PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

Curso: ICS3105
Semestre: 02-2021
Profesor: Mathias A. Klapp

Tarea 2 - Optimización Dinámica

Fecha de entrega: 15 de Octubre 2021

Instrucciones: Se recomienda usar Latex. Evite respuestas largas y sólo responda lo que se pregunta. El corrector puede solicitar revisar su código fuente, pero su respuesta debe ir completamente en el reporte. Se prohíbe discutir la tarea fuera del grupo.

Inventario estocástico

Considere un problema de inventario estocástico como el desarrollado en clase, donde un tomador de decisiones (*i.e.*, usted) debe ordenar productos al comienzo de cada semana (después de observar inventario) a lo largo de un horizonte de ejecución discreto de $T = 52$ semanas. Específicamente, suponga que inicia en la semana 1 con $y_1 = 30$ unidades almacenadas y que su bodega posee capacidad para $Q = 200$ unidades. La dinámica de eventos en cada semana $t \in \{1, \ldots, T\}$ es la siguiente:

1. Usted observa el inventario del producto en bodega $y_t \in \{0, 1, 2, \ldots, Q\}$.
2. Luego, decide ordenar $x_t \in \{0, 1, \ldots, Q - y_t\}$ unidades de producto a un costo de ordenamiento $\$1500 + 25 \cdot x_t$. El inventario ordenado es repuesto instantáneamente hasta $y'_t = y_t + x_t$.
3. Observa la demanda D_t de la semana t, donde D_t es una variable aleatoria independiente. El cliente recibe todo el producto demandado disponible (es decir, $\min(D_t, y'_t)$) y el sobrante se almacena para la siguiente semana. El costo por unidad-semana en inventario es $h = \$6$ (a pagar si un producto pasa en inventario de una semana a la otra) y el costo por unidad demandada no satisfecha es $q = \$90$.

Asuma que la demanda semanal D_t es discreta y distribuida uniforme en $\left\{\mu_{m(t)} - \delta_{m(t)}, \ldots, \mu_{m(t)} + \delta_{m(t)}\right\}$, donde $m(t)$ es el mes asociado a esa semana t, μ_m es un parámetro de demanda esperada y δ_m es un error. Los valores de los parámetros se encuentran tabulados a continuación para cada mes:

mes m	μ_m	δ_m	Semanas en mes
1	20	4	1–4
2	18	8	5–8
3	30	5	9–13
4	32	7	14–17
5	17	5	18–22
6	18	8	23–26
7	25	7	27–30
8	19	10	31–35
9	18	6	36–39
10	15	2	40–44
11	20	1	45–48
12	40	15	49–52

Preguntas:

- **(5 puntos)** Modele el problema que planifica una política de decisión que minimiza el costo total esperado como un Proceso de Decisión Markoviana (MDP).
- **(10 puntos)** Obtenga el mínimo costo esperado del sistema a lo largo de los 12 meses (optimice sin asumir una estructura (s, S) de antemano). Calcule el tiempo de cómputo requerido para evaluar el mínimo costo esperado y obtener un política de decisión óptima. Verifique que efectivamente la política óptima obtenida posee una estructura (s, S) para cada semana.
- **(10 puntos)** Optimice el problema de nuevo, pero asuma de antemano que busca una política (s, S) para reducir al máximo el tiempo de cómputo y el espacio de búsqueda. Explique que hizo y compare el tiempo de cómputo con respecto al anterior.
- **(15 puntos)** Evalúe el costo esperado de las siguientes políticas heurísticas y compare porcentualmente cada valor con el mínimo costo esperado.
  - Política conservadora que llena la bodega en cada etapa.
  - Política *Newsvendor*, es decir, una política miope que optimiza el costo inmediato en cada etapa sin mirar a futuro.
  - Política óptima del futuro promedio, es decir, una política que decide cuanto ordenar en cada etapa t resolviendo un problema determinista asumiendo valores promedio de demanda futura. **Nota:** Esta es la política que probablemente implementaría alguien no instruido en MDPs.

  Nota: La diferencia entre estos dos valores (costo esperado heurístico y óptimo) se conoce como el "valor de la optimización estocástica", pues mide el aporte marginal de optimizar el MDP.
- **(10 puntos)** Ahora estimaremos el "costo de la incertidumbre" mediante simulación, es decir, la diferencia entre el costo esperado del sistema real con dinamismo de información e incertidumbre y el costo esperado de un sistema análogo donde el planificador conoce toda la demanda de antemano antes de optimizar (*i.e.*, un planificador clarividente). Para ello:
  - Simule una muestra de M vectores de demanda $\{\mathbf{D}^1, \ldots, \mathbf{D}^M\}$.
  - Para cada m-ésima realización anual de demanda $\mathbf{D}^m = \{D_1^m \ldots, D_T^m\}$ con $m \in \{1, \ldots, M\}$ haga lo siguiente:
    * Aplique la política de decisión óptima obtenida anteriormente y calcule el costo ejecutado C^m del sistema para la realización $\mathbf{D}^m$.
    * Ahora optimice el ordenamiento de productos, pero asumiendo que el planificador conoce $\mathbf{D}^m$ de antemano. Llame a este costo optimizado C_{PI}^m (PI viene de *Perfect Information*).
    * Calcule la diferencia de costos $\Delta^m = C^m - C_{PI}^m$. ¿Puede ser negativo?
  - Calcule $\bar{\Delta}$ el promedio de los Δ^m y su desviación muestral S_Δ y estime un intervalo de confianza para el "costo esperado de la incertidumbre" con una precisión relativa al 95% de confianza. Discuta y comente su resultado.
- **(10 puntos)** Ahora supongan que cada vez que ordena productos existe un *Lead Time* L_t, es decir, un tiempo de entrega de la órden que tarda una semana con probabilidad 50%, dos semanas con probabilidad 35% y tres semanas con probabilidad 15%. Modele el problema de inventario estocástico con esa nueva consideración y optimice el problema que minimiza el costo total esperado.