

## オペレーションズ・リサーチ I (5)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

本文書のライセンスは CC-BY-SA にしています



## スケジュール

No.	内容
1	オペレーションズ・リサーチと最適化，線形計画問題の基礎 (1)
2	線形計画問題の基礎 (2)，線形計画問題の標準形
3	シンプレックス (単体) 法 1
4	シンプレックス (単体) 法 2，2 段階シンプレックス法
5	双対問題，双対定理，相補性定理
6	双対シンプレックス法，ファルカス補題，感度分析
7	内点法

## 2 段階シンプレックス法の手順

### フェーズ I

- 元の問題に対する実行可能基底解を求めるための **新たな問題 (線形計画問題)** をつくる
- この問題にシンプレックス法を適用

### フェーズ II

- 元の問題にシンプレックス法を適用
- 初期値はフェーズ I で求めた実行可能基底解

### 実行可能基底解を求めるための線形計画問題

- 制約違反量を最小化する線形計画問題
  - 制約条件の右辺を非負に揃える
  - 制約条件の左辺に制約違反量を表す決定変数を加える
  - 目的関数は制約違反を表す決定変数の和
- 最適値が 0 より大きいなら、元の問題は実行不可能

### フェーズ II の初期タブロー

- フェーズ I のタブローから、制約違反を表す決定変数の列・1 行目を削除  
基底変数に含まれるなら、非基底変数と入れ替えておく
- 1 行目に目的関数の係数を追加後、基底変数の列が 0 となるよう掃き出し

## 練習問題その 2

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$w_1 + w_2 + w_3$  を最小化する問題

$w_1, w_2, w_3$  を基底変数としたタブロー

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$w_1$								
$w_2$								
$w_3$								

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて, 1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す. これで準備完了. フェーズ I スタート

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$w_1$								
$w_2$								
$w_3$								

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$w_1$								
$x_2$								
$w_3$								

②	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$x_1$								
$x_2$								
$w_3$								

終了だが, 退化で  $w_3$  が基底変数に残っているので, 非基底変数  $x_3$  と入れ替え (ピボット操作)

## 練習問題その 2

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### 制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### $w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$w_1, w_2, w_3$  を基底変数としたタブロー

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$w_1$								
$w_2$								
$w_3$								

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて, 1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す. これで準備完了. フェーズ I スタート

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$w_1$								
$w_2$								
$w_3$								

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$w_1$								
$x_2$								
$w_3$								

②	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$x_1$								
$x_2$								
$w_3$								

終了だが, 退化で  $w_3$  が基底変数に残っているので, 非基底変数  $x_3$  と入れ替え (ピボット操作)

## 練習問題その 2

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### 制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### $w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1, w_2, w_3$  を基底変数としたタブロー

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$w_1$								
$w_2$								
$w_3$								

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて, 1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す. これで準備完了. フェーズ I スタート

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$w_1$								
$w_2$								
$w_3$								

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$w_1$								
$x_2$								
$w_3$								

②	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$x_1$								
$x_2$								
$w_3$								

終了だが, 退化で  $w_3$  が基底変数に残っているので, 非基底変数  $x_3$  と入れ替え (ピボット操作)

## 練習問題その 2

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### 制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### $w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1, w_2, w_3$  を基底変数としたタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
①	0	0	0	0	1	1	1	0
$w_1$	-1	2	1	1	1	0	0	3
$w_2$	-2	1	2	1	0	1	0	0
$w_3$	-1	2	0	1	0	0	1	3

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて, 1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す。これで準備完了。フェーズ I スタート

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
①								
$w_1$								
$w_2$								
$w_3$								

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
①								
$w_1$								
$x_2$								
$w_3$								

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
②								
$x_1$								
$x_2$								
$w_3$								

終了だが, 退化で  $w_3$  が基底変数に残っているので, 非基底変数  $x_3$  と入れ替え (ピボット操作)

## 練習問題その2

### 練習問題その2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### 制約条件の右辺を0以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### $w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1, w_2, w_3$  を基底変数としたタブロー

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	0	0	1	1	1	0
$w_1$	-1	2	1	1	1	0	0	3
$w_2$	-2	1	2	1	0	1	0	0
$w_3$	-1	2	0	1	0	0	1	3

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて, 1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す。これで準備完了。フェーズ1スタート

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	4	-5	-3	-3	0	0	0	-6
$w_1$	-1	2	1	1	1	0	0	3
$w_2$	-2	1	2	1	0	1	0	0
$w_3$	-1	2	0	1	0	0	1	3

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$w_1$								
$x_2$								
$w_3$								

②	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$x_1$								
$x_2$								
$w_3$								

終了だが, 退化で  $w_3$  が基底変数に残っているので, 非基底変数  $x_3$  と入れ替え (ピボット操作)



## 練習問題その 2

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### 制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### $w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1, w_2, w_3$  を基底変数としたタブロー

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	0	0	1	1	1	0
$w_1$	-1	2	1	1	1	0	0	3
$w_2$	-2	1	2	1	0	1	0	0
$w_3$	-1	2	0	1	0	0	1	3

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて, 1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す。これで準備完了。フェーズ I スタート

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	4	-5	-3	-3	0	0	0	-6
$w_1$	-1	2	1	1	1	0	0	3
$w_2$	-2	1	2	1	0	1	0	0
$w_3$	-1	2	0	1	0	0	1	3

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	-6	0	7	2	0	5	0	-6
$w_1$	3	0	-3	-1	1	-2	0	3
$x_2$	-2	1	2	1	0	1	0	0
$w_3$	3	0	-4	-1	0	-2	1	3

②	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	1	0	2	1	0	0
$x_1$	1	0	-1	-1/3	1/3	-2/3	0	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2/3	-1/3	0	2
$w_3$	0	0	-1	0	-1	0	1	0

終了だが, 退化で  $w_3$  が基底変数に残っているので, 非基底変数  $x_3$  と入れ替え (ピボット操作)

## 練習問題その 2

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### 制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

### $w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1, w_2, w_3$  を基底変数としたタブロー

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	0	0	1	1	1	0
$w_1$	-1	2	1	1	1	0	0	3
$w_2$	-2	1	2	1	0	1	0	0
$w_3$	-1	2	0	1	0	0	1	3

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて, 1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す。これで準備完了。フェーズ I スタート

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	4	-5	-3	-3	0	0	0	-6
$w_1$	-1	2	1	1	1	0	0	3
$w_2$	-2	1	2	1	0	1	0	0
$w_3$	-1	2	0	1	0	0	1	3

①	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	-6	0	7	2	0	5	0	-6
$w_1$	3	0	-3	-1	1	-2	0	3
$x_2$	-2	1	2	1	0	1	0	0
$w_3$	3	0	-4	-1	0	-2	1	3

②	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	1	0	2	1	0	0
$x_1$	1	0	-1	-1/3	1/3	-2/3	0	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2/3	-1/3	0	2
$w_3$	0	0	-1	0	-1	0	1	0

終了だが, 退化で  $w_3$  が基底変数に残っているので, 非基底変数  $x_3$  と入れ替え (ピボット操作)

## 練習問題その 2(続き)

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1 + w_2 + w_3$  を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

フェーズ I 終了. 1 行目と  $w_1, w_2, w_3$  の列を削除し, 1 行目に  $e^T$  を追加

③

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
$x_1$								
$x_2$								
$x_3$								

④

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_2$					
$x_3$					

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから, フェーズ II スタート

⑥

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_2$					
$x_3$					

⑦

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_4$					
$x_3$					

フェーズ II 終了. 最適値は  
最適解は

## 練習問題その 2(続き)

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1 + w_2 + w_3$  を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

フェーズ I 終了. 1 行目と  $w_1, w_2, w_3$  の列を削除し, 1 行目に  $e^T$  を追加

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	1	0	2	1	0	0
$x_1$	1	0	0	$-1/3$	$-2/3$	$-2/3$	0	1
$x_2$	0	1	0	$1/3$	$2/3$	$-1/3$	0	2
$x_3$	0	0	1	0	1	0	$-1$	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_2$					
$x_3$					

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから, フェーズ II スタート

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_2$					
$x_3$					

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_4$					
$x_3$					

フェーズ II 終了. 最適値は  
最適解は

## 練習問題その 2(続き)

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1 + w_2 + w_3$  を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

フェーズ I 終了. 1 行目と  $w_1, w_2, w_3$  の列を削除し, 1 行目に  $e^T$  を追加

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	1	0	2	1	0	0
$x_1$	1	0	0	$-1/3$	$-2/3$	$-2/3$	0	1
$x_2$	0	1	0	$1/3$	$2/3$	$-1/3$	0	2
$x_3$	0	0	1	0	1	0	$-1$	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_2$					
$x_3$					

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから, フェーズ II スタート

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_2$					
$x_3$					

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_4$					
$x_3$					

フェーズ II 終了. 最適値は  
最適解は

## 練習問題その 2(続き)

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1 + w_2 + w_3$  を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

フェーズ I 終了. 1 行目と  $w_1, w_2, w_3$  の列を削除し, 1 行目に  $e^T$  を追加

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	1	0	2	1	0	0
$x_1$	1	0	0	-1/3	-2/3	-2/3	0	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2/3	-1/3	0	2
$x_3$	0	0	1	0	1	0	-1	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	1	2	1	1	0
$x_1$	1	0	0	-1/3	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2
$x_3$	0	0	1	0	0

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから, フェーズ II スタート

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_2$					
$x_3$					

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_4$					
$x_3$					

フェーズ II 終了. 最適値は  
最適解は

## 練習問題その 2(続き)

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1 + w_2 + w_3$  を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

フェーズ I 終了. 1 行目と  $w_1, w_2, w_3$  の列を削除し, 1 行目に  $e^T$  を追加

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	1	0	2	1	0	0
$x_1$	1	0	0	$-1/3$	$-2/3$	$-2/3$	0	1
$x_2$	0	1	0	$1/3$	$2/3$	$-1/3$	0	2
$x_3$	0	0	1	0	1	0	$-1$	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	1	2	1	1	0
$x_1$	1	0	0	$-1/3$	1
$x_2$	0	1	0	$1/3$	2
$x_3$	0	0	1	0	0

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから, フェーズ II スタート

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	0	0	0	$2/3$	$-5$
$x_1$	1	0	0	$-1/3$	1
$x_2$	0	1	0	$1/3$	2
$x_3$	0	0	1	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_4$					
$x_3$					

フェーズ II 終了. 最適値は  
最適解は

## 練習問題その 2(続き)

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1 + w_2 + w_3$  を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

フェーズ I 終了. 1 行目と  $w_1, w_2, w_3$  の列を削除し, 1 行目に  $e^T$  を追加

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	1	0	2	1	0	0
$x_1$	1	0	0	-1/3	-2/3	-2/3	0	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2/3	-1/3	0	2
$x_3$	0	0	1	0	1	0	-1	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	1	2	1	1	0
$x_1$	1	0	0	-1/3	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2
$x_3$	0	0	1	0	0

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから, フェーズ II スタート

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	0	0	0	2/3	-5
$x_1$	1	0	0	-1/3	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2
$x_3$	0	0	1	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$					
$x_4$					
$x_3$					

フェーズ II 終了. 最適値は  
最適解は



## 練習問題その 2(続き)

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1 + w_2 + w_3$  を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

フェーズ I 終了. 1 行目と  $w_1, w_2, w_3$  の列を削除し, 1 行目に  $e^T$  を追加

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	1	0	2	1	0	0
$x_1$	1	0	0	-1/3	-2/3	-2/3	0	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2/3	-1/3	0	2
$x_3$	0	0	1	0	1	0	-1	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	1	2	1	1	0
$x_1$	1	0	0	-1/3	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2
$x_3$	0	0	1	0	0

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから, フェーズ II スタート

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	0	0	0	2/3	-5
$x_1$	1	0	0	-1/3	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2
$x_3$	0	0	1	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	0	-2	0	0	-9
$x_1$	1	1	0	0	3
$x_4$	0	3	0	1	6
$x_3$	0	0	1	0	0

フェーズ II 終了. 最適値は  
最適解は

## 練習問題その 2(続き)

### 練習問題その 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

$w_1 + w_2 + w_3$  を最小化する問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & w_1 + w_2 + w_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

フェーズ I 終了. 1 行目と  $w_1, w_2, w_3$  の列を削除し, 1 行目に  $e^T$  を追加

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	
	0	0	1	0	2	1	0	0
$x_1$	1	0	0	-1/3	-2/3	-2/3	0	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2/3	-1/3	0	2
$x_3$	0	0	1	0	1	0	-1	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	1	2	1	1	0
$x_1$	1	0	0	-1/3	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2
$x_3$	0	0	1	0	0

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから, フェーズ II スタート

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	0	0	0	2/3	-5
$x_1$	1	0	0	-1/3	1
$x_2$	0	1	0	1/3	2
$x_3$	0	0	1	0	0

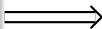
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	0	-2	0	0	-9
$x_1$	1	1	0	0	3
$x_4$	0	3	0	1	6
$x_3$	0	0	1	0	0

フェーズ II 終了. 最適値は 9,  
最適解は  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, 0, 6)$

## 双対問題

### 主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



### 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$

### 双対問題 (dual problem)

- 「双対」の読みは「そうつい」
- 元の問題  $\Rightarrow$  **主問題**と呼ぶ
- 主問題が最大化問題  $\Rightarrow$  双対問題は最小化問題
- 両者は密接な関係がある
- 双対性 (duality) は最適化問題における非常に重要な概念

## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\begin{array}{ll}\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\end{array}$$



### (A) の双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_2 + y_3 \geq -2 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1\end{array}$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(x)$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



### (A) の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_2 + y_3 \geq -2 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \end{aligned}$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(\mathbf{x})$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

(1) より

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ &= 3(2x_1 + x_3 + x_4) - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \end{aligned}$$

## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\max 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2)$$

$$x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



### (A) の双対問題

$$\min 6y_1 - 2y_2 + 12y_3$$

$$\text{s.t. } 2y_1 + y_2 \geq 2$$

$$-y_2 + y_3 \geq -2$$

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3$$

$$y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(x)$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

(1) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ &= 3(\boxed{2x_1 + x_3 + x_4}) - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \end{aligned}$$

6

## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\max \quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2)$$

$$x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



### (A) の双対問題

$$\min \quad 6y_1 - 2y_2 + 12y_3$$

$$\text{s.t.} \quad 2y_1 + y_2 \geq 2$$

$$-y_2 + y_3 \geq -2$$

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3$$

$$y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(x)$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

(1) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ &= 3(2x_1 + x_3 + x_4) - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\ &= 18 - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \end{aligned}$$

## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \boxed{2x_1} + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



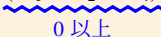
### (A) の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_2 + y_3 \geq -2 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \end{aligned}$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(x)$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

(1) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + \boxed{3x_3} + x_4 \\ &= 3\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)} - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\ &= 18 - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\ &\leq 18 \end{aligned}$$





## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \boxed{2x_1} + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



### (A) の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_2 + y_3 \geq -2 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \end{aligned}$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(\mathbf{x})$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

(1) より

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + \boxed{6} - 3x_3 + x_4 \\ &= 3\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)} - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\ &= 18 - \underbrace{(4x_1 + 2x_2 + 2x_4)}_{\substack{\text{0 以上} \\ \text{~~~~~}}} \\ &\leq 18 \end{aligned}$$

したがって,  $f(\mathbf{x}) \leq \boxed{18}$

## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \boxed{2x_1 + x_3 + x_4 = 6} \quad (1) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



### (A) の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_2 + y_3 \geq -2 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \end{aligned}$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(x)$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

(1) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + \boxed{6} + x_4 \\ &= 3\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)} - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\ &= 18 - \underbrace{(4x_1 + 2x_2 + 2x_4)}_{0 \text{ 以上}} \\ &\leq 18 \end{aligned}$$

したがって,  $f(x) \leq \boxed{18}$

(2) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ &= 2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) - (x_3 + x_4) \end{aligned}$$

## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



### (A) の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_2 + y_3 \geq -2 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \end{aligned}$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(x)$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

(1) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + \overset{6}{\cancel{3x_3}} + x_4 \\ &= 3(\overset{6}{\cancel{2x_1 + x_3 + x_4}}) - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\ &= 18 - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\ &\leq 18 \end{aligned}$$

~~~~~  
0 以上

したがって,  $f(x) \leq \boxed{18}$

(2) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + \overset{-2}{\cancel{3x_3}} + x_4 \\ &= 2(\overset{-2}{\cancel{x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4}}) - (x_3 + x_4) \end{aligned}$$

## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



### (A) の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_2 + y_3 \geq -2 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \end{aligned}$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(x)$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

(1) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ &= 3(2x_1 + x_3 + x_4) - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\ &= 18 - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\ &\leq 18 \end{aligned}$$

0 以上

したがって,  $f(x) \leq 18$

(2) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ &= 2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) - (x_3 + x_4) \\ &= -4 - (x_3 + x_4) \\ &\leq -4 \end{aligned}$$

0 以上

したがって,  $f(x) \leq -4$

## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



### (A) の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_2 + y_3 \geq -2 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \end{aligned}$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(x)$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

(1) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ &= 3(2x_1 + x_3 + x_4) - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\ &= 18 - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\ &\leq 18 \end{aligned}$$

0 以上

したがって、 $f(x) \leq 18$

(2) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ &= 2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) - (x_3 + x_4) \\ &= -4 - (x_3 + x_4) \\ &\leq -4 \end{aligned}$$

0 以上

したがって、 $f(x) \leq -4$

波線の部分を小さくした方がよい見積もりが得られる ( $f(x)$  の実際の最大値は  $-6$ )

## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



### (A) の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_2 + y_3 \geq -2 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \end{aligned}$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(x)$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

(1), (2), (3) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ &= \frac{6}{14} (2x_1 + x_3 + x_4) + \frac{23}{14} (x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) - \frac{5}{14} (x_2 + x_3 + 3x_4) - \frac{1}{14} (7x_1 + 5x_3) \\ &= -5 - \frac{1}{14} (7x_1 + 5x_3) \leq -5 \end{aligned}$$

したがって、 $f(x) \leq -5$

制約条件を複数使うと、さらにより見積もり

## 主問題と双対問題の関係 (その 1)

### 例題 (A)

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



### (A) の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_2 + y_3 \geq -2 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \end{aligned}$$

例題 (A) の目的関数 ( $f(x)$  とおく) をどこまで大きくできるか知りたい  $\Rightarrow$  上界値

(1), (2), (3) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ &= \frac{6}{14} \boxed{2x_1 + x_3 + x_4} + \frac{23}{14} \boxed{x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4} - \frac{5}{14} \boxed{x_2 + x_3 + 3x_4} - \frac{1}{14} (7x_1 + 5x_3) \\ &= -5 - \frac{1}{14} (7x_1 + 5x_3) \leq -5 \end{aligned}$$

したがって、 $f(x) \leq \boxed{-5}$

もう少し頑張ってよい上界値を探す

## 主問題と双対問題の関係 (その 2)

(1), (2), (3) より

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 &= \frac{6}{14}(2x_1 + x_3 + x_4) + \frac{23}{14}(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) - \frac{5}{14}(x_2 + x_3 + 3x_4) - \frac{1}{14}(7x_1 + 5x_3) \\
 &= -5 - \frac{1}{14}(7x_1 + 5x_3) \leq -5
 \end{aligned}$$

したがって、 $f(x) \leq -5$

⇓ 一般化

(1), (2), (3) より

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 &= y_1(2x_1 + x_3 + x_4) + y_2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) + y_3(x_2 + x_3 + 3x_4) - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
 &= 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
 &\leq 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \quad p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

ここをギリギリまで小さくした方がよい見積もり  
ただし、 $p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0$  の範囲で探す

$$\min 6y_1 - 2y_2 + 12y_3$$

s.t.

$$\begin{aligned}
 2y_1 + y_2 - 2 &= p_1 \geq 0 && (x_1 \text{ の係数}) \\
 -y_2 + y_3 + 2 &= p_2 \geq 0 && (x_2 \text{ の係数}) \\
 y_1 + 2y_2 + y_3 - 3 &= p_3 \geq 0 && (x_3 \text{ の係数}) \\
 y_1 + y_2 + 3y_3 - 1 &= p_4 \geq 0 && (x_4 \text{ の係数})
 \end{aligned}$$



## 主問題と双対問題の関係 (その 3)

### 例題 (A)

$$\begin{array}{ll}\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\ & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\end{array}$$



### (A) の双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\ \text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_2 + y_3 \geq -2 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1\end{array}$$

(A) の目的関数値の最良の見積もり (最小の上界) を求める問題

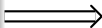
$$\begin{array}{llll}\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 & \text{s.t.} & \begin{array}{l} 2y_1 + y_2 - 2 = p_1 \geq 0 \quad (x_1 \text{ の係数}) \\ -y_2 + y_3 + 2 = p_2 \geq 0 \quad (x_2 \text{ の係数}) \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - 3 = p_3 \geq 0 \quad (x_3 \text{ の係数}) \\ y_1 + y_2 + 3y_3 - 1 = p_4 \geq 0 \quad (x_4 \text{ の係数}) \end{array}\end{array}$$

双対問題 = 主問題の目的関数値の最小の上界を求める問題

## 主問題と双対問題の関係 (その 4)

### 主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$



### 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \end{aligned}$$

先ほどの式変形を行列で考える.

1.  $\mathbf{Ax}$  の各行に  $y_1, \dots, y_m$  をかけたものから主問題の目的関数  $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$  を引く

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{Ax} - \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = (\mathbf{y}^\top \mathbf{A} - \mathbf{c}^\top) \mathbf{x}$$

2. 1 の  $\mathbf{x}$  の係数がすべて 0 以上なら,  $\mathbf{y}^\top \mathbf{Ax}$  は主問題の目的関数値の上界

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{A} - \mathbf{c}^\top \geq \mathbf{0}^\top$$

3. 2 を守りながら上界値  $\mathbf{y}^\top \mathbf{Ax} = \mathbf{y}^\top \mathbf{b}$  を最小化する問題

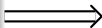
$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{y}^\top \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y}^\top \mathbf{A} - \mathbf{c}^\top \geq \mathbf{0}^\top \end{aligned}$$

4.  $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$  や  $\mathbf{y}^\top \mathbf{A} - \mathbf{c}^\top \geq \mathbf{0}^\top \Leftrightarrow \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$  を使って 3 を整理  $\Rightarrow$  双対問題

## 弱双対定理

### 主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



### 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$

### 弱双対定理 (weak duality theorem)

$x$  は主問題の実行可能解,  $y$  は双対問題の実行可能解とする. このとき,  $c^T x \leq b^T y$  が成り立つ

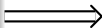
### 証明

$$\begin{aligned} c^T x &\leq (A^T y)^T x && \text{(双対問題の制約条件 } A^T y \geq c \text{ と } x \geq 0 \text{ より)} \\ &= y^T Ax \\ &= y^T b && \text{(主問題の制約条件 } Ax = b \text{ より)} \\ &= b^T y \end{aligned}$$

## 弱双対定理からわかること

### 主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



### 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$

### 弱双対定理 (weak duality theorem)

$x$  は主問題の実行可能解,  $y$  は双対問題の実行可能解とする. このとき,  
 $c^T x \leq b^T y$  が成り立つ

### 系

主問題が非有界なら双対問題は実行不可能. 逆に, 双対問題が非有界なら主問題は実行不可能.

前半のみ示す. 「主問題が非有界かつ双対問題が実行可能」を仮定して矛盾を導く.  
双対問題の実行可能解の 1 つを  $y$  とすると, 弱双対定理より, 主問題の任意の実行可能解  $x$  は

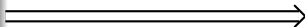
$$c^T x \leq b^T y \quad (*)$$

を満たす. (\*) より主問題の目的関数値は  $b^T y$  以下. これは非有界であることに矛盾

## 不等式標準形の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$



等式標準形の双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$

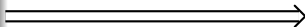
不等式標準形の主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

# 不等式標準形の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$



等式標準形の双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$



主問題 (等式標準形)

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax + s = b \\ & x, s \geq 0\end{array}$$

# 不等式標準形の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

主問題 (等式標準形)

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax + s = b \\ & x, s \geq 0\end{array}$$

主問題 (行列で書き直す)

$$\begin{array}{ll}\max & (c^T \quad 0^T) \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} & (A \quad I) \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b \\ & \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \geq 0\end{array}$$

# 不等式標準形の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

主問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax + s = b \\ & x, s \geq 0 \end{aligned}$$

主問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \max \quad & (c^T \quad 0^T) \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & (A \quad I) \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b \\ & \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A^T \\ I \end{pmatrix} y \geq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



# 不等式標準形の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

不等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

主問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax + s = b \\ & x, s \geq 0 \end{aligned}$$

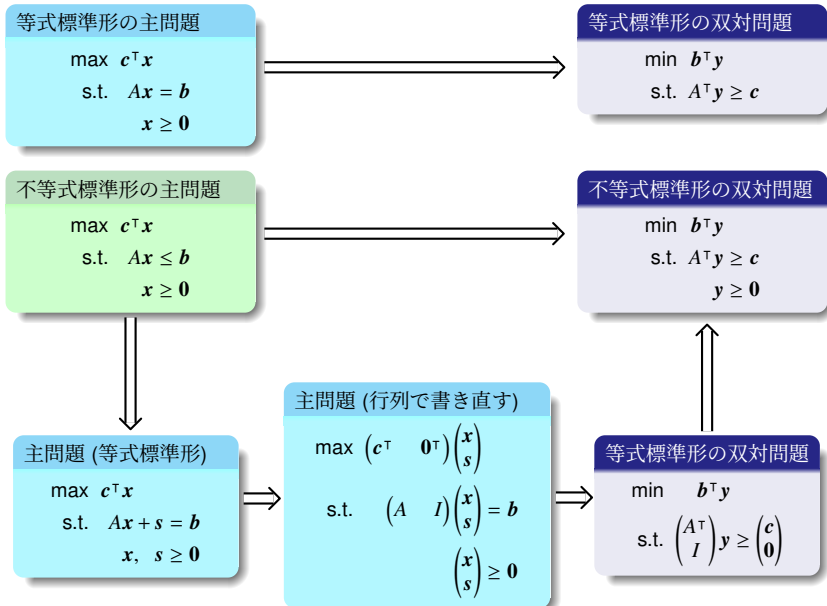
主問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \max \quad & (c^T \quad 0^T) \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & (A \quad I) \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b \\ & \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A^T \\ I \end{pmatrix} y \geq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# 不等式標準形の双対問題



# 主問題と双対問題の関係 (不等式標準形の場合)

## 例題 (A)

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$



## (A) の双対問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
 & -y_2 + y_3 \geq -2 \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
 \end{aligned}$$

(1), (2), (3) より

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 &= y_1(2x_1 + x_3 + x_4) + y_2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) + y_3(x_2 + x_3 + 3x_4) - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
 &= 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 - \underbrace{(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)}_{p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0} \\
 &\leq 6y_1 - 2y_2 + 12y_3
 \end{aligned}$$

$$\min 6y_1 - 2y_2 + 12y_3$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 - 2 = p_1 \geq 0 && (x_1 \text{ の係数}) \\
 & -y_2 + y_3 + 2 = p_2 \geq 0 && (x_2 \text{ の係数}) \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 - 3 = p_3 \geq 0 && (x_3 \text{ の係数}) \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 - 1 = p_4 \geq 0 && (x_4 \text{ の係数})
 \end{aligned}$$

# 主問題と双対問題の関係 (不等式標準形の場合)

## 例題 (B)

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_3 + x_4 \leq 6 \quad (1) \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq -2 \quad (2) \\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 12 \quad (3) \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$



## (B) の双対問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
 & -y_2 + y_3 \geq -2 \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

(1), (2), (3) より

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 &= y_1(2x_1 + x_3 + x_4) + y_2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) + y_3(x_2 + x_3 + 3x_4) - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
 &= 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 - \underbrace{(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)}_{p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0} \\
 &\leq 6y_1 - 2y_2 + 12y_3
 \end{aligned}$$

$$\min 6y_1 - 2y_2 + 12y_3$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 - 2 = p_1 \geq 0 && (x_1 \text{ の係数}) \\
 & -y_2 + y_3 + 2 = p_2 \geq 0 && (x_2 \text{ の係数}) \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 - 3 = p_3 \geq 0 && (x_3 \text{ の係数}) \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 - 1 = p_4 \geq 0 && (x_4 \text{ の係数})
 \end{aligned}$$

# 主問題と双対問題の関係 (不等式標準形の場合)

## 例題 (B)

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_3 + x_4 \leq 6 \quad (1) \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq -2 \quad (2) \\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 12 \quad (3) \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$



## (B) の双対問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
 & -y_2 + y_3 \geq -2 \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

(1), (2), (3) より

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 &= \underbrace{y_1(2x_1 + x_3 + x_4)}_{\leq 6y_1 - 2y_2 + 12y_3} + \underbrace{y_2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)}_{\leq (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)} + \underbrace{y_3(x_2 + x_3 + 3x_4)}_{\leq (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)} - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
 &\leq 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 - \underbrace{(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)}_{p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0} \\
 &\leq 6y_1 - 2y_2 + 12y_3
 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$\min \quad 6y_1 - 2y_2 + 12y_3$$

s.t.

$$\begin{aligned}
 2y_1 + y_2 - 2 &= p_1 \geq 0 && (x_1 \text{ の係数}) \\
 -y_2 + y_3 + 2 &= p_2 \geq 0 && (x_2 \text{ の係数}) \\
 y_1 + 2y_2 + y_3 - 3 &= p_3 \geq 0 && (x_3 \text{ の係数}) \\
 y_1 + y_2 + 3y_3 - 1 &= p_4 \geq 0 && (x_4 \text{ の係数})
 \end{aligned}$$

# 主問題と双対問題の関係 (不等式標準形の場合)

## 例題 (B)

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_3 + x_4 \leq 6 \quad (1) \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq -2 \quad (2) \\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 12 \quad (3) \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$



## (B) の双対問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
 & -y_2 + y_3 \geq -2 \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

(1), (2), (3) より

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 &= y_1(2x_1 + x_3 + x_4) + y_2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) + y_3(x_2 + x_3 + 3x_4) - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
 &\leq \underbrace{6y_1 - 2y_2 + 12y_3}_{\text{双対問題の目的関数}} - \underbrace{(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)}_{p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0} \\
 &\leq 6y_1 - 2y_2 + 12y_3
 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

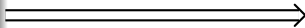
$$\min 6y_1 - 2y_2 + 12y_3$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 - 2 = p_1 \geq 0 \quad (x_1 \text{ の係数}) \\
 & -y_2 + y_3 + 2 = p_2 \geq 0 \quad (x_2 \text{ の係数}) \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 - 3 = p_3 \geq 0 \quad (x_3 \text{ の係数}) \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 - 1 = p_4 \geq 0 \quad (x_4 \text{ の係数}) \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$



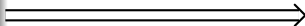
等式標準形の双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$

## 双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$



等式標準形の双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$



双対問題 (最大化問題)

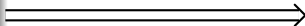
$$\begin{array}{ll}\max & -b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$



## 双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$



等式標準形の双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$



双対問題 (最大化問題)

$$\begin{array}{ll}\max & -b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$



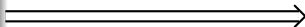
双対問題 (非負決定変数)

$$\begin{array}{ll}\max & -b^T y' + b^T y'' \\ \text{s.t.} & A^T y' - A^T y'' \geq c \\ & y', \quad y'' \geq 0\end{array}$$

## 双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$



双対問題 (最大化問題)

$$\begin{aligned} \max \quad & -b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$



双対問題 (非負決定変数)

$$\begin{aligned} \max \quad & -b^T y' + b^T y'' \\ \text{s.t.} \quad & A^T y' - A^T y'' \geq c \\ & y', \quad y'' \geq 0 \end{aligned}$$



双対問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} -b^T & b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} -A^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \leq -c \\ & \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

## 双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b\end{array}$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T v > c\end{array}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

不等式標準形の双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0\end{array}$$

$$\text{s.t. } A^T y \geq c$$

双対問題 (行列で書き直す)

$$\begin{array}{ll}\max & \begin{pmatrix} -b^T & b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} -A^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \leq -c \\ & \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \geq 0\end{array}$$

双対問題 (非負決定変数)

$$\begin{array}{ll}\max & -b^T y' + b^T y'' \\ \text{s.t.} & A^T y' - A^T y'' \geq c \\ & y', \quad y'' \geq 0\end{array}$$

# 双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T v > c \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

不等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \quad A^T y \geq c$$

双対問題の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & -c^T x \\ \text{s.t.} \quad & -Ax \geq -b \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \max \quad & (-b^T \quad b^T) \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & (-A^T \quad A^T) \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \leq -c \\ & \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

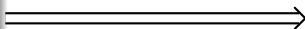
双対問題 (非負決定変数)

$$\begin{aligned} \max \quad & -b^T y' + b^T y'' \\ \text{s.t.} \quad & A^T y' - A^T y'' \geq c \\ & y', \quad y'' \geq 0 \end{aligned}$$

## 双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$



等式制約にまとめる

$$\begin{aligned} \min \quad & -c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



双対問題の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & -c^T x \\ \text{s.t.} \quad & -Ax \geq -b \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



双対問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} -b^T & b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} -A^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \leq -c \\ & \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$



双対問題 (最大化問題)

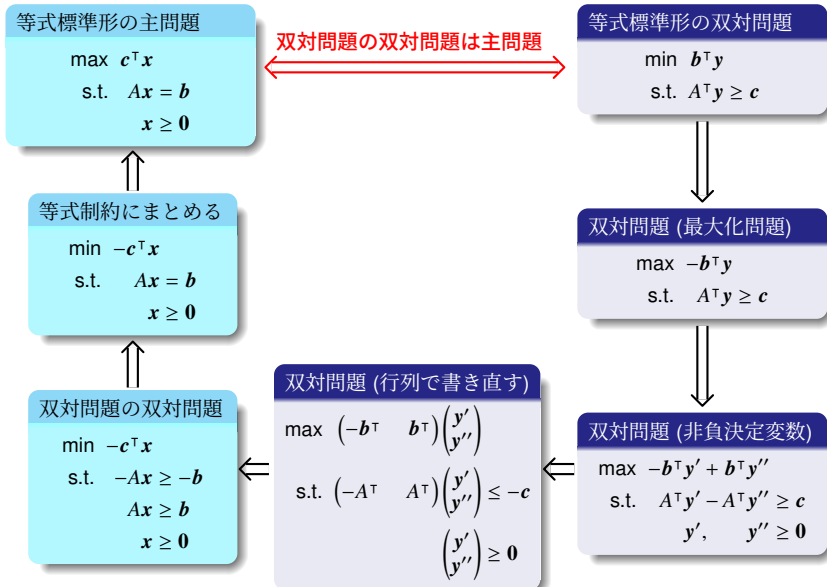
$$\begin{aligned} \max \quad & -b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$



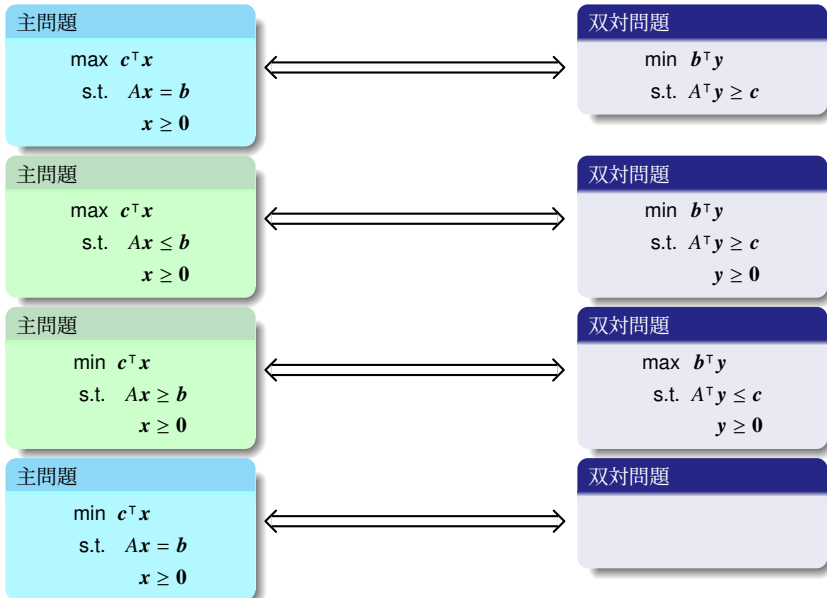
双対問題 (非負決定変数)

$$\begin{aligned} \max \quad & -b^T y' + b^T y'' \\ \text{s.t.} \quad & A^T y' - A^T y'' \geq c \\ & y', \quad y'' \geq 0 \end{aligned}$$

# 双対問題の双対問題



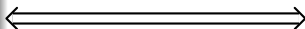
## 主問題と双対問題の関係 (まとめ)



## 主問題と双対問題の関係 (まとめ)

主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

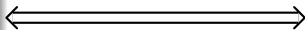


双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$

主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

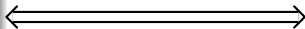


双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0\end{array}$$

主問題

$$\begin{array}{ll}\min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

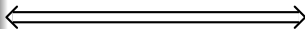


双対問題

$$\begin{array}{ll}\max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \leq c \\ & y \geq 0\end{array}$$

主問題

$$\begin{array}{ll}\min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$



双対問題

$$\begin{array}{ll}\max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \leq c\end{array}$$



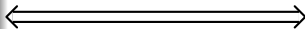
## 主問題と双対問題の関係 (練習問題)

主問題

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$

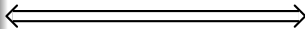


主問題

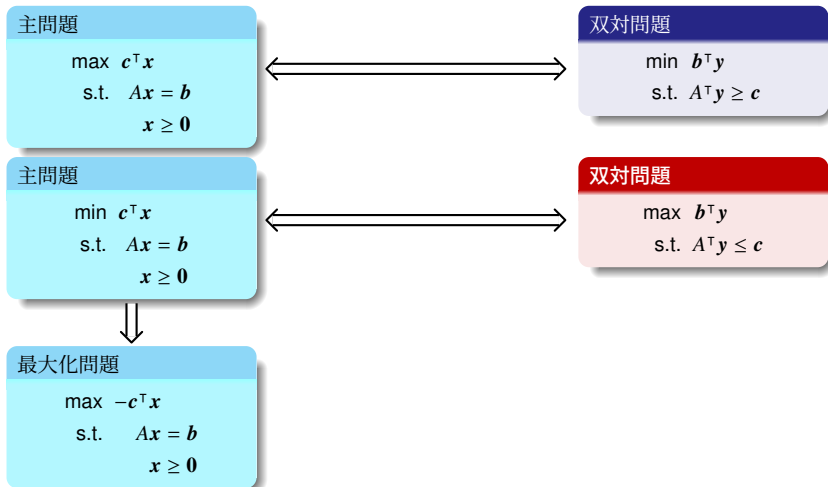
$$\begin{array}{ll}\min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

双対問題

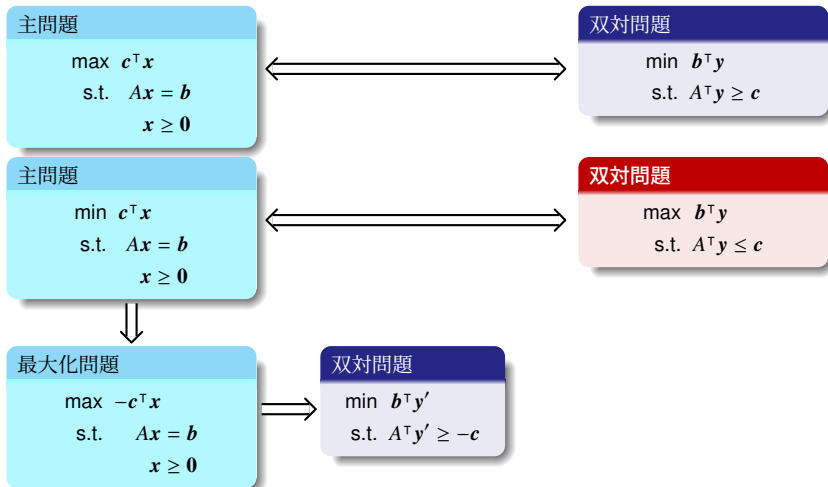
$$\begin{array}{ll}\max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \leq c\end{array}$$



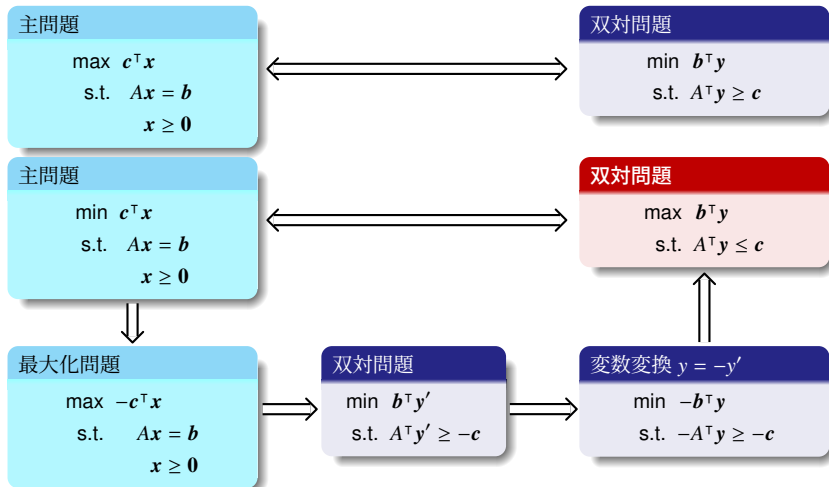
## 主問題と双対問題の関係 (練習問題)



## 主問題と双対問題の関係 (練習問題)



## 主問題と双対問題の関係 (練習問題)



## 双対定理

主問題 (P)

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$



双対問題 (D)

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$

弱双対定理 (weak duality theorem)

$x$  は主問題 (P) の実行可能解,  $y$  は双対問題 (D) の実行可能解とする. このとき,  $c^T x \leq b^T y$  が成り立つ



$c^T x = b^T y$  なら,  $x, y$  はそれぞれ主問題 (P), 双対問題 (D) の最適解



$c^T x = b^T y$  を満たす  $x, y$  は必ず見つかる?

## 双対定理 (続き)

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$

(強) 双対定理 ((strong) duality theorem)

主問題 (P), 双対問題 (D) のいずれかが最適解を持つなら, もう一方も最適解を持ち, 両者の目的関数値は一致する

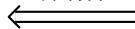
|      |        | 主問題    |     |       |
|------|--------|--------|-----|-------|
|      |        | 最適解を持つ | 非有界 | 実行不可能 |
| 双対問題 | 最適解を持つ | 一致     | —   | —     |
|      | 非有界    | —      | —   | ○     |
|      | 実行不可能  | —      | ○   | ○     |

## 例題

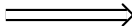
### 主問題

$$\begin{array}{ll}\max & x_1 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

非有界



実行不可能



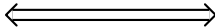
### 双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & y_1 \\ \text{s.t.} & y_1 \geq 1 \\ & -y_1 \geq 0\end{array}$$

### 主問題

$$\begin{array}{ll}\max & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 - x_2 = -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

いずれも実行不可能



### 双対問題

$$\begin{array}{ll}\min & y_1 - y_2 \\ \text{s.t.} & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & -y_1 - y_2 \geq 1\end{array}$$

## 双対定理の証明の準備

### 主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



### 双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$

### (強) 双対定理 ((strong) duality theorem)

主問題 (P), 双対問題 (D) のいずれかが最適解を持つなら, もう一方も最適解を持ち, 両者の目的関数値は一致する

### 証明の準備

- 「主問題 (P) が最適解を持つ  $\Rightarrow$  双対問題 (D) が最適解を持ち, 目的関数値が一致」を示す. 逆方向の証明は, 双対問題の双対問題が主問題であることを使えばよい
- 主問題 (P) の最適基底解が  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$  となるよう変数の順序を並べ替えておく
- $A, c$  を  $A = \begin{pmatrix} A_B & A_N \end{pmatrix}$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$  と分割
- 主問題 (P), 双対問題 (D) も書き直しておく



## 双対定理の証明の準備

### 主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$



### 双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}_B \\ & \mathbf{A}_N^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}_N \end{aligned}$$

### (強) 双対定理 ((strong) duality theorem)

主問題 (P), 双対問題 (D) のいずれかが最適解を持つなら, もう一方も最適解を持ち, 両者の目的関数値は一致する

### 証明の準備

- 「主問題 (P) が最適解を持つ  $\Rightarrow$  双対問題 (D) が最適解を持ち, 目的関数値が一致」を示す. 逆方向の証明は, 双対問題の双対問題が主問題であることを使えばよい
- 主問題 (P) の最適基底解が  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$  となるよう変数の順序を並べ替えておく
- $\mathbf{A}, \mathbf{c}$  を  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_B & \mathbf{A}_N \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_N \end{pmatrix}$  と分割
- 主問題 (P), 双対問題 (D) も書き直しておく

## 双対定理の証明 (その 1)

### 主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$



### 双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}_B \quad (\text{X}) \\ & \mathbf{A}_N^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}_N \quad (\text{Y}) \end{aligned}$$

### 証明 (パート 1)

主問題 (P) の目的関数  $f$  は以下のように表される

$$f = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\}^\top \mathbf{x}_N$$

最適解なので相対コスト係数は 0 以下. したがって

$$\mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \leq \mathbf{0}$$

$\mathbf{y} = (\mathbf{A}_B^{-1})^\top \mathbf{c}_B$  とおくと,  $\mathbf{y}$  は双対問題 (D) の実行可能解

$$\mathbf{A}_B^\top \mathbf{y} = \mathbf{A}_B^\top (\mathbf{A}_B^{-1})^\top \mathbf{c}_B = (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_B)^\top \mathbf{c}_B = \mathbf{c}_B \quad ((\text{X}) \text{ を満たす})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B &= \mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^\top (\mathbf{A}_B^{-1})^\top \mathbf{c}_B \\ &= \mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^\top \mathbf{y} \leq \mathbf{0} \quad ((\text{Y}) \text{ を満たす}) \end{aligned}$$

## 双対定理の証明 (その 2)

### 主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$



### 双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}_B \quad (\text{X}) \\ & \mathbf{A}_N^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}_N \quad (\text{Y}) \end{aligned}$$

### 証明 (パート 2)

主問題 (P) の目的関数  $f$  は以下のように表される

$$f = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\}^\top \mathbf{x}_N$$

主問題 (P) の最適値  $f^*$  は,  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$  より

$$f^* = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$$

双対問題 (D) の実行可能解  $\mathbf{y} = (\mathbf{A}_B^{-1})^\top \mathbf{c}_B$  の目的関数値  $\mathbf{b}^\top \mathbf{y}$  は

$$f^* = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} = \left\{ (\mathbf{A}_B^{-1})^\top \mathbf{c}_B \right\}^\top \mathbf{b} = \mathbf{y}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$$

より  $f^*$  と一致. 弱双対定理より双対問題 (D) の最適値は  $f^*$  以上だから,  
 $\mathbf{y} = (\mathbf{A}_B^{-1})^\top \mathbf{c}_B$  は双対問題 (D) の最適解

## 相補性定理

### 等式標準形の主問題 (P1)

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$



### 等式標準形の双対問題 (D1)

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c\end{array}$$

### 不等式標準形の主問題 (P2)

$$\begin{array}{ll}\max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$



### 不等式標準形の双対問題 (D2)

$$\begin{array}{ll}\min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0\end{array}$$

## 相補性定理 (complementary slackness theorem)

$x, y$  はそれぞれ主問題 (P), 双対問題 (D) の実行可能解とする.  $x, y$  が (P), (D) の最適解となるための必要十分条件は, 以下の (A), (B) が同時に成り立つこと.

$$\text{相補性条件} \begin{cases} y^T (b - Ax) = 0 & \text{(A)} \\ (A^T y - c)^T x = 0 & \text{(B)} \end{cases}$$

(P1), (D1) の場合,  $x$  が  $Ax = b$  を満たすので, (A) は自動的に成り立つ.

というわけで, 以下では, より難しそうな (P2), (D2) の場合を示す.

## 相補性定理の証明 (十分性)

不等式標準形の主問題 (P2)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



不等式標準形の双対問題 (D2)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

十分性の証明

(P2) の最適解  $x$ , (D2) の最適解  $y$  が

$$y^T(b - Ax) = 0 \quad (\text{A})$$

$$(A^T y - c)^T x = 0 \quad (\text{B})$$

を満たすことを示す. 不等式標準形に対する弱双対定理の導出式

$$c^T x \leq (A^T y)^T x \quad (A^T y \geq c \text{ と } x \geq 0)$$

$$= y^T Ax$$

$$\leq y^T b \quad (Ax \leq b \text{ と } y \geq 0)$$

に, 強双対定理  $c^T x = b^T y$  を適用すれば, どちらの不等式も等号で成り立たなければならないことがわかる.

$$c^T x = (A^T y)^T x \quad \Leftrightarrow \quad (A^T y - c)^T x = 0$$

$$y^T Ax = y^T b \quad \Leftrightarrow \quad y^T(b - Ax) = 0$$

## 相補性定理の証明 (必要性)

不等式標準形の主問題 (P2)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



不等式標準形の双対問題 (D2)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

必要性の証明

$$y^T (b - Ax) = 0 \tag{A}$$

$$(A^T y - c)^T x = 0 \tag{B}$$

が成り立つとき,  $x, y$  がそれぞれ (P2), (D2) の最適解となることを示す.  
前ページの弱双対定理の式

$$c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T Ax \leq y^T b$$

において等号が成り立つので,  $c^T x = y^T b$ . よって, 強双対定理より  $x, y$  は最適解.

## 相補性定理の意味

等式標準形の主問題 (P1)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



等式標準形の双対問題 (D1)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題 (P2)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



不等式標準形の双対問題 (D2)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$$y^T (b - Ax) = 0 \quad (\text{A})$$

$$(A^T y - c)^T x = 0 \quad (\text{B})$$

- $x, y$  は実行可能解なので,  $x \geq 0, y \geq 0, s = b - Ax \geq 0, t = A^T y - c \geq 0$
- (A), (B) 式は

$$y^T s = \sum_j y_j s_j = 0, \quad t^T x = \sum_j t_j x_j = 0$$

- **相補性**:  $y_j \neq 0 \Rightarrow s_j = 0, s_j \neq 0 \Rightarrow y_j = 0, x_j \neq 0 \Rightarrow t_j = 0, t_j \neq 0 \Rightarrow x_j = 0$

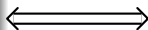
主問題の基底変数  $\Rightarrow$  双対問題の非基底変数

主問題の非基底変数  $\Leftarrow$  双対問題の基底変数

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

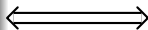


## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) &= (2, 0, 5, 0, 3) \\ &\quad \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$



# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

決定変数      左辺と右辺の差

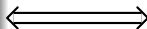
|       |       |
|-------|-------|
| $x_1$ | $t_1$ |
| $x_2$ | $t_2$ |

## 双対問題

$$\begin{aligned} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) &= (2, 0, 5, 0, 3) \\ &\quad \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

決定変数      左辺と右辺の差

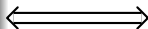
$$\begin{array}{cc} x_1 > 0 & t_1 \\ x_2 & t_2 \end{array}$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) &= (2, 0, 5, 0, 3) \\ &\quad \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

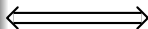
| 決定変数                  | 左辺と右辺の差   |
|-----------------------|-----------|
| $x_1 > 0 \Rightarrow$ | $t_1 = 0$ |
| $x_2$                 | $t_2$     |

## 双対問題

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) &= (2, 0, 5, 0, 3) \\ &\quad \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

決定変数      左辺と右辺の差

$$x_1 > 0 \Rightarrow t_1 = 0$$

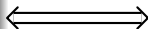
$$x_2 > 0 \Rightarrow t_2 > 0$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 0, 5, 0, 3)$$

$$(t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0, 1, 0)$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

決定変数      左辺と右辺の差

$$x_1 > 0 \Rightarrow t_1 = 0$$

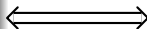
$$x_2 = 0 \Leftarrow t_2 > 0$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 0, 5, 0, 3)$$

$$(t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0, 1, 0)$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差

$s_1$

$s_2$

$s_3$

決定変数

$y_1$

$y_2$

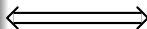
$y_3$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) &= (2, 0, 5, 0, 3) \\ &\quad \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差

$$s_1 > 0$$

$$s_2$$

$$s_3$$

決定変数

$$y_1$$

$$y_2$$

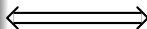
$$y_3$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 0, 5, 0, 3)$$

$$(t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0, 1, 0)$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差

決定変数

$$s_1 > 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

$$s_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$$

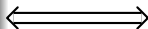
$$s_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 0$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 0, 5, 0, 3)$$

$$(t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0, 1, 0)$$



# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差

$$s_1 > 0$$

決定変数

$$y_1 = 0$$

$$y_2 > 0$$

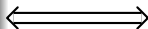
$$y_3$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 0, 5, 0, 3)$$

$$(t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0, 1, 0)$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差

決定変数

$$s_1 > 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

$$s_2 = 0 \Leftarrow y_2 > 0$$

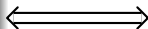
$$s_3 \quad y_3$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 0, 5, 0, 3)$$

$$(t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0, 1, 0)$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差

決定変数

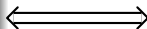
$$\begin{aligned} s_1 > 0 & \Rightarrow y_1 = 0 \\ s_2 = 0 & \Leftarrow y_2 > 0 \\ s_3 > 0 & y_3 \end{aligned}$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) &= (2, 0, 5, 0, 3) \\ &\quad \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差

決定変数

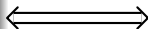
$$\begin{aligned} s_1 > 0 & \Rightarrow y_1 = 0 \\ s_2 = 0 & \Leftarrow y_2 > 0 \\ s_3 > 0 & \Rightarrow y_3 = 0 \end{aligned}$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) &= (2, 0, 5, 0, 3) \\ &\quad \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差

決定変数

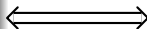
$$\begin{aligned} s_1 > 0 & \Rightarrow y_1 = 0 \\ s_2 = 0 & \Leftarrow y_2 > 0 \\ s_3 > 0 & \Rightarrow y_3 = 0 \end{aligned}$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) &= (2, 0, 5, 0, 3) \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差

決定変数

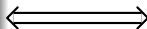
$$\begin{aligned} s_1 > 0 &\Rightarrow y_1 = 0 \\ s_2 = 0 &\Leftarrow y_2 > 0 \\ s_3 > 0 &\Rightarrow y_3 = 0 \end{aligned}$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) &= (2, 0, 5, 0, 3) \\ &\quad \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差

決定変数

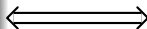
$$\begin{aligned} s_1 > 0 &\Rightarrow y_1 = 0 \\ s_2 = 0 &\Leftarrow y_2 > 0 \\ s_3 > 0 &\Rightarrow y_3 = 0 \end{aligned}$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) &= (2, 0, 5, 0, 3) \\ &\quad \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

# 相補性の例

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差      決定変数

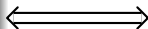
$$\begin{aligned} s_1 > 0 & \Rightarrow y_1 = 0 \\ s_2 = 0 & \Leftarrow y_2 > 0 \\ s_3 > 0 & \Rightarrow y_3 = 0 \end{aligned}$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

|       | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 0     | -1    | 0     | -1    | 0     | -2 |
| $s_1$ | 0     | -1    | 1     | 2     | 0     | 5  |
| $x_1$ | 1     | -1    | 0     | 1     | 0     | 2  |
| $s_3$ | 0     | 1     | 0     | -3    | 1     | 3  |

何か関係ありそう  
(次回)



|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $t_1$ | $t_2$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
|       | 5     | 0     | 3     | 2     | 0     | -2 |
| $t_2$ | 1     | 0     | -1    | 1     | 1     | 1  |
| $y_2$ | -2    | 1     | 3     | -1    | 0     | 1  |

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) &= (2, 0, 5, 0, 3) \\ &\quad \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) &= (0, 1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$