

Study on general origamis and Veech groups of flat surfaces

熊谷 駿

東北大学・情報

Workshop : Quasi-conformal maps, geodesic laminations and flat structures on Riemann surfaces

目次

▶ 背景

- dessin - $G_{\mathbb{Q}}$ -action - Ihara, Lochak '94
- 平坦曲面 - 折り紙 - Schmithüsen '04 et al.
- Möller '05 - moduli functor - $G_{\mathbb{Q}}$ -actions

▶ やったこと

- 折り紙 (半並進版) の整理, 計算, ガロア不変量での分類
- 2JS (=doubly periodic) FS の族 $Q^{2JS}(\mathcal{O})$
- 2JS FS における VG inclusion \leftrightarrow covering - 計算

目次

▶ 考えていること

- 折り紙の数え上げ, VG index の評価
- $Q^{2JS}(v_1, \dots, v_n)$ の combinatorial な評価
- 重み付折り紙 – complex ver. – period coord との関係

▶ 気になっていること

- $G_{\mathbb{Q}}$ -action – $\text{Mod}_{0,4}$ -action – Ellenberg, McReynolds '10
- period coord (FS 版) – Lanneau '00s –

Veech, Hubbard-Masur '90s – $\mathcal{MF}, \mathcal{ML}$?

目次

▶ 最近の FS の話題

Puchta-Christoph-Schmithüsen '17:

- TS with maximal numbers of Tr

Edwards-Sanderson-Schmidt '20:

- computing VG in terms of Voronoi

Chowdhury, Everett, Freedman, Lee, '21: - on periodic pts of 2JS TS, calc. exm of surface with discriminant

Boissy-Geninska '21: - evaluate systole on TS by using periods, rigid TS

Dessin d'enfants

$G_{\mathbb{Q}} := \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \{\sigma : \bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}} : \text{体同型}\} : \text{絶対ガロア群}$

代数曲線 $/\bar{\mathbb{Q}}$

$$C : \{(x, y) \mid y^2 = x^3 + \omega x + \omega^2\}$$

\Downarrow

$$C^\sigma : \{(x, y) \mid y^2 = x^3 + \omega^2 x + \omega\}$$

有理関数

$$r(x, y) = \omega x$$

\Downarrow

$$r^\sigma(x, y) = \omega^2 x$$

$$\sigma : \omega \mapsto \omega^2$$

$\rightarrow G_{\mathbb{Q}}\text{-作用 (ガロア作用)} / (C, r) \leftrightarrow (C^\sigma, r^\sigma) : \sigma\text{-共役, ガロア共役}$

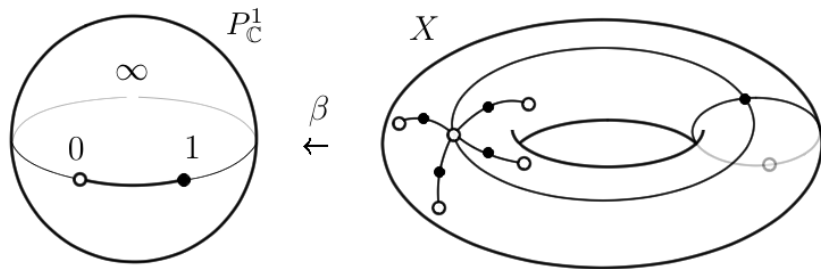
Dessin d'enfants

Theorem (Belyi の定理 [Belyi, 1979])

非特異な代数曲線 C が $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義されるためには, これが高々三点を分岐値とする分岐被覆 $\beta : C \rightarrow P_{\mathbb{C}}^1$ (*Belyi 射*) をもつことが必要十分である.

Dessin d'enfants

例：Belyi 対 (X, β) が与えられたとき



$$\mathcal{V}_\circ = \beta^{-1}(0), \mathcal{V}_\bullet = \beta^{-1}(1), \mathcal{E} = \beta^{-1}((0, 1))$$

$$H = \pi_1(X^*) \hookrightarrow \pi_1(P_{\mathbb{C}}^{1*}) = F_2, m : \beta \text{ のモノドロミー写像}$$

$$(F_2 \curvearrowright F_2 / H)$$

Dessin d'enfants

Lemma

次数 d の Belyi 対 (X, β) は適当な同値関係の下, 次のそれぞれと同一視される. これを *dessin d'enfants* という.

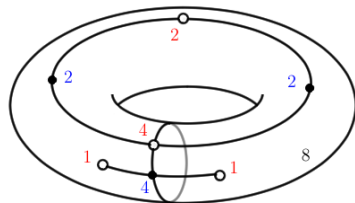
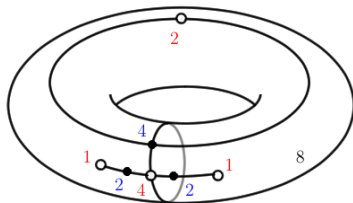
1. 連結な二部グラフの埋め込み $\mathcal{G} = (\mathcal{V}_\circ \sqcup \mathcal{V}_\bullet, \mathcal{E}) \hookrightarrow X$ で $|\mathcal{E}| = d$, かつ $X \setminus \mathcal{G}$ が円盤成分からなるもの.
2. 自由群 $F_2 = \langle x, y \rangle$ の部分群 $H < F_2$ で指数が d のもの.
3. 準同型写像 $m : F_2 \rightarrow S_d$ で像 $G = \langle m(x), m(y) \rangle < S_d$ が推移的なもの.

Dessin d'enfants

Lemma

埋込み先の曲面の種数 g , Belyi 射の次数 d , Belyi 射の '*valency list*'
 $C = (m_1^0, m_2^0 \dots \mid m_1^1, m_2^1 \dots \mid m_1^\infty, m_2^\infty, \dots)$ は dessin のガロア不変量である.

ex. $y^2 = x(x-1)(x \pm \sqrt{2})$, $\beta(x, y) = \frac{4}{x^2}(1 - \frac{1}{x^2}) : (1^2, 2, 4 \mid 2^2, 4 \mid 8)$



Dessin d'enfants

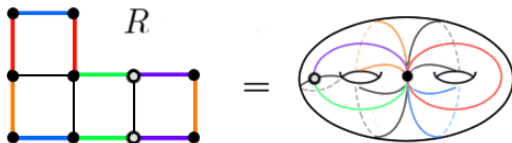
- ▶ $G_{\mathbb{Q}}$ -作用の不変量を dessin のグラフ構造の量として可視化できる.
- ▶ dessin の単純な比較だけで $G_{\mathbb{Q}}$ -共役の判定はできない (鏡像共役を除く). 個々の具体的な状況に応じた考察を要する [角皆].
- ▶ Normal dessin の射影系を考えるアプローチにより profinite MCG の "tower" とよばれる系の自己同型の群として $G_{\mathbb{Q}}$ をみなすことができる (\widehat{GT} -relation [伊原, Drinfel'd]).

平坦曲面

Definition

任意の座標変換が $z \mapsto \pm z + c$ ($c \in \mathbb{C}$) の形からなる座標系 μ を備えた曲面 (R, μ) を**平坦曲面**という. 任意の座標変換が $z \mapsto z + c$ ($c \in \mathbb{C}$) の形からなる部分座標系がとれるとき**並進**, そうでないと**非並進**の平坦曲面というものとする.

ex. **折り紙** ... 単位正方形の有限枚のコピーを縦 (横) の辺同士で貼り合わせた曲面であって, 自然な座標系が上の定義をみたすもの.



平坦曲面

平坦曲面においては写像が局所的にアフィンであること
($\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ の形であること) が well-defined である.

平坦曲面 (R, μ) と $t \in \mathbb{H}$ に対し μ を $x + iy \mapsto x + ty$ で変形した座標系を μ_t とすると, 自然な写像 $f_t : (R, \mu) \rightarrow (R, \mu_t)$ は局所アフィンの写像である.

Teichmüller の定理 [Teichmüller, 1938-1941] により

$\hat{l}_{(R, \mu)}(t) := (R, \mu_t)$ は Teichmüller 空間 $T(R)$ への埋め込み

$\hat{l}_{(R, \mu)} : \mathbb{H} \hookrightarrow T(R)$ を定める.

平坦曲面

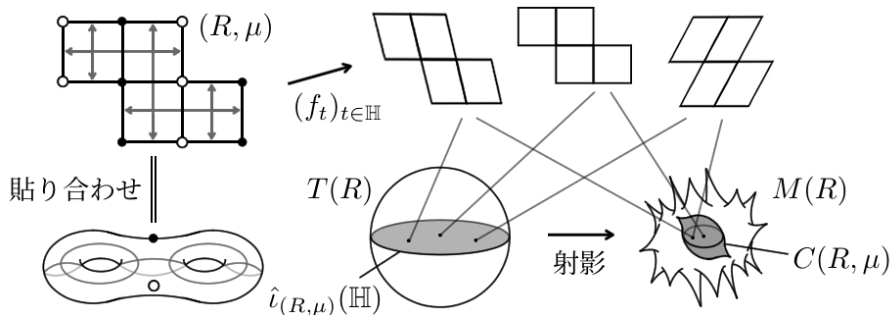
ここで、像 $\hat{l}_{(R,\mu)}(\mathbb{H}) \subset T(R)$ に作用する最大の $\text{Mod}(R)$ -部分群は (R, μ) の自己アフィン写像全体であり、その作用は Jacobi 行列の Möbius 変換として表れる.

Definition

平坦曲面 (R, μ) の自己アフィン写像の Jacobi 行列全体が与える群 $\Gamma(R, \mu)$ を (R, μ) の Veech 群という.

注. 並進 $\Rightarrow \Gamma(R, \mu) < SL(2, \mathbb{R})$, 非並進 $\Rightarrow \Gamma(R, \mu) < PSL(2, \mathbb{R})$

平坦曲面

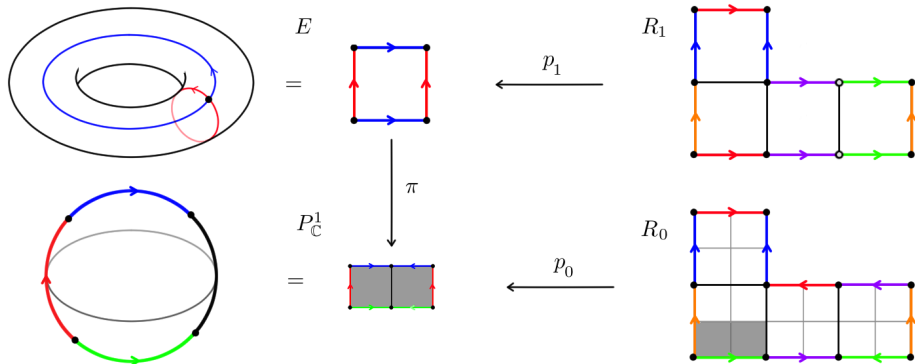


平坦曲面 (R, μ) のアフィン変形全体の族は $C(R, \mu) = \mathbb{H}/\Gamma(R, \mu)$ の鏡像としてモジュライ空間 $M(R)$ に埋め込まれる. $\Gamma(R, \mu)$ が双曲面積有限のときこれは代数曲線であり, Teichmüller 曲線とよぶ.

折り紙

Definition ([Lochak, 2000]~)

単位正方形の有限枚のコピーを縦, 横の辺同士で貼り合わせて得られる平坦曲面を (一般の) **折り紙** という.



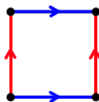
折り紙

Lemma (並進折り紙)

セル枚数 d の並進折り紙は次のそれぞれに同一視される。

1. トーラスの d 次の一点分岐被覆 $p : R^* \rightarrow \Sigma_{1,1}$.
2. 自由群 $F_2 = \langle x, y \rangle$ の部分群 $H < F_2$ で指数が d のもの.
3. 準同型写像 $m : F_2 \rightarrow S_d$ で像 $G = \langle m(x), m(y) \rangle < S_d$ が推移的なもの.

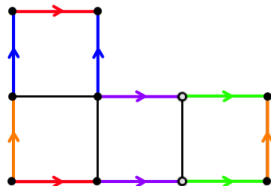
$\Sigma_{1,1}$



p_1



R_1



折り紙

Theorem (一般の折り紙)

次数 d の折り紙は次のそれぞれに同一視される.

1. 並進折り紙と符号関数の対 (x, y, ε) .
2. 球面の $2d$ 次の $(2^d \mid 2^d \mid 2^d \mid *)$ -分岐被覆 $p: R^* \rightarrow \Sigma_{0.4}$.
3. *fixed-point-free, order 2 の並び替え* $\mu, \nu \in \text{Sym}\{\pm 1, \dots, \pm d\}$ の対で $\langle \mu, \nu, -1 \rangle$ が推移的なもの.

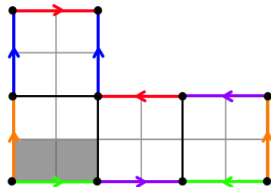
$\Sigma_{0,4}$



p_0



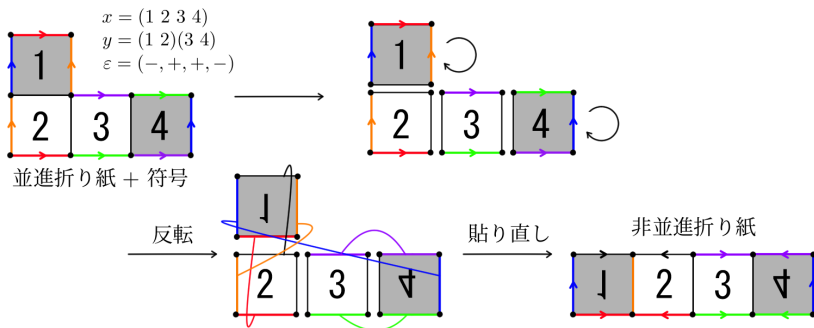
R_0



折り紙

Lemma

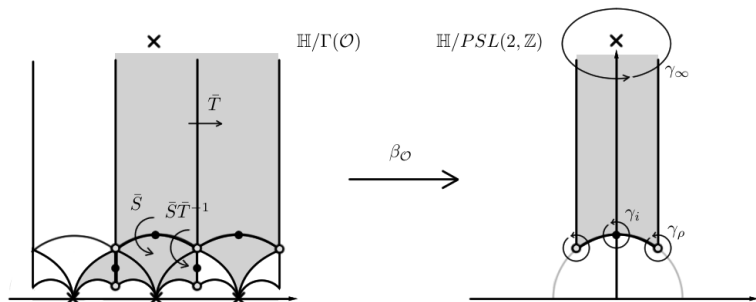
(一般の) 折り紙は並進折り紙 (x, y) と符号関数 ε の組から定まる並進折り紙 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (x^{\text{sign}}, \varepsilon y^\varepsilon \varepsilon(y^\varepsilon))$ を標準二重被覆とする平坦曲面として得られる. また, $\theta : (x, y, \varepsilon) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は平坦曲面の同型を法として像の上への一対一対応である.



折り紙の Veech 群

Lemma

折り紙 \mathcal{O} の Veech 群は $PSL(2, \mathbb{Z})$ の指数有限の部分群.



$\beta_{\mathcal{O}} : \mathbb{H}/\Gamma(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z}) : \text{Belyi} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-defined Teich. curve}$

並進折り紙の Veech 群

Proposition (Schmithüsen)

並進折り紙 $p : R^* \rightarrow \Sigma_{1,1}$ の普遍費覆 $u : \mathbb{H} \rightarrow R^*$ に対し, 誘導された平坦構造 $\tilde{\mu}$ を考える. このとき次の完全可換図式がある:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\mathbb{H}/\Sigma_{1,1}) & \hookrightarrow & \mathrm{Aff}^+(\mathbb{H}, \tilde{\mu}) & \xrightarrow{D} & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \cong & \circlearrowleft & \downarrow \cong & \nearrow \beta & \downarrow \cong \\
 1 & \longrightarrow & \mathrm{Inn}(F_2) & \hookrightarrow & \mathrm{Aut}^+(F_2) & \longrightarrow & \mathrm{Out}^+(F_2) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

さらに, $\Gamma(R, \phi) = \beta(\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}^+(F_2)}(\pi_1(R^*)))$ が成り立つ.

並進折り紙の Veech 群

► Reidemeister-Schreier 法による Veech 群の計算 (Schmithüsen)

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\mathbb{H}/\Sigma_{1,1}) & \hookrightarrow & \mathrm{Aff}^+(\mathbb{H}, \tilde{\mu}) & \xrightarrow{D} & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \cong & \circlearrowleft & \downarrow \cong & \nearrow \beta & \downarrow \cong \\
 1 & \longrightarrow & \mathrm{Inn}(F_2) & \hookrightarrow & \mathrm{Aut}^+(F_2) & \longrightarrow & \mathrm{Out}^+(F_2) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

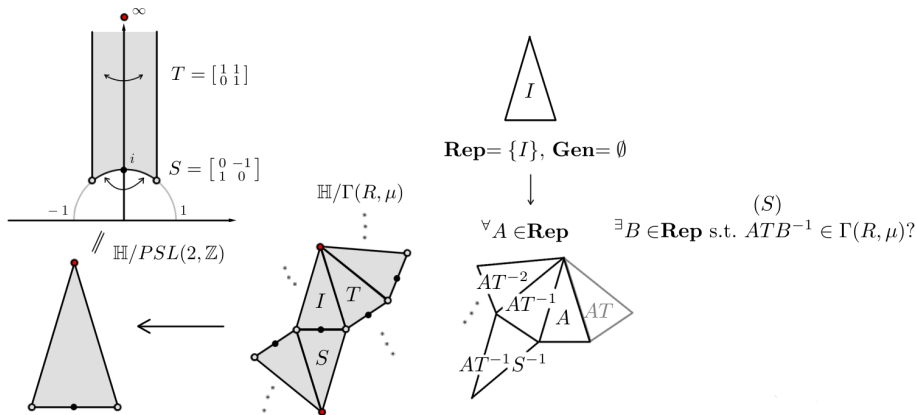
$$A \in \Gamma(R, \phi) = \beta(\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}^+(F_2)}(\pi_1(R^*)))$$

$$\Leftrightarrow \exists \delta \in F_2/\pi_1(R^*), \forall g \in \mathbf{Gen}(\pi_1(R^*)), \delta^* \gamma_A(g) \in \pi_1(R^*),$$

$$\text{where } \gamma_A \text{ is a word of } \gamma_T : \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{xy} \end{bmatrix}, \gamma_S : \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x}^{-1} \end{bmatrix}.$$

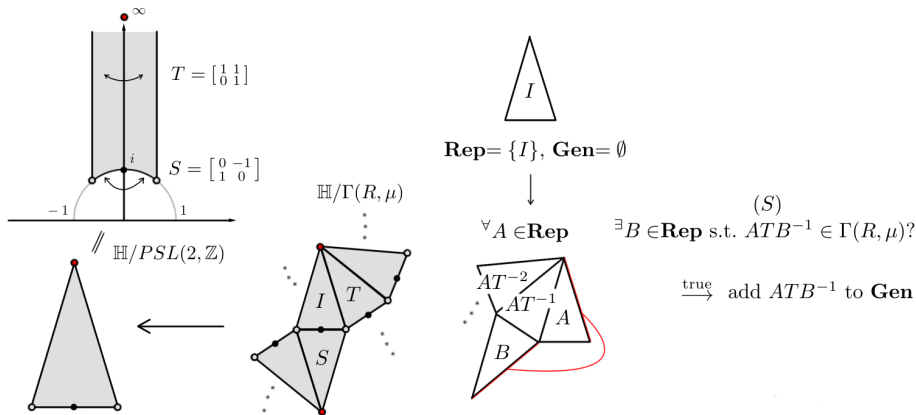
並進折り紙の Veech 群

▶ Reidemeister-Schreier 法による Veech 群の計算 (Schmithüsen)



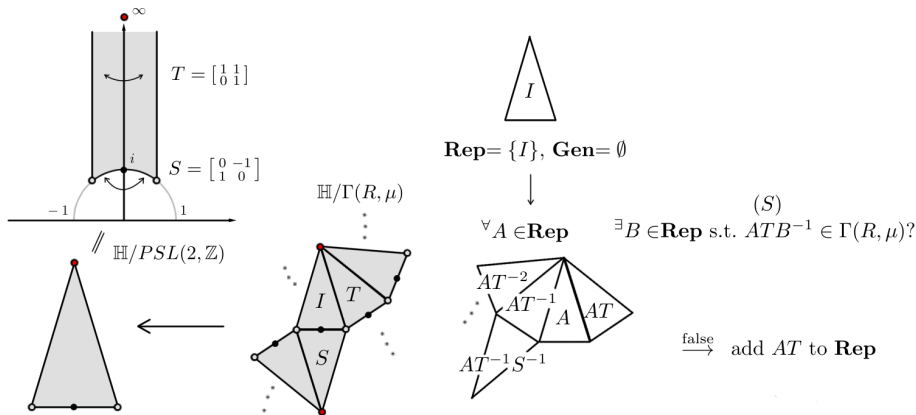
並進折り紙の Veech 群

▶ Reidemeister-Schreier 法による Veech 群の計算 (Schmithüsen)



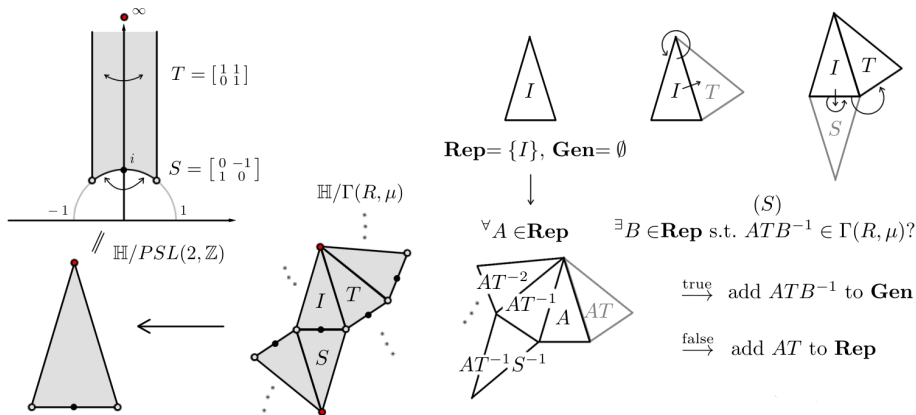
並進折り紙の Veech 群

▶ Reidemeister-Schreier 法による Veech 群の計算 (Schmithüsen)



並進折り紙の Veech 群

▶ Reidemeister-Schreier 法による Veech 群の計算 (Schmithüsen)



並進折り紙の Veech 群

Proposition ([Ellenberg, McReynolds, 2012])

モジュラー群 $\Gamma(2) < SL(2, \mathbb{Z})$ の有限指数の部分群であって $\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ を含むものは並進折り紙の Veech 群に対応する.

(Outline) ※ $\text{Mod}_{1,1} = SL(2, \mathbb{Z})$, $\text{Mod}_{0,4} = PSL(2, \mathbb{Z})$

1. 仮定をみたす $G < \Gamma(2)$ の $G/\{\pm 1\}$ への射影は具体的な折り紙のモデルをもって $\text{Mod}_{1,4} \rightarrow \text{Mod}_{0,4}$ の制限とみなせる.
2. $\text{Stab}_{\text{Mod}_{0,4}}(H) = G/\{\pm 1\}$ をみたす $H < \pi_{0,4}$ の構成ができる.
3. $\text{Stab}_{\text{Mod}_{1,1}}(\textcolor{red}{H} \cap \pi_{1,4}) = \text{proj}^{-1}(\text{Stab}_{\text{Mod}_{0,4}}(H))$
 $= \text{proj}^{-1}(G/\{\pm 1\}) = G$ □

折り紙の Veech 群

Theorem

ある並べ替え $\sigma_{\bar{T}}, \sigma_{\bar{S}}$ があって, 折り紙 $\mathcal{O} = (x, y, \varepsilon)$ に対する $PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle \bar{T}, \bar{S} \rangle$ の作用は $A(\mathcal{O}) = \theta^{-1}(\sigma_A^* \gamma_A^{-1}(\theta(\mathcal{O})))$ ($A = \bar{T}, \bar{S}$) として記述される.

同型を法として上の作用は折り紙曲線の $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z})$ -シートの並び替えを表す. 折り紙 \mathcal{O} の Veech 群は $\Gamma(\mathcal{O}) = \text{Stab}_{PSL(2, \mathbb{Z})}[\mathcal{O}]$ と記述できる.

折り紙の Veech 群

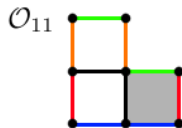
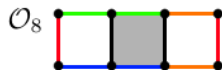
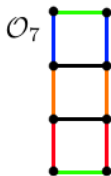
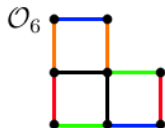
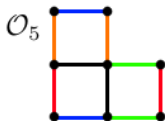
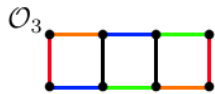
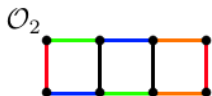
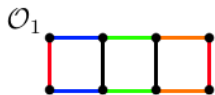
Lemma

$\mathcal{O}_j = (x_j, y_j, \varepsilon_j)$ ($j = 1, 2$) を次数 d の折り紙とする. このとき $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が平坦曲面として同型であるためには符号対応を保つ並び替え $\bar{\sigma} = \delta\sigma \in \text{Sym}\{\pm 1, \dots, \pm d\}$ ($\delta = \text{sign}(\bar{\sigma})$, $\sigma \in S_d$) があって $i = 1, 2, \dots, d$ に対し以下を満たすことが必要十分である.

1. $\delta = \delta \circ x_1$,
2. $x_2 = \sigma^\#(x_1^\delta)$,
3. $\xi(y_2, \delta \circ \sigma^{-1} \cdot \varepsilon_1 \circ \sigma^{-1} \cdot \varepsilon_2) = 1$ where $\xi(\tau, \lambda) := \lambda \cdot \lambda(\tau) \in \mathcal{E}_d$,
4. $y_2 = \sigma^\#(y_1^{\delta \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \circ \sigma})$.

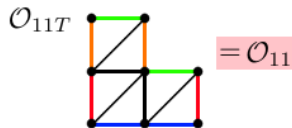
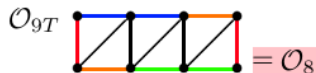
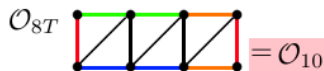
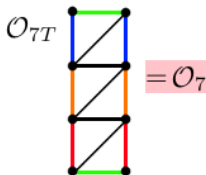
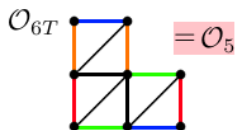
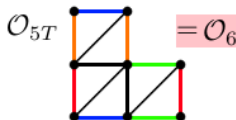
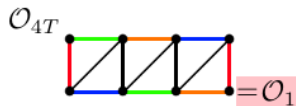
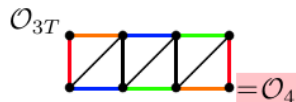
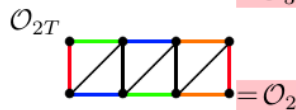
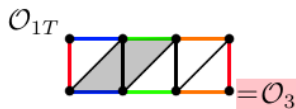
折り紙の Veech 群

例 $d = 3$: 同型類への分類



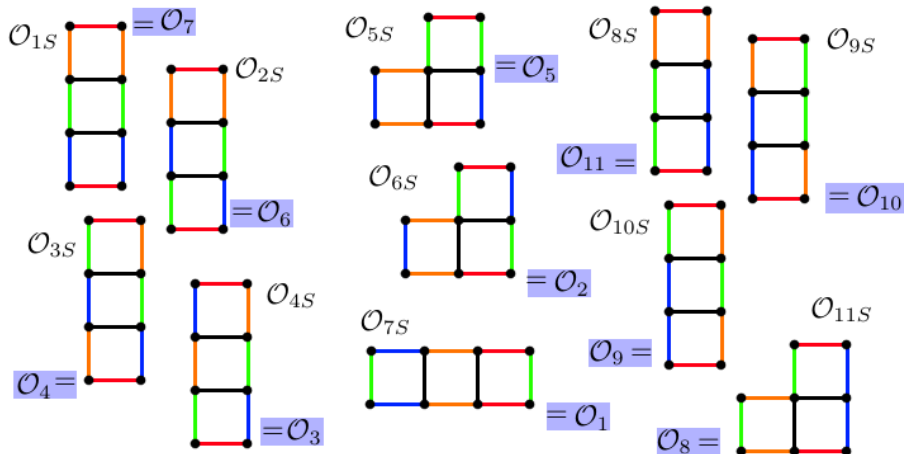
折り紙の Veech 群

例 $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ -分解



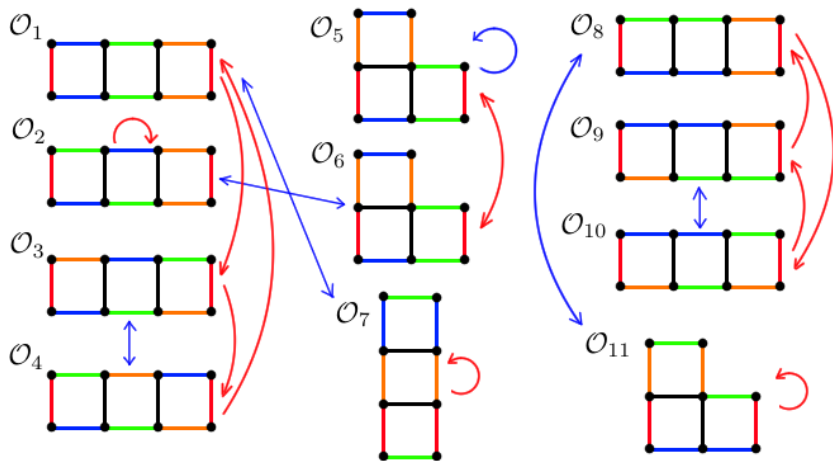
折り紙の Veech 群

例 $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ -分解



折り紙の Veech 群

例 軌道分解 (赤: T , 青: S)



折り紙へのガロア作用

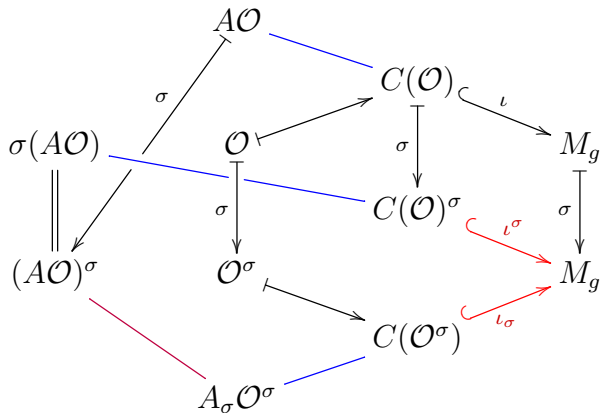
Proposition (Möller, 2005)

$\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ とし, \mathcal{O} を種数 g の折り紙とする. このとき \mathcal{O}^{σ} は再び折り紙であって, $C(\mathcal{O})$ と $C(\mathcal{O}^{\sigma})$ のモジュライ空間 M_g への埋込みをそれぞれ ι, ι_{σ} とすると $\iota^{\sigma}(C(\mathcal{O})^{\sigma}) = \iota_{\sigma}(C(\mathcal{O}^{\sigma}))$ が成り立つ.

Möller は \widehat{GT} の元の $\widehat{\text{Mod}}_{2,0}$ への作用が "two-steps origami" (次数 4, 種数 2) の Teichmüller 曲線に関して満たすべき compatibility を検証した. 結果, $G_{\mathbb{Q}}$ が \widehat{GT} の中で満たすべき関係式が与えられた.

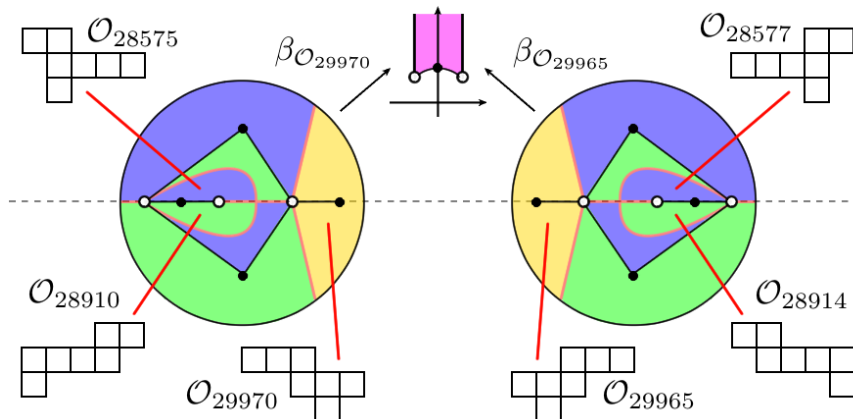
折り紙へのガロア作用

$\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$, 折り紙 \mathcal{O} に対し,



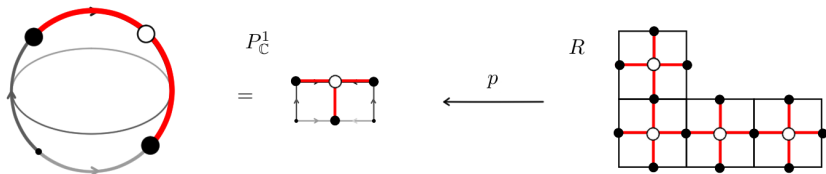
折り紙へのガロア作用

$C(\mathcal{O})$ が鏡像対称であって、非自明な ι の鏡像共役がある例



折り紙へのガロア作用

折り紙の表示 (μ, ν) は球面の $(2^d \mid 2^d \mid 2^d \mid *)$ – 分岐被覆 p に square-tiled な Belyi 対 $y = 4x^3 - x$, $\beta_0(x) = 4x^2$ を組み合わせて得られる $4d$ 次の dessin に対応する. その valency list は $(4^d \mid 2^{2d} \mid *)$ の形であり, そのガロア不変性は **stratum** の不変性に帰着される.



stratum $\mathcal{Q}_g(m_1, \dots, m_n)$, $\mathcal{A}_g(m_1, \dots, m_n)$: type 毎の分類

計算結果

	並進				非並進			
d	$\#\{O\}$	$\#\{C(O)\}$	$g(C(O))$	$G_{\mathbb{Q}}$ -共役候補	$\#\{O\}$	$\#\{C(O)\}$	$g(C(O))$	$G_{\mathbb{Q}}$ -共役候補
1	1	1	0	なし	0	0	0	なし
2	2	1	0	"	1	1	0	"
3	7	2	0	"	4	1	0	"
4	26	5	0	"	34	6	0	"
5	91	8	0	"	227	13	0	"
6	490	28	0	1 組	2316	88	0	13 組
7	2773	41	0 ~ 1	5 組	26586	88	0 ~ 11	3 組

Theorem

枚数 7 以下の折り紙から誘導される *Teichmüller* 曲線は, 次表の 21 組 (うち枚数 6 が 13 組, 枚数 7 が 8 組) を除いて全てガロア不変量で他のものと区別される.

計算結果

No.	stratum	指数	$C(\mathcal{O})$ の valency list	$C(\mathcal{O})$ の数と関係
6-1	$\mathcal{A}_3(0, 8)$	15	$(3^5 \mid 2^7, 1 \mid 5, 4, 3^2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-2	$\mathcal{Q}_1(-1^2, 0^3, 2)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-3	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 0, 6)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-4	$\mathcal{Q}_2(0^2, 2^2)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 3$ (同一)
6-5	$\mathcal{Q}_3(2, 6)$	12	$(3^4 \mid 2^6 \mid 6, 3, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (同一)
6-6	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 3^2)$	15	$(3^5 \mid 2^7, 1 \mid 6, 5, 3, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
6-7	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 3^2)$	15	$(3^5 \mid 2^7, 1 \mid 5, 4, 3^2)$	鏡像対称 $\times 2$, ι が鏡像共役
6-8	$\mathcal{Q}_3(-1, 9)$	22	$(3^7, 1 \mid 2^{11} \mid 6, 5, 4^2, 3)$	鏡像対称 $\times 2$, ι が鏡像共役
6-9	$\mathcal{Q}_2(-1^2, 0, 6)$	24	$(3^8 \mid 2^{12} \mid 6, 5, 4^2, 3, 2)$	鏡像共役 $\times 2$
6-10	$\mathcal{Q}_2(-1^3, 7)$	27	$(3^9 \mid 2^{13}, 1 \mid 6^2, 5, 4, 3^2)$	鏡像共役 $\times 2$, 鏡像閉 $\times 1$
6-11	$\mathcal{Q}_2(-1, 0, 1, 4)$	36	$(3^{12} \mid 2^{18} \mid 6^2, 5^2, 4^2, 3^2)$	鏡像共役 $\times 2$, 鏡像閉 $\times 1$
6-12	$\mathcal{Q}_3(1, 7)$	54	$(3^{18} \mid 2^{27} \mid 6^4, 5^3, 4^3, 3)$	鏡像共役 $\times 2$, 鏡像閉 $\times 1$
6-13	$\mathcal{Q}_3(-1, 9)$	66	$(3^{22} \mid 2^{33} \mid 6^6, 5^3, 4^3, 3)$	鏡像共役 $\times 2 \times 2$ 組

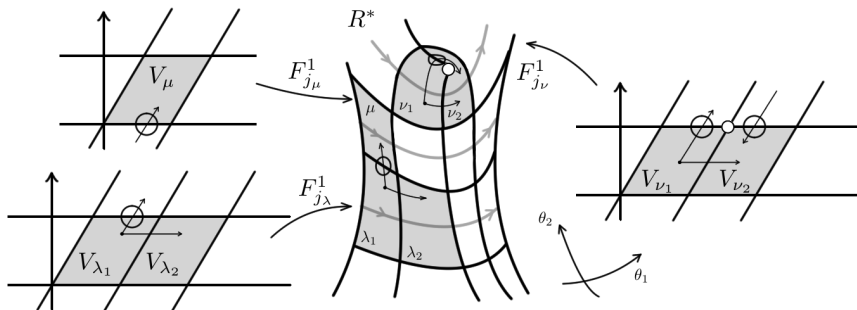
計算結果

No.	stratum	指数	$C(\mathcal{O})$ の valency list	$C(\mathcal{O})$ の数と関係
7-1	$\mathcal{A}_4(12)$	7	$(3^2, 1 \mid 2^3, 1 \mid 4, 3)$	鏡像対称 $\times 2$, ι が鏡像共役
7-2	$\mathcal{A}_3(0, 2, 6)$	16	$(3^5, 1 \mid 2^8 \mid 7, 4, 3, 2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-3	$\mathcal{A}_4(12)$	21	$(3^7 \mid 2^{11} \mid 6, 5, 4, 3^2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-4	$\mathcal{A}_4(12)$	42	$(3^{14} \mid 2^{21} \mid 7^2, 5^2, 4^3, 3^2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-5	$\mathcal{A}_3(0, 2, 6)$	48	$(3^{16} \mid 2^{24} \mid 7^2, 6, 5^2, 4^3, 3^2)$	鏡像共役 $\times 2$
7-6	$\mathcal{Q}_2(-1, 1^3, 2)$	16	$(3^5, 1 \mid 2^8 \mid 7, 6, 2, 1)$	鏡像共役 $\times 2$
7-7	$\mathcal{Q}_4(12)$	28	$(3^9, 1 \mid 2^{14} \mid 7^2, 6, 3^2, 2)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)
7-8	$\mathcal{Q}_3(-1^2, 10)$	36	$(3^{12} \mid 2^{18} \mid 7^3, 6, 3^2, 2, 1)$	鏡像について閉 $\times 2$ (相異)

注: ‘鏡像閉’ とは dessin が鏡像対称であって, かつモジュライ空間の上でも鏡像共役について閉じていることを指す. (\leftrightarrow ‘ ι が鏡像共役’)

折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

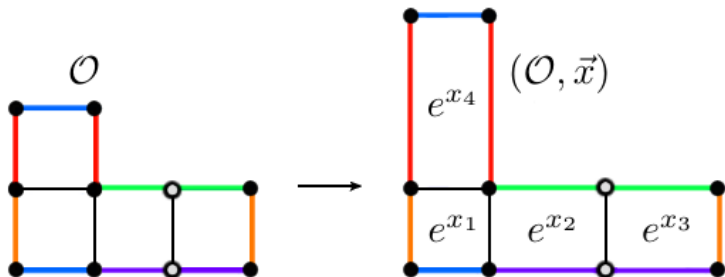
一般に, 平坦曲面 (R, μ) は二方向 (θ_1, θ_2) への (測地的) 円柱分解を認めると (折り紙, モジュライリスト, 角度) の情報からなる折り紙状のセル分解 $P((R, \mu), (\theta_1, \theta_2))$ をもつ.



折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

逆に, d 次の折り紙 \mathcal{O} に両立するモジュライリスト

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ を, 下図の平坦曲面の構成が可能なものとする.



横/縦の辺長の比が e^{x_j} になるよう伸縮し, 面積 1 に normalize する.

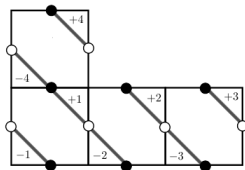
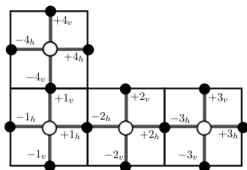
注. 図の場合, $x_2 = x_3$ とならなければならない.

折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

Theorem

$\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ を相異なる方向とし, $\mathcal{O} = (\mu, \nu)$ を次数 d の折り紙とする. このとき, θ_1, θ_2 への円柱分解をもち \mathcal{O} を導く平坦曲面の族は $\mathbb{R}^{3N_{\mathcal{O}}}/\text{Cent}_{\bar{S}_d}(\mu, \nu)$ で一対一にパラメトライズされる.

群 $\text{Cent}_{\bar{S}_d}(\mu, \nu)$ は折り紙 \mathcal{O} の自然なデッサンの自己同型群であり, (up to isom. で) ガロア不変量である.



折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

折り紙状のセル分解は向きと合わせると平坦曲面を一意に定めるから、次のように Veech 群の判定ができる。

Corollary

(R, ϕ) を θ_1, θ_2 への円柱分解をもつ平坦曲面とする。

$[A] \in PSL(2, \mathbb{R})$ が $\Gamma(R, \phi)$ に属するには次が必要かつ十分である。

1. (R, ϕ) は $A\theta_1, A\theta_2$ への円柱分解をもつ。
2. $(\theta_1, \theta_2), (A\theta_1, A\theta_2)$ への (R, ϕ) の分解からそれぞれモジュライリスト付き折り紙 $(\mathcal{O}, \vec{x}), (\mathcal{O}_A, \vec{x}_A)$ が得られるとするとき、ある $\rho_A \in \mathbb{R}$ に対し (\mathcal{O}, \vec{x}) は $(\mathcal{O}_A, \vec{x}_A + \rho_A \cdot \vec{1})$ に同値である。

折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

Theorem

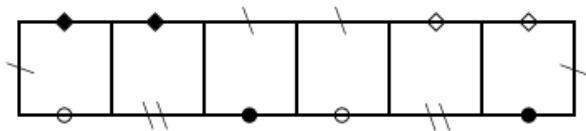
$f : (\hat{R}, \nu = f_*\mu) \rightarrow (R, \mu)$ を 2 方向 (θ_1, θ_2) への円柱分解を有する 2 つの平坦曲面間の有限被覆で, 分岐で特異点が増減しないものとする. このとき $\mathcal{M} = (\text{Sym}(\hat{R}/R))^{| \text{Gen}_{\pi_1(R^*)} |}$ に対して定義される, ある同値関係と $\Gamma(R, \mu)$ の作用について f の “モノドロミー” $\tau_f \in \mathcal{M}$ を用いて $\Gamma(\hat{R}, \nu) = \text{Stab}_{\Gamma(R, \mu)}[\tau_f]$ とかける.

同値関係は折り紙の同値を与える並び替え (本質的には C_0) のうちモジュライリストを変えないものによって定義する.

折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

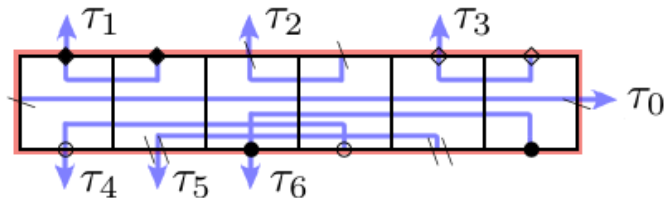
Proposition

$\mathcal{D} : (x, y, \varepsilon) = ((1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 2, 5, 6, 3, 4), (+, -, +, -, +, -))$ は Veech 群が最大の $PSL(2, \mathbb{Z})$ となる最小の非自明な折り紙で, 非並進である.



折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

次のような 'base frame' $\text{Gen}_{\pi_1(\mathcal{D}^*)}$ を固定し, 7 方向へのモノドロミー $\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) \in \mathfrak{S}_d^7$ をもって d 次の被覆を扱う.

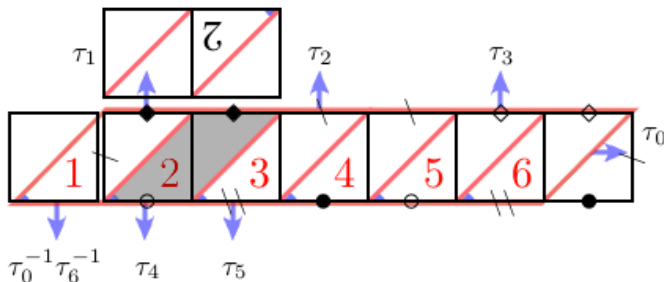


$\mathcal{M} = \mathfrak{S}_d^7$ には $\langle (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) \rangle$ に関する並び替え ($=\mathcal{D}$ の自己同型) と \mathfrak{S}_d -共役 (\mathcal{D} -コピーの番号付け) をもって同値関係を入れる.

折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

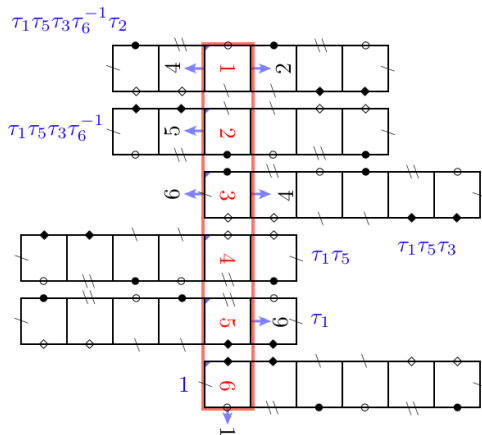
\bar{T}, \bar{S} に関する方向の分解で対応する deformed frame において, τ に相当する frame の並び替えを base frame の番号付けから記述する.

$$\bullet \bar{T}\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_5, \tau_6, \tau_4^{-1}\tau_0^{-1})$$



折り紙状のセル分解をもつ平坦曲面

$$\begin{aligned} \bullet \bar{S}(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) = \\ (\tau_2^{-1}\tau_6\tau_3^{-1}\tau_5^{-1}\tau_1^{-1}\tau_4, \tau_2, \tau_3, \tau_1, \tau_3\tau_6^{-1}\tau_2, \tau_5\tau_3\tau_6^{-1}, \tau_1\tau_5\tau_3\tau_0) \end{aligned}$$



Thank you for your attention!

Teichmüller space

Definition

$\mathcal{M}_{g,n} = \{\text{R.S. of type } (g, n)\} /_{\text{conf.}}$: the moduli space

A pair (R, f) of R.S. R and an ori. pres. homeo. $f : \Sigma_{g,n} \rightarrow R$ from the topological surface $\Sigma_{g,n}$ is called a **marked Riemann surface**.

Two marked R.S. $(R_j, f_j) (j = 1, 2)$ are called **Teichmüller equivalent** if there exists a conformal map $h : R_1 \rightarrow R_2$ homotopic to $f_2 \circ f_1^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} & & R_1 \\ & \nearrow f_1 & \downarrow f_2 \circ f_1^{-1} \sim \exists h \\ \Sigma_{g,n} & \circlearrowright & \\ & \searrow f_2 & R_2 \end{array}$$

$\mathcal{T}_{g,n} = \{\text{marked R.S. of type } (g, n)\} /_{\text{Teich.}}$: the Teichmüller space

Teichmüller space

It is known that

- ▶ $\mathcal{T}_{g,n}$ is a **complex manifold** of dimension $3g - 3 + n$.
- ▶ $\mathcal{T}_{g,n}$ is embedded into \mathbb{C}^{3g-3+n} as a bounded domain homeomorphic to a **ball**.
- ▶ $\mathcal{T}_{g,n}$ is the **universal covering space** of $\mathcal{M}_{g,n}$.
 $\text{Gal}(\mathcal{T}_{g,n}/\mathcal{M}_{g,n})$ is the **mapping class group**
 $\text{Mod}_{g,n} = \{f : \Sigma_{g,n} \rightarrow \Sigma_{g,n} : \text{ori. pres. homeo.}\} / \text{isotopy}.$
- ▶ By $\text{Mod}_{g,n} \ni g : [R, f] \mapsto [R, f \circ g^{-1}] \quad \forall [R, f] \in \mathcal{T}_{g,n}$
 $\text{Mod}_{g,n}$ acts on $\mathcal{T}_{g,n}$ with fixed points of at most finite order.

Teichmüller space

$\mathcal{T}_{g,n}$ coincides with the quasiconformal Teichmüller space.

Definition

A homeomorphism $f : R_1 \rightarrow R_2$ is **quasiconformal mapping** if f has locally integrable distributional derivatives $f_z, f_{\bar{z}}$ and there exists $k < 1$ such that $|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|$ holds almost everywhere.
 $K(f) = \inf \frac{1+k}{1-k}$ is called the **maximal dilatation** of f .

For each point in $\mathcal{T}_{g,n}$ there exists a quasiconformal representative.
 $d_T([R_1, f_1], [R_2, f_2]) := \inf \{\log K(g) \mid g \sim f_2 \circ f_1^{-1}\}$ defines a metric on $\mathcal{T}_{g,n}$, called the **Teichmüller metric**, which is known to coincide with the **Kobayashi metric** on $\mathcal{T}_{g,n}$ (w.r.t. its cpx. str.).

Affine deformation

Theorem (Teichmüller existence theorem)

$\forall x_j = [R_j, f_j] \in \mathcal{T}_{g,n} (j = 1, 2), \exists \phi_j \in Q(R_j) (j = 1, 2), \exists k < 1$, and
 $\exists g : R_1 \rightarrow R_2$: *extremal affine deformation* between x_1, x_2 . i.e.

1. $g \sim f_2 \circ f_1^{-1}$
2. g is locally represented as $z_{\phi_2} \circ g \circ z_{\phi_1}^{-1}(z) = \pm \begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} z_{\ast} + c$
for some $c \in \mathbb{C}$ everywhere on R_1^*
3. $d_T(x_1, x_2) = \log K(g) = \log \frac{1+k}{1-k}$

※ affine action: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = (ax + by) + i(cx + dy)$ where $z = x + iy$

[Belyi, 1979] Belyi の定理



[Grothendieck, 1984] Esquisse d'un Programme



[Drinfel'd, 1990] definition of \widehat{GT} : closely related to $G_{\mathbb{Q}}$



[伊原, 1994] \widehat{GT} -relation (geometric pf.)

‘Grothendieck-Teichmüller 群 \widehat{GT} は $G_{\mathbb{Q}}$ を包含する’

\widehat{GT} -relation

cf. [Herrlich, Schmithüsen, 2009]

$\mathcal{N} = \{N \triangleleft F_2 : \text{finite index}\} \sim \text{normal dessin の全体}$

$\hat{F}_2 = \{(g_N N)_{N \in \mathcal{N}} \mid g_N \in F_2, g_N N = g_{N'} N \text{ if } N > N'\}$

$\widehat{GT} = \{(\lambda, f) \in \hat{\mathbb{Z}}^\times \times \hat{F}_2 \mid \text{各 } N \in \mathcal{N} \text{ の射影において,}$

$$(1) f(x, y) = f(y, x)$$

$$(2) f(x, y) x^{\frac{\lambda-1}{2}} f(y, z) y^{\frac{\lambda-1}{2}} f(z, x) z^{\frac{\lambda-1}{2}} = 1 \quad (xyz = 1)$$

$$(3) f(x_{12}, x_{23}) f(x_{34}, x_{45}) f(x_{45}, x_{51}) f(x_{23}, x_{34}) f(x_{45}, x_{51}) = 1$$

where x_{ij} is the braid generator of $\Gamma_{0,5}$

... related to the profinite MCGs $\hat{\Gamma}_{0,4}, \hat{\Gamma}_{0,5}$ [Schneps, 2013]

▶ \widehat{GT} acts on \hat{F}_2 by $(\lambda, f) : (x, y) \mapsto (x^\lambda, f^{-1} y^\lambda f)$.

\widehat{GT} -relation

$\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ の dessin = $(X, \beta) : \text{Belyi 対への作用を考える} :$

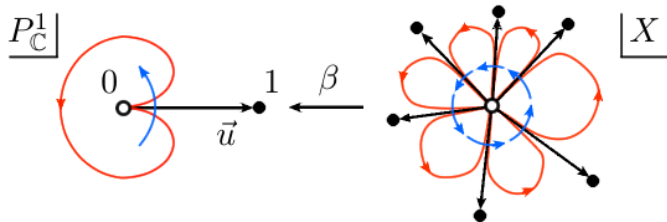
$\vec{u} = 0\vec{1}$ を向き付き基点とする. その valency m の逆像の周りで,

$(X, \beta) \sim (\bar{\mathbb{Q}}(X), \beta) \stackrel{\text{locally}}{\sim} (\bar{\mathbb{Q}}(X), \varphi)$ where

$\varphi : \bar{\mathbb{Q}}(X) \ni f \mapsto \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{\frac{n}{m}} : \vec{u}$ 周りの Puiseux 級数表示

$x : 0$ 周りのモノドロミーは φ を 1 の原始 m -乗根 ζ_m 分だけずれた

別の Puiseux 級数表示 $x \cdot \varphi : \bar{\mathbb{Q}}(X) \ni f \mapsto \sum_{n=k}^{\infty} a_n \zeta_m^n z^{\frac{n}{m}}$ に写す.



\widehat{GT} -relation

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{\mathbb{Q}}(X) \hookrightarrow P_{\bar{u}} & \xrightarrow{\varphi} & & P_{\bar{u}} \xleftarrow{x(\varphi)} \bar{\mathbb{Q}}(X) \\
 \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\
 f \mapsto \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{\frac{n}{m}} & \xrightarrow{x} & \sum_{n=k}^{\infty} a_n \zeta_m^n z^{\frac{n}{m}} & \xleftarrow{\quad} & f \\
 \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \\
 f^\sigma \mapsto \sum_{n=k}^{\infty} \sigma(a_n) z^{\frac{n}{m}} & \xrightarrow{\sigma \cdot x} & \sum_{n=k}^{\infty} \sigma(a_n) \sigma(\zeta_m)^n z^{\frac{n}{m}} & \xleftarrow{\quad} & f^\sigma \\
 \downarrow \cap & & \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\
 \bar{\mathbb{Q}}(X^\sigma) \hookrightarrow P_{\bar{u}}^\sigma & \xrightarrow{\varphi^\sigma} & & P_{\bar{u}}^\sigma \xleftarrow{\sigma \cdot x(\varphi^\sigma)} \bar{\mathbb{Q}}(X^\sigma)
 \end{array}$$

上記のように σ -共役における並び替え $\sigma \cdot x$ の表示を得られる.

ある $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}^\times$ に対し $\sigma(\zeta_m) = \zeta_m^{\lambda_\sigma} \Rightarrow \sigma \cdot x = x^{\lambda_\sigma}$

$y : 1$ 周りのモノドロミーについて同様にすると, 基点が 1 始点でないため $f_\sigma \in F_2$ の共役が現れて $\sigma \cdot y = f_\sigma^{-1} y^{\lambda_\sigma} f_\sigma$ となる.

Proposition (\widehat{GT} -relation, [伊原, 1994])

$G_{\mathbb{Q}}$ は \widehat{GT} の部分群として $\text{Aut}(\hat{F}_2)$ に埋め込まれる.

注. 各 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対し $(\lambda_{\sigma}, f_{\sigma})$ が \widehat{GT} の元の3条件を満たすかどうかというのは非自明で, 難解.

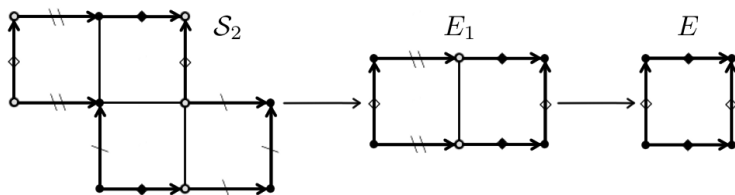
[still open] $G_{\mathbb{Q}} = \widehat{GT}$ は成り立つか?

$G_{\mathbb{Q}} < \widehat{GT}$ が満たすべき関係式は dessin や後述の origami をはじめとした対象を用いて考察されてきたが, [Combe, Manin, Marcoli, 2020] など話題が続いており未だ結論付けられていないと思われる.

折り紙へのガロア作用

▶ \widehat{GT} -relation の別証明 [Möller, 2005]

“two-steps origami” $\mathcal{S}_2 : G = \langle (1\ 2)(3\ 4), (2\ 3) \rangle$ を考える. $\Gamma(\mathcal{S}_2)$ はモジュラー群 $\Gamma(2)$ で, $C(\mathcal{S}_2) \sim \mathbb{H}/\Gamma(2) = P_{\mathbb{C}}^1$ (6-sheeted) である.



自己同型の考察から $y^2 = ((4x(x-1))^2 - (1-t))(4x(x-1) - 1)$ ($t \in P_{\mathbb{C}}^1$) という $C(\mathcal{S}_2) \subset M_2$ の各点の表式が得られる.

折り紙へのガロア作用

1. simple splitting $\pi_1^{\text{orb}}(C(\mathcal{S}_2), \vec{01}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes F_2$ より定義される作用 $\hat{\mathbb{Z}}^\times \times \hat{F}_2 \curvearrowright \pi_1^{\text{orb}}(C(\mathcal{S}_2), \vec{01})$
2. $M_{2,0}$ の Birman-Hilden 表現 [Birman, Hilden, 1971] を通して定義される作用 $\widehat{GT} \curvearrowright \pi_1^{\text{orb}}(M_{2,0}, \vec{*}) = \hat{\Gamma}_{2,0}$
3. “profinite Teichmüller tower” への $G_{\mathbb{Q}}$ -作用 [Hatcher, Lochak, Schneps, 2000] から得られる作用 $G_{\mathbb{Q}} \curvearrowright \hat{\Gamma}_{2,0}$

$$\begin{array}{ccc}
 4. & \pi_1^{\text{orb}}(C(\mathcal{S}_2), \vec{01}) & \xrightarrow{\iota^*} \pi_1^{\text{orb}}(M_{2,0}, \vec{*}) = \hat{\Gamma}_{2,0} \\
 & \downarrow (\lambda, f) & \downarrow (\lambda, f) \quad (\lambda, f) \\
 & \pi_1^{\text{orb}}(C(\mathcal{S}_2), \vec{01}) & \xrightarrow{\iota^*} \pi_1^{\text{orb}}(M_{2,0}, \vec{*}) = \hat{\Gamma}_{2,0}
 \end{array}$$

折り紙へのガロア作用

以上 4 つの比較考察により, 作用 $G_{\mathbb{Q}} \curvearrowright \hat{\Gamma}_{2,0}$ が折り紙曲線の埋め込み $\iota: C(S_2) \hookrightarrow M_{2,0}$ に両立するために満たすべき条件が $G_{\mathbb{Q}}$ が \widehat{GT} の部分群であることを意味することが示された.

折り紙を用いた \widehat{GT} -relation の別証明はこのような議論による.
(参考: [Möller, 2005], [Schneps, 2013])