オペレーションズ・リサーチ I (7)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

スケジュール

No.	内容
1	オペレーションズ・リサーチと最適化，線形計画問題の基礎 (1)
2	線形計画問題の基礎 (2)，線形計画問題の標準形
3	シンプレックス (単体) 法 1
4	シンプレックス (単体) 法 2，2 段階シンプレックス法
5	双対問題，双対定理，相補性定理
6	双対シンプレックス法，ファルカス補題，感度分析
7	内点法

感度分析の練習問題

練習問題

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 = 5 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

目的関数の x_1, x_2 の係数を変化させたとき，最適解が変化しない範囲は?

感度分析の練習問題

練習問題

$$\begin{array}{ll} \text{max} & (1+\Delta)x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{max} & (1+\Delta)x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 = 5 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3, \ s_1, \ s_2, \ s_3 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-3+\Delta$	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

目的関数の x_1, x_2 の係数を変化させたとき，最適解が変化しない範囲は?

感度分析の練習問題

練習問題

$$\begin{array}{ll} \text{max} & (1+\Delta)x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \text{max} & (1+\Delta)x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 = 5 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3, \ s_1, \ s_2, \ s_3 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	3/2	0	1	1/2	1/2	0	5/2
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	1/4	0	1/4
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	1/4

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-3+\Delta$	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	3/2	0	1	1/2	1/2	0	5/2
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	1/4	0	1/4
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	1/4

目的関数の x_1, x_2 の係数を変化させたとき，最適解が変化しない範囲は?

x_1 の係数の範囲：4 以下 ($\Delta \le 3$)

感度分析の練習問題

練習問題

$$\begin{array}{rrrrl} \text{max} & x_1 + (2+\Delta)x_2 + 3x_3 & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 - & 2x_2 + & x_3 & \le 2 \\ & x_1 + & 2x_2 + & x_3 & \le 3 \\ & x_1 - & x_2 + & 2x_3 & \le 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rrrrrrrl} \text{max} & x_1 + (2+\Delta)x_2 + 3x_3 & & & & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 - & 2x_2 + & x_3 + & s_1 & & & = 2 \\ & x_1 + & 2x_2 + & x_3 & & + s_2 & & = 3 \\ & x_1 - & x_2 + & 2x_3 & & & + s_3 & = 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2, & s_3 & \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-3+\Delta$	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-3+\Delta/4$	0	0	$-1+\Delta/4$	$-2-\Delta/4$	0	$-8-\Delta/4$
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

目的関数の x_1, x_2 の係数を変化させたとき，最適解が変化しない範囲は?

x_1 の係数の範囲：4 以下 ($\Delta \le 3$)

感度分析の練習問題

練習問題

$$
\begin{array}{rrrrl}
\max & x_1 + (2+\Delta)x_2 + 3x_3 & & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 - & 2x_2 + & x_3 & \le 2 \\
& x_1 + & 2x_2 + & x_3 & \le 3 \\
& x_1 - & x_2 + & 2x_3 & \le 5 \\
& x_1, & x_2, & x_3 & \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\max & x_1 + (2+\Delta)x_2 + 3x_3 & & & & & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 - & 2x_2 + & x_3 + & s_1 & & & = 2 \\
& x_1 + & 2x_2 + & x_3 & & + s_2 & & = 3 \\
& x_1 - & x_2 + & 2x_3 & & & + s_3 & = 5 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2, & s_3 & \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

目的関数の x_1, x_2 の係数を変化させたとき，最適解が変化しない範囲は?

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-3+\Delta$	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

x_1 の係数の範囲：4 以下 $(\Delta \le 3)$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-3+\Delta/4$	0	0	$-1+\Delta/4$	$-2-\Delta/4$	0	$-8-\Delta/4$
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

x_2 の係数の範囲：-6 以上 6 以下 $(-8 \le \Delta \le 4)$

感度分析の練習問題その 2

練習問題

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 = 5 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \geq 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

1 番目の制約条件の右辺定数を変化させたとき，最適基底変数の組が変化しない範囲は?

感度分析の練習問題その 2

練習問題

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 + \Delta \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 2 + \Delta \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 = 5 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

1 番目の制約条件の右辺定数を変化させたとき，最適基底変数の組が変化しない範囲は?

感度分析の練習問題その 2

練習問題

$$\begin{array}{lll} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 + \Delta \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{lll} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 2 + \Delta \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 = 5 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3, \ s_1, \ s_2, \ s_3 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

1 番目の制約条件の右辺定数を変化させたとき，最適基底変数の組が変化しない範囲は?

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

感度分析の練習問題その 2

練習問題

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 + \Delta \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 2 + \Delta \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 = 5 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3, \ s_1, \ s_2, \ s_3 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

1 番目の制約条件の右辺定数を変化させたとき，最適基底変数の組が変化しない範囲は?

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	$-8-\Delta$
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2+\Delta/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4-\Delta/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4-5\Delta/4$

定数の範囲：-3 以上 $11/5$ 以下
$(-5 \le \Delta \le 1/5)$

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1/4 - \Delta/4, 5/2 + \Delta/2)$
最適値 $8 + \Delta$

双対シンプレックス法の練習問題

練習問題

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 = 5 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

1 番目の制約条件の右辺定数を 3 に変更した問題の最適解は?

双対シンプレックス法の練習問題

練習問題

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 3 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 3 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 = 5 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-8
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	$5/2$
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	$1/4$
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	$1/4$

1 番目の制約条件の右辺定数を 3 に変更した問題の最適解は?

双対シンプレックス法の練習問題

練習問題

$$\begin{array}{llll} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & 3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq & 5 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{llll} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 & = & 3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 & = & 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 & = & 5 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 & \geq & 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-9
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	3
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	0
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	-1

1 番目の制約条件の右辺定数を 3 に変更した問題の最適解は?

双対シンプレックス法の練習問題

練習問題

$$\begin{array}{llrrrl} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 = 5 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3, \ s_1, \ s_2, \ s_3 \ge 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-9
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	3
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	0
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	-1

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	0	-1	-2	0	-9
x_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0	3
x_2	$-1/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0	0
s_3	$-9/4$	0	0	$-5/4$	$-3/4$	1	-1
	$4/3$			$4/5$	$8/3$		

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-6/5$	0	0	0	$-7/5$	$-4/5$	$-41/5$
x_3	$3/5$	0	1	0	$1/5$	$2/5$	$13/5$
x_2	$1/5$	1	0	0	$2/5$	$-1/5$	$1/5$
s_1	$9/5$	0	0	1	$3/5$	$-4/5$	$4/5$

1 番目の制約条件の右辺定数を 3 に変更した問題の最適解は?

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1/5, 13/5)$, 最適値 $41/5$
(双対最適解 $(y_1, y_2, y_3) = (0, 7/5, 4/5)$)

計算量の基礎

線形計画問題の解法の計算効率

- シンプレックス法は**多項式時間**アルゴリズムではない
- 楕円体法，内点法は**多項式時間**アルゴリズム

多項式時間：時間計算量の大きさを表す

計算量の 2 種類の尺度

- 計算時間の尺度 (単に「計算量」といえばこちら)：時間計算量 (time complexity)
- 記憶容量 (メモリ使用量) の尺度：空間計算量 (space complexity)

問題 (problem) とインスタンス (instance) の違い

- 問題：抽象化された問題
  「$A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ のもとで $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ を最大化」
- インスタンス (問題例)：具体的な数値 (パラメータ) が与えられる

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき，「$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ のもとで $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ を最大化」

問題に対する計算量はインスタンスに依存 ⇒ どう測る？

計算量の基礎

線形計画問題の解法の計算効率

- シンプレックス法は**多項式時間**アルゴリズムではない
- 楕円体法，内点法は**多項式時間**アルゴリズム

多項式時間：時間計算量の大きさを表す

計算量の 2 種類の尺度

- 計算時間の尺度 (単に「計算量」といえばこちら)：**時間計算量 (time complexity)**
- 記憶容量 (メモリ使用量) の尺度：空間計算量 (space complexity)

問題 (problem) とインスタンス (instance) の違い

- 問題：抽象化された問題
  「$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ のもとで $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ を最大化」
- インスタンス (問題例)：具体的な数値 (パラメータ) が与えられる

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき，「$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ のもとで $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ を最大化」

問題に対する計算量はインスタンスに依存 $\Rightarrow$ どう測る？

計算量の測り方

問題を解くアルゴリズム (algorithm)

- 解を求めるための有限個の手続き
- インスタンスを入力すると，解が出力される

計算量の表し方

- アルゴリズムの総ステップ数
- 基本的な操作は 1 ステップで実行可能
  - 四則演算
  - 値の書き込み・読み出し
  - etc.

計算量は問題，アルゴリズムだけでなく，インスタンスにも依存

インスタンスのサイズ・規模

- 計算量にとくに影響を与えるのはインスタンスのサイズ
  - パラメータの数
  - パラメータの取りうる範囲
- 計算量は**インスタンスのサイズの関数**として表す

最悪計算量と平均計算量

計算量はインスタンスのパラメータの値にも依存

最悪計算量と平均計算量

同じサイズのインスタンスすべてについて，以下を求めたもの

- **最悪計算量 (worst-case complexity)**
  計算量の最大値 (たんに「計算量」といえばこれ)
- **平均計算量 (average complexity)**
  計算量の平均値 (ただし，平均が重要な場合もある)

ソート (整列) アルゴリズムの例 (数値の個数 n)

- クイックソート: 最悪計算量 $O(n^2)$，平均計算量 $O(n \log_2 n)$
- ヒープソート: 最悪計算量 $O(n \log_2 n)$
  実用上はクイックソートのほうが速い

線形計画問題のサイズ

- 決定変数の数 n
- 制約条件の数 m
- 係数の範囲：すべての係数を 2 進数で表して格納したときの総桁数 L

計算量のオーダー記法

オーダー記法 (order notation)・Big O 記法 (Big O notation)

- サイズに対する計算量の増加速度が重要
- 最高次の項だけ考える
  次数の低い項は無視できる
- 定数倍も省略
- **ランダウ (Landau) の記号 O**

例 (サイズ n)

- 総ステップ数の最大値が $5n^3 + 2n^2 + 4$
  $\Rightarrow$ 計算量 $O(n^3)$，計算量は n^3 のオーダー
- 総ステップ数の最大値が $4n^3 \log_2 n + n^3 + n \log n$
  $\Rightarrow$ 計算量 $O(n^3 \log_2 n)$，計算量は $n^3 \log_2 n$ のオーダー (log の底 2 は省略してもよい)

対数 (logarithmic)，多項式 (polynomial)，指数 (exponential) オーダー

- $O(\log_2 n)$: **対数オーダー**
- $O(n^2)$, $O(n^3)$, etc.: **多項式オーダー**
- $O(2^n)$, $O(3^n)$, etc.: **指数オーダー**

多項式オーダーと指数オーダーの違い

n と各関数の関係

n	$\log_2 n$	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	2^n	$n!$
10	3.3×10^0	1.0×10^1	3.3×10^1	1.0×10^2	1.0×10^3	1.0×10^3	3.6×10^6
20	4.3×10^0	2.0×10^1	8.6×10^1	4.0×10^2	8.0×10^3	1.0×10^6	2.4×10^{18}
50	5.6×10^0	5.0×10^1	2.8×10^2	2.5×10^3	1.3×10^5	1.1×10^{15}	3.0×10^{64}
100	6.6×10^0	1.0×10^2	6.6×10^2	1.0×10^4	1.0×10^6	1.3×10^{30}	9.3×10^{157}
1000	1.0×10^1	1.0×10^3	1.0×10^4	1.0×10^6	1.0×10^9	1.1×10^{301}	–
10000	1.3×10^1	1.0×10^4	1.3×10^5	1.0×10^8	1.0×10^{12}	–	–

- 問題のサイズが大きくなると，(指数オーダー) $\gg$ (多項式オーダー)
- 多項式オーダーの計算量の方が望ましい $\Rightarrow$ 多項式時間アルゴリズム

線形計画問題の解法

- シンプレックス法：**多項式時間アルゴリズムではない**
  - 決定変数の数 n, 制約条件の数 m，サイズ L の多項式で表せない
- 楕円体法 (ellipsoid method)：**多項式時間アルゴリズム**
  - 1979 年に Leonid Khachiyan が多項式性を証明
  - 実用上はシンプレックス法の方がはるかに高速
- 内点法 (interior-point method)：**多項式時間アルゴリズム**
  - 大規模インスタンスに対しては，シンプレックス法を上回る性能

内点法

内点法 (interior-point method)

- 1984 年にアメリカ AT&T 社のベル研究所所属のインド人科学者カーマーカー (Narendra Krishna Karmarkar) が線形計画問題に対する多項式時間アルゴリズムとして提案 ⇒ カーマーカー法あるいは射影変換法 (projective scaling method)
- 現在，カーマーカー法を含む解法は一般に**内点法**と呼ばれる
- 内点法の枠組自体は，1967 年に当時ソビエト連邦の研究者 I.I. Dikin が最初に提案 (アフィンスケーリング法)
  ただし，西側諸国にその存在が知られたのは 1988 年 (Dikin が手紙を送った)
- 大規模な線形計画問題に対しては，シンプレックス法よりも高速
- 非線形計画問題に対しても有力な解法

おもな内点法の分類

- パス追跡法 (path-following method)
- ポテンシャル減少法 (potential reduction method)
- アフィンスケーリング法 (affine scaling method)

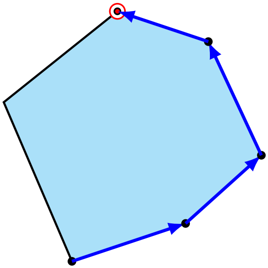
これらを以下のいずれかに適用

- 主問題 ⇒ **主内点法**
- 双対問題 ⇒ **双対内点法**
- 主問題・双対問題両方 ⇒ **主双対内点法**

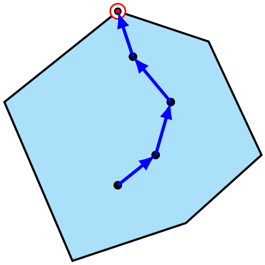
内点法を巡るあれこれ

- カーマーカーの発表の衝撃は，一般紙でも取り上げられるほどだった
  - ニューヨーク・タイムズ紙「Breakthrough in Problem Solving」(1984 年 11 月 19 日)
    https://www.nytimes.com/1984/11/19/us/breakthrough-in-problem-solving.html
  - タイム誌「Folding the Perfect Corner」(1984 年 12 月 3 日)
    https://time.com/archive/6857649/science-folding-the-perfect-corner/
- 線形計画問題に対する多項式時間アルゴリズムとして，楕円体法がすでに知られていたものの，実用的にはシンプレックス法に遠く及ばなかった．カーマーカーは，自身の方法の性能がシンプレックス法を大きく上回ったと主張したが，計算実験の詳細を公表しなかった．このため，カーマーカー自身の傲岸不遜な態度も相まって，激しい批判にさらされた．
- ベル研究所が内点法で特許を取るため，詳細を明らかにしなかったらしい．当時はアルゴリズムでも特許を取得できた (正確には，アルゴリズムをコンピュータ上で実現したソフトウェアに対する特許)．実際，1988 年にアメリカで，1995 年に日本で特許が成立．その後，アメリカでは特許保護期間は終了，日本では特許権抹消手続きが行われた
- 現在ではこのような特許は認めらない
- 様々な問題を抱えつつも，カーマーカーの手法は画期的だったため，研究が急速に進んだ

シンプレックス法と内点法の違い



シンプレックス法
(実行可能領域の端点を辿る)



内点法
(実行可能領域の内点を辿る)

内点

不等式制約を不等号で満たす実行可能解

内点法の考え方

- 内点を辿って最適解に近づく
  ただし，必ずしも実行可能内点である必要性はない ⇒ 今回紹介する内点法
- 十分近づいた後は，多項式時間で最適解を求める方法があるので，それを使う

主双対パス追跡法

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

＋

双対問題 (D) (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

＝

主双対問題

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} &= \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} &= 0 \\ \boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{s} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

主双対パス追跡法

- 主問題と双対問題を合わせた**主双対問題**にパス追跡法を適用
- 最適解へ向かう中心パスを辿る
- ここでは，初期解が実行不可能でも適用可能な方法を紹介

中心パス (central path)	解析的中心の軌跡
解析的中心 (analytic center)	対数障壁関数の最小点
対数障壁関数 (logarithmic barrier function)	境界上で $+\infty$ となる障壁関数の一種

主双対問題

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

＋

双対問題 (D) (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

＝

主双対問題

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} &= \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} &= 0 \\ \boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{s} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

相補性定理より，(P) の最適解 $\boldsymbol{x}$, (D) の最適解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ は

$$(A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c})^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} = 0$$

を満たす

$\Downarrow$

制約条件および $\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} = 0$ を満たす $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ を探せばよい

$\Downarrow$

主双対問題

双対ギャップ一定の解集合

主双対問題

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} &= \boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} &= 0 \\
\boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{s} &\geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

(双対ギャップ)$= n\mu$ の解集合 $F(\mu)$

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} &= \boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} &= n\mu \\
\boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{s} &\geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

双対ギャップ (duality gap)

主問題の目的関数値と双対問題の目的関数値の差 $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$

(双対ギャップ)$= \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x}$ の導出

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} &= (A\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{x}^\top A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
&= (A^\top \boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
&= (A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c})^\top \boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

解析的中心

主双対問題

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} &= \boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} &= 0 \\
\boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{s} &\geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

(双対ギャップ)= $n\mu$ の解集合 $F(\mu)$

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} &= \boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} &= n\mu \\
\boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{s} &\geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

解析的中心 (analytic center)

$F(\mu)$ (ただし境界を除く) において，対数障壁関数 (logarithmic barrier function)

$$
-\log(x_1 x_2 \cdots x_n s_1 s_2 \ldots s_n) = -\sum_{i=1}^{n} (\log x_i + \log s_i)
$$

を最小化する点

障壁関数 (barrier function)

- 境界 ($x_i = 0$ あるいは $s_i = 0$) における関数値が $+\infty$ に発散
- 解が実行可能領域外にはみ出さないようにする働き
- 非線形最適化でも用いられる

中心パス

中心パス (central path)

- μ を変化させたときに解析的中心が描く曲線
- $\mu \to +0$ で最適解に収束

パス追跡法

- μ を 0 に近づけていくことで最適解 (の近似解) を求める
- 各 μ について解析的中心を正確に求めるには時間がかかる $\Rightarrow$ 近似
- 第 k 反復の解 $(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{y}^{(k)}, \boldsymbol{s}^{(k)})$ から第 $k+1$ 反復の解 $(\boldsymbol{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{y}^{(k+1)}, \boldsymbol{s}^{(k+1)})$ を計算

解析的中心を求める問題

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -\sum_{i=1}^{n}(\log x_i + \log s_i) \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} \\
& \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} = n\mu \\
& \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

中心パス

中心パス (central path)

- μ を変化させたときに解析的中心が描く曲線
- $\mu \to +0$ で最適解に収束

パス追跡法

- μ を 0 に近づけていくことで最適解 (の近似解) を求める
- 各 μ について解析的中心を正確に求めるには時間がかかる $\Rightarrow$ 近似
- 第 k 反復の解 $(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{y}^{(k)}, \boldsymbol{s}^{(k)})$ から第 $k+1$ 反復の解 $(\boldsymbol{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{y}^{(k+1)}, \boldsymbol{s}^{(k+1)})$ を計算

解析的中心を求める問題

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -\sum_{i=1}^{n} \log(s_i x_i) \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} \\
& \sum_{i=1}^{n} s_i x_i = n\mu \\
& \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

中心パス

中心パス (central path)

- μ を変化させたときに解析的中心が描く曲線
- $\mu \to +0$ で最適解に収束

パス追跡法

- μ を 0 に近づけていくことで最適解 (の近似解) を求める
- 各 μ について解析的中心を正確に求めるには時間がかかる $\Rightarrow$ 近似
- 第 k 反復の解 $(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{y}^{(k)}, \boldsymbol{s}^{(k)})$ から第 $k+1$ 反復の解 $(\boldsymbol{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{y}^{(k+1)}, \boldsymbol{s}^{(k+1)})$ を計算

解析的中心を求める問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log(s_i x_i) \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i x_i = n\mu \\
 & \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} \\
 & \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

$s_1 x_1 = s_2 x_2 = \cdots = s_n x_n = \mu$ のとき最小値を取るので,

$$
\begin{pmatrix} A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \\ A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} - \boldsymbol{c} \\ X\boldsymbol{s} - \mu\boldsymbol{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}
$$

を満たす $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{y}, \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}$ を求めればよい

X : 対角要素に $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が並んだ対角行列
$\boldsymbol{1}$: すべての要素が 1 の n 次元ベクトル

解の更新方法

$(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{y}^{(k)}, \boldsymbol{s}^{(k)})$ から $(\boldsymbol{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{y}^{(k+1)}, \boldsymbol{s}^{(k+1)}) = (\boldsymbol{x}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{y}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{y}^{(k)}, \boldsymbol{s}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{s}^{(k)})$ を計算

解析的中心

$$\begin{pmatrix} A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \\ A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s} - \boldsymbol{c} \\ X\boldsymbol{s} - \mu\boldsymbol{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{x} > 0,\ \boldsymbol{s} > 0)$$

方針

- 近似なので，第 k 反復で等号は成り立っていない ⇒ 第 $k+1$ 反復で成り立つとみなす
- 3 番目の式の右辺は非線形 ($\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{s}$ の積) ⇒ 2 次の項 $\Delta X^{(k)} \Delta\boldsymbol{s}^{(k)}$ は無視
- μ は一定とみなす ($\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)}$)

$$\begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{b} \\ A^\top \boldsymbol{y}^{(k+1)} - \boldsymbol{s}^{(k+1)} - \boldsymbol{c} \\ X^{(k+1)}\boldsymbol{s}^{(k+1)} - \mu^{(k+1)}\boldsymbol{1} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b} \\ A^\top \boldsymbol{y}^{(k)} - \boldsymbol{s}^{(k)} - \boldsymbol{c} \\ X^{(k)}\boldsymbol{s}^{(k)} - \mu^{(k)}\boldsymbol{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A\Delta\boldsymbol{x}^{(k)} \\ A^\top \Delta\boldsymbol{y}^{(k)} - \Delta\boldsymbol{s}^{(k)} \\ \Delta X^{(k)}\boldsymbol{s}^{(k)} + X^{(k)}\Delta\boldsymbol{s}^{(k)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & A^\top & -I \\ S^{(k)} & O & X^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x}^{(k)} \\ \Delta\boldsymbol{y}^{(k)} \\ \Delta\boldsymbol{s}^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b} \\ A^\top \boldsymbol{y}^{(k)} - \boldsymbol{s}^{(k)} - \boldsymbol{c} \\ X^{(k)}\boldsymbol{s}^{(k)} - \mu^{(k)}\boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

$S^{(k)}$: 対角要素に $\boldsymbol{s}^{(k)}$ の要素を並べた対角行列

解の更新方法 (続き)

差分の計算式

$$\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & A^\top & -I \\ S^{(k)} & O & X^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{x}^{(k)} \\ \Delta \boldsymbol{y}^{(k)} \\ \Delta \boldsymbol{s}^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b} \\ A^\top \boldsymbol{y}^{(k)} - \boldsymbol{s}^{(k)} - \boldsymbol{c} \\ X^{(k)} \boldsymbol{s}^{(k)} - \mu^{(k)} \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- (線形) 連立 1 次方程式なので，簡単に解ける
- 実際には，求まった $\Delta \boldsymbol{x}^{(k)}, \Delta \boldsymbol{y}^{(k)}, \Delta \boldsymbol{s}^{(k)}$ は直接使わず，

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \Delta \boldsymbol{x}^{(k)}$$
$$\boldsymbol{y}^{(k+1)} = \boldsymbol{y}^{(k)} + \beta^{(k)} \Delta \boldsymbol{y}^{(k)}$$
$$\boldsymbol{s}^{(k+1)} = \boldsymbol{s}^{(k)} + \beta^{(k)} \Delta \boldsymbol{s}^{(k)}$$

  とする．ただし，$\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}$ はパラメータ
- $\mu^{(k)}$ は，現在の解とパラメータ γ $(0 \leq \gamma < 1)$ を用いて

$$\mu^{(k)} = \gamma \frac{(\boldsymbol{s}^{(k)})^\top \boldsymbol{x}^{(k)}}{n}$$

  とする ($\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} = n\mu$ から逆算し，γ 倍する)