

# Veech groups and Galois conjugacy of origamis

熊谷 駿 (東北大学・情報D3)\*

## 概 要

本講演では、講演者が得た非並進の場合を含む折り紙曲線の網羅的計算とガロア共役の考察について背景にある諸研究を交えて紹介する。本稿ではその補足をする。折り紙の自然な平坦構造のアフィン変形が定める曲面族（折り紙曲線）は数体上で定義された代数曲線としてモジュライ空間に埋め込まれる。ここで折り紙曲線とその上の折り紙それぞれのガロア共役の間に強い関係性があることを示す Möller の結果があり、これは絶対ガロア群  $G_{\mathbb{Q}}$  の “ $\widehat{GT}$ -relation” の別証明を導く。折り紙とその Veech 群の関係は折り紙・折り紙曲線それぞれの組み合わせ構造間の関係に対応し、重要な役割をもつ。

## 1. Dessin d'enfants

本稿では解析的有限な双曲的リーマン面を扱うものとする。

### 1.1. $G_{\mathbb{Q}}$ と dessin d'enfants

$\bar{\mathbb{Q}} = \{a \in \mathbb{C} \mid \exists P(x) \in \mathbb{Q}(x) \text{ s.t. } P(a) = 0\}$ ,  $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \{\sigma : \bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}} : \text{体同型}\}$  とする。 $\bar{\mathbb{Q}}$  上で定義された非特異な代数曲線 (resp. 非特異な代数曲線間の被覆写像) に対し、その定義多項式 (resp. 有理関数としての表示) の係数を一斉に写す形で  $G_{\mathbb{Q}}$  の作用 (ガロア作用) が定義される。 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  の作用で写り合う関係を  $\sigma$ -共役, ガロア共役とよぶ。本研究分野の大きな目的の一つは  $G_{\mathbb{Q}}$  がどのような群かを調べることである。

**命題 1 (Belyi の定理)** 非特異な代数曲線  $C$  が  $\bar{\mathbb{Q}}$  上で定義されるためには、これが高々三点を分岐値とする分岐被覆  $C \rightarrow P_{\mathbb{C}}^1$  (Belyi 射) をもつことが必要十分である。

とくにガロア作用の対象となる代数曲線は解析学的には “高々三点  $0, 1, \infty \in \hat{\mathbb{C}}$  を分岐値とする有理型関数  $\beta : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  を備えたコンパクトリーマン面  $X$ ” であると考えてよい。

**補題 2** 次数  $d$  の Belyi 対  $(X, \beta)$  は適当な同値関係の下、次のそれぞれと同一視される。(これらを dessin d'enfants, または単に dessin という。)

1. 連結な二部グラフの埋め込み  $\mathcal{G} = (\mathcal{V} = \mathcal{V}_\circ \sqcup \mathcal{V}_\bullet, \mathcal{E}) \hookrightarrow X$  で  $|\mathcal{E}| = d$  なるもの。
2. 自由群  $F_2 = \langle x, y \rangle$  の部分群  $H < F_2$  で指数が  $d$  のもの。
3. 準同型写像  $m : F_2 \rightarrow \mathfrak{S}_d$  で像  $G = \langle m(x), m(y) \rangle < \mathfrak{S}_d$  が推移的なもの。

注:  $(X, \beta)$  が与えられたとき、上記は  $\mathcal{V}_\circ = \beta^{-1}(0)$ ,  $\mathcal{V}_\bullet = \beta^{-1}(1)$ ,  $\mathcal{E} = \beta^{-1}((0, 1))$ ,  $H$  は  $\beta$  の非分岐領域  $X^* := \beta^{-1}(P_{\mathbb{C}}^{1*} \setminus \{0, 1, \infty\})$  の基本群を  $P_{\mathbb{C}}^{1*} \setminus \{0, 1, \infty\}$  の基本群  $F_2$  に埋め込んだもの、 $m$  は  $\beta$  のモノドロミー写像としてそれぞれ対応する。

第 64 回函数論シンポジウム講演予稿 (2021 年 10 月 31 日, オンライン)

講演者は日本学術振興会特別研究員 (DC2) であり、本研究は科研費 (課題番号:21J12260) の助成を受けたものである。本研究結果は東北大学サイバーサイエンスセンターの計算機利用による成果を含む。

キーワード: flat surface, Teichmüller disk, origami, dessin d'enfants, Galois action

\* 〒980 - 8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6 番 3 号 09 東北大学 情報科学研究科

e-mail: shun.kumagai.p5@dc.tohoku.ac.jp/syun-kuma@jcom.zaq.ne.jp

web: <https://github.com/ShunKumagai>

**補題 3** dessin において埋め込み先の曲面の種数  $g$ , Belyi 射の次数  $d$ , Belyi 射の分岐指数のリスト (**valency list**)  $C = (m_1^0, m_2^0 \dots | m_1^1, m_2^1 \dots | m_1^\infty, m_2^\infty, \dots)$  はガロア作用の下で不変である.

**例** 二つの楕円曲線  $C_\pm : y^2 = x(x-1)(x \pm \sqrt{2})$  それぞれの上の関数  $\beta(x, y) = 4x^{-2}(1 - x^{-2})$  は Belyi 射であり,  $(\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}) \in G_{\mathbb{Q}}$  によって互いに写り合う. 図に示すそれらの dessin は valency list  $(1^2, 2, 4 | 2^2, 4 | 8)^\dagger$  をはじめとした補題 3 の不変量を共有する.

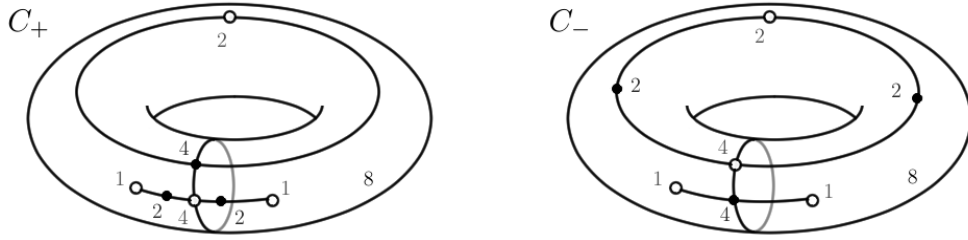


図 1:  $(C_\pm, \beta)$  の定める dessin : 各数字は分岐点周りの valency を表す.

このようにガロア作用は被覆を局所的な分岐状況のみ保って作り変えるように表れる. 関連して, 上記のような基本的なガロア不変量では区別できない上でガロア共役とならないような dessin の例 (Schneps [13]), よい分岐状況の被覆を通じて新たなガロア不変量を得る試み (Wood [17]) などがある. 一方で, dessin のガロア共役を必要十分に特徴づけるような dessin の “完全不変量” は未だ知られていない.

### 1.2. ガロア共役

$\sqrt{-1} \mapsto -\sqrt{-1}$  や  $\sqrt[3]{1} \mapsto (\sqrt[3]{1})^2$  などの  $G_{\mathbb{Q}}$  の元が複素共役として表れたものは代数曲線の鏡像対応を導く. そのため dessin が鏡像と一致しないならばこの種のガロア共役が非自明なものとして存在し, 特に有理数体  $\mathbb{Q}$  上では定義されることが分かる. 逆に dessin の鏡像対称性はこれが実代数体  $\mathbb{R}$  上で定義されることを意味する.

さらなる情報を得るためには dessin を与える代数方程式, Belyi 射の表示の特定が必要となる. その具体的な方法は角皆 [15] により纏められており, ここでは概要の紹介に留める. 例えば種数 0 の場合, Belyi 射の有理関数表示を求めるため valency list に応じて

$$\beta(x) := A \frac{(x - a_1)^{i_1} \dots (x - a_I)^{i_I}}{(x - b_1)^{j_1} \dots (x - b_J)^{j_J}} = 1 + A(x - c_1)^{k_1} \dots (x - c_K)^{k_K}$$

などとおき, 得られる連立方程式を解いて定義体を求める. ここでは正規化や微分によって文字を消去していくが, とくに  $\infty$  が完全分岐となる場合には Schneps [13] による標準的といえる手法が整備されている.

### 1.3. $\widehat{GT}$ -relation

dessin へのガロア作用の研究から得られた結果に “ $\widehat{GT}$ -relation” がある.

$\mathcal{N} = \{N \triangleleft F_2 : \text{finite index}\} \sim$  Belyi 射が正規被覆であるような dessin の全体  
 $\widehat{F}_2 = \{(g_N N)_{N \in \mathcal{N}} \mid g_N \in F_2, g_N N = g_{N'} N \text{ for any } N, N' \in \mathcal{N} \text{ with } N > N'\}$

<sup>†</sup> valency list においては  $m^n$  と書いて重複度  $m$  の点が  $n$  個あることを指すものとする.

として無限個の dessin と射有限群  $\hat{F}_2$  が関連付けられるが, ここで dessin に対する  $G_{\mathbb{Q}}$ -作用を次のような位置づけをもつ **Grothendieck-Teichmüller 群**  $\widehat{GT}$  と比較するものである. (参考: Herrlich, Schmithüsen [6])

$\widehat{GT} = \{(\lambda, f) \in \hat{\mathbb{Z}}^\times \times \hat{F}_2 \text{ with conditions related to the profinite MCGs } \hat{\Gamma}_{0,4}, \hat{\Gamma}_{0,5} [14]\}$   
 $\hookrightarrow \text{Aut}(\hat{F}_2)$  by  $(\lambda, f) : (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto (\hat{x}^\lambda, f^{-1}\hat{y}^\lambda f)$  where  $\hat{x} = (xN)_{N \in \mathbb{N}}, \hat{y} = (yN)_{N \in \mathbb{N}}$

$P_{\mathbb{C}}^1$  の向付き基点  $\vec{u} = 0\vec{1}$  を固定し, 各 Belyi 対  $(X, \beta)$  と各  $v \in \beta^{-1}(0)$  について考える. 有理型函数  $f \in \bar{\mathbb{Q}}(X)$  から局所的 Puiseux 級数表示  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{\frac{n}{m}}$  ( $m$ : valency at  $v$ ) を返す写像  $\varphi$  は  $v$  周りの  $m$  方向分存在し,  $x \in F_2$  はそれらを  $\zeta_m = \sqrt[m]{1}$  だけ並び替える.  $\vec{u}$  周りの Puiseux 級数の全体を  $P_{\vec{u}}$  で表すものとする. いま  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  に対し,

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\mathbb{Q}}(X) & \xhookrightarrow{\varphi} & P_{\vec{u}} & & P_{\vec{u}} \xleftarrow{x(\varphi)} \bar{\mathbb{Q}}(X) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ f & \longmapsto & \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{\frac{n}{m}} & \xrightarrow{x} & \sum_{n=k}^{\infty} a_n \zeta_m^n z^{\frac{n}{m}} \longleftarrow f \\ & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ f^\sigma & \longmapsto & \sum_{n=k}^{\infty} \sigma(a_n) z^{\frac{n}{m}} & \xrightarrow{\sigma \cdot x} & \sum_{n=k}^{\infty} \sigma(a_n) \sigma(\zeta_m)^n z^{\frac{n}{m}} \longleftarrow f^\sigma \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \bar{\mathbb{Q}}(X^\sigma) & \xhookrightarrow{\varphi^\sigma} & P_{\vec{u}}^\sigma & & P_{\vec{u}}^\sigma \xleftarrow{\sigma \cdot x(\varphi^\sigma)} \bar{\mathbb{Q}}(X^\sigma) \end{array}$$

上記のように  $\sigma$ -共役における並び替え  $\sigma \cdot x$  の表示を得られる. さらにある  $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}^\times$  に対し  $\sigma(\zeta_m) = \zeta_m^{\lambda_\sigma}$  であることから  $\sigma \cdot x = x^{\lambda_\sigma}$  がしたがう.  $y \in F_2$  について同様の考察をすると,  $1 \in P_{\mathbb{C}}^1$  周りの閉曲線を  $\vec{u}$  を基点に扱う都合上 conjugator  $f_\sigma \in F_2$  が現れて  $\sigma \cdot y = f_\sigma^{-1} y^{\lambda_\sigma} f_\sigma$  が得られる. とくに  $\sigma \cdot (\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}^\lambda, f^{-1}\hat{y}^\lambda f)$  の形となるが, 伊原 [8] らはより詳細に, この表示が  $\widehat{GT}$  の条件を満たすことを確かめて次を示した.

**命題 4 ( $\widehat{GT}$ -relation)**  $G_{\mathbb{Q}}$  は  $\widehat{GT}$  の部分群として  $\text{Aut}(\hat{F}_2)$  に埋め込まれる.

## 2. 折り紙

### 2.1. 平坦曲面

**定義 5** 任意の座標変換が  $z \mapsto \pm z + c$  ( $c \in \mathbb{C}$ ) の形からなる座標系  $\mu$  を備えた曲面  $(R, \mu)$  を **平坦曲面** という. 任意の座標変換が  $z \mapsto z + c$  ( $c \in \mathbb{C}$ ) の形からなる部分座標系がとれるとき **並進**, そうでないとき **非並進** の平坦曲面とよぶものとする.

二つの平坦曲面の間の同相写像であって至る所局所的に  $z \mapsto \pm z + c$  ( $c \in \mathbb{C}$ ) の形のものを平坦曲面の同型写像という.

平坦曲面は座標変換が  $z \mapsto z^{\frac{k}{2}+1}$  ( $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ : 次数) となる形で拡張される特異点をもつ. 種数  $g$  で有限面積の並進, 非並進の平坦曲面の同型類全体の空間をそれぞれ  $\mathcal{A}_g, \mathcal{Q}_g$  とおくと, 全特異点の次数  $k_1, \dots, k_n$  を定めたそれぞれの部分空間<sup>‡</sup> (**stratum**)  $\mathcal{A}_g(k_1, \dots, k_n), \mathcal{Q}_g(k_1, \dots, k_n)$  への次の形の stratification をもつ.

$$\mathcal{A}_g = \bigsqcup_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ \sum k_i = 4g-4}} \mathcal{A}_g(k_1, \dots, k_n), \quad \mathcal{Q}_g = \bigsqcup_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ k_i \geq -1, \neq 0 \\ \sum k_i = 4g-4}} \mathcal{Q}_g(k_1, \dots, k_n) \quad \cdots (*)$$

<sup>‡</sup> stratification(\*) に属する stratum  $\mathcal{A}_g(k_1, \dots, k_n), \mathcal{Q}_g(k_1, \dots, k_n)$  はそれぞれ  $(2g-1+n)$  次元,  $(2g-2+n)$  次元のオービフォールドである [2].

**定義 6**  $(R, \mu)$  を平坦曲面とする.  $(R, \mu)$  上の自己同相写像が至る所で局所的にアフィンであるときこれを**アフィン写像**といい, その全体を  $\text{Aff}^+(R, \mu)$  とかく. 平坦曲面  $(R, \mu)$  のアフィン写像の Jacobi 行列<sup>§</sup>全体が与える群  $\Gamma(R, \mu)$  を  $(R, \mu)$  の **Veech 群** という.

平坦曲面  $(R, \mu)$  と  $t \in \mathbb{H}$  に対し  $\mu$  を  $x + iy \mapsto x + ty$  で変形した座標系を  $\mu_t$  とし,  $(R, \mu)$  と  $(R, \mu_t)$  の間の自然な写像を  $f_t$  とすれば, これは至る所局所的にアフィンな擬等角写像である. このとき  $R$  の Teichmüller 空間  $T(R)$  への写像  $\hat{i}_{(R, \mu)} : \mathbb{H} \rightarrow T(R) : t \mapsto [R, f_t]$  は双曲距離と Teichmüller 距離に関して等長な埋め込みを与える.

ここで円盤  $\hat{i}_{(R, \mu)}(\mathbb{H}) \subset T(R)$  に作用する最大の  $\text{Mod}(R)$ -部分群が  $\text{Aff}^+(R, \mu)$  であり, その作用は Jacobi 行列の Möbius 変換として表れる. とくに  $\hat{i}_{(R, \mu)}(\mathbb{H})$  をモジュライ空間  $M(R)$  に射影した像  $C(R, \mu)$  は  $\mathbb{H}/\Gamma(R, \mu)$  の鏡像に同型なオービフォールドになる.  $\mathbb{H}/\Gamma(R, \mu)$  が双曲面積有限となるときのこれは代数曲線とみなせ, そのような曲面族のことを **Teichmüller 曲線** とよぶ. (参考: Earle, Gardiner [3])

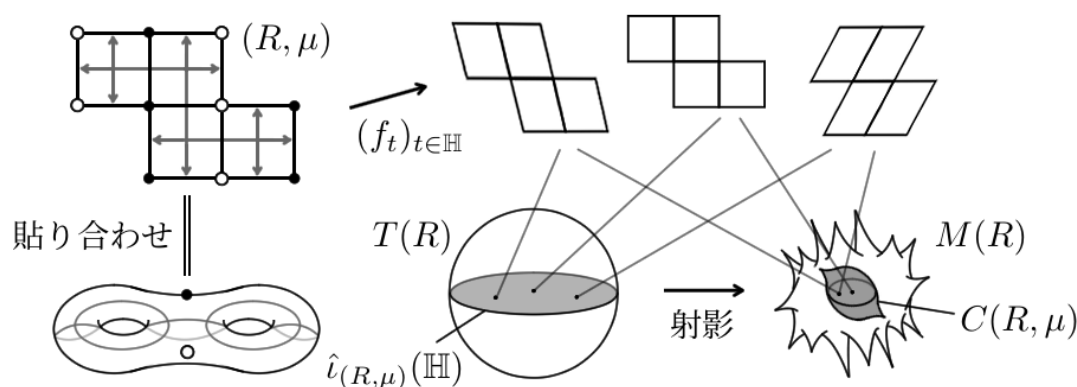


図 2: 平坦曲面  $(R, \mu)$  のアフィン変形が定める曲面族

## 2.2. 折り紙の定義と性質

**定義 7** 単位正方形セルの有限枚のコピーを辺同士で貼り合わせて得られる連結な閉曲面であって, 単位正方形の自然な座標をもって平坦曲面となるものを**折り紙**という.

図 3 に示すように枚数  $d$  の折り紙は valency list  $(2^d | 2^d | 2^d | *)$  <sup>¶</sup> をもつ  $P_C^1$  の  $2d$  葉の被覆  $p_0$  を定め, また並進折り紙は単位正方形トーラス  $E$  の一点分岐被覆  $p_1$  も定める. これらの被覆から誘導される折り紙上の dessin <sup>||</sup> は valency list  $(4^d | 2^{2d} | *)$  をもち, そのガロア不変性は stratum の不変性に帰着される.

**補題 8** セル枚数  $d$  の並進折り紙は適当な同値関係の下, 次のそれぞれに同一視される.

1. 各辺が  $x, y$  にラベル分けされた連結な有向グラフ  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  ( $|\mathcal{V}| = d$ ) であって, 各頂点に対してラベル  $x, y$  の辺が一本ずつ出て, 一本ずつ向かっているもの.
2. 自由群  $F_2 = \langle x, y \rangle$  の部分群  $H < F_2$  で指数が  $d$  のもの.
3. 準同型写像  $m : F_2 \rightarrow \mathfrak{S}_d$  で像  $G = \langle m(x), m(y) \rangle < \mathfrak{S}_d$  が推移的なもの.

<sup>§</sup> 座標変換の条件よりアフィン写像の Jacobi 行列は並進の場合は一定, 非並進の場合は高々符号を除き一定である. 並進の場合は  $SL(2, \mathbb{R})$ , 非並進の場合は  $PSL(2, \mathbb{R})$  の元としてそれぞれ定義する.

<sup>¶</sup> この被覆は四点分岐であり Belyi 射ではない. なお,  $*$  は特異点の次数に対応した値をとる.

<sup>||</sup> 単位正方形トーラスの楕円対合の商曲線:  $y = 4x^3 - x$  上の Belyi 射  $\beta_0(x) = 4x^2$  を考える.

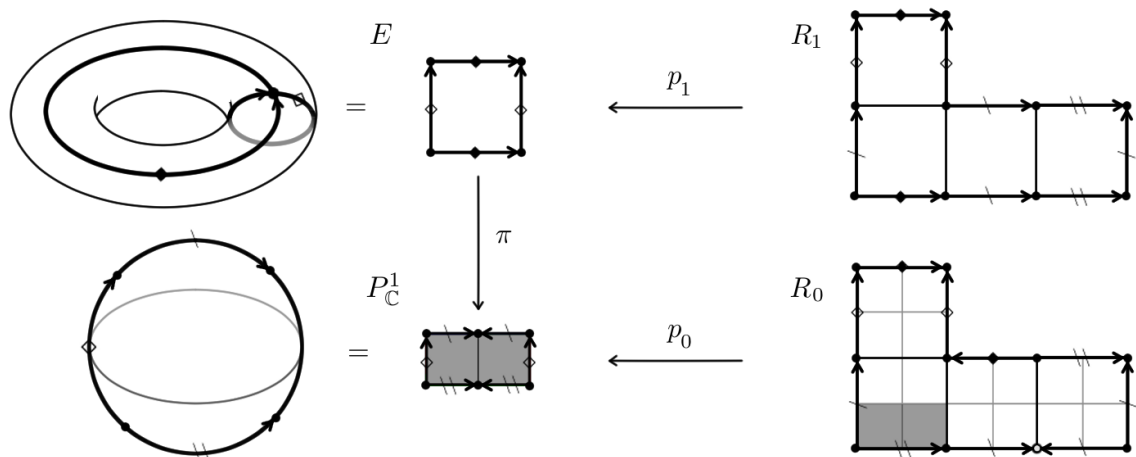


図 3: (例) 並進折り紙  $R_1$  と非並進折り紙  $R_0$  : 同じ記号の各辺を, 矢印を合わせるようにして互いに貼り合わせるものとする. 同じ向き (resp. 逆の向き) の矢印の貼り合わせでは  $z \mapsto z + c$  (resp.  $z \mapsto -z + c$ ) の形の座標変換が現れる.

平坦構造, アフィン写像の普遍被覆面への持ち上げを考えれば次のことがわかる.

**補題 9** 折り紙  $\mathcal{O}$  の Veech 群  $\Gamma(\mathcal{O})$  は  $PSL(2, \mathbb{Z})$  の有限指数の部分群である.

とくに被覆  $\beta_{\mathcal{O}} : \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$  が Belyi 射であることから折り紙は  $\bar{\mathbb{Q}}$  上で定義された Teichmüller 曲線を与える. これを **折り紙曲線** といい, 折り紙  $\mathcal{O}$  が誘導する折り紙曲線を  $C(\mathcal{O})$  とかく.

$\bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  とおく. 図 4 のように  $\beta_{\mathcal{O}}$  の分岐点  $i, \rho = e^{\frac{i\pi}{3}}, \infty \in \overline{\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})}$  周りのモノドロミーは  $\bar{S}, \bar{S}\bar{T}^{-1}, \bar{T} \in PSL(2, \mathbb{Z})$  の  $\Gamma(\mathcal{O}) \setminus PSL(2, \mathbb{Z})$  に対する右作用にそれぞれ対応する. 補題 2 より Veech 群  $\Gamma(\mathcal{O}) < PSL(2, \mathbb{Z})$  が  $C(\mathcal{O})$  の dessin を与える.

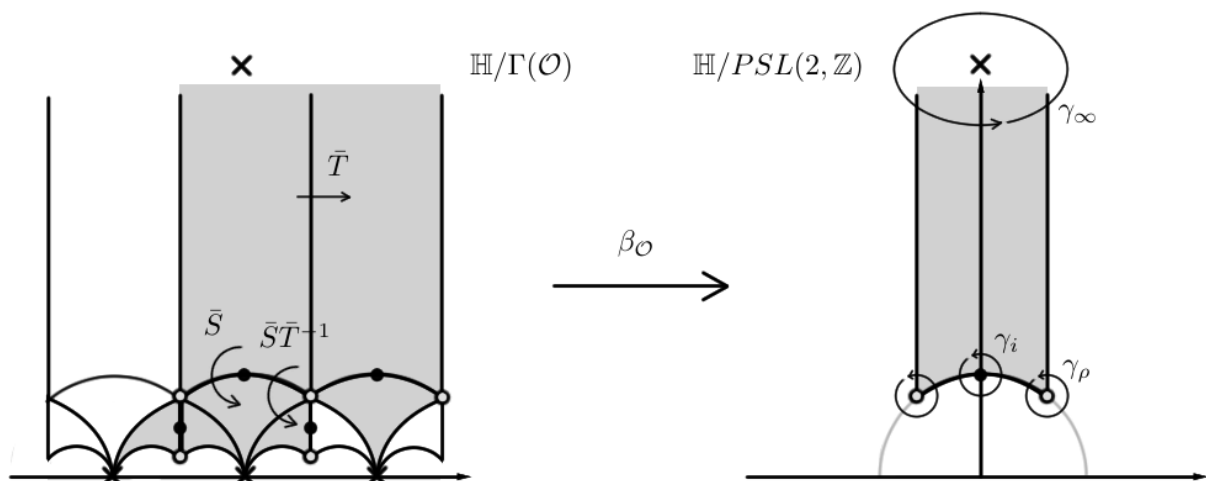


図 4:  $\beta_{\mathcal{O}}$  の分岐点  $z = i, \rho, \infty \in \overline{\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})}$  周りの閉曲線  $\gamma_z$  の  $\beta_{\mathcal{O}}$  による持ち上げは  $\beta_{\mathcal{O}}$  のシートの集合  $\Gamma(\mathcal{O}) \setminus PSL(2, \mathbb{Z})$  の  $\bar{S}, \bar{S}\bar{T}^{-1}, \bar{T}$  の右作用による並び替えを与える.

### 2.3. 折り紙とその Veech 群の関係性

2.2 節で述べた通り, 折り紙曲線  $C(\mathcal{O})$  の dessin は Veech 群  $\Gamma(\mathcal{O}) < PSL(2, \mathbb{Z})$  に対応する. 2.4 節では折り紙・折り紙曲線それぞれのガロア共役の関連性について扱うが, 両者の dessin の関係は折り紙と Veech 群との関係に対応すると考えられる.

Veech [16] が非自明な Veech 群の例を与えて以降, 平坦曲面の Veech 群を求める手法についての研究が行われてきた. ここではアフィン写像の下で不変な対象が重要な役割をもち, 例えば平坦曲面の自然な計量に関する **Delaunay 三角形分割** や **Voronoi staple**, あるいは補題 8 に挙げた各対象がこれに該当する. 一般の平坦曲面に対し, Delaunay 三角形分割を用いた手法 [1] では円盤  $\hat{l}_{(R, \mu)}(\mathbb{H})$  上の “近い” 点同士の関係をその Whitehead move の対応として確認でき, Voronoi staple を用いた手法 [5] は Veech 群に関する考察を平面幾何の数値計算に帰着して扱えるといった特徴をそれぞれ持つ.

**命題 10 (Schmithüsen[12])**  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とおく.  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}, S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^{-1} \end{pmatrix}$  は埋め込み  $SL(2, \mathbb{Z}) = \langle T, S \rangle \hookrightarrow \text{Aut}(F_2)$  を定める. さらに, 補題 8 において  $H < F_2$  の同値類  $[H]$  に対応する並進折り紙の Veech 群は  $\text{Stab}_{SL(2, \mathbb{Z})}[H]$  である.

**命題 11 (Ellenberg, McReynolds[4])** モジュラー群  $\Gamma(2) < SL(2, \mathbb{Z})$  の有限指数の部分群であって  $\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$  を含むものは並進折り紙の Veech 群に対応する.

### 2.4. 折り紙へのガロア作用

**命題 12 (Möller[10])**  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  とし,  $\mathcal{O}$  を種数  $g$  の折り紙とする. このとき  $\mathcal{O}^\sigma$  は再び折り紙であって, 折り紙曲線  $C(\mathcal{O})$  と  $C(\mathcal{O}^\sigma)$  のモジュライ空間  $M_g$  への埋込みを  $\iota, \iota_\sigma$  とすると  $\iota^\sigma(C(\mathcal{O})^\sigma) = \iota_\sigma(C(\mathcal{O}^\sigma))$  が成り立つ\*\*.

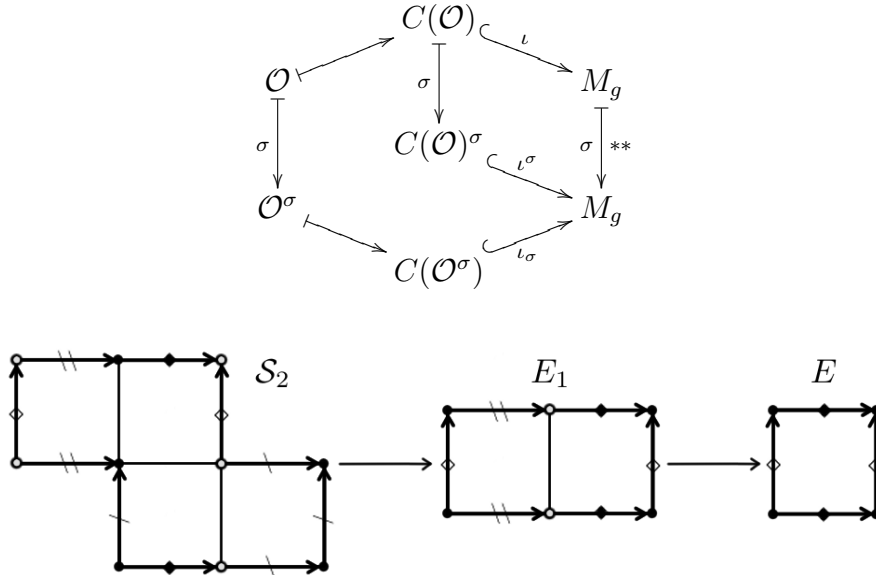


図 5: two-steps origami  $\mathcal{S}_2$

“two-steps origami”  $\mathcal{S}_2 : G = \langle (1\ 2)(3\ 4), (2\ 3) \rangle$  (図 5 に示した並進折り紙) を考える. 命題 10 によれば  $\Gamma(\mathcal{S}_2)$  はモジュラー群  $\Gamma(2)$  で,  $C(\mathcal{S}_2) \sim \mathbb{H}/\Gamma(2) = P_{\mathbb{C}}^1$  (6-sheeted) である.

\*\*  $M_g$  に入る代数的構造に関し,  $\iota$  に対するものも含めて  $G_{\mathbb{Q}}$  の作用が定義される [11].

図5の被覆  $\mathcal{S}_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E$  に関して  $\mathcal{S}_2$  は  $E_1, E$  の楕円対合と可換な超楕円対合をもち、これに関する考察から  $C(\mathcal{S}_2)$  は超楕円曲線  $y^2 = ((4x(x-1))^2 - (1-t))(4x(x-1)-1)$  ( $t \in P_{\mathbb{C}}^1$ ) からなる族、という表式が得られる。ここでオービフォールド  $C(\mathcal{S}_2)$  の特異点は3つのカuspであり、 $\mathcal{S}_2$  の自己同型に関する  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  の作用の商の形で与えられる。

固定した  $P_{\mathbb{C}}^1$  の向付き基点  $\vec{u} = 0\vec{1}$  について  $\pi_1(C(\mathcal{S}_2), \vec{u}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes F_2$  と分割ができて、これに関して1.3節で扱ったような  $\widehat{GT}$  の作用を考えられる。また  $\widehat{GT}$  はその定義による profinite MCG への作用からモジュライ空間の Birman-Hilden 表現を通じて  $\pi_1(M_{2,0}) = \hat{\Gamma}_{2,0}$  への作用をもつ。ここで Möller は  $\widehat{GT}$  の元が折り紙曲線の埋め込みが導く準同型  $\iota_* : \pi_1(C(\mathcal{S}_2), \vec{u}) \rightarrow \pi_1(M_{2,0}, \vec{\cdot})$  に両立するための条件を調べ、それが中に  $G_{\mathbb{Q}}$  を埋め込む  $\widehat{GT}$ -部分群を定めることを示した。このようにして折り紙  $\mathcal{S}_2$  へのガロア作用の検証から  $\widehat{GT}$ -relation の別証明が与えられた。(参考：Möller[10], Schneps[14])

命題12は折り紙と埋込み折り紙曲線それぞれのガロア共役が互いにある程度決定づける関係にあることを意味する。これについて以下の観察ができる。

**観察 13** (参考：定理21)  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  に対し、

- 例えば二つの折り紙が  $\sigma$ -共役ならばそれぞれの折り紙曲線は  $\sigma$ -共役である上、それぞれの折り紙曲線に属する全ての折り紙に関して  $\sigma$ -共役の一対一対応が存在する。さらにこの一対一対応は折り紙曲線の  $\sigma$ -共役が導く点の対応とも (自己同型を法として) 両立する。
- 一方で、一つの折り紙曲線の dessin が  $\sigma$  について閉じていても属する折り紙の間で非自明な  $\sigma$ -共役が存在することもあるれば、モジュライ空間への埋め込み  $\iota$  について非自明な  $\sigma$ -共役が存在して同じ形の、別の折り紙曲線と写り合うこともある。同様に折り紙曲線に非自明な  $\sigma$ -共役があると分かった場合にも同じ dessin をもつ折り紙曲線が  $\iota$  が異なるものとして複数存在することも考えられる。

なお dessin において、それを折り紙曲線として実現する折り紙の存在やその枚数、Veech 群の部分群指数、並進かどうかといった情報がガロア作用の不変量であることも分かる。

### 3. 主結果

#### 3.1. 一般の折り紙の定式化

非並進を含む一般の折り紙を扱うにあたっては次の定式化を用いる。

**補題 14** 一般に、折り紙は並進折り紙  $(x, y)$  と符号列  $\varepsilon$  の組から定まる並進折り紙  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (x^{\text{sign}}, \varepsilon y^{\varepsilon} \varepsilon(y^{\varepsilon}))^{\dagger\dagger}$  を標準二重被覆とする平坦曲面として得られる。また、 $\theta : (x, y, \varepsilon) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は平坦曲面の同型を法として像の上への一対一対応である。

これは図6のような構成に対応するものである。同型類は次のように判別できる。

**補題 15** 折り紙  $(x_j, y_j, \varepsilon_j)$  ( $j = 1, 2$ ) が平坦曲面として同型であるためには、ある並び替え  $\sigma$  と符号列  $\delta$  が存在して  $\delta = \delta \circ x_1, x_2 = \sigma^{\#} x_1^{\delta}, y_2 = \sigma^{\#} y_1^{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \circ \sigma \cdot \delta}$  をみたし、かつ  $E \cdot E(y^E) = 1$  ( $E := \varepsilon_1 \circ \sigma^{-1} \cdot \varepsilon_2 \cdot \delta \circ \sigma^{-1}$ ) であることが必要かつ十分である。

<sup>††</sup> 符号列とは折り紙の各セル番号に対する符号の割当てを指す。また ' $y^{\varepsilon}$ ' はセル番号ごとの符号に応じて  $y, y^{-1}$  を選んで写す写像で、一般には対称群の元にならない。

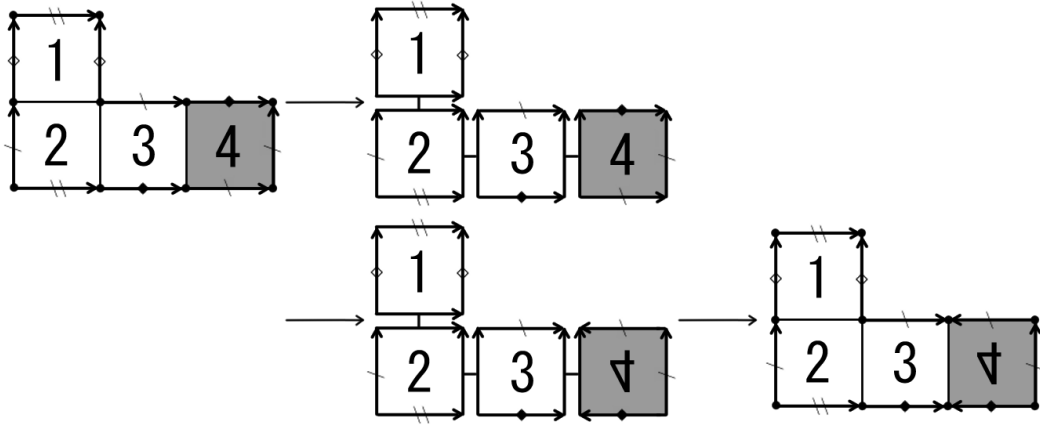


図 6: (例) 折り紙  $(G = \langle (2\ 3\ 4), (1\ 2)(3\ 4) \rangle, (+, +, +, -))$  の構成:  $G$  に対応する並進折り紙 (左上) を切り離し, 負符号の正方形セルに鏡像反転を施す. これを平坦曲面になるよう, 辺のペアリングを変えずに貼り直すことで非並進折り紙 (右下) を得る.

**定理 16**  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  とする. ある並び替え  $\sigma_T, \sigma_S$  があって, 折り紙  $(x, y, \varepsilon)$  の Veech 群は  $A(x, y, \varepsilon) := \theta^{-1}(\sigma_A^* \gamma_A^{-1}(\theta(x, y, \varepsilon)))$  ( $A = T, S$ ) が定める  $PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle T, S \rangle$  の作用の固定群である.

各正方形の枚数ごとに三つ組  $(x, y, \varepsilon)$  を列挙し, 同型類に分類したのち上記の作用による軌道分解を求めることで折り紙の Veech 群を計算する. この手法は Veech 群計算の先行研究に対し, 新たに非並進の場合を含んだ上でより具体的, 網羅的な結果を得ることに特化した改良にあたる.

**系 17** 折り紙  $\mathcal{D} : (x, y, \varepsilon) = ((1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 2, 5, 6, 3, 4), (+, -, +, -, +, -))$  は Veech 群が最大の  $PSL(2, \mathbb{Z})$  となる最小の非自明な折り紙で, 非並進である.

### 3.2. 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

一般に, 平坦曲面  $(R, \mu)$  は二方向  $(\theta_1, \theta_2)$  への (測地的) 円柱分解を認めると折り紙状のセル分解  $^{\sharp\sharp}P((R, \mu), (\theta_1, \theta_2))$  をもつ. この情報は平坦曲面の同型類を定めるのに十分であり, 次のように Veech 群の元を判定できる. 定理 16 はこのことに基づく.

**補題 18** 平坦曲面  $(R, \mu)$  が 2 方向  $(\theta_1, \theta_2)$  への円柱分解をもつとする. このとき  $A \in PSL(2, \mathbb{R})$  が  $\Gamma(R, \mu)$  に属するためには  $(R, \mu)$  が 2 方向  $(A\theta_1, A\theta_2)$  への円柱分解をもち, かつ  $P((R, \mu), (\theta_1, \theta_2)) = P((R, \mu), (A\theta_1, A\theta_2))$  なることが必要かつ十分である.

2 方向  $(\theta_1, \theta_2)$  への円柱分解の存在は平坦曲面の特異点でのみ分岐する被覆を通じ共有される. そのような被覆  $f : (\hat{R}, \nu = f_*\mu) \rightarrow (R, \mu)$  において上側で同一のセル分解は下側で再び同一のセル分解に射影されるため  $P((\hat{R}, \nu), (\theta_1, \theta_2)) = P((\hat{R}, \nu), (A\theta_1, A\theta_2)) \Rightarrow P((R, \mu), (\theta_1, \theta_2)) = P((R, \mu), (A\theta_1, A\theta_2))$  であり, とくに  $\Gamma(\hat{R}, \nu) < \Gamma(R, \mu)$  が成り立つ.

**定理 19**  $f : (\hat{R}, \nu = f_*\mu) \rightarrow (R, \mu)$  を 2 方向  $(\theta_1, \theta_2)$  への円柱分解を有する 2 つの平坦曲面間の有限被覆で  $(R, \mu)$  の特異点でのみ分岐するものとし,  $\pi_1(R^*)$  の生成系  $\mathcal{F}$  を固定

<sup>††</sup> セルの隣接状況を示す折り紙  $(x, y, \varepsilon)$ , セルのモジュライ  $(m_1, m_2, \dots)$  と方向  $(\theta_1, \theta_2)$  の情報からなる. モジュライ・方向を変えないようなセルの番号換えて写り合うものを同一のセル分解とみなす.



する. このとき  $\mathcal{M} = (\text{Sym}(\hat{R}/R))^{\mathcal{F}}$  に対して定義される, ある同値関係と  $\Gamma(R, \mu)$  の作用について  $f$  の “モノドロミー”  $\tau_f \in \mathcal{M}$  を用いて  $\Gamma(\hat{R}, \nu) = \text{Stab}_{\Gamma(R, \mu)}[\tau_f]$  とかける.

**系 20**  $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{D}$  を系 17 の折り紙  $\mathcal{D}$  の 6 頂点のみで分岐する被覆とする. このとき  $\tau_f$  は  $(\text{Sym}(\mathcal{O}/\mathcal{D}))^7$  をわたり, これに対する  $\Gamma(\mathcal{D}) = PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle \bar{T}, \bar{S} \rangle$  の作用:

$$\begin{aligned}\bar{T}(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) &= (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_0^{-1}\tau_6^{-1}, \tau_4, \tau_5) \\ \bar{S}(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) &= (\tau_2^{-1}\tau_6\tau_3^{-1}\tau_5^{-1}\tau_1^{-1}\tau_4, \tau_2, \tau_3, \tau_1, \tau_3\tau_6^{-1}\tau_2, \tau_5\tau_3\tau_6^{-1}, \tau_1\tau_5\tau_3\tau_0)\end{aligned}$$

に対して  $\tau_f$  の  $\langle (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) \rangle \times \text{Sym}(\mathcal{O}/\mathcal{D})$  に関する同値類の固定群が  $\Gamma(\mathcal{O})$  である.

### 3.3. 折り紙の折り紙曲線への分類

3.1 節に関する計算結果として次のようなガロア軌道の分類が得られた.

**定理 21** セル枚数 7 以下の折り紙から誘導される折り紙曲線は, 以下の表の 21 組 (うち枚数 6 が 13 組, 枚数 7 が 8 組) を除いてすべてガロア作用の不変量で区別される.

No.	stratum	指数	$C(\mathcal{O})$ の valency list	$C(\mathcal{O})$ の数と関係
6-1	$\mathcal{A}_3(0, 8)$	15	$(3^5 \mid 2^7, 1 \mid 5, 4, 3^2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-2	$\mathcal{Q}_1(-1^2, 0^3, 2)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-3	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 0, 6)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-4	$\mathcal{Q}_2(0^2, 2^2)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 3$ (同一)
6-5	$\mathcal{Q}_3(2, 6)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-6	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 3^2)$	15	$(3^5 \mid 2^7, 1 \mid 6, 5, 3, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
6-7	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 3^2)$	15	$(3^5 \mid 2^7, 1 \mid 5, 4, 3^2)$	鏡像対称 $\times 2$ , $\iota$ が鏡像共役
6-8	$\mathcal{Q}_3(-1, 9)$	22	$(3^7, 1 \mid 2^{11} \mid 6, 5, 4^2, 3)$	鏡像対称 $\times 2$ , $\iota$ が鏡像共役
6-9	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 0, 6)$	24	$(3^8 \mid 2^{12} \mid 6, 5, 4^2, 3, 2)$	鏡像共役 $\times 2$
6-10	$\mathcal{Q}_2(-1^3, 7)$	27	$(3^9 \mid 2^{13}, 1 \mid 6^2, 5, 4, 3^2)$	鏡像共役 $\times 2$ , 鏡像閉 $\times 1$
6-11	$\mathcal{Q}_2(-1, 0, 1, 4)$	36	$(3^{12} \mid 2^{18} \mid 6^2, 5^2, 4^2, 3^2)$	鏡像共役 $\times 2$ , 鏡像閉 $\times 1$
6-12	$\mathcal{Q}_3(1, 7)$	54	$(3^{18} \mid 2^{27} \mid 6^4, 5^3, 4^3, 3)$	鏡像共役 $\times 2$ , 鏡像閉 $\times 1$
6-13	$\mathcal{Q}_3(-1, 9)$	66	$(3^{22} \mid 2^{33} \mid 6^6, 5^3, 4^3, 3)$	鏡像共役 $\times 2 \times 2$ 組

No.	stratum	指数	$C(\mathcal{O})$ の valency list	$C(\mathcal{O})$ の数と関係
7-1	$\mathcal{A}_4(12)$	7	$(3^2, 1 \mid 2^3, 1 \mid 4, 3)$	鏡像対称 $\times 2$ , $\iota$ が鏡像共役
7-2	$\mathcal{A}_3(0, 2, 6)$	16	$(3^5, 1 \mid 2^8 \mid 7, 4, 3, 2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-3	$\mathcal{A}_4(12)$	21	$(3^7 \mid 2^{11} \mid 6, 5, 4, 3^2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-4	$\mathcal{A}_4(12)$	42	$(3^{14} \mid 2^{21} \mid 7^2, 5^2, 4^3, 3^2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-5	$\mathcal{A}_3(0, 2, 6)$	48	$(3^{16} \mid 2^{24} \mid 7^2, 6, 5^2, 4^3, 3^2)$	鏡像共役 $\times 2$
7-6	$\mathcal{Q}_2(-1, 1^3, 2)$	16	$(3^5, 1 \mid 2^8 \mid 7, 6, 2, 1)$	鏡像共役 $\times 2$
7-7	$\mathcal{Q}_4(12)$	28	$(3^9, 1 \mid 2^{14} \mid 7^2, 6, 3^2, 2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-8	$\mathcal{Q}_3(-1^2, 10)$	36	$(3^{12} \mid 2^{18} \mid 7^3, 6, 3^2, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)

**注意** stratum, 指数  $[PSL(2, \mathbb{Z}) : \Gamma(O)]$ ,  $C(O)$  の valency list はガロア作用の不変量で, 各行はこれらを共有する折り紙曲線の分類を表す. 1.2節で述べたように鏡像共役のものに限ってはガロア共役が確定しているが, その他については確かめられていない. また “ $\iota$  が鏡像共役” となっているものは観察 13 で述べた, 埋め込み  $\iota : C(O) \hookrightarrow M_g$  に関するガロア共役として非自明なものが確認できた例である.

## 参考文献

- [1] Bowman, J.: Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes, Ser.* **10**, 113–129 (2010)
- [2] Bainbridge, M., Chen, D., Gendron, Q., Grushevsky, S., Möller, M.: Strata of  $k$ -differentials. *Algebr. Geom.* **6**, no.2, 196–233 (2019)
- [3] Earle, C. J., Gardiner, F. P.: Teichmüller disks and Veech’s  $\mathcal{F}$ -Structures. *Contemp. Math.* **201**, 165–189 (1997)
- [4] Ellenberg, J., McReynolds, D. B.: Arithmetic Veech sublattices of  $SL(2, \mathbb{Z})$ . *Duke Math. J.* **161**, no. 3, 415–429 (2012)
- [5] Edwards, B., Sanderson, T., Schmidt, T.: Computing Veech groups. *arXiv.2012.12444* (2021)
- [6] Herrlich, F., Schmithüsen, G.: Dessins d’enfants and origami curves. *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, **13**, 767–809 (2009)
- [7] Herrlich, F., Schmithüsen, G.: A comb of origami curves in  $M_3$ . *Geom. Dedicata*, **124**, 69–94 (2007)
- [8] Ihara, Y.: On the embeddings of  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  into  $\widehat{GT}$ . *The Grothendieck Theory of Dessins d’Enfants*, *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **200**, 289–306 (1994)
- [9] Kumagai, S.: An algorithm for classifying origamis into components of Teichmüller curves. *arXiv.2006.00905* (2021)
- [10] Möller, M.: Teichmüller curves, Galois actions and  $\widehat{GT}$ -relations. *Math. Nachr.* **278**, no.9, 1061–1077 (2005)
- [11] Nisbach, F.: The Galois action on Origami curves and a special class of Origamis. KIT, PhD. thesis (2011) [url:http://digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/1000025252](http://digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/1000025252)
- [12] Schmithüsen, G.: An algorithm for finding the Veech group of an origami. *Experiment. Math.* **13**, no. 4, 459–472 (2004)
- [13] Schneps, L.: Dessins d’enfants on the Riemann sphere. *The Grothendieck Theory of Dessins d’Enfants*, *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **200**, 47–77 (1994)
- [14] Schneps, L.: The Grothendieck-Teichmüller group  $\widehat{GT}$ : a survey. *Geometric Galois Actions*, *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **242**, 183–204 (2013)
- [15] 角皆 宏: 種数 1 の Grothendieck dessin の計算. *数理解析研究所講究録* **1813**, 167–182 (2012)
- [16] Veech, W.: Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.* **97**, no.4, 553–584 (1989)
- [17] Wood, M.: Belyi-extending maps and the Galois action on dessins d’enfants. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **42**, no.3, 721–737 (2006)