オペレーションズ・リサーチ I (6)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

スケジュール

No.	内容
1	オペレーションズ・リサーチと最適化，線形計画問題の基礎 (1)
2	線形計画問題の基礎 (2)，線形計画問題の標準形
3	シンプレックス (単体) 法 1
4	シンプレックス (単体) 法 2，2 段階シンプレックス法
5	双対問題，双対定理，相補性定理
6	双対シンプレックス法，ファルカス補題，感度分析
7	内点法

シンプレックスタブローの関係

例題

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{array}{rl} \min & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$\begin{array}{rl} \min & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

シンプレックスタブローの関係

例題

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{array}{ll} \min & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$\begin{array}{ll} \min & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

関係ありそう

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

シンプレックスタブローの関係 (続き)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$$\Longleftrightarrow$$

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

シンプレックスタブローの関係 (続き)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

シンプレックスタブローの関係 (続き)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

変数の順序を入れ替える

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	t_1	t_2	y_1	y_2	y_3	
	2	0	5	0	3	−2
t_2	1	1	1	0	−1	1
y_2	−1	0	−2	1	3	1

シンプレックスタブローの関係 (続き)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

変数の順序を入れ替える

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	t_1	t_2	y_1	y_2	y_3	
	2	0	5	0	3	−2
t_2	1	1	1	0	−1	1
y_2	−1	0	−2	1	3	1

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

		t_2	y_2
t_1	2	1	−1
t_2	0	1	0
y_1	5	1	−2
y_2	0	0	1
y_3	3	−1	3
	−2	1	1

シンプレックスタブローの関係 (続き)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

変数の順序を入れ替える

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	t_1	t_2	y_1	y_2	y_3	
	2	0	5	0	3	−2
t_2	1	1	1	0	−1	1
y_2	−1	0	−2	1	3	1

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

		t_2	y_2
t_1	2	1	−1
t_2	0	1	0
y_1	5	1	−2
y_2	0	0	1
y_3	3	−1	3
	−2	1	1

シンプレックスタブローの関係 (続き)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

変数の順序を入れ替える

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	t_1	t_2	y_1	y_2	y_3	
	2	0	5	0	3	−2
t_2	1	1	1	0	−1	1
y_2	−1	0	−2	1	3	1

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

		t_2	y_2
t_1	2	1	−1
t_2	0	1	0
y_1	5	1	−2
y_2	0	0	1
y_3	3	−1	3
	−2	1	1

シンプレックスタブローの関係 (続き)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

変数の順序を入れ替える

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	t_1	t_2	y_1	y_2	y_3	
	2	0	5	0	3	−2
t_2	1	1	1	0	−1	1
y_2	−1	0	−2	1	3	1

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

		t_2	y_2
t_1	2	1	−1
t_2	0	1	0
y_1	5	1	−2
y_2	0	0	1
y_3	3	−1	3
	−2	1	1

シンプレックスタブローの関係 (続き)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

変数の順序を入れ替える

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

	t_1	t_2	y_1	y_2	y_3	
	2	0	5	0	3	−2
t_2	1	1	1	0	−1	1
y_2	−1	0	−2	1	3	1

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_1	0	−1	1	2	0	5
s_3	0	1	0	−3	1	3

$\Longleftrightarrow$

		t_2	y_2
t_1	2	1	−1
t_2	0	1	0
y_1	5	1	−2
y_2	0	0	1
y_3	3	−1	3
	−2	1	1

	x_1	s_1	s_3	x_2	s_2	
	0	0	0	−1	−1	−2
x_1	1	0	0	−1	1	2
s_1	0	1	0	−1	2	5
s_3	0	0	1	1	−3	3

$\Longleftrightarrow$

		t_2	y_2
t_2	0	1	0
y_2	0	0	1
t_1	2	1	−1
y_1	5	1	−2
y_3	3	−1	3
	−2	1	1

辞書の関係

主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \text{s.t.} \quad & A_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A_{\mathrm{B}}^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ & A_{\mathrm{N}}^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \text{s.t.} \quad & A_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題 (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A_{\mathrm{B}}^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ & A_{\mathrm{N}}^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \\ & \boldsymbol{s}_{\mathrm{B}}, \quad \boldsymbol{s}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

辞書の関係 (続き)

基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max\quad & c_B^\top x_B + c_N^\top x_N \\ \text{s.t.}\quad & A_B x_B + A_N x_N = b \\ & x_B,\quad x_N \geq 0 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題 (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min\quad & b^\top y \\ \text{s.t.}\quad & A_B^\top y - s_B = c_B \\ & A_N^\top y - s_N = c_N \\ & s_B,\quad s_N \geq 0 \end{aligned}$$

$\Downarrow$

y: 消去
s_N: 基底変数
s_B: 非基底変数

$\Downarrow$

辞書

$$\begin{aligned} f &= c_B^\top A_B^{-1} b + \left\{c_N - (A_B^{-1}A_N)^\top c_B\right\}^\top x_N \\ x_B &= A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \end{aligned}$$

辞書

$$\begin{aligned} y &= (A_B^{-1})^\top c_B + (A_B^{-1})^\top s_B \\ g &= b^\top y \\ &= (A_B^{-1} b)^\top c_B + (A_B^{-1} b)^\top s_B \\ s_N &= -c_N + A_N^\top y \\ &= -\left\{c_N - (A_B^{-1}A_N)^\top c_B\right\} + (A_B^{-1}A_N)^\top s_B \end{aligned}$$

$(X^\top)^{-1} = (X^{-1})^\top$ に注意

辞書の関係 (続き)

基底・非基底変数に分解

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c_B^\top x_B + c_N^\top x_N \\
\text{s.t.} \quad & A_B x_B + A_N x_N = b \\
& x_B, \quad x_N \geq 0
\end{aligned}
$$

双対問題 (等式制約版)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & b^\top y \\
\text{s.t.} \quad & A_B^\top y - s_B = c_B \\
& A_N^\top y - s_N = c_N \\
& s_B, \quad s_N \geq 0
\end{aligned}
$$

y: 消去
s_N: 基底変数
s_B: 非基底変数

辞書

$$
\begin{aligned}
f &= c_B^\top A_B^{-1} b + \left\{c_N - (A_B^{-1} A_N)^\top c_B\right\}^\top x_N \\
x_B &= A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N
\end{aligned}
$$

辞書

$$
\begin{aligned}
g &= (A_B^{-1} b)^\top c_B + (A_B^{-1} b)^\top s_B \\
s_N &= -\left\{c_N - (A_B^{-1} A_N)^\top c_B\right\} + (A_B^{-1} A_N)^\top s_B
\end{aligned}
$$

辞書の関係 (続き)

基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\top}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \text{s.t.} \quad & A_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題 (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^{\top}\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A_{\mathrm{B}}^{\top}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ & A_{\mathrm{N}}^{\top}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \\ & \boldsymbol{s}_{\mathrm{B}}, \quad \boldsymbol{s}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{y}$: 消去
$\boldsymbol{s}_{\mathrm{N}}$: 基底変数
$\boldsymbol{s}_{\mathrm{B}}$: 非基底変数

辞書

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top}A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + \left\{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - (A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^{\top}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\right\}^{\top}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

辞書

$$\begin{aligned} g &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top}A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + (A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b})^{\top}\boldsymbol{s}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{s}_{\mathrm{N}} &= -\left\{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - (A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^{\top}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\right\} + (A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^{\top}\boldsymbol{s}_{\mathrm{B}} \end{aligned}$$

辞書の関係 (続き)

基底・非基底変数に分解

$$
\begin{aligned}
\max\quad & c_B^\top x_B + c_N^\top x_N \\
\text{s.t.}\quad & A_B x_B + A_N x_N = b \\
& x_B,\ x_N \geq 0
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題 (等式制約版)

$$
\begin{aligned}
\min\quad & b^\top y \\
\text{s.t.}\quad & A_B^\top y - s_B = c_B \\
& A_N^\top y - s_N = c_N \\
& s_B,\ s_N \geq 0
\end{aligned}
$$

y: 消去
s_N: 基底変数
s_B: 非基底変数

辞書

$$
\begin{aligned}
f &= c_B^\top A_B^{-1} b + \left\{ c_N - (A_B^{-1} A_N)^\top c_B \right\}^\top x_N \\
x_B &= A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N
\end{aligned}
$$

辞書

$$
\begin{aligned}
g &= c_B^\top A_B^{-1} b + (A_B^{-1} b)^\top s_B \\
s_N &= -\left\{ c_N - (A_B^{-1} A_N)^\top c_B \right\} + (A_B^{-1} A_N)^\top s_B
\end{aligned}
$$

辞書の関係 (続き)

基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned}\max\quad & \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^\top \boldsymbol{x}_N \\ \text{s.t.}\quad & A_B\boldsymbol{x}_B + A_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_B,\ \boldsymbol{x}_N \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題 (等式制約版)

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\quad & A_B^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}_B = \boldsymbol{c}_B \\ & A_N^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}_N = \boldsymbol{c}_N \\ & \boldsymbol{s}_B,\ \boldsymbol{s}_N \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{y}$: 消去
$\boldsymbol{s}_N$: 基底変数
$\boldsymbol{s}_B$: 非基底変数

辞書

$$\begin{aligned}f &= \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \left\{\boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B\right\}^\top \boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{x}_B &= A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N\end{aligned}$$

実行可能: $A_B^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$

最適: $\widetilde{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B \leq \boldsymbol{0}$

辞書

$$\begin{aligned}g &= \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + (A_B^{-1}\boldsymbol{b})^\top \boldsymbol{s}_B \\ \boldsymbol{s}_N &= -\left\{\boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B\right\} + (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{s}_B\end{aligned}$$

実行可能: $\widetilde{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B \leq \boldsymbol{0}$

最適: $A_B^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$

辞書の関係 (続き)

基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max\quad & \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\top}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \text{s.t.}\quad & A_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}},\quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題 (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min\quad & \boldsymbol{b}^{\top}\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\quad & A_{\mathrm{B}}^{\top}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ & A_{\mathrm{N}}^{\top}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \\ & \boldsymbol{s}_{\mathrm{B}},\quad \boldsymbol{s}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{y}$: 消去
$\boldsymbol{s}_{\mathrm{N}}$: 基底変数
$\boldsymbol{s}_{\mathrm{B}}$: 非基底変数

辞書

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top}A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + \left\{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - (A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^{\top}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\right\}^{\top}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{aligned}$$

実行可能: $A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$
最適: $\tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - (A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^{\top}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \leq \boldsymbol{0}$

辞書

$$\begin{aligned} g &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top}A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + (A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b})^{\top}\boldsymbol{s}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{s}_{\mathrm{N}} &= -\left\{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - (A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^{\top}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\right\} + (A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^{\top}\boldsymbol{s}_{\mathrm{B}} \end{aligned}$$

実行可能: $\tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - (A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^{\top}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \leq \boldsymbol{0}$
最適: $A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$

双対実行可能 (dual feasible)

主問題の基底解 $(\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}})$ が $\tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} \leq \boldsymbol{0}$ を満たす

双対シンプレックス法

- 主問題に対するシンプレックスタブローを用いる
- 双対実行可能な基底解を辿る．主問題に対して実行可能となれば終了
- 双対問題において非基底変数を基底変数と入れ替える
  ⇔ 主問題において基底変数を非基底変数と入れ替える

双対シンプレックス法 (dual simplex method)：最大化問題の場合

- **初期化**
  適当な**双対**実行可能基底解・対応するシンプレックスタブローを求める
- **ピボット行の選択**
  タブローの**右端の列**の要素が**負**の**行** i (ピボット**行**) を選択
  - 複数ある場合は絶対値がもっとも大きい**行**
  - 存在しなければ最適解が求まったものとして終了
    最適解は右端の列の 2 行目以降．右端の列の 1 行目は最適値の (-1) 倍
- **ピボット列の選択**
  1 行目の非基底変数の列の要素を**行** i の各要素で割る．0 以上かつ，もっとも小さい値となった**列** i (ピボット**列**) を選択 ⇒ ピボット要素 (i, j)
- **ピボット操作**
  行基本変形を施して，列 j のピボット要素 (i, j) 以外を 0 に，ピボット要素を 1 に変形

双対シンプレックス法

- 主問題に対するシンプレックスタブローを用いる
- 双対実行可能な基底解を辿る．主問題に対して実行可能となれば終了
- 双対問題において非基底変数を基底変数と入れ替える
  ⇔ 主問題において基底変数を非基底変数と入れ替える

双対シンプレックス法 (dual simplex method)：最小化問題の場合

- **初期化**
  適当な**双対**実行可能基底解・対応するシンプレックスタブローを求める
- **ピボット行の選択**
  タブローの**右端の列**の要素が**正**の**行** i (ピボット**行**) を選択
  - 複数ある場合は絶対値がもっとも大きい**行**
  - 存在しなければ最適解が求まったものとして終了
    最適解は右端の列の 2 行目以降．右端の列の 1 行目は最適値の (-1) 倍
- **ピボット列の選択**
  1 行目の非基底変数の列の要素を**行** i の各要素で割る．0 以上かつ，もっとも小さい値となった**列** i (ピボット**列**) を選択 ⇒ ピボット要素 (i, j)
- **ピボット操作**
  行基本変形を施して，列 j のピボット要素 (i, j) 以外を 0 に，ピボット要素を 1 に変形

双対シンプレックス法の例その 1

例題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \le -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le -3 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

s_1, s_2 を基底変数としたタブローは双対実行可能

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	−1	−2	−1	0	0	0
s_1	−1	1	1	1	0	−1
s_2	1	−2	−3	0	1	−3

双対シンプレックス法の例その 1

例題

$$
\begin{array}{rl}
\max & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + x_2 + x_3 \le -1 \\
& x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le -3 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\max & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\
& x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2 \ge 0
\end{array}
$$

s_1, s_2 を基底変数としたタブローは双対実行可能

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	−1	−2	−1	0	0	0
s_1	−1	1	1	1	0	−1
s_2	1	−2	−3	0	1	−3

双対シンプレックス法の例その 1

例題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \le -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le -3 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

s_1, s_2 を基底変数としたタブローは双対実行可能

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	−1	−2	−1	0	0	0
s_1	−1	1	1	1	0	−1
s_2	1	−2	−3	0	1	−3

双対問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -y_1 - 3y_2 \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 + y_2 \ge -1 \\ & y_1 - 2y_2 \ge -2 \\ & y_1 - 3y_2 \ge -1 \\ & y_1, \quad y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -y_1 - 3y_2 \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 + y_2 - t_1 = -1 \\ & y_1 - 2y_2 - t_2 = -2 \\ & y_1 - 3y_2 - t_3 = -1 \\ & y_1, \quad y_2, \quad t_1, \quad t_2, \quad t_3 \ge 0 \end{aligned}$$

双対シンプレックス法の例その 1

例題

$$\begin{aligned} \max\ & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.}\ & -x_1 + x_2 + x_3 \le -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le -3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

$$\begin{aligned} \max\ & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.}\ & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

s_1, s_2 を基底変数としたタブローは双対実行可能

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	−1	−2	−1	0	0	0
s_1	−1	1	1	1	0	−1
s_2	1	−2	−3	0	1	−3

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & -y_1 - 3y_2 \\ \text{s.t.}\ & -y_1 + y_2 \ge -1 \\ & y_1 - 2y_2 \ge -2 \\ & y_1 - 3y_2 \ge -1 \\ & y_1,\ y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min\ & -y_1 - 3y_2 \\ \text{s.t.}\ & -y_1 + y_2 - t_1 = -1 \\ & y_1 - 2y_2 - t_2 = -2 \\ & y_1 - 3y_2 - t_3 = -1 \\ & y_1,\ y_2,\ t_1,\ t_2,\ t_3 \ge 0 \end{aligned}$$

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	−1	−3	0	0	0	0
t_1	1	−1	1	0	0	1
t_2	−1	2	0	1	0	2
t_3	−1	3	0	0	1	1

双対シンプレックス法の例その 1 (続き)

(2) ピボット行 (基底変数) の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	-1	-2	-1	0	0	0
s_1	-1	1	1	1	0	-1
s_2	1	-2	-3	0	1	-3

(3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	-1	-2	-1	0	0	0
s_1	-1	1	1	1	0	-1
s_2	1	-2	-3	0	1	-3
	-1	1	$1/3$			

(4) ピボット操作

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	$-4/3$	$-4/3$	0	0	$-1/3$	1
s_1	$-2/3$	$1/3$	0	1	$1/3$	-2
x_3	$-1/3$	$2/3$	1	0	$-1/3$	1

(2) ピボット行 (基底変数) の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	$-4/3$	$-4/3$	0	0	$-1/3$	1
s_1	$-2/3$	$1/3$	0	1	$1/3$	-2
x_3	$-1/3$	$2/3$	1	0	$-1/3$	1

双対シンプレックス法の例その 1 (続き)

(2) ピボット行 (基底変数) の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	−1	−2	−1	0	0	0
s_1	−1	1	1	1	0	−1
s_2	1	−2	−3	0	1	−3

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	−1	−3	0	0	0	0
t_1	1	−1	1	0	0	1
t_2	−1	2	0	1	0	2
t_3	−1	3	0	0	1	1

(3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	−1	−2	−1	0	0	0
s_1	−1	1	1	1	0	−1
s_2	1	−2	−3	0	1	−3
	−1	1	1/3			

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	−1	−3	0	0	0	0
t_1	1	−1	1	0	0	1
t_2	−1	2	0	1	0	2
t_3	−1	3	0	0	1	1

(4) ピボット操作

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	−4/3	−4/3	0	0	−1/3	1
s_1	−2/3	1/3	0	1	1/3	−2
x_3	−1/3	2/3	1	0	−1/3	1

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	−2	0	0	0	1	1
t_1	2/3	0	1	0	1/3	4/3
t_2	−1/3	0	0	1	−2/3	4/3
y_2	−1/3	1	0	0	1/3	1/3

(2) ピボット行 (基底変数) の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	−4/3	−4/3	0	0	−1/3	1
s_1	−2/3	1/3	0	1	1/3	−2
x_3	−1/3	2/3	1	0	−1/3	1

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	−2	0	0	0	1	1
t_1	2/3	0	1	0	1/3	4/3
t_2	−1/3	0	0	1	−2/3	4/3
y_2	−1/3	1	0	0	1/3	1/3

双対シンプレックス法の例 (その 3)

(3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	$-4/3$	$-4/3$	0	0	$-1/3$	1
s_1	$-2/3$	$1/3$	0	1	$1/3$	-2
x_3	$-1/3$	$2/3$	1	0	$-1/3$	1
	2	-4			-1	

(4) ピボット操作

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	0	-2	0	-2	-1	5
x_1	1	$-1/2$	0	$-3/2$	$-1/2$	3
x_3	0	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$	2

解答

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$,　最適値 -5
スラック変数 $(s_1, s_2) = (0, 0)$

双対最適解 $(y_1, y_2) = (2, 1)$
双対スラック変数 $(t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 0)$

双対シンプレックス法の例 (その 3)

(3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	$-4/3$	$-4/3$	0	0	$-1/3$	1
s_1	$-2/3$	$1/3$	0	1	$1/3$	-2
x_3	$-1/3$	$2/3$	1	0	$-1/3$	1
	2	-4			-1	

(4) ピボット操作

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	0	-2	0	-2	-1	5
x_1	1	$-1/2$	0	$-3/2$	$-1/2$	3
x_3	0	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$	2

解答

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$,　最適値 -5
スラック変数 $(s_1, s_2) = (0, 0)$

双対最適解 $(y_1, y_2) = (2, 1)$
双対スラック変数 $(t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 0)$

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	-2	0	0	0	1	1
t_1	$2/3$	0	1	0	$1/3$	$4/3$
t_2	$-1/3$	0	0	1	$-2/3$	$4/3$
y_2	$-1/3$	1	0	0	$1/3$	$1/3$

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	0	0	3	0	2	5
y_1	1	0	$3/2$	0	$1/2$	2
t_2	0	0	$1/2$	1	$-1/2$	2
y_2	0	1	$1/2$	0	$1/2$	1

双対シンプレックス法の例 (その 3)

(3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	$-4/3$	$-4/3$	0	0	$-1/3$	1
s_1	$-2/3$	$1/3$	0	1	$1/3$	-2
x_3	$-1/3$	$2/3$	1	0	$-1/3$	1
	2	-4			-1	

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	-2	0	0	0	1	1
t_1	$2/3$	0	1	0	$1/3$	$4/3$
t_2	$-1/3$	0	0	1	$-2/3$	$4/3$
y_2	$-1/3$	1	0	0	$1/3$	$1/3$

(4) ピボット操作

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	0	-2	0	-2	-1	5
x_1	1	$-1/2$	0	$-3/2$	$-1/2$	3
x_3	0	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$	2

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	0	0	3	0	2	5
y_1	1	0	$3/2$	0	$1/2$	2
t_2	0	0	$1/2$	1	$-1/2$	2
y_2	0	1	$1/2$	0	$1/2$	1

	t_1	t_2	t_3	y_1	y_2	
	3	0	2	0	0	5
t_2	$1/2$	1	$-1/2$	0	0	2
y_1	$3/2$	0	$1/2$	1	0	2
y_2	$1/2$	0	$1/2$	0	1	1

解答

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$,　最適値 -5
スラック変数 $(s_1, s_2) = (0, 0)$

双対最適解 $(y_1, y_2) = (2, 1)$
双対スラック変数 $(t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 0)$

双対シンプレックス法の例 (その 3)

(3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	$-4/3$	$-4/3$	0	0	$-1/3$	1
s_1	$-2/3$	$1/3$	0	1	$1/3$	-2
x_3	$-1/3$	$2/3$	1	0	$-1/3$	1
	2	-4			-1	

(4) ピボット操作

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	0	-2	0	-2	-1	5
x_1	1	$-1/2$	0	$-3/2$	$-1/2$	3
x_3	0	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$	2

解答

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$, 最適値 -5
スラック変数 $(s_1, s_2) = (0, 0)$

双対最適解 $(y_1, y_2) = (2, 1)$
双対スラック変数 $(t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 0)$

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	-2	0	0	0	1	1
t_1	$2/3$	0	1	0	$1/3$	$4/3$
t_2	$-1/3$	0	0	1	$-2/3$	$4/3$
y_2	$-1/3$	1	0	0	$1/3$	$1/3$

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	0	0	3	0	2	5
y_1	1	0	$3/2$	0	$1/2$	2
t_2	0	0	$1/2$	1	$-1/2$	2
y_2	0	1	$1/2$	0	$1/2$	1

	t_1	t_2	t_3	y_1	y_2	
	3	0	2	0	0	5
t_2	$1/2$	1	$-1/2$	0	0	2
y_1	$3/2$	0	$1/2$	1	0	2
y_2	$1/2$	0	$1/2$	0	1	1

		t_2	y_1	y_2
t_1	3	$1/2$	$3/2$	$1/2$
t_2	0	1	0	0
t_3	2	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
y_1	0	0	1	0
y_2	0	0	0	1
	5	2	2	1

双対シンプレックス法の例 (その 3)

(3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	$-4/3$	$-4/3$	0	0	$-1/3$	1
s_1	$-2/3$	$1/3$	0	1	$1/3$	-2
x_3	$-1/3$	$2/3$	1	0	$-1/3$	1
	2	-4			-1	

(4) ピボット操作

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	0	-2	0	-2	-1	5
x_1	1	$-1/2$	0	$-3/2$	$-1/2$	3
x_3	0	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$	2

解答

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$, 最適値 -5
スラック変数 $(s_1, s_2) = (0, 0)$

双対最適解 $(y_1, y_2) = (2, 1)$
双対スラック変数 $(t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 0)$

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	-2	0	0	0	1	1
t_1	$2/3$	0	1	0	$1/3$	$4/3$
t_2	$-1/3$	0	0	1	$-2/3$	$4/3$
y_2	$-1/3$	1	0	0	$1/3$	$1/3$

	y_1	y_2	t_1	t_2	t_3	
	0	0	3	0	2	5
y_1	1	0	$3/2$	0	$1/2$	2
t_2	0	0	$1/2$	1	$-1/2$	2
y_2	0	1	$1/2$	0	$1/2$	1

	t_1	t_2	t_3	y_1	y_2	
	3	0	2	0	0	5
t_2	$1/2$	1	$-1/2$	0	0	2
y_1	$3/2$	0	$1/2$	1	0	2
y_2	$1/2$	0	$1/2$	0	1	1

		t_2	y_1	y_2
t_1	3	$1/2$	$3/2$	$1/2$
t_2	0	1	0	0
t_3	2	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
y_1	0	0	1	0
y_2	0	0	0	1
	5	2	2	1

双対シンプレックス法の利点

- 基底解が実行可能，双対実行可能のいずれかなら OK
  - 実行可能 ⇒ シンプレックス法
  - 双対実行可能 ⇒ 双対シンプレックス法
- 最適解を求めた後で新たに制約条件が追加された場合も OK
  - 元の最適基底解が制約条件を満たす ⇒ 解き直す必要なし
  - 元の最適基底解が制約条件を満たさない ⇒ 解き直す必要あり
    ⇒ 双対実行可能なので**双対シンプレックス法の出番**
- 最適解を求めた後で制約条件の右辺ベクトルが変化した場合も OK
  - やはり元の最適基底解は双対実行可能 ⇒ 双対シンプレックス法
    (目的関数の係数ベクトルが変化した場合：実行可能なのでシンプレックス法)
  - 次の話題の**感度分析**とも関連

例題

$$
\begin{array}{rl}
\max & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + x_2 + x_3 \le -1 \\
& x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le -3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\max & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\
& x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2 \ge 0
\end{array}
$$

双対シンプレックス法の利点

- 基底解が実行可能，双対実行可能のいずれかなら OK
  - 実行可能 ⇒ シンプレックス法
  - 双対実行可能 ⇒ 双対シンプレックス法
- 最適解を求めた後で新たに制約条件が追加された場合も OK
  - 元の最適基底解が制約条件を満たす ⇒ 解き直す必要なし
  - 元の最適基底解が制約条件を満たさない ⇒ 解き直す必要あり
    ⇒ 双対実行可能なので**双対シンプレックス法の出番**
- 最適解を求めた後で制約条件の右辺ベクトルが変化した場合も OK
  - やはり元の最適基底解は双対実行可能 ⇒ 双対シンプレックス法
    (目的関数の係数ベクトルが変化した場合：実行可能なのでシンプレックス法)
  - 次の話題の**感度分析**とも関連

例題 + 新たな制約条件

$$
\begin{array}{rl}
\max & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + x_2 + x_3 \leq -1 \\
& x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -3 \\
& -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq -6 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\max & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\
& x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\
& -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + s_3 = -6 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \geq 0
\end{array}
$$

双対シンプレックス法の例その 2

例題 + 新たな制約条件

$$\begin{array}{rl} \max & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 + x_3 \le -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le -3 \\ & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le -6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \max & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\ & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + s_3 = -6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{array}$$

元の最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	0	−2	0	−2	−1	5
x_1	1	−1/2	0	−3/2	−1/2	3
x_3	0	1/2	1	−1/2	−1/2	2

制約条件を追加

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	0	−2	0	−2	−1	0	5
x_1	1	−1/2	0	−3/2	−1/2	0	3
x_3	0	1/2	1	−1/2	−1/2	0	2
s_3	−1	−2	2	0	0	1	−6

基底変数の列を掃き出す．双対実行可能なので準備完了

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	0	−2	0	−2	−1	0	5
x_1	1	−1/2	0	−3/2	−1/2	0	3
x_3	0	1/2	1	−1/2	−1/2	0	2
s_3	0	−7/2	0	−1/2	1/2	1	−7

1 回の反復で終了

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	0	0	0	−12/7	−9/7	−4/7	9
x_1	1	0	0	−10/7	−4/7	−1/7	4
x_3	0	0	1	−4/7	−3/7	1/7	1
x_2	0	1	0	1/7	−1/7	−2/7	2

元の最適解の近くに最適解がありそう ⇒ 反復回数が少なくて済む！

ファルカス補題

- 双対定理を使って示すことのできる補題
- 色々なバージョンがある

ファルカス補題 (Farkas' Lemma)

A は $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b}$ は n 次元ベクトルとする．このとき，以下の一方のみがつねに成り立つ．

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす n 次元ベクトル $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ が存在する
2. $A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < 0$ を同時に満たす m 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ が存在する

証明パート 1 (1, 2 が同時には成り立たないことの証明)

同時に成り立つと仮定して矛盾を導く．$A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ の両辺に $\boldsymbol{x}^\top \geq \boldsymbol{0}$ をかけて，

$$\boldsymbol{x}^\top A^\top \boldsymbol{y} \geq 0$$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ より $\boldsymbol{x}^\top A^\top = \boldsymbol{b}^\top$ だから，

$$0 \leq \boldsymbol{x}^\top A^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$$

$\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < 0$ より $0 < 0$ となるので矛盾．

ファルカス補題 (続き)

ファルカス補題 (Farkas' Lemma)

A は $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b}$ は n 次元ベクトルとする．このとき，以下の一方のみがつねに成り立つ．

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす n 次元ベクトル $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ が存在する
2. $A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < 0$ を同時に満たす m 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ が存在する

証明パート 2 (1 が成り立たなければ 2 が成り立つことの証明)

以下の主問題 (P)，双対問題 (D) を考える．

$$\text{主問題 (P):}\quad \begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{0}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \text{双対問題 (D):}\quad \begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

1 が成り立たないとすると，(P) は実行不可能．一方，(D) は，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が制約条件を満たすので実行可能．
2 が成り立たないと仮定すると，(D) の最適解は $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$．しかし，双対定理より，(D) が最適解を持つなら (P) も最適解を持たなければならない．これは (P) が実行不可能であることに矛盾．よって，2 が成り立つ．

- パート 1 $\Rightarrow$ 1, 2 が同時に成り立つことはない
- パート 2 $\Rightarrow$ 1, 2 のいずれかは必ず成り立つ

感度分析

感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化 ⇒ 最適基底解の変化？
  - 目的関数の係数
  - 制約条件の右辺

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	4	
原材料 A	2	1	2	120
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240

感度分析

感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化 ⇒ 最適基底解の変化？
  - **目的関数の係数**
  - 制約条件の右辺

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	**8**	5	4	
原材料 A	2	1	2	120
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240

感度分析

感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化 ⇒ 最適基底解の変化？
  - **目的関数の係数**
  - 制約条件の右辺

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	**12**	5	4	
原材料 A	2	1	2	120
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240

感度分析

感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化 ⇒ 最適基底解の変化？
  - 目的関数の係数
  - 制約条件の右辺

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	4	
原材料 A	2	1	2	120
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240

感度分析

感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化 ⇒ 最適基底解の変化？
  - 目的関数の係数
  - **制約条件の右辺**

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	4	
原材料 A	2	1	2	**100**
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240

感度分析

感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化 ⇒ 最適基底解の変化？
  - 目的関数の係数
  - **制約条件の右辺**

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	4	
原材料 A	2	1	2	**80**
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240

目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480

$\Rightarrow$ 薬品 1 は作らないほうが得

目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
& x_1, \; x_2, \; x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1, \; x_2, \; x_3, \; s_1, \; s_2, \; s_3 \ge 0
\end{array}
$$

薬品 1 を値上げして利益確保

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480

$\Rightarrow$ **薬品 1 は作らないほうが得**

目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{ll}
\max & 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
& x_1, \ x_2, \ x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\max & 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1, \ x_2, \ x_3, \ s_1, \ s_2, \ s_3 \ge 0
\end{array}
$$

薬品 1 を値上げして利益確保

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-2	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480

$\Rightarrow$ 薬品 1 は作らないほうが得

最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ のまま

目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{rl}
\max & 12x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
 & x_1, \; x_2, \; x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\max & 12x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
 & x_1, \; x_2, \; x_3, \; s_1, \; s_2, \; s_3 \ge 0
\end{array}
$$

薬品 1 を値上げして利益確保

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480
$\Rightarrow$ 薬品 1 は作らないほうが得

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-2	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ のまま

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	2	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ は最適解ではない

目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{ll}
\max & 12x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
& x_1, \; x_2, \; x_3 \ge 0
\end{array}
$$

薬品 1 を値上げして利益確保

等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\max & 12x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1, \; x_2, \; x_3, \; s_1, \; s_2, \; s_3 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480

⇒ 薬品 1 は作らないほうが得

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-2	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ のまま

境目は利益 10

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	2	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ は最適解ではない

目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{rl}
\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$，最適値 480
$\Rightarrow$ 薬品 2 はたくさん作る

目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 \qquad\qquad = 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + s_2 \qquad = 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad + s_3 = 240 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0
\end{array}
$$

薬品 2 を値下げしてみる

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$，最適値 480

⇒ 薬品 2 はたくさん作る

目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{lll}
\max & 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 \le 120 & \\
 & 4x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \le 180 & \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 & \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0 &
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{lllll}
\max & 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 & & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + s_1 & & & = 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 & + s_2 & & = 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & + s_3 & = 240 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0 & & &
\end{array}
$$

薬品 2 を値下げしてみる

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480

$\Rightarrow$ **薬品 2 はたくさん作る**

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-2	0	0	$-4/3$	$-4/3$	0	-400
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 400

目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{ll}
\max & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{array}
$$

薬品 2 を値下げしてみる

等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\max & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$，最適値 480
⇒ 薬品 2 はたくさん作る

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-2	0	0	$-4/3$	$-4/3$	0	-400
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$，最適値 400

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	2	0	0	-2	0	0	-240
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ は最適解ではない

目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \geq 0 \end{array}$$

薬品 2 を値下げしてみる

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$，最適値 480

$\Rightarrow$ **薬品 2 はたくさん作る**

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-2	0	0	$-4/3$	$-4/3$	0	-400
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$，最適値 400

境目は利益 3

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	2	0	0	-2	0	0	-240
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ は最適解ではない

目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\begin{aligned} \max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

辞書

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top \boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{x}_B &= A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B \right)$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−4	0	0	−1	−2	0	−480
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

非基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_N$ が $\boldsymbol{c}_N + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Delta \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ に変化 ⇒ 相対コスト係数 $\tilde{\boldsymbol{c}}_N$ は $\tilde{\boldsymbol{c}}_N + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Delta \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ に変化
- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば，基底変数・非基底変数が入れ替わる

基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_B$ が $\boldsymbol{c}_B + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Delta \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ に変化 ⇒
  - 相対コスト係数 $\tilde{\boldsymbol{c}}_N$ は $\tilde{\boldsymbol{c}}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Delta \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ に変化
  - 最適値 $\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}^\top & \Delta & \boldsymbol{0}^\top \end{pmatrix} A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ に変化
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件: $\Delta \le -\underline{\Delta}$ または $\Delta \ge \overline{\Delta}$
  - $\underline{\Delta}$: (行の要素) > 0 の列に関する −(相対コスト係数)/(行の要素) の最小値
  - $\overline{\Delta}$: (行の要素) < 0 の列に関する (相対コスト係数)/(行の要素) の最小値

目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\max\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.}\quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

辞書

$$f = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top \boldsymbol{x}_N$$

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B\right)$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-4+\Delta$	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

非基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_N$ が $\boldsymbol{c}_N + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 $\Rightarrow$ 相対コスト係数 $\tilde{\boldsymbol{c}}_N$ は $\tilde{\boldsymbol{c}}_N + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化
- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば，基底変数・非基底変数が入れ替わる

基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_B$ が $\boldsymbol{c}_B + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 $\Rightarrow$
  - 相対コスト係数 $\tilde{\boldsymbol{c}}_N$ は $\tilde{\boldsymbol{c}}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化
  - 最適値 $\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}^\top & \Delta & \boldsymbol{0}^\top\end{pmatrix} A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ に変化
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件: $\Delta \le -\underline{\Delta}$ または $\Delta \ge \overline{\Delta}$
  - $\underline{\Delta}$: (行の要素) > 0 の列に関する −(相対コスト係数)/(行の要素) の最小値
  - $\overline{\Delta}$: (行の要素) < 0 の列に関する (相対コスト係数)/(行の要素) の最小値

目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\max \ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

辞書

$$f = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top \boldsymbol{x}_N$$

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B \right)$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-4+\Delta$	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

非基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_N$ が $\boldsymbol{c}_N + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Delta \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ に変化 $\Rightarrow$ 相対コスト係数 $\tilde{\boldsymbol{c}}_N$ は $\tilde{\boldsymbol{c}}_N + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Delta \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ に変化
- **相対コスト係数の絶対値 (4) だけ増えれば，基底変数・非基底変数が入れ替わる**

基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_B$ が $\boldsymbol{c}_B + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Delta \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ に変化 $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{相対コスト係数 } \tilde{\boldsymbol{c}}_N \text{ は } \tilde{\boldsymbol{c}}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Delta \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} \text{ は } \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}^\top & \Delta & \boldsymbol{0}^\top \end{pmatrix} A_B^{-1}\boldsymbol{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件: $\Delta \le -\underline{\Delta}$ または $\Delta \ge \overline{\Delta}$
  - $\underline{\Delta}$: (行の要素) > 0 の列に関する −(相対コスト係数)/(行の要素) の最小値
  - $\overline{\Delta}$: (行の要素) < 0 の列に関する (相対コスト係数)/(行の要素) の最小値

目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\max \ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

辞書

$$f = \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N}$$

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} = \boldsymbol{c}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N})^\top \boldsymbol{c}_\mathrm{B}\right)$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−4	0	0	−1	−2	0	−480
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

非基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_\mathrm{N}$ が $\boldsymbol{c}_\mathrm{N} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 $\Rightarrow$ 相対コスト係数 $\tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N}$ は $\tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化
- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば，基底変数・非基底変数が入れ替わる

基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_\mathrm{B}$ が $\boldsymbol{c}_\mathrm{B} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 $\Rightarrow \begin{cases} \text{相対コスト係数 } \tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} \text{ は } \tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N})^\top \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} \text{ は } \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}^\top & \Delta & \boldsymbol{0}^\top\end{pmatrix} A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件: $\Delta \leq -\underline{\Delta}$ または $\Delta \geq \overline{\Delta}$
  - $\underline{\Delta}$: (行の要素) > 0 の列に関する −(相対コスト係数)/(行の要素) の最小値
  - $\overline{\Delta}$: (行の要素) < 0 の列に関する (相対コスト係数)/(行の要素) の最小値

目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\max\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}\quad \text{s.t.}\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

辞書

$$f = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top \boldsymbol{x}_N$$

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B\right)$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

非基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_N$ が $\boldsymbol{c}_N + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒ 相対コ

$-(A_B^{-1}A_N)^\top$ のある列に Δ をかけたもの
⇒ $-A_B^{-1}A_N$ のある行に Δ をかけたもの

- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば，基底変数・非基底変数が入れ替わる

基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_B$ が $\boldsymbol{c}_B + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒
  - 相対コスト係数 $\tilde{\boldsymbol{c}}_N$ は $\tilde{\boldsymbol{c}}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化
  - 最適値 $\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}^\top & \Delta & \boldsymbol{0}^\top\end{pmatrix} A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ に変化
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件: $\Delta \leq -\underline{\Delta}$ または $\Delta \geq \overline{\Delta}$
  - $\underline{\Delta}$: (行の要素) > 0 の列に関する $-$(相対コスト係数)/(行の要素) の最小値
  - $\overline{\Delta}$: (行の要素) < 0 の列に関する (相対コスト係数)/(行の要素) の最小値

目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\max\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.}\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

辞書

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top \boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{x}_B &= A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N \end{aligned}$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B\right)$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−4	0	0	−1	−2	0	−480
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

$\boxed{A_B^{-1}A_N}$

非基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_N$ が $\boldsymbol{c}_N + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒ 相対コ

$\boxed{\begin{array}{l} -(A_B^{-1}A_N)^\top \text{ のある列に } \Delta \text{ をかけたもの} \\ \Rightarrow -A_B^{-1}A_N \text{ のある行に } \Delta \text{ をかけたもの} \end{array}}$

- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば，基底変数・非基底変数が入れ替わる

基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_B$ が $\boldsymbol{c}_B + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒ $\begin{cases} \text{相対コスト係数 } \tilde{\boldsymbol{c}}_N \text{ は } \tilde{\boldsymbol{c}}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} \text{ は } \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}^\top & \Delta & \boldsymbol{0}^\top\end{pmatrix} A_B^{-1}\boldsymbol{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件: $\Delta \leq -\underline{\Delta}$ または $\Delta \geq \overline{\Delta}$
  - $\underline{\Delta}$: (行の要素) > 0 の列に関する −(相対コスト係数)/(行の要素) の最小値
  - $\overline{\Delta}$: (行の要素) < 0 の列に関する (相対コスト係数)/(行の要素) の最小値

目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\max\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

辞書

$$f = \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N}$$
$$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$$
$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} = \boldsymbol{c}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N})^\top \boldsymbol{c}_\mathrm{B}\right)$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-4-2\Delta$	0	0	$-1+\Delta/3$	$-2-2\Delta/3$	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}$

非基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_\mathrm{N}$ が $\boldsymbol{c}_\mathrm{N} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒ 相対コ

$-(A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N})^\top$ のある列に Δ をかけたもの
⇒ $-A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}$ のある行に Δ をかけたもの

- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば，基底変数・非基底変数が入れ替わる

基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_\mathrm{B}$ が $\boldsymbol{c}_\mathrm{B} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒
  - 相対コスト係数 $\tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N}$ は $\tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N})^\top \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化
  - 最適値 $\boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}^\top & \Delta & \boldsymbol{0}^\top\end{pmatrix} A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ に変化
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件: $\Delta \leq -\underline{\Delta}$ または $\Delta \geq \overline{\Delta}$
  - $\underline{\Delta}$: (行の要素) > 0 の列に関する −(相対コスト係数)/(行の要素) の最小値
  - $\overline{\Delta}$: (行の要素) < 0 の列に関する (相対コスト係数)/(行の要素) の最小値

目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\max\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.}\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

辞書

$$f = \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N}$$

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} = \boldsymbol{c}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N})^\top \boldsymbol{c}_\mathrm{B}\right)$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-4-2\Delta$	0	0	$-1+\Delta/3$	$-2-2\Delta/3$	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}$

非基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_\mathrm{N}$ が $\boldsymbol{c}_\mathrm{N} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒ 相対コ
- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

$-(A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N})^\top$ のある列に Δ をかけたもの
⇒ $-A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N}$ のある行に Δ をかけたもの

$A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ のある行に Δ をかけたもの

基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_\mathrm{B}$ が $\boldsymbol{c}_\mathrm{B} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒
  - 相対コスト係数 $\tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N}$ は $\tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} - (A_\mathrm{B}^{-1}A_\mathrm{N})^\top \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化
  - 最適値 $\boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}^\top & \Delta & \boldsymbol{0}^\top\end{pmatrix} A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ に変化
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件: $\Delta \leq -\underline{\Delta}$ または $\Delta \geq \overline{\Delta}$
  - $\underline{\Delta}$: (行の要素) > 0 の列に関する −(相対コスト係数)/(行の要素) の最小値
  - $\overline{\Delta}$: (行の要素) < 0 の列に関する (相対コスト係数)/(行の要素) の最小値

目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\max\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

辞書

$$f = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^\top A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$
$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$
$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - (A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^\top \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \right)$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-4-2\Delta$	0	0	$-1+\Delta/3$	$-2-2\Delta/3$	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}$ $\quad$ $A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$

非基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}$ が $\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Delta \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ に変化 ⇒ 相対コ
- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

$-(A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^\top$ のある列に Δ をかけたもの
⇒ $-A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}$ のある行に Δ をかけたもの

$A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$ のある行に Δ をかけたもの

基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$ が $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Delta \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ に変化 ⇒
  - 相対コスト係数 $\tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}}$ は $\tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} - (A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Delta \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ に変化
  - 最適値 $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^\top A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^\top A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}^\top & \Delta & \boldsymbol{0}^\top \end{pmatrix} A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$ に変化
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件: $\Delta \leq -\underline{\Delta}$ または $\Delta \geq \overline{\Delta}$
  - $\underline{\Delta}$: (行の要素) > 0 の列に関する −(相対コスト係数)/(行の要素) の最小値
  - $\overline{\Delta}$: (行の要素) < 0 の列に関する (相対コスト係数)/(行の要素) の最小値

目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\max\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \quad \text{s.t.}\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

辞書

$$f = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top \boldsymbol{x}_N$$

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B\right)$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-4-2\Delta$	0	0	$-1+\Delta/3$	$-2-2\Delta/3$	0	$-480-80\Delta$
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

$A_B^{-1}A_N$ $A_B^{-1}\boldsymbol{b}$

非基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_N$ が $\boldsymbol{c}_N + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒ 相対コ $\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$
- 相対コスト係数の絶対値が増えれば... 基底変数・非基底変数が入れ替わる

$-(A_B^{-1}A_N)^\top$ のある列に Δ をかけたもの
⇒ $-A_B^{-1}A_N$ のある行に Δ をかけたもの

$A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ のある行に Δ をかけたもの

基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_B$ が $\boldsymbol{c}_B + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒ $\begin{cases} \text{相対コスト係数 } \tilde{\boldsymbol{c}}_N \text{ は } \tilde{\boldsymbol{c}}_N - \underbrace{(A_B^{-1}A_N)^\top \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} \text{ は } \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}^\top & \Delta & \boldsymbol{0}^\top\end{pmatrix} A_B^{-1}\boldsymbol{b}} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件: $\Delta \leq -\underline{\Delta}$ または $\Delta \geq \overline{\Delta}$
  - $\underline{\Delta}$: (行の要素) > 0 の列に関する −(相対コスト係数)/(行の要素) の最小値
  - $\overline{\Delta}$: (行の要素) < 0 の列に関する (相対コスト係数)/(行の要素) の最小値

目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$\max\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$

s.t. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

辞書

$$f = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top \boldsymbol{x}_N$$

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B\right)$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	$-4-2\Delta$	0	0	$-1+\Delta/3$	$-2-2\Delta/3$	0	$-480-80\Delta$
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

$A_B^{-1}A_N$　　$A_B^{-1}\boldsymbol{b}$

非基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_N$ が $\boldsymbol{c}_N + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒ 相対コ

$-(A_B^{-1}A_N)^\top$ のある列に Δ をかけたもの
⇒ $-A_B^{-1}A_N$ のある行に Δ をかけたもの

- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

$A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ のある行に Δ をかけたもの

基底変数の係数が変化した場合

- $\boldsymbol{c}_B$ が $\boldsymbol{c}_B + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化 ⇒
  - 相対コスト係数 $\tilde{\boldsymbol{c}}_N$ は $\tilde{\boldsymbol{c}}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \Delta \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ に変化
  - 最適値 $\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}^\top & \Delta & \boldsymbol{0}^\top\end{pmatrix} A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ に変化
- **基底変数・非基底変数が入れ替わる条件: $\Delta \leq -\underline{\Delta}$ または $\Delta \geq \overline{\Delta}$　($\underline{\Delta} = 2$, $\overline{\Delta} = 3$)**
  - **$\underline{\Delta}$: (行の要素) > 0 の列に関する −(相対コスト係数)/(行の要素) の最小値**
  - **$\overline{\Delta}$: (行の要素) < 0 の列に関する (相対コスト係数)/(行の要素) の最小値**

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−4	0	0	−1	−2	0	−480
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480

⇒ **原材料 2 の在庫量が変化するとどうなる？**

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{rl}
\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le \boxed{180} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

原材料 2 の在庫量が変化

$$
\begin{array}{rl}
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = \boxed{180} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$，最適値 480

⇒ **原材料 2 の在庫量が変化するとどうなる？**

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le \boxed{210} \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

原材料 2 の在庫量が変化

$$
\begin{array}{rl}
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = \boxed{210} \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-2	0	0	-1	-2	0	-530
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	10
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	100
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	20

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$， 最適値 480

⇒ **原材料 2 の在庫量が変化するとどうなる？**

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 100, 10)$

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le \boxed{270} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

原材料 2 の在庫量が変化

$$
\begin{array}{ll}
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = \boxed{270} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−4	0	0	−1	−2	0	−480
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480

⇒ **原材料 2 の在庫量が変化するとどうなる？**

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−2	0	0	−1	−2	0	−530
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	10
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	100
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	20

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 100, 10)$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	2	0	0	−1	−2	0	−670
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	−10
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	140
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	−20

現在の基底解は実行不可能に

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le \boxed{270} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

等式標準形

原材料 2 の在庫量が変化

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = \boxed{270} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−4	0	0	−1	−2	0	−480
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480

⇒ 原材料 2 の在庫量が変化するとどうなる？

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−2	0	0	−1	−2	0	−530
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	10
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	100
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	20

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 100, 10)$

境目は在庫量 240

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	2	0	0	−1	−2	0	−670
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	−10
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	140
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	−20

現在の基底解は実行不可能に

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le \boxed{180} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

等式標準形

原材料 2 の在庫量が変化

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = \boxed{180} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480

⇒ 原材料 2 の在庫量が変化するとどうなる？

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le \boxed{120} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

原材料 2 の在庫量が変化

$$
\begin{array}{rl}
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = \boxed{120} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−4	0	0	−1	−2	0	−480
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	2	0	0	−1	−2	0	−320
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	40
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	40
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	80

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$，最適値 480

$\Rightarrow$ **原材料 2 の在庫量が変化するとどうなる？**

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 40, 40)$

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{lrl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \le 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 & \le \boxed{30} \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \le 240 \\
 & x_1,\quad x_2,\quad x_3 & \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

原材料 2 の在庫量が変化

$$
\begin{array}{lrl}
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 & = 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 & = \boxed{30} \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 & = 240 \\
 & x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad s_1,\quad s_2,\quad s_3 & \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−4	0	0	−1	−2	0	−480
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480

⇒ **原材料 2 の在庫量が変化するとどうなる？**

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	2	0	0	−1	−2	0	−320
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	40
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	40
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	80

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 40, 40)$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	2	0	0	−1	−2	0	−110
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	70
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	−20
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	140

現在の基底解は実行不可能に

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{lrl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 & \le \boxed{30} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \le 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

原材料 2 の在庫量が変化

$$
\begin{array}{lrl}
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 & = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 & = \boxed{30} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 & = 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 & \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−4	0	0	−1	−2	0	−480
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$, 最適値 480

⇒ 原材料 2 の在庫量が変化するとどうなる？

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	2	0	0	−1	−2	0	−320
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	40
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	40
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	80

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 40, 40)$

境目は在庫量 60

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	2	0	0	−1	−2	0	−110
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	70
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	−20
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	140

現在の基底解は実行不可能に

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{rl}
\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\
& x_1, \ x_2, \ x_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
& 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1, \ x_2, \ x_3, \ s_1, \ s_2, \ s_3 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$-120 \le \Delta \le 60$ のとき,
最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80 + 2\Delta/3, 20 - \Delta/3)$,
最適値 $480 + 2\Delta$

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$
\begin{array}{llll}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 180 + \Delta \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 240 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{llll}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 & = & 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 & = & 180 + \Delta \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 & = & 240 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−4	0	0	−1	−2	0	−480
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	0	20
x_2	2	1	0	−1/3	2/3	0	80
s_3	−1	0	0	−2/3	−2/3	1	40

$-120 \leq \Delta \leq 60$ のとき,
最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80 + 2\Delta/3, 20 - \Delta/3)$,
最適値 $480 + 2\Delta$

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{array}{rl} \max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 + \Delta \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 + \Delta \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$-120 \le \Delta \le 60$ のとき,
最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80 + 2\Delta/3, 20 - \Delta/3)$,
最適値 $480 + 2\Delta$

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{array}{rl} \text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 + \Delta \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 + \Delta \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	$-480-2\Delta$
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	$20-\Delta/3$
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	$80+2\Delta/3$
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	$40-2\Delta/3$

$-120 \le \Delta \le 60$ のとき，
最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80 + 2\Delta/3, 20 - \Delta/3)$，
最適値 $480 + 2\Delta$

制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{array}{rl} \text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 + \Delta \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 240 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 + \Delta \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-4	0	0	-1	-2	0	$-480-2\Delta$
x_3	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	$20-\Delta/3$
x_2	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	$80+2\Delta/3$
s_3	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	$40-2\Delta/3$

$-120 \le \Delta \le 60$ のとき，
最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80+2\Delta/3, 20-\Delta/3)$,
最適値 $480 + 2\Delta$

辞書

$$f = \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{c}}_N^\top \boldsymbol{x}_N$$

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N - (A_B^{-1}A_N)^\top \boldsymbol{c}_B \right)$$

$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ とすると， $\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow \begin{cases} f \to f + \Delta \boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{x}_B \to \boldsymbol{x}_B + \Delta A_B^{-1}\boldsymbol{e}_2 \end{cases}$

A_N の s_2 の列は $\boldsymbol{e}_2 \Rightarrow$ タブローの s_2 の列の 2 ~ 4 行は $A_B^{-1}\boldsymbol{e}_2$

s_2 の相対コスト係数は $0 - (A_B^{-1}\boldsymbol{e}_2)^\top \boldsymbol{c}_B = -\boldsymbol{c}_B^\top A_B^{-1}\boldsymbol{e}_2$

最終列に s_2 の列の Δ 倍を足せばよい
(1 番目の制約なら s_1 の列，3 番目の制約なら s_3 の列)