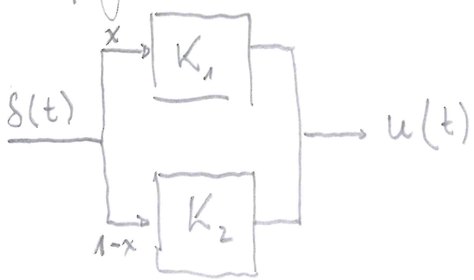
# Pauta $I_1$ Modelación Hidrológica, 2°, 2021

## Pregunta 1

a) Configuración en paralelo:




→ Al ser un sistema lineal $u(t)$ corresponde a la suma de las respuestas de CADA embalse

Embalse 1: $u_1(t) = \frac{1}{K_1}\exp\left(-t/K_1\right) = \frac{e^{-\frac{t}{K_1}}}{K_1}$

Embalse 2: $u_2(t) = \frac{e^{-\frac{t}{K_2}}}{K_2}$

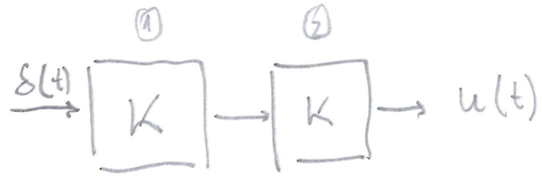
Pero estas funciones impulso - respuesta deben multiplicarse por $x$ y $(1-x)$ respectivamente según el principio de proporcionalidad

Luego, $u(t)$ está dado por:

$$u(t) = \frac{x}{K_1} e^{-t/K_1} + \frac{(1-x)}{K_2} e^{-t/K_2}$$

→ como $u(t)$ es la suma de 2 decaimientos exponenciales, $u(t)$ es máximo para $t=0$

b) Configuración en serie




→ En este caso, la función impulso-respuesta del embalse 1, $u_1(t)$, pasa a ser la entrada al embalse 2. La respuesta del embalse 2 $Q_2(t)$ corresponde a la función impulso respuesta $u(t)$ buscada.

$$u_1(t) = \frac{e^{-t/K}}{K}$$

Ahora, usando la ecuación de convolución $Q(t) = \int_0^t I(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$

se puede calcular $Q_2(t)$

En este caso, la ecuación de convolución requiere la definición de la función impulso respuesta $u(t)$, que corresponde a la del embalse 2 dada por $u(t) = \frac{e^{-t/K}}{K}$

Luego, la implementación de la ecuación de convolución implica:

$$Q(t) = \int_0^t \underbrace{\frac{e^{-\tau/K}}{K}}_{\substack{I(\tau) \text{ dada} \\ \text{por } u_1(t) \text{ evaluada} \\ \text{en } t=\tau}} \cdot \underbrace{\frac{e^{-\frac{(t-\tau)}{K}}}{K}}_{\substack{u(t-\tau) \text{ con} \\ u(t) = \frac{e^{-t/K}}{K}}} d\tau$$

$$Q(t) = \int_0^t \underbrace{\frac{1}{K^2} e^{-t/K}}_{\text{cte.}} d\tau = \frac{e^{-t/K}}{K^2} \int_0^t d\tau = \frac{e^{-t/K}}{K^2} \tau \Big/_0^t = \frac{t e^{-t/K}}{K^2}$$

Luego $u(t) = t \cdot \frac{e^{-t/K}}{K^2}$

Para encontrar el máximo de $u(t)$ se busca el valor de $t$ tal que

$$\frac{du(t)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{du(t)}{dt} = \frac{e^{-t/K}}{K^2} + \frac{t}{K^2} e^{-t/K} \cdot -\frac{1}{K} = \frac{e^{-t/K}}{K^2} - \frac{t e^{-t/K}}{K^3} = \frac{e^{-t/K}}{K^2}\left(1 - \frac{t}{K}\right)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{e^{-t/K}}{K^2}\left(1 - \frac{t}{K}\right) = 0$$

, luego $u(t)$ es máximo para $t = K$

# Pregunta 2

Como la cuenca se modela como un sistema lineal, la función respuesta de pulso permite calcular el hidrograma de respuesta frente a un pulso unitario de duración $\Delta t$. Luego, la respuesta de la cuenca frente a un pulso de magnitud $P$ está dada por

$$Q(t) = P \cdot h(t) \quad , \text{ con } h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(1 - e^{-t/k}) & , \quad t \leq \Delta t \\ \frac{e^{-t/k}}{\Delta t}(e^{\Delta t/k} - 1) & \quad t \geq \Delta t \end{cases}$$

, con $\Delta t$ = duración de la tormenta

Ahora bien, solo es de interes el caudal máximo. Luego

$$Q_{max}(t) = P \cdot h_{max}$$

$$\text{con } h_{max} = h(t = \Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{k}}\right)$$

$$Q_{max}(t) = \frac{P}{\Delta t}\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{k}}\right)$$

Es importante ser consistente con las unidades. Dado que $K$ está en unidades de tiempo, $Q_{max}(t)$ está en unidades de $\frac{\text{Long}(L)}{\text{tiempo}(T)}$ luego $Q_{max}(t)$ debe multiplicarse por el área de la cuenca para tener unidades de $\frac{L^3}{T}$

$$Q_{max}(t)\left(\frac{m^3}{s}\right) = \frac{A \cdot P}{\Delta t}\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{k}}\right) \cdot \frac{1\,h}{3600\,s} \cdot \frac{1\,m}{1000\,mm} \cdot \frac{1000000\,m^2}{1\,Km^2} = \frac{A \cdot P}{3.6\,\Delta t}\left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{k}}\right)$$

con $\Delta t$ y $K$ en horas, $P$ en mm, y $A = 100\,Km^2$. Recordar que $K = 2\,h$

Podemos ahora presentar una tabla con resultados.

| Evento | $t=\Delta t\,(h)$ | $P\,(mm)$ | $I=P/\Delta t\,(mm/h)$ | $Q_{max,o}\,(m^3/s)$ | $Q_{max,s}\,(m^3/s)$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 25 | 5 | 130 | 127.5 | -2.51 |
| 2 | 4 | 20 | 5 | 135 | 120.1 | -14.9 |
| 3 | 7 | 30 | 4.29 | 110 | 115.5 | 5.5 |
| 4 | 6 | 12 | 2 | 60 | 52,8 | -7.2 |
| 5 | 7 | 20 | 2,86 | 75 | 77 | 2 |
| 6 | 4 | 12 | 3 | 90 | 72,1 | -17.9 |
| 7 | 6 | 28 | 4,67 | 120 | 123,2 | 3.2 |
| 8 | 6 | 15 | 2.5 | 80 | 66 | -14 |
| 9 | 4 | 15 | 3.75 | 100 | 90,1 | -9.9 |
| 10 | 5 | 22 | 4.4 | 115 | 112,2 | -2.8 |

con $Q_{max,o}$ = caudal máximo observado, $Q_{max,s}$ = caudal máximo simulado

$e = Q_{max,s} - Q_{max,o}$ = error

Luego, las métricas de error solicitadas son:

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_{i\in N}|y_i - \hat{y}_i| = \frac{1}{N}\sum_{i\in N}|e_i| = \frac{1}{10}\cdot 79.92 \rightarrow MAE \approx 8\ m^3/s$$

$$Sesgo = \frac{1}{N}\sum_{i\in N} e_i = -5.9$$ → modelo tiende a subestimar observaciones

tabla de Contingencia

| | | Obs | |
|---|---|---|---|
| | | Si | No |
| Sim | Si | 5 | 0 |
| | No | 1 | 4 |

→ Si implica $Q_{max} > 100\ m^3/s$

No implica $Q_{max} < 100\ m^3/s$

Prob de detección $(P_d) \rightarrow P_d = \frac{5}{5+1} = 5/6 = 0,8\bar{3}$

Precisión $(P) \rightarrow P = \frac{5+4}{10} = 0.9$

→ Para una misma intensidad, mientras más larga la tormenta mayor es $Q_{max}$ (ver eventos 1 y 2)

→ Si $\Delta t \to \infty$, entonces $Q_{max} = \frac{A \cdot P}{3.6\,\Delta t}\left(1 - e^{-\Delta t/K}\right) \longrightarrow \frac{AP}{3.6\,\Delta t} = \frac{A \cdot I}{3.6}$

con $I = \frac{P}{\Delta t}$ = intensidad. Por lo tanto, la estimación del $Q_{max}$ tiende a ser la del método racional $Q = \frac{I \cdot A}{3.6}$

recordando que se está trabajando con intensidad de precipitación efectiva