Take-Home-Eksamen

DM500 Efterår 2023

Marie Kristine Nielsen Lysdal
mlysd23@student.sdu.dk

Jonathan Kilhof Hansen
jonha22@student.sdu.dk

Yunus Aaholm Cevirici
yucev23@student.sdu.dk

November 2023

Contents

Reeksamen februar 2015 opgave 1

I det følgende lader vi $U = \{1, 2, 3, ..., 15\}$ være universet (universal set).

Betragt de to mængder

$$A = \{2n|n \in S\} \text{ og } B = \{3n + 2|n \in S\}$$

hvor $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Angiv samtlige elementer i hver af følgende mængder

(a) A

n tilhører mængde S derfor multiplicere vi elementerne fra S med 2 for at få mængden A

$A = \{2 * 1, 2 * 2, 2 * 3, 2 * 4\}$

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

(b) B

n tilhører mængde S, derfor multiplicere vi elementerne fra S med 3, for derfor at addere med 2. Tilsidst har vi mængde B.

$B = \{3 * 1 + 2, 3 * 2 + 2, 3 * 3 + 2, 3 * 4 + 2\}$

$B = \{5, 8, 11, 14\}$

(c) $A \cap B$

Vi tager mængderne A og B og finder de elementer de har til fælles.

$A \cap B = \{8\}$

(d) $A \cup B$

Vi tager mængderne A og B og laver en større enhed ud fra mængderne.

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 11, 14\}$

(e) $A - B$

Vi tager mængderne fra A og fjerne de elementer som også findes i mængde B.

$A - B = \{2, 4, 6\}$

(f) $\overline{A}$

Vi trækker elemterne fra mængde A fra mængde U

$U - A = \{2, 4, 6, 8\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

$\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

Reeksamen februar 2015 opgave 2

(a) Hvilke af følgende udsagn er sande?

1. $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y$

   Udsagnet er sandt, da der godt kan finde et y som er større end x.

2. $\forall x \in \mathbb{N} : \exists! y \in \mathbb{N} : x < y$

   Udsagnet er falsk, da der altid vil kunne findes et x, der er større end et specifik y.

3. $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x < y$

   Udsagnet er falsk, fordi x kan være lig med y.

(b) Angiv negeringen af udsagn 1. fra spørgsmål a.

Negerings-operatoren ($\neg$) må ikke indgå i dit udsagn.

$\neg\forall x \in \mathbb{N} : \neg\exists y \in \mathbb{N} : x < y$

$= \exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x < y$

Reeksamen februar 2015 opgave 3

Lad R, S og T være binære relationer på mængden 1, 2, 3, 4.

0.1 Lad R = (1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4).

Er R en partiel ordning?

For at R er en partiel ordning kræver det at den er:

- Reflexiv
- Anti Symetrisk
- Transitativ

Vi kan tjekke om den er reflexiv via tjekke om hvert element i vores mængde relatere til sig selv. Vi kan derfor tjekke om

$$\forall a \in \mathbf{Z} : a = a | 1 \leq a \leq 4$$

Da det udsagn er sandt kan vi bekræfte at vores relation er reflexiv

Det næste vi skal kan tjekke er om den er Anti Symetrisk. Det kan gøres ved at tjekke hvis element a relatere til b så skal element b ikke relatere til element a

Vi kan se det via udsagnet

$$\nexists a, b \in \mathbf{Z} : (a, b) \wedge (b, a) | 1 \leq a, b \leq 4$$

Da vi kan se at udsagnet er sandt ved vi at relationen er Anti Symetrisk

Det sidste vi skal tjekke er omkring vores relation er transitiv. Det kan gøres ved at se om hvis der er et element a som relatere til element b og element b reletere til element c så skal element a også reletere til element c Det kan gøres via følghende udsagn

$$\forall a, b, c \in \mathbf{Z} : (a, b) \wedge (b, c) \Rightarrow (a, c) | 1 \leq a, b, c \leq 4$$

Da den også er transitiv kan vi se at den møder de tre krav vi havde for at det skulle være en partiel ordning og kan derfor bekræfte at R er en partiel ordning

0.2 Lad S = (1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 2).

Angiv den transitive lukning af S.

For at S er en transitiv realation kræver det at følgende udsagn er sandt

$$\forall a, b, c \in \mathbf{S} : (a, b) \wedge (b, c) \Rightarrow (a, c)$$

Vi kan dog se at dette udsagn ikke holder da vi kan se at $(1, 2) \wedge (2, 3) \Rightarrow (1, 3)$ og $(1, 2) \wedge (2, 4) \Rightarrow (1, 4)$ begge er falske. Vi kan derfor konkludere at den transitive lukning af S er

$$t(S) = S \cup \{(1,3),(1,4)\}$$

0.3 Lad T = (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)

Bemærk, at T er en ækvivalens-relation.

Angiv T's ækvivalens-klasser.

T's ækvivalens-klasser er

$$[1] = \{(1,1),(1,3)\}$$

$$[2] = \{(2,2),(2,4)\}$$

$$[3] = \{(3,3),(3,1)\}$$

$$[4] = \{(4,4),(4,2)\}$$

Reeksamen januar 2012 opgave 1

Betragt funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$g(x) = 2x - 2$$

(a) Er f en bijektion?

(b) Har f en invers funktion?

(c) Angiv $f + g$

(d) Angiv $g \circ f$

Svar

(a) Nej for selv om at f er surjektiv er den ikke injektiv. For at være bijektiv skal den være begge.

(b) f har ikke en invers funktion da definitionen for at finde den inverse funktion siger at den kun kan findes, hvis og kun hvis, funktionen er bijektiv.

(c) $f(x) + g(x) = (x^2 + x + 1) + (2x - 2) = x^2 + 2x + x - 1 = x^2 + 3x - 1$

(d) $g(f(x)) = 2(x^2 + x + 1) - 2 = 2x^2 + 2x$