

# Categorical aspects of Teichmüller spaces and Voronoi decompositions

熊谷 駿

東北大・情報 特定研究員 (→ 2023/10~九州大 IMI 学術研究員)

函数論サマーセミナー, 2023/9/9

# Contents

- 圏の概念の導入; タイヒミュラー空間周りの話を念頭に
- 平坦構造の‘自己同型’の群=Veech 群は錘点周りの情報に基づく条件づけとノルム評価をもつ [Edwards-Sanderson-Schmidt 2022]  
→不変量の定式化には下記の圏の枠組みで十分に表せるだろう構造が必要.
- F. Haiden, L. Katzarkov, M. Kontsevich: *Flat surfaces and stability structures*, Publ. Math. IHES **126**, 247–318, 2017. “タイヒミュラー空間論の圏論版”

合成可能な概念を**対象** (object) の間を結ぶ**射** (矢印, arrow) とみなし, その合成の系で結合律, 単位律をみたすものを**圏**という. すなわち, 以下を仮定するものである.

- ① 各射  $(R \xrightarrow{f} S)$  は**始対象**  $R$  と**終対象**  $S$  を備える.
- ② 射  $(R \xrightarrow{f} S), (S \xrightarrow{g} T)$  は合成射  $(R \xrightarrow{f \circ g} T)$  を定める.
- ③ 結合律が成り立つ;  $(\xrightarrow{f} (\xrightarrow{g} \xrightarrow{h})) = ((\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}) \xrightarrow{h})$
- ④ 各対象  $R$  は単位射  $(R \xrightarrow{1_R} R)$  をもつ;  $(R \xrightarrow{1_R} \xrightarrow{f} S) = (R \xrightarrow{f} S) = (R \xrightarrow{f} \xrightarrow{1_S} S)$

射の間を結ぶ “射” を **2-射** (arrow<sup>2</sup>) などとよび高次の射を定義する. 高次の射は低次の射の構造 (as above) を保つものとする.

# 関手

2つの圏  $C_1, C_2$  の間の関手とは対応

$$F = (F_{\mathcal{O}} : \text{Obj}_{C_1} \rightarrow \text{Obj}_{C_2}, F_{\mathcal{A}} : \text{Arr}_{C_1} \rightarrow \text{Arr}_{C_2})$$

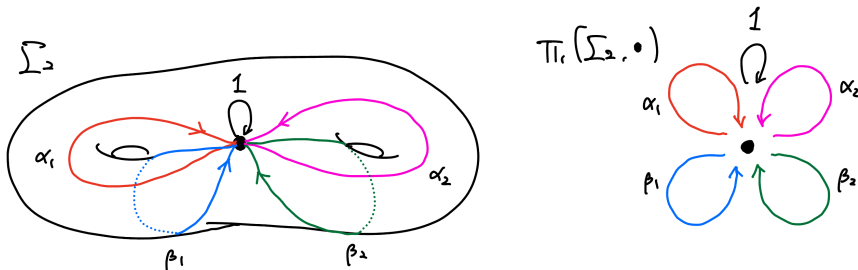
であって, 
$$\begin{cases} \text{始終対象} & : F_{\mathcal{A}}(R \xrightarrow{f} S) = (F_{\mathcal{O}}(R) \xrightarrow{F_{\mathcal{A}}(f)} F_{\mathcal{O}}(S)) \\ \text{合成} & : F_{\mathcal{A}}(R \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} S) = (F_{\mathcal{O}}(R) \xrightarrow{F_{\mathcal{A}}(f)} \xrightarrow{F_{\mathcal{A}}(g)} F_{\mathcal{O}}(S)) \\ \text{単位射} & : F_{\mathcal{A}}(R \xrightarrow{1_R} R) = (F_{\mathcal{O}}(R) \xrightarrow{1_{F_{\mathcal{O}}(R)}} F_{\mathcal{O}}(R)) \end{cases}$$

というように圏構造を保つもの (圏の間の射) のことをいう.

例: 可微分写像の微分操作は関手性をもつ.

# 素朴な例

- 例 A : 対象が一点  $\text{Obj} = \{\bullet\}$ , 射が全て可逆な圏は群に相当する.

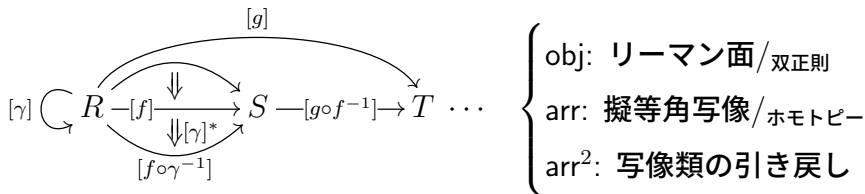


射 (loop)  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 : \bullet \rightarrow \bullet$  の surface 上の並び (リボングラフ構造) は 2-射の情報.

- 例 B : 群を対象とし, その間を結ぶ準同型  $(G_1 \rightarrow G_2)$  を射とする圏を考えられる.

# タイヒミュラー空間

## Teich



$R$  を始対象とする射の集合  $\text{Arr}(R, -) =: T(R)$  を  $R$  のタイヒミュラー空間という.

- $T(R)$  は  $\mathbb{C}^{3g-3+n}$  に埋め込まれる単連結な複素多様体になり (Ahlfors-Bers),
- 2つの射  $[f], [g]$  の距離をその“間”の自然な射  $[g \circ f^{-1}]$  の歪曲度で測るタイヒミュラー距離が複素構造の小林距離に一致していて (Royden),
- 1-射を 2-射で束ねたものが複素構造のモジュライ空間である.

# 平坦構造

(Teichmüller の定理) 任意の Teich の射  $(R \xrightarrow{[f]} S)$  に対し, Flat の射  $((R, \phi) \xrightarrow{F_{[f]}} (S, \psi))$  が存在して (A)  $f \sim F_{[f]}$ , (B)  $d([1_R], [f]) = \frac{1}{2} \log K(F_{[f]})$ , かつ (C) このような代表元は modulo 半並進 ( $\Leftrightarrow$  locally  $z \mapsto \pm z + c$ ) で一意である.

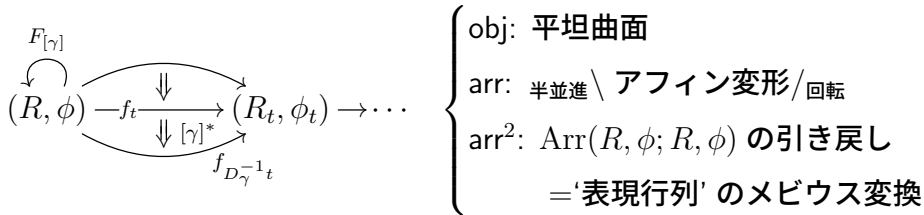
## Flat

$$\begin{array}{ccc}
 (R, \phi) & \xrightarrow{F_{[f]}} & (S, \psi) \rightarrow \cdots \\
 \downarrow \times & \searrow \downarrow \downarrow & \downarrow \times \\
 (R, \phi') & \xrightarrow{F_{[f \circ \gamma^{-1}]}} & (S, \psi')
 \end{array}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{obj: 平坦曲面 / 半並進} \\ \text{arr: アフィン変形} \\ \text{arr}^2: \text{Teichmüller の定理} \circ \text{写像類の引き戻し} \end{array} \right.$$

# タイヒミュラー円盤

▷ 忘却関手  $\text{Flat} \rightarrow \text{Teich}$  は回転が自明になる以外は射をうまく埋め込む. これは基点  $(R, \phi)$  を一つ固定すれば  $\mathbb{H} = \text{半並進} \setminus \text{アフィン変形} / \text{回転}$  の  $T(R)$  への埋め込みになる.

$\iota_\phi(\mathbb{H}); t \in \mathbb{H}$



$\mathbb{H} = \text{Arr}(R, \phi; -) \hookrightarrow T(R)$  への 2-射を (作用として) 与える群  $D(\text{Arr}(R, \phi; R, \phi))$  を平坦曲面の **Veech 群** という.



次の圏同値が解析幾何学と代数幾何学の対応の一角として知られている.

$$\underline{\text{Riemann}} \left\{ \begin{array}{l} \text{obj: コンパクトリーマン面} \\ \text{arr: 正則写像 (分岐被覆)} \end{array} \right\} \cong \underline{\text{Curve}} \left\{ \begin{array}{l} \text{obj: 非特異射影代数曲線} \\ \text{arr: 有理写像} \end{array} \right\}$$

例：トーラスと楕円曲線

$$\begin{array}{c} \text{トーラス } \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) \\ \updownarrow \\ \text{格子 } \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \text{ の楕円関数の体 } \mathbb{C}(\wp_\tau, \wp'_\tau) \\ \updownarrow \\ \text{満たすべき微分方程式 } \wp'_\tau{}^2 = 4\wp_\tau^3 - g_2(\tau)\wp_\tau - g_3(\tau) \\ \updownarrow \\ \text{射影楕円曲線 } y^2z = 4x^3 - g_2(\tau)xz^2 - g_3(\tau)z^3 \end{array}$$

## Proposition (Haiden-Katzarkov-Kontsevich, 2017)

有限型の標識付き平坦曲面のモジュライ空間  $M(R, f, \phi)$  は  $(R, f, \phi)$  の深谷圏の *stability condition* の集合の中に *bianalytic* に埋め込まれる。

Surface	Triangulated category
mapping class group	group of autoequivalences
simple curve $c$	spherical object $C$
intersection number $i(c_1, c_2)$	$\dim \text{Arr}^*(C_1, C_2)$
flat metric $\mu$	stability condition $\sigma$
$\mu$ -geodesic	$\sigma$ -semistable object
$\text{length}_\mu(c)$	$\text{mass}_\sigma(C)$

Table: stability condition theory : categorical version of Teichmüller theory

# 平坦構造

リーマン面  $R$  上の正則二次微分  $\phi = \phi(z)dz^2$  が定める  $R^* := R \setminus \text{Zero}(\phi)$  上の局所座標

$$p \mapsto \pm \int_{p_0}^p \sqrt{\phi(z)} dz$$

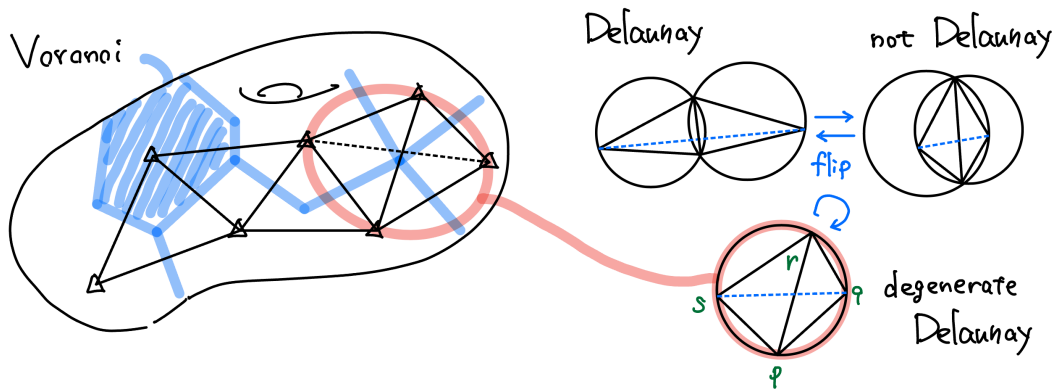
は曲率 0 の計量を誘導する. 零点と境界 (極) への completion は座標変換が

$$z \mapsto \frac{2}{k+2} z^{\frac{k+2}{2}}, \quad k = \text{ord}_p(\phi)$$

の形の, 角度  $(k+2)\pi$  の錘特異点になる. Riemann-Hurwitz の公式より次が成り立つ.

$$\sum_{p \in \text{Sing}(R, \phi)} \text{ord}_p \phi = 4g(R) - 4$$

特異点を結ぶ測地線を**サドル接続**といい、これを辺とする三角形分割を考える。隣接する三角形のペア  $pqr, rsp$  を  $qrs, spq$  に置き換える操作を**フリップ**という。



フリップの繰り返しで任意の隣接三角形対を上図のようにしたものを **Delaunay** という。

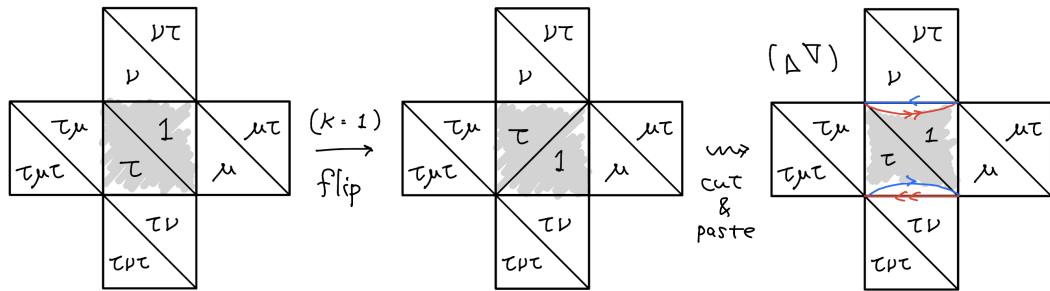
# 錘点周りの情報; 切り貼り, アフィン変形

$\Lambda := \{\pm 1, \dots, \pm d\}$ ,  $(\mu, \nu, \tau) \in \Theta := (\text{Sym} \Lambda)^3_{\text{fixed-point-free involution} / \text{conj.}}$  に対し, 次のような対応のもと平坦曲面 (折り紙) を作る.

$\lambda \in \Lambda$	半正方形 ( $\triangle \nabla$ )		
$\lambda \cdot \langle \mu \rangle$	$\lambda$ に接する水平方向の辺	$x_O = \mu\tau$	水平方向の平行移動
$\lambda \cdot \langle \nu \rangle$	$\lambda$ に接する鉛直方向の辺	$y_O = \nu\tau$	鉛直方向の平行移動
$\lambda \cdot \langle \tau \rangle$	$\lambda$ を含む正方形セル	$z_O = \mu\tau\nu$	頂点周りの $\pi$ 回転
$\lambda \cdot \langle x_O \rangle$	$\lambda$ を含む水平方向の円柱	$\#(\lambda \cdot \langle x_O \rangle)$	円柱の幅
$\lambda \cdot \langle y_O \rangle$	$\lambda$ を含む鉛直方向の円柱	$\#(\lambda \cdot \langle y_O \rangle)$	"
$\lambda \cdot \langle z_O \rangle$	$\lambda$ に隣接する頂点	$\#(\lambda \cdot \langle z_O \rangle)$	頂点の次数 + 2

# Theorem (K.)

折り紙  $\mathcal{O} = (\mu, \nu, \tau) \in \Theta$  に対し一意に決まる  $(\Delta \nabla)$ -Delaunay 三角形分割を割り当てて同一視するものとする. このとき Delaunay 三角形分割  $(\mu, \nu, -1) \in \Theta$  に対し, 退化する三角形のペア  $\pm \kappa$  ( $\kappa = 1, \dots, d$ ) のフリップは  $(-x_{\mathcal{O}}^{\text{sign}}, -\varepsilon_{\kappa} y_{\mathcal{O}}^{\varepsilon_{\kappa}} \varepsilon_{\kappa}(y_{\mathcal{O}}^{\varepsilon_{\kappa}}), -1) \in \Theta$ ,  $\varepsilon_{\kappa} = (\pm \kappa \mapsto \mp \kappa) \in \{\pm 1\}_{\text{odd}}^{\Lambda}$  によって与えられる.



## Theorem (K.)

普遍 Veech 群  $PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rangle$  は折り紙  $(\mu, \nu, \tau) \in \Theta$  に対して次のように作用する.

$$\begin{cases} T(\mu, \nu, \tau) = (\mu^* \tau, \nu, \mu) \\ S(\mu, \nu, \tau) = (\tau^* \nu, \mu, \tau) \\ TS(\mu, \nu, \tau) = (\nu, \tau, \mu) \end{cases} \quad \begin{cases} T(x, y, z) = (x, yx^{-1}, z) \\ S(x, y, z) = (y, x, y^{-1}zy) \\ TS(x, y, z) = (yx^{-1}, x^{-1}, z^{-1}) \end{cases}$$

## Corollary

三角形分割が折り紙の *Delaunay* 三角形分割になることはフリップのもと不変である.

# 錘点周りの情報の定式化 for Veech 群

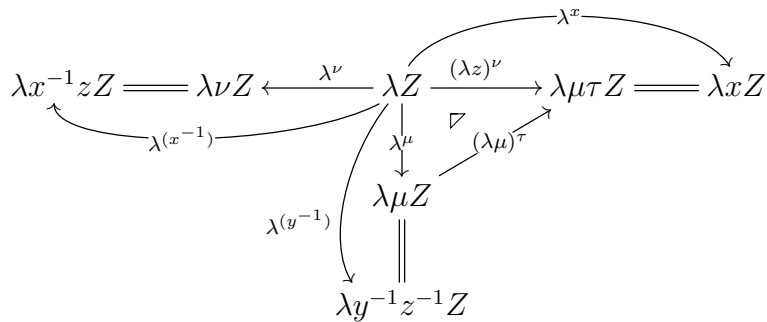
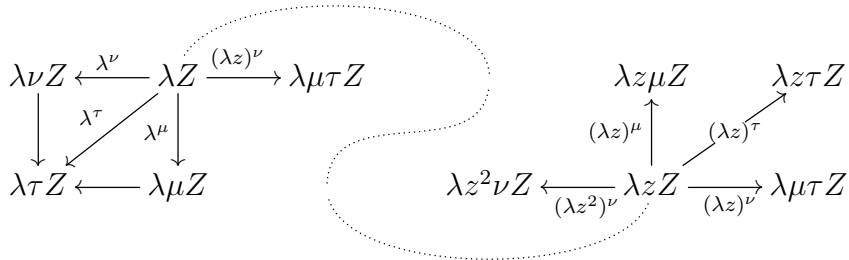
折り紙を図式として定式化し, [ESS,2022] の Veech 群の条件付の情報を取り出す.

## Definition

折り紙  $\mathcal{O} = (\mu, \nu, \tau) \in \Theta$  に対し  $x = x_{\mathcal{O}}, y = y_{\mathcal{O}}, z = z_{\mathcal{O}}, Z := \langle z \rangle$  とかくものとし, 射の並び (2-射), 2-射のラベル替え (3-射) を備えた圏  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$  を次で定義する.

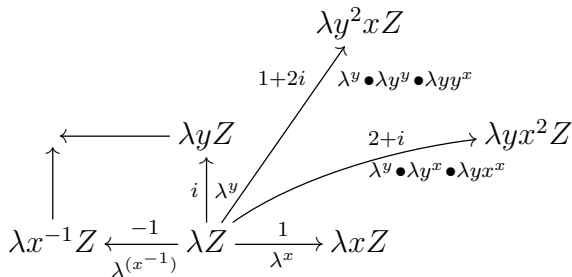
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Obj}_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}}} = \Lambda/Z & : \text{頂点} \\ \text{Arr}_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}}} = \langle \lambda Z \xrightarrow{\lambda^\sigma} \lambda\sigma Z \mid \lambda \in \Lambda, \sigma = \mu, \nu, \tau \rangle & : \text{辺} \\ \text{Arr}_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}}}^2 = \{ \lambda^\sigma \rightarrow (\lambda z)^\sigma \} & : \text{リボングラフ構造} \\ \text{Arr}_{\mathcal{G}_{\mathcal{O}}}^3 = \text{Sym}\Lambda\text{-共役} & : \text{relabelling} \end{array} \right.$$





準同型  $h : \text{Arr}(\lambda Z, -) \rightarrow (\mathbb{C}, +)$  を  $h(\lambda^x) = 1$ ,  $h(\lambda^y) = i$ ,  $h(\triangleleft) = h(\triangleright) = 0$  で定める.

これにより  $\widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O}) := (\mathcal{G} \times h)_{\mathcal{O}} \in \underline{\mathbf{Groupoid}} \times (\mathbb{C}, +)$  を, 各射に次の図のようにベクトルの情報を割り当てたものとして得る.



射の集合を  $\text{Arr}_{G_{\mathcal{O}}} = \{\lambda Z \xrightarrow{\lambda^{\sigma}} \lambda \sigma Z \mid \lambda \in \Lambda, \sigma = \mu, \nu, \tau\}$  に置き換えて同様にして  $\widehat{\mathcal{S}}^*(\mathcal{O}) := (G \times h)_{\mathcal{O}} \in \underline{\mathbf{Graph}} \times (\mathbb{C}, +)$  を得る.

## Theorem (K., Edwards-Sanderson-Schmidt 2022)

$\widehat{\mathcal{M}}^*$  は関手  $\mathbf{Flat} \supset \Theta \rightarrow \mathbf{Groupoid} \times (\mathbb{C}, +)$  であって以下を満たす.

- ①  $\widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{O}_2) = 1 \times (D_f)_{linear}$
- ②  $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O}_1) = \widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O}_2) \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{S}}^*(\mathcal{O}_1) \subset \widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O}_2)$
- ③  $A \in \Gamma(\mathcal{O}) \Leftrightarrow A\widehat{\mathcal{S}}^*(\mathcal{O}) \subset \widehat{\mathcal{M}}^*(\mathcal{O})$
- ④  $\text{diam}(A \cdot \widehat{\mathcal{S}}(R, \phi)) < \|A\|_{\text{Frob}} \cdot \text{Sys}(R, \phi)$

ここで 2. 3. の包含は 2-射 ( $z$  の作用) を変えない 3-射 ( $\mathbb{G}$ -共役)  $\cong \text{Htrans}(\Delta)$  を法として対象と射が埋込めることに相当する.

F. Haiden, L. Katzarkov, M. Kontsevich: *Flat surfaces and stability structures*, Publ. Math. IHES **126**, 247–318, 2017. “タイヒミュラー空間論の圏論版”

余接ベクトル (平坦構造)  $\mapsto$  曲線の grading  $\mathcal{A} \cong$  foliation  
 $\mapsto$  錘点周りの情報を付加:  $A_\infty$ -圏  $F_{\mathcal{A}}$  (not 圏)  
 $\mapsto$  捻り複体  $twF_{\mathcal{A}} \mapsto$  ホモトピー圏  $H^0(twF_{\mathcal{A}})$   
 $\dots$  深谷圏  $F(R, \phi)$  with 三角圏構造 & 安定性構造

flat surface	triangulated category
arc landing on $\partial R$	object of $F_{\mathcal{A}}$
boundary path $\partial R$	arrow of $F_{\mathcal{A}}$
disk sequence of boundary paths	multi composition of $F_{\mathcal{A}}$
$\pi$ -rotation	shift functor
level set of grading	semistable objects of $F(R, \phi)$
period map	central charge of $F(R, \phi)$

Thank you for listening!!

Teich の射はRiemannの同型射を尊重する高次の射といえる.

## Proposition (Benirschke-Serván, 2023)

$2g - 2 + n \geq 3$  なるリーマン面  $R$  に対し,  $T(R)$  から他のタイヒミュラー空間  $T(\hat{R})$  への  $d_T$ -等長埋め込みは写像類の *pre-/post*-作用を法として *covering construction* による. これは,  $\partial R \subset \text{Crit}(h)$ ,  $\partial \hat{R} = h^{-1}(\partial R)$  (*totally marked*) であるような位相曲面の間のある分岐被覆  $h : \hat{R} \rightarrow R$  に対して

$$h^* : T(R) \rightarrow T(\hat{R}) : [R \xrightarrow{f} S] \mapsto [\hat{R} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{S}] \text{ s.t. } (\hat{S} \xrightarrow{\hat{f}^{-1}} \hat{R} \xrightarrow{h} R \xrightarrow{f} S) : \text{正則}$$

と表される写像, および標点の忘却

$$\left( T(R \setminus B) \xrightarrow{h^*} T(\hat{R} \setminus h^{-1}(B)) \right) \mapsto \left( T(R) \xrightarrow{h_F^*} T(\hat{R}) \right) \text{ の合成からなる正則写像.}$$