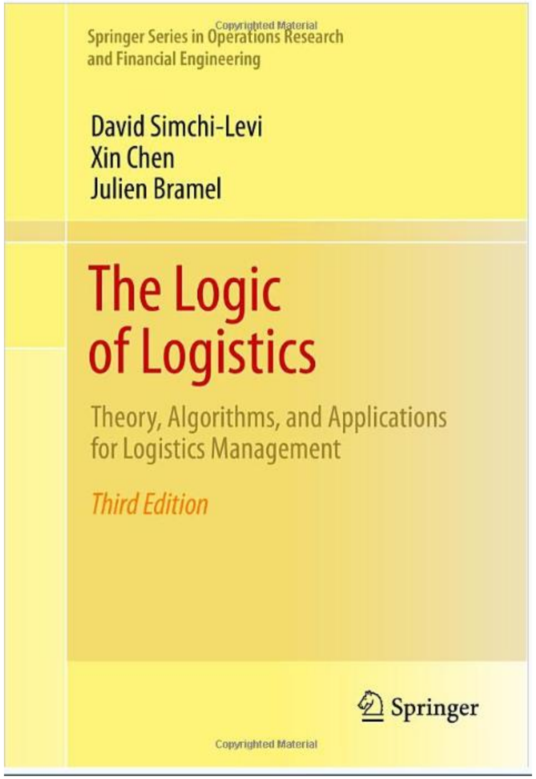
Segunda Parte:
Clase 2 – Inventario Estocástico Multiperiodo

Optimización Dinámica - ICS



David Simchi-Levi
1955 -

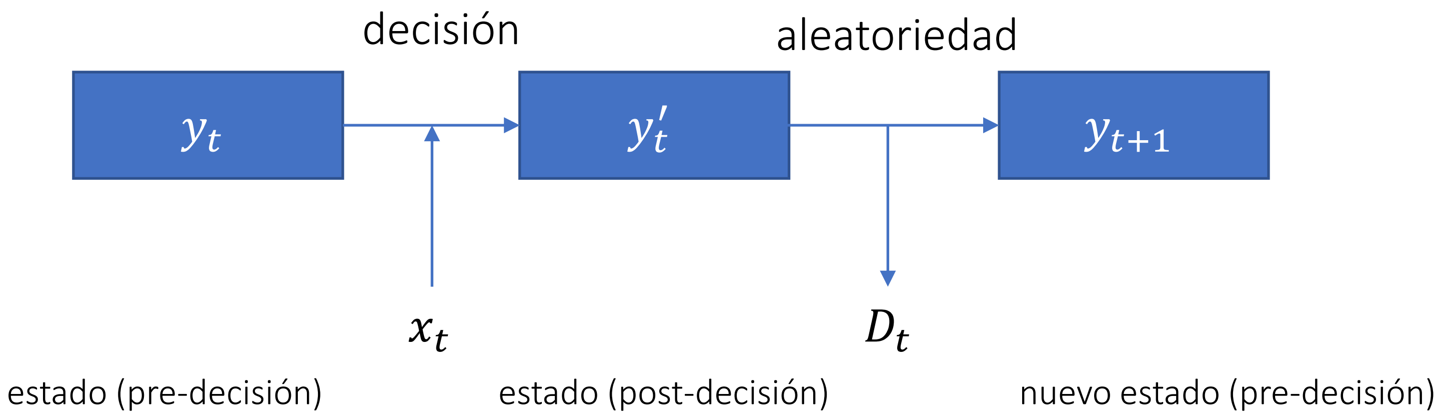
Mathias Klapp

¿Qué hemos visto?

- Formalizamos un Proceso de Decisión Markoviana.
- **Ahora estudiaremos políticas $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ para control de inventario.**

- Inventario estocástico de horizonte finito
- K-convexidad
- Optimalidad de políticas (s_t, S_t)
- Backtracking para políticas (s_t, S_t)

Inventario estocástico multi-periodo



Dinámica en periodo t:

1. Se observa inventario inicial $y_t \in [0, Q]$.
2. Se repone $x_t = y'_t - y_t$ unidades hasta y'_t a costo $K \cdot \mathbb{I}_{x_t > 0} + c \cdot x_t$.
3. Se observa demanda $D_t \sim F$.
   - Quiebre cuesta $q \cdot (D_t - y'_t)^+$,
   - inventario cuesta $h \cdot (y'_t - D_t)^+$
4. Transición a $y_{t+1} = (y'_t - D_t)^+$

Inventario estocástico multi-periodo

Costo inmediato de etapa t:

$$r_t(y_t, y_t') = K \cdot \mathbb{I}_{y_t' > y_t} + c \cdot (y_t' - y_t) + q \cdot \mathbb{E}_{D_t}[(D_t - y_t')^+] + h \cdot \mathbb{E}_{D_t}[(y_t' - D_t)^+]$$

Probabilidad de transición:

$$p(y_{t+1}|y_t') = \begin{cases} 0 & \text{si } y_{t+1} > y_t' \\ f(y_t' - y_{t+1}) & \text{si } 0 < y_{t+1} < y_t' \\ 1 - F(y_t') & \text{si } y_{t+1} = 0 \end{cases}$$

Buscamos minimizar el costo total esperado sobre $\{1, \dots, T\}$:

$$\min \sum_{t=1}^{T} r_t(y_t, y_t')$$

Función de pérdida (Loss Function):

Definanos la **Función de Pérdida**:

$$G(y) = cy + q \cdot \mathbb{E}_D\left[(D-y)^+\right] + h \cdot \mathbb{E}_D[(y-D)^+]$$

Propiedades:

1. Es convexa en y. ¿Por qué?
2. Se cumple que:

$$r_t(y, y') = K \cdot \mathbb{I}_{y'>y} + G(y') - cy$$

Problema del Vendedor de Diarios *(Newsvendor)*

- Caso particular con $T = 1$
- Inventario inicial y y costo fijo de orden K.

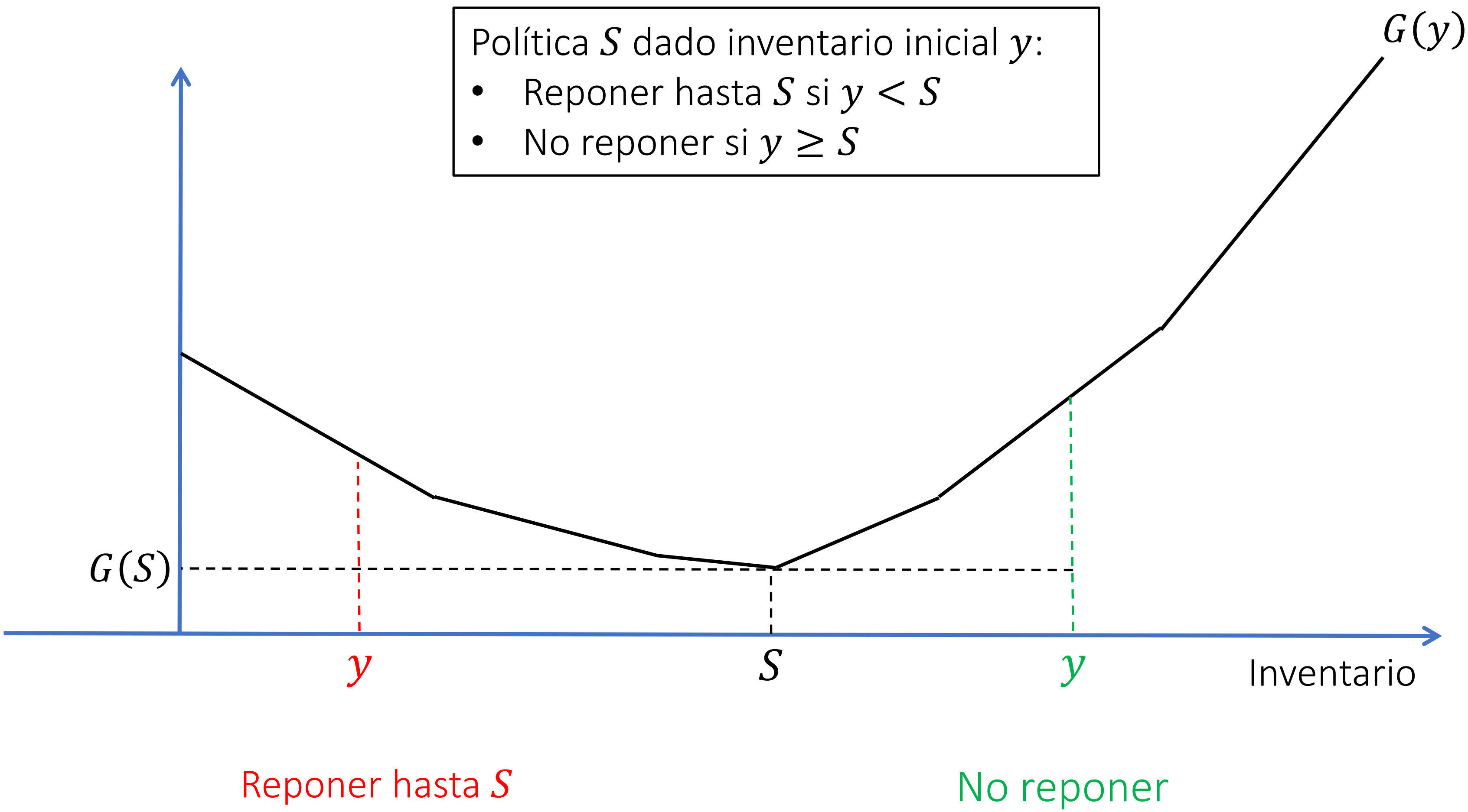
$$C(y) = \min_{y' \in [y,Q]} \{K \cdot \mathbb{I}_{y'>y} + G(y')\} - cy$$

Si $K = 0$:

Política óptima es reordenar hasta $S := \operatorname{argmin}_{y' \in [y,Q]} \{G(y')\}$.

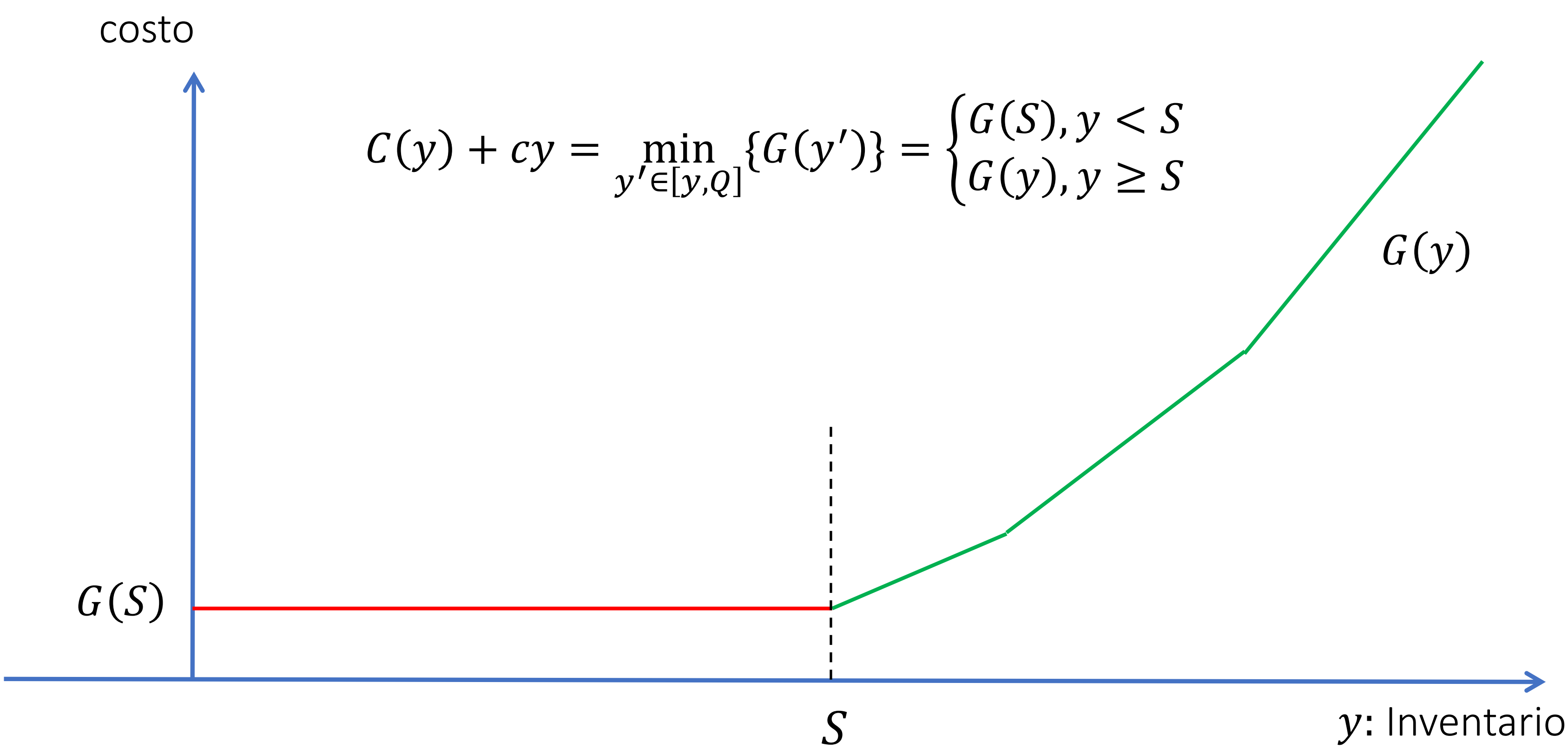
- ``política S'' (*order up to level*).

Política S dado inventario inicial y:



Valor óptimo de función de pérdida dado y

$$C(y) + cy = \min_{y' \in [y,Q]} \{G(y')\} = \begin{cases} G(S), y < S \\ G(y), y \geq S \end{cases}$$



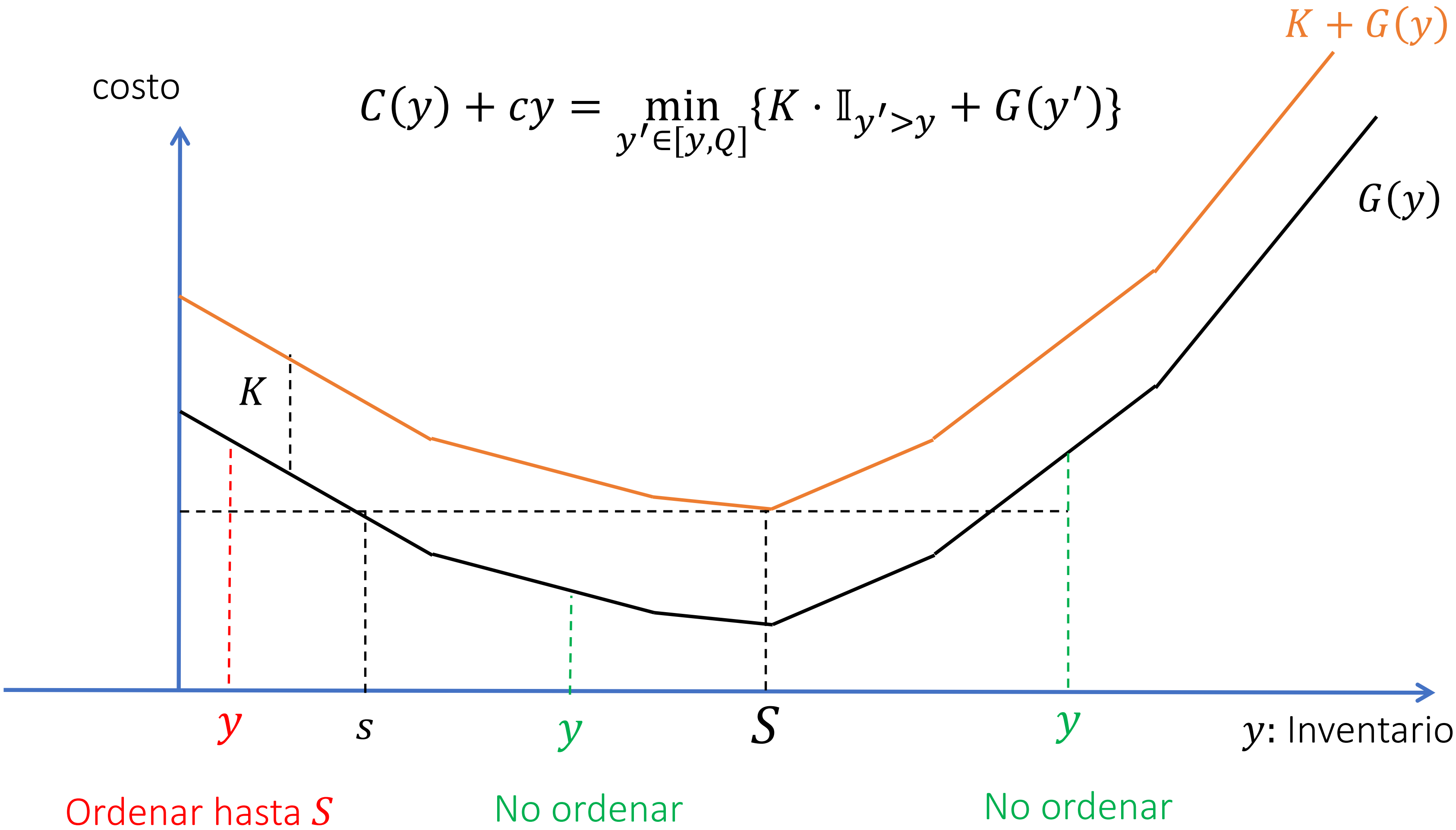
Problema del Vendedor de Diarios *(Newsvendor)*

- Caso particular con $T = 1$
- Inventario inicial y y costo fijo de orden K.

$$C(y) = \min_{y' \in [y,Q]} \{K \cdot \mathbb{I}_{y' > y} + G(y')\} - c \cdot y$$

¿Si $K > 0$?

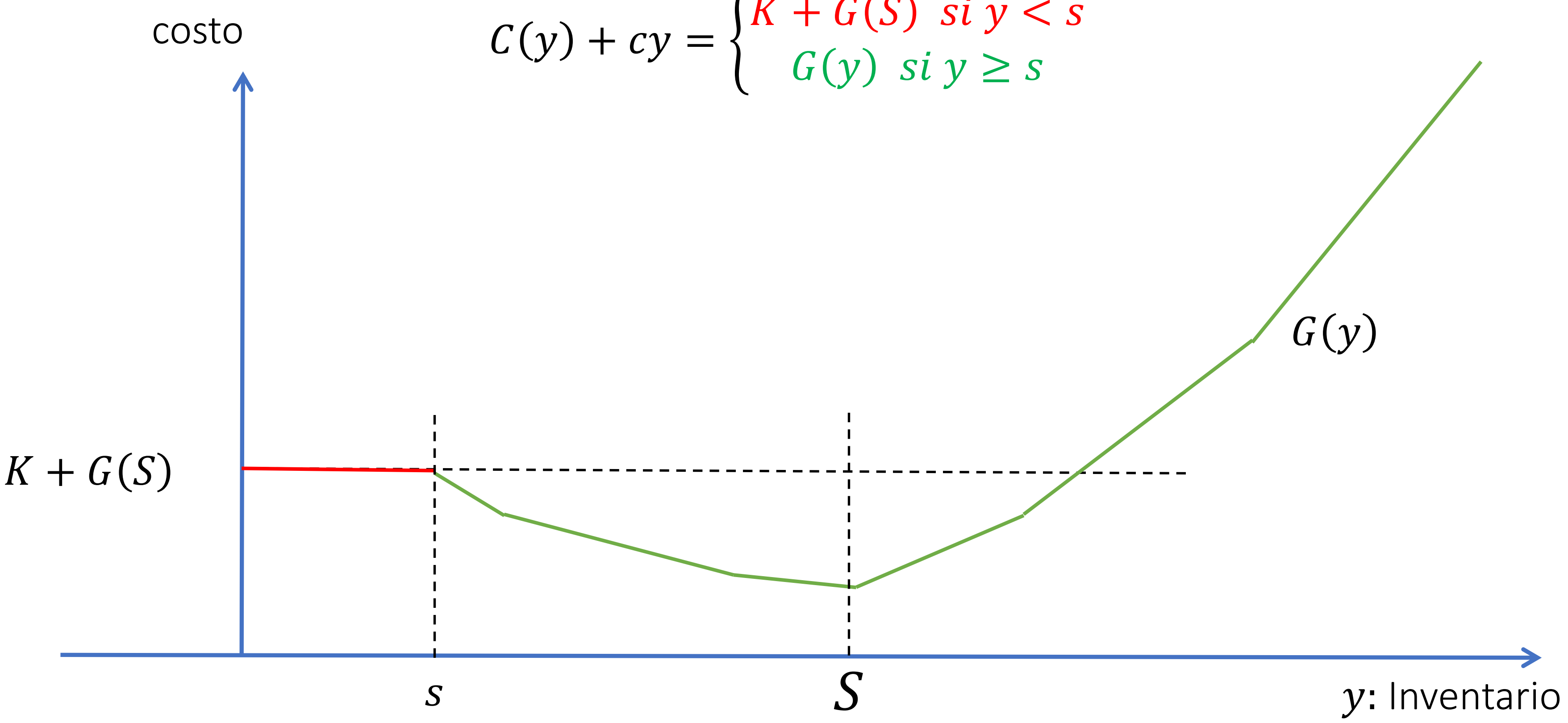
Política (s, S) dado inventario inicial y:



$$S := \operatorname{argmin}_{y' \in [y,Q]} \{G(y')\}$$
$$s \coloneqq \max\{y < S : G(y) = K + G(S)\}$$

Valor óptimo de función de pérdida dado y

$$C(y) + cy = \begin{cases} K + G(S) \ \ si\ y < s \\ G(y) \ \ si\ y \geq s \end{cases}$$



Ahora volvamos a inventario Multietapa

Costo terminal para estado $y_t \in [0, Q]$:

$$C_T(y_T) = \min_{y'_T \in [y_T, Q]} \left\{ K \cdot \mathbb{I}_{y'_T > y_T} + G(y'_T) \right\} - c \cdot y_T$$

Recursion para etapa $t < T$ y estado $y_t \in [0, Q]$:

$$C_t(y_t) = \min_{y'_t \in [y_t, Q]} \left\{ K \cdot \mathbb{I}_{y'_t > y_t} + G(y'_t) + \mathbb{E}_{D_t}\left[C_{t+1}\left((y'_t - D_t)^+ \right) | y'_t \right] \right\} - c \cdot y_t$$

- ¿Cómo resolver mediante Backward DP?

Teorema:
Existe política óptima (s_t, S_t) en cada etapa $t = 1, \ldots, T-1$.

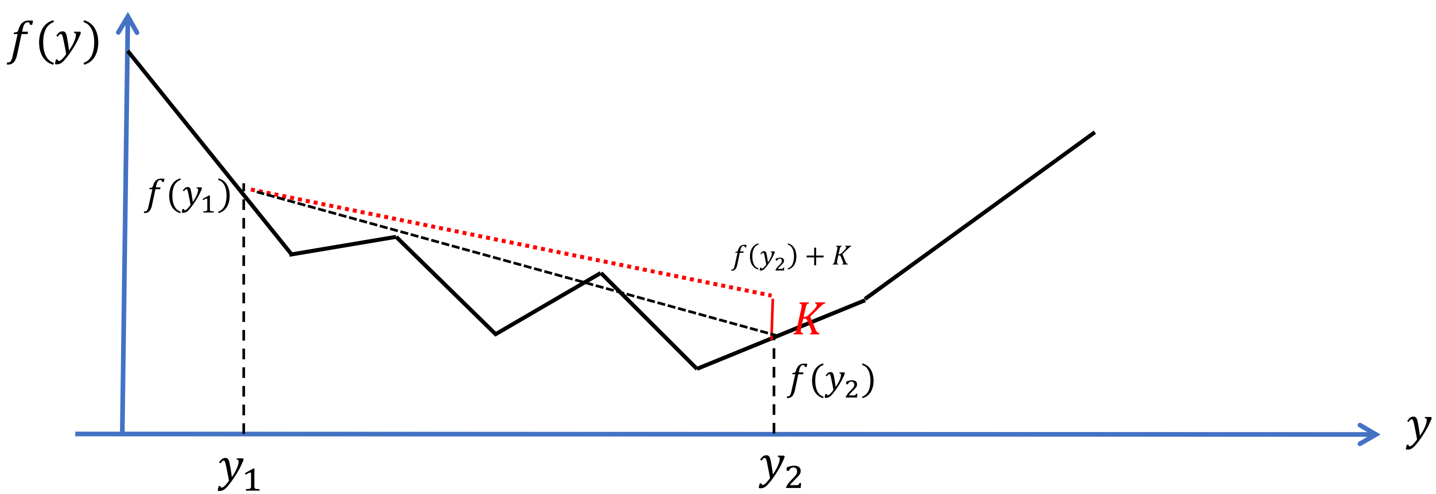
- Inventario estocástico de horizonte finito
- K-convexidad
- Optimalidad de políticas (s_t, S_t)
- Backtracking para políticas (s_t, S_t)

Función K-convexa

Una función f es K-convexa para $K \geq 0$ si para todo $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$ se tiene que $\forall \lambda \in [0,1]$:

$$f\big((1-\lambda)\cdot y_1 + \lambda \cdot y_2\big) \leq (1-\lambda)\cdot f(y_1) + \lambda \cdot (f(y_2) + K)$$

- Equivalente a $f\big((1-\lambda)\cdot y_1 + \lambda \cdot y_2\big) \leq (1-\lambda)\cdot y_1 + \lambda \cdot f(y_2) + \lambda \cdot K$
- Función necesita una ``ayuda de $\lambda \cdot K$´´ para ser convexa



Propiedades de K-convexidad (verificar!)

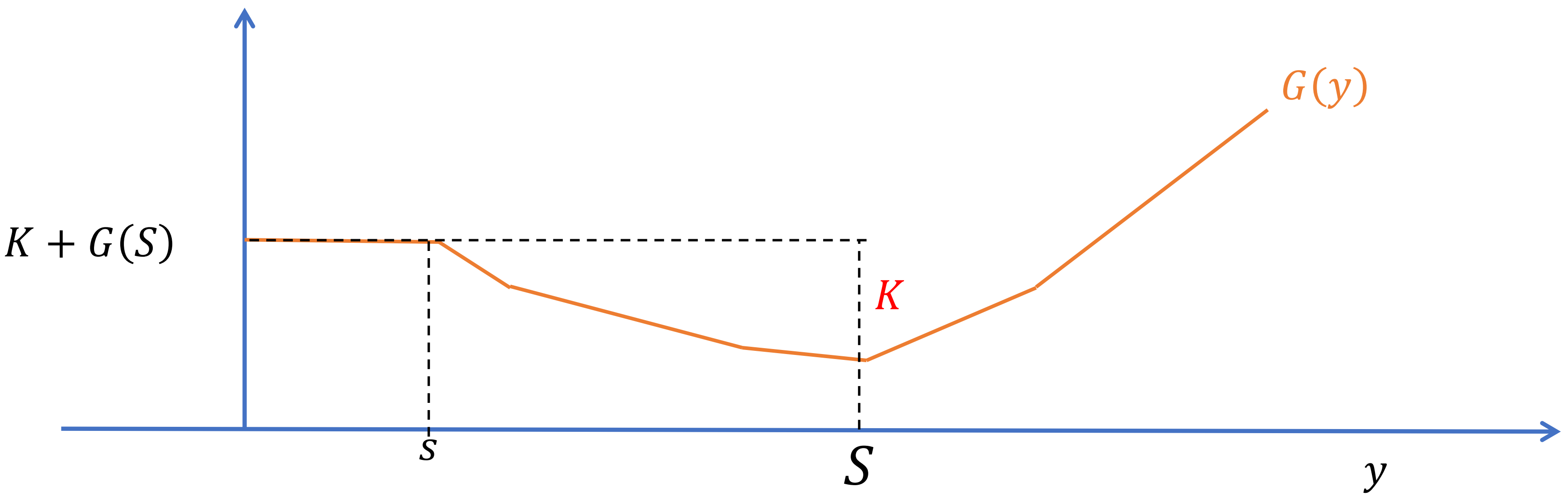
1. Una función K $-$convexa también es K' $-$convexa para $K' \geq K$.

2. Si $f(x)$ es K_1-convexa y $g(x)$ es K_2-convexa, entonces $\alpha f(x) + \beta g(x)$ es $(\alpha K_1 + \beta K_2)$-convexa para $\alpha, \beta \geq 0$

3. Si $f(x)$ es K-convexa, entonces $\mathbb{E}_D(f(x - D))$ es K-convexa.

Función K-convexa

Valor óptimo de función óptima de pérdida del *Newsvendor* es K-convexa:



Teorema 1:

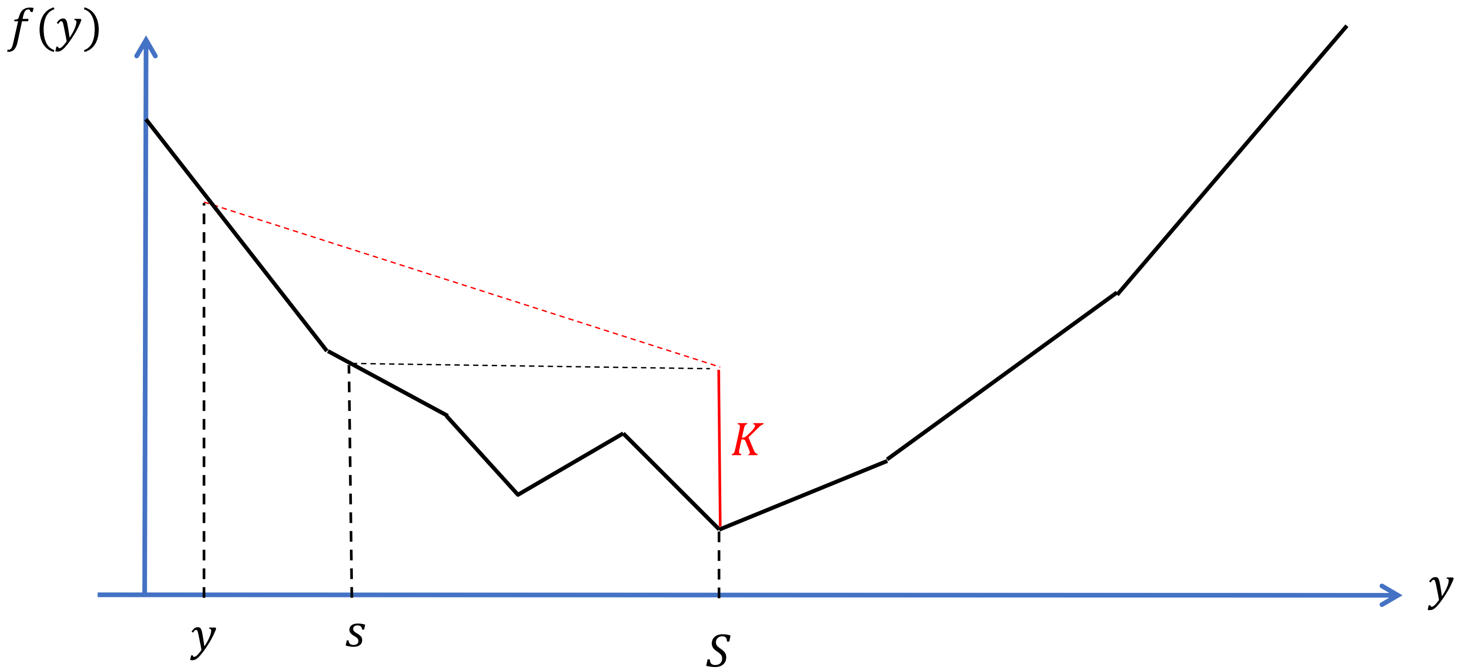
Sean $f(y)$ una función K-convexa y $\lim_{|y|\to\infty} f(y) \to \infty$. Defina:

- $S = \operatorname{argmin}_y f(y)$
- $s \coloneqq \max\{y < S: f(y) = K + f(S)\}$

Entonces:

1. **Si $\boldsymbol{y} \leq \mathbf{s}$ se cumple que $\boldsymbol{f(y) \geq f(s)}$**
2. La función $f(y)$ es no creciente en y $\in [-\infty, s]$
3. Para todo par $y_1, y_2: s \leq y_1 \leq y_2$ se cumple que $f(y_1) \leq f(y_2) + K$

1. Si $y \leq s$ se cumple que $f(y) \geq f(s)$



Por K-convexidad existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $s = (1-\lambda)y + \lambda S$. Luego:

$$f(s) \leq (1-\lambda)\cdot f(y) + \lambda\cdot(f(S)+K) \Leftrightarrow$$

$$f(s) \leq (1-\lambda)\cdot f(y) + \lambda\cdot f(s) \Leftrightarrow$$

$$f(s) \leq f(y)$$

Teorema 1:

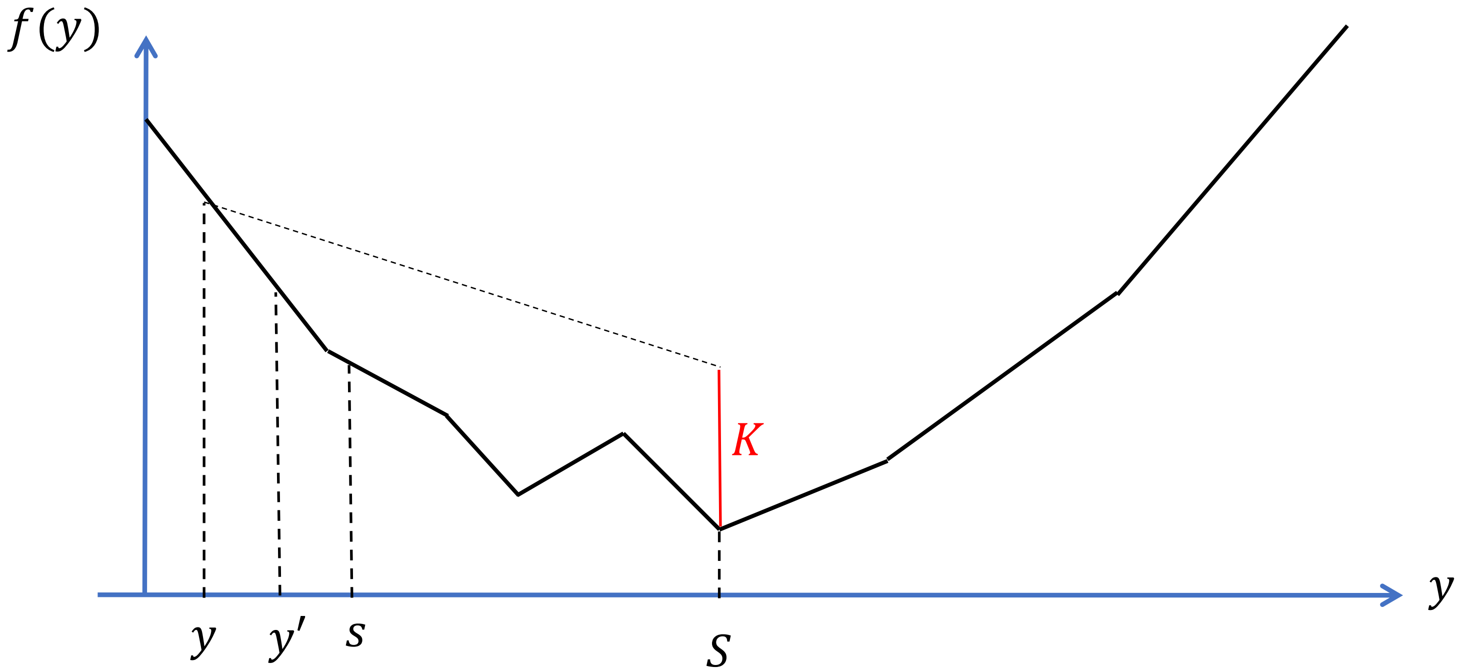
Sean $f(y)$ una función K-convexa y $\lim_{|y|\to\infty} f(y) \to \infty$. Defina:

- $S = \text{argmin}_y\, f(y)$
- $s \coloneqq \max\{y < S : f(y) = K + f(S)\}$

Entonces:

1. **Si $\boldsymbol{y} \leq \mathbf{s}$ se cumple que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{s})$**
2. **La función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ es no creciente en $\mathbf{y} \in [-\infty, \mathbf{s}]$**
3. Para todo par y_1, y_2: $s \leq y_1 \leq y_2$ se cumple que $f(y_1) \leq f(y_2) + K$

2. La función $f(y)$ es no creciente en $y \in [-\infty, s]$



Por K-convexidad existe $\mu \in [0,1]$ tal que $y' = (1-\mu)y + \mu\, S$. Luego:

$$
\begin{aligned}
f(y') &\leq (1-\mu)f(y) + \mu(f(S)+K) && \Leftrightarrow \\
f(y') &\leq (1-\mu)f(y) + \mu f(s) && \Rightarrow \text{(por 1)} \\
f(y') &\leq (1-\mu)f(y) + \mu f(y') && \Leftrightarrow \\
f(y') &\leq f(y)
\end{aligned}
$$

Teorema 1:

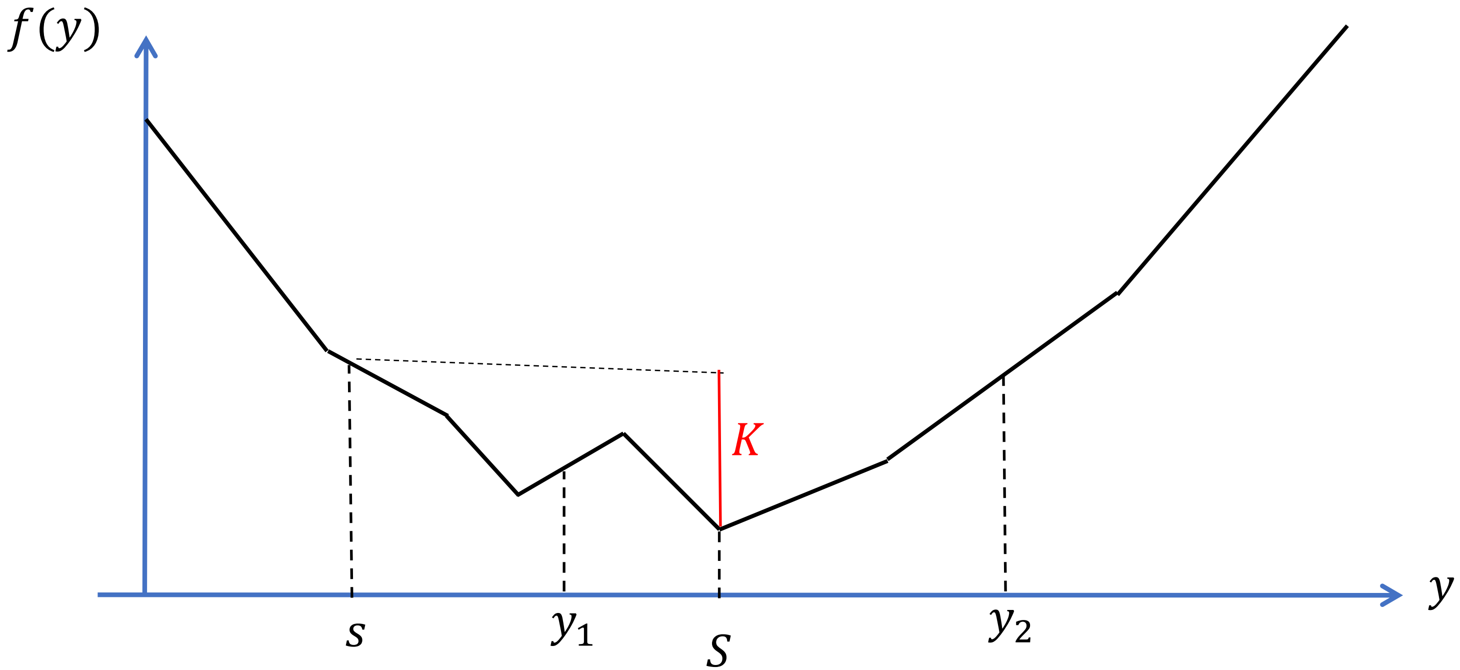
Sean $f(y)$ una función K-convexa y $\lim_{|y|\to\infty} f(y) \to \infty$. Defina:

- $S = \operatorname{argmin}_y f(y)$
- $s \coloneqq \max\{y < S: f(y) = K + f(S)\}$

Entonces:

1. Si $\boldsymbol{y} \leq \mathbf{s}$ se cumple que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{s})$
2. La función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ es no creciente en $\mathbf{y} \in [-\infty, \mathbf{s}]$
3. Para todo par $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$: $\mathbf{s} \leq \boldsymbol{y}_1 \leq \boldsymbol{y}_2$ se cumple que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_2) + \boldsymbol{K}$

3. $\forall y_1, y_2 : s \leq y_1 \leq y_2$ se cumple que $f(y_1) \leq f(y_2) + K$



Caso $\boldsymbol{y_1 \leq S}$:

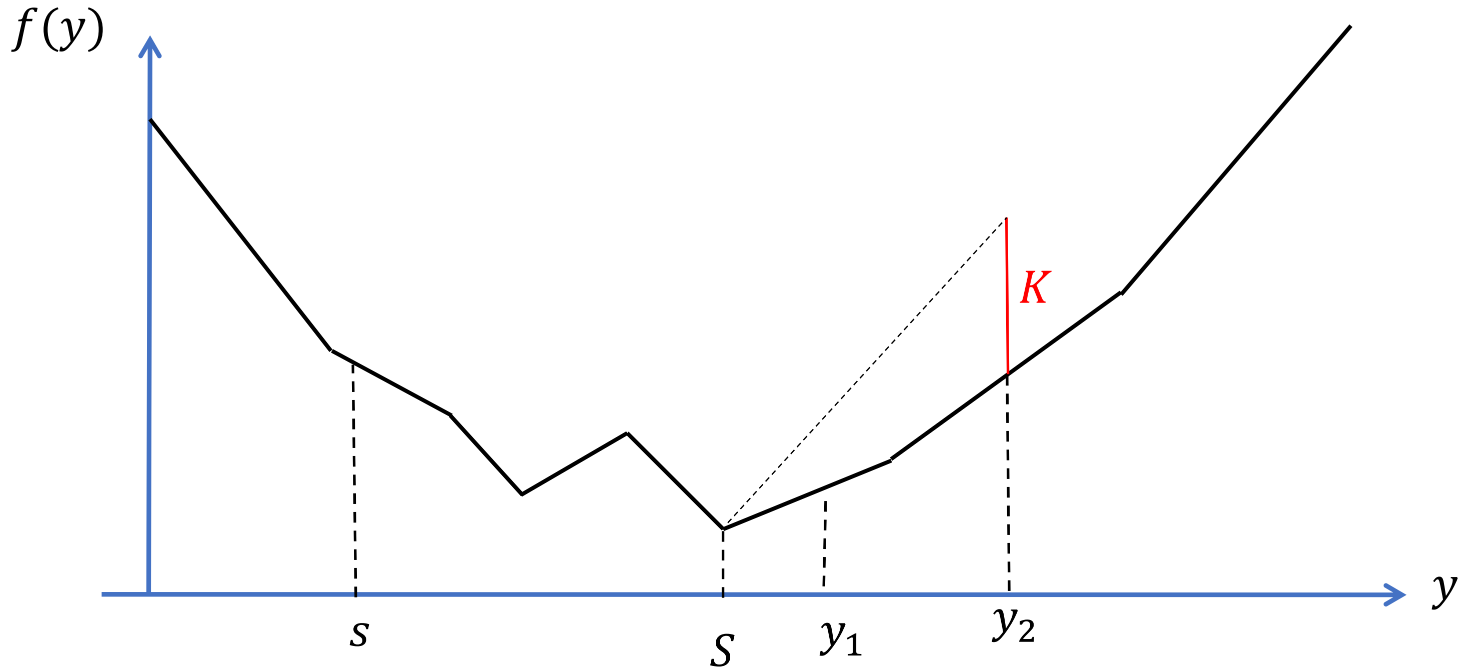
Por K-convexidad existe $t \in [0,1]$ tal que $y_1 = (1-t)s + t\,S$. Luego:

$$f(y_1) \leq (1-t)f(s) + t(f(S)+K) \qquad \Leftrightarrow$$

$$f(y_1) \leq (1-t)(f(S)+K) + t(f(S)+K) \Rightarrow$$

$$f(y_1) \leq f(S) + K \leq f(y_2) + K \qquad \text{(por definición de S)}$$

3. $\forall y_1, y_2: s \leq y_1 \leq y_2$ se cumple que $f(y_1) \leq f(y_2) + K$



Caso $\boldsymbol{y_1 \geq S}$:

Por K-convexidad existe $v \in [0,1]$ tal que $y_1 = (1-v)S + v\, y_2$. Luego:

$$f(y_1) \leq (1-v)f(S) + vf(y_2) + vK \qquad \Rightarrow \text{(por definición de S)}$$

$$f(y_1) \leq (1-v)f(y_2) + vf(y_2) + vK$$

$$f(y_1) \leq f(y_2) + vK$$

Teorema 1:

Sean $f(y)$ una función K-convexa y $\lim_{|y|\to\infty} f(y) \to \infty$. Defina:

- $S = \operatorname{argmin}_y f(y)$
- $s \coloneqq \max\{y < S: f(y) = K + f(S)\}$

Entonces:

1. Si $\boldsymbol{y} \leq \mathbf{s}$ se cumple que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{s})$
2. La función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ es no creciente en $\mathbf{y} \in [-\infty, \mathbf{s}]$
3. Para todo par $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$: $\mathbf{s} \leq \boldsymbol{y}_1 \leq \boldsymbol{y}_2$ se cumple que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_1) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_2) + \boldsymbol{K}$

- En particular:

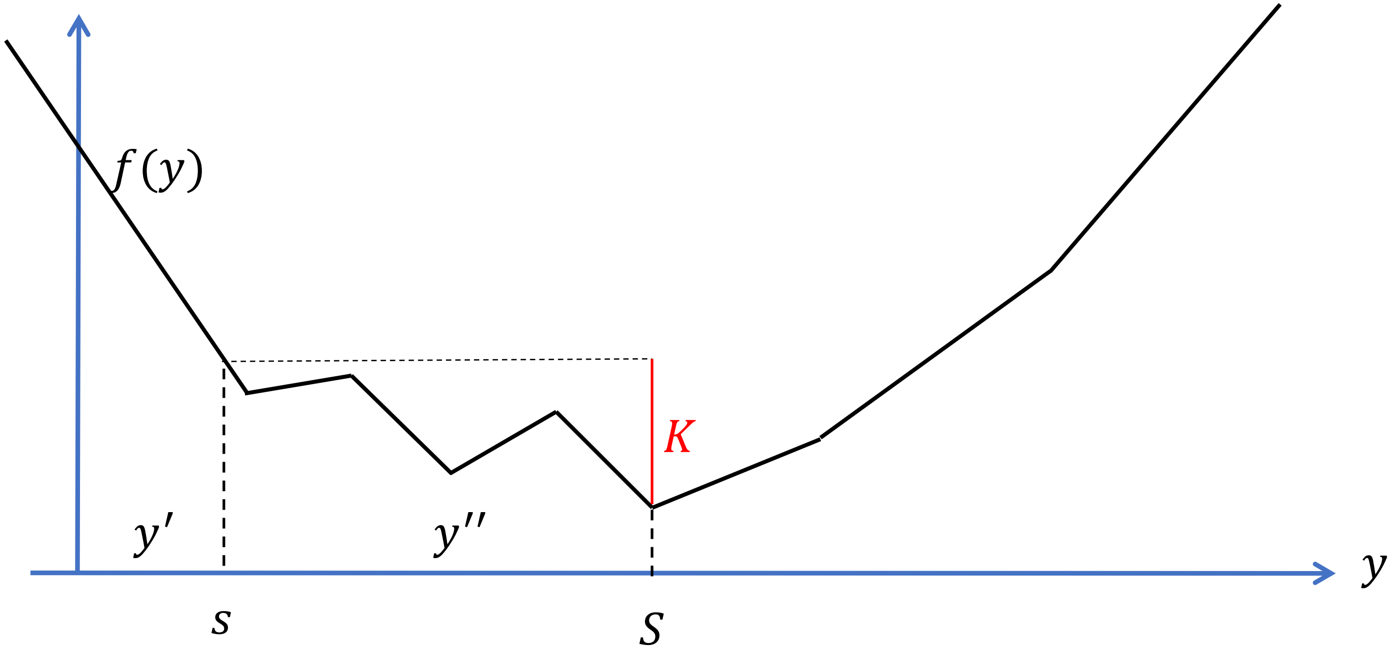
$$\mathbf{f}(\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{S}) + \boldsymbol{K} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}) \text{ si } \mathbf{s} \leq \boldsymbol{y} \leq \mathbf{S}$$

Teorema 2:

Si f es K-convexa, entonces

$$g(y) = \min_{y' \in [y,Q]} \{K \cdot \mathbb{I}_{y' > y} + f(y')\}$$

es K-convexa.

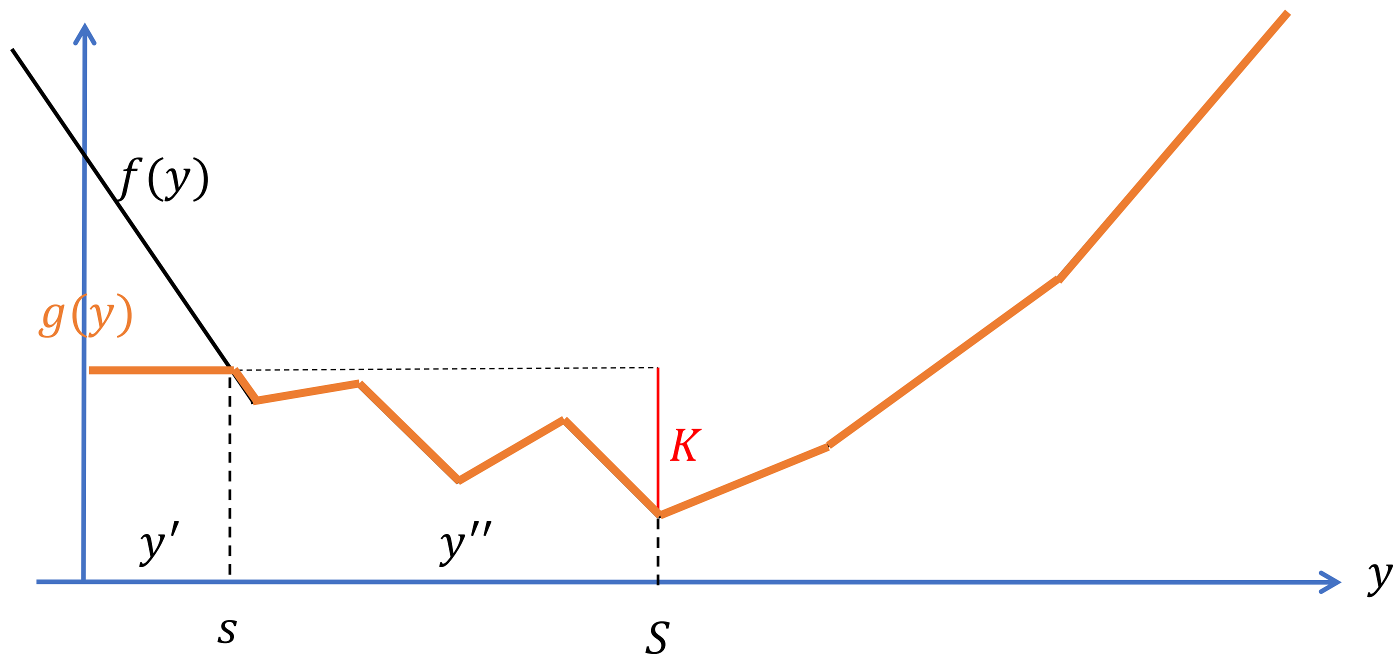


Teorema 2:

Si f es K-convexa, entonces

$$g(y) = \min_{y' \in [y,Q]} \{K \cdot \mathbb{I}_{y'>y} + f(y')\}$$

es K-convexa.



- Inventario estocástico de horizonte finito
- K-convexidad
- Optimalidad de políticas (s_t, S_t)
- Backtracking para políticas (s_t, S_t)

Teorema 3: Optimalidad de Política (s,S)

Considere **la Ecuación de Bellman** para la etapa t y estado $y_t \in [0, Q]$:

$$C_t(y_t) = \min_{y_t' \in [y_t, Q]} \left\{ K \cdot \mathbb{I}_{y_t' > y_t} + G(y_t') + \mathbb{E}_{D_t}\left[C_{t+1}\left((y_t' - D_t)^+ \right) | y_t' \right] \right\} - c y_t$$

Se cumple que:

1. $C_t(y_t)$ es continua y K-convexa para cualquier $t \leq T$
2. En cada $t \leq T$ existen valores (s_t, S_t) tal que una decisión óptima es:

$$d_s^*(y_t) = \begin{cases} S_t \text{ si } y_t < s_t \\ y_t \text{ si } y_t \geq s_t \end{cases}$$

- El primer resultado se prueba por inducción en t utilizando el Teorema 2.
- El Segundo resultado viene del Teorema 1 al ser $C_t(y_t)$ K-convexa.

- Inventario estocástico de horizonte finito
- K-convexidad
- Optimalidad de políticas (s_t, S_t)
- Backtracking para políticas (s_t, S_t)

Backward DP: Inventario Estocástico Multietapa

Terminal: $C_{T+1}(y) = 0$ para todo $y \in [0, Q]$

Recursión para $\boldsymbol{t = T, \ldots, 1}$:

- Calcular S_t que minimiza $G_t(y) = G(y) + \mathbb{E}_D[C_{t+1}((y - D_t)^+)]$ en $y \in [0, Q]$.
- Calcular máximo valor $s_t \leq S_t$ que cumpla $G_t(s_t) = G_t(S_t) + K$
- Para todo $y \in [0, Q]$:

$$C_t(y) = \begin{cases} G_t(S_t) + K - cy & y \leq s_t \\ G_t(y) - cy & y \geq s_t \end{cases}$$

Retornar política óptima $\pi^* = [(s_1, S_1), (s_2, S_2), \ldots, (s_T, S_T)]$

1. Reduce búsqueda a dos valores por etapa (independiente del estado)
2. Resuelve problema de optimización univariado por etapa.

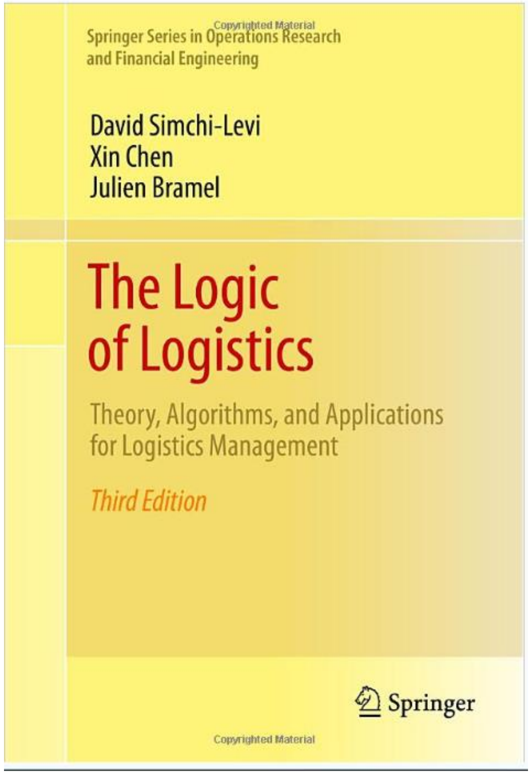
Feedback de salida

SCAN ME

https://forms.gle/NqXAdEbgbnyf6foG6

Segunda Parte:
Clase 2 – Inventario Estocástico Multiperiodo

Optimización Dinámica - ICS



David Simchi-Levi
(Profesor en MIT)

Mathias Klapp