オペレーションズ・リサーチ I (3)

田中 俊二

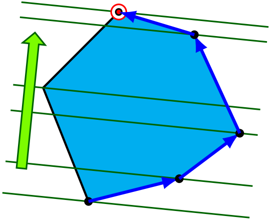
shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

スケジュール

No.	内容
1	オペレーションズ・リサーチと最適化，線形計画問題の基礎 (1)
2	線形計画問題の基礎 (2)，線形計画問題の標準形
3	シンプレックス (単体) 法 1
4	シンプレックス (単体) 法 2，2 段階シンプレックス法
5	双対問題，双対定理，相補性定理
6	双対シンプレックス法，ファルカス補題，感度分析
7	内点法

シンプレックス法の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   - 最適解 (存在するなら) は多面体の端点 ⇒ 端点だけに注目
   - 端点：連立 1 次方程式の解
2. 実行可能領域が凸多面体
   - 目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる
   - すべての端点を調べるよりはるかに効率的
   - 次の端点への移動：掃き出し法 (ガウスの消去法) と同様の操作



対象とする線形計画問題・仮定

線形計画問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

仮定

最適解を持つ．また，係数行列 A の各行は 1 次独立

1 次独立ではない例 (その 1)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 && \text{(制約 1)} \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 && \text{(制約 2)} \\ 3x_1 + x_2 + x_3x + 3x_4 &= 4 && \text{(制約 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}'_1 &= (1,\ 2,\ -1,\ 2) && \text{(制約 1)} \\ \boldsymbol{a}'_2 &= (2,\ -1,\ 2,\ 1) && \text{(制約 2)} \\ \boldsymbol{a}'_3 &= (3,\ 1,\ 1,\ 3) && \text{(制約 3)} \\ \boldsymbol{a}'_3 &= \boldsymbol{a}'_1 + \boldsymbol{a}'_2 \end{aligned}$$

(制約 3)=(制約 1)+(制約 2) なので (制約 3) は**不要**

1 次独立ではない例 (その 2)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 && \text{(制約 1)} \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 && \text{(制約 2)} \\ 3x_1 + x_2 + x_3x + 3x_4 &= 5 && \text{(制約 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{a}'_3 = \boldsymbol{a}'_1 + \boldsymbol{a}'_2 \\ 5 \neq 1 + 3 \end{gathered}$$

(制約 1)，(制約 2)，(制約 3) が同時に成り立つことはないので**実行不可能**

ここからの説明の流れ

1. 実行可能領域の端点の求め方
    - 基底変数・非基底変数
    - 実行可能基底解
2. 目的関数の増加方向に端点を辿る方法
    - 相対コスト係数
    - 基底変数・非基底変数の入れ替え
3. 各端点における計算の簡略化
    - シンプレックスタブロー (単体表)
    - ピボット操作

ここからの説明の流れ

1. **実行可能領域の端点の求め方**
   - **基底変数・非基底変数**
   - **実行可能基底解**
2. 目的関数の増加方向に端点を辿る方法
   - 相対コスト係数
   - 基底変数・非基底変数の入れ替え
3. 各端点における計算の簡略化
   - シンプレックスタブロー (単体表)
   - ピボット操作

実行可能領域の端点の求め方

線形計画問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}．各行は 1 次独立
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

端点の求め方

実行可能領域の端点の求め方

線形計画問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}．各行は 1 次独立
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

端点の求め方

2 次元平面　2 つの直線の交点: 1 次方程式 ×2

実行可能領域の端点の求め方

線形計画問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}．各行は 1 次独立
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

端点の求め方

2 次元平面	2 つの直線の交点: 1 次方程式 ×2
3 次元空間	3 つの平面の交点: 1 次方程式 ×3

実行可能領域の端点の求め方

線形計画問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^{\top}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}．各行は 1 次独立
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

端点の求め方

2 次元平面	2 つの直線の交点: 1 次方程式 ×2
3 次元空間	3 つの平面の交点: 1 次方程式 ×3
n 次元空間	n 個の超平面 (hyperplane) の交点: 1 次方程式 ×n

実行可能領域の端点の求め方

線形計画問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}．各行は 1 次独立
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

端点の求め方

2 次元平面　2 つの直線の交点: 1 次方程式 ×2
3 次元空間　3 つの平面の交点: 1 次方程式 ×3
n 次元空間　n 個の超平面 (hyperplane) の交点: 1 次方程式 $\times n$

等式標準形の場合

- m 個の 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- $n - m$ 個の 1 次方程式 $x_{i_1} = 0, x_{i_2} = 0, \ldots, x_{i_{n-m}} = 0$ $(1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{n-m} \leq n)$

実行可能領域の端点の求め方

線形計画問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}．各行は 1 次独立
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

端点の求め方

2 次元平面	2 つの直線の交点: 1 次方程式 ×2
3 次元空間	3 つの平面の交点: 1 次方程式 ×3
n 次元空間	**n 個の超平面 (hyperplane) の交点: 1 次方程式 $\times n$**

等式標準形の場合

- m 個の 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- $n - m$ **個の 1 次方程式** $x_{i_1} = 0$, $x_{i_2} = 0$, $\ldots$, $x_{i_{n-m}} = 0$ ($1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{n-m} \leq n$)

- 式を簡単化するため $i_1 = m + 1, i_2 = m + 2, \ldots, i_{n-m} = n$ と仮定
  (決定変数の番号を付け替えればよい)
- つまり $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$

実行可能領域の端点の求め方 (続き)

決定変数ベクトルの分割

- 決定変数ベクトル: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \end{pmatrix}$ ($\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$: $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$ とした部分)
- A も $\boldsymbol{x}$ に合わせて $A = \begin{pmatrix} A_\mathrm{B} & A_\mathrm{N} \end{pmatrix}$ と分割

$$\begin{tikzcd}
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \arrow[r, Rightarrow] & \begin{pmatrix} A_\mathrm{B} & A_\mathrm{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & & \begin{pmatrix} A_\mathrm{B} & A_\mathrm{N} \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \\
\begin{matrix} x_{m+1} = 0 \\ \cdots \\ x_n = 0 \end{matrix} \arrow[r, Rightarrow] & \boldsymbol{x}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

$\begin{pmatrix} A_\mathrm{B} & A_\mathrm{N} \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ が唯一解を持つ $\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} A_\mathrm{B} & A_\mathrm{N} \\ O & I \end{pmatrix}$ が正則 $\Longleftrightarrow$ **A_B が正則**

A_B が正則になるよう $\boldsymbol{x}_\mathrm{B}, \boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ を決める必要がある (正則でない ⇒ 端点ではない)

基底変数と非基底変数

A_{B} **が正則** $\Longleftrightarrow$ A_{B} の列が 1 次独立 $\Longleftrightarrow$ A_{B} の列が $\mathbb{R}^m$ の**基底**

基底変数 (basic variable) ・**非基底変数** (nonbasic variable)

基底変数　$x_1, x_2, \ldots, x_m$ (ベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$)

非基底変数　$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ (ベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$)

$$\begin{pmatrix} A_{\mathrm{B}} & A_{\mathrm{N}} \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} A_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

基底解 (basic solution) ・**実行可能基底解** (basic feasible solution)

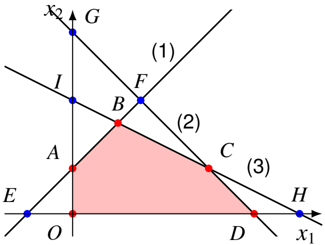
基底解　非基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ を $\boldsymbol{0}$ として得られる解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

実行可能基底解　$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ を満たす基底解 = 実行可能領域の端点

基底変数の例

$$
\begin{array}{rrcrcll}
\text{max} & x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 & (1) \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 & (2) \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 & (3) \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcccccll}
\text{max} & x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & + & x_2 & + s_1 & & & = & 1 & (1) \\
 & x_1 & + & x_2 & & + s_2 & & = & 4 & (2) \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & + s_3 & = & 5 & (3) \\
 & x_1, & & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	?
	D	(2) と $x_2 = 0$	
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	
	F	(1) と (2)	
	G	(2) と $x_1 = 0$	
	H	(3) と $x_2 = 0$	
	I	(3) と $x_1 = 0$	

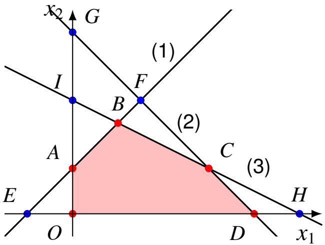
スラック変数を基底変数に選ぶ意味

- スラック変数が 0 より大きくなることを想定
- 対応する制約条件の境界は考慮しないことを意味する

基底変数の例

$$
\begin{array}{rrcll}
\max & x_1 + 3x_2 & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 + x_2 & \le & 1 & (1) \\
 & x_1 + x_2 & \le & 4 & (2) \\
 & x_1 + 2x_2 & \le & 5 & (3) \\
 & x_1,\ x_2 & \ge & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcll}
\max & x_1 + 3x_2 & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 + x_2 + s_1 & = & 1 & (1) \\
 & x_1 + x_2 + s_2 & = & 4 & (2) \\
 & x_1 + 2x_2 + s_3 & = & 5 & (3) \\
 & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 & \ge & 0 &
\end{array}
$$



	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	
	F	(1) と (2)	
	G	(2) と $x_1 = 0$	
	H	(3) と $x_2 = 0$	
	I	(3) と $x_1 = 0$	

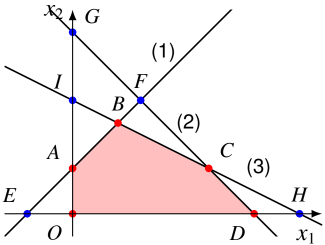
スラック変数を基底変数に選ぶ意味

- スラック変数が 0 より大きくなることを想定
- 対応する制約条件の境界は考慮しないことを意味する

基底変数の例

$$\begin{array}{lrl}\text{max} & x_1 + 3x_2 & \\ \text{s.t.} & -x_1 + \ \ x_2 \le 1 & (1) \\ & x_1 + \ \ x_2 \le 4 & (2) \\ & x_1 + 2x_2 \le 5 & (3) \\ & x_1, \quad x_2 \ge 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}\text{max} & x_1 + 3x_2 & \\ \text{s.t.} & -x_1 + \ \ x_2 + s_1 \qquad\qquad = 1 & (1) \\ & x_1 + \ \ x_2 \qquad + s_2 \qquad = 4 & (2) \\ & x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + s_3 = 5 & (3) \\ & x_1, \quad x_2, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0 & \end{array}$$



	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	?
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	
	F	(1) と (2)	
	G	(2) と $x_1 = 0$	
	H	(3) と $x_2 = 0$	
	I	(3) と $x_1 = 0$	

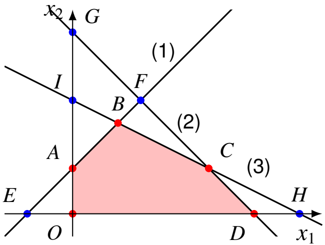
スラック変数を基底変数に選ぶ意味

- スラック変数が 0 より大きくなることを想定
- 対応する制約条件の境界は考慮しないことを意味する

基底変数の例

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{max} & x_1 + 3x_2 & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 + \ x_2 & \le & 1 & (1) \\
 & x_1 + \ x_2 & \le & 4 & (2) \\
 & x_1 + 2x_2 & \le & 5 & (3) \\
 & x_1, \ \ x_2 & \ge & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrcl}
\text{max} & x_1 + 3x_2 & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 + \ x_2 + s_1 & = & 1 & (1) \\
 & x_1 + \ x_2 \qquad + s_2 & = & 4 & (2) \\
 & x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + s_3 & = & 5 & (3) \\
 & x_1, \ \ x_2, \ \ s_1, \ \ s_2, \ \ s_3 & \ge & 0 &
\end{array}
$$



	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_3
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	
	F	(1) と (2)	
	G	(2) と $x_1 = 0$	
	H	(3) と $x_2 = 0$	
	I	(3) と $x_1 = 0$	

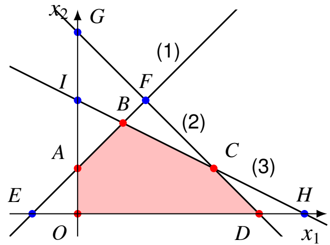
スラック変数を基底変数に選ぶ意味

- スラック変数が 0 より大きくなることを想定
- 対応する制約条件の境界は考慮しないことを意味する

基底変数の例

$$\begin{array}{rrcrcll} \max & x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{s.t.} & -x_1 & + & x_2 & \le & 1 & (1) \\ & x_1 & + & x_2 & \le & 4 & (2) \\ & x_1 & + & 2x_2 & \le & 5 & (3) \\ & x_1, & & x_2 & \ge & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcccccll} \max & x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & \\ \text{s.t.} & -x_1 & + & x_2 & + s_1 & & & = & 1 & (1) \\ & x_1 & + & x_2 & & + s_2 & & = & 4 & (2) \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & + s_3 & = & 5 & (3) \\ & x_1, & & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \ge & 0 & \end{array}$$



	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_3
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	x_1, s_2, s_3
	F	(1) と (2)	x_1, x_2, s_3
	G	(2) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_3
	H	(3) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_2
	I	(3) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_2

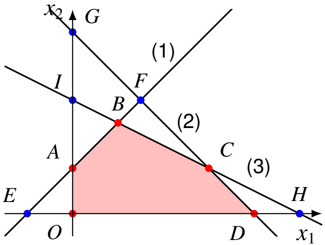
スラック変数を基底変数に選ぶ意味

- スラック変数が 0 より大きくなることを想定
- 対応する制約条件の境界は考慮しないことを意味する

基底解の例

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & + & x_2 & \leq 1 & (1) \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq 4 & (2) \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq 5 & (3) \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcccl}
\max & x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & + & x_2 & + s_1 & & = 1 & (1) \\
 & x_1 & + & x_2 & & + s_2 & = 4 & (2) \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & + s_3 & = 5 & (3) \\
 & x_1, & & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 \geq 0 &
\end{array}
$$



	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_3
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	x_1, s_2, s_3
	F	(1) と (2)	x_1, x_2, s_3
	G	(2) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_3
	H	(3) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_2
	I	(3) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_2

端点 O に対応する実行可能基底解

$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$ を連立して，$(x_1, x_2) = (0, 0)$．(1), (2), (3) に代入して，

$(s_1, s_2, s_3) = (1, 4, 5)$．$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

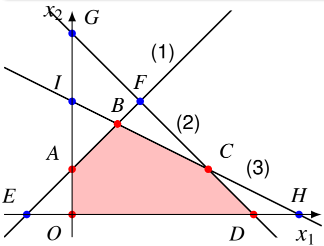
基底解の例

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + s_1 = 1 \quad (1) \\ & x_1 + x_2 + s_2 = 4 \quad (2) \\ & x_1 + 2x_2 + s_3 = 5 \quad (3) \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_3
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	x_1, s_2, s_3
	F	(1) と (2)	x_1, x_2, s_3
	G	(2) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_3
	H	(3) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_2
	I	(3) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_2

端点 O に対応する実行可能基底解 (行列を用いた計算)

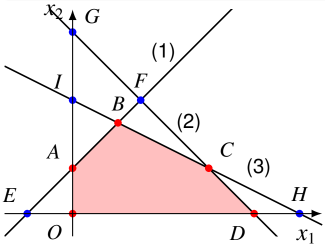
$$A_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基底解の例

$$\begin{aligned} \max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$



$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 + 3x_2 & & & & & & \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 + s_1 & & & = 1 & (1) \\ & x_1 + x_2 & + s_2 & & = 4 & (2) \\ & x_1 + 2x_2 & & + s_3 & = 5 & (3) \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 & & & & \end{array}$$

	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	$s_1,\ s_2,\ s_3$
	A	(1) と $x_1 = 0$	$x_2,\ s_2,\ s_3$
	B	(1) と (3)	$x_1,\ x_2,\ s_2$
	C	(2) と (3)	$x_1,\ x_2,\ s_1$
	D	(2) と $x_2 = 0$	$x_1,\ s_1,\ s_3$
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	$x_1,\ s_2,\ s_3$
	F	(1) と (2)	$x_1,\ x_2,\ s_3$
	G	(2) と $x_1 = 0$	$x_2,\ s_1,\ s_3$
	H	(3) と $x_2 = 0$	$x_1,\ s_1,\ s_2$
	I	(3) と $x_1 = 0$	$x_2,\ s_1,\ s_2$

端点 A に対応する実行可能基底解

$-x_1 + x_2 = 1$ と $x_1 = 0$ を連立して，$(x_1, x_2) = (0, 1)$． (1), (2), (3) に代入して，

$$(s_1, s_2, s_3) = (0, 3, 3).\quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基底解の例

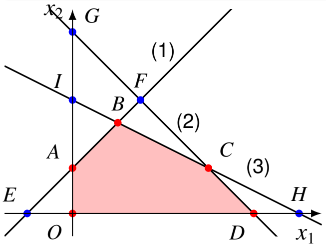
$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llllllll} \max & x_1 + 3x_2 & & & & & & \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 + s_1 & & & = 1 & (1) \\ & x_1 + x_2 & + s_2 & & = 4 & (2) \\ & x_1 + 2x_2 & & + s_3 & = 5 & (3) \\ & x_1, \ x_2, \ s_1, & s_2, & s_3 & \geq 0 & \end{array}$$

	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_3
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	x_1, s_2, s_3
	F	(1) と (2)	x_1, x_2, s_3
	G	(2) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_3
	H	(3) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_2
	I	(3) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_2



端点 A に対応する実行可能基底解 (行列を用いた計算)

$$A_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

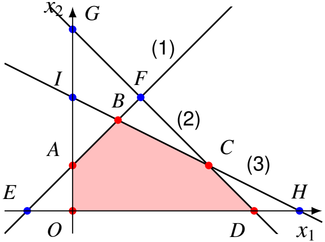
基底解の例

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + s_1 = 1 \quad (1) \\ & x_1 + x_2 + s_2 = 4 \quad (2) \\ & x_1 + 2x_2 + s_3 = 5 \quad (3) \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_3
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	x_1, s_2, s_3
	F	(1) と (2)	x_1, x_2, s_3
	G	(2) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_3
	H	(3) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_2
	I	(3) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_2

端点 F に対応する (実行不可能) 基底解

$-x_1 + x_2 = 1$ と $x_1 + x_2 = 4$ を連立して，$(x_1, x_2) = (3/2, 5/2)$．(1), (2), (3) に代入して，$(s_1, s_2, s_3) = (0, 0, -3/2)$．$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

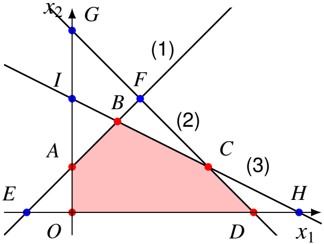
基底解の例

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lllllll} \max & x_1 + 3x_2 & & & & & \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 + s_1 & & & = 1 & (1) \\ & x_1 + x_2 & + s_2 & & = 4 & (2) \\ & x_1 + 2x_2 & & + s_3 & = 5 & (3) \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 & & & & \end{array}$$



	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_3
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	x_1, s_2, s_3
	F	(1) と (2)	x_1, x_2, s_3
	G	(2) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_3
	H	(3) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_2
	I	(3) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_2

端点 F に対応する (実行不可能) 基底解 (行列を用いた計算)

$$A_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

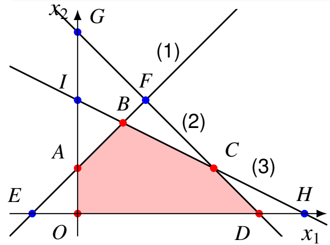
基底解の例

$$
\begin{array}{rl}
\max & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

$$\boldsymbol{c}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{rlr}
\max & x_1 + 3x_2 & \\
\text{s.t.} & -x_1 + x_2 + s_1 = 1 & (1) \\
 & x_1 + x_2 + s_2 = 4 & (2) \\
 & x_1 + 2x_2 + s_3 = 5 & (3) \\
 & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 &
\end{array}
$$



	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_3
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	x_1, s_2, s_3
	F	(1) と (2)	x_1, x_2, s_3
	G	(2) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_3
	H	(3) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_2
	I	(3) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_2

端点 B に対応する実行可能基底解

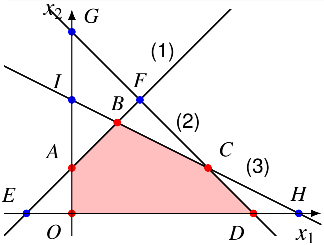
基底解の例

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{max} & x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.t.} & -x_1 + \ x_2 + s_1 & = 1 & (1) \\ & x_1 + \ x_2 \quad + s_2 & = 4 & (2) \\ & x_1 + 2x_2 \qquad + s_3 & = 5 & (3) \\ & x_1, \ x_2, \ s_1, \ s_2, \ s_3 & \geq 0 & \end{array}$$



	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_3
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	x_1, s_2, s_3
	F	(1) と (2)	x_1, x_2, s_3
	G	(2) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_3
	H	(3) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_2
	I	(3) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_2

端点 B に対応する実行可能基底解

$-x_1 + x_2 = 1$ と $x_1 + 2x_2 = 5$ を連立して，$(x_1, x_2) = (1, 2)$．(1), (2), (3) に代入して，$(s_1, s_2, s_3) = (0, 1, 0)$．$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

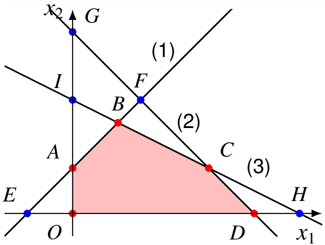
基底解の例

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^{\top}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c}^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\top}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + s_1 & = 1 \quad & (1) \\ & x_1 + x_2 + s_2 & = 4 \quad & (2) \\ & x_1 + 2x_2 + s_3 & = 5 \quad & (3) \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 & & \end{aligned}$$

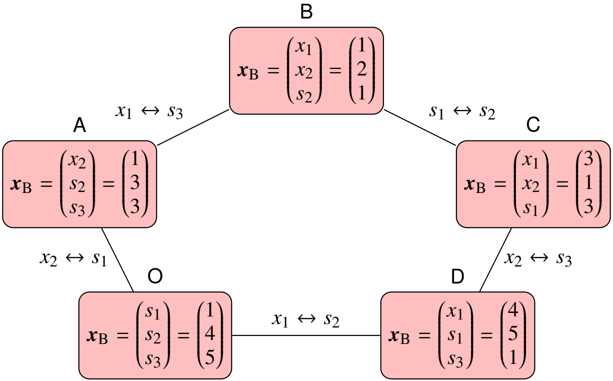


	端点	境界線	基底変数
実行可能	O	$x_1 = 0$ と $x_2 = 0$	s_1, s_2, s_3
	A	(1) と $x_1 = 0$	x_2, s_2, s_3
	B	(1) と (3)	x_1, x_2, s_2
	C	(2) と (3)	x_1, x_2, s_1
	D	(2) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_3
実行不可能	E	(1) と $x_2 = 0$	x_1, s_2, s_3
	F	(1) と (2)	x_1, x_2, s_3
	G	(2) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_3
	H	(3) と $x_2 = 0$	x_1, s_1, s_2
	I	(3) と $x_1 = 0$	x_2, s_1, s_2

端点 B に対応する実行可能基底解 (行列を用いた計算)

$$A_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

実行可能基底解の関係



B: $$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A: $$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

C: $$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

O: $$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

D: $$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 基底変数・非基底変数を 1 組入れ替えることで実行可能領域の端点間を移動可能
- 目的関数値が増加する方向に移動したい

目的関数の増加方向に端点を辿る方法

1. 実行可能領域の端点の求め方
    - 基底変数・非基底変数
    - 実行可能基底解
2. **目的関数の増加方向に端点を辿る方法**
    - **相対コスト係数**
    - **基底変数・非基底変数の入れ替え**
3. 各端点における計算の簡略化
    - シンプレックスタブロー (単体表)
    - ピボット操作

目的関数と非基底変数の関係

方針

- 目的関数の増加方向に端点を辿る ⇒ 基底変数と非基底変数の入れ替え
- 基底変数と非基底変数を入れ替えると，両方の変数の値が変わる
  ⇒ ややこしいので，目的関数を非基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ だけで表す

(a) 基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ を非基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ で表す

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \text{(制約条件)}$$

$$\begin{pmatrix} A_{\mathrm{B}} & A_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \qquad \text{(基底変数・非基底変数に分割)}$$

$$A_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b} \qquad \text{(行列の積を書き下す)}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \qquad \text{(両辺に左から } A_{\mathrm{B}}^{-1} \text{ をかける)}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \qquad \text{(移項)}$$

目的関数と非基底変数の関係 (続き)

(b) 目的関数 $f = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ に代入

$$
\begin{aligned}
f &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} && \text{(目的関数 } \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \text{ を } f \text{ とおいた)} \\
f &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top & \boldsymbol{c}_\mathrm{N}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \end{pmatrix} && \left(\boldsymbol{c} \text{ も } \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_\mathrm{B} \\ c_\mathrm{N} \end{pmatrix} \text{ と分割}\right) \\
f &= \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{B} + \boldsymbol{c}_\mathrm{N}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N} && \text{(行列の積を書き下す)} \\
f &= \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top (A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} - A_\mathrm{B}^{-1} A_\mathrm{N} \boldsymbol{x}_\mathrm{N}) + \boldsymbol{c}_\mathrm{N}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N} && (\boldsymbol{x}_\mathrm{B} \text{ を消去)} \\
f &= \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1} A_\mathrm{N})^\top \boldsymbol{c}_\mathrm{B})^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N} && \text{(整理)}
\end{aligned}
$$

$$
f = \underbrace{\boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b}}_{\text{現在の値}} + \underbrace{\left\{\boldsymbol{c}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1} A_\mathrm{N})^\top \boldsymbol{c}_\mathrm{B}\right\}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N}}_{\text{変化量}}
$$

$$
\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} - A_\mathrm{B}^{-1} A_\mathrm{N} \boldsymbol{x}_\mathrm{N}
$$

- **相対コスト係数** (relative cost coefficient) ベクトル: $\tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} = \boldsymbol{c}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1} A_\mathrm{N})^\top \boldsymbol{c}_\mathrm{B}$
- 相対コスト係数が正の非基底変数 $\Rightarrow$ 0 から増加させると目的関数値増加

目的関数と非基底変数の関係 (続き)

(b) 目的関数 $f = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ に代入

$$f = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \qquad \text{(目的関数 } \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \text{ を } f \text{ とおいた)}$$

$$f = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top & \boldsymbol{c}_\mathrm{N}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \end{pmatrix} \qquad \left(\boldsymbol{c} \text{ も } \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{c}_\mathrm{N} \end{pmatrix} \text{ と分割}\right)$$

$$f = \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{B} + \boldsymbol{c}_\mathrm{N}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \qquad \text{(行列の積を書き下す)}$$

$$f = \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top (A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} - A_\mathrm{B}^{-1} A_\mathrm{N} \boldsymbol{x}_\mathrm{N}) + \boldsymbol{c}_\mathrm{N}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \qquad (\boldsymbol{x}_\mathrm{B} \text{ を消去})$$

$$f = \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1} A_\mathrm{N})^\top \boldsymbol{c}_\mathrm{B})^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \qquad \text{(整理)}$$

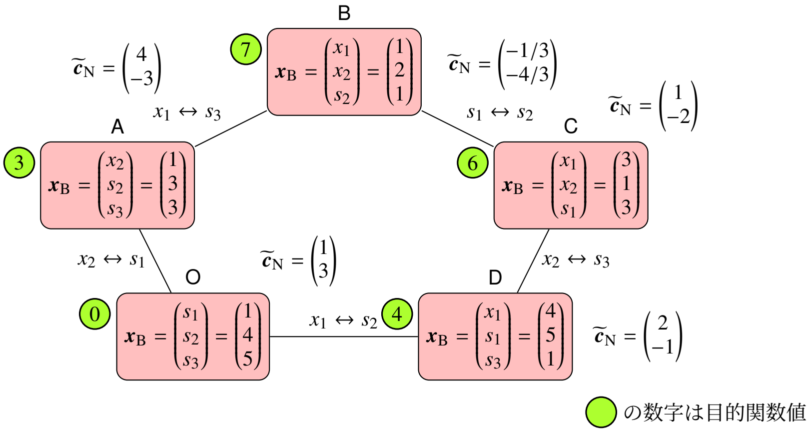
$$f = \underbrace{\boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b}}_{\text{現在の値}} + \underbrace{\left\{\boldsymbol{c}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1} A_\mathrm{N})^\top \boldsymbol{c}_\mathrm{B}\right\}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N}}_{\text{変化量}}$$

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} - A_\mathrm{B}^{-1} A_\mathrm{N} \boldsymbol{x}_\mathrm{N}$$

- **相対コスト係数** (relative cost coefficient) ベクトル: $\tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} = \boldsymbol{c}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1} A_\mathrm{N})^\top \boldsymbol{c}_\mathrm{B}$
- 相対コスト係数が正の非基底変数 ⇒ **0 から増加させる**と目的関数値増加 ⇒ **基底変数との入れ替え**

相対コスト係数

- 相対コスト係数が正の非基底変数 ⇒ 基底変数と入れ替えると目的関数増加
- 相対コスト係数が $\widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} \leq \mathbf{0}$ を満たす ⇒ 最適解



B ⑦ $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$

A ③ $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

C ⑥ $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

O ⓪ $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

D ④ $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

A–B: $x_1 \leftrightarrow s_3$

B–C: $s_1 \leftrightarrow s_2$

A–O: $x_2 \leftrightarrow s_1$

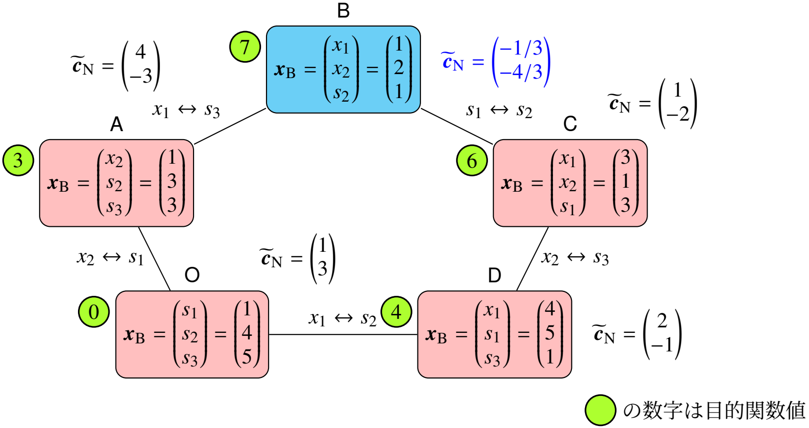
O–D: $x_1 \leftrightarrow s_2$

C–D: $x_2 \leftrightarrow s_3$

● の数字は目的関数値

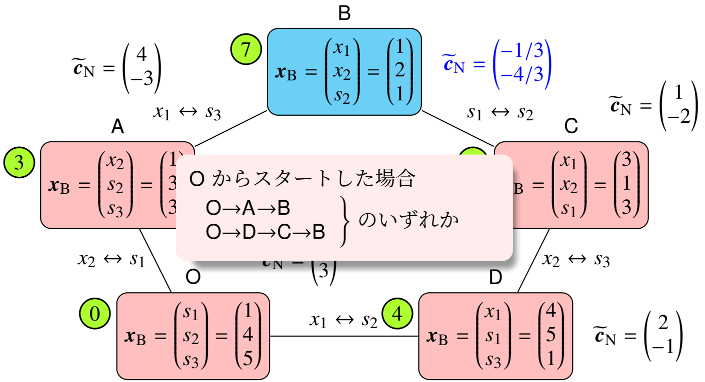
相対コスト係数

- 相対コスト係数が正の非基底変数 ⇒ 基底変数と入れ替えると目的関数増加
- 相対コスト係数が $\widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} \leq \mathbf{0}$ を満たす ⇒ 最適解



相対コスト係数

- 相対コスト係数が正の非基底変数 ⇒ 基底変数と入れ替えると目的関数増加
- 相対コスト係数が $\widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} \leq \mathbf{0}$ を満たす ⇒ 最適解



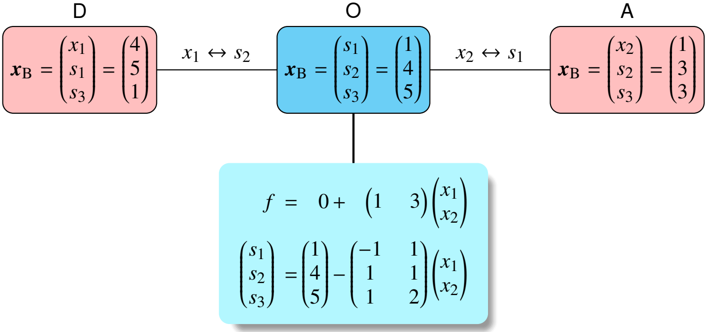
O からスタートした場合

$$\left.\begin{array}{l} \text{O→A→B} \\ \text{O→D→C→B} \end{array}\right\} \text{のいずれか}$$

● の数字は目的関数値

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$



D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

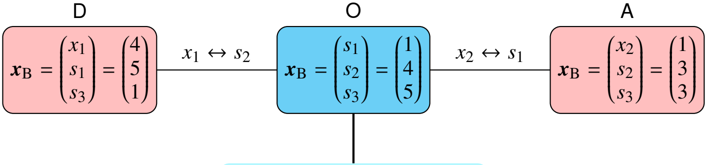
$$f = 0 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- x_1 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_1 は基底変数に
  - 目的関数は 1 ずつ増加
  - s_1 は 1 ずつ増加, s_2 は 1 づつ減少, s_3 は 1 ずつ減少
  - $x_1 = 4$ まで増やすと $s_2 = 0$ となる ⇒ s_2 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$
\begin{aligned}
f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\
\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}
\end{aligned}
$$



$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

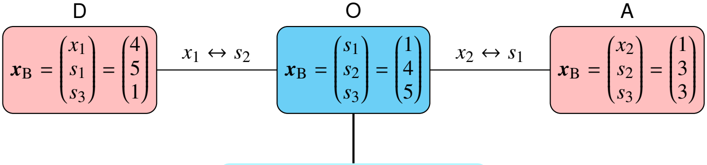
$$f = 0 + \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- x_1 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_1 は基底変数に
  - 目的関数は 1 ずつ増加
  - s_1 は 1 ずつ増加，s_2 は 1 づつ減少，s_3 は 1 ずつ減少
  - $x_1 = 4$ まで増やすと $s_2 = 0$ となる ⇒ s_2 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$



D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

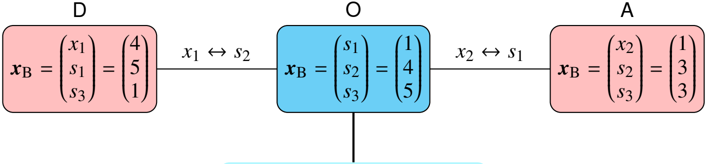
$$f = 0 + \begin{pmatrix} \enclose{circle}{1} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \enclose{circle}{x_1} \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 $\Rightarrow$ どちらも増やせる
- **x_1 を 0 から少しずつ増やす $\Rightarrow$ x_1 は基底変数に**
  - **目的関数は 1 ずつ増加**
  - s_1 は 1 ずつ増加，s_2 は 1 づつ減少，s_3 は 1 ずつ減少
  - $x_1 = 4$ まで増やすと $s_2 = 0$ となる $\Rightarrow$ s_2 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$
\begin{aligned}
f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\
\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}
\end{aligned}
$$



D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

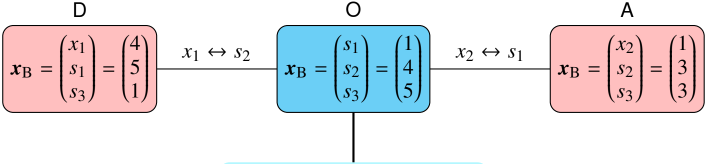
$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
f &= 0 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \enclose{circle}{s_1} \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \enclose{circle}{-} \begin{pmatrix} \enclose{circle}{-1} & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \enclose{circle}{x_1} \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- **x_1 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_1 は基底変数に**
  - 目的関数は 1 ずつ増加
  - **s_1 は 1 ずつ増加**，s_2 は 1 づつ減少，s_3 は 1 ずつ減少
  - $x_1 = 4$ まで増やすと $s_2 = 0$ となる ⇒ s_2 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$



D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

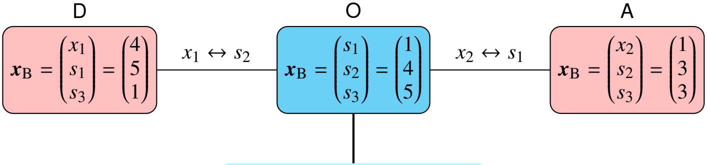
$$f = 0 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \boxed{s_2} \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \boxed{-} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- **x_1 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_1 は基底変数に**
  - 目的関数は 1 ずつ増加
  - s_1 は 1 ずつ増加，**s_2 は 1 づつ減少**，s_3 は 1 ずつ減少
  - $x_1 = 4$ まで増やすと $s_2 = 0$ となる ⇒ s_2 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$



D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

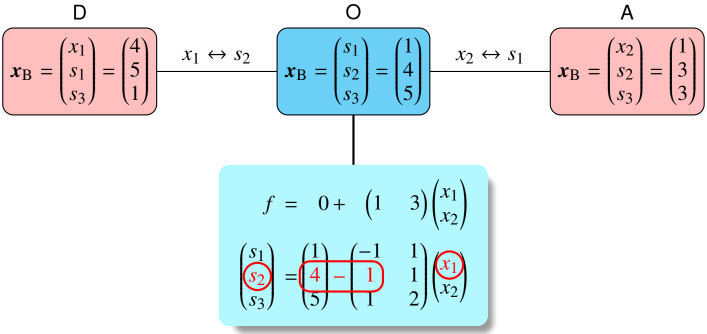
$$f = 0 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \enclose{circle}{s_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \enclose{circle}{-} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \enclose{circle}{1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \enclose{circle}{x_1} \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- **x_1 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_1 は基底変数に**
  - 目的関数は 1 ずつ増加
  - s_1 は 1 ずつ増加，s_2 は 1 づつ減少，**s_3 は 1 ずつ減少**
  - $x_1 = 4$ まで増やすと $s_2 = 0$ となる ⇒ s_2 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} A_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$



D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

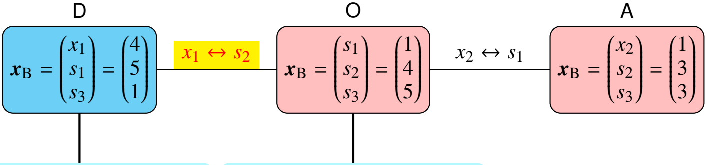
$$f = 0 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \boxed{s_2} \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- **x_1 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_1 は基底変数に**
  - 目的関数は 1 ずつ増加
  - s_1 は 1 ずつ増加，s_2 は 1 づつ減少，s_3 は 1 ずつ減少
  - **$x_1 = 4$ まで増やすと $s_2 = 0$ となる ⇒ s_2 は非基底変数に**

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$



$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f = 4 + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

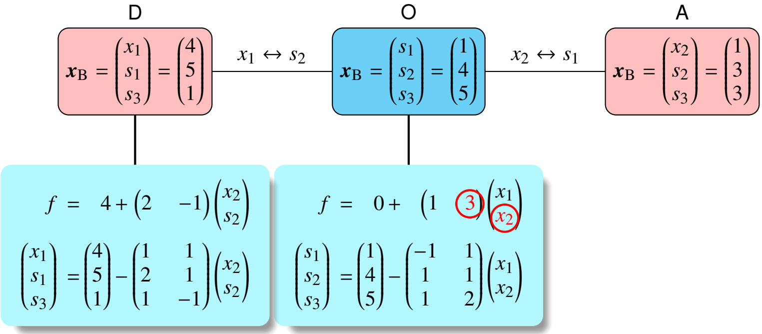
$$f = 0 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- x_1 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_1 は基底変数に
  - 目的関数は 1 ずつ増加
  - s_1 は 1 ずつ増加，s_2 は 1 づつ減少，s_3 は 1 ずつ減少
  - $x_1 = 4$ まで増やすと $s_2 = 0$ となる ⇒ s_2 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$



D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

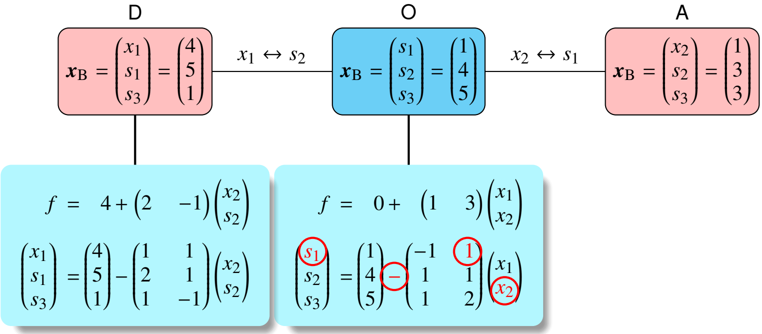
$$\begin{aligned} f &= 4 + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= 0 + \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- **x_2 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_2 は基底変数に**
  - **目的関数は 3 ずつ増加**
  - s_1 は 1 ずつ減少，s_2 は 1 づつ減少，s_3 は 2 ずつ減少
  - $x_2 = 1$ まで増やすと $s_1 = 0$ となる ⇒ s_1 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$



D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f = 4 + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

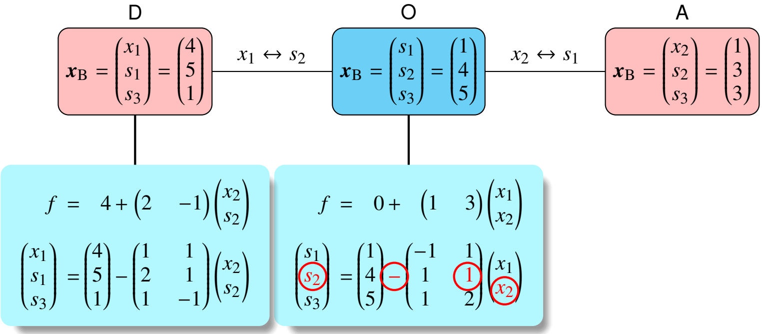
$$f = 0 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- x_2 **を 0 から少しずつ増やす** ⇒ x_2 **は基底変数に**
  - 目的関数は 3 ずつ増加
  - s_1 **は 1 ずつ減少**, s_2 は 1 づつ減少, s_3 は 2 ずつ減少
  - $x_2 = 1$ まで増やすと $s_1 = 0$ となる ⇒ s_1 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$
\begin{aligned}
f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\
\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}
\end{aligned}
$$



D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

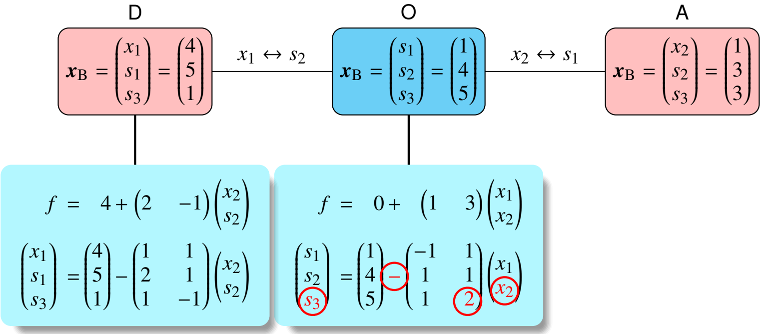
$$
\begin{aligned}
f &= 4 + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= 0 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} s_1 \\ \textcolor{red}{s_2} \\ s_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \textcolor{red}{-} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \textcolor{red}{1} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \textcolor{red}{x_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- x_2 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_2 は基底変数に
  - 目的関数は 3 ずつ増加
  - s_1 は 1 ずつ減少， s_2 は 1 づつ減少， s_3 は 2 ずつ減少
  - $x_2 = 1$ まで増やすと $s_1 = 0$ となる ⇒ s_1 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} A_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$



D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

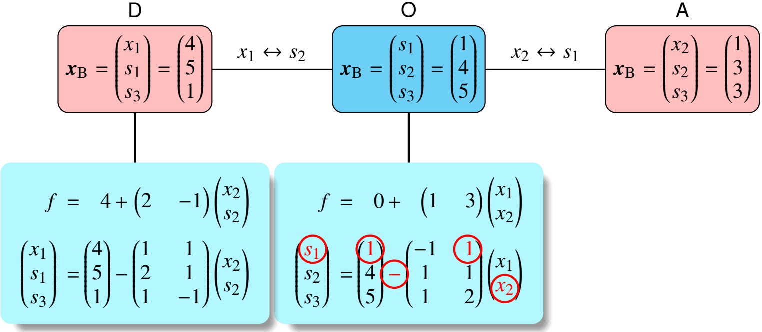
$$\begin{aligned} f &= 4 + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= 0 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- **x_2 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_2 は基底変数に**
  - 目的関数は 3 ずつ増加
  - s_1 は 1 ずつ減少，s_2 は 1 づつ減少，**s_3 は 2 ずつ減少**
  - $x_2 = 1$ まで増やすと $s_1 = 0$ となる ⇒ s_1 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$
\begin{aligned}
f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\
\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} A_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}
\end{aligned}
$$



D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
f &= 4 + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= 0 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boxed{s_1} \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \boxed{-} \begin{pmatrix} -1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- **x_2 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_2 は基底変数に**
  - 目的関数は 3 ずつ増加
  - s_1 は 1 ずつ減少, s_2 は 1 づつ減少, s_3 は 2 ずつ減少
  - **$x_2 = 1$ まで増やすと $s_1 = 0$ となる ⇒ s_1 は非基底変数に**

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

D

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f = 4 + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$f = 0 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f = 3 + \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$$

- 非基底変数 x_1, x_2 の相対コスト係数は正 ⇒ どちらも増やせる
- x_2 を 0 から少しずつ増やす ⇒ x_2 は基底変数に
  - 目的関数は 3 ずつ増加
  - s_1 は 1 ずつ減少， s_2 は 1 づつ減少， s_3 は 2 ずつ減少
  - $x_2 = 1$ まで増やすと $s_1 = 0$ となる ⇒ s_1 は非基底変数に

基底変数と非基底変数の入れ替え

$$f = \boldsymbol{c}_B^{\mathsf{T}} A_B^{-1} \boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_N^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}_N$$
$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1} \boldsymbol{b} - A_B^{-1} A_N \boldsymbol{x}_N$$

D
$$\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \leftrightarrow s_2$

O
$$\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x_2 \leftrightarrow s_1$

A
$$\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f = 4 + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$f = 0 + \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f = 3 + \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$$

- **最大係数規則 (largest coefficient rule)**
  相対コスト係数の大きい x_2：(A) を選択
- 最大改善規則 (largest improvement rule)
  目的関数の増加量がもっとも大きい x_1：(D) を選択
- 他にもあるが，最大係数規則を使うのが標準的

- s_1 は 1 ずつ減少，s_2 は 1 ずつ減少，s_3 は 2 ずつ減少
- $x_2 = 1$ まで増やすと $s_1 = 0$ となる ⇒ s_1 は非基底変数に

各端点における計算の簡略化

1. 実行可能領域の端点の求め方
    - 基底変数・非基底変数
    - 実行可能基底解
2. 目的関数の増加方向に端点を辿る方法
    - 相対コスト係数
    - 基底変数・非基底変数の入れ替え
3. **各端点における計算の簡略化**
    - **シンプレックスタブロー (単体表)**
    - **ピボット操作**

掃き出し法による計算の基本方針

- 入れ替える基底変数・非基底変数を決定するには，各端点で

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} A_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

  が必要 ⇒ **辞書** (dictonary) という
- 逆行列や行列の積を毎回計算するのは大変
- 連立 1 次方程式に対する**掃き出し法**と同様の計算で簡単化

計算方法 (その 1)

辞書

$$
\begin{aligned}
f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \quad \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} && \text{(b)} \\
\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= \quad A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} A_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} && \text{(a)}
\end{aligned}
$$

(a) の計算

- (a) は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を基底変数について解いた式
  ⇒ 諸々の都合により，左から A_{B}^{-1} をかけた形 $A_{\mathrm{B}}^{-1}A\boldsymbol{x} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$ で考える
- 各端点において，拡大係数行列 $\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \;\vdots\; A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right)$ を求める ⇒ $A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$ や $A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}$ が得られる
- 各端点で A_{B} が変化 ⇒ $\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \;\vdots\; A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right)$ に対する**行 (左) 基本変形**で計算可能

参考: 行 (左) 基本変形で計算できる理由

端点 X における A_{B} を A_{BX}，端点 Y における A_{B} を A_{BY} とすると，

$$
\left(A_{\mathrm{BY}}^{-1}A \;\vdots\; A_{\mathrm{BY}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = A_{\mathrm{BY}}^{-1}A_{\mathrm{BX}}\left(A_{\mathrm{BX}}^{-1}A \;\vdots\; A_{\mathrm{BX}}^{-1}\boldsymbol{b}\right)
$$

が成り立つ．行列 $A_{\mathrm{BY}}^{-1}A_{\mathrm{BX}}$ は正則であり，任意の正則行列は基本行列の積で表せるため，この変形は行基本変形で計算可能．

計算方法 (その 2)

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \,\vdots\, A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}, \quad A_\mathrm{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

A $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \,\vdots\, A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}, \quad A_\mathrm{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & s_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- A_B^{-1} をかけているので，基底変数の列をまとめると単位行列
- 非基底変数の列をまとめると $A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}$
  $\Rightarrow A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ も計算済なので，方程式 $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ の係数がわかる
- 基底の入れ替えで基底変数の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が s_1 から x_2 に移動

計算方法 (その 2)

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \vdots A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array}, \quad A_\mathrm{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

A $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \vdots A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}, \quad A_\mathrm{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & s_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- A_B^{-1} をかけているので，基底変数の列をまとめると単位行列
- 非基底変数の列をまとめると $A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}$
  $\Rightarrow A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ も計算済なので，方程式 $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ の係数がわかる
- 基底の入れ替えで基底変数の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が s_1 から x_2 に移動

計算方法 (その 2)

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \\ \left(\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \end{array}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad \left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

A

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad \left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{ccc} x_2 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{cc} x_1 & s_1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{array}$$

- A_{B}^{-1} をかけているので，基底変数の列をまとめると単位行列
- 非基底変数の列をまとめると $A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}$
  $\Rightarrow$ $A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$ も計算済なので，方程式 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ の係数がわかる
- 基底の入れ替えで基底変数の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が s_1 から x_2 に移動

計算方法 (その 2)

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \,\vdots\, A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}, \ A_\mathrm{B} = \left(\begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \ A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \left(\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right)$$

A $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \,\vdots\, A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}, \ A_\mathrm{B} = \left(\begin{array}{ccc} x_2 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right), \ A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \left(\begin{array}{cc} x_1 & s_1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{array}\right)$$

- **A_B^{-1} をかけているので，基底変数の列をまとめると単位行列**
- 非基底変数の列をまとめると $A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}$
  ⇒ $A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ も計算済なので，方程式 $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ の係数がわかる
- 基底の入れ替えで基底変数の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が s_1 から x_2 に移動

計算方法 (その 2)

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

A $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & s_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- A_{B}^{-1} をかけているので，基底変数の列をまとめると単位行列
- **非基底変数の列をまとめると $A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}$**
  ⇒ $A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$ も計算済なので，方程式 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ の係数がわかる
- 基底の入れ替えで基底変数の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が s_1 から x_2 に移動

計算方法 (その 2)

$$A = \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \,\vdots\, A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc|c|} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}, \quad A_\mathrm{B} = \begin{array}{|ccc|} s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \begin{array}{|cc|} x_1 & x_2 \\ \hline -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

A $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \,\vdots\, A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc|c|} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}, \quad A_\mathrm{B} = \begin{array}{|ccc|} x_2 & s_2 & s_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \begin{array}{|cc|} x_1 & s_1 \\ \hline -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{array}$$

- A_B^{-1} をかけているので，基底変数の列をまとめると単位行列
- 非基底変数の列をまとめると $A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}$
  $\Rightarrow A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ も計算済なので，方程式 $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ の係数がわかる
- **基底の入れ替えで基底変数の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が s_1 から x_2 に移動**

計算方法 (その 2)

$$A = \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc|c|} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{|ccc|} s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{|cc|} x_1 & x_2 \\ \hline -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

A $\quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc|c|} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{|ccc|} x_2 & s_2 & s_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{|cc|} x_1 & s_1 \\ \hline -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{array}$$

- A_{B}^{-1} をかけているので，基底変数の列をまとめると単位行列
- 非基底変数の列をまとめると $A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}$
  $\Rightarrow A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$ も計算済なので，方程式 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ の係数がわかる
- **基底の入れ替えで基底変数の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が s_1 から x_2 に移動**

計算方法 (その 2)

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

A $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & s_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- A_{B}^{-1} をかけているので，基底変数の列をまとめると単位行列
- 非基底変数の列をまとめると $A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}$

  ⇒ $A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$ も計算済なので，方程式 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ の係数がわかる
- **基底の入れ替えで基底変数の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が s_1 から x_2 に移動**

  ⇒ 1 行目の要素 (ピボット (pivot) 要素という) を使って x_2 の列を掃き出す

計算方法 (その 2)

$$A = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \,\vdots\, A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ s_1 & -1 & \enclose{circle}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}, \quad A_\mathrm{B} = \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

A $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \,\vdots\, A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}, \quad A_\mathrm{B} = \begin{array}{ccc} x_2 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \begin{array}{cc} x_1 & s_1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1. 1 行目を定数倍して 1 にする ⇒ 今回は不要
2. 2 行目から 1 行目を引く
3. 3 行目から 1 行目の 2 倍を引く

計算方法 (その 2)

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boxed{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}}$

$$\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array}, \ A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \ A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

A $\boxed{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}}$

$$\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}, \ A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \ A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & s_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1. **1 行目を定数倍して 1 にする ⇒ 今回は不要**
2. 2 行目から 1 行目を引く
3. 3 行目から 1 行目の 2 倍を引く

計算方法 (その 2)

$$A = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \,\vdots\, A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline s_1 & -1 & \enclose{circle}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}, \quad A_\mathrm{B} = \begin{array}{c|ccc} & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline & -1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & 1 & 2 \end{array}$$

A $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_\mathrm{B}^{-1}A \,\vdots\, A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \hline x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}, \quad A_\mathrm{B} = \begin{array}{c|ccc} & x_2 & s_2 & s_3 \\ \hline & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N} = \begin{array}{c|cc} & x_1 & s_1 \\ \hline & -1 & 1 \\ & 2 & -1 \\ & 3 & -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & \enclose{circle}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & \enclose{circle}{0} & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1. 1 行目を定数倍して 1 にする ⇒ 今回は不要
2. **2 行目から 1 行目を引く**
3. 3 行目から 1 行目の 2 倍を引く

計算方法 (その 2)

$$A = \begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \\ & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{cccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ s_1 & -1 & \enclose{circle}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

A $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(A_{\mathrm{B}}^{-1}A \,\vdots\, A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}\right) = \begin{array}{cccccc:c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}} = \begin{array}{ccc} x_2 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}, \quad A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}} = \begin{array}{cc} x_1 & s_1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} -1 & \enclose{circle}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & \enclose{circle}{0} & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

1. 1 行目を定数倍して 1 にする ⇒ 今回は不要
2. 2 行目から 1 行目を引く
3. **3 行目から 1 行目の 2 倍を引く**

計算方法 (その 3)

辞書

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} + \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} && \text{(b)} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1} A_{\mathrm{N}} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} && \text{(a)} \end{aligned}$$

(b) の変形

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= f - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= f - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} \\ \widetilde{\boldsymbol{c}}^{\top} \boldsymbol{x} &= f - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} && \text{(b')} \end{aligned}$$

ただし

$$\widetilde{\boldsymbol{c}}^{\top} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}^{\top} & \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^{\top} \end{pmatrix}$$

(b') の計算方法

- $\widetilde{\boldsymbol{c}}$ における基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ の係数は 0 ⇒ 基底変数・非基底変数の入れ替えで新たに基底となった変数を (b') から消去すればよい
- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と連立．より正確には $A_{\mathrm{B}}^{-1} A \boldsymbol{x} = A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b}$ と連立
  ⇒ 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{c:c} \widetilde{\boldsymbol{c}}^{\top} & f - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} \\ \hdashline A_{\mathrm{B}}^{-1} A & A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} \end{array}\right)$ に対する掃き出し

計算方法 (その 4)

$$\boldsymbol{c}^\top = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \\ (\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0\ ) \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c:c} \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & f - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^\top A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hdashline A_{\mathrm{B}}^{-1}A & A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c|} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & f-0 \\ \hdashline s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}, \quad \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^\top A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} = 0$$

A $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c:c} \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & f - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^\top A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hdashline A_{\mathrm{B}}^{-1}A & A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}\right) = \begin{array}{c|ccccc:c|} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & f-3 \\ \hdashline x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}, \quad \widetilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^\top = \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^\top A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} = 3$$

計算方法 (その 4)

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\
\boldsymbol{c}^\top = & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

O $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$
\left(\begin{array}{c:c} \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & f - \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} \\ \hdashline A_\mathrm{B}^{-1} A & A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} \end{array}\right) =
\begin{array}{c|ccccc:c|}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & f - 0 \\ \hdashline
s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5
\end{array}, \quad \widetilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} = 0
$$

A $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$
\left(\begin{array}{c:c} \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & f - \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} \\ \hdashline A_\mathrm{B}^{-1} A & A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} \end{array}\right) =
\begin{array}{c|ccccc:c|}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & f - 3 \\ \hdashline
x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\
s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3
\end{array}, \quad \widetilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N}^\top = \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} = 3
$$

計算方法 (その 4)

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \\ \boldsymbol{c}^\top = & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

O $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c|c} \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & f - \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hline A_\mathrm{B}^{-1}A & A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}\right) = \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & f-0 \\ \hline s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}, \quad \widetilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} = 0$$

A $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c|c} \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & f - \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hline A_\mathrm{B}^{-1}A & A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}\right) = \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & f-3 \\ \hline x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}, \quad \widetilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N}^\top = \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} = 3$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & f-0 \\ \hline s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & f-0 \\ \hline x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\ \widetilde{\boldsymbol{c}}^\top & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & f-3 \\ \hline x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ s_2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ s_3 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

まとめ

計算するもの (**シンプレックスタブロー・単体表** (simplex tabuleau))

$$\left(\begin{array}{c:c} \widetilde{\boldsymbol{c}}^{\top} & f - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} \\ \hdashline A_{\mathrm{B}}^{-1} A & A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} \end{array}\right) \xrightarrow[f\ \text{は省略}]{} \left(\begin{array}{c:c} \widetilde{\boldsymbol{c}}^{\top} & -\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top} A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} \\ \hdashline A_{\mathrm{B}}^{-1} A & A_{\mathrm{B}}^{-1} \boldsymbol{b} \end{array}\right)$$

計算手順

1. **初期化**
   実行可能基底解・対応するシンプレックスタブローを求める
2. **入れ替える非基底変数 (ピボット列) の選択**
   相対コスト係数が正の非基底変数 ($\widetilde{\boldsymbol{c}}^{\top}$ が正の列) を選択 ⇒ ピボット列
   - 複数ある場合は相対コスト係数最大の非基底変数
   - 存在しなければ，最適解が求まったものとして終了
3. **入れ替える基底変数 (ピボット行) の選択**
   2 の非基底変数を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数 (行) を求める
   ⇒ ピボット行
4. **ピボット操作 (掃き出し)**
   行基本変形を施して，ピボット列を
   - ピボット行の要素 (ピボット要素) のみ 1
   - それ以外は 0

   に変形する．基底変数・非基底変数を入れ替え，2 に戻る

例題に対する計算手順 (その 1)

例題

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{max} & x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{s.t.} & -x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & \le & 4 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \le & 5 \\ & x_1, & & x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \text{max} & x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & & \\ \text{s.t.} & -x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & & & = & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & & & = & 4 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & s_3 & = & 5 \\ & x_1, & & x_2, & & s_1, & & s_2, & & s_3 & \ge & 0 \end{array}$$

(1) 初期実行可能基底解

基底変数を s_1, s_2, s_3， 非基底変数を x_1, x_2 と選ぶ

$\tilde{\boldsymbol{c}}^\top$	$-\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b}$
$A_B^{-1}A$	$A_B^{-1}\boldsymbol{b}$

$\Rightarrow$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	1	3	0	0	0	0
s_1	-1	1	1	0	0	1
s_2	1	1	0	1	0	4
s_3	1	2	0	0	1	5

シンプレックスタブロー

例題に対する計算手順 (その 2)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	1	3	0	0	0	0
s_1	−1	1	1	0	0	1
s_2	1	1	0	1	0	4
s_3	1	2	0	0	1	5

例題に対する計算手順 (その 2)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: x_1, x_2

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	1	3	0	0	0	0
s_1	−1	1	1	0	0	1
s_2	1	1	0	1	0	4
s_3	1	2	0	0	1	5

例題に対する計算手順 (その 2)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: x_1, x_2
⇒ 係数の大きい x_2 を選択

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

例題に対する計算手順 (その 2)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: x_1, x_2
⇒ 係数の大きい x_2 を選択

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

(3) ピボット要素の選択

x_2 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

例題に対する計算手順 (その 2)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: x_1, x_2
⇒ 係数の大きい x_2 を選択

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	1	3	0	0	0	0
s_1	−1	1	1	0	0	1
s_2	1	1	0	1	0	4
s_3	1	2	0	0	1	5

(3) ピボット要素の選択

x_2 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める
⇒ 6 列目/2 列目が 0 以上かつ最小となる行

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	1	3	0	0	0	0	6 列目/2 列目
s_1	−1	1	1	0	0	1	$1/1 = 1$
s_2	1	1	0	1	0	4	$4/1 = 4$
s_3	1	2	0	0	1	5	$5/2 = 2.5$

例題に対する計算手順 (その 2)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: x_1, x_2
⇒ 係数の大きい x_2 を選択

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	1	3	0	0	0	0
s_1	-1	1	1	0	0	1
s_2	1	1	0	1	0	4
s_3	1	2	0	0	1	5

(3) ピボット要素の選択

x_2 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める
⇒ 6 列目/2 列目が 0 以上かつ最小となる行

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	1	3	0	0	0	0	6 列目/2 列目
s_1	-1	1	1	0	0	1	$1/1 = 1$
s_2	1	1	0	1	0	4	$4/1 = 4$
s_3	1	2	0	0	1	5	$5/2 = 2.5$

例題に対する計算手順 (その 2)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: x_1, x_2
⇒ 係数の大きい x_2 を選択

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	1	3	0	0	0	0
s_1	−1	1	1	0	0	1
s_2	1	1	0	1	0	4
s_3	1	2	0	0	1	5

(3) ピボット要素の選択

x_2 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める
⇒ 6 列目/2 列目が 0 以上かつ最小となる行
⇒ (s_1, x_2) がピボット要素 (増加量 1)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	1	3	0	0	0	0	6 列目/2 列目
s_1	−1	1	1	0	0	1	$1/1 = 1$
s_2	1	1	0	1	0	4	$4/1 = 4$
s_3	1	2	0	0	1	5	$5/2 = 2.5$

例題に対する計算手順 (その 3)

(4) ピボット操作 (掃き出し)

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
s_1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
s_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

例題に対する計算手順 (その 3)

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_1, x_2) の要素を 1，x_2 の列のそれ以外の要素を 0 にする

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	1	3	0	0	0	0
s_1	-1	1	1	0	0	1
s_2	1	1	0	1	0	4
s_3	1	2	0	0	1	5

例題に対する計算手順 (その 3)

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_1, x_2) の要素を 1，x_2 の列のそれ以外の要素を 0 にする

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	−3	0	0	−3
s_1	−1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	−1	1	0	3
s_3	3	0	−2	0	1	3

例題に対する計算手順 (その 3)

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_1, x_2) の要素を 1，x_2 の列のそれ以外の要素を 0 にする
$\Rightarrow$ s_1 の代わりに x_2 が基底変数に

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	-3	0	0	-3
x_2	-1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	-1	1	0	3
s_3	3	0	-2	0	1	3

例題に対する計算手順 (その 3)

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_1, x_2) の要素を 1，x_2 の列のそれ以外の要素を 0 にする
$\Rightarrow$ s_1 の代わりに x_2 が基底変数に

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	-3	0	0	-3
x_2	-1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	-1	1	0	3
s_3	3	0	-2	0	1	3

例題に対する計算手順 (その 3)

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_1, x_2) の要素を 1，x_2 の列のそれ以外の要素を 0 にする
⇒ s_1 の代わりに x_2 が基底変数に

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	-3	0	0	-3
x_2	-1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	-1	1	0	3
s_3	3	0	-2	0	1	3

(2) 入れ替え候補の非基底変数

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	-3	0	0	-3
x_2	-1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	-1	1	0	3
s_3	3	0	-2	0	1	3

例題に対する計算手順 (その 3)

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_1, x_2) の要素を 1，x_2 の列のそれ以外の要素を 0 にする
$\Rightarrow$ s_1 の代わりに x_2 が基底変数に

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	−3	0	0	−3
x_2	−1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	−1	1	0	3
s_3	3	0	−2	0	1	3

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: x_1 のみ

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	−3	0	0	−3
x_2	−1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	−1	1	0	3
s_3	3	0	−2	0	1	3

例題に対する計算手順 (その 3)

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_1, x_2) の要素を 1，x_2 の列のそれ以外の要素を 0 にする
⇒ s_1 の代わりに x_2 が基底変数に

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	−3	0	0	−3
x_2	−1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	−1	1	0	3
s_3	3	0	−2	0	1	3

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: x_1 のみ
⇒ x_1 を選択

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	−3	0	0	−3
x_2	−1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	−1	1	0	3
s_3	3	0	−2	0	1	3

例題に対する計算手順 (その 4)

(3) ピボット要素の選択

x_1 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	−3	0	0	−3
x_2	−1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	−1	1	0	3
s_3	3	0	−2	0	1	3

例題に対する計算手順 (その 4)

(3) ピボット要素の選択

x_1 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める
⇒ 6 列目/1 列目が 0 以上かつ最小となる行

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	4	0	-3	0	0	-3	6 列目/1 列目
x_2	-1	1	1	0	0	1	$1/(-1) = -1$
s_2	2	0	-1	1	0	3	$3/2 = 1.5$
s_3	3	0	-2	0	1	3	$3/3 = 1$

例題に対する計算手順 (その 4)

(3) ピボット要素の選択

x_1 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める
⇒ 6 列目/1 列目が 0 以上かつ最小となる行

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	4	0	−3	0	0	−3	6 列目/1 列目
x_2	−1	1	1	0	0	1	$1/(-1) = -1$
s_2	2	0	−1	1	0	3	$3/2 = 1.5$
s_3	3	0	−2	0	1	3	$3/3 = 1$

例題に対する計算手順 (その 4)

(3) ピボット要素の選択

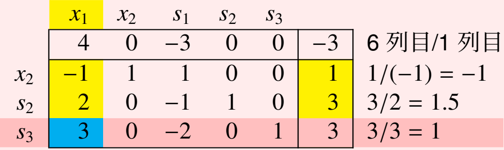
x_1 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める
⇒ 6 列目/1 列目が 0 以上かつ最小となる行
⇒ (s_3, x_1) がピボット要素 (増加量 1)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	4	0	-3	0	0	-3	6 列目/1 列目
x_2	-1	1	1	0	0	1	$1/(-1) = -1$
s_2	2	0	-1	1	0	3	$3/2 = 1.5$
s_3	3	0	-2	0	1	3	$3/3 = 1$

例題に対する計算手順 (その 4)

(3) ピボット要素の選択

x_1 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める
⇒ 6 列目/1 列目が 0 以上かつ最小となる行
⇒ (s_3, x_1) がピボット要素 (増加量 1)



	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	4	0	−3	0	0	−3	6 列目/1 列目
x_2	−1	1	1	0	0	1	$1/(-1) = -1$
s_2	2	0	−1	1	0	3	$3/2 = 1.5$
s_3	3	0	−2	0	1	3	$3/3 = 1$

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_3, x_1) の要素を 1，x_1 の列のそれ以外の要素を 0 にする

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	−3	0	0	−3
x_2	−1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	−1	1	0	3
s_3	3	0	−2	0	1	3

例題に対する計算手順 (その 4)

(3) ピボット要素の選択

x_1 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める

⇒ 6 列目/1 列目が 0 以上かつ最小となる行

⇒ (s_3, x_1) がピボット要素 (増加量 1)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	4	0	−3	0	0	−3	6 列目/1 列目
x_2	−1	1	1	0	0	1	$1/(-1) = -1$
s_2	2	0	−1	1	0	3	$3/2 = 1.5$
s_3	3	0	−2	0	1	3	$3/3 = 1$

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_3, x_1) の要素を 1，x_1 の列のそれ以外の要素を 0 にする

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	4	0	−3	0	0	−3
x_2	−1	1	1	0	0	1
s_2	2	0	−1	1	0	3
s_3	3	0	−2	0	1	3

例題に対する計算手順 (その 4)

(3) ピボット要素の選択

x_1 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める
⇒ 6 列目/1 列目が 0 以上かつ最小となる行
⇒ (s_3, x_1) がピボット要素 (増加量 1)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	4	0	-3	0	0	-3	6 列目/1 列目
x_2	-1	1	1	0	0	1	$1/(-1) = -1$
s_2	2	0	-1	1	0	3	$3/2 = 1.5$
s_3	3	0	-2	0	1	3	$3/3 = 1$

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_3, x_1) の要素を 1，x_1 の列のそれ以外の要素を 0 にする

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$	-7
x_2	0	1	$1/3$	0	$1/3$	2
s_2	0	0	$1/3$	1	0	1
s_3	1	0	$-2/3$	0	$1/3$	1

例題に対する計算手順 (その 4)

(3) ピボット要素の選択

x_1 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める
⇒ 6 列目/1 列目が 0 以上かつ最小となる行
⇒ (s_3, x_1) がピボット要素 (増加量 1)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	4	0	-3	0	0	-3	6 列目/1 列目
x_2	-1	1	1	0	0	1	$1/(-1) = -1$
s_2	2	0	-1	1	0	3	$3/2 = 1.5$
s_3	3	0	-2	0	1	3	$3/3 = 1$

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_3, x_1) の要素を 1，x_1 の列のそれ以外の要素を 0 にする
⇒ s_3 の代わりに x_1 が基底変数に

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$	-7
x_2	0	1	$1/3$	0	$1/3$	2
s_2	0	0	$1/3$	1	0	1
s_3	1	0	$-2/3$	0	$1/3$	1

例題に対する計算手順 (その 4)

(3) ピボット要素の選択

x_1 を増加させたとき，最初に 0 になる基底変数を求める
⇒ 6 列目/1 列目が 0 以上かつ最小となる行
⇒ (s_3, x_1) がピボット要素 (増加量 1)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	4	0	-3	0	0	-3	6 列目/1 列目
x_2	-1	1	1	0	0	1	$1/(-1) = -1$
s_2	2	0	-1	1	0	3	$3/2 = 1.5$
s_3	3	0	-2	0	1	3	$3/3 = 1$

(4) ピボット操作 (掃き出し)

行基本変形で，(s_3, x_1) の要素を 1，x_1 の列のそれ以外の要素を 0 にする
⇒ s_3 の代わりに x_1 が基底変数に

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$	-7
x_2	0	1	$1/3$	0	$1/3$	2
s_2	0	0	$1/3$	1	0	1
x_1	1	0	$-2/3$	0	$1/3$	1

例題に対する計算手順 (その 5)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$	-7
x_2	0	1	$1/3$	0	$1/3$	2
s_2	0	0	$1/3$	1	0	1
x_1	1	0	$-2/3$	0	$1/3$	1

例題に対する計算手順 (その 5)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: なし

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$	-7
x_2	0	1	$1/3$	0	$1/3$	2
s_2	0	0	$1/3$	1	0	1
x_1	1	0	$-2/3$	0	$1/3$	1

例題に対する計算手順 (その 5)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: なし ⇒ **終了**

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$	-7
x_2	0	1	$1/3$	0	$1/3$	2
s_2	0	0	$1/3$	1	0	1
x_1	1	0	$-2/3$	0	$1/3$	1

例題に対する計算手順 (その 5)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: なし ⇒ **終了**

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$	-7
x_2	0	1	$1/3$	0	$1/3$	2
s_2	0	0	$1/3$	1	0	1
x_1	1	0	$-2/3$	0	$1/3$	1

最適値の (-1) **倍**

最適解

最適解 $(x_1, x_2) = (2, 1)$, **最適値** 7

スラック変数 $(s_1, s_2, s_3) = (0, 1, 0)$

例題に対する計算手順 (その 5)

(2) 入れ替え候補の非基底変数

相対コスト係数が正の非基底変数: なし ⇒ **終了**

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	0	0	$-1/3$	0	$-4/3$	-7	**最適値の** (-1) **倍**
x_2	0	1	$1/3$	0	$1/3$	2	
s_2	0	0	$1/3$	1	0	1	**最適解**
x_1	1	0	$-2/3$	0	$1/3$	1	

最適解 $(x_1, x_2) = (2, 1)$, **最適値** 7
スラック変数 $(s_1, s_2, s_3) = (0, 1, 0)$