



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Escuela de Ingeniería

Profesor: Mathias Klapp

Ayudante: Agustín Chiu (amchiu@uc.cl), Macarena Navarro (mznnavarro@uc.cl)

Semestre: 2021-2

Ayudantía 4

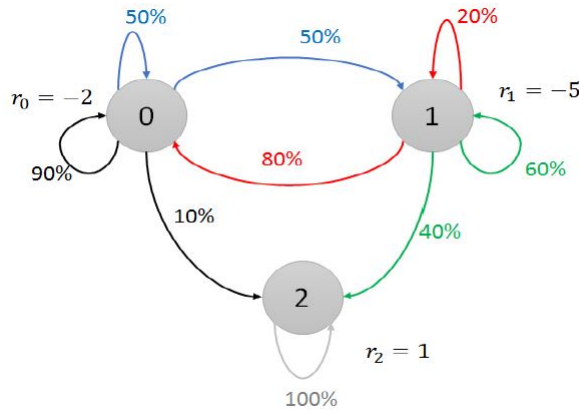
Pregunta 1

Considere un MDP de maximización con horizonte infinito descontado por $\lambda \in [0, 1)$ con espacio de estados \mathbb{S} finito; espacio de decisiones $\mathbb{X}(s)$ finito para cada $s \in \mathbb{S}$; probabilidad de transición $p(s'|s, x)$; y función de valor inmediato $r(s, x) \leq M$, donde M es una constante. Considere el valor óptimo $V^*(s)$ para cada $s \in \mathbb{S}$, donde V^* es su vector.

Muestre que $\max_{s \in \mathbb{S}} \{V^*(s)\} \leq \frac{M}{1-\lambda}$.

Pregunta 2

Considere un proceso de decisión Markoviana de Horizonte Infinito con criterio de valor total descontado. El problema se ilustra en la siguiente figura y posee tres estados $\{0, 1, 2\}$, dos acciones en el estado 0 (azul, negra), dos acciones en el estado 1 (verde, roja) y una acción en el estado 0 (gris). Por período de estadía en cada estado del sistema se generan ganancias inmediatas (independiente de la acción): en el estado 0 se pierde \$2, en el estado 1 se pierde \$5 y en el estado 2 se gana \$1.



- Formule el MDP correspondiente.
- Argumente la existencia de una política óptima estacionaria.
- Escriba el problema de optimización asociado al método de programación lineal. Asuma que su objetivo es minimizar los costos netos. ¿Cómo obtendría la política óptima?

Pregunta 3

Este año aumentó la necesidad de ejercitarse en casa, por lo que creció la demanda de bicicletas estáticas, elípticas y trotadoras. Más aún, por las cuarentenas bajó el volumen de importaciones y los inventarios no se han repuesto (en su mayoría son importados).

Suponga que un empresario nacional decide invertir en una fábrica de trotadoras. Para ello, al comienzo del mes 1 dispone de una nueva línea de producción lista para producir. Una línea de producción “nueva” puede producir 200 trotadoras al mes que se venden inmediatamente en el mercado. Cada una genera una utilidad de \$1000 dólares descontando costos de producción. Sin embargo, la línea “nueva” se desgasta de forma aleatoria para el próximo mes. Con un 23 % de probabilidad la línea de producción seguiría “nueva” el próximo mes, con un 50 % estará “ok”, con un 15 % estará “levemente desgastada”, con un 10 % estará “gravemente desgastada” y con un 2 % terminará “destruida”.

Una línea de producción “ok” también puede producir 200 trotadoras al mes. Sin embargo, con un 25 % de probabilidad seguirá “ok” el próximo mes, con un 50 % estará “levemente desgastada”, con un 20 % estará “gravemente desgastada” o terminará “destruida”.

Una línea de producción “levemente” desgastada reduce su capacidad de producción a 150 trotadoras mensuales y, además, su estado en el próximo mes será: “levemente desgastada” con 30 % de probabilidad, “gravemente desgastada” con 50 % o terminará “destruida”.

Una línea de producción “gravemente desgastada” solo puede producir 100 trotadoras al mes. Para el siguiente mes se mantendrá “gravemente desgastada” con un 70 % de probabilidad o terminará “destruida”.

Finalmente, una línea de producción “destruida” no es capaz de producir.

Cada mes, después de ejecutar la producción y solo si la línea no está “destruida”, el empresario puede realizar mantenciones a línea para que comience como “nueva” el próximo mes. Si la línea está “nueva” u “ok” la mantención cuesta \$150 mil dólares, si está “levemente desgastada” cuesta \$200 mil dólares y si está “gravemente desgastada” cuesta \$400 mil dólares. En el caso de una línea “destruida” solo se puede encargar o no una nueva línea que cuesta \$2.5 millones de dólares y que estará lista para operar al comienzo del mes siguiente.

Suponga que se opera a perpetuidad mes a mes, y que el empresario desea maximizar su retorno esperado descontado a una tasa mensual $\lambda = 0,97$.

- a) Modele un MDP que permita decidir si mantener o no la línea de producción en cada uno de sus posibles estados y decidir si comprar o no una línea de producción nueva si es que termina “destruida”. Explícite el espacio de estados, espacio de acciones en cada estado, retornos y probabilidades de transición. Luego, enuncie cada ecuación de Bellman.
- b) Evalúe la utilidad de la política “siempre mantener la línea, pero nunca comprarla nueva”.

Pregunta 4

Considere una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y suponga que f es una contracción. Demuestre que el sistema de ecuaciones $f(x) = x$ para un $x \in \mathbb{R}^n$ posee solución única.