像類の引き戻し} \end{array} \right.$$

▷ 忘却関手 Flat → Teich: $(R, \phi) \mapsto R$ は回転が自明になる以外は射をうまく埋め込む. これは基点 (R, ϕ) を一つ固定すれば $\mathbb{H} = \{\text{半並進} \setminus \text{アフィン変形/回転}\}$ の $T(R)$ への埋め込みになる.

$\iota_\phi(\mathbb{H})$

$$\begin{array}{ccc} (R, \phi) & \xrightarrow{f_t} & (R_t, \phi_t) \longrightarrow \cdots \\ \downarrow \times & \Downarrow & \downarrow \times \\ R_{\phi'} & \xrightarrow{f_{D_\gamma^{-1}t}} & R_{\psi'} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{obj: 平坦曲面} \\ \text{arr: 半並進} \setminus \text{アフィン変形/回転} \\ \text{arr}^2: \text{Arr}((R, \phi), (R, \phi)) \text{ の引き戻し} \\ \quad = \Gamma(R, \phi) \text{ のメビウス変換} \end{array} \right.$$

上記いずれの場合も射は全て可逆である. このような圏を**重群** (groupoid) という.

解析幾何学と代数幾何学の対応 [10] **Riemann** $\left\{ \begin{array}{l} \text{obj: コンパクトリーマン面} \\ \text{arr: 正則写像 (分岐被覆)} \end{array} \right\} \cong \underline{\text{Curve}} \left\{ \begin{array}{l} \text{obj: 非特異射影代数曲線} \\ \text{arr: 有理写像} \end{array} \right\}$

があり, **Teich** の射以下も次のように対応する.

命題 6 (Benirschke-Serván [3], 2023) $2g - 2 + n \geq 3$ なるリーマン面 R に対し, $T(R)$ から他のタイヒミュラー空間 $T(\hat{R})$ への d_T -等長埋め込みは写像類の pre-/post-作用を除いて **covering construction** による. これは, $\partial\Sigma \subset \text{Crit}(h)$, $\partial\hat{\Sigma} = h^{-1}(\partial\Sigma)$ (totally marked) であるような位相曲面の分岐被覆 $h : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ が定める自然な正則写像

$$h^* : T(\Sigma) \rightarrow T(\hat{\Sigma}) : [\Sigma \xrightarrow{f} R] \mapsto [\hat{\Sigma} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{R}] \text{ s.t. } (\hat{R} \xrightarrow{f \circ h \circ \hat{f}^{-1}} R) : \text{正則}$$

と標点の忘却 $\left(T(R \setminus B) \xrightarrow{h^*} T(\hat{R} \setminus h^{-1}(B)) \right) \mapsto \left(T(R) \xrightarrow{h_F^*} T(\hat{R}) \right)$ の合成である.

命題 7 (Haiden-Katzarkov-Kontsevich [11], 2017) 有限型の標識付き平坦曲面のモジュライ空間 $M(R, f, \phi)$ は (R, f, ϕ) の深谷圏の stability condition の集合の中に bianalytic に埋め込まれる.

Surface	Triangulated category
mapping class group	group of autoequivalences
simple curve c	spherical object C
intersection number $i(c_1, c_2)$	$\dim \text{Arr}^*(C_1, C_2)$
flat metric μ	stability condition σ
μ -geodesic	σ -semistable object
$\text{length}_\mu(c)$	$\text{mass}_\sigma(C)$

表 1 [9] stability condition theory : categorical version of Teichmüller theory

2 Edwards-Sanderson-Schmidt method

定義 8 種数 g の平坦曲面 (R, ϕ) の集合を Q_g , そのうち ϕ が正則一次微分の平方 $\phi = \omega^2$ であるもの (\Leftrightarrow 並進) の集合を \mathcal{A}_g とし, また $\mathcal{Q}_g := Q_g \setminus \mathcal{A}_g$ とする. 各 $\mathcal{H} = \mathcal{Q}, \mathcal{A}, \mathcal{Q}$ に対し, 二次微分 ϕ の特異点次数が k_1, \dots, k_n であるような平坦曲面 (R, ϕ) の全体からなる部分集合 (**stratum**) を $\mathcal{H}_g(k_1, \dots, k_n)$ とかく.

(Hubbard-Masur, Veech[6]) Stratum $\mathcal{A}_g(k_1, \dots, k_n)$ は局所的に相対コホモロジー群 [8] の中へ送る周期写像

$$\Pi(R, \omega) := ([c] \mapsto \int_c \omega) \in H^1(R, \text{Sing}(R, \omega); \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2g-1+n}$$

でパラメトライズされる $(2g-1+n)$ -次元軌道体である.

各 $(R, \phi) \in \mathcal{Q}_g(k_1, \dots, k_n)$ に対し, $\sqrt{\phi}$ の解析接続が定める二重被覆 (**canonical double**) を $(\hat{R}, \hat{\phi}) \in \mathcal{A}_{\hat{g}}(\hat{k}_1, \dots, \hat{k}_{\hat{n}})$ とおくと Riemann-Hurwitz の公式から $2\hat{g} - 1 + \hat{n} = 4g - 3 + 2n$ が成り立つ. 被覆変換 $\sigma : \sqrt{\phi} \mapsto -\sqrt{\phi}$ が導く固有分解に関して局所的な Π の像は $\mathbb{C}^{2\hat{g}-1+\hat{n}} = \mathbb{C}^{2g-1+n} \oplus \mathbb{C}^{2g-2+n}$ の後者に入る (前者が並進の場合に対応していて, ここから次元が分かる) ことから, 非並進の stratum $\mathcal{Q}_g(k_1, \dots, k_n)$ は $(2g-2+n)$ -次元軌道体になる.

命題 9 (Haiden-Katzarkov-Kontsevich [11], 2017) 有限型の平坦曲面 (R, ϕ) に対し $\mathcal{F}(R, \phi)$ をその深谷圏とする. 各 $k \in \mathbb{R}$ に対する部分圏 $\mathcal{C}^k \subset H^0(\mathcal{F}(R, \phi))$ と周期写像 $Z : K_0(\mathcal{F}(R, \phi)) \rightarrow H_1(R, \partial R, \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/2} \sigma)$ の対は stability condition の公理をみたす.

補題 10 各 stratum $Q_g(k_1, \dots, k_n)$ に対し, その **canonical surface** を平坦曲面

$$\Delta = \Delta(k_1, \dots, k_n) = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i := \bigsqcup_{i=1}^n (\mathbb{C}, z^{k_i} dz^2)$$

で定義する. このとき $\text{Htrans}(\Delta) \cong \prod_{i=1}^n C_{2(k_i+1)} \times \prod_{t=1}^{\infty} \text{Sym}\{i \mid k_i = t\}$ である. ここで各 $C_{2(k_i+1)}$ は Δ_i に π 回転として, 各 $\text{Sym}\{i \mid k_i = t\}$ は次数が同じ Δ_i を並べ替えるものとして作用する.

定義 11 平坦曲面上の特異点を結ぶ測地線を**サドル接続**という. 全ての辺がサドル接続で, 任意の三角形の外接円が他の三角形を真に包含しない三角形分割を **Delaunay 三角形分割**という. (これは常に存在する [14].) 外接円を共有する Delaunay 三角形は退化するといい, 隣接する三角形のペア pqr, rsp を qrs, spq に置き換える操作を**フリップ**という.

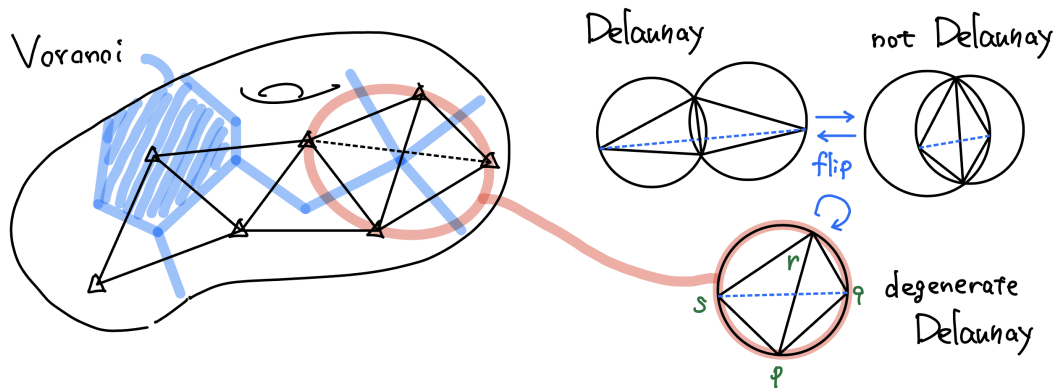


図 2 Delaunay 三角形分割とフリップ. 辺の垂直二等分線から得られるセル分解が Voronoi 分解である.

特異点集合が $\text{Sing}(R, \phi) = \{p_1, \dots, p_n\}$ である平坦曲面 (R, ϕ) に対し Delaunay 三角形分割の双対として, 凸領域

$$C_{p_i} := \left\{ x \in R \mid x \text{ から } \text{Sing}(R, \phi) \text{ への最短測地線が一意で } p_i \text{ に着地する} \right\}$$

を 2-セルとするセル分解 (**Voronoi 分解**) が一意的に定まる.

補題 12 各特異点 p_i の Voronoi 2-セル C_{p_i} を Δ_i の凸多角形に写す埋込み $\iota = \iota_{(R, \phi)}$ が存在し, これは $\text{Htrans}(\Delta)$ の合成を除き一意である. 埋込み ι は R^* 上の星状領域まで半並進として延長できて, 適当な辺の同一視のもと $(R, \phi) \cong (\bigsqcup_{i=1}^n \overline{\iota(C_{p_i})}) / \sim$ をみたす.

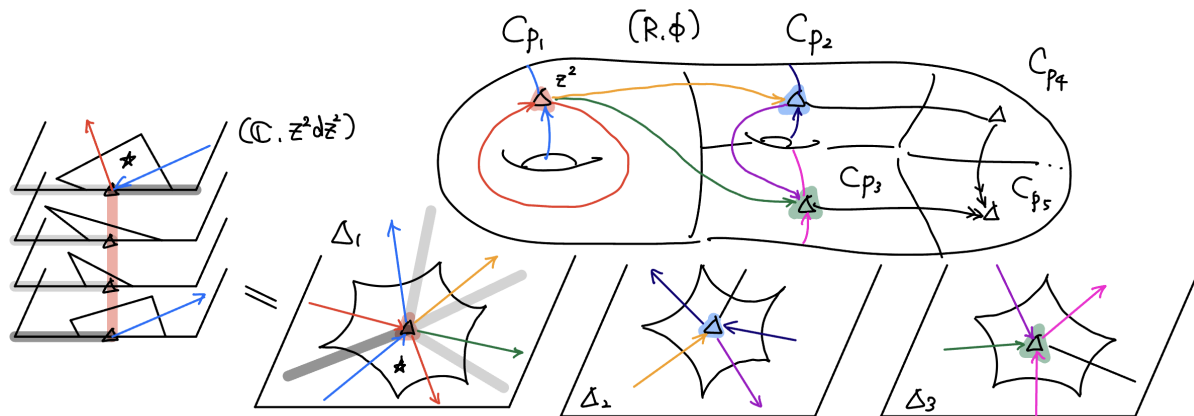


図3 Voronoi 分解と各 2-セルを Δ_i へ送った像: p_1 は 2 位の零点=角度 4π の錘点であるが, C_{p_1} の辺の数 (6) と直接の関係はない.

定義 13 補題 12 の埋込み $\iota = \iota_{(R, \phi)}$ を固定する. 各 p_i を始点とする向き付サドル接続 s に対し s^{-1} をその逆向き, $\iota(s) \in \Delta_i$ を s に沿った $\iota|_{C_{p_i}}$ の延長とする. ここで

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{M}}(R, \phi) &:= \left\{ (\iota(s), \iota(s^{-1})) \in \Delta \times \Delta \mid s : (R, \phi) \text{ の向き付サドル接続} \right\} \\ \widehat{\mathcal{S}}(R, \phi) &:= \left\{ (\iota(s), \iota(s^{-1})) \in \widehat{\mathcal{M}}(R, \phi) \mid s : \text{Voronoi 1-セルに直交するサドル接続} \right\}\end{aligned}$$

とおく. 有限集合 $\widehat{\mathcal{S}}(R, \phi)$ を (R, ϕ) の **Voronoi staple** の集合という.

各サドル接続 $(p_1 \xrightarrow{s} p_2)$ に対し $\iota(s) \in \Delta_1$, $\iota(s^{-1}) \in \Delta_2$ であることに注意すれば $\widehat{\mathcal{M}}(R, \phi)$ の元は以下の情報からなる.

- s の始点の特異点 p_1 と終点の特異点 p_2
- s が p_1 のどのシートから出て p_2 のどのシートに入るか (シート: $\mathbb{Z}/(k+2)\mathbb{Z}$ の元)
- s のホロノミーベクトル $hol(s) = \int_s \sqrt{\phi} \in \mathbb{C}$

補題 14 $(R_1, \phi_1), (R_2, \phi_2)$ が半並進同値であるには $\widehat{\mathcal{S}}(R_1, \phi_1), \widehat{\mathcal{S}}(R_2, \phi_2)$ が $\text{Htrans}(\Delta)$ -同値であることが必要かつ十分である.

命題 15 (Edwards-Sanderson-Schmidt [5], 2022) 行列 $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ が $\Gamma(R, \phi)$ に属するためには

$$\exists \gamma \in \text{Htrans}(\Delta) \text{ s.t. } \gamma(A \cdot \widehat{\mathcal{S}}(R, \phi)) \subset \widehat{\mathcal{M}}(R, \phi) \quad (1)$$

であることが必要かつ十分である. また $\left\| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\|_{\text{Frob}} := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, $\text{Sys}(R, \phi) := \min\{l(s) \mid s : (R, \phi) \text{ のサドル接続} \}$ としたとき次が成り立つ.

$$\text{diam}(A \cdot \widehat{\mathcal{S}}(R, \phi)) < \|A\|_{\text{Frob}} \cdot \text{Sys}(R, \phi) \quad (2)$$

$a > 0$ に対し, $\Gamma^a(R, \phi) := \{A \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid (1) \text{ and } \|A\|_{\text{Frob}} < a\}$ とおくと有限集合である.
 その凸包 $\Omega(\Gamma^a) = \bigcap_{A \in \Gamma^a} \{\tau \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(i, \tau) \leq d_{\mathbb{H}}(\gamma_A(i), \tau)\}$ に対し次が成り立つ.

命題 16 (Edwards-Sanderson-Schmidt [5], 2022) $a \geq \sqrt{2}$ が

$$\mu_{\mathbb{H}}(\Omega(\Gamma^a)) < 2\mu_{\mathbb{H}}\left(\Omega(\Gamma^a) \cap B\left(i, \log \sqrt{\frac{a^2 - \sqrt{a^4 - 4}}{2}}\right)\right) \quad (3)$$

をみたすならば $\Gamma^a(R, \phi)$ は $\Gamma(R, \phi)$ を生成する. このときとくに $\Gamma(R, \phi)$ は格子である.

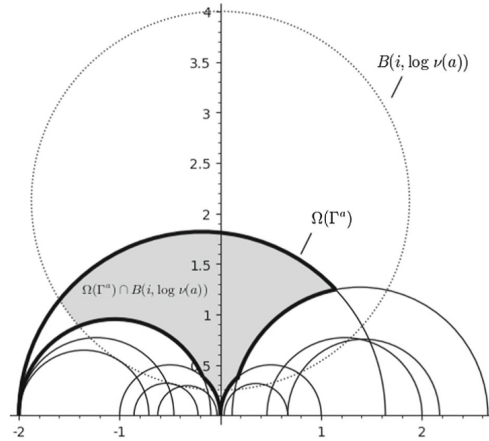


図 4 格子条件 (3): Edwards-Sanderson-Schmidt [5, Fig. 7] より引用

3 主結果

3.1 折り紙と Delaunay 三角形分割

d を自然数とし, $\Lambda := \{\pm 1, \dots, \pm d\}$, $\mathfrak{S} := \text{Sym}(\Lambda)$ とおく. d 枚の単位正方形セルの辺を半並進で貼り合わせて得られる平坦曲面を次数 d の折り紙という. 折り紙 \mathcal{O} の Veech 群は $PSL(2, \mathbb{Z})$ の格子であり, 代数曲線 $\mathbb{L}/\Gamma(\mathcal{O})$ と折り紙自身の $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -共役性を関連付ける事実 (Möller[16]) が知られている.

例 D $x, y \in S_d$ に対し, d 個の単位正方形セルを水平, 鉛直方向の並びがそれぞれ x, y になるように貼り合わせて得られる並進折り紙 (x, y) を考えられる. その Veech 群は次の $SL(2, \mathbb{Z}) \cong \text{Out}^+(F_2)$ の作用における固定群になる (Schmithüsen[17]).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (x, y) = (x, xy), \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (x, y) = (y, x^{-1}),$$

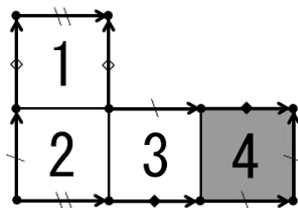


図 5 $x = (1)(2\ 3\ 4)$, $y = (1\ 2)(3\ 4)$ の場合の並進折り紙 (x, y) .

例 E $x, y \in S_d < \mathfrak{S}_{\text{odd}}$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}_{\text{odd}}^\Lambda$ に対し, 並進折り紙 (x, y) において $\varepsilon(\lambda) = -1$ なるセル λ を鏡映反転して適切に切り貼りして得られる折り紙は, その canonical double が並進折り紙 $(x^{\text{sign}}, \varepsilon y^\varepsilon \varepsilon(y^\varepsilon)) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ で与えられる一意な折り紙である [12].

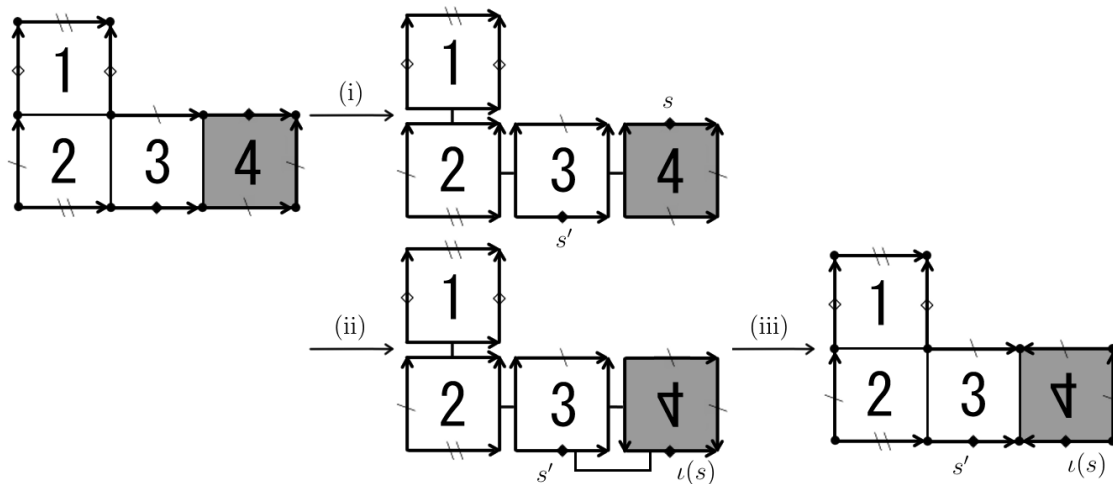


図 6 並進折り紙から鏡映反転, 切り貼りを施して得られる非並進折り紙の構成 [12]

上図は $x = (1)(2\ 3\ 4)$, $y = (1\ 2)(3\ 4)$, $\varepsilon = (+, +, +, -)$ の場合. (i) 並進折り紙 (x, y) を切り離し, (ii) セル 4 を上下反転 (ι) し, (iii) 辺のペアリングはそのままに半並進で写り合うよう貼りなおす. (ii) の後, セル 4 の上辺はセル $y^{\varepsilon(4)}(4) = y^{-1}(4) = 3$ の下辺とペアリングされている. (iii) の後, 辺の貼り合わせにおける座標変換の符号は $\varepsilon(3)\varepsilon(4) = +1 \cdot -1 = -1$ で, これに対応して canonical double 上では $4 \mapsto \varepsilon(4) \cdot y^{\varepsilon(4)}(4) \cdot \varepsilon(3) = -3$ と写り合う形で並進になる.

命題 17 ([13]) $\mathfrak{S}^i := \{\sigma \in \mathfrak{S} : \text{fixed-point-free, order } 2\}$ とおく. 次数 d の折り紙の半並進同値類は $\mu, \nu, \tau \in \mathfrak{S}^i$ の組 (μ, ν, τ) の \mathfrak{S} -共役類に一対一対応する. ここで以下の対応がある. 折り紙 \mathcal{O} の canonical double は $2d$ 次の並進折り紙 $(x_{\mathcal{O}}, y_{\mathcal{O}})$ で, $\mu = z_{\mathcal{O}} y_{\mathcal{O}}, \nu = x_{\mathcal{O}}^{-1} z_{\mathcal{O}}, \tau = x_{\mathcal{O}}^{-1} z_{\mathcal{O}} y_{\mathcal{O}}, z_{\mathcal{O}}^2 = x_{\mathcal{O}} y_{\mathcal{O}} x_{\mathcal{O}}^{-1} y_{\mathcal{O}}^{-1}$ が成り立つ.

$\lambda \in \Lambda$	半正方形 ($\sqcup \sqcap$)	μ, ν, τ	辺に関する反転
$\lambda \cdot \langle \mu \rangle$	λ に接する水平方向の辺	$x_{\mathcal{O}} = \mu\tau$	水平方向の平行移動
$\lambda \cdot \langle \nu \rangle$	λ に接する鉛直方向の辺	$y_{\mathcal{O}} = \nu\tau$	鉛直方向の平行移動
$\lambda \cdot \langle \tau \rangle$	λ を含む正方形セル	$z_{\mathcal{O}} = \mu\tau\nu$	頂点周りの π 回転
$\lambda \cdot \langle x_{\mathcal{O}} \rangle$	λ を含む水平方向の円柱	$\#(\lambda \cdot \langle x_{\mathcal{O}} \rangle)$	円柱の幅
$\lambda \cdot \langle y_{\mathcal{O}} \rangle$	λ を含む鉛直方向の円柱	$\#(\lambda \cdot \langle y_{\mathcal{O}} \rangle)$	"
$\lambda \cdot \langle z_{\mathcal{O}} \rangle$	λ に隣接する頂点	$\#(\lambda \cdot \langle z_{\mathcal{O}} \rangle)$	葉数=頂点の次数 + 2

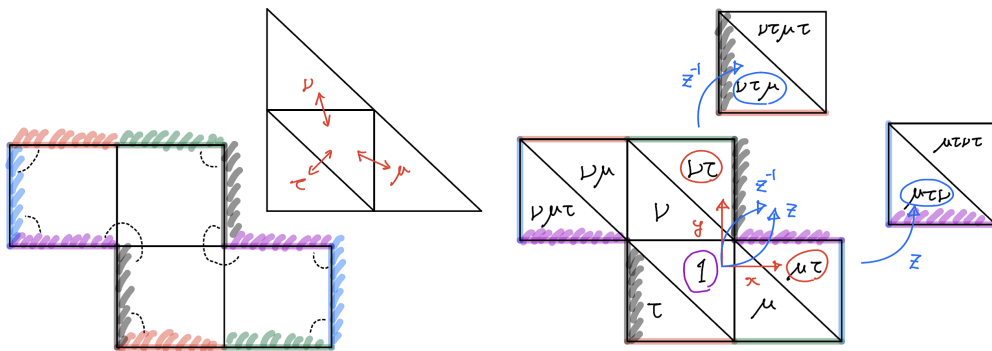


図 7 折り紙 $\mathcal{O} = (\mu, \nu, \tau)$ における半正方形の配置と (x, y, z) : ここでは $\mu\tau\nu(1) = \nu\mu\tau(1)$.

$\Theta := \mathfrak{S}^i \times \mathfrak{S}^i \times \mathfrak{S}^i / \mathfrak{S}^{\text{conj}}$, $\tau = \tau_0 := (\lambda \mapsto -\lambda) \in \mathfrak{S}^i$ とする.

定理 18 折り紙 $\mathcal{O} = (\mu, \nu, \tau) \in \Theta$ に対し一意に決まる $(\triangle \nabla)$ -Delaunay 三角形分割を割り当てて同一視するものとする. このとき Delaunay 三角形分割 $(\mu, \nu, \tau_0) \in \Theta$ に対し, 退化する三角形のペア $\pm\kappa$ ($\kappa = 1, \dots, d$) のフリップは $(-x_{\mathcal{O}}^{\text{sign}}, -\varepsilon_{\kappa} y_{\mathcal{O}}^{\varepsilon_{\kappa}} (y_{\mathcal{O}}^{\varepsilon_{\kappa}}), \tau_0) \in \Theta$, $\varepsilon_{\kappa} = (\pm\kappa \mapsto \mp\kappa) \in \{\pm 1\}_{\text{odd}}^{\Lambda}$ によって与えられる.

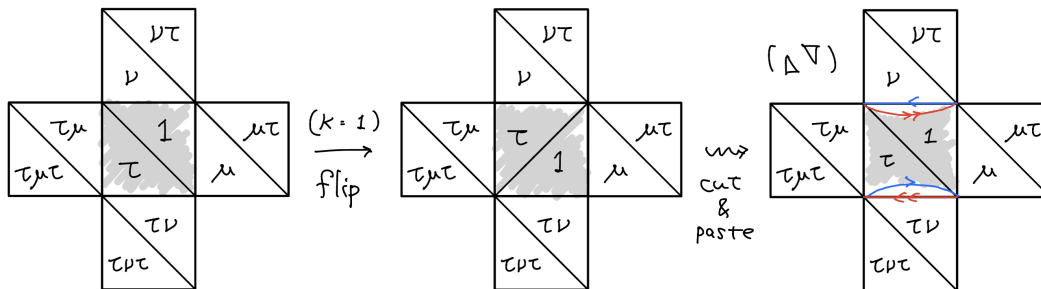


図8 $(\triangle \nabla)$ -Delaunay 三角形分割とフリップに対応する折り紙. セル $(1(\kappa), \tau(\kappa))$ についてフリップした Delaunay 三角形分割は, そのセルについて例 E の切り貼りを施して得られる折り紙の $(\triangle \nabla)$ -Delaunay 三角形分割で代表される.

命題 19 普遍 Veech 群 $PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rangle$ は折り紙 $\mathcal{O} = (\mu, \nu, \tau) \in \Theta$ に対して次のように作用する.

$$\begin{cases} T(\mu, \nu, \tau) = (\mu^* \tau, \nu, \mu) \\ S(\mu, \nu, \tau) = (\tau^* \nu, \mu, \tau) \\ TS(\mu, \nu, \tau) = (\nu, \tau, \mu) \end{cases} \quad \begin{cases} T(x, y, z) = (x, yx^{-1}, z) \\ S(x, y, z) = (y, x, y^{-1}zy) \\ TS(x, y, z) = (yx^{-1}, x^{-1}, z^{-1}) \end{cases}$$

(略証) 折り紙 \mathcal{O} の $(\sqsubset \sqsupset)$ -Delaunay 三角形分割から $T\mathcal{O}, S\mathcal{O}$ の $(\nabla \Delta)$ -Delaunay 三角形分割を得る. 一方で折り紙 (μ, ν, τ) の全セルでのフリップは $(\tau^*\mu, \nu, \tau)$ で表される $(\nabla \Delta)$ -Delaunay 三角形分割であることから, これらを組み合わせて主張を得る. 後半は $\mu = zy, \nu = x^{-1}z, \tau = x^{-1}zy$ からしたがう.

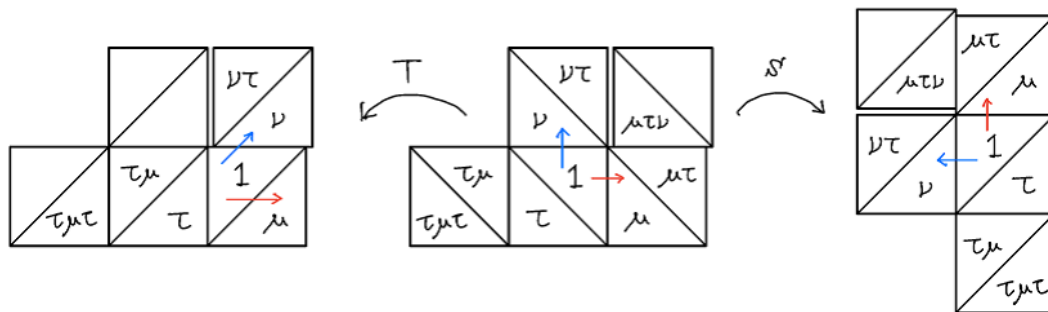


図9 T, S -アフィン変形

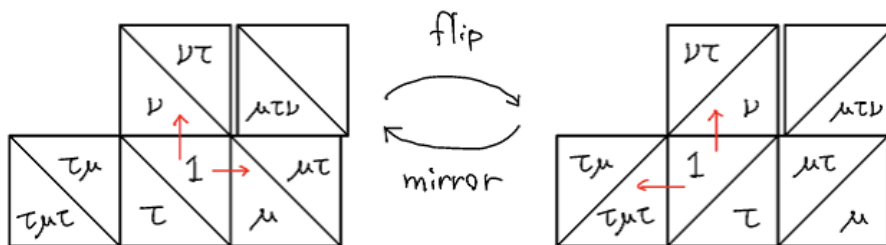


図10 (μ, ν, τ) の全セルでのフリップ $= (\tau^*\mu, \nu, \tau)$ の鏡映反転

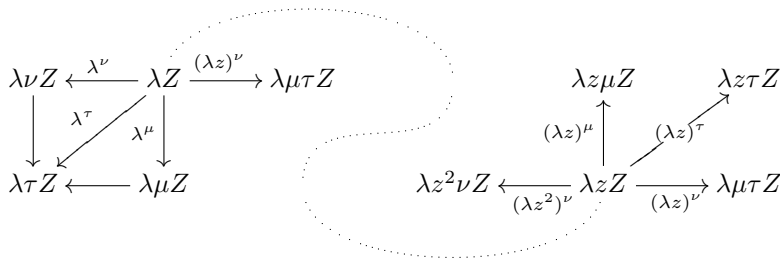
3.2 Edwards-Sanderson-Schmidt method の圈を用いた構成

折り紙において $\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{\mathcal{S}}$ にあたるものを構成する．ここでは各正方形セルの頂点は全て除いているものとする．一般に次数 0 の特異点は解消する必要があるが、折り紙の頂点の場合は $PSL(2, \mathbb{Z})$ -不変な集合を与えることからそのまま扱ってよい．このようにすることで各 staple の方向と頂点周りのシートの基準とがずれることを回避できる．

定義 20 折り紙 $\mathcal{O} = (\mu, \nu, \tau) \in \Theta$ に対し $x = x_{\mathcal{O}}, y = y_{\mathcal{O}}, z = z_{\mathcal{O}}, Z := \langle z \rangle$ とかくものとし、射の並び (2-射), 2-射のラベル替え (3-射) を備えた亜群 $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ を次で定義する．

$$\begin{cases} \text{Obj}_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}}} = \Lambda/Z \\ \text{Arr}_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}}} = \langle \lambda Z \xrightarrow{\lambda^\sigma} \lambda\sigma Z \mid \lambda \in \Lambda, \sigma = \mu, \nu, \tau \rangle \\ \text{Arr}_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}}}^2 = \{ \lambda^\sigma \rightarrow (\lambda z)^\sigma \} \\ \text{Arr}_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}}}^3 = \mathfrak{S}\text{-共役} \end{cases}$$

各 λ に対し \mathfrak{S} の並び替えは右から作用しているとして書くものとする、頂点 λZ の周りの射は 2-射に関して次の図のように並んでいる．周りに出ている射の本数は $\#\text{Arr}(\lambda Z, -) = 3\#\lambda Z = 3(\text{ord}_{\lambda Z}(\phi) + 2)$ である．



$\nu = x^{-1}z, \mu = y^{-1}z^{-1}$ より命題 17 から, 次の図のように射を平行移動とみなせる.

Commutative diagram showing relationships between lambda terms:

- Top row: $\lambda x^{-1} z Z \equiv \lambda \nu Z \xleftarrow{\lambda^\nu} \lambda Z \xrightarrow{(\lambda z)^\nu} \lambda \mu \tau Z \equiv \lambda x Z$
- Left curved arrow: $\lambda x^{-1} z Z \xleftarrow{\lambda^{(x^{-1})}} \lambda Z$
- Top curved arrow: $\lambda Z \xrightarrow{\lambda^x} \lambda \mu \tau Z$
- Vertical arrow: $\lambda Z \xrightarrow{\lambda^\mu} \lambda \mu Z$
- Diagonal arrow: $\lambda \mu Z \xrightarrow{(\lambda \mu)^\tau} \lambda \mu \tau Z$
- Bottom curved arrow: $\lambda Z \xrightarrow{\lambda^{(y^{-1})}} \lambda y^{-1} z^{-1} Z$
- Bottom vertical arrow: $\lambda \mu Z \equiv \lambda y^{-1} z^{-1} Z$

準同型 $h : \text{Arr}(\lambda Z, -) \rightarrow (\mathbb{C}, +)$ を $h(\lambda^x) = 1$, $h(\lambda^y) = i$, と可換性 $h(\triangle) = h(\nabla) = 0$ により定義できる. これにより $\widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O}) := (\mathcal{G} \times h)_{\mathcal{O}} \in \mathbf{Groupoid} \times (\mathbb{C}, +)$ を, 各射に次の図のようにベクトルの情報を割り当てたものとして得る.

射の集合を $\text{Arr}_{G_{\mathcal{O}}} = \{\lambda Z \xrightarrow{\lambda\sigma} \lambda\sigma Z \mid \lambda \in \Lambda, \sigma = \mu, \nu, \tau\}$ に置き換えて同様に $\widehat{\mathcal{S}}^*(\mathcal{O}) := (G \times h)_{\mathcal{O}} \in \underline{\mathbf{Graph}} \times (\mathbb{C}, +)$ を得る. 随伴 $\mathbf{Graph} \rightleftarrows \mathbf{Category}$ [15] として説明されるように $\widehat{\mathcal{S}}^*$ は $\widehat{\mathcal{M}}^*$ の“有限生成系”を与えている.

定理 21 $\widehat{\mathcal{M}}^* = (\mathcal{G} \times h)$ は関手 $\mathbf{Flat} \supset \Theta \rightarrow \mathbf{Groupoid} \times (\mathbb{C}, +)$ であって以下を満たす.

1. $\widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{O}_2) = 1 \times (D_f)_{\text{linear}}$
2. $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O}_1) = \widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O}_2) \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{S}}^*(\mathcal{O}_1) \subset \widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O}_2)$
3. $A \in \Gamma(\mathcal{O}) \Leftrightarrow A\widehat{\mathcal{S}}^*(\mathcal{O}) \subset \widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O})$

ここで 2. 3. の包含は 2-射 (z の作用) を変えない 3-射 (\mathfrak{S} -共役) $\cong \text{Htrans}(\Delta)$ を法として対象と射が埋込めることに相当する.

Edwards-Sanderson-Schmidt method	categorical version for origamis
flat surface (R, ϕ)	origami $\mathcal{O} = (\mu, \nu, \tau)$
singularity p	orbit λZ
Voronoi staple $(\iota(s), \iota(s^{-1}))$	generating arrow $\lambda Z \xrightarrow{\lambda^\sigma} \lambda\sigma Z$
saddle connection $(\iota(s), \iota(s^{-1}))$	arrow (piecewise line)
sheet transition on Δ	arrow ² $\lambda^\sigma \rightarrow (\lambda z)^\sigma$
automorphism $(\text{Htrans}(\Delta))$	arrow ³ (\mathfrak{S} -conjugate)
combinatorial structure of $\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{\mathcal{S}}$	groupoid \mathcal{G} , group G
holonomy $(hol(s), hol(s^{-1}))$	vector $h(\lambda^\sigma)$
finite bound for $A\widehat{\mathcal{S}}$	finite arrows of bounded length

表 2 categorical version of Edwards-Sanderson-Schmidt method

参考文献

- [1] L. V. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal Mappings, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 1966.
- [2] J. P. Bowman: Teichmüller geodesics, Delaunay triangulations, and Veech groups. *Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser.*, **10** (2010), 113–129.
- [3] F. Benirschke, C. A. Serván: Isometric embeddings of Teichmüller spaces are covering constructions. arXiv.2305.04153, 2023.
- [4] C. J. Earle, F. P. Gardiner, Geometric isomorphisms between infinite dimensional Teichmüller spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348** (1996), 1163–1190.
- [5] B. Edwards, S. Sanderson, and T. A. Schmidt: Canonical translation surfaces for computing Veech groups. *Geom. Dedicata*, **216**(5): 60, 2022.
- [6] G. Forni and C. Matheus: Introduction to Teichmüller theory and its applications to dynamics of interval exchange transformations, flows on surfaces and billiards, *Journal of Modern Dynamics*, **8** (2014), no. 3-4, 271–436.
- [7] F. P. Gardiner, N. Lakic: Quasiconformal Teichmüller Theory, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2000.
- [8] A. Hatcher: Algebraic topology, *Cambridge University Press, Cambridge*, 2002.
- [9] E. X. C. Heng: Categorification and Dynamics in Generalised Braid Groups, *PhD thesis, Australian National University*, 2023.
- [10] F., Herrlich, G. Schmithüsen: Dessins d'enfants and origami curves, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, **13**, 767–809 (2009)
- [11] F. Haiden, L. Katzarkov, M. Kontsevich: Calculation of Veech groups and Galois invariants of general origamis. Publ.

Math. IHES **126**, 247–318 (2017).

- [12] S. Kumagai: Calculation of Veech groups and Galois invariants of general origamis. *Accepted for publication of Kodai Math Journal*, arXiv.2006.00905, 2023.
- [13] S. Kumagai: General origamis and Veech groups of flat surfaces. arXiv.2111.09654, 2021.
- [14] H. Masur and J. Smillie: Hausdorff dimension of sets of nonergodic measured foliations. *Ann. Math.* **134**, 455–543, 1991.
- [15] S. MacLane: Categories for the working mathematician. *Graduate texts in mathematics* **5**, Springer-Verlag, 1971.
- [16] M. Möller: Teichmüller curves, Galois actions and \widehat{GT} -relations. *Math. Nachr.* **278**, no.9, 1061–1077 (2005)
- [17] G. Schmithüsen: An algorithm for finding the Veech group of an origami. *Experiment. Math.* **13**, no. 4, 459–472, 2004