オペレーションズ・リサーチ I (1)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

スケジュール

No.	内容
1	オペレーションズ・リサーチと最適化，線形計画問題の基礎 (1)
2	線形計画問題の基礎 (2)，線形計画問題の標準形
3	シンプレックス (単体) 法 1
4	シンプレックス (単体) 法 2，2 段階シンプレックス法
5	双対問題，双対定理，相補性定理
6	双対シンプレックス法，ファルカス補題，感度分析
7	内点法

オペレーションズ・リサーチ

オペレーションズ・リサーチ (operations research; OR) の起源

- 第 2 次世界大戦の軍事作戦 (operation) の立案実行
  ⇒ 武器・弾薬・食料・人員などの適切な輸送・配置
- イギリスやアメリカの軍隊は科学者を雇って研究 ⇒ 成功
- 戦争終了後，軍隊以外にも広がった
- 実際には数百年前から科学的な検討が行われていた
  ⇒ 16 世紀まで辿れるらしい

オペレーションズ・リサーチとは?

オペレーションズ・リサーチ

オペレーションズ・リサーチ (operations research; OR) の起源

- 第 2 次世界大戦の軍事作戦 (operation) の立案実行
  ⇒ 武器・弾薬・食料・人員などの適切な輸送・配置
- イギリスやアメリカの軍隊は科学者を雇って研究 ⇒ 成功
- 戦争終了後，軍隊以外にも広がった
- 実際には数百年前から科学的な検討が行われていた
  ⇒ 16 世紀まで辿れるらしい

オペレーションズ・リサーチとは?

日本オペレーションズ・リサーチ学会: `https://orsj.org/`

オペレーションズ・リサーチは困っていることを科学的に解決するための問題解決学です.

ORWiki†: `https://orsj.org/`

現象を抽象化した数理モデルを構築し, モデル分析に基づいて種々の問題, とりわけ意思決定問題の解決を支援する方法論や技法の総称. 情報化社会の進展に伴って, 線形計画法に代表される最適化モデルや待ち行列理論に代表される確率的なモデル等, 多様なモデルに基づく分析が, 経営計画や生産・販売・財務等の企業意思決定や都市・公共システム等広く社会一般の問題解決に大きな役割を果たしている.

† ORWiki: 日本オペレーションズ・リサーチ学会の OR 事典編集委員会が編纂した事典

オペレーションズ・リサーチ

オペレーションズ・リサーチ (operations research; OR) の起源

- 第 2 次世界大戦の軍事作戦 (operation) の立案実行
  ⇒ 武器・弾薬・食料・人員などの適切な輸送・配置
- イギリスやアメリカの軍隊は科学者を雇って研究 ⇒ 成功
- 戦争終了後，軍隊以外にも広がった
- 実際には数百年前から科学的な検討が行われていた
  ⇒ 16 世紀まで辿れるらしい

オペレーションズ・リサーチとは?

日本オペレーションズ・リサーチ学会: `https://orsj.org/`

オペレーションズ・リサーチは困っていることを**科学的に解決するための問題解決学**です.

ORWiki†: `https://orsj.org/`

現象を抽象化した数理モデルを構築し, モデル分析に基づいて種々の問題, とりわけ意思決定問題の解決を支援する方法論や技法の総称. 情報化社会の進展に伴って, 線形計画法に代表される最適化モデルや待ち行列理論に代表される確率的なモデル等, 多様なモデルに基づく分析が, 経営計画や生産・販売・財務等の企業意思決定や都市・公共システム等広く社会一般の問題解決に大きな役割を果たしている.

† ORWiki: 日本オペレーションズ・リサーチ学会の OR 事典編集委員会が編纂した事典

オペレーションズ・リサーチ (続き)

IFORS[†]: https://www.ifors.org/what-is-or/

Operational research (OR) encompasses the development and the application of a wide range of problem-solving methods and techniques applied in the pursuit of improved decision-making and efficiency, such as mathematical optimization, simulation, queueing theory and other stochastic models.

INFORMS[‡]: https://www.informs.org/Explore/Operations-Research-Analytics

Operations research (O.R.) is defined as the scientific process of transforming data into insights to making better decisions.

EURO[††]: https://www.euro-online.org/web/pages/301/or-and-euro

Though there is no “official definition” of Operational Research (“Operations Research” in the US), it can be described as a scientific approach to the solution of problems in the management of complex systems.

[†] IFORS: The International Federation of Operational Research Societies
[‡] INFORMS: Institute for Operations Research and the Management Sciences
[††] EURO: Association of European Operational Research Societies

オペレーションズ・リサーチ (続き)

IFORS†: https://www.ifors.org/what-is-or/

Operational research (OR) encompasses **the development and the application of a wide range of problem-solving methods and techniques applied in the pursuit of improved decision-making and efficiency**, such as mathematical optimization, simulation, queueing theory and other stochastic models.

INFORMS‡: https://www.informs.org/Explore/Operations-Research-Analytics

Operations research (O.R.) is defined as **the scientific process of transforming data into insights to making better decisions**.

EURO††: https://www.euro-online.org/web/pages/301/or-and-euro

Though there is no “official definition” of Operational Research (“Operations Research” in the US), it can be described as **a scientific approach to the solution of problems in the management of complex systems**.

† IFORS: The International Federation of Operational Research Societies
‡ INFORMS: Institute for Operations Research and the Management Sciences
†† EURO: Association of European Operational Research Societies

学問分野としてのオペレーションズ・リサーチ

- よりよい意思決定を行うための学問
- 対象をモデル化し数式などを使って記述 (数理モデル)

学問分野としてのオペレーションズ・リサーチ

- 数理計画・数理最適化 (線形計画，非線形計画，整数計画)
- ゲーム理論
- 待ち行列理論
- 在庫理論
- 統計分析
- シミュレーション
- etc.

学問分野としてのオペレーションズ・リサーチ

- よりよい意思決定を行うための学問
- 対象をモデル化し数式などを使って記述 (数理モデル)

学問分野としてのオペレーションズ・リサーチ

- **数理計画・数理最適化 (線形計画，非線形計画，整数計画)**
- **ゲーム理論**
- 待ち行列理論
- 在庫理論
- 統計分析
- シミュレーション
- etc.

オペレーションズ・リサーチ I の内容：線形計画

- 数理モデル：線形計画問題，標準形
- 理論：ファルカスの補題，双対問題と双対定理
- 解法：シンプレックス (単体) 法，内点法

オペレーションズ・リサーチの適用例 (1)

INFORMS Journal on Applied Analytics

- INFORMS 発行の論文誌
- 対象：オペレーションズ・リサーチの応用研究

Y. Dang et al.: Innovative integer programming software and methods for large-scale routing at DHL Supply Chain, Vol. 54, No. 1, pp. 20–36 (2024)

- ドイツの配送企業 DHL の**サプライチェーン**部門が，**整数計画**を用いてアメリカでの荷物の配送計画を効率化した
- 2020 年から 2 年半で 1 億 1700 万ドルのコスト削減

サプライチェーン (supply chain)

製品の原材料の調達から生産，物流倉庫への搬送，販売のための流通に至る一連の流れ．
供給 (supply) の鎖 (chain) に見立てた呼び名．
サプライチェーンマネジメント (supply chain management; SCM) は，供給の流れを効率よく計画管理することを目的とする

整数計画 (integer programming)

最適化問題の一種．一般に，オペレーションズ・リサーチ I で対象とする「線形計画」よりかなり難しい

オペレーションズ・リサーチの適用例 (2)

X. Yuan, et al.: Huawei Cloud adopts operations research for live streaming services to save network bandwidth cost: The GSCO system, Vol. 54, No. 1, pp. 37–53 (2024)

- 中国の通信機器メーカー，ファーウェイのクラウドコンピューティング部門が，ライブ配信プラットフォームにおいて顧客に計算機資源を割り当てる問題に，連続最適化，整数計画，グラフ理論など複数のオペレーションズ・リサーチ手法を適用
  - インターネット回線は他社が所有しており，通信量に応じて回線使用料を支払わなければならない
  - 複数所有するデータセンターの計算機資源をどの顧客に割り当てるかで通信経路が変化するため，回線使用料も変わる
  - 計算機資源の割当てと通信経路をうまく決めて，回線使用料を安く抑えたい
- 2020 年からの 3 年間で 4960 万ドルのコスト削減
- サービス提供可能なピーク時のデータ送信量が 10 倍に増加

クラウドコンピューティング (cloud computing)

種々のコンピュータ資源 (記憶領域や計算能力など) をインターネット上のサービスとしてオンデマンドで利用する，コンピュータの利用形態．Amazon がサービス展開する AWS (Amazon Web Services) が有名

オペレーションズ・リサーチの適用例 (3)

R. Allgor, T. Cezik, and D. Chen: Algorithm for robotic picking in Amazon fulfillment centers enables humans and robots to work together effectively, Vol. 53, No. 4, pp. 266–282 (2023)

- Amazon の物流倉庫において，自動搬送ロボットによる**ピッキング**作業を整数計画により効率化
  - 自動搬送ロボットは商品を収納している棚を作業員のところまで運ぶ
  - どの棚をどの順番で運ぶかを決める問題
- 1 注文あたりのロボットの移動距離が 62 %減少．これにより，電力消費量が 31 %減少

画像は https://www.aboutamazon.jp/news/delivery-and-logistics/amazons-technical-team-to-create-the-logistics-of-the-future より

ピッキング (picking)

指定された荷物を集める作業

現実問題への様々な適用例，成功例

最適化とは

最適化 (optimization) とは?

評価がもっともよく (最適に) なるよう，計画や設計などを行うこと．また，最適な評価を与える計画や設計などを求めること．

最適化問題 (optimization problem)

最適な解 (計画や設計など) を求める問題.

最適化問題の例 (1)

自宅から大学まで最短の時間でたどり着きたい.

⇒ 所要時間が最短になるよう，交通手段や移動経路を求める問題

最適化問題の例 (2)

すごくよく飛ぶ紙飛行機を作りたい.

⇒ 飛行距離が最長になるよう，紙飛行機の折り方を求める問題

最適化とは

最適化 (optimization) とは?

評価がもっともよく (最適に) なるよう，計画や設計などを行うこと．また，最適な評価を与える計画や設計などを求めること．

最適化問題 (optimization problem)

最適な解 (計画や設計など) を求める問題.

最適化問題の例 (1)

自宅から大学まで最短の時間でたどり着きたい．

⇒ 所要時間が最短になるよう，交通手段や移動経路を求める問題

評価　最適　解 (計画)

最適化問題の例 (2)

すごくよく飛ぶ紙飛行機を作りたい．

⇒ 飛行距離が最長になるよう，紙飛行機の折り方を求める問題

最適化とは

最適化 (optimization) とは?

評価がもっともよく (最適に) なるよう，計画や設計などを行うこと． また，最適な評価を与える計画や設計などを求めること．

最適化問題 (optimization problem)

最適な解 (計画や設計など) を求める問題.

最適化問題の例 (1)

自宅から大学まで最短の時間でたどり着きたい．

⇒ <u>**所要時間**</u>が<u>**最短**</u>になるよう，<u>**交通手段や移動経路**</u>を求める問題

評価　**最適**　**解 (計画)**

最適化問題の例 (2)

すごくよく飛ぶ紙飛行機を作りたい．

⇒ <u>**飛行距離**</u>が<u>**最長**</u>になるよう，<u>**紙飛行機の折り方**</u>を求める問題

評価　**最適**　**解 (設計)**

最適化問題の数理モデル (mathematical model)

最適化問題の 3 つの要素

決定変数 (decision variable) 求めたいもの (解)

目的関数 (objective function) 解のよさを評価する関数．最大化または最小化

制約条件 (constraint) 決定変数の取りうる範囲を記述

最大化問題 (maximization problem)

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in F \end{array}$$

あるいは

$$\begin{array}{rl} \max & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in F \end{array}$$

最小化問題 (minimization problem)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in F \end{array}$$

あるいは

$$\begin{array}{rl} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in F \end{array}$$

決定変数 $\boldsymbol{x}$ (決定変数ベクトル)

目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x}$ を変化させて $f(\boldsymbol{x})$ を最大化または最小化)

制約条件 $\boldsymbol{x} \in F$ ($\boldsymbol{x}$ は集合 F に含まれる)

最適化問題の数理モデル (続き)

最小化問題の例

$x + 2y \leq 3$ かつ $2x^2 + y^2 \leq 3$ を満たしながら $f(x, y) = -x + y$ を最小化する問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -x + y \\ \text{s.t.} \quad & x + 2y \geq 3 \\ & 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3 \end{aligned}$$

制約条件は複数の**等式**・**不等式**で表すことが多い
⇒ **等式制約** (equality constraint) ・**不等式制約** (inequality constraint)

決定変数 (x, y)
目的関数 $f(x, y) = -x + y$
制約条件 $x + 2y \geq 3$, $2x^2 + (y-1)^2 \leq 3$ (どちらも**不等式制約**)

最適化問題の数理モデル (続き)

最小化問題の例

$x + 2y \leq 3$ かつ $2x^2 + y^2 \leq 3$ を満たしながら $f(x, y) = -x + y$ を最小化する問題

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -x + y \\ \text{s.t.} \quad & x + 2y \geq 3 \\ & 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3 \end{aligned}$$

制約条件は複数の**等式**・**不等式**で表すことが多い
$\Rightarrow$ **等式制約** (equality constraint) ・**不等式制約** (inequality constraint)

決定変数 (x, y)
目的関数 $f(x, y) = -x + y$
制約条件 $x + 2y \geq 3,\ 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3$ (どちらも**不等式制約**)

実行可能解 (feasible solution) 制約条件をすべて満たす解
実行可能領域 (feasible region) 実行可能解全体 (実行可能集合とも)
最適解 (optimal solution) 目的関数を最大化 (最小化) する実行可能解
最適値 (optimal value) 最適解に対する目的関数の値

最適化問題の数理モデル (続き 2)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -x+y \\ \text{s.t.} \quad & x+2y \geq 3 \\ & 2x^2+(y-1)^2 \leq 3 \end{aligned}$$

決定変数 (x, y)

目的関数 $f(x, y) = -x + y$

制約条件 $x + 2y \geq 3,\ 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3$

実行可能解 たとえば $(x, y) = (0, 2)$ や $(1, 1)$ など

実行可能領域 $F = \{(x, y) \mid x + 2y \geq 3,\ 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3\}$

最適解 $(x^*, y^*) = \left(\frac{11}{9}, \frac{8}{9}\right)$

最適値 $f(x^*, y^*) = -\frac{1}{3}$

実行可能解 (feasible solution) 制約条件をすべて満たす解

実行可能領域 (feasible region) 実行可能解全体

最適解 (optimal solution) 目的関数を最大化 (最小化) する実行可能解

最適値 (optimal value) 最適解に対する目的関数の値

最適化問題の数理モデル (続き 2)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -x+y \\ \text{s.t.} \quad & x+2y \geq 3 \\ & 2x^2+(y-1)^2 \leq 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{min} \quad & f(x,y) \\ \text{s.t.} \quad & (x,y) \in F \end{aligned}$$

決定変数 (x,y)

目的関数 $f(x,y) = -x+y$

制約条件 $x+2y \geq 3,\ 2x^2+(y-1)^2 \leq 3$

実行可能解 たとえば $(x,y)=(0,2)$ や $(1,1)$ など

実行可能領域 $F = \{(x,y) \mid x+2y \geq 3,\ 2x^2+(y-1)^2 \leq 3\}$

最適解 $(x^*,y^*) = \left(\frac{11}{9}, \frac{8}{9}\right)$

最適値 $f(x^*,y^*) = -\frac{1}{3}$

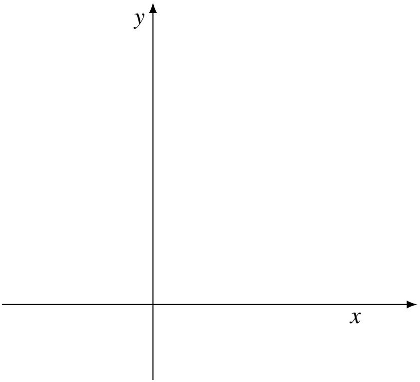
実行可能解 (feasible solution) 制約条件をすべて満たす解

実行可能領域 (feasible region) 実行可能解全体

最適解 (optimal solution) 目的関数を最大化 (最小化) する実行可能解

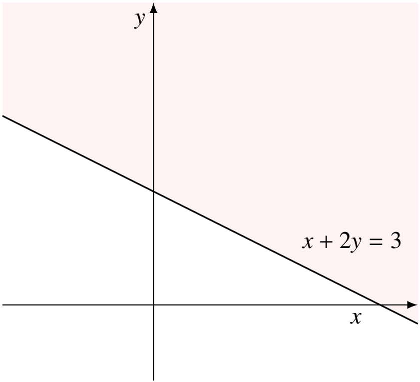
最適値 (optimal value) 最適解に対する目的関数の値

最適化問題の数理モデル (続き 3)



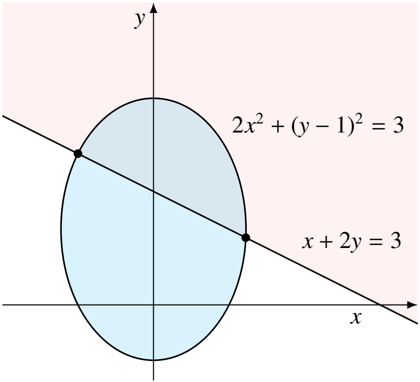
$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -x + y \\ \text{s.t.} \quad & x + 2y \geq 3 \\ & 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3 \end{aligned}$$

最適化問題の数理モデル (続き 3)



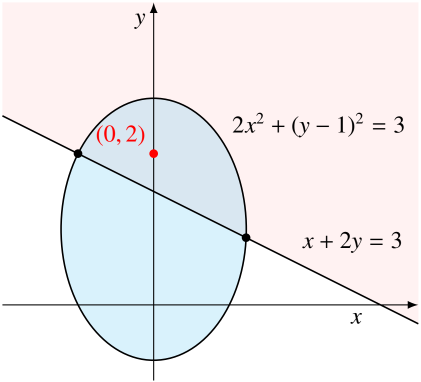
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -x + y \\
\text{s.t.} \quad & x + 2y \geq 3 \\
& 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3
\end{aligned}
$$

最適化問題の数理モデル (続き 3)



$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -x + y \\
\text{s.t.} \quad & x + 2y \geq 3 \\
& 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3
\end{aligned}
$$

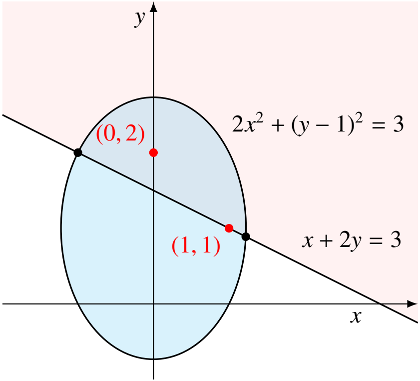
最適化問題の数理モデル (続き 3)



$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -x + y \\ \text{s.t.} \quad & x + 2y \geq 3 \\ & 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3 \end{aligned}$$

実行可能解　たとえば $(x, y) = (0, 2)$

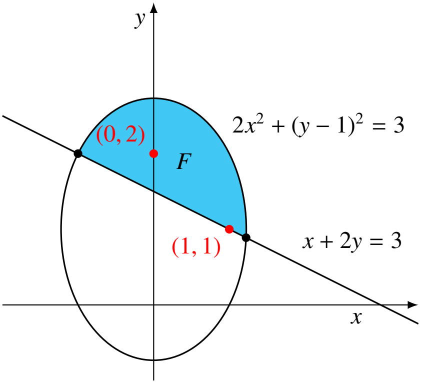
最適化問題の数理モデル (続き 3)



$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -x + y \\
\text{s.t.} \quad & x + 2y \geq 3 \\
& 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3
\end{aligned}
$$

実行可能解　たとえば $(x, y) = (0, 2)$ や $(1, 1)$ など

最適化問題の数理モデル (続き 3)

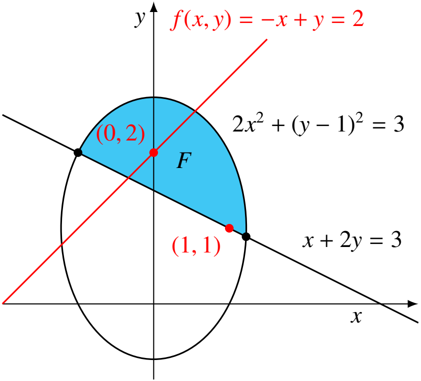


$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -x + y \\
\text{s.t.} \quad & x + 2y \geq 3 \\
& 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3
\end{aligned}
$$

実行可能解　たとえば $(x, y) = (0, 2)$ や $(1, 1)$ など

実行可能領域　$F = \{(x, y) \mid x + 2y \geq 3,\ 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3\}$

最適化問題の数理モデル (続き 3)

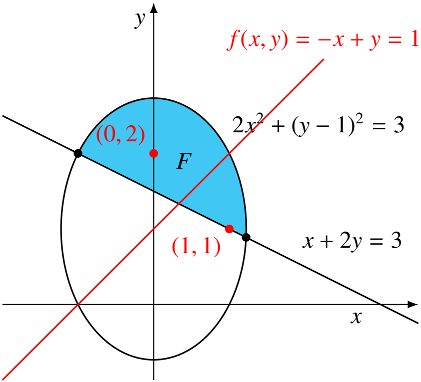


$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & -x + y \\
\text{s.t.} & x + 2y \geq 3 \\
& 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3
\end{array}
$$

実行可能解　たとえば $(x,y) = (0,2)$ や $(1,1)$ など

実行可能領域　$F = \{(x,y) \mid x + 2y \geq 3,\ 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3\}$

最適化問題の数理モデル (続き 3)

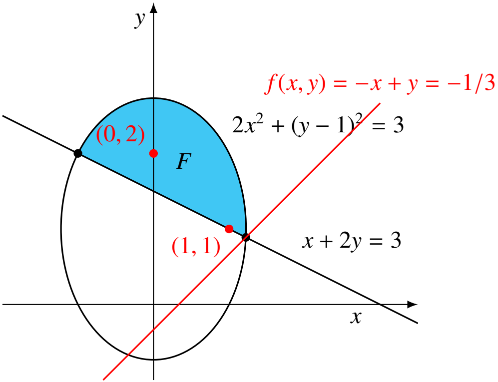


$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -x + y \\ \text{s.t.} \quad & x + 2y \geq 3 \\ & 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3 \end{aligned}$$

実行可能解　たとえば $(x,y) = (0,2)$ や $(1,1)$ など

実行可能領域　$F = \{(x,y) \mid x + 2y \geq 3,\ 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3\}$

最適化問題の数理モデル (続き 3)

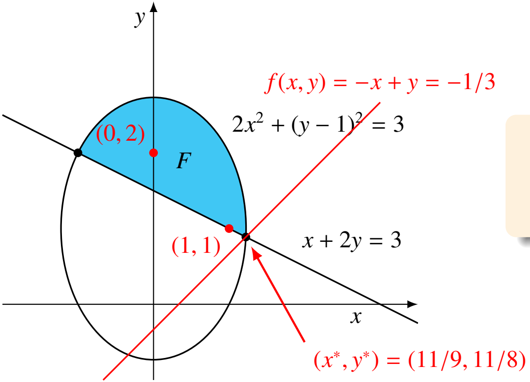


$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -x + y \\
\text{s.t.} \quad & x + 2y \geq 3 \\
& 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3
\end{aligned}
$$

実行可能解　たとえば $(x,y) = (0,2)$ や $(1,1)$ など

実行可能領域　$F = \{(x,y) \mid x + 2y \geq 3,\ 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3\}$

最適化問題の数理モデル (続き 3)



$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -x + y \\
\text{s.t.} \quad & x + 2y \geq 3 \\
& 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3
\end{aligned}
$$

実行可能解 たとえば $(x, y) = (0, 2)$ や $(1, 1)$ など

実行可能領域 $F = \{(x, y) \mid x + 2y \geq 3,\ 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3\}$

最適解 $(x^*, y^*) = \left(\dfrac{11}{9}, \dfrac{8}{9}\right)$

最適値 $f(x^*, y^*) = -\dfrac{1}{3}$

線形計画問題

決定変数による分類

連続値 連続最適化問題 (continuous optimization problem)

離散値 離散最適化問題 (discrete optimization problem)

線形性による分類

線形 線形最適化問題 (linear optimization problem)

非線形 非線形最適化問題 (nonlinear optimization problem)

線形：目的関数，制約条件が 1 次式で表される

線形計画問題 (linear programming problem)

連続かつ線形な最適化問題

線形計画問題とは

線形計画問題

目的関数　1 次 (線形) 関数

制約条件　1 次関数の等式・不等式 (等式制約・不等式制約)

線形計画問題の例

$$
\begin{array}{llr}
\text{min} & -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 & \text{目的関数} \\
\text{s.t.} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 2 & \text{不等式制約} \\
 & -3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 7 & \text{不等式制約} \\
 & 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 & \text{等式制約} \\
 & x_1 \geq 0 & \text{不等式制約} \\
 & x_2 \geq 0 & \text{不等式制約}
\end{array}
$$

線形計画問題の例：最適プロダクトミックス問題

最適プロダクトミックス (product mix) 問題

複数の製品の最適な生産構成を決定する問題

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大になるよう各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	5	
原材料 A	4	6	2	200
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	3	5	6	240

線形計画問題として定式化 (formulation)・数理モデル化できる．

最適プロダクトミックス問題の定式化

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大になるよう各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	5	
原材料 A	4	6	2	200
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	3	5	6	240

最適プロダクトミックス問題の定式化

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大になるよう**各薬品の生産量を決定**

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	5	
原材料 A	4	6	2	200
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	3	5	6	240

最適プロダクトミックス問題の定式化

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大になるよう**各薬品の生産量を決定**

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	5	
原材料 A	4	6	2	200
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	3	5	6	240

決定変数

薬品 i の生産量：x_i $(i = 1, 2, 3)$

最適プロダクトミックス問題の定式化

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：**総利益が最大**になるよう各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	**6**	**5**	**5**	
原材料 A	4	6	2	200
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	3	5	6	240

決定変数

薬品 i の生産量：x_i $(i = 1, 2, 3)$

最適プロダクトミックス問題の定式化

最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：**総利益が最大**になるよう各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	**6**	**5**	**5**	
原材料 A	4	6	2	200
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	3	5	6	240

決定変数

薬品 i の生産量：x_i $(i = 1, 2, 3)$

目的関数

$$\max \;\; 6x_1 + 5x_2 + 5x_3$$

最適プロダクトミックス問題の定式化 (続き)

最適プロダクトミックス問題の例

- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	5	
原材料 A	4	6	2	200
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	3	5	6	240

目的関数

$$\max \ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3$$

最適プロダクトミックス問題の定式化 (続き)

最適プロダクトミックス問題の例

- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - **各原材料の在庫量を超えて使用することはできない**

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	5	
原材料 A	**4**	**6**	**2**	**200**
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	3	5	6	240

目的関数

$$\max \ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3$$

最適プロダクトミックス問題の定式化 (続き)

最適プロダクトミックス問題の例

- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - **各原材料の在庫量を超えて使用することはできない**

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	5	
原材料 A	**4**	**6**	**2**	**200**
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	3	5	6	240

制約条件

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 200 \end{aligned}$$

最適プロダクトミックス問題の定式化 (続き)

最適プロダクトミックス問題の例

- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	5	
原材料 A	4	6	2	200
原材料 B	**5**	**3**	**3**	**160**
原材料 C	3	5	6	240

制約条件

$$
\begin{aligned}
\text{max}\quad & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.}\quad & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 160
\end{aligned}
$$

最適プロダクトミックス問題の定式化 (続き)

最適プロダクトミックス問題の例

- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - **各原材料の在庫量を超えて使用することはできない**

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	5	
原材料 A	4	6	2	200
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	**3**	**5**	**6**	**240**

制約条件

$$
\begin{aligned}
\text{max}\quad & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.}\quad & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 240
\end{aligned}
$$

最適プロダクトミックス問題の定式化 (続き)

最適プロダクトミックス問題の例

- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	5	
原材料 A	4	6	2	200
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	3	5	6	240

制約条件

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 240 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

最適プロダクトミックス問題の定式化 (続き)

最適プロダクトミックス問題の例

- 各薬品を生産するには，製品の種類に応じた原材料が必要
  - **各原材料の在庫量を超えて使用することはできない**

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	5	
原材料 A	4	6	2	200
原材料 B	5	3	3	160
原材料 C	3	5	6	240

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 240 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

最適プロダクトミックス問題の定式化 (非負制約は必要?)

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 240 \\
& {\color{red} x_1 \ge 0} \\
& x_2 \ge 0 \\
& x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

x_1 の非負制約 $x_1 \ge 0$ を取り除くとどうなる?

最適プロダクトミックス問題の定式化 (非負制約は必要?)

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 240 \\
& \\
& \quad\quad\quad x_2 \quad\quad\quad \ge 0 \\
& \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

x_1 の非負制約 $x_1 \ge 0$ を取り除くとどうなる?

最適プロダクトミックス問題の定式化 (非負制約は必要?)

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 6(-2) + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 4(-2) + 6x_2 + 2x_3 \le 200 \\
& 5(-2) + 3x_2 + 3x_3 \le 160 \\
& 3(-2) + 5x_2 + 6x_3 \le 240 \\
& \\
& x_2 \ge 0 \\
& x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

x_1 の非負制約 $x_1 \ge 0$ を取り除くとどうなる?

負の生産量 ($x_1 = -2$) の意味

最適プロダクトミックス問題の定式化 (非負制約は必要?)

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{rrl}
\max & 5x_2 + 5x_3 - 12 & \text{利益が 12 減少} \\
\text{s.t.} & 4(-2) + 6x_2 + 2x_3 \le 200 & \\
& 5(-2) + 3x_2 + 3x_3 \le 160 & \\
& 3(-2) + 5x_2 + 6x_3 \le 240 & \\
& x_2 \ge 0 & \\
& x_3 \ge 0 &
\end{array}
$$

x_1 の非負制約 $x_1 \ge 0$ を取り除くとどうなる?

負の生産量 ($x_1 = -2$) の意味

- 利益が $6 \cdot 2 = 12$ 減少

最適プロダクトミックス問題の定式化 (非負制約は必要?)

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_2 + 5x_3 - 12 \qquad \text{利益が 12 減少} \\
\text{s.t.} \quad & 4(-2) + 6x_2 + 2x_3 \leq 200 \\
& 5(-2) + 3x_2 + 3x_3 \leq 160 \\
& 3(-2) + 5x_2 + 6x_3 \leq 240 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

x_1 の非負制約 $x_1 \geq 0$ を取り除くとどうなる?

負の生産量 ($x_1 = -2$) の意味

- 利益が $6 \cdot 2 = 12$ 減少
  ⇒ **薬品 1 を 2 単位購入**

最適プロダクトミックス問題の定式化 (非負制約は必要?)

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_2 + 5x_3 - 12 && \text{利益が 12 減少} \\
\text{s.t.} \quad & 6x_2 + 2x_3 \leq 200 + 8 && \text{在庫量が 8 増加} \\
& 3x_2 + 3x_3 \leq 160 + 10 && \text{在庫量が 10 増加} \\
& 5x_2 + 6x_3 \leq 240 + 6 && \text{在庫量が 6 増加} \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

x_1 の非負制約 $x_1 \geq 0$ を取り除くとどうなる?

負の生産量 ($x_1 = -2$) の意味

- 利益が $6 \cdot 2 = 12$ 減少
  $\Rightarrow$ 薬品 1 を 2 単位購入
- 原材料 A, B, C の在庫はそれぞれ 8, 10, 6 増加

最適プロダクトミックス問題の定式化 (非負制約は必要?)

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{rll}
\max & 5x_2 + 5x_3 - 12 & \text{利益が 12 減少} \\
\text{s.t.} & 6x_2 + 2x_3 \le 200 + 8 & \text{在庫量が 8 増加} \\
 & 3x_2 + 3x_3 \le 160 + 10 & \text{在庫量が 10 増加} \\
 & 5x_2 + 6x_3 \le 240 + 6 & \text{在庫量が 6 増加} \\
 & x_2 \ge 0 & \\
 & x_3 \ge 0 &
\end{array}
$$

x_1 の非負制約 $x_1 \ge 0$ を取り除くとどうなる?

負の生産量 ($x_1 = -2$) の意味

- 利益が $6 \cdot 2 = 12$ 減少
⇒ 薬品 1 を 2 単位購入
- 原材料 A, B, C の在庫はそれぞれ 8, 10, 6 増加
⇒ 購入した薬品 1 は原材料に分解し，薬品 2, 3 の生産に充てられる

最適プロダクトミックス問題の定式化 (非負制約は必要?)

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{llll}
\text{max} & 5x_2 + 5x_3 - 12 & & \text{利益が 12 減少} \\
\text{s.t.} & 6x_2 + 2x_3 \leq 200 + 8 & & \text{在庫量が 8 増加} \\
 & 3x_2 + 3x_3 \leq 160 + 10 & & \text{在庫量が 10 増加} \\
 & 5x_2 + 6x_3 \leq 240 + 6 & & \text{在庫量が 6 増加} \\
 & & & \\
 & x_2 \geq 0 & & \\
 & x_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

x_1 の非負制約 $x_1 \geq 0$ を取り除くとどうなる?

負の生産量 ($x_1 = -2$) の意味

- 利益が $6 \cdot 2 = 12$ 減少
  ⇒ 薬品 1 を 2 単位購入
- 原材料 A, B, C の在庫はそれぞれ 8, 10, 6 増加
  ⇒ 購入した薬品 1 は原材料に分解し，薬品 2, 3 の生産に充てられる

決定変数の非負制約がないと，違う問題になる

最適プロダクトミックス問題の解

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

最適解：$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{340}{41}, \frac{900}{41}, \frac{720}{41}\right)$, 最適値：$\frac{10140}{41} \simeq 247.31707317$

最適プロダクトミックス問題の解

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.}\ \ & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 240 \\
& x_1,\quad x_2,\quad x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

最適解：$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{340}{41}, \frac{900}{41}, \frac{720}{41}\right)$, 最適値：$\frac{10140}{41} \simeq 247.31707317$

簡単に解ける (ようになる)

練習問題：輸送問題

輸送問題 (transportation problem)

複数の供給地から複数の需要地まで物資を最適に輸送する問題

輸送問題の例題

- 2 箇所の工場 (工場 1，工場 2) で同じ製品を生産して，3 箇所の店舗 (店舗 1, 店舗 2, 店舗 3) に納入する
- 以下の情報が与えられている
  - 各工場の生産能力 (生産量の上限)
  - 各店舗への納入量
  - 工場から店舗への単位輸送量あたりのコスト
- 輸送計画：どの工場からどの店舗へ，どれだけの量の製品を輸送するか
- 目的：総輸送コストが最小となる輸送計画を求める

(a) 工場の生産能力

	生産能力
工場 1	80
工場 2	120

(b) 店舗への納入量

	納入量
店舗 1	50
店舗 2	40
店舗 3	70

(c) 単位輸送コスト

	店舗 1	店舗 2	店舗 3
工場 1	0.8	1.1	1.4
工場 2	1.1	0.9	1.5

練習問題の解答

輸送問題の例題

- 輸送計画：**どの工場からどの店舗へ，どれだけの量の製品を輸送するか**
- 目的：総輸送コストが最小となる輸送計画を求める

(a) 工場の生産能力

	生産能力
工場 1	80
工場 2	120

(b) 店舗への納入量

	納入量
店舗 1	50
店舗 2	40
店舗 3	70

(c) 単位輸送コスト

	店舗 1	店舗 2	店舗 3
工場 1	0.8	1.1	1.4
工場 2	1.1	0.9	1.5

練習問題の解答

輸送問題の例題

- 輸送計画：**どの工場からどの店舗へ，どれだけの量の製品を輸送するか**
- 目的：総輸送コストが最小となる輸送計画を求める

(a) 工場の生産能力

	生産能力
工場 1	80
工場 2	120

(b) 店舗への納入量

	納入量
店舗 1	50
店舗 2	40
店舗 3	70

(c) 単位輸送コスト

	店舗 1	店舗 2	店舗 3
工場 1	0.8	1.1	1.4
工場 2	1.1	0.9	1.5

決定変数

工場 i から店舗 j への輸送量：x_{ij} $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3)$

練習問題の解答

輸送問題の例題

- 輸送計画：どの工場からどの店舗へ，どれだけの量の製品を輸送するか
- 目的：総輸送コストが最小となる輸送計画を求める

(a) 工場の生産能力

	生産能力
工場 1	80
工場 2	120

(b) 店舗への納入量

	納入量
店舗 1	50
店舗 2	40
店舗 3	70

(c) 単位輸送コスト

	店舗 1	店舗 2	店舗 3
工場 1	0.8	1.1	1.4
工場 2	1.1	0.9	1.5

決定変数

工場 i から店舗 j への輸送量：x_{ij} $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3)$

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{min} & 0.8x_{11} + 1.1x_{12} + 1.4x_{13} + 1.1x_{21} + 0.9x_{22} + 1.5x_{23} \\
\text{s.t.} & x_{11} + & x_{12} + & x_{13} & & & & \leq 80 \\
 & & & & x_{21} + & x_{22} + & x_{23} & \leq 120 \\
 & x_{11} & & + & x_{21} & & & = 50 \\
 & & x_{12} & & + & x_{22} & & = 40 \\
 & & & x_{13} & & + & x_{23} & = 70 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23} & \geq 0
\end{array}
$$

輸送問題の例題の最適解

輸送問題の例題

(a) 工場の生産能力

	生産能力
工場 1	80
工場 2	120

(b) 店舗への納入量

	納入量
店舗 1	50
店舗 2	40
店舗 3	70

(c) 単位輸送コスト

	店舗 1	店舗 2	店舗 3
工場 1	0.8	1.1	1.4
工場 2	1.1	0.9	1.5

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\text{min} & 0.8x_{11} + 1.1x_{12} + 1.4x_{13} + 1.1x_{21} + 0.9x_{22} + 1.5x_{23} \\
\text{s.t.} & x_{11} + & x_{12} + & x_{13} & & & & \le 80 \\
& & & & x_{21} + & x_{22} + & x_{23} & \le 120 \\
& x_{11} & & + & x_{21} & & & = 50 \\
& & x_{12} & & + & x_{22} & & = 40 \\
& & & x_{13} & & + & x_{23} & = 70 \\
& x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23} & \ge 0
\end{array}
$$

最適解 (最適値 178.0)

製品輸送量

	店舗 1	店舗 2	店舗 3
工場 1	50	0	30
工場 2	0	40	40