

# On general origamis and Veech groups of flat surfaces

熊谷 駿

東北大学 情報科学研究科 須川研究室 D3

2021 年 12 月 16 日  
東北大情報数理談話会

# 目次

- ▶ Dessin d'enfants
  - Galois action
  - $\widehat{GT}$ -relation
- ▶ Flat surface
  - Teichmüller curve, Veech group
  - 折り紙
- ▶ 主結果
  - 一般の折り紙の定式化
  - Teichmüller curve の計算/ガロア軌道候補の分類 ( $d \leq 7$ )
  - 折り紙  $\mathcal{O}$  状の分解を有する平坦曲面族  $\text{Ker} A_{\mathcal{O}}/C_{\mathcal{O}}$

# 目次

## ▶ Dessin d'enfants

- Galois action
- $\widehat{GT}$ -relation

## ▶ Flat surface

- Teichmüller curve, Veech group
- 折り紙

## ▶ 主結果

- 一般の折り紙の定式化
- Teichmüller curve の計算/ガロア軌道候補の分類 ( $d \leq 7$ )
- 折り紙  $\mathcal{O}$  状の分解を有する平坦曲面族  $\text{Ker} A_{\mathcal{O}}/C_{\mathcal{O}}$

# 目次

## ▶ Dessin d'enfants

- Galois action
- $\widehat{GT}$ -relation

## ▶ Flat surface

- Teichmüller curve, Veech group
- 折り紙

## ▶ 主結果

- 一般の折り紙の定式化
- Teichmüller curve の計算/ガロア軌道候補の分類 ( $d \leq 7$ )
- 折り紙  $\mathcal{O}$  状の分解を有する平坦曲面族  $\text{Ker} A_{\mathcal{O}}/C_{\mathcal{O}}$

# 目次

- ▶ Dessin d'enfants
  - Galois action
  - $\widehat{GT}$ -relation
- ▶ Flat surface
  - Teichmüller curve, Veech group
  - 折り紙
- ▶ 主結果
  - 一般の折り紙の定式化
  - Teichmüller curve の計算/ガロア軌道候補の分類 ( $d \leq 7$ )
  - 折り紙  $\mathcal{O}$  状の分解を有する平坦曲面族  $\text{Ker} A_{\mathcal{O}}/C_{\mathcal{O}}$

# $G_{\mathbb{Q}}$ と dessin d'enfants

$$\bar{\mathbb{Q}} := \{a \in \mathbb{C} \mid \exists P(x) \in \mathbb{Q}(x) \text{ s.t. } P(a) = 0\}$$

$$G_{\mathbb{Q}} := \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \{\sigma : \bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}} : \text{体同型}\}$$

問題  $G_{\mathbb{Q}}$  はどのような群か？

代数曲線  $/\bar{\mathbb{Q}}$

$$C : \{(x, y) \mid y^2 = x^3 + \omega x + \omega^2\}$$

$\downarrow$

$$C^{\sigma} : \{(x, y) \mid y^2 = x^3 + \omega^2 x + \omega\}$$

有理関数

$$r(x, y) = \omega x$$

$\downarrow$

$$r^{\sigma}(x, y) = \omega^2 x$$

$$\boxed{\sigma : \omega \mapsto \omega^2}$$

$\rightarrow G_{\mathbb{Q}}$ -作用 (ガロア作用) /  $(C, r) \leftrightarrow (C^{\sigma}, r^{\sigma}) : \sigma$ -共役, ガロア共役

# $G_{\mathbb{Q}}$ と dessin d'enfants

## Proposition (Belyi の定理 [Belyi, 1979])

非特異な代数曲線  $C$  が  $\bar{\mathbb{Q}}$  上で定義されるためには, これが高々三点を分岐値とする分岐被覆  $\beta : C \rightarrow P_{\mathbb{C}}^1$  (Belyi 射) をもつことが必要十分である.

とくに, ‘高々三点  $0, 1, \infty \in P_{\mathbb{C}}^1$  を分岐値とする有理型関数  $\beta : X \rightarrow P_{\mathbb{C}}^1$  を備えたコンパクトリーマン面  $X' = \text{Belyi 対}(X, \beta)$  を考える.

# $G_{\mathbb{Q}}$ と dessin d'enfants

さらに, このような対象は次のような dessin d'enfants, dessin から一意に定まることが知られている.

## Lemma

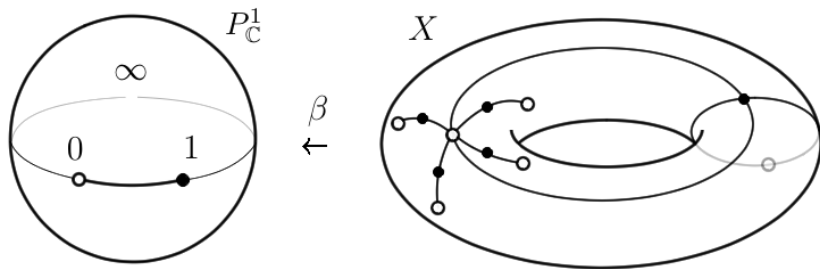
次数  $d$  の Belyi 対  $(X, \beta)$  は適当な同値関係の下, 次のそれぞれと同一視される.

1. 連結な二部グラフの埋め込み  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}_\circ \sqcup \mathcal{V}_\bullet, \mathcal{E}) \hookrightarrow X$  で  $|\mathcal{E}| = d$  なるもの.
2. 自由群  $F_2 = \langle x, y \rangle$  の部分群  $H < F_2$  で指数が  $d$  のもの.
3. 準同型写像  $m : F_2 \rightarrow S_d$  で像  $G = \langle m(x), m(y) \rangle < S_d$  が推移的なもの.



# $G_{\mathbb{Q}}$ と dessin d'enfants

例：Belyi 対  $(X, \beta)$  が与えられたとき



$$\mathcal{V}_\circ = \beta^{-1}(0), \mathcal{V}_\bullet = \beta^{-1}(1), \mathcal{E} = \beta^{-1}((0, 1))$$

$$H = \pi_1(X^*) \hookrightarrow \pi_1(P_{\mathbb{C}}^{1*}) = F_2$$

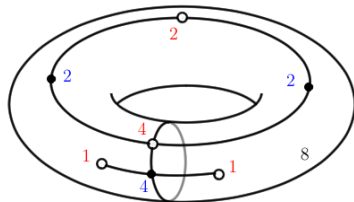
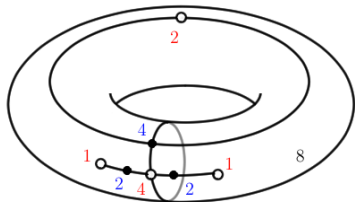
$m : \beta$  のモノドロミー写像  $(F_2 \curvearrowright F_2/H)$

# $G_{\mathbb{Q}}$ と dessin d'enfants

## Lemma

埋込み先の曲面の種数  $g$ , Belyi 射の次数  $d$ , Belyi 射の '*valency list*'  
 $C = (m_1^0, m_2^0 \dots \mid m_1^1, m_2^1 \dots \mid m_1^\infty, m_2^\infty, \dots)$  は dessin のガロア不変量である.

ex.  $y^2 = x(x-1)(x \pm \sqrt{2})$ ,  $\beta(x, y) = \frac{4}{x^2}(1 - \frac{1}{x^2}) : (1^2, 2, 4 \mid 2^2, 4 \mid 8)$



# ガロア共役

ガロア共役を確定させるには, 一般に不変量で候補を絞ったのち定義多項式, Belyi 射の表示を具体的に求める必要がある.

cf. [角皆, 2012] 種数 0 での典型的な計算例 / 種数 1 の一部の例で, 状況に応じた正規化の工夫や中間被覆を用いた考察による計算

ex. 種数 0 で  $\infty$  で完全分岐であれば, [valency list](#) に応じて

$$\beta(x) := A(x - a_1)^{i_1} \cdots (x - a_I)^{i_I} = 1 + A(x - c_1)^{k_1} \cdots (x - c_K)^{k_K}$$

とおき, 係数比較をする. ( $A, a_1, \dots, a_I, c_1, \dots, c_K$  について解く.)

→ 解を与える方程式が出てくるが, その根体に関するガロア共役と dessin の共役候補の状況を照らし合わせることで結論を得る.

# ガロア共役

ガロア共役を確定させるには, 一般に不変量で候補を絞ったのち定義多項式, Belyi 射の表示を具体的に求める必要がある.

cf. [角皆, 2012] 種数 0 での典型的な計算例 / 種数 1 の一部の例で, 状況に応じた正規化の工夫や中間被覆を用いた考察による計算

ex. 種数 0 で  $\infty$  で完全分岐であれば, [valency list](#) に応じて

$$\beta(x) := A(x - a_1)^{i_1} \cdots (x - a_I)^{i_I} = 1 + A(x - c_1)^{k_1} \cdots (x - c_K)^{k_K}$$

とおき, 係数比較をする. ( $A, a_1, \dots, a_I, c_1, \dots, c_K$  について解く.)

→ 解を与える方程式が出てくるが, その根体に関するガロア共役と dessin の共役候補の状況を照らし合わせることで結論を得る.

# ガロア共役

見てわかる唯一の例外として, dessin の鏡像対応は複素共役として表れる (何かしらの)  $G_{\mathbb{Q}}$  の元でのガロア共役を意味する.

$$\begin{array}{ccc} \text{ex. } y^2 = x^3 + \omega x + \omega^2 & & y^2 = x^3 + \omega^2 x + \omega \\ \Psi & & \Psi \\ (x, y) & \longleftrightarrow & (\bar{x}, \bar{y}) \end{array}$$

- ▶ dessin が鏡像対称  $\Rightarrow \mathbb{R}$  上で定義される
- ▶ 互いに鏡像な 2 つの dessin  $\Rightarrow$  非自明なガロア共役の関係にあり, とくに  $\mathbb{Q}$  上では定義されない

[Belyi, 1979] Belyi の定理



[Grothendieck, 1984] Esquisse d'un Programme



[Drinfel'd, 1990] definition of  $\widehat{GT}$  : closely related to  $G_{\mathbb{Q}}$



[伊原, 1994]  $\widehat{GT}$ -relation (geometric pf.)

‘Grothendieck-Teichmüller 群  $\widehat{GT}$  は  $G_{\mathbb{Q}}$  を包含する’

# 目次

## ▶ Dessin d'enfants

- Galois action
- $\widehat{GT}$ -relation

## ▶ Flat surface

- Teichmüller curve, Veech group
- 折り紙

## ▶ 主結果

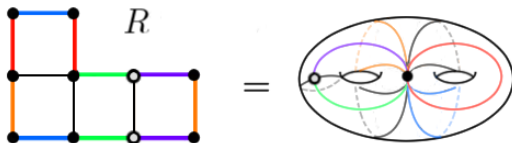
- 一般の折り紙の定式化
- Teichmüller curve の計算/ガロア軌道候補の分類 ( $d \leq 7$ )
- 折り紙  $\mathcal{O}$  状の分解を有する平坦曲面族  $\text{Ker} A_{\mathcal{O}}/C_{\mathcal{O}}$

# 平坦曲面

## Definition

任意の座標変換が  $z \mapsto \pm z + c$  ( $c \in \mathbb{C}$ ) の形からなる座標系  $\mu$  を備えた曲面  $(R, \mu)$  を**平坦曲面**という. 任意の座標変換が  $z \mapsto z + c$  ( $c \in \mathbb{C}$ ) の形からなる部分座標系がとれるとき**並進**, そうでないとき**非並進**の平坦曲面というものとする.

ex. **折り紙** ... 単位正方形の有限枚のコピーを縦 (横) の辺同士で貼り合わせた曲面であって, 自然な座標系が上の定義をみたすもの.





# 平坦曲面

平坦曲面は座標変換が  $z \mapsto z^{\frac{k}{2}+1}$  ( $k \in \mathbb{Z}_{\geq -1, \neq 0}$ ) となる形で拡張される特異点をもつ.

並進, 非並進の面積有限の平坦曲面全体の空間  $\mathcal{A}_g, \mathcal{Q}_g$  は, 全特異点の次数  $k_1, \dots, k_n$  を定めた stratum  $\mathcal{A}_g(k_1, \dots, k_n), \mathcal{Q}_g(k_1, \dots, k_n)$  への次の形の分解 (stratification) をもつ.

$$\mathcal{A}_g = \bigsqcup_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ k_i \geq 1 \\ \sum k_i = 4g-4}} \mathcal{A}_g(k_1, \dots, k_n), \quad \mathcal{Q}_g = \bigsqcup_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ k_i \geq -1, \neq 0 \\ \sum k_i = 4g-4}} \mathcal{Q}_g(k_1, \dots, k_n)$$

# 平坦曲面

平坦曲面においては写像が局所的にアフィンであること  
( $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の形であること) が well-defined である.

平坦曲面  $(R, \mu)$  と  $t \in \mathbb{H}$  に対し  $\mu$  を  $x + iy \mapsto x + ty$  で変形した座標系を  $\mu_t$  とすると, 自然な写像  $f_t : (R, \mu) \rightarrow (R, \mu_t)$  は局所アフィンの擬等角写像である.

Teichmüller の定理 [Teichmüller, 1938-1941] により

$\hat{l}_{(R, \mu)}(t) := (R, \mu_t)$  は Teichmüller 空間  $T(R)$  への埋め込み

$\hat{l}_{(R, \mu)} : \mathbb{H} \hookrightarrow T(R)$  を定める.

# 平坦曲面

平坦曲面においては写像が局所的にアフィンであること  
( $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の形であること) が well-defined である.

平坦曲面  $(R, \mu)$  と  $t \in \mathbb{H}$  に対し  $\mu$  を  $x + iy \mapsto x + ty$  で変形した座標系を  $\mu_t$  とすると, 自然な写像  $f_t : (R, \mu) \rightarrow (R, \mu_t)$  は局所アフィンの擬等角写像である.

Teichmüller の定理 [Teichmüller, 1938-1941] により

$\hat{l}_{(R, \mu)}(t) := (R, \mu_t)$  は Teichmüller 空間  $T(R)$  への埋め込み

$\hat{l}_{(R, \mu)} : \mathbb{H} \hookrightarrow T(R)$  を定める.

# 平坦曲面

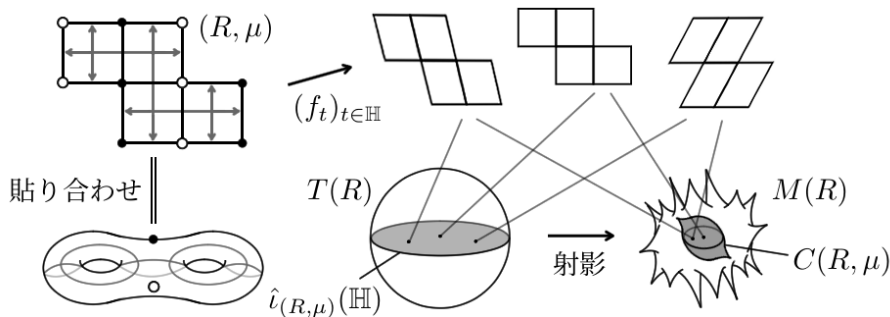
ここで, 円盤  $\hat{\iota}_{(R,\mu)}(\mathbb{H}) \subset T(R)$  に作用する最大の  $\text{Mod}(R)$ -部分群は  $(R, \mu)$  の自己アフィン写像全体であり, その作用は Jacobi 行列の Möbius 変換として表れる.

## Definition

平坦曲面  $(R, \mu)$  の自己アフィン写像の Jacobi 行列全体が与える群  $\Gamma(R, \mu)$  を  $(R, \mu)$  の Veech 群という.

注. 並進  $\Rightarrow \Gamma(R, \mu) < SL(2, \mathbb{R})$ , 非並進  $\Rightarrow \Gamma(R, \mu) < PSL(2, \mathbb{R})$

# 平坦曲面



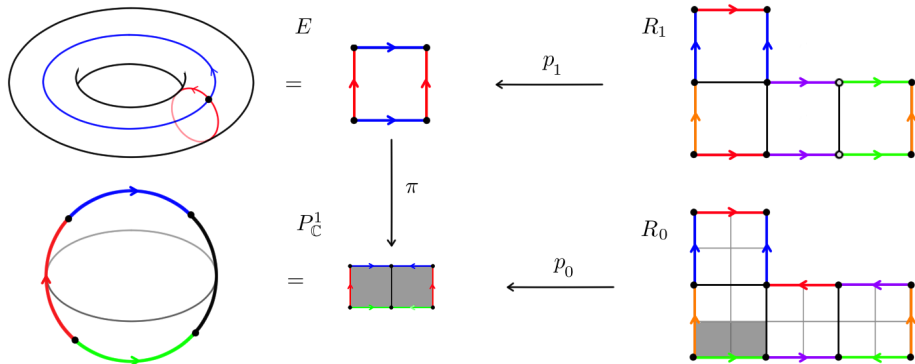
平坦曲面  $(R, \mu)$  のアフィン変形全体の族  $C(R, \mu)$  は  $\mathbb{H}/\Gamma(R, \mu)$  の鏡像としてモジュライ空間  $M(R)$  に埋め込まれる。

$\Gamma(R, \mu)$  が双曲面積有限のときこれは代数曲線  $\rightarrow$  Teichmüller 曲線

# 折り紙

## Definition ([Lochak, 2000]~)

単位正方形の有限枚のコピーを縦, 横の辺同士で貼り合わせて得られる平坦曲面を (一般の) **折り紙** という.



# 折り紙

## Lemma

セル枚数  $d$  の並進折り紙は適当な同値関係の下, 次のそれぞれに同一視される.

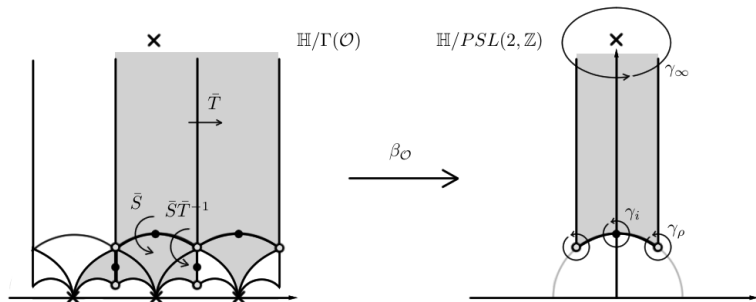
1. 各辺が  $x, y$  にラベル分けされた連結な有向グラフ  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  ( $|\mathcal{V}| = d$ ) であって, 各頂点に対してラベル  $x, y$  の辺が一本ずつ出て, 一本ずつ向かっているもの.
2. 自由群  $F_2 = \langle x, y \rangle$  の部分群  $H < F_2$  で指数が  $d$  のもの.
3. 準同型写像  $m : F_2 \rightarrow S_d$  で像  $G = \langle m(x), m(y) \rangle < S_d$  が推移的なもの.

dessin に類似して 2, 3 はそれぞれ一点分岐被覆  $p_1 : R_1 \rightarrow E$  に関する**基本群**, モノドロミー写像に同一視される.

# 折り紙

## Lemma

折り紙  $\mathcal{O}$  の Veech 群  $\Gamma(\mathcal{O})$  は  $PSL(2, \mathbb{Z})$  の指数有限の部分群.

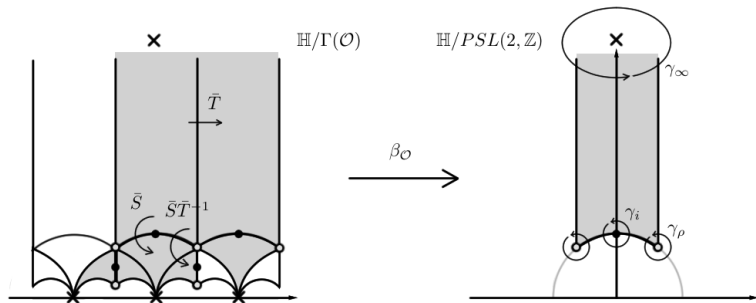


とくに折り紙  $\mathcal{O}$  は  $\bar{\mathbb{Q}}$  上で定義された Teichmüller 曲線  $C(\mathcal{O})$  を与える. これを折り紙曲線という.



# 折り紙とその Veech 群の関係性

折り紙曲線  $C(\mathcal{O})$  の dessin は Veech 群  $\Gamma(\mathcal{O}) < PSL(2, \mathbb{Z})$  に関する射影  $\beta_{\mathcal{O}}$  に由来する.



折り紙・折り紙曲線それぞれのガロア共役の関連性については、  
(両者の dessin の関係)  $\leftrightarrow$  (折り紙と Veech 群との関係) と対応する.

# 折り紙とその Veech 群の関係性

## ▶ 一般の平坦曲面について

[Veech, 1989] Veech 群の導入と非自明な例,  
Veech の二分法 (billiard flow, 測地線流の研究)

[Earle, Gardiner, 1997] 「平坦曲面」節で触れた一連の理論の整備

[Bowman, 2010] Delaunay 三角形分割, iso-Delaunay 領域への分割

[Edwards, Sanderson, Schmidt, 2020] Voronoi staple による数値計算

# 折り紙とその Veech 群の関係性

## ▶ 並進折り紙について

### Proposition ([Schmithüsen, 2004])

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とおく.  $\gamma_T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}, \gamma_S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^{-1} \end{pmatrix}$  は埋め込み  $SL(2, \mathbb{Z}) = \langle T, S \rangle \hookrightarrow \text{Aut}(F_2)$  を定める. さらに, 折り紙  $H < F_2$  に対応する並進折り紙の Veech 群は  $\text{Stab}_{SL(2, \mathbb{Z})}[H]$  である.

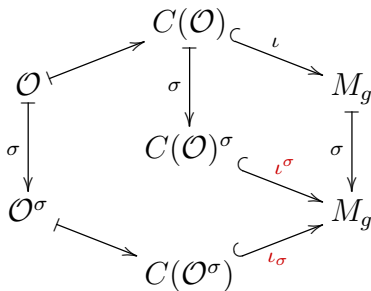
### Proposition ([Ellenberg, McReynolds, 2012])

モジュラー群  $\Gamma(2) < SL(2, \mathbb{Z})$  の有限指数の部分群であって  $\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$  を含むものは並進折り紙の Veech 群に対応する.

# 折り紙へのガロア作用

## Proposition ([Möller, 2005])

$\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  とし,  $\mathcal{O}$  を種数  $g$  の折り紙とする. このとき  $\mathcal{O}^\sigma$  は再び折り紙であって,  $C(\mathcal{O})$  と  $C(\mathcal{O}^\sigma)$  のモジュライ空間  $M_g$  への埋込みをそれぞれ  $\iota, \iota_\sigma$  とすると  $\iota^\sigma(C(\mathcal{O})^\sigma) = \iota_\sigma(C(\mathcal{O}^\sigma))$  が成り立つ.



# 折り紙へのガロア作用

折り紙  $\mathcal{O}$ ,  $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ , 及び  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  に対し,

- ▶ 折り紙  $[A] \cdot \mathcal{O}$  は  $\mathcal{O}$  と同一の Teichmüller 曲線を定める.
- ▶  $\iota(C(\mathcal{O})) \ni [\mathcal{O}'] \mapsto [\mathcal{O}'^\sigma] \in \iota_\sigma(C(\mathcal{O}^\sigma)) = \iota^\sigma(C(\mathcal{O}^\sigma)^\sigma)$  は Teichmüller 曲線に属する各折り紙の双正則類の一対一対応を与える.
- ▶ 一方, dessin として  $C(\mathcal{O}) = C(\mathcal{O})^\sigma$  であっても  $\iota^\sigma \neq \iota$ , つまりモジュライ空間への埋め込みが非自明な  $\sigma$ -共役の関係にあって異なる Teichmüller 曲線を定めることもある.

# 折り紙へのガロア作用

折り紙  $\mathcal{O}$ ,  $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ , 及び  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  に対し,

- ▶ 折り紙  $[A] \cdot \mathcal{O}$  は  $\mathcal{O}$  と同一の Teichmüller 曲線を定める.
- ▶  $\iota(C(\mathcal{O})) \ni [\mathcal{O}'] \mapsto [\mathcal{O}'^\sigma] \in \iota_\sigma(C(\mathcal{O}^\sigma)) = \iota^\sigma(C(\mathcal{O}^\sigma)^\sigma)$  は Teichmüller 曲線に属する各折り紙の双正則類の一対一対応を与える.
- ▶ 一方, dessin として  $C(\mathcal{O}) = C(\mathcal{O})^\sigma$  であっても  $\iota^\sigma \neq \iota$ , つまりモジュライ空間への埋め込みが非自明な  $\sigma$ -共役の関係にあって異なる Teichmüller 曲線を定めることもある.

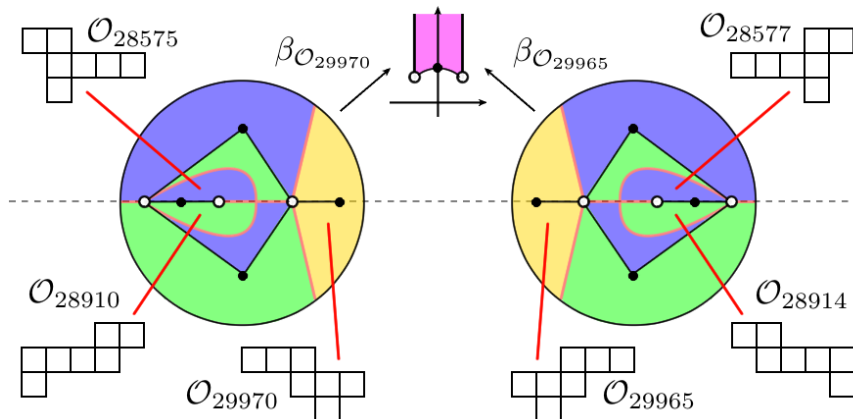
# 折り紙へのガロア作用

折り紙  $\mathcal{O}$ ,  $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ , 及び  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  に対し,

- ▶ 折り紙  $[A] \cdot \mathcal{O}$  は  $\mathcal{O}$  と同一の Teichmüller 曲線を定める.
- ▶  $\iota(C(\mathcal{O})) \ni [\mathcal{O}'] \mapsto [\mathcal{O}'^\sigma] \in \iota_\sigma(C(\mathcal{O}^\sigma)) = \iota^\sigma(C(\mathcal{O}^\sigma)^\sigma)$  は Teichmüller 曲線に属する各折り紙の双正則類の一対一対応を与える.
- ▶ 一方, dessin として  $C(\mathcal{O}) = C(\mathcal{O})^\sigma$  であっても  $\iota^\sigma \neq \iota$ , つまりモジュライ空間への埋め込みが非自明な  $\sigma$ -共役の関係にあって異なる Teichmüller 曲線を定めることもある.

# 折り紙へのガロア作用

$\mathbb{H}/\Gamma$  が鏡像対称であって, 非自明な  $\iota$  の鏡像共役がある例





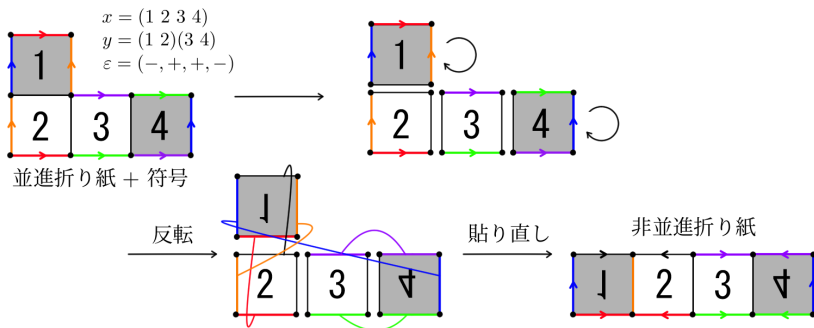
# 目次

- ▶ Dessin d'enfants
  - Galois action
  - $\widehat{GT}$ -relation
- ▶ Flat surface
  - Teichmüller curve, Veech group
  - 折り紙
- ▶ 主結果
  - 一般の折り紙の定式化
  - Teichmüller curve の計算/ガロア軌道候補の分類 ( $d \leq 7$ )
  - 折り紙  $O$  状の分解を有する平坦曲面族  $\text{Ker} A_O / C_O$

# 一般の折り紙の定式化

## Lemma

一般に, 折り紙は並進折り紙  $(x, y)$  と符号関数  $\varepsilon$  の組から定まる並進折り紙  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (x^{\text{sign}}, \varepsilon y^\varepsilon \varepsilon(y^\varepsilon))$  を標準二重被覆とする平坦曲面として得られる. また,  $\theta : (x, y, \varepsilon) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は平坦曲面の同型を法として像の上への一対一対応である.



# 一般の折り紙の定式化

## Lemma

$\mathcal{O}_j = (x_j, y_j, \varepsilon_j)$  ( $j = 1, 2$ ) を次数  $d$  の折り紙とする. Then  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  が平坦曲面として同型であるためには *sign-preserving* な並び替え  $\bar{\sigma} = \delta\sigma \in \text{Sym}\{\pm 1, \dots, \pm d\}$  ( $\delta = \text{sign}(\bar{\sigma})$ ,  $\sigma \in S_d$ ) があって  $i = 1, 2, \dots, d$  に対し以下を満たすことが必要十分である.

1.  $\delta = \delta \circ x_1$ ,
2.  $x_2 = \sigma^\#(x_1^\delta)$ ,
3.  $\xi(y_2, \delta \circ \sigma^{-1} \cdot \varepsilon_1 \circ \sigma^{-1} \cdot \varepsilon_2) = 1$  where  $\xi(\tau, \lambda) := \lambda \cdot \lambda(\tau) \in \mathcal{E}_d$ ,
4.  $y_2 = \sigma^\#(y_1^{\delta \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \circ \sigma})$ .

# 一般の折り紙の定式化

## Theorem

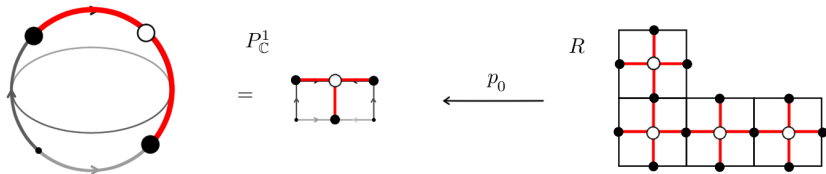
次数  $d$  の折り紙は適当な同値関係の下, 次のそれぞれに同一視される.

1. 球面の  $d$  次の  $(2^d \mid 2^d \mid 2^d \mid *)$ – 分岐被覆  $p: R \rightarrow P_{\mathbb{C}}^1$ .
2. 並進折り紙と符号関数の対  $(x, y, \varepsilon)$ .
3. *sign-preserving, fixed-point-free, order 2* であるような並び替え  $\mu, \nu \in \text{Sym}\{\pm 1, \dots, \pm d\}$  の対で  $\langle \mu, \nu, -1 \rangle$  が推移的なもの.

同値関係は平坦曲面の同型に対応する. 3. の同値は *sign-preserving* な並び替えの群  $\bar{S}_d$  の共役で与える.

# 一般の折り紙の定式化

3：並び替え  $\mu, \nu$  の対は 1：球面の  $(2^d \mid 2^d \mid 2^d \mid *)$  - 分岐被覆  $p$  に square-tiled な Belyi 対  $y = 4x^3 - x$ ,  $\beta_0(x) = 4x^2$  を組み合わせて得られる  $4d$  次の dessin に対応する. その valency list は  $(4^d \mid 2^{2d} \mid *)$  の形であり, そのガロア不変性は **stratum** の不変性に帰着される.



# 一般の折り紙の定式化

## Lemma

ある並べ替え  $\sigma_{\bar{T}}, \sigma_{\bar{S}}$  があって,  $d$  次の折り紙  $\mathcal{O} = (x, y, \varepsilon)$  に対する  $PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle \bar{T}, \bar{S} \rangle$  の作用は  $A(\mathcal{O}) = \theta^{-1}(\sigma_A^* \gamma_A^{-1}(\theta(\mathcal{O})))$  ( $A = \bar{T}, \bar{S}$ ) として記述される.

同型を法として上の作用は折り紙曲線の  $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ -コピーの並び替えを表す. 折り紙  $\mathcal{O}$  の Veech 群は  $\Gamma(\mathcal{O}) = \text{Stab}_{PSL(2, \mathbb{Z})}[\mathcal{O}]$  と記述できる.

正方形の枚数ごとに三つ組  $(x, y, \varepsilon)$  を列挙, 同型類に分類し, 上記の作用の軌道分解を求めることで折り紙の Veech 群を計算する.

# 折り紙の折り紙曲線への分類

	並進				非並進			
$d$	$\#\{O\}$	$\#\{C(O)\}$	$g(C(O))$	$G_{\mathbb{Q}}$ -共役候補	$\#\{O\}$	$\#\{C(O)\}$	$g(C(O))$	$G_{\mathbb{Q}}$ -共役候補
1	1	1	0	なし	0	0	0	なし
2	2	1	0	"	1	1	0	"
3	7	2	0	"	4	1	0	"
4	26	5	0	"	34	6	0	"
5	91	8	0	"	227	13	0	"
6	490	28	0	1 組	2316	88	0	13 組
7	2773	41	0 ~ 1	5 組	26586	88	0 ~ 11	3 組

## Theorem

枚数 7 以下の折り紙から誘導される *Teichmüller* 曲線は, 次表の 21 組 (うち枚数 6 が 13 組, 枚数 7 が 8 組) を除いて全てガロア不変量で他のものと区別される.

# 折り紙の折り紙曲線への分類

No.	stratum	指数	$C(\mathcal{O})$ の valency list	$C(\mathcal{O})$ の数と関係
6-1	$\mathcal{A}_3(0, 8)$	15	$(3^5 \mid 2^7, 1 \mid 5, 4, 3^2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-2	$\mathcal{Q}_1(-1^2, 0^3, 2)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-3	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 0, 6)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-4	$\mathcal{Q}_2(0^2, 2^2)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 3$ (同一)
6-5	$\mathcal{Q}_3(2, 6)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-6	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 3^2)$	15	$(3^5 \mid 2^7, 1 \mid 6, 5, 3, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
6-7	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 3^2)$	15	$(3^5 \mid 2^7, 1 \mid 5, 4, 3^2)$	鏡像対称 $\times 2$ , $\iota$ が鏡像共役
6-8	$\mathcal{Q}_3(-1, 9)$	22	$(3^7, 1 \mid 2^{11} \mid 6, 5, 4^2, 3)$	鏡像対称 $\times 2$ , $\iota$ が鏡像共役
6-9	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 0, 6)$	24	$(3^8 \mid 2^{12} \mid 6, 5, 4^2, 3, 2)$	鏡像共役 $\times 2$
6-10	$\mathcal{Q}_2(-1^3, 7)$	27	$(3^9 \mid 2^{13}, 1 \mid 6^2, 5, 4, 3^2)$	鏡像共役 $\times 2$ , 鏡像閉 $\times 1$
6-11	$\mathcal{Q}_2(-1, 0, 1, 4)$	36	$(3^{12} \mid 2^{18} \mid 6^2, 5^2, 4^2, 3^2)$	鏡像共役 $\times 2$ , 鏡像閉 $\times 1$
6-12	$\mathcal{Q}_3(1, 7)$	54	$(3^{18} \mid 2^{27} \mid 6^4, 5^3, 4^3, 3)$	鏡像共役 $\times 2$ , 鏡像閉 $\times 1$
6-13	$\mathcal{Q}_3(-1, 9)$	66	$(3^{22} \mid 2^{33} \mid 6^6, 5^3, 4^3, 3)$	鏡像共役 $\times 2 \times 2$ 組



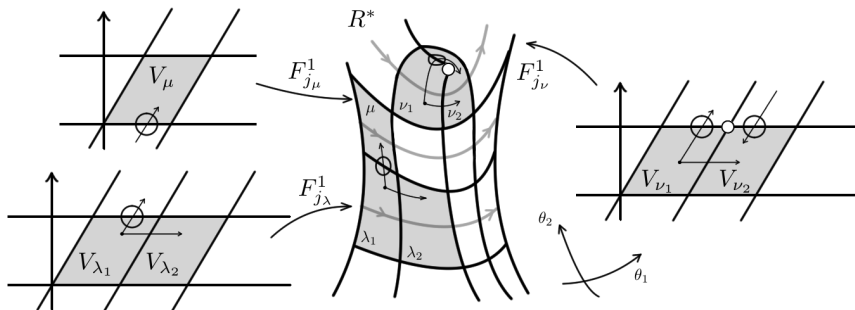
# 折り紙の折り紙曲線への分類

No.	stratum	指数	$C(\mathcal{O})$ の valency list	$C(\mathcal{O})$ の数と関係
7-1	$\mathcal{A}_4(12)$	7	$(3^2, 1 \mid 2^3, 1 \mid 4, 3)$	鏡像対称 $\times 2$ , $\iota$ が鏡像共役
7-2	$\mathcal{A}_3(0, 2, 6)$	16	$(3^5, 1 \mid 2^8 \mid 7, 4, 3, 2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-3	$\mathcal{A}_4(12)$	21	$(3^7 \mid 2^{11} \mid 6, 5, 4, 3^2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-4	$\mathcal{A}_4(12)$	42	$(3^{14} \mid 2^{21} \mid 7^2, 5^2, 4^3, 3^2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-5	$\mathcal{A}_3(0, 2, 6)$	48	$(3^{16} \mid 2^{24} \mid 7^2, 6, 5^2, 4^3, 3^2)$	鏡像共役 $\times 2$
7-6	$\mathcal{Q}_2(-1, 1^3, 2)$	16	$(3^5, 1 \mid 2^8 \mid 7, 6, 2, 1)$	鏡像共役 $\times 2$
7-7	$\mathcal{Q}_4(12)$	28	$(3^9, 1 \mid 2^{14} \mid 7^2, 6, 3^2, 2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-8	$\mathcal{Q}_3(-1^2, 10)$	36	$(3^{12} \mid 2^{18} \mid 7^3, 6, 3^2, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)

注: ‘鏡像閉’ とは dessin が鏡像対称であって, かつモジュライ空間の上でも鏡像共役について閉じていることを指す. ( $\leftrightarrow$  ‘ $\iota$  が鏡像共役’)

# 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

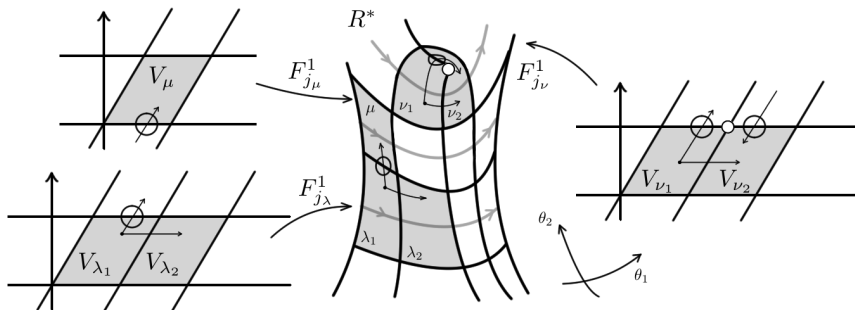
一般に, 平坦曲面  $(R, \mu)$  は二方向  $(\theta_1, \theta_2)$  への (測地的) 円柱分解を認めると (折り紙, モジュライリスト, 角度) の情報からなる折り紙状のセル分解  $P((R, \mu), (\theta_1, \theta_2))$  をもつ.



# 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

逆に,  $d$  次の折り紙  $\mathcal{O}$  に両立するモジュライスト

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  を, 下図の平坦曲面の構成が可能なものとする.



# 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

$\mathcal{O} = (\mu, \nu)$  を折り紙,  $l$  を 2 つの正方形セル  $i, j$  の水平 (resp. 鉛直) の短測地線とする. i.e.  $\mu$  (resp.  $\nu$ ) は  $\pm i$  の一方を  $\pm j$  の一方に写す.

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  に対し,

$$K_{\mathcal{O}}(\gamma, \vec{x}) := e^{x_j - x_i} \quad (\text{resp. } e^{x_i - x_j})$$

とおくと, モジュライリスト  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$  が  $\mathcal{O}$  に両立することは

$$K_{\mathcal{O}}(\gamma, \vec{x}) := \prod_{l: \text{segment in } \gamma} K_{\mathcal{O}}(l, \vec{x})$$

が任意の  $\gamma \in \pi_1(\mathcal{O}^*)$  に対して 1 であることに必要十分である.

# 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

$\mathcal{O} = (\mu, \nu)$  を折り紙,  $l$  を 2 つの正方形セル  $i, j$  の水平 (resp. 鉛直) の短測地線とする. i.e.  $\mu$  (resp.  $\nu$ ) は  $\pm i$  の一方を  $\pm j$  の一方に写す.  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  に対し,

$$K_{\mathcal{O}}(\gamma, \vec{x}) := e^{x_j - x_i} \quad (\text{resp. } e^{x_i - x_j})$$

とおくと, モジュライリスト  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$  が  $\mathcal{O}$  に両立することは

$$K_{\mathcal{O}}(\gamma, \vec{x}) := \prod_{l: \text{segment in } \gamma} K_{\mathcal{O}}(l, \vec{x})$$

が任意の  $\gamma \in \pi_1(\mathcal{O}^*)$  に対して 1 であることに必要十分である.

# 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

これはとくに, ある  $d$  行の整数行列  $A_{\mathcal{O}}$  に対し  $A_{\mathcal{O}} \cdot \vec{x} = 0$  であることで特徴づけられる.

## Theorem

$\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  を相異なる方向とし,  $\mathcal{O} = (\mu, \nu)$  を次数  $d$  の折り紙とする. このとき,  $\theta_1, \theta_2$  への円柱分解をもち  $\mathcal{O}$  を導く平坦曲面の族は  $P_{\mathcal{O}} := \mathbb{R}^{d-\text{rank} A_{\mathcal{O}}} / \text{Cent}_{\bar{S}_d}(\mu, \nu)$  で一対一にパラメトライズされる.

$\vec{x} \in P_{\mathcal{O}}$  に対し, 族  $\{ \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (\mathcal{O}, \vec{x} + t \cdot \vec{1}) \mid t \in \mathbb{R}, \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \}$  は Teichmüller 円盤  $\hat{l}_{\mathcal{O}, \vec{x}}(\mathbb{H}) \subset T_{g,n}$  に相当する.

# 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

## Corollary

$(R, \phi)$  を  $\theta_1, \theta_2$  への円柱分解をもつ平坦曲面とする.

$[A] \in PSL(2, \mathbb{R})$  が  $\Gamma(R, \phi)$  に属するには次が必要かつ十分である.

1.  $(R, \phi)$  は  $A\theta_1, A\theta_2$  への円柱分解をもつ.
2.  $(\theta_1, \theta_2), (A\theta_1, A\theta_2)$  への  $(R, \phi)$  の分解からモジュライリスト付き折り紙  $(\mathcal{O}, \vec{x}), (\mathcal{O}_A, \vec{x}_A)$  が得られるとするととき, ある  $\rho_A \in \mathbb{R}$  に対し  $(\mathcal{O}, \vec{x})$  は  $(\mathcal{O}_A, \vec{x}_A + \rho_A \cdot \vec{1})$  に同値である.

Thank you for your attention!



# 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

## Theorem

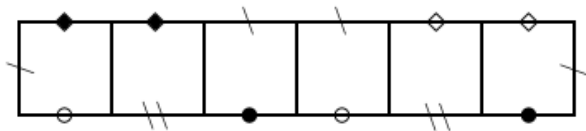
$f : (\hat{R}, \nu = f_*\mu) \rightarrow (R, \mu)$  を 2 方向  $(\theta_1, \theta_2)$  への円柱分解を有する 2 つの平坦曲面間の有限被覆で特異点でのみ分岐するものとする. このとき  $\mathcal{M} = (\text{Sym}(\hat{R}/R))^{| \text{Gen}_{\pi_1(R^*)} |}$  に対して定義される, ある同値関係と  $\Gamma(R, \mu)$  の作用について  $f$  の “モノドロミー”  $\tau_f \in \mathcal{M}$  を用いて  $\Gamma(\hat{R}, \nu) = \text{Stab}_{\Gamma(R, \mu)}[\tau_f]$  とかける.

同値関係は折り紙の同値を与える並び替え (本質的には  $C_O$ ) のうちモジュライリストを変えないものによって定義する.

# 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

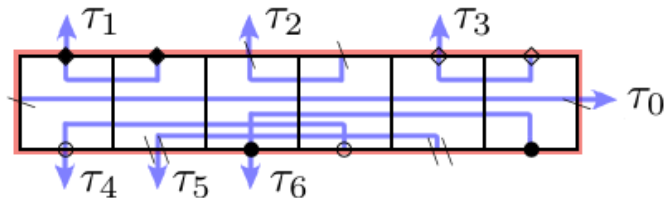
## Proposition

$\mathcal{D} : (x, y, \varepsilon) = ((1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 2, 5, 6, 3, 4), (+, -, +, -, +, -))$  は Veech 群が最大の  $PSL(2, \mathbb{Z})$  となる最小の非自明な折り紙で, 非並進である.



# 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

次のような base frame  $\text{Gen}_{\pi_1(D^*)}$  を固定し, 7 方向へのモノドロミー  $\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) \in \mathfrak{S}_d^7$  をもって  $d$  次の被覆を扱う.



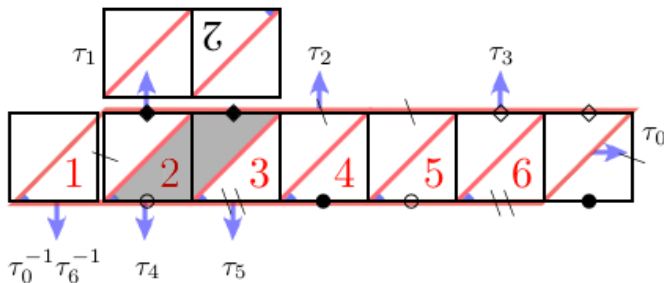
$\mathcal{M} = \mathfrak{S}_d^7$  には  $\langle (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) \rangle$  に関する並び替え ( $=D$  の自己同型) と  $\mathfrak{S}_d$ -共役 ( $D$ -コピーの番号付け) をもって同値関係を入れる.

# 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

折り紙の基本群の生成系 = 'base frame' を固定する.

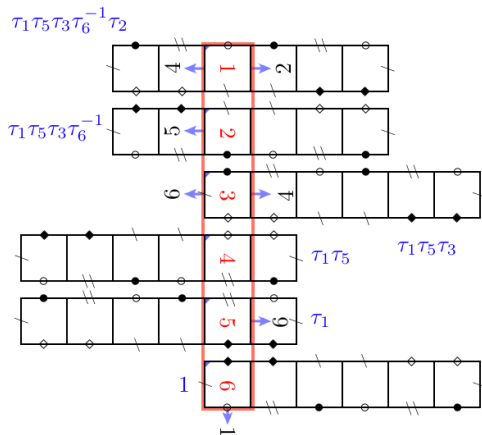
$\bar{T}, \bar{S}$  に関する方向の分解で対応する deformed frame において,  $\tau$  に相当する frame の並び替えを base frame の番号付けから記述する.

$$\bullet \bar{T}\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_0^{-1}\tau_6^{-1}, \tau_4, \tau_5)$$



# 折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

$$\begin{aligned} \bullet \bar{S}(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) = \\ (\tau_2^{-1}\tau_6\tau_3^{-1}\tau_5^{-1}\tau_1^{-1}\tau_4, \tau_2, \tau_3, \tau_1, \tau_3\tau_6^{-1}\tau_2, \tau_5\tau_3\tau_6^{-1}, \tau_1\tau_5\tau_3\tau_0) \end{aligned}$$



# Teichmüller space

## Definition

$\mathcal{M}_{g,n} = \{\text{R.S. of type } (g, n)\} /_{\text{conf.}}$  : the moduli space

A pair  $(R, f)$  of R.S.  $R$  and an ori. pres. homeo.  $f : \Sigma_{g,n} \rightarrow R$  from the topological surface  $\Sigma_{g,n}$  is called a **marked Riemann surface**.

Two marked R.S.  $(R_j, f_j) (j = 1, 2)$  are called **Teichmüller equivalent** if there exists a conformal map  $h : R_1 \rightarrow R_2$  homotopic to  $f_2 \circ f_1^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccc} & & R_1 \\ & \nearrow f_1 & \downarrow f_2 \circ f_1^{-1} \sim \exists h \\ \Sigma_{g,n} & \circlearrowright & \\ & \searrow f_2 & R_2 \end{array}$$

$\mathcal{T}_{g,n} = \{\text{marked R.S. of type } (g, n)\} /_{\text{Teich.}}$  : the Teichmüller space

# Teichmüller space

It is known that

- ▶  $\mathcal{T}_{g,n}$  is a **complex manifold** of dimension  $3g - 3 + n$ .
- ▶  $\mathcal{T}_{g,n}$  is embedded into  $\mathbb{C}^{3g-3+n}$  as a bounded domain homeomorphic to a **ball**.
- ▶  $\mathcal{T}_{g,n}$  is the **universal covering space** of  $\mathcal{M}_{g,n}$ .  
 $\text{Gal}(\mathcal{T}_{g,n}/\mathcal{M}_{g,n})$  is the **mapping class group**  
 $\text{Mod}_{g,n} = \{f : \Sigma_{g,n} \rightarrow \Sigma_{g,n} : \text{ori. pres. homeo.}\} / \text{isotopy}.$
- ▶ By  $\text{Mod}_{g,n} \ni g : [R, f] \mapsto [R, f \circ g^{-1}] \quad \forall [R, f] \in \mathcal{T}_{g,n}$   
 $\text{Mod}_{g,n}$  acts on  $\mathcal{T}_{g,n}$  with fixed points of at most finite order.

# Teichmüller space

$\mathcal{T}_{g,n}$  coincides with the quasiconformal Teichmüller space.

## Definition

A homeomorphism  $f : R_1 \rightarrow R_2$  is **quasiconformal mapping** if  $f$  has locally integrable distributional derivatives  $f_z, f_{\bar{z}}$  and there exists  $k < 1$  such that  $|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|$  holds almost everywhere.  
 $K(f) = \inf \frac{1+k}{1-k}$  is called the **maximal dilatation** of  $f$ .

For each point in  $\mathcal{T}_{g,n}$  there exists a quasiconformal representative.  
 $d_T([R_1, f_1], [R_2, f_2]) := \inf \{\log K(g) \mid g \sim f_2 \circ f_1^{-1}\}$  defines a metric on  $\mathcal{T}_{g,n}$ , called the **Teichmüller metric**, which is known to coincide with the **Kobayashi metric** on  $\mathcal{T}_{g,n}$  (w.r.t. its cpx. str.).



# $\widehat{GT}$ -relation

cf. [Herrlich, Schmithüsen, 2009]

$\mathcal{N} = \{N \triangleleft F_2 : \text{finite index}\} \sim \text{normal dessin の全体}$

$$\hat{F}_2 = \{(g_N N)_{N \in \mathcal{N}} \mid g_N \in F_2, g_N N = g_{N'} N \text{ if } N > N'\}$$

$\widehat{GT} = \{(\lambda, f) \in \hat{\mathbb{Z}}^\times \times \hat{F}_2 \mid \text{各 } N \in \mathcal{N} \text{ の射影において,}$

$$(1) f(x, y) = f(y, x)$$

$$(2) f(x, y) x^{\frac{\lambda-1}{2}} f(y, z) y^{\frac{\lambda-1}{2}} f(z, x) z^{\frac{\lambda-1}{2}} = 1 \quad (xyz = 1)$$

$$(3) f(x_{12}, x_{23}) f(x_{34}, x_{45}) f(x_{45}, x_{51}) f(x_{23}, x_{34}) f(x_{45}, x_{51}) = 1$$

where  $x_{ij}$  is the braid generator of  $\Gamma_{0,5}$

... related to the profinite MCGs  $\hat{\Gamma}_{0,4}, \hat{\Gamma}_{0,5}$  [Schneps, 2013]

▶  $\widehat{GT}$  acts on  $\hat{F}_2$  by  $(\lambda, f) : (x, y) \mapsto (x^\lambda, f^{-1} y^\lambda f)$ .

# $\widehat{GT}$ -relation

$\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  の dessin =  $(X, \beta) : \text{Belyi 対への作用を考える} :$

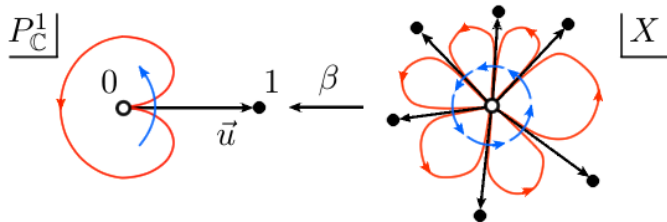
$\vec{u} = 0\vec{1}$  を向き付き基点とする. その valency  $m$  の逆像の周りで,

$(X, \beta) \sim (\bar{\mathbb{Q}}(X), \beta) \stackrel{\text{locally}}{\sim} (\bar{\mathbb{Q}}(X), \varphi)$  where

$\varphi : \bar{\mathbb{Q}}(X) \ni f \mapsto \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{\frac{n}{m}} : \vec{u}$  周りの Puiseux 級数表示

$x : 0$  周りのモノドロミーは  $\varphi$  を 1 の原始  $m$ -乗根  $\zeta_m$  分だけずれた

別の Puiseux 級数表示  $x \cdot \varphi : \bar{\mathbb{Q}}(X) \ni f \mapsto \sum_{n=k}^{\infty} a_n \zeta_m^n z^{\frac{n}{m}}$  に写す.



# $\widehat{GT}$ -relation

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{\mathbb{Q}}(X) \hookrightarrow P_{\vec{u}} & \xrightarrow{\varphi} & & P_{\vec{u}} \xleftarrow{x(\varphi)} \bar{\mathbb{Q}}(X) \\
 \downarrow \Psi & & & \downarrow \Psi & \\
 f \vdash \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{\frac{n}{m}} & \xrightarrow{x} & \sum_{n=k}^{\infty} a_n \zeta_m^n z^{\frac{n}{m}} & \xleftarrow{\quad} f \\
 \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \\
 f^\sigma \vdash \sum_{n=k}^{\infty} \sigma(a_n) z^{\frac{n}{m}} & \xrightarrow{\sigma \cdot x} & \sum_{n=k}^{\infty} \sigma(a_n) \sigma(\zeta_m)^n z^{\frac{n}{m}} & \xleftarrow{\quad} f^\sigma \\
 \downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \\
 \bar{\mathbb{Q}}(X^\sigma) \hookrightarrow P_{\vec{u}}^\sigma & \xrightarrow{\varphi^\sigma} & & P_{\vec{u}}^\sigma \xleftarrow{\sigma \cdot x(\varphi^\sigma)} \bar{\mathbb{Q}}(X^\sigma)
 \end{array}$$

上記のように  $\sigma$ -共役における並び替え  $\sigma \cdot x$  の表示を得られる.

ある  $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}^\times$  に対し  $\sigma(\zeta_m) = \zeta_m^{\lambda_\sigma} \Rightarrow \sigma \cdot x = x^{\lambda_\sigma}$

$y : 1$  周りのモノドロミーについて同様にすると, 基点が 1 始点でないため  $f_\sigma \in F_2$  の共役が現れて  $\sigma \cdot y = f_\sigma^{-1} y^{\lambda_\sigma} f_\sigma$  となる.

## Proposition ( $\widehat{GT}$ -relation, [伊原, 1994])

$G_{\mathbb{Q}}$  は  $\widehat{GT}$  の部分群として  $\text{Aut}(\hat{F}_2)$  に埋め込まれる.

注. 各  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  に対し  $(\lambda_{\sigma}, f_{\sigma})$  が  $\widehat{GT}$  の元の3条件を満たすかどうかというのは非自明で, 難解.

[still open]  $G_{\mathbb{Q}} = \widehat{GT}$  は成り立つか?

$G_{\mathbb{Q}} < \widehat{GT}$  が満たすべき関係式は dessin や後述の origami をはじめとした対象を用いて考察されてきたが, [Combe, Manin, Marcoli, 2020] など話題が続いており未だ結論付けられていないと思われる.