オペレーションズ・リサーチ I (2)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

スケジュール

No.	内容
1	オペレーションズ・リサーチと最適化，線形計画問題の基礎 (1)
2	線形計画問題の基礎 (2)，線形計画問題の標準形
3	シンプレックス (単体) 法 1
4	シンプレックス (単体) 法 2，2 段階シンプレックス法
5	双対問題，双対定理，相補性定理
6	双対シンプレックス法，ファルカス補題，感度分析
7	内点法

練習問題その 2：最小費用流問題

最小費用流問題 (minimum cost flow problem)

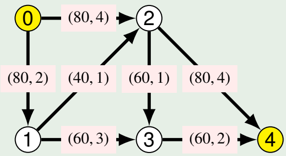
ある地点から別の地点まで，決まった量の資源を送る際の費用を最小化する問題

最小費用流問題の例題

- 地点 0 にある工場で生産した薬品 100 kg を地点 4 の顧客へ送る
- 0 ~ 4 の各地点間について，図の矢印の方向に薬品を輸送可能で，
  - 最大輸送量
  - kg あたりの費用

  が与えられている．矢印で結ばれていない地点間は直接輸送できない
- 輸送費用が最小となるよう，薬品の輸送経路 (地点間の輸送量) を決定する

各地点間の (最大輸送量, 費用)



地点間の最大輸送量および費用 (輸送量, 費用)

輸送元	輸送先 0	1	2	3	4
0	–	(80, 2)	(80, 4)	–	–
1	–	–	(40, 1)	(60, 3)	–
2	–	–	–	(30, 1)	(80, 4)
3	–	–	–	–	(60, 2)

- (矢印で結ばれた) 地点間の輸送量を決定変数に
- 地点 0: (流出量) = 100，地点 1 ~ 3: (流出量) – (流入量) = 0, 地点 4 の制約は不要

練習問題その 2 の解答

決定変数

地点 i から地点 j への輸送量：x_{ij} $((i,j) \in \{(0,1),(0,2),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\})$

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{lll}
\text{min} & 2x_{01}+4x_{02}+x_{12}+3x_{13}+x_{23}+4x_{24}+2x_{34} & \\
\text{s.t.} & x_{01}+x_{02} = 100 & (\text{地点 } 0) \\
 & x_{01}-x_{12}-x_{13} = 0 & (\text{地点 } 1) \\
 & x_{02}-x_{12}-x_{23}-x_{24} = 0 & (\text{地点 } 2) \\
 & x_{13}+x_{23}-x_{34} = 0 & (\text{地点 } 3) \\
 & x_{01} \le 80 & \\
 & x_{02} \le 80 & \\
 & x_{12} \le 40 & \\
 & x_{13} \le 60 & \\
 & x_{23} \le 60 & \\
 & x_{24} \le 80 & \\
 & x_{34} \le 60 & \\
 & x_{01},\ x_{02},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{23},\ x_{24},\ x_{34} \ge 0 &
\end{array}
$$

練習問題その 2 の解答

決定変数

地点 i から地点 j への輸送量：x_{ij} $((i, j) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\})$

線形計画問題としての定式化

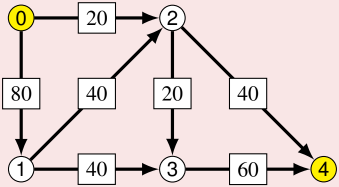
$$\min\ 2x_{01} + 4x_{02} + x_{12} + 3x_{13} + x_{23} + 4x_{24} + 2x_{34}$$

(地点 0)

(地点 1)

(地点 2)

(地点 3)



最適値 700

$$x_{13} \le 60$$

$$x_{23} \le 60$$

$$x_{24} \le 80$$

$$x_{34} \le 60$$

$$x_{01},\ x_{02},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{23},\ x_{24},\ x_{34} \ge 0$$

線形計画問題の行列表現：最適プロダクトミックス問題の例

最適プロダクトミックス問題の定式化

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

決定変数ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$,

制約条件の係数行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, 制約条件の右辺ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 200 \\ 160 \\ 240 \end{pmatrix}$

最適プロダクトミックス問題の定式化の行列表現

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

($\boldsymbol{c}^\top$ は $\boldsymbol{c}$ の転置を表す)

線形計画問題の行列表現：最適プロダクトミックス問題の例 (続き)

最適プロダクトミックス問題の定式化の行列表現

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

($\boldsymbol{c}^\top$ は $\boldsymbol{c}$ の転置を表す)

制約条件を 1 つにまとめることもできる

線形計画問題の行列表現：最適プロダクトミックス問題の例 (続き)

最適プロダクトミックス問題の定式化の行列表現

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} && (\boldsymbol{c}^\top \text{ は } \boldsymbol{c} \text{ の転置を表す}) \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \color{red}{I}\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} && (I \text{ は単位行列}) \end{aligned}$$

制約条件を 1 つにまとめることもできる

線形計画問題の行列表現：最適プロダクトミックス問題の例 (続き)

最適プロダクトミックス問題の定式化の行列表現

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} && (\boldsymbol{c}^\top \text{ は } \boldsymbol{c} \text{ の転置を表す}) \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
& -I\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0} && (I \text{ は単位行列})
\end{aligned}
$$

制約条件を 1 つにまとめることもできる

線形計画問題の行列表現：最適プロダクトミックス問題の例 (続き)

最適プロダクトミックス問題の定式化の行列表現

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} && (\boldsymbol{c}^\top \text{ は } \boldsymbol{c} \text{ の転置を表す}) \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\
& -I\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{0} && (I \text{ は単位行列})
\end{aligned}
$$

制約条件を 1 つにまとめることもできる

$$
A' = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}
$$

線形計画問題の行列表現：最適プロダクトミックス問題の例 (続き)

最適プロダクトミックス問題の定式化の行列表現

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} && (\boldsymbol{c}^\top \text{ は } \boldsymbol{c} \text{ の転置を表す}) \\
\text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\
& -I\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{0} && (I \text{ は単位行列})
\end{aligned}
$$

制約条件を 1 つにまとめることもできる

$$
A' = \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}
$$

最適プロダクトミックス問題の定式化の行列表現 2

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\quad & A'\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}'
\end{aligned}
$$

線形計画問題の行列表現：輸送問題の例

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
\text{min} & \multicolumn{6}{l}{0.8x_{11} + 1.1x_{12} + 1.4x_{13} + 1.1x_{21} + 0.9x_{22} + 1.5x_{23}} & \\
\text{s.t.} & x_{11} + & x_{12} + & x_{13} & & & & \leq 80 \\
 & & & & x_{21} + & x_{22} + & x_{23} & \leq 120 \\
 & x_{11} & & + & x_{21} & & & = 50 \\
 & & x_{12} & & + & x_{22} & & = 40 \\
 & & & x_{13} & & + & x_{23} & = 70 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23} & \geq 0
\end{array}
$$

線形計画問題の行列表現：輸送問題の例

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
\min & 0.8x_{11} + & 1.1x_{12} + & 1.4x_{13} + & 1.1x_{21} + & 0.9x_{22} + & 1.5x_{23} & \\
\text{s.t.} & x_{11} + & x_{12} + & x_{13} & & & & \le 80 \\
& & & & x_{21} + & x_{22} + & x_{23} & \le 120 \\
& x_{11} & & + & x_{21} & & & = 50 \\
& & x_{12} & & + & x_{22} & & = 40 \\
& & & x_{13} & & + & x_{23} & = 70 \\
& x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23} & \ge 0
\end{array}
$$

輸送問題の定式化の行列表現

$$
\begin{array}{rl}
\min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A_1 \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_1 \\
& A_2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2 \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

線形計画問題の行列表現：輸送問題の例

線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & 0.8x_{11} + 1.1x_{12} + 1.4x_{13} + 1.1x_{21} + 0.9x_{22} + 1.5x_{23} \\
\text{s.t.} & x_{11} + & x_{12} + & x_{13} & & & & \le 80 \\
& & & & x_{21} + & x_{22} + & x_{23} & \le 120 \\
& x_{11} & & + & x_{21} & & & = 50 \\
& & x_{12} & & + & x_{22} & & = 40 \\
& & & x_{13} & & + & x_{23} & = 70 \\
& x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23} & \ge 0
\end{array}
$$

輸送問題の定式化の行列表現

$$
\begin{array}{ll}
\min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A_1 \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_1 \\
& A_2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2 \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

輸送問題の定式化の行列表現 2

$$
\begin{array}{ll}
\min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A_1' \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_1' \\
& A_2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2
\end{array}
$$

線形計画問題の一般形 (general form)

制約条件の不等号の向きは揃えておく．
例：$A'\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}' \Rightarrow -A'\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}'$

$\leq$ で揃えた場合

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1 \\ & A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1 \\ & A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2 \end{aligned}$$

$\geq$ で揃えた場合

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1 \\ & A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_1\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1 \\ & A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2 \end{aligned}$$

不等式標準形と等式標準形

一般形

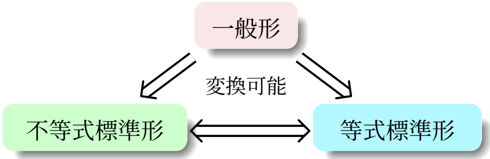
$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{s.t.} & A_1 x \le b_1 \\ & A_2 x = b_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{s.t.} & A_1 x \ge b_1 \\ & A_2 x = b_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & A_1 x \le b_1 \\ & A_2 x = b_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & A_1 x \ge b_1 \\ & A_2 x = b_2 \end{array}$$

不等式標準形 (canonical form)：不等号の向きに注意！

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax \ge b \\ & x \ge 0 \end{array}$$

等式標準形 (standard form)

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{array}$$



標準形への変換

無制約決定変数 ⇒ 非負決定変数

任意の実数値を取る決定変数 x を，2 つの決定変数 $x', x'' \geq 0$ を使って

$$x = x' - x''$$

に置き換える

不等式制約 ⇒ 等式制約

$ax \leq b$ の制約を，b と ax の差を表す**スラック変数** (slack variable) $s \geq 0$ を使って

$$ax + s = b$$

に置き換える．$ax \geq b$ の制約も同様 ($ax - s = b$ とする)

等式制約 ⇒ 不等式制約

$ax = b$ の制約を，$ax \leq b$ と $ax \geq b$ に分解して

$$\begin{aligned} ax &\leq b \\ -ax &\leq -b \end{aligned} \quad \text{または} \quad \begin{aligned} ax &\geq b \\ -ax &\geq -b \end{aligned}$$

に置き換える

等式標準形への変換例：最適プロダクトミックス問題

最適プロダクトミックス問題の定式化

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 240 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

最適プロダクトミックス問題の定式化の行列表現

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

等式標準形への変換例：最適プロダクトミックス問題

最適プロダクトミックス問題の定式化：等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + s_1 = 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + s_2 = 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0
\end{array}
$$

最適プロダクトミックス問題の定式化の行列表現

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

等式標準形への変換例：最適プロダクトミックス問題

最適プロダクトミックス問題の定式化：等式標準形

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + s_1 = 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + s_2 = 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

最適プロダクトミックス問題の定式化の行列表現：等式標準形

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

等式標準形への変換例：最適プロダクトミックス問題

最適プロダクトミックス問題の定式化：等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\text{s.t.} & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + s_1 = 200 \\
& 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + s_2 = 160 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + s_3 = 240 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0
\end{array}
$$

最適プロダクトミックス問題の定式化の行列表現：等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{rl}
\text{max} & \overline{\boldsymbol{c}}^\top \overline{\boldsymbol{x}} \\
\text{s.t.} & \overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} \\
& \overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

$$
\overline{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}, \overline{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}
$$

不等式標準形への変換例 2

不等式標準形への変換

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 - x_2 = 1 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\min\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

1. 不等式制約 $x_1 + 2x_2 \leq 3$ の両辺に (-1) をかけて，不等号の向きを合わせる
2. 等式制約 $2x_1 - x_2 = 1$ を不等式制約 $2x_1 - x_2 \geq 1$ と $-2x_1 + x_2 \geq -1$ に置き換える
3. x_2 を新たな決定変数 $x_2', x_2'' \geq 0$ を用いて $x_2' - x_2''$ に置き換える
4. 行列で表す

不等式標準形への変換例 2

不等式標準形への変換

$$\begin{aligned} \min\quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \le 3 \\ & 2x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 \ge 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \min\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \min\quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad & -x_1 - 2x_2 \ge -3 \\ & 2x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

1. **不等式制約 $x_1 + 2x_2 \le 3$ の両辺に (-1) をかけて，不等号の向きを合わせる**
2. 等式制約 $2x_1 - x_2 = 1$ を不等式制約 $2x_1 - x_2 \ge 1$ と $-2x_1 + x_2 \ge -1$ に置き換える
3. x_2 を新たな決定変数 $x_2', x_2'' \ge 0$ を用いて $x_2' - x_2''$ に置き換える
4. 行列で表す

不等式標準形への変換例 2

不等式標準形への変換

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \le 3 \\ & 2x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 \ge 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 - 2x_2 \ge -3 \\ & 2x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 \ge 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 - 2x_2 \ge -3 \\ & 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ & -2x_1 + x_2 \ge -1 \\ & x_1 \ge 0 \end{array}$$

1. 不等式制約 $x_1 + 2x_2 \le 3$ の両辺に (-1) をかけて，不等号の向きを合わせる
2. **等式制約 $2x_1 - x_2 = 1$ を不等式制約 $2x_1 - x_2 \ge 1$ と $-2x_1 + x_2 \ge -1$ に置き換える**
3. x_2 を新たな決定変数 $x_2', x_2'' \ge 0$ を用いて $x_2' - x_2''$ に置き換える
4. 行列で表す

不等式標準形への変換例 2

不等式標準形への変換

$$\begin{array}{ll} \text{min} & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \le 3 \\ & 2x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 \ge 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{min} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ll} \text{min} & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 - 2x_2 \ge -3 \\ & 2x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 \ge 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \text{min} & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 - 2x_2 \ge -3 \\ & 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ & -2x_1 + x_2 \ge -1 \\ & x_1 \ge 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \text{min} & 2x_1 - 3x_2' + 3x_2'' \\ \text{s.t.} & -x_1 - 2x_2' + 2x_2'' \ge -3 \\ & 2x_1 - x_2' + x_2'' \ge 1 \\ & -2x_1 + x_2' - x_2'' \ge -1 \\ & x_1, x_2', x_2'' \ge 0 \end{array}$$

1. 不等式制約 $x_1 + 2x_2 \le 3$ の両辺に (-1) をかけて，不等号の向きを合わせる
2. 等式制約 $2x_1 - x_2 = 1$ を不等式制約 $2x_1 - x_2 \ge 1$ と $-2x_1 + x_2 \ge -1$ に置き換える
3. **x_2 を新たな決定変数 $x_2', x_2'' \ge 0$ を用いて $x_2' - x_2''$ に置き換える**
4. 行列で表す

不等式標準形への変換例 2

不等式標準形への変換

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 - 2x_2 \geq -3 \\ & 2x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 - 2x_2 \geq -3 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ & -2x_1 + x_2 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_2' + 3x_2'' \\ \text{s.t.} & -x_1 - 2x_2' + 2x_2'' \geq -3 \\ & 2x_1 - x_2' + x_2'' \geq 1 \\ & -2x_1 + x_2' - x_2'' \geq -1 \\ & x_1,\ x_2',\ x_2'' \geq 0 \end{array}$$

1. 不等式制約 $x_1 + 2x_2 \leq 3$ の両辺に (-1) をかけて，不等号の向きを合わせる
2. 等式制約 $2x_1 - x_2 = 1$ を不等式制約 $2x_1 - x_2 \geq 1$ と $-2x_1 + x_2 \geq -1$ に置き換える
3. x_2 を新たな決定変数 $x_2', x_2'' \geq 0$ を用いて $x_2' - x_2''$ に置き換える
4. 行列で表す

練習問題

練習問題：等式標準形への変換

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 - 2x_2 \geq 3 \\
& 2x_1 + x_2 = 1 \\
& x_1 \geq 0
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\text{min} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

ヒント

- 無制約の決定変数は，非負の決定変数 2 つの差で表す
- 不等式制約はスラック変数を使って等式制約に
- 等式制約は 2 つの不等式制約に分解

練習問題

練習問題：等式標準形への変換

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 \geq 3 \\
& 2x_1 + x_2 = 1 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - s = 3 \\
& 2x_1 + x_2 = 1 \\
& x_1, \; s \geq 0
\end{aligned}
$$

練習問題

練習問題：等式標準形への変換

$$\begin{array}{rl} \min & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rl} \min & x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2 - s = 3 \\ & 2x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1, \ s \geq 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rl} \min & x_1 - x_2' + x_2'' \\ \text{s.t.} & x_1 - 2x_2' + 2x_2'' - s = 3 \\ & 2x_1 + x_2' - x_2'' = 1 \\ & x_1, \ x_2', \ x_2'', \ s \geq 0 \end{array}$$

練習問題

練習問題：等式標準形への変換

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Downarrow$ $\Uparrow$

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 - s = 3 \\ & 2x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1, \ s \geq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2' + x_2'' \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2' + 2x_2'' - s = 3 \\ & 2x_1 + x_2' - x_2'' = 1 \\ & x_1, \ x_2', \ x_2'', \ s \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_2'' \\ s \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

最大化問題と最小化問題の関係

等式標準形 (最大化)

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

等式標準形 (最小化)

$$\begin{aligned} \min\ & -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

不等式標準形 (最大化)

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

不等式標準形 (最小化)

$$\begin{aligned} \min\ & -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\ & -A\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

等式標準形 (最大化) の最適解 $\Rightarrow$ 等式標準形 (最小化) の最適解
等式標準形 (最大化) の最適解 $\Leftarrow$ 等式標準形 (最小化) の最適解
不等式標準形 (最大化) の最適解 $\Rightarrow$ 不等式標準形 (最小化) の最適解
不等式標準形 (最大化) の最適解 $\Leftarrow$ 不等式標準形 (最大化) の最適解

等式標準形 (最大化)，等式標準形 (最小化)，不等式標準形 (最大化)，
不等式標準形 (最小化) の 4 パターンのうち，いずれか 1 つの解き方を考えれば十分！

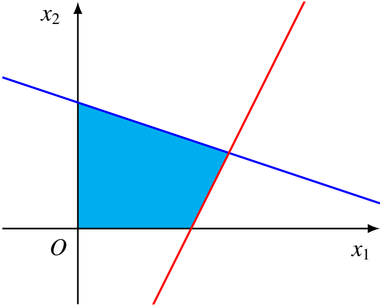
最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible)
   b. 非有界 (unbounded)

最適解による線形計画問題の分類

1. **最適解を持つ**
   a. **一意 (唯一)**
   b. 複数
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible)
   b. 非有界 (unbounded)

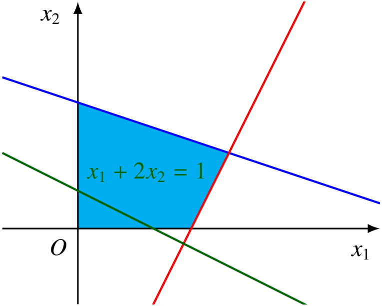
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 5 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 3 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



最適解による線形計画問題の分類

1. **最適解を持つ**
   a. **一意 (唯一)**
   b. 複数
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible)
   b. 非有界 (unbounded)

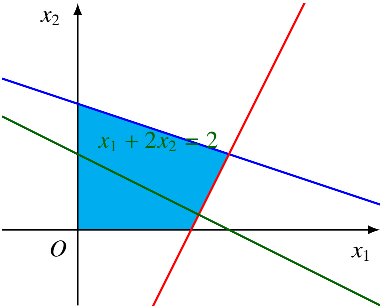
$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 3x_2 \leq 5 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 3 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$



最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible)
   b. 非有界 (unbounded)

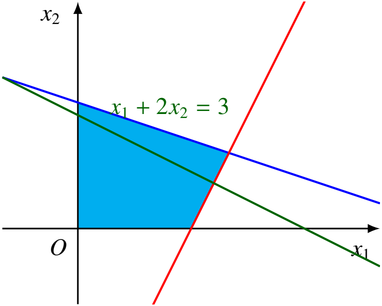
$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 3x_2 \le 5 \\
& 2x_1 - \ \ x_2 \le 3 \\
& x_1, \quad x_2 \ge 0
\end{array}
$$



最適解による線形計画問題の分類

1. **最適解を持つ**
   a. **一意 (唯一)**
   b. 複数
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible)
   b. 非有界 (unbounded)

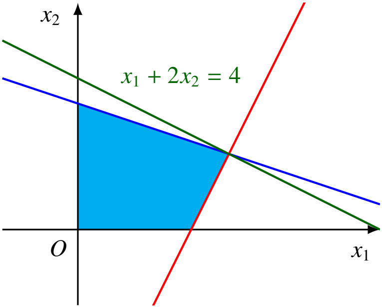
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 5 \\
& 2x_1 - \ \ x_2 \leq 3 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible)
   b. 非有界 (unbounded)

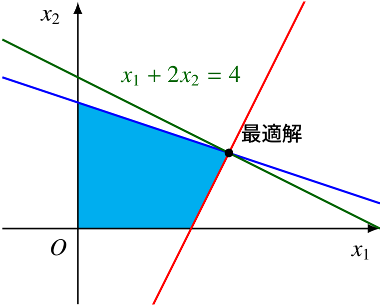
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 3x_2 \leq 5 \\
& 2x_1 - \ \ x_2 \leq 3 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$



最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible)
   b. 非有界 (unbounded)

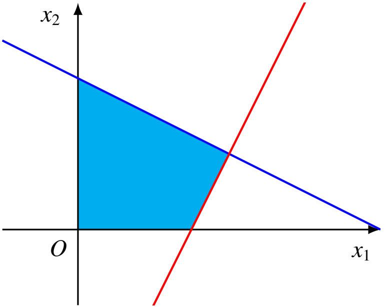
$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 3x_2 \leq 5 \\
 & 2x_1 - x_2 \leq 3 \\
 & x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$



最適解による線形計画問題の分類

1. **最適解を持つ**
   a. 一意 (唯一)
   b. **複数**
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible)
   b. 非有界 (unbounded)

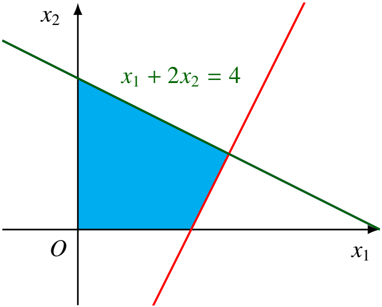
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 - \ \ x_2 \leq 3 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible)
   b. 非有界 (unbounded)

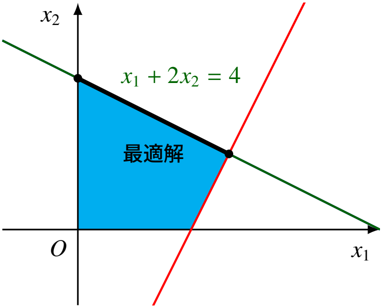
$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \le 4 \\
 & 2x_1 - x_2 \le 3 \\
 & x_1, \quad x_2 \ge 0
\end{array}
$$



最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible)
   b. 非有界 (unbounded)

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \le 4 \\
 & 2x_1 - x_2 \le 3 \\
 & x_1, \quad x_2 \ge 0
\end{array}
$$

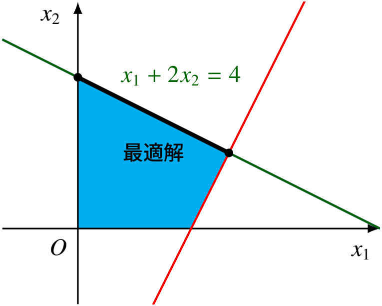


最適解による線形計画問題の分類

1. **最適解を持つ**
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数

   } 違いはあまり気しない
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible)
   b. 非有界 (unbounded)

$$
\begin{array}{rrl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \leq 4 \\
 & 2x_1 - \quad x_2 & \leq 3 \\
 & x_1, \quad x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

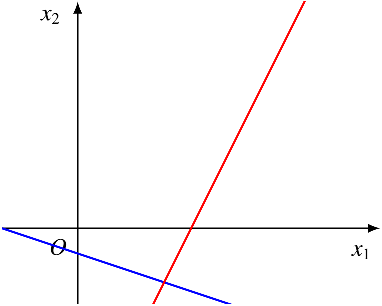


最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   - a. 一意 (唯一)
   - b. 複数

   } 違いはあまり気しない
2. **最適解を持たない**
   - a. **実行不可能 (infeasible)**
   - b. 非有界 (unbounded)

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 3x_2 \le -1 \\
 & 2x_1 - x_2 \le 3 \\
 & x_1, \quad x_2 \ge 0
\end{array}
$$

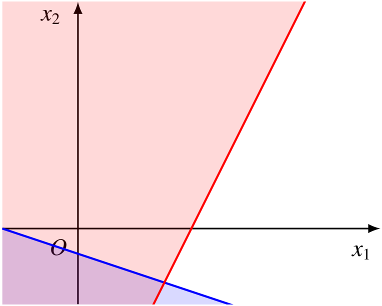


最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数

   $\}$ 違いはあまり気しない
2. **最適解を持たない**
   a. **実行不可能 (infeasible)**
   b. 非有界 (unbounded)

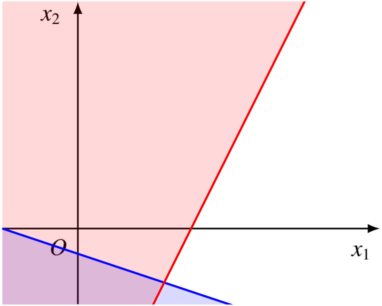
$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 3x_2 \leq -1 \\
 & 2x_1 - x_2 \leq 3 \\
 & x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$



最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数
   $\}$ 違いはあまり気しない
2. **最適解を持たない**
   a. **実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない**
   b. 非有界 (unbounded)

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 3x_2 \le -1 \\
& 2x_1 - x_2 \le 3 \\
& x_1, \quad x_2 \ge 0
\end{array}
$$

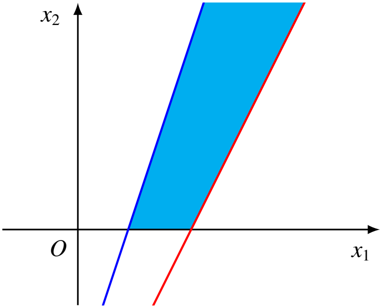


最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数

   $\Big\}$ 違いはあまり気しない
2. **最適解を持たない**
   a. 実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない
   b. **非有界 (unbounded)**

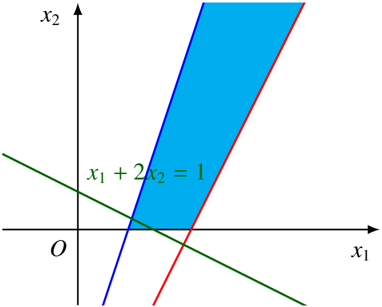
$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{s.t.} & -3x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\
& 2x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\
& x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一) } 違いはあまり気しない
   b. 複数
2. **最適解を持たない**
   a. 実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない
   b. **非有界 (unbounded)**

$$
\begin{array}{lrl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.t.} & -3x_1 + x_2 & \le -2 \\
 & 2x_1 - x_2 & \le 3 \\
 & x_1, \quad x_2 & \ge 0
\end{array}
$$

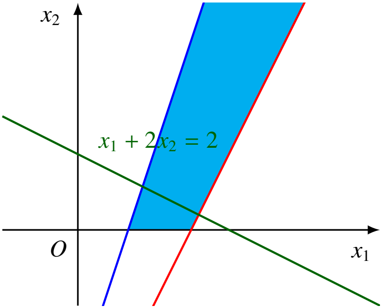


最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数

   $\Big\}$ 違いはあまり気しない
2. **最適解を持たない**
   a. 実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない
   b. **非有界 (unbounded)**

$$
\begin{array}{lrl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.t.} & -3x_1 + x_2 & \leq -2 \\
 & 2x_1 - x_2 & \leq 3 \\
 & x_1, \quad x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

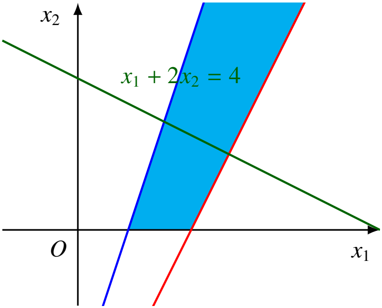


最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   - a. 一意 (唯一)
   - b. 複数

   } 違いはあまり気しない
2. **最適解を持たない**
   - a. 実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない
   - b. **非有界 (unbounded)**

$$
\begin{array}{lrcrl}
\text{max} & x_1 & + & 2x_2 & \\
\text{s.t.} & -3x_1 & + & x_2 & \leq -2 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq 3 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

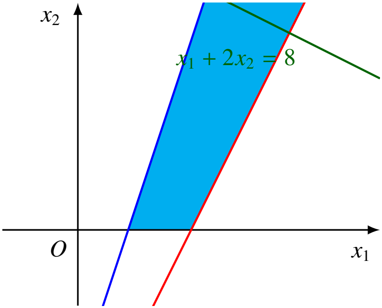


最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数

   $\left.\begin{array}{l}\text{a. 一意 (唯一)}\\ \text{b. 複数}\end{array}\right\}$ 違いはあまり気しない
2. **最適解を持たない**
   a. 実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない
   b. **非有界 (unbounded)**

$$
\begin{array}{lrl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.t.} & -3x_1 + x_2 & \leq -2 \\
 & 2x_1 - x_2 & \leq 3 \\
 & x_1, \quad x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

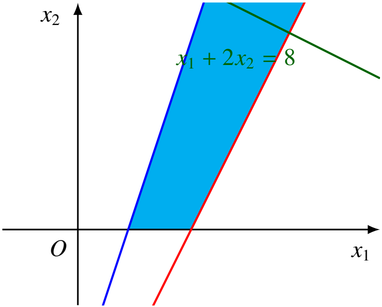


最適解による線形計画問題の分類

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数

   } 違いはあまり気しない
2. **最適解を持たない**
   a. 実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない
   b. **非有界 (unbounded) ⇒ 最適値が ∞ (最小化の場合は $-\infty$)**

$$
\begin{array}{rrcrl}
\text{max} & x_1 & + & 2x_2 & \\
\text{s.t.} & -3x_1 & + & x_2 & \le -2 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \le 3 \\
 & x_1, & & x_2 & \ge 0
\end{array}
$$



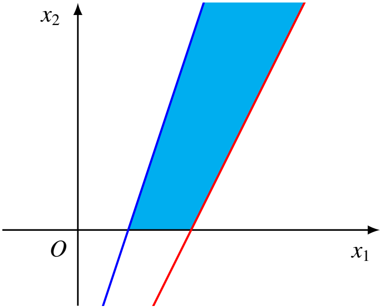
非有界な線形計画問題と非有界な実行可能領域

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数

   $\}$ 違いはあまり気にしない
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない
   b. **非有界** (unbounded) ⇒ 最適値が ∞ (最小化の場合は $-\infty$)

線形計画問題が非有界 $\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$ **実行可能領域**が非有界

$$
\begin{array}{rl}
\max & -x-2y \\
\text{s.t.} & -3x+y \le -2 \\
& 2x-y \le 3 \\
& x_1,\ x_2 \ge 0
\end{array}
$$



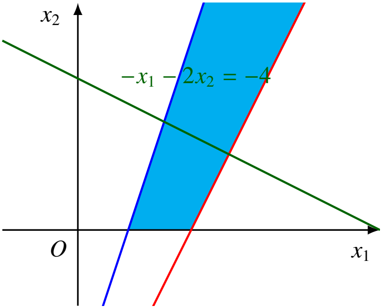
非有界な線形計画問題と非有界な実行可能領域

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数

   } 違いはあまり気にしない
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない
   b. **非有界** (unbounded) ⇒ 最適値が ∞ (最小化の場合は $-\infty$)

線形計画問題が非有界 $\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$ **実行可能領域**が非有界

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & -x - 2y \\
\text{s.t.} & -3x + y \le -2 \\
 & 2x - y \le 3 \\
 & x_1,\ x_2 \ge 0
\end{array}
$$



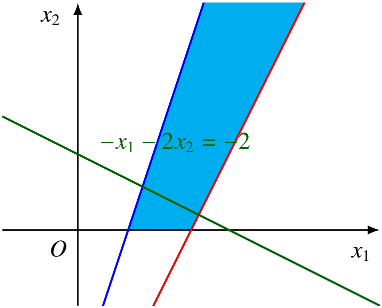
非有界な線形計画問題と非有界な実行可能領域

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数

   $\Big\}$ 違いはあまり気にしない
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない
   b. **非有界** (unbounded) ⇒ 最適値が ∞ (最小化の場合は $-\infty$)

線形計画問題が非有界 $\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$ **実行可能領域**が非有界

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & -x - 2y \\
\text{s.t.} & -3x + \ y \leq -2 \\
 & 2x - \ y \leq 3 \\
 & x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

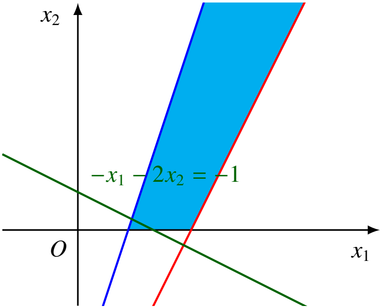


非有界な線形計画問題と非有界な実行可能領域

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一) ⎫
   b. 複数 ⎭ 違いはあまり気にしない
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない
   b. **非有界** (unbounded) ⇒ 最適値が ∞ (最小化の場合は $-\infty$)

線形計画問題が非有界 $\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$ **実行可能領域**が非有界

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & -x-2y \\
\text{s.t.} & -3x+\ y \le -2 \\
 & 2x-\ y \le 3 \\
 & x_1,\ \ x_2 \ge 0
\end{array}
$$

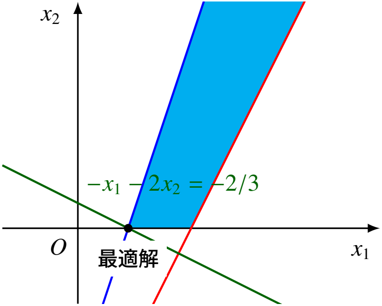


非有界な線形計画問題と非有界な実行可能領域

1. 最適解を持つ
   a. 一意 (唯一)
   b. 複数
   } 違いはあまり気にしない
2. 最適解を持たない
   a. 実行不可能 (infeasible) ⇒ 実行可能解が存在しない
   b. **非有界** (unbounded) ⇒ 最適値が ∞ (最小化の場合は $-\infty$)

線形計画問題が非有界 $\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$ **実行可能領域**が非有界

$$
\begin{array}{rl}
\max & -x-2y \\
\text{s.t.} & -3x+y \leq -2 \\
& 2x-y \leq 3 \\
& x_1,\quad x_2 \geq 0
\end{array}
$$



線形計画問題の実行可能領域

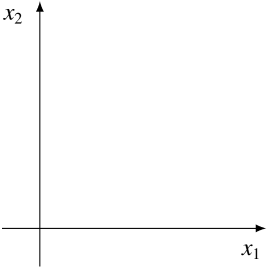
線形計画問題

$$\max \ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.} \ A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

実行可能領域 ($n = 2$)

- i ($1 \le i \le m$) 番目の制約条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$
  $\Rightarrow$ 2 次元平面を**直線** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ で分割したときの片側
- 各直線および軸 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ で切り取られた**多角形**の内部と境界



線形計画問題の実行可能領域

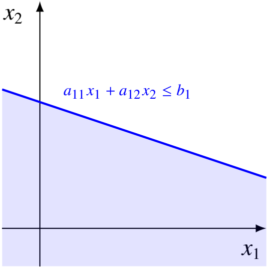
線形計画問題

$$\max \ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.} \quad A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

実行可能領域 ($n = 2$)

- i $(1 \le i \le m)$ 番目の制約条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$
  $\Rightarrow$ 2 次元平面を**直線** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ で分割したときの片側
- 各直線および軸 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ で切り取られた**多角形**の内部と境界



線形計画問題の実行可能領域

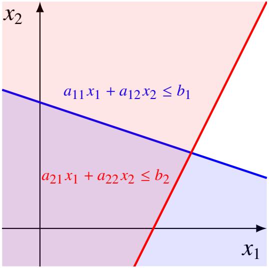
線形計画問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A: $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

実行可能領域 ($n = 2$)

- i $(1 \leq i \leq m)$ 番目の制約条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$
  $\Rightarrow$ 2 次元平面を**直線** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ で分割したときの片側
- 各直線および軸 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ で切り取られた**多角形**の内部と境界



線形計画問題の実行可能領域

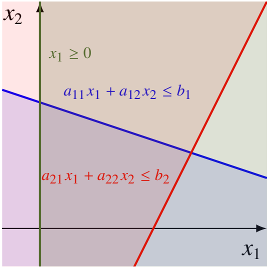
線形計画問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

実行可能領域 ($n = 2$)

- i $(1 \le i \le m)$ 番目の制約条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$
  $\Rightarrow$ 2 次元平面を**直線** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ で分割したときの片側
- 各直線および軸 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ で切り取られた**多角形**の内部と境界



線形計画問題の実行可能領域

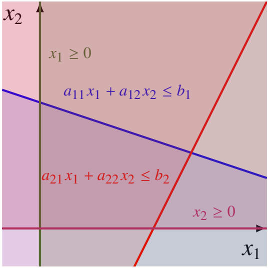
線形計画問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

実行可能領域 ($n = 2$)

- i $(1 \le i \le m)$ 番目の制約条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$
  $\Rightarrow$ 2 次元平面を**直線** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ で分割したときの片側
- 各直線および軸 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ で切り取られた**多角形**の内部と境界



線形計画問題の実行可能領域

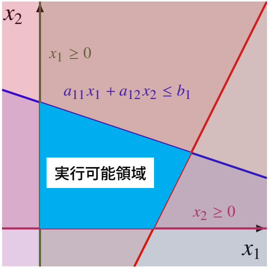
線形計画問題

$$\max \ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.} \quad A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

実行可能領域 ($n = 2$)

- i $(1 \le i \le m)$ 番目の制約条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$
  $\Rightarrow$ 2 次元平面を**直線** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ で分割したときの片側
- 各直線および軸 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ で切り取られた**多角形**の内部と境界



線形計画問題の実行可能領域

線形計画問題

$$\begin{aligned} \max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

実行可能領域 ($n = 2$)

- i $(1 \le i \le m)$ 番目の制約条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$
  $\Rightarrow$ 2 次元平面を**直線** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ で分割したときの片側
- 各直線および軸 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ で切り取られた**多角形**の内部と境界

実行可能領域 ($n = 3$)

- i $(1 \le i \le m)$ 番目の制約条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \le b_i$
  $\Rightarrow$ 3 次元空間を**平面** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ で分割したときの片側
- 各平面および平面 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ で切り取られた**多面体**の内部と境界

線形計画問題の実行可能領域

線形計画問題

$$\begin{aligned} \max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

実行可能領域 ($n = 2$)

- i $(1 \le i \le m)$ 番目の制約条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$
  $\Rightarrow$ 2 次元平面を**直線** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ で分割したときの片側
- 各直線および軸 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ で切り取られた**多角形**の内部と境界

実行可能領域 ($n = 3$)

- i $(1 \le i \le m)$ 番目の制約条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \le b_i$
  $\Rightarrow$ 3 次元空間を**平面** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ で分割したときの片側
- 各平面および平面 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ で切り取られた**多面体**の内部と境界

実行可能領域: 一般の場合

- i $(1 \le i \le m)$ 番目の制約条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$
  $\Rightarrow$ n 次元空間を**超平面** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ で分割したときの片側
- 各平面および超平面 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_n = 0$ で切り取られた**多面体**の内部と境界

線形計画問題の実行可能領域 (続き)

線形計画問題

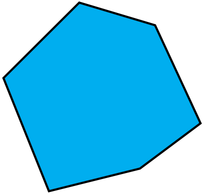
$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

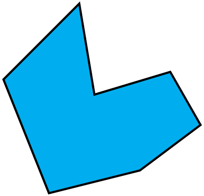
実行可能領域

- 制約条件が定める**超平面**[†] で切り取られた**多面体**[‡] の内部と境界
- 凸集合 (**凸多面体**)

[†]: hyperplane, [‡]: polyhedron



凸多面体 (凸多角形)



凸ではない多面体

線形計画問題の実行可能領域の凸性

凸集合 (convex set)

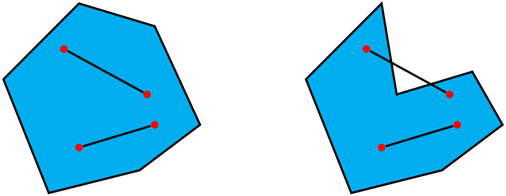
$X \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合であるとは，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ と任意の実数 t $(0 \leq t \leq 1)$ に対して

$$(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \in X$$

が成り立つこと

X が凸集合 $\Leftrightarrow$ X から任意に 2 点を選んできたとき，その 2 点を結ぶ線分が X に含まれる

$\mathbb{R}^n$: n 次元実数ベクトル全体の集合



凸多面体 (凸多角形)　　**凸ではない多面体**

線形計画問題の実行可能領域の凸性

$F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ は凸集合 (凸多面体)

$\mathbb{R}^n_+$: すべての成分が 0 以上であるような n 次元実数ベクトル全体の集合

実行可能領域の凸性の証明

線形計画問題の実行可能領域の凸性

$F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ は凸集合

$\mathbb{R}^n_+$: すべての成分が 0 以上であるような n 次元実数ベクトル全体の集合

証明

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in F$ と任意の t $(0 \leq t \leq 1)$ に対し，

$$\boldsymbol{z} = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \in F$$

が成り立つこと，つまり，$\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ と $A\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{b}$ を示す．

実行可能領域の凸性の証明

線形計画問題の実行可能領域の凸性

$F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ は凸集合

$\mathbb{R}^n_+$: すべての成分が 0 以上であるような n 次元実数ベクトル全体の集合

証明

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in F$ と任意の t $(0 \leq t \leq 1)$ に対し,

$$\boldsymbol{z} = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \in F$$

が成り立つこと，つまり，$\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ と $A\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{b}$ を示す.

1. $\boldsymbol{x} \in F$ より $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$. また，$0 \leq t \leq 1$ より $1 - t \geq 0$. よって $(1-t)\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$
2. $\boldsymbol{y} \in F$ より $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$. また，$0 \leq t \leq 1$ より $t \geq 0$. よって $t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
3. 1, 2 より $\boldsymbol{z} = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ $\Rightarrow \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ が示せた

実行可能領域の凸性の証明

線形計画問題の実行可能領域の凸性

$F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ は凸集合

$\mathbb{R}^n_+$: すべての成分が 0 以上であるような n 次元実数ベクトル全体の集合

証明

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in F$ と任意の t $(0 \leq t \leq 1)$ に対し,

$$\boldsymbol{z} = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \in F$$

が成り立つこと，つまり，$\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ と $A\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{b}$ を示す.

1. $\boldsymbol{x} \in F$ より $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$. また，$0 \leq t \leq 1$ より $1-t \geq 0$. よって $(1-t)\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$
2. $\boldsymbol{y} \in F$ より $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$. また，$0 \leq t \leq 1$ より $t \geq 0$. よって $t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
3. 1, 2 より $\boldsymbol{z} = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ **が示せた**
4. $A\boldsymbol{z} = A\{(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\} = (1-t)A\boldsymbol{x} + tA\boldsymbol{y}$
5. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in F$ より $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, A\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}$
6. 4, 5 より $A\boldsymbol{z} \leq (1-t)\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ $\Rightarrow$ $A\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{b}$ **が示せた**

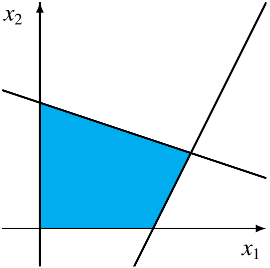
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & c^\top x \\
\text{s.t.} \quad & Ax \le b \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 $\Rightarrow$ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



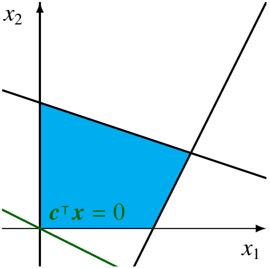
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 ⇒ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



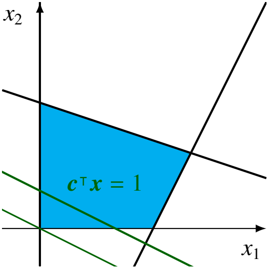
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 $\Rightarrow$ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



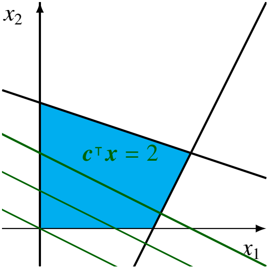
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 ⇒ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



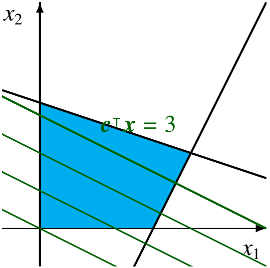
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 $\Rightarrow$ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



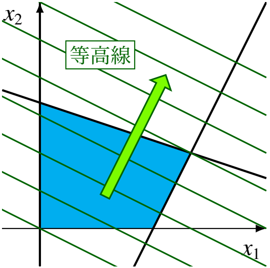
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 $\Rightarrow$ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



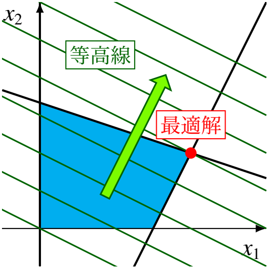
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 $\Rightarrow$ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



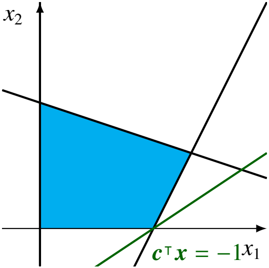
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 ⇒ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



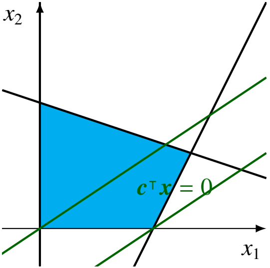
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 ⇒ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



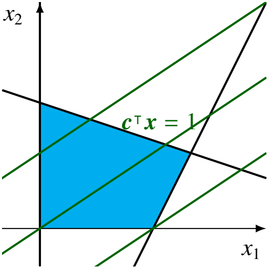
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 $\Rightarrow$ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



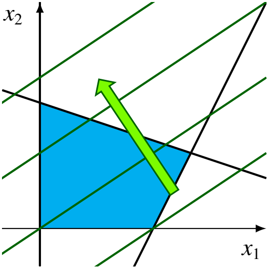
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$\begin{aligned} \max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i, j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 $\Rightarrow$ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



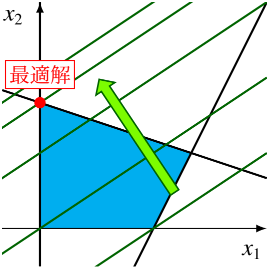
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A: $m \times n$ 行列．(i,j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 $\Rightarrow$ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



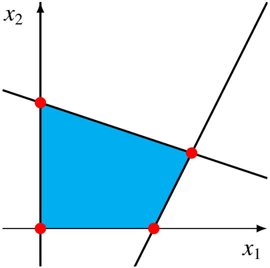
線形計画問題の目的関数

線形計画問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 x_j
A : $m \times n$ 行列．(i,j) 成分 a_{ij}
$\boldsymbol{b}$: m 次元ベクトル．第 i 成分 b_i
$\boldsymbol{c}$: n 次元ベクトル．第 j 成分 c_j

線形関数 $\Rightarrow$ ある方向に単調増加 (あるいは減少)



頂点のいずれかが最適解

線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ **端点だけに注目**
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ **端点だけに注目**
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

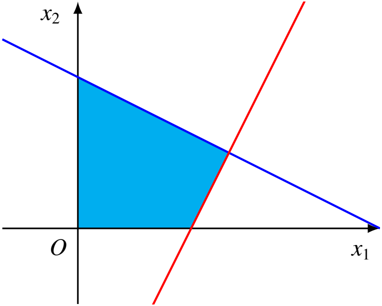
最適解が複数存在する場合は？

線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ **端点だけに注目**
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

最適解が複数存在する場合は？

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& 2x_1 - x_2 \le 3 \\
& x_1, \quad x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

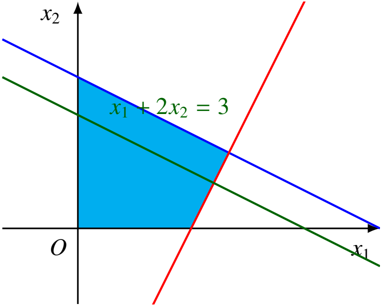


線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ **端点だけに注目**
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

最適解が複数存在する場合は？

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 - \ \ x_2 \leq 3 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

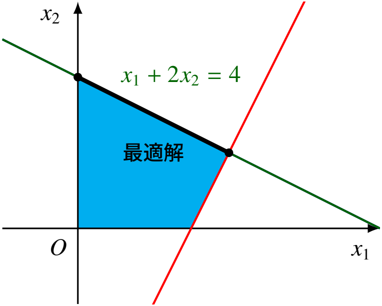


線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ **端点だけに注目**
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

最適解が複数存在する場合は？

$$
\begin{array}{rrl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \leq 4 \\
 & 2x_1 - \ \ x_2 & \leq 3 \\
 & x_1, \ \ x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

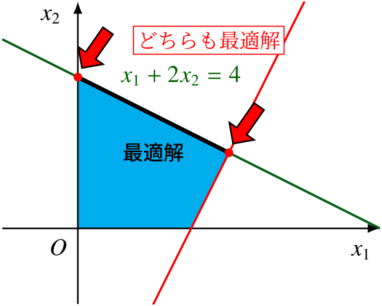


線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ **端点だけに注目**
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

最適解が複数存在する場合は？

$$
\begin{array}{rrl}
\text{max} & x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \le 4 \\
& 2x_1 - \ \ x_2 & \le 3 \\
& x_1, \ \ x_2 & \ge 0
\end{array}
$$

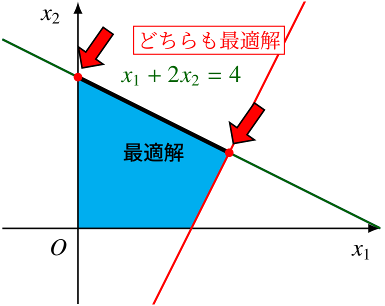


線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ **端点だけに注目**
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

最適解が複数存在する場合は？ ⇒ **ひとつの端点だけ求める**

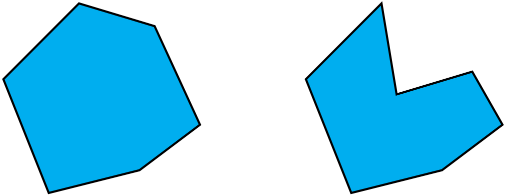
$$
\begin{array}{rrl}
\max & x_1 + 2x_2 & \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \leq 4 \\
 & 2x_1 - \ x_2 & \leq 3 \\
 & x_1, \quad x_2 & \geq 0
\end{array}
$$



線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？

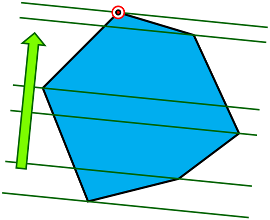


凸多面体 (凸多角形)　　**凸ではない多面体**

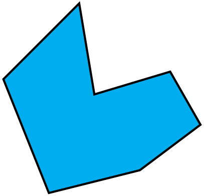
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？



凸多面体 (凸多角形)

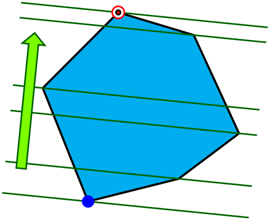


凸ではない多面体

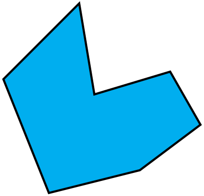
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？



凸多面体 (凸多角形)

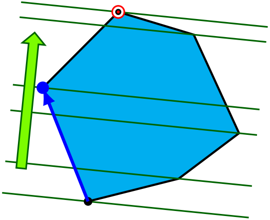


凸ではない多面体

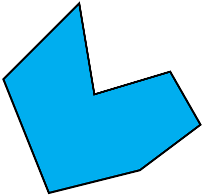
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？



凸多面体 (凸多角形)

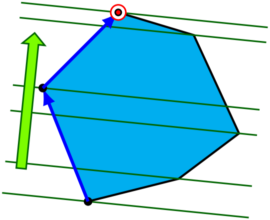


凸ではない多面体

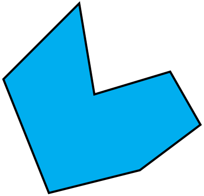
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？



凸多面体 (凸多角形)

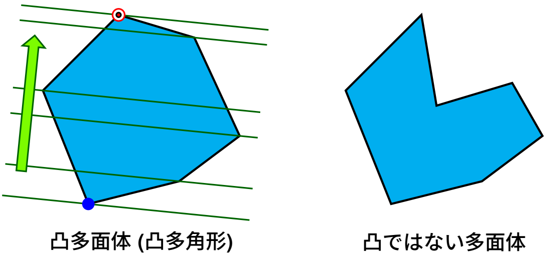


凸ではない多面体

線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

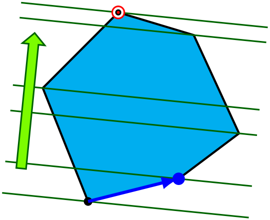
増加する順番に調べて最適解が見つかる？



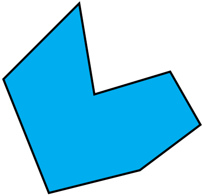
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？



凸多面体 (凸多角形)

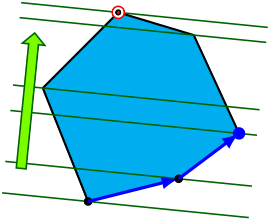


凸ではない多面体

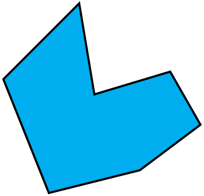
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？



凸多面体 (凸多角形)

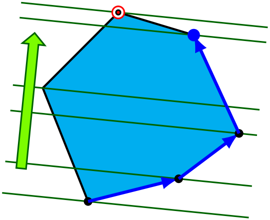


凸ではない多面体

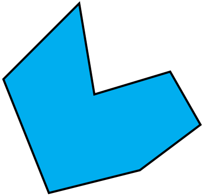
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？



凸多面体 (凸多角形)

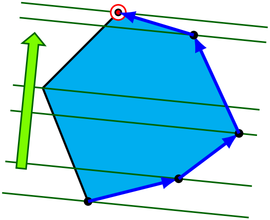


凸ではない多面体

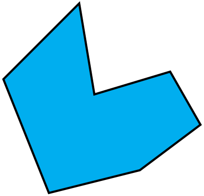
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？



凸多面体 (凸多角形)

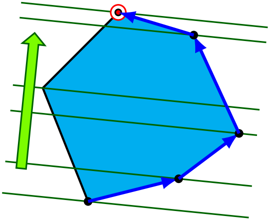


凸ではない多面体

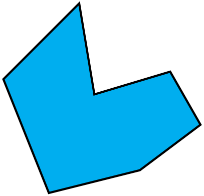
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？ ⇒ **凸なので大丈夫**



凸多面体 (凸多角形)

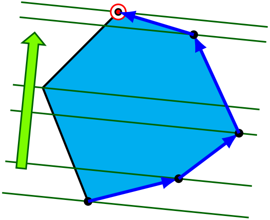


凸ではない多面体

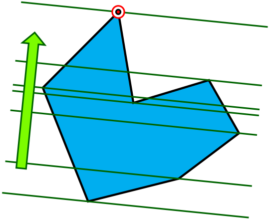
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？ ⇒ **凸なので大丈夫**



凸多面体 (凸多角形)

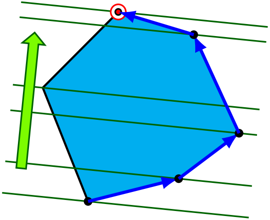


凸ではない多面体

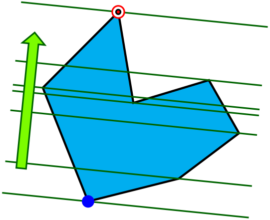
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？ ⇒ **凸なので大丈夫**



凸多面体 (凸多角形)

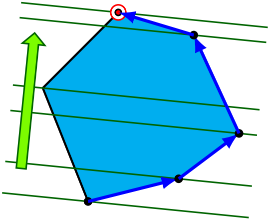


凸ではない多面体

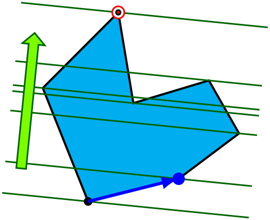
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？ ⇒ **凸なので大丈夫**



凸多面体 (凸多角形)

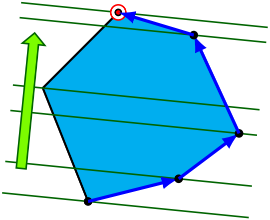


凸ではない多面体

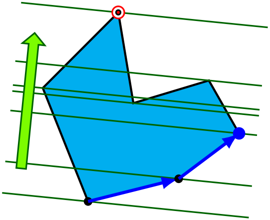
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？ ⇒ **凸なので大丈夫**



凸多面体 (凸多角形)

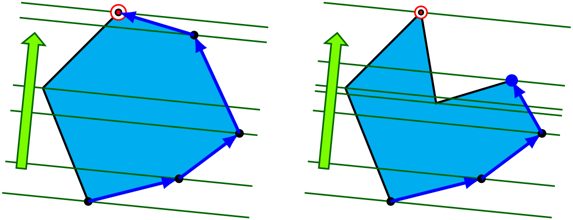


凸ではない多面体

線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？ ⇒ **凸なので大丈夫**

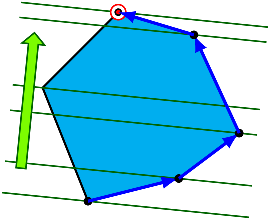


凸多面体 (凸多角形)　　　凸ではない多面体

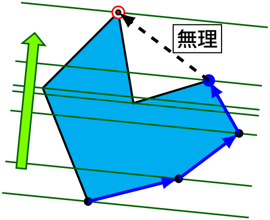
線形計画問題の解き方の基本方針

1. 実行可能領域が多面体 + 目的関数が線形
   最適解 (存在するなら) は多面体の端点 (頂点) ⇒ 端点だけに注目
2. 実行可能領域が凸多面体
   目的関数の値が毎回増加するよう，順番に端点を調べる (シンプレックス法)

増加する順番に調べて最適解が見つかる？ ⇒ **凸なので大丈夫**



凸多面体 (凸多角形)



凸ではない多面体

シンプレックス法 (単体法) の概要

シンプレックス法 (単体法, simplex method)

- ジョージ・ダンツィーグ (George Dantzig) が 1947 年に提案
- 実行可能領域の端点を効率よく調べる
- 現在でも線形計画問題を解くための方法 (解法) の標準
- 大規模な問題は内点法の方が高速

ダンツィーグ
写真

学生時代の逸話

カリフォルニア大学バークレー校の学生だったダンツィーグは，授業に遅刻してしまったため，教室の黒板に書かれた 2 つの問題を宿題だと勘違いして書き写した．普段より難しいと思いながらなんとか解いて担当教授に提出したところ，実は宿題ではなく統計学において当時は未解決だった問題で，ダンツィーグは教授と論文を出版することになった．

D.J. Albers, G.L. Alexanderson, and C. Reid (Eds.): More Mathematical People: Contemporary Conversations, Harcourt Brace Jovanovich (1990)
(邦題: アメリカの数学者たち (好田順治 訳, 青土社, 1993))

ダンツィークとノーベル賞

ノーベル賞に関する逸話

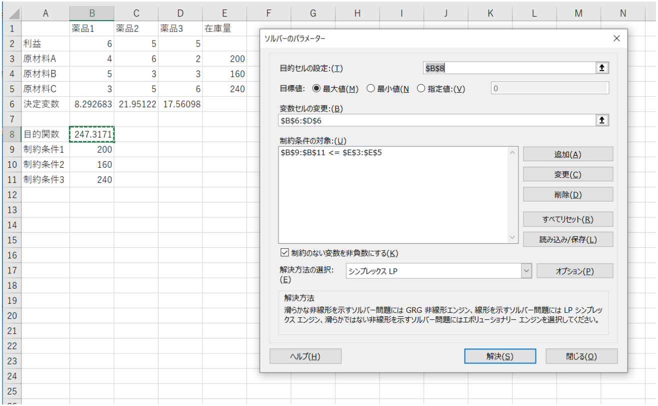
1975 年にクープマンスとカントロビッチが「資源の最適配置」に関する成果でノーベル経済学賞を受賞した．この成果には線形計画が大きな役割を果たしているにもかかわらず，ダンツィーグが共同受賞者から漏れたのは不可解だったため，クープマンスは受賞を辞退するか真剣に悩んだという．結局受賞を受け入れたものの，クープマンスは，自分が受け取った賞金の中からダンツィーグが受賞すれば受け取るはずだった分を，当時ともに仕事をしていた国際応用システム分析研究所 (International Institute for Applied Systems Analysis) に寄付した．

https://www.informs.org/Explore/History-of-O.R.-Excellence/Biographical-Profiles/Koopmans-Tjalling-C

線形計画問題のソルバーを使ってみる (Excel 編)

「ソルバー」アドインをインストールしておく
(Excel の検索窓で「ソルバー」を探せばよい)

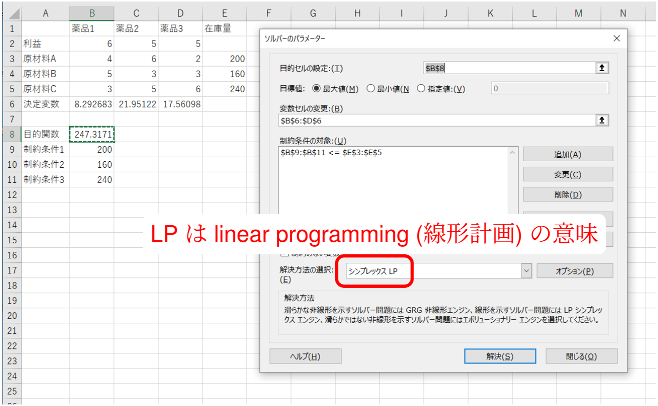
最適プロダクトミックス問題の例



線形計画問題のソルバーを使ってみる (Excel 編)

「ソルバー」アドインをインストールしておく
(Excel の検索窓で「ソルバー」を探せばよい)

最適プロダクトミックス問題の例



線形計画問題のソルバーを使ってみる (Python 編)

- 色々な方法がある
- 一例として，数値計算ライブラリ SciPy[†] を用いる方法を紹介

[†] https://scipy.org/

輸送問題の例題を解くための Python プログラム

```
from scipy.optimize import linprog

c = [0.8, 1.1, 1.4, 1.1, 0.9, 1.5]
A_ub = [[1, 1, 1, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 1, 1, 1]]
b_ub = [80, 120]
A_eq = [[1, 0, 0, 1, 0, 0],
        [0, 1, 0, 0, 1, 0],
        [0, 0, 1, 0, 0, 1]]
b_eq = [50, 40, 70]

res = linprog(c, A_ub = A_ub, b_ub = b_ub, A_eq = A_eq, b_eq = b_eq)
print(res)
```

Google Colab でのデモ [‡]

[‡] https://colab.research.google.com/drive/1NNukAO2x8irvpmSrG0wsQZFG9y-_hzjk

- その他様々なソフトウェア・プログラミング言語で利用可能
- 自分でも試してみて下さい