オペレーションズ・リサーチ I (5)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

本文書のライセンスは CC-BY-SA にしたがいます

スケジュール

No.	内容
1	オペレーションズ・リサーチと最適化，線形計画問題の基礎 (1)
2	線形計画問題の基礎 (2)，線形計画問題の標準形
3	シンプレックス (単体) 法 1
4	シンプレックス (単体) 法 2，2 段階シンプレックス法
5	双対問題，双対定理，相補性定理
6	双対シンプレックス法，ファルカス補題，感度分析
7	内点法

2 段階シンプレックス法の手順

フェーズ I

- 元の問題に対する実行可能基底解を求めるための**新たな問題 (線形計画問題)** をつくる
- この問題にシンプレックス法を適用

フェーズ II

- 元の問題にシンプレックス法を適用
- 初期値はフェーズ 1 で求まった実行可能基底解

実行可能基底解を求めるための線形計画問題

- 制約違反量を最小化する線形計画問題
  - 制約条件の右辺を非負に揃える
  - 制約条件の左辺に制約違反量を表す決定変数を加える
  - 目的関数は制約違反を表す決定変数の和
- 最適値が 0 より大きいなら，元の問題は実行不可能

フェーズ II の初期タブロー

- フェーズ I のタブローから，制約違反を表す決定変数の列・1 行目を削除
  基底変数に含まれるなら，非基底変数と入れ替えておく
- 1 行目に目的関数の係数を追加後，基底変数の列が 0 となるよう掃き出し

練習問題その 2

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 & = & -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 & = & 3 \\
 & x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

w_1, w_2, w_3 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
w_2								
w_3								

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて，1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．これで準備完了．フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
w_2								
w_3								

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
x_2								
w_3								

2

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
x_1								
x_2								
w_3								

終了だが，退化で w_3 が基底変数に残っているので，非基底変数 x_3 と入れ替え (ピボット操作)

練習問題その 2

練習問題その 2

$$
\begin{array}{lrl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & \\
\text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 & = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 & = 3 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$
\begin{array}{lrl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 & = 3 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

w_1, w_2, w_3 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
w_2								
w_3								

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて，1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．これで準備完了．フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
w_2								
w_3								

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
x_2								
w_3								

2

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
x_1								
x_2								
w_3								

終了だが，退化で w_3 が基底変数に残っているので，非基底変数 x_3 と入れ替え (ピボット操作)

練習問題その 2

練習問題その 2

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0 \end{array}$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$\begin{array}{ll} \text{min} & +w_1 + w_2 + w_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \ge 0 \end{array}$$

w_1, w_2, w_3 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
w_2								
w_3								

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて，1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．これで準備完了．フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
w_2								
w_3								

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
x_2								
w_3								

2

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
x_1								
x_2								
w_3								

終了だが，退化で w_3 が基底変数に残っているので，非基底変数 x_3 と入れ替え (ピボット操作)

練習問題その 2

練習問題その 2

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0 \end{array}$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$\begin{array}{ll} \text{min} & +w_1 + w_2 + w_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \ge 0 \end{array}$$

w_1, w_2, w_3 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	0	0	1	1	1	0
w_1	−1	2	1	1	1	0	0	3
w_2	−2	1	2	1	0	1	0	0
w_3	−1	2	0	1	0	0	1	3

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて，1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．これで準備完了．フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
w_2								
w_3								

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
x_2								
w_3								

2

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
x_1								
x_2								
w_3								

終了だが，退化で w_3 が基底変数に残っているので，非基底変数 x_3 と入れ替え (ピボット操作)

練習問題その 2

練習問題その 2

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & +w_1 + w_2 + w_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \geq 0
\end{array}
$$

w_1, w_2, w_3 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	0	0	1	1	1	0
w_1	−1	2	1	1	1	0	0	3
w_2	−2	1	2	1	0	1	0	0
w_3	−1	2	0	1	0	0	1	3

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて，1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．これで準備完了．フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	4	−5	−3	−3	0	0	0	−6
w_1	−1	2	1	1	1	0	0	3
w_2	−2	1	2	1	0	1	0	0
w_3	−1	2	0	1	0	0	1	3

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1								
x_2								
w_3								

2

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
x_1								
x_2								
w_3								

終了だが，退化で w_3 が基底変数に残っているので，非基底変数 x_3 と入れ替え (ピボット操作)

練習問題その 2

練習問題その 2

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & + w_1 + w_2 + w_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \geq 0
\end{array}
$$

w_1, w_2, w_3 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	0	0	1	1	1	0
w_1	−1	2	1	1	1	0	0	3
w_2	−2	1	2	1	0	1	0	0
w_3	−1	2	0	1	0	0	1	3

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて，1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．これで準備完了．フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	4	−5	−3	−3	0	0	0	−6
w_1	−1	2	1	1	1	0	0	3
w_2	−2	1	2	1	0	1	0	0
w_3	−1	2	0	1	0	0	1	3

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	−6	0	7	2	0	5	0	−6
w_1	3	0	−3	−1	1	−2	0	3
x_2	−2	1	2	1	0	1	0	0
w_3	3	0	−4	−1	0	−2	1	3

2

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	1	0	2	1	0	0
x_1	1	0	−1	−1/3	1/3	−2/3	0	1
x_2	0	1	0	1/3	2/3	−1/3	0	2
w_3	0	0	−1	0	−1	0	1	0

終了だが，退化で w_3 が基底変数に残っているので，非基底変数 x_3 と入れ替え (ピボット操作)

練習問題その 2

練習問題その 2

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & +w_1 + w_2 + w_3 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

w_1, w_2, w_3 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	0	0	1	1	1	0
w_1	−1	2	1	1	1	0	0	3
w_2	−2	1	2	1	0	1	0	0
w_3	−1	2	0	1	0	0	1	3

2, 3, 4 行目を 1 行目から引いて，1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．これで準備完了．フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	4	−5	−3	−3	0	0	0	−6
w_1	−1	2	1	1	1	0	0	3
w_2	−2	1	2	1	0	1	0	0
w_3	−1	2	0	1	0	0	1	3

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	−6	0	7	2	0	5	0	−6
w_1	3	0	−3	−1	1	−2	0	3
x_2	−2	1	2	1	0	1	0	0
w_3	3	0	−4	−1	0	−2	1	3

2

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	1	0	2	1	0	0
x_1	1	0	−1	−1/3	1/3	−2/3	0	1
x_2	0	1	0	1/3	2/3	−1/3	0	2
w_3	0	0	−1	0	−1	0	1	0

終了だが，退化で w_3 が基底変数に残っているので，非基底変数 x_3 と入れ替え (ピボット操作)

練習問題その 2(続き)

練習問題その 2

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & + w_1 + w_2 + w_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \geq 0
\end{array}
$$

フェーズ I 終了．1 行目と w_1, w_2, w_3 の列を削除し，1 行目に $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

3

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
x_1								
x_2								
x_3								

4

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_2					
x_3					

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから，フェーズ II スタート

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_2					
x_3					

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_4					
x_3					

フェーズ II 終了．最適値は
最適解は

練習問題その 2(続き)

練習問題その 2

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ & -x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 &= 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ & -x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 &= 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{array}$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$\begin{array}{lrl} \min & + w_1 + w_2 + w_3 & \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 &= 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \quad + w_2 &= 0 \\ & -x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \quad\quad + w_3 &= 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 &\geq 0 \end{array}$$

フェーズ I 終了．1 行目と w_1, w_2, w_3 の列を削除し，1 行目に $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

3

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	1	0	2	1	0	0
x_1	1	0	0	$-1/3$	$-2/3$	$-2/3$	0	1
x_2	0	1	0	$1/3$	$2/3$	$-1/3$	0	2
x_3	0	0	1	0	1	0	-1	0

4

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_2					
x_3					

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから，フェーズ II スタート

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_2					
x_3					

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_4					
x_3					

フェーズ II 終了．最適値は
最適解は

練習問題その 2(続き)

練習問題その 2

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$\begin{array}{ll} \min & +w_1 + w_2 + w_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \geq 0 \end{array}$$

フェーズ I 終了．1 行目と w_1, w_2, w_3 の列を削除し，1 行目に $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

③

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	1	0	2	1	0	0
x_1	1	0	0	$-1/3$	$-2/3$	$-2/3$	0	1
x_2	0	1	0	$1/3$	$2/3$	$-1/3$	0	2
x_3	0	0	1	0	1	0	-1	0

④

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_2					
x_3					

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから，フェーズ II スタート

⓪

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_2					
x_3					

①

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_4					
x_3					

フェーズ II 終了．最適値は
最適解は

練習問題その 2(続き)

練習問題その 2

$$
\begin{array}{llr}
\max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & \\
\text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 & = -3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 & = 3 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$
\begin{array}{llr}
\max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 & = 3 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$
\begin{array}{llr}
\min & + w_1 + w_2 + w_3 & \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 & = 3 \\
 & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 & = 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 & = 3 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 & \geq 0
\end{array}
$$

フェーズ I 終了．1 行目と w_1, w_2, w_3 の列を削除し，1 行目に $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

3

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	1	0	2	1	0	0
x_1	1	0	0	−1/3	−2/3	−2/3	0	1
x_2	0	1	0	1/3	2/3	−1/3	0	2
x_3	0	0	1	0	1	0	−1	0

4

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	1	2	1	1	0
x_1	1	0	0	−1/3	1
x_2	0	1	0	1/3	2
x_3	0	0	1	0	0

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから，フェーズ II スタート

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_2					
x_3					

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_4					
x_3					

フェーズ II 終了．最適値は
最適解は

練習問題その 2(続き)

練習問題その 2

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & + w_1 + w_2 + w_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \geq 0
\end{array}
$$

フェーズ I 終了．1 行目と w_1, w_2, w_3 の列を削除し，1 行目に $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

3

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	1	0	2	1	0	0
x_1	1	0	0	$-1/3$	$-2/3$	$-2/3$	0	1
x_2	0	1	0	$1/3$	$2/3$	$-1/3$	0	2
x_3	0	0	1	0	1	0	-1	0

4

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	1	2	1	1	0
x_1	1	0	0	$-1/3$	1
x_2	0	1	0	$1/3$	2
x_3	0	0	1	0	0

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから，フェーズ II スタート

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	0	$2/3$	-5
x_1	1	0	0	$-1/3$	1
x_2	0	1	0	$1/3$	2
x_3	0	0	1	0	0

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_4					
x_3					

フェーズ II 終了．最適値は
最適解は

練習問題その 2(続き)

練習問題その 2

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0
\end{array}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0
\end{array}
$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & +w_1 + w_2 + w_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\
& -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \ge 0
\end{array}
$$

フェーズ I 終了．1 行目と w_1, w_2, w_3 の列を削除し，1 行目に $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

3

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	1	0	2	1	0	0
x_1	1	0	0	$-1/3$	$-2/3$	$-2/3$	0	1
x_2	0	1	0	$1/3$	$2/3$	$-1/3$	0	2
x_3	0	0	1	0	1	0	-1	0

4

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	1	2	1	1	0
x_1	1	0	0	$-1/3$	1
x_2	0	1	0	$1/3$	2
x_3	0	0	1	0	0

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから，フェーズ II スタート

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	0	$2/3$	-5
x_1	1	0	0	$-1/3$	1
x_2	0	1	0	$1/3$	2
x_3	0	0	1	0	0

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1					
x_4					
x_3					

フェーズ II 終了．最適値は
最適解は

練習問題その 2(続き)

練習問題その 2

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$\begin{array}{ll} \text{min} & +w_1 + w_2 + w_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + w_2 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 + w_3 = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \geq 0 \end{array}$$

フェーズ I 終了．1 行目と w_1, w_2, w_3 の列を削除し，1 行目に $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

3

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	1	0	2	1	0	0
x_1	1	0	0	$-1/3$	$-2/3$	$-2/3$	0	1
x_2	0	1	0	$1/3$	$2/3$	$-1/3$	0	2
x_3	0	0	1	0	1	0	-1	0

4

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	1	2	1	1	0
x_1	1	0	0	$-1/3$	1
x_2	0	1	0	$1/3$	2
x_3	0	0	1	0	0

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから，フェーズ II スタート

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	0	$2/3$	-5
x_1	1	0	0	$-1/3$	1
x_2	0	1	0	$1/3$	2
x_3	0	0	1	0	0

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	-2	0	0	-9
x_1	1	1	0	0	3
x_4	0	3	0	1	6
x_3	0	0	1	0	0

フェーズ II 終了．最適値は
最適解は

練習問題その 2(続き)

練習問題その 2

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 & = -3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 & = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 & = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq 0 \end{array}$$

$w_1 + w_2 + w_3$ を最小化する問題

$$\begin{array}{lrl} \min & + w_1 + w_2 + w_3 & \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + w_1 & = 3 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad + w_2 & = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad + w_3 & = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ w_1,\ w_2,\ w_3 & \geq 0 \end{array}$$

フェーズ I 終了．1 行目と w_1, w_2, w_3 の列を削除し，1 行目に $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

3

	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
	0	0	1	0	2	1	0	0
x_1	1	0	0	−1/3	−2/3	−2/3	0	1
x_2	0	1	0	1/3	2/3	−1/3	0	2
x_3	0	0	1	0	1	0	−1	0

4

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	1	2	1	1	0
x_1	1	0	0	−1/3	1
x_2	0	1	0	1/3	2
x_3	0	0	1	0	0

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出してから，フェーズ II スタート

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	0	2/3	−5
x_1	1	0	0	−1/3	1
x_2	0	1	0	1/3	2
x_3	0	0	1	0	0

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	−2	0	0	−9
x_1	1	1	0	0	3
x_4	0	3	0	1	6
x_3	0	0	1	0	0

フェーズ II 終了．最適値は 9,
最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, 0, 6)$

双対問題

主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

双対問題 (dual problem)

- 「双対」の読みは「そうつい」
- 元の問題 ⇒ **主問題**と呼ぶ
- 主問題が最大化問題 ⇒ 双対問題は最小化問題
- 両者は密接な関係がある
- 双対性 (duality) は最適化問題における非常に重要な概念

主問題と双対問題の関係 (その 1)

例題 (A)

$$
\begin{array}{llrrrrl}
\text{max} & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & & & & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 \quad\quad + x_3 + x_4 = 6 & & & & & (1) \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 & & & & & (2) \\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 & & & & & (3) \\
 & x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4 \geq 0 & & & & &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
 & - y_2 + y_3 \geq -2 \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}
$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい ⇒ 上界値

主問題と双対問題の関係 (その 1)

例題 (A)

$$
\begin{array}{rl}
\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\
& x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\
& x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{rl}
\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
& - y_2 + y_3 \geq -2 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}
$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい $\Rightarrow$ 上界値

(1) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= 3(2x_1 + x_3 + x_4) - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4)
\end{aligned}
$$

主問題と双対問題の関係 (その 1)

例題 (A)

$$
\begin{array}{llr}
\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & \\
\text{s.t.} & \boxed{2x_1 + x_3 + x_4 = 6} & (1) \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 & (2) \\
& x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 & (3) \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
& -y_2 + y_3 \geq -2 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}
$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい $\Rightarrow$ 上界値

(1) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= 3\overbrace{\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)}}^{6} - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4)
\end{aligned}
$$

主問題と双対問題の関係 (その 1)

例題 (A)

$$
\begin{array}{rl}
\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & \boxed{2x_1 + x_3 + x_4 = 6} \quad (1) \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\
& x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{rl}
\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
& -y_2 + y_3 \geq -2 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}
$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい $\Rightarrow$ 上界値

(1) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= 3\overset{6}{\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)}} - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\
&= 18 - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4)
\end{aligned}
$$

例題 (A)

$$\begin{array}{rl}
\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & \boxed{2x_1 + x_3 + x_4 = 6} \quad (1) \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\
& x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$\begin{array}{rl}
\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
& -y_2 + y_3 \geq -2 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい ⇒ 上界値

(1) より

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= 3\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)} - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\
&= 18 - \underbrace{(4x_1 + 2x_2 + 2x_4)}_{0\text{ 以上}} \\
&\leq 18
\end{aligned}$$

主問題と双対問題の関係 (その 1)

例題 (A)

$$
\begin{array}{lllr}
\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & & \\
\text{s.t.} & \boxed{2x_1 + x_3 + x_4 = 6} & & (1) \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 & & (2) \\
& x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 & & (3) \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
& -y_2 + y_3 \geq -2 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}
$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい $\Rightarrow$ 上界値

(1) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= 3\overset{\boxed{6}}{\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)}} - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\
&= 18 - \underbrace{(4x_1 + 2x_2 + 2x_4)}_{0\ \text{以上}} \\
&\leq 18
\end{aligned}
$$

したがって，$f(\boldsymbol{x}) \leq \boxed{18}$

主問題と双対問題の関係 (その 1)

例題 (A)

$$
\begin{array}{rl}
\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & \boxed{2x_1 + x_3 + x_4 = 6} \quad (1) \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\
& x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{rl}
\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
& -y_2 + y_3 \geq -2 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}
$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい $\Rightarrow$ 上界値

(1) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= 3\overbrace{\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)}}^{\boxed{6}} - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\
&= 18 - \underbrace{(4x_1 + 2x_2 + 2x_4)}_{0\text{ 以上}} \\
&\leq 18
\end{aligned}
$$

したがって，$f(\boldsymbol{x}) \leq \boxed{18}$

(2) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= 2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) - (x_3 + x_4)
\end{aligned}
$$

主問題と双対問題の関係 (その 1)

例題 (A)

$$
\begin{array}{llr}
\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 & (1) \\
& \boxed{x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2} & (2) \\
& x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 & (3) \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
& -y_2 + y_3 \geq -2 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}
$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい ⇒ 上界値

(1) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= 3\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)} - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\
&= 18 - \underbrace{(4x_1 + 2x_2 + 2x_4)}_{0\ \text{以上}} \\
&\leq 18
\end{aligned}
$$

$\boxed{6}$

したがって，$f(\boldsymbol{x}) \leq \boxed{18}$

(2) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= 2\boxed{(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)} - (x_3 + x_4)
\end{aligned}
$$

$\boxed{-2}$

主問題と双対問題の関係 (その 1)

例題 (A)

$$
\begin{array}{llr}
\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 & (1) \\
 & \boxed{x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2} & (2) \\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 & (3) \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
 & - y_2 + y_3 \geq -2 \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}
$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい $\Rightarrow$ 上界値

(1) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + \overset{\boxed{6}}{3}x_3 + x_4 \\
&= 3\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)} - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\
&= 18 - \underbrace{(4x_1 + 2x_2 + 2x_4)}_{0\ \text{以上}} \\
&\leq 18
\end{aligned}
$$

したがって，$f(\boldsymbol{x}) \leq \boxed{18}$

(2) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= \overset{\boxed{-2}}{2}x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= 2\boxed{(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)} - (x_3 + x_4) \\
&= -4 - \underbrace{(x_3 + x_4)}_{0\ \text{以上}} \\
&\leq -4
\end{aligned}
$$

したがって，$f(\boldsymbol{x}) \leq \boxed{-4}$

主問題と双対問題の関係 (その 1)

例題 (A)

$$
\begin{array}{lllr}
\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 & & (1) \\
 & \boxed{x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2} & & (2) \\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 & & (3) \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
 & -y_2 + y_3 \geq -2 \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}
$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい ⇒ 上界値

(1) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + \overset{\boxed{6}}{3}x_3 + x_4 \\
&= 3\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)} - (4x_1 + 2x_2 + 2x_4) \\
&= 18 - \underbrace{(4x_1 + 2x_2 + 2x_4)}_{0\ 以上} \\
&\leq 18
\end{aligned}
$$

したがって，$f(\boldsymbol{x}) \leq \boxed{18}$

(2) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + \overset{\boxed{-2}}{3}x_3 + x_4 \\
&= 2\boxed{(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)} - (x_3 + x_4) \\
&= -4 - \underbrace{(x_3 + x_4)}_{0\ 以上} \\
&\leq -4
\end{aligned}
$$

したがって，$f(\boldsymbol{x}) \leq \boxed{-4}$

波線の部分を小さくした方がよい見積もりが得られる ($f(\boldsymbol{x})$ の実際の最大値は -6)

主問題と双対問題の関係 (その 1)

例題 (A)

$$
\begin{array}{rl}
\max & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \quad (1) \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \quad (2) \\
& x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \quad (3) \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{rl}
\min & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
& -y_2 + y_3 \geq -2 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}
$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい $\Rightarrow$ 上界値

(1), (2), (3) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= \frac{6}{14}\underbrace{\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)}}_{6} + \frac{23}{14}\underbrace{\boxed{(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)}}_{-2} - \frac{5}{14}\underbrace{\boxed{(x_2 + x_3 + 3x_4)}}_{12} - \frac{1}{14}(7x_1 + 5x_3) \\
&= -5 - \frac{1}{14}(7x_1 + 5x_3) \leq -5
\end{aligned}
$$

したがって，$f(\boldsymbol{x}) \leq \boxed{-5}$

制約条件を複数使うと，さらによい見積もり

主問題と双対問題の関係 (その 1)

例題 (A)

$$
\begin{array}{lrl}
\text{max} & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 & (1)\\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 & (2)\\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 & (3)\\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3\\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \geq 2\\
 & -y_2 + y_3 \geq -2\\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3\\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1
\end{array}
$$

例題 (A) の目的関数 ($f(\boldsymbol{x})$ とおく) をどこまで大きくできるか知りたい ⇒ 上界値

(1), (2), (3) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4\\
&= \frac{6}{14}\underbrace{\boxed{(2x_1 + x_3 + x_4)}}_{6} + \frac{23}{14}\underbrace{\boxed{(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)}}_{-2} - \frac{5}{14}\underbrace{\boxed{(x_2 + x_3 + 3x_4)}}_{12} - \frac{1}{14}(7x_1 + 5x_3)\\
&= -5 - \frac{1}{14}(7x_1 + 5x_3) \leq -5
\end{aligned}
$$

したがって，$f(\boldsymbol{x}) \leq \boxed{-5}$

もう少し頑張ってよい上界値を探す

主問題と双対問題の関係 (その 2)

(1), (2), (3) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= \frac{6}{14}\overbrace{(2x_1 + x_3 + x_4)}^{6} + \frac{23}{14}\overbrace{(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)}^{-2} - \frac{5}{14}\overbrace{(x_2 + x_3 + 3x_4)}^{12} - \frac{1}{14}(7x_1 + 5x_3) \\
&= -5 - \frac{1}{14}(7x_1 + 5x_3) \le -5
\end{aligned}
$$

したがって， $f(\boldsymbol{x}) \le \boxed{-5}$

$\Downarrow$ 一般化

(1), (2), (3) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= y_1(2x_1 + x_3 + x_4) + y_2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) + y_3(x_2 + x_3 + 3x_4) - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
&= 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 - \underbrace{(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)}_{p_1,\,p_2,\,p_3,\,p_4 \ge 0} \\
&\le \boxed{6y_1 - 2y_2 + 12y_3}
\end{aligned}
$$

ここをギリギリまで小さくした方がよい見積もり
ただし，$p_1, p_2, p_3, p_4 \ge 0$ の範囲で探す

min $6y_1 - 2y_2 + 12y_3$

$$
\text{s.t.}\quad
\begin{array}{rcll}
2y_1 + y_2 - 2 &=& p_1 \ge 0 & (x_1 \text{ の係数}) \\
- y_2 + y_3 + 2 &=& p_2 \ge 0 & (x_2 \text{ の係数}) \\
y_1 + 2y_2 + y_3 - 3 &=& p_3 \ge 0 & (x_3 \text{ の係数}) \\
y_1 + y_2 + 3y_3 - 1 &=& p_4 \ge 0 & (x_4 \text{ の係数})
\end{array}
$$

主問題と双対問題の関係 (その 3)

例題 (A)

$$\begin{array}{rrrrrl}
\max & 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 6 \quad (1) \\
& x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = -2 \quad (2) \\
& & x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 12 \quad (3) \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$\begin{array}{rrrrl}
\min & 6y_1 & -2y_2 & +12y_3 & \\
\text{s.t.} & 2y_1 & +y_2 & & \geq 2 \\
& & -y_2 & +y_3 & \geq -2 \\
& y_1 & +2y_2 & +y_3 & \geq 3 \\
& y_1 & +y_2 & +3y_3 & \geq 1
\end{array}$$

(A) の目的関数値の最良の見積もり (最小の上界) を求める問題

$$\min \quad 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \quad \text{s.t.} \quad
\begin{array}{rrrrl}
2y_1 & +y_2 & & -2 & = p_1 \geq 0 \qquad (x_1 \text{ の係数}) \\
& -y_2 & +y_3 & +2 & = p_2 \geq 0 \qquad (x_2 \text{ の係数}) \\
y_1 & +2y_2 & +y_3 & -3 & = p_3 \geq 0 \qquad (x_3 \text{ の係数}) \\
y_1 & +y_2 & +3y_3 & -1 & = p_4 \geq 0 \qquad (x_4 \text{ の係数})
\end{array}$$

双対問題 = 主問題の目的関数値の最小の上界を求める問題

主問題と双対問題の関係 (その 4)

主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

先ほどの式変形を行列で考える.

1. $A\boldsymbol{x}$ の各行に $y_1, \ldots, y_m$ をかけたものから主問題の目的関数 $\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}$ を引く
$$\boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}^\top A - \boldsymbol{c}^\top)\boldsymbol{x}$$
2. 1 の $\boldsymbol{x}$ の係数がすべて 0 以上なら, $\boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x}$ は主問題の目的関数値の上界
$$\boldsymbol{y}^\top A - \boldsymbol{c}^\top \geq \boldsymbol{0}^\top$$
3. 2 を守りながら上界値 $\boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{b}$ を最小化する問題
$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{b} \\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{y}^\top A - \boldsymbol{c}^\top \geq \boldsymbol{0}^\top \end{aligned}$$
4. $\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{y}$ や $\boldsymbol{y}^\top A - \boldsymbol{c}^\top \geq \boldsymbol{0}^\top \Leftrightarrow A^\top\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ を使って 3 を整理 $\Rightarrow$ 双対問題

弱双対定理

主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

弱双対定理 (weak duality theorem)

$\boldsymbol{x}$ は主問題の実行可能解，$\boldsymbol{y}$ は双対問題の実行可能解とする．このとき，
$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ が成り立つ

証明

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} &\leq (A^\top \boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{x} && \text{(双対問題の制約条件 } A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \text{ と } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \text{ より)} \\ &= \boldsymbol{y}^\top A \boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} && \text{(主問題の制約条件 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ より)} \\ &= \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

弱双対定理からわかること

主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

弱双対定理 (weak duality theorem)

$\boldsymbol{x}$ は主問題の実行可能解，$\boldsymbol{y}$ は双対問題の実行可能解とする．このとき，
$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ が成り立つ

系

主問題が非有界なら双対問題は実行不可能．逆に，双対問題が非有界なら主問題は実行不可能．

前半のみ示す．「主問題が非有界かつ双対問題が実行可能」を仮定して矛盾を導く．
双対問題の実行可能解の 1 つを $\boldsymbol{y}$ とすると，弱双対定理より，主問題の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \qquad (*)$$

を満たす．(*) より主問題の目的関数値は $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ 以下．これは非有界であることに矛盾

不等式標準形の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \ & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

不等式標準形の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

主問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \ \ \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

不等式標準形の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

主問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

主問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \max\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^\top & \boldsymbol{0}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \\ \text{s.t.}\ & \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

不等式標準形の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

主問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

主問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \max\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^\top & \boldsymbol{0}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \\ \text{s.t.}\ & \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & \begin{pmatrix} A^\top \\ I \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

不等式標準形の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max\ & c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y \\ \text{s.t.}\ & A^\top y \geq c \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max\ & c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$\Downarrow$

主問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max\ & c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax + s = b \\ & x,\ s \geq 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

主問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \max\ & \begin{pmatrix} c^\top & 0^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \\ \text{s.t.}\ & \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b \\ & \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y \\ \text{s.t.}\ & \begin{pmatrix} A^\top \\ I \end{pmatrix} y \geq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Uparrow$

不等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y \\ \text{s.t.}\ & A^\top y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

不等式標準形の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & A^\top y \geq c \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

不等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & A^\top y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

主問題 (等式標準形)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax + s = b \\ & x,\ \ s \geq 0 \end{aligned}$$

主問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} c^\top & 0^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b \\ & \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A^\top \\ I \end{pmatrix} y \geq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

主問題と双対問題の関係 (不等式標準形の場合)

例題 (A)

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\max & 2x_1 & -\,2x_2 & +\,3x_3 & +\ \ x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & & +\ \ x_3 & +\ \ x_4 & = 6 & (1) \\
& x_1 & -\ \ x_2 & +\,2x_3 & +\ \ x_4 & = -2 & (2) \\
& & x_2 & +\ \ x_3 & +\,3x_4 & = 12 & (3) \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(A) の双対問題

$$
\begin{array}{lrrrl}
\min & 6y_1 & -\,2y_2 & +\,12y_3 & \\
\text{s.t.} & 2y_1 & +\ \ y_2 & & \geq 2 \\
& & -\ \ y_2 & +\ \ y_3 & \geq -2 \\
& y_1 & +\,2y_2 & +\ \ y_3 & \geq 3 \\
& y_1 & +\ \ y_2 & +\,3y_3 & \geq 1
\end{array}
$$

(1), (2), (3) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= y_1(2x_1 + x_3 + x_4) + y_2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) + y_3(x_2 + x_3 + 3x_4) - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
&= 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
&\leq 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \qquad p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\min\ 6y_1 - 2y_2 + 12y_3$

$$
\begin{array}{lrrrrcll}
\text{s.t.} & 2y_1 & +\ \ y_2 & & -\,2 & = p_1 \geq 0 & & (x_1\ \text{の係数}) \\
& & -\ \ y_2 & +\ \ y_3 & +\,2 & = p_2 \geq 0 & & (x_2\ \text{の係数}) \\
& y_1 & +\,2y_2 & +\ \ y_3 & -\,3 & = p_3 \geq 0 & & (x_3\ \text{の係数}) \\
& y_1 & +\ \ y_2 & +\,3y_3 & -\,1 & = p_4 \geq 0 & & (x_4\ \text{の係数})
\end{array}
$$

例題 (B)

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + x_4 \le 6 \quad (1) \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \le -2 \quad (2) \\
& x_2 + x_3 + 3x_4 \le 12 \quad (3) \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(B) の双対問題

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \ge 2 \\
& - y_2 + y_3 \ge -2 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 3 \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\
& y_1,\ y_2,\ 3y_3 \ge 0
\end{array}
$$

(1), (2), (3) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= y_1(2x_1 + x_3 + x_4) + y_2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) + y_3(x_2 + x_3 + 3x_4) - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
&= 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
&\le 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \qquad p_1, p_2, p_3, p_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

min $6y_1 - 2y_2 + 12y_3$

$$
\text{s.t.} \quad
\begin{array}{lr}
2y_1 + y_2 - 2 = p_1 \ge 0 & (x_1\ \text{の係数}) \\
- y_2 + y_3 + 2 = p_2 \ge 0 & (x_2\ \text{の係数}) \\
y_1 + 2y_2 + y_3 - 3 = p_3 \ge 0 & (x_3\ \text{の係数}) \\
y_1 + y_2 + 3y_3 - 1 = p_4 \ge 0 & (x_4\ \text{の係数})
\end{array}
$$

主問題と双対問題の関係 (不等式標準形の場合)

例題 (B)

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + x_4 \le 6 \quad (1) \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \le -2 \quad (2) \\
& x_2 + x_3 + 3x_4 \le 12 \quad (3) \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(B) の双対問題

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \ge 2 \\
& -y_2 + y_3 \ge -2 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 3 \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\
& y_1, y_2, 3y_3 \ge 0
\end{array}
$$

(1), (2), (3) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= y_1(2x_1 + x_3 + x_4) + y_2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) + y_3(x_2 + x_3 + 3x_4) - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
&\le 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
&\le 6y_1 - 2y_2 + 12y_3
\end{aligned}
$$

$p_1, p_2, p_3, p_4 \ge 0$

$\boxed{y_1, y_2, y_3 \ge 0}$

min $6y_1 - 2y_2 + 12y_3$

$$
\begin{array}{rll}
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 - 2 = p_1 \ge 0 & (x_1 \text{ の係数}) \\
& -y_2 + y_3 + 2 = p_2 \ge 0 & (x_2 \text{ の係数}) \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 - 3 = p_3 \ge 0 & (x_3 \text{ の係数}) \\
& y_1 + y_2 + 3y_3 - 1 = p_4 \ge 0 & (x_4 \text{ の係数})
\end{array}
$$

主問題と双対問題の関係 (不等式標準形の場合)

例題 (B)

$$
\begin{array}{llcl}
\text{max} & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_3 + x_4 \le 6 & & (1) \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \le -2 & & (2) \\
 & x_2 + x_3 + 3x_4 \le 12 & & (3) \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0 & &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

(B) の双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 \ge 2 \\
 & - y_2 + y_3 \ge -2 \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 3 \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\
 & y_1,\ y_2,\ 3y_3 \ge 0
\end{array}
$$

(1), (2), (3) より

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&= y_1(2x_1 + x_3 + x_4) + y_2(x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) + y_3(x_2 + x_3 + 3x_4) - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \\
&\le 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 - (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4) \qquad \boxed{y_1, y_2, y_3 \ge 0} \\
&\le 6y_1 - 2y_2 + 12y_3 \qquad p_1, p_2, p_3, p_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

min $6y_1 - 2y_2 + 12y_3$

$$
\begin{array}{lll}
\text{s.t.} & 2y_1 + y_2 - 2 = p_1 \ge 0 & (x_1 \text{ の係数}) \\
 & - y_2 + y_3 + 2 = p_2 \ge 0 & (x_2 \text{ の係数}) \\
 & y_1 + 2y_2 + y_3 - 3 = p_3 \ge 0 & (x_3 \text{ の係数}) \\
 & y_1 + y_2 + y_3 - 1 = p_4 \ge 0 & (x_4 \text{ の係数}) \\
 & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 &
\end{array}
$$

双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

双対問題 (最大化問題)

$$\begin{aligned} \max\ & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

双対問題 (最大化問題)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

双対問題 (非負決定変数)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}'' \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y}' - A^\top \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}', \quad \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

等式標準形の双対問題

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\
\text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$

双対問題 (最大化問題)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\
\text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$

双対問題 (非負決定変数)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}'' \\
\text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y}' - A^\top \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{c} \\
& \boldsymbol{y}', \quad \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$\Longleftarrow$

双対問題 (行列で書き直す)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b}^\top & \boldsymbol{b}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} -A^\top & A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \leq -\boldsymbol{c} \\
& \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

不等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

)

$$\text{s.t.} \quad A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$$

$\Downarrow$

双対問題 (非負決定変数)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}'' \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y}' - A^\top \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}', \quad \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$

双対問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b}^\top & \boldsymbol{b}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} -A^\top & A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \leq -\boldsymbol{c} \\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

不等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \quad A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$$

双対問題 (非負決定変数)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}'' \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y}' - A^\top \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}', \quad \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b}^\top & \boldsymbol{b}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} -A^\top & A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \leq -\boldsymbol{c} \\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題の双対問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & -A\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{b} \\ & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

双対問題 (最大化問題)

$$\begin{aligned} \max \quad & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

双対問題 (非負決定変数)

$$\begin{aligned} \max \quad & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}'' \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y}' - A^\top \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}', \quad \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$

双対問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b}^\top & \boldsymbol{b}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} -A^\top & A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \leq -\boldsymbol{c} \\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$

双対問題の双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & -A\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{b} \\ & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Uparrow$

等式制約にまとめる

$$\begin{aligned} \min \quad & -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題の双対問題

等式標準形の主問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

双対問題の双対問題は主問題

等式標準形の双対問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

双対問題 (最大化問題)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

双対問題 (非負決定変数)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & -\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}'' \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y}' - A^\top \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}', \quad \boldsymbol{y}'' \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

双対問題 (行列で書き直す)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b}^\top & \boldsymbol{b}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} -A^\top & A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \leq -\boldsymbol{c} \\ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y}'' \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

双対問題の双対問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & -A\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{b} \\ & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Uparrow$

等式制約にまとめる

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Uparrow$

主問題と双対問題の関係 (まとめ)

主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

主問題と双対問題の関係 (まとめ)

主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

主問題と双対問題の関係 (練習問題)

主問題

$$\begin{aligned} \max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \min\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \max\quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\quad & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

主問題と双対問題の関係 (練習問題)

主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

最大化問題

$$\begin{aligned} \max\ & -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

主問題と双対問題の関係 (練習問題)

主問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

最大化問題

$$\begin{aligned} \max\ & -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}' \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y}' \geq -\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

主問題と双対問題の関係 (練習問題)

主問題

$$\begin{aligned} \max\ & c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y \\ \text{s.t.}\ & A^\top y \geq c \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \min\ & c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \max\ & b^\top y \\ \text{s.t.}\ & A^\top y \leq c \end{aligned}$$

最大化問題

$$\begin{aligned} \max\ & -c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y' \\ \text{s.t.}\ & A^\top y' \geq -c \end{aligned}$$

変数変換 $y = -y'$

$$\begin{aligned} \min\ & -b^\top y \\ \text{s.t.}\ & -A^\top y \geq -c \end{aligned}$$

双対定理

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

弱双対定理 (weak duality theorem)

$\boldsymbol{x}$ は主問題 (P) の実行可能解，$\boldsymbol{y}$ は双対問題 (D) の実行可能解とする．このとき，$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ が成り立つ

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ なら，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ はそれぞれ主問題 (P)，双対問題 (D) の最適解

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は必ず見つかる?

双対定理 (続き)

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

(強) 双対定理 ((strong) duality theorem)

主問題 (P)，双対問題 (D) のいずれかが最適解を持つなら，もう一方も最適解を持ち，両者の目的関数値は一致する

		主問題		
		最適解を持つ	非有界	実行不可能
双対問題	最適解を持つ	一致	—	—
	非有界	—	—	○
	実行不可能	—	○	○

例題

主問題

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 \\ \text{s.t.}\ & x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\xLeftarrow{\text{非有界}}$

$\xRightarrow{\text{実行不可能}}$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & y_1 \\ \text{s.t.}\ & y_1 \geq 1 \\ & -y_1 \geq 0 \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 - x_2 = -1 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\xLeftrightarrow{\text{いずれも実行不可能}}$

双対問題

$$\begin{aligned} \min\ & y_1 - y_2 \\ \text{s.t.}\ & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & -y_1 - y_2 \geq 1 \end{aligned}$$

双対定理の証明の準備

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.}\ & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

(強) 双対定理 ((strong) duality theorem)

主問題 (P)，双対問題 (D) のいずれかが最適解を持つなら，もう一方も最適解を持ち，両者の目的関数値は一致する

証明の準備

- 「主問題 (P) が最適解を持つ ⇒ 双対問題 (D) が最適解を持ち，目的関数値が一致」を示す．逆方向の証明は，双対問題の双対問題が主問題であることを使えばよい
- 主問題 (P) の最適基底解が $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \end{pmatrix}$ となるよう変数の順序を並べ替えておく
- $A, \boldsymbol{c}$ を $A = \begin{pmatrix} A_\mathrm{B} & A_\mathrm{N} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{c}_\mathrm{N} \end{pmatrix}$ と分割
- 主問題 (P)，双対問題 (D) も書き直しておく

双対定理の証明の準備

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{B} + \boldsymbol{c}_\mathrm{N}^\top \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \\ \text{s.t.} \quad & A_\mathrm{B}\boldsymbol{x}_\mathrm{B} + A_\mathrm{N}\boldsymbol{x}_\mathrm{N} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_\mathrm{B}, \quad \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A_\mathrm{B}^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}_\mathrm{B} \\ & A_\mathrm{N}^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}_\mathrm{N} \end{aligned}$$

(強) 双対定理 ((strong) duality theorem)

主問題 (P)，双対問題 (D) のいずれかが最適解を持つなら，もう一方も最適解を持ち，両者の目的関数値は一致する

証明の準備

- 「主問題 (P) が最適解を持つ ⇒ 双対問題 (D) が最適解を持ち，目的関数値が一致」を示す．逆方向の証明は，双対問題の双対問題が主問題であることを使えばよい
- 主問題 (P) の最適基底解が $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} \end{pmatrix}$ となるよう変数の順序を並べ替えておく
- $A, \boldsymbol{c}$ を $A = \begin{pmatrix} A_\mathrm{B} & A_\mathrm{N} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_\mathrm{B} \\ \boldsymbol{c}_\mathrm{N} \end{pmatrix}$ と分割
- **主問題 (P)，双対問題 (D) も書き直しておく**

双対定理の証明 (その 1)

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & c_B^\top x_B + c_N^\top x_N \\ \text{s.t.} \quad & A_B x_B + A_N x_N = b \\ & x_B, \quad x_N \geq 0 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & A_B^\top y \geq c_B && \text{(X)} \\ & A_N^\top y \geq c_N && \text{(Y)} \end{aligned}$$

証明 (パート 1)

主問題 (P) の目的関数 f は以下のように表される

$$f = c_B^\top A_B^{-1} b + \left\{ c_N - (A_B^{-1} A_N)^\top c_B \right\}^\top x_N$$

最適解なので相対コスト係数は 0 以下．したがって

$$c_N - (A_B^{-1} A_N)^\top c_B \leq 0$$

$y = (A_B^{-1})^\top c_B$ とおくと，y は双対問題 (D) の実行可能解

$$A_B^\top y = A_B^\top (A_B^{-1})^\top c_B = (A_B^{-1} A_B)^\top c_B = c_B \qquad \text{((X) を満たす)}$$

$$\begin{aligned} c_N - (A_B^{-1} A_N)^\top c_B &= c_N - A_N^\top (A_B^{-1})^\top c_B \\ &= c_N - A_N^\top y \leq 0 \qquad \text{((Y) を満たす)} \end{aligned}$$

双対定理の証明 (その 2)

主問題 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\top}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ \text{s.t.} \quad & A_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^{\top}\boldsymbol{y} & \\ \text{s.t.} \quad & A_{\mathrm{B}}^{\top}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} & \text{(X)} \\ & A_{\mathrm{N}}^{\top}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} & \text{(Y)} \end{aligned}$$

証明 (パート 2)

主問題 (P) の目的関数 f は以下のように表される

$$f = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top}A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} + \left\{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - (A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}})^{\top}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\right\}^{\top}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

主問題 (P) の最適値 f^* は，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$ より

$$f^* = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top}A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$$

双対問題 (D) の実行可能解 $\boldsymbol{y} = (A_{\mathrm{B}}^{-1})^{\top}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$ の目的関数値 $\boldsymbol{b}^{\top}\boldsymbol{y}$ は

$$f^* = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top}A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} = \left\{(A_{\mathrm{B}}^{-1})^{\top}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\right\}^{\top}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}^{\top}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\top}\boldsymbol{y}$$

より f^* と一致．弱双対定理より双対問題 (D) の最適値は f^* 以上だから，
$\boldsymbol{y} = (A_{\mathrm{B}}^{-1})^{\top}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$ は双対問題 (D) の最適解

相補性定理

等式標準形の主問題 (P1)

$$\begin{aligned} \max\ & c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

等式標準形の双対問題 (D1)

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y \\ \text{s.t.}\ & A^\top y \geq c \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題 (P2)

$$\begin{aligned} \max\ & c^\top x \\ \text{s.t.}\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

不等式標準形の双対問題 (D2)

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y \\ \text{s.t.}\ & A^\top y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

相補性定理 (complementary slackness theorem)

x，y はそれぞれ主問題 (P)，双対問題 (D) の実行可能解とする．x, y が (P)，(D) の最適解となるための必要十分条件は，以下の (A), (B) が同時に成り立つこと．

$$\text{相補性条件} \begin{cases} y^\top(b - Ax) = 0 & \text{(A)} \\ (A^\top y - c)^\top x = 0 & \text{(B)} \end{cases}$$

(P1), (D1) の場合，x が $Ax = b$ を満たすので，(A) は自動的に成り立つ．

というわけで，以下では，より難しそうな (P2), (D2) の場合を示す．

相補性定理の証明 (十分性)

不等式標準形の主問題 (P2)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

不等式標準形の双対問題 (D2)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

十分性の証明

(P2) の最適解 $\boldsymbol{x}$，(D2) の最適解 $\boldsymbol{y}$ が

$$\boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{(A)}$$

$$(A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c})^\top \boldsymbol{x} = 0 \quad \text{(B)}$$

を満たすことを示す．不等式標準形に対する弱双対定理の導出式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} &\leq (A^\top \boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{x} && (A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \text{ と } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}) \\ &= \boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} \\ &\leq \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} && (A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \text{ と } \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}) \end{aligned}$$

に，強双対定理 $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ を適用すれば，どちらの不等式も等号で成り立たなければならないことがわかる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = (A^\top \boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{x} \quad &\Leftrightarrow \quad (A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c})^\top \boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = 0 \end{aligned}$$

相補性定理の証明 (必要性)

不等式標準形の主問題 (P2)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

不等式標準形の双対問題 (D2)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

必要性の証明

$$\boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = 0 \tag{A}$$
$$(A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c})^\top \boldsymbol{x} = 0 \tag{B}$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ がそれぞれ (P2)，(D2) の最適解となることを示す.
前ページの弱双対定理の式

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \le (A^\top \boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$$

において等号が成り立つので，$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$. よって，強双対定理より $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は最適解.

相補性定理の意味

等式標準形の主問題 (P1)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

等式標準形の双対問題 (D1)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

不等式標準形の主問題 (P2)

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

不等式標準形の双対問題 (D2)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = 0 \tag{A}$$

$$(A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c})^\top \boldsymbol{x} = 0 \tag{B}$$

- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は実行可能解なので， $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{t} = A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}$
- (A), (B) 式は

$$\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{s} = \sum_j y_j s_j = 0, \quad \boldsymbol{t}^\top \boldsymbol{x} = \sum_j t_j x_j = 0$$

- **相補性**：$y_j \neq 0 \Rightarrow s_j = 0,\ \ s_j \neq 0 \Rightarrow y_j = 0,\ \ x_j \neq 0 \Rightarrow t_j = 0,\ \ t_j \neq 0 \Rightarrow x_j = 0$

主問題の基底変数 $\Rightarrow$ 双対問題の非基底変数

主問題の非基底変数 $\Leftarrow$ 双対問題の基底変数

相補性の例

例題

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & -2x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\ & x_1 & - & x_2 & \le & 2 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \le & 9 \\ & x_1, & & x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \min & y_1 & + & 2y_2 & + & 9y_3 & & \\ \text{s.t.} & -2y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & \ge & 1 \\ & y_1 & - & y_2 & - & 2y_3 & \ge & -2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3 & \ge & 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$\begin{array}{rl} \min & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 0, 5, 0, 3)$$
$$\Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow$$
$$(t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0, 1, 0)$$

相補性の例

例題

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

決定変数	左辺と右辺の差
x_1	t_1
x_2	t_2

双対問題

$$\begin{array}{rl} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow$$

双対問題の等式標準形

$$\begin{array}{rl} \min & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$\begin{array}{ccc} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) & = & (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3) \\ & & \ \ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) & = & (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0) \end{array}$$

相補性の例

例題

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} & -2x_1 + x_2 \le 1 \\
& x_1 - x_2 \le 2 \\
& 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\
& x_1,\ x_2 \ge 0
\end{array}
$$

決定変数	左辺と右辺の差
$x_1 > 0$	t_1
x_2	t_2

双対問題

$$
\begin{array}{l}
y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\
-2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\
y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\
y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\
& x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\
& 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\
& x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{array}
$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\min & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\
\text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\
& y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\
& y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$
\begin{array}{c}
(x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3) \\
\Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow \\
(t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)
\end{array}
$$

相補性の例

例題

$$
\begin{array}{rrcrl}
\text{max} & x_1 & - & 2x_2 & \\
\text{s.t.} & -2x_1 & + & x_2 & \le 1 \\
 & x_1 & - & x_2 & \le 2 \\
 & 3x_1 & - & 2x_2 & \le 9 \\
 & x_1, & & x_2 & \ge 0
\end{array}
$$

決定変数		左辺と右辺の差
$x_1 > 0$	$\Rightarrow$	$t_1 = 0$
x_2		t_2

双対問題

$$
\begin{array}{rcrcrl}
y_1 & + & 2y_2 & + & 9y_3 & \\
-2y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & \ge 1 \\
y_1 & - & y_2 & - & 2y_3 & \ge -2 \\
y_1, & & y_2, & & y_3 & \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\
 & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\
 & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\
 & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{array}
$$

$$\Longleftrightarrow$$

双対問題の等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\
\text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\
 & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\
 & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$
\begin{array}{c}
(x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3) \\
\Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow \\
(t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)
\end{array}
$$

相補性の例

例題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

決定変数		左辺と右辺の差
$x_1 > 0$	$\Rightarrow$	$t_1 = 0$
x_2		$t_2 > 0$

双対問題

$$\begin{aligned} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0 \end{aligned}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$\begin{array}{c} (x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3) \\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow \\ (t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0) \end{array}$$

相補性の例

例題

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 & \le 1 \\ & x_1 - x_2 & \le 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 & \le 9 \\ & x_1, \ x_2 & \ge 0 \end{array}$$

決定変数		左辺と右辺の差
$x_1 > 0$	$\Rightarrow$	$t_1 = 0$
$x_2 = 0$	$\Leftarrow$	$t_2 > 0$

双対問題

$$\begin{array}{rl} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\ & y_1, \ y_2, \ y_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 & = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 & = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 & = 9 \\ & x_1, \ x_2, \ s_1, \ s_2, \ s_3 & \ge 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$\begin{array}{lrl} \min & y_1 + 2y_2 + 9y_3 & \\ \text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 & = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 & = -2 \\ & y_1, \ y_2, \ y_3, \ t_1, \ t_2 & \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$\begin{array}{c} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 0, 5, 0, 3) \\ \Downarrow \ \Uparrow \ \Downarrow \ \Uparrow \ \Downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0, 1, 0) \end{array}$$

相補性の例

例題

$$\begin{array}{lrl} \text{max} & x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.t.} & -2x_1 + \ \ x_2 & \le 1 \\ & x_1 - \ \ x_2 & \le 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 & \le 9 \\ & x_1, \ \ \ x_2 & \ge 0 \end{array}$$

左辺と右辺の差	決定変数
s_1	y_1
s_2	y_2
s_3	y_3

双対問題

$$\begin{array}{lrl} \text{n} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 & \\ \text{t.} & -2y_1 + \ \ y_2 + 3y_3 & \ge 1 \\ & y_1 - \ \ y_2 - 2y_3 & \ge -2 \\ & y_1, \ \ \ y_2, \ \ \ y_3 & \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{lrl} \text{max} & x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.t.} & -2x_1 + \ \ x_2 + s_1 & = 1 \\ & x_1 - \ \ x_2 \quad + s_2 & = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \quad\quad + s_3 & = 9 \\ & x_1, \ \ x_2, \ \ s_1, \ \ s_2, \ \ s_3 & \ge 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$\begin{array}{lrl} \text{min} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 & \\ \text{s.t.} & -2y_1 + \ \ y_2 + 3y_3 - t_1 & = 1 \\ & y_1 - \ \ y_2 - 2y_3 \quad - t_2 & = -2 \\ & y_1, \ \ y_2, \ \ y_3, \ \ t_1, \ \ t_2 & \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, 0, 5, 0, 3)$$

$$\Downarrow \ \Uparrow \ \Downarrow \ \Uparrow \ \Downarrow$$

$$(t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0, 1, 0)$$

相補性の例

例題

$$\begin{array}{llrl} \text{max} & x_1 - 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 & \le & 1 \\ & x_1 - x_2 & \le & 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 & \le & 9 \\ & x_1,\ x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

左辺と右辺の差	決定変数
$s_1 > 0$	y_1
s_2	y_2
s_3	y_3

双対問題

$$\begin{array}{llrl} \text{n} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 & & \\ \text{t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 & \ge & 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 & \ge & -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 & \ge & 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{llrl} \text{max} & x_1 - 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 & = & 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 & = & 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 & = & 9 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 & \ge & 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow$$

双対問題の等式標準形

$$\begin{array}{llrl} \text{min} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 & & \\ \text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 & = & 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 & = & -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 & \ge & 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$(x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3)$$
$$\Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow$$
$$(t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)$$

相補性の例

例題

$$
\begin{array}{lrl}
\text{max} & x_1 - 2x_2 & \\
\text{s.t.} & -2x_1 + x_2 & \le 1 \\
 & x_1 - x_2 & \le 2 \\
 & 3x_1 - 2x_2 & \le 9 \\
 & x_1,\ x_2 & \ge 0
\end{array}
$$

左辺と右辺の差		決定変数
$s_1 > 0$	$\Rightarrow$	$y_1 = 0$
s_2		y_2
s_3		y_3

双対問題

$$
\begin{array}{lrl}
\text{min} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 & \\
\text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 & \ge 1 \\
 & y_1 - y_2 - 2y_3 & \ge -2 \\
 & y_1,\ y_2,\ y_3 & \ge 0
\end{array}
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{lrl}
\text{max} & x_1 - 2x_2 & \\
\text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 & = 1 \\
 & x_1 - x_2 + s_2 & = 2 \\
 & 3x_1 - 2x_2 + s_3 & = 9 \\
 & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 & \ge 0
\end{array}
$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$
\begin{array}{lrl}
\text{min} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 & \\
\text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 & = 1 \\
 & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 & = -2 \\
 & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 & \ge 0
\end{array}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	-1	0	-1	0	-2
s_1	0	-1	1	2	0	5
x_1	1	-1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	-3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	-2
t_2	1	0	-1	1	1	1
y_2	-2	1	3	-1	0	1

$$
\begin{array}{c}
(x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3) \\
\Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow \\
(t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)
\end{array}
$$

相補性の例

例題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差		決定変数
$s_1 > 0$	$\Rightarrow$	$y_1 = 0$
s_2		$y_2 > 0$
s_3		y_3

双対問題

$$\begin{aligned} \text{n} \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0 \end{aligned}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$(x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3)$$
$$\Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow$$
$$(t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)$$

相補性の例

例題

$$\begin{aligned} \max\quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad & -2x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

左辺と右辺の差		決定変数
$s_1 > 0$	$\Rightarrow$	$y_1 = 0$
$s_2 = 0$	$\Leftarrow$	$y_2 > 0$
s_3		y_3

双対問題

$$\begin{aligned} \text{n}\quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{t.}\quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

$$\begin{aligned} \max\quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min\quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.}\quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0 \end{aligned}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$(x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3)$$

$$\Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow$$

$$(t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)$$

相補性の例

例題

$$\begin{array}{rl} \text{max} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

左辺と右辺の差		決定変数
$s_1 > 0$	$\Rightarrow$	$y_1 = 0$
$s_2 = 0$	$\Leftarrow$	$y_2 > 0$
$s_3 > 0$		y_3

双対問題

$$\begin{array}{rl} \text{n} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \text{max} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$\begin{array}{rl} \text{min} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$\begin{array}{c} (x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3) \\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow \\ (t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0) \end{array}$$

相補性の例

例題

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

左辺と右辺の差		決定変数
$s_1 > 0$	$\Rightarrow$	$y_1 = 0$
$s_2 = 0$	$\Leftarrow$	$y_2 > 0$
$s_3 > 0$	$\Rightarrow$	$y_3 = 0$

双対問題

$$\begin{array}{rl} \text{n} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$\begin{array}{rl} \min & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$\begin{array}{c} (x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3) \\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow \\ (t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0) \end{array}$$

相補性の例

例題

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.t.} & -2x_1 + \ \ x_2 & \le 1 \\ & x_1 - \ \ x_2 & \le 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 & \le 9 \\ & x_1, \ \ x_2 & \ge 0 \end{array}$$

左辺と右辺の差		決定変数
$s_1 > 0$	$\Rightarrow$	$y_1 = 0$
$s_2 = 0$	$\Leftarrow$	$y_2 > 0$
$s_3 > 0$	$\Rightarrow$	$y_3 = 0$

双対問題

$$\begin{array}{lrl} \text{n} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 & \\ \text{t.} & -2y_1 + \ \ y_2 + 3y_3 & \ge 1 \\ & y_1 - \ \ y_2 - 2y_3 & \ge -2 \\ & y_1, \ \ y_2, \ \ y_3 & \ge 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.t.} & -2x_1 + \ \ x_2 + s_1 & = 1 \\ & x_1 - \ \ x_2 \quad + s_2 & = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \quad\quad + s_3 & = 9 \\ & x_1, \ \ x_2, \ \ s_1, \ \ s_2, \ \ s_3 & \ge 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow$$

双対問題の等式標準形

$$\begin{array}{lrl} \min & y_1 + 2y_2 + 9y_3 & \\ \text{s.t.} & -2y_1 + \ \ y_2 + 3y_3 - t_1 & = 1 \\ & y_1 - \ \ y_2 - 2y_3 \quad - t_2 & = -2 \\ & y_1, \ \ y_2, \ \ y_3, \ \ t_1, \ \ t_2 & \ge 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$\begin{array}{ccccccccccc} (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (2, & 0, & 5, & 0, & 3) \\ \Downarrow & \Uparrow & \Downarrow & \Uparrow & \Downarrow \\ (t_1, t_2, y_1, y_2, y_3) = (0, & 1, & 0, & 1, & 0) \end{array}$$

相補性の例

例題

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \le 1 \\
& x_1 - x_2 \le 2 \\
& 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\
& x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

左辺と右辺の差		決定変数
$s_1 > 0$	$\Rightarrow$	$y_1 = 0$
$s_2 = 0$	$\Leftarrow$	$y_2 > 0$
$s_3 > 0$	$\Rightarrow$	$y_3 = 0$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{n} \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\
\text{t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\
& y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\
& y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

等式標準形

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\
& x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\
& 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\
& x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\
\text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\
& y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\
& y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$
\begin{array}{c}
(x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3) \\
\Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow \\
(t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)
\end{array}
$$

相補性の例

例題

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \le 1 \\
& x_1 - x_2 \le 2 \\
& 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\
& x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

左辺と右辺の差		決定変数
$s_1 > 0$	$\Rightarrow$	$y_1 = 0$
$s_2 = 0$	$\Leftarrow$	$y_2 > 0$
$s_3 > 0$	$\Rightarrow$	$y_3 = 0$

双対問題

$$
\begin{aligned}
\text{n} \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\
\text{t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 1 \\
& y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2 \\
& y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

等式標準形

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\
& x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\
& 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\
& x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow$$

双対問題の等式標準形

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\
\text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\
& y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\
& y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$
\begin{array}{c}
(x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3) \\
\Downarrow\ \ \Uparrow\ \ \Downarrow\ \ \Uparrow\ \ \Downarrow \\
(t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)
\end{array}
$$

相補性の例

例題

$$\begin{array}{rl} \text{max} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

左辺と右辺の差		決定変数
$s_1 > 0$	$\Rightarrow$	$y_1 = 0$
$s_2 = 0$	$\Leftarrow$	$y_2 > 0$
$s_3 > 0$	$\Rightarrow$	$y_3 = 0$

双対問題

$$\begin{array}{rl} \text{n} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{array}$$

等式標準形

$$\begin{array}{rl} \text{max} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$

双対問題の等式標準形

$$\begin{array}{rl} \text{min} & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ t_1,\ t_2 \geq 0 \end{array}$$

最適シンプレックスタブロー

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
	0	−1	0	−1	0	−2
s_1	0	−1	1	2	0	5
x_1	1	−1	0	1	0	2
s_3	0	1	0	−3	1	3

何か関係ありそう
(次回)

$\Longleftrightarrow$

	y_1	y_2	y_3	t_1	t_2	
	5	0	3	2	0	−2
t_2	1	0	−1	1	1	1
y_2	−2	1	3	−1	0	1

$$\begin{array}{c} (x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3) = (2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 3) \\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow\ \Uparrow\ \Downarrow \\ (t_1,\ t_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0) \end{array}$$