オペレーションズ・リサーチ I (4)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

スケジュール

No.	内容
1	オペレーションズ・リサーチと最適化，線形計画問題の基礎 (1)
2	線形計画問題の基礎 (2)，線形計画問題の標準形
3	シンプレックス (単体) 法 1
4	シンプレックス (単体) 法 2，2 段階シンプレックス法
5	双対問題，双対定理，相補性定理
6	双対シンプレックス法，感度分析
7	内点法

シンプレックス法 (単体法) のアルゴリズム

シンプレックスタブロー

$\tilde{\boldsymbol{c}}^\top$	$-\boldsymbol{c}_\mathrm{B}^\top A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$A_\mathrm{B}^{-1}A$	$A_\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

$\tilde{\boldsymbol{c}}^\top$：非基底変数の列は相対コスト係数，基底変数の列は 0.
$A_\mathrm{B}^{-1}A$：基底変数の列は標準ベクトル (まとめると単位行列)

計算手順 (最大化問題の場合)

1. **初期化**
   適当な実行可能基底解・対応するシンプレックスタブローを求める
   (実行可能基底解を求める方法が必要だが，後で考える)
2. **ピボット列の選択**
   タブローの 1 行目の要素が**正**の列 j (ピボット列) を選択
   - 複数ある場合は**絶対値**がもっとも大きい列
   - 存在しなければ最適解が求まったものとして終了
     最適解は右端の列の 2 行目以降．右端の列の 1 行目は最適値の (-1) 倍
3. **ピボット行の選択**
   タブローの右端の列の各要素を列 j の各要素で割る．
   0 以上かつ，もっとも小さい値となった行 i (ピボット行) を選択 ⇒ ピボット要素 (i, j)
4. **ピボット操作**
   行基本変形を施して，列 j のピボット要素 (i, j) 以外を 0 に，ピボット要素を 1 に変形

シンプレックス法 (単体法) のアルゴリズム

シンプレックスタブロー

$\tilde{c}^\top$	$-c_B^\top A_B^{-1} b$
$A_B^{-1} A$	$A_B^{-1} b$

$\tilde{c}^\top$：非基底変数の列は相対コスト係数，基底変数の列は 0.
$A_B^{-1} A$：基底変数の列は標準ベクトル (まとめると単位行列)

計算手順 (**最小化**問題の場合)

1. **初期化**
   適当な実行可能基底解・対応するシンプレックスタブローを求める
   (実行可能基底解を求める方法が必要だが，後で考える)
2. **ピボット列の選択**
   タブローの 1 行目の要素が**負**の列 j (ピボット列) を選択
   - 複数ある場合は**絶対値**がもっとも大きい列
   - 存在しなければ最適解が求まったものとして終了
     最適解は右端の列の 2 行目以降．右端の列の 1 行目は最適値の (-1) 倍
3. **ピボット行の選択**
   タブローの右端の列の各要素を列 j の各要素で割る．
   0 以上かつ，もっとも小さい値となった行 i (ピボット行) を選択 ⇒ ピボット要素 (i, j)
4. **ピボット操作**
   行基本変形を施して，列 j のピボット要素 (i, j) 以外を 0 に，ピボット要素を 1 に変形

練習問題

例題

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\
& 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

等式標準形

(1) 初期化

初期実行可能基底解，相対コスト係数は以下の通り

(スラック変数を基底変数とした場合，目的関数は最初から非基底変数のみで表されていることに注意)

(2) ピボット列の選択

1 行目が最大の列を選択．最大値が 0 以下なら終了

(3) ピボット行の選択

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ

(4) ピボット操作

ピボット列を，ピボット行の要素 (ピボット要素) を残して 0 にする．ピボット要素は 1 に

練習問題

例題

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & x_1 - x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + x_2 + \ \ x_3 \le 5 \\
 & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\
 & x_1,\ \ x_2,\ \ \ x_3 \ge 0
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & x_1 - x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + x_2 + \ \ x_3 + s_1 \qquad\quad = 5 \\
 & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad\quad + s_2 = 4 \\
 & x_1,\ \ x_2,\ \ \ x_3,\ \ s_1,\ \ s_2 = 0
\end{array}
$$

---

(1) 初期化

初期実行可能基底解，相対コスト係数は以下の通り

(スラック変数を基底変数とした場合，目的関数は最初から非基底変数のみで表されていることに注意)

(2) ピボット列の選択

1 行目が最大の列を選択．最大値が 0 以下なら終了

(3) ピボット行の選択

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ

(4) ピボット操作

ピボット列を，ピボット行の要素 (ピボット要素) を残して 0 にする．ピボット要素は 1 に

練習問題

例題

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 5 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + s_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2 = 0 \end{array}$$

(1) 初期化

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	1	−1	3	0	0	0
s_1	3	1	1	1	0	5
s_2	2	−1	2	0	1	4

初期実行可能基底解，相対コスト係数は以下の通り

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\boldsymbol{c}}_N = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) ピボット列の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	1	−1	3	0	0	0
s_1	3	1	1	1	0	5
s_2	2	−1	2	0	1	4

1 行目が最大の列を選択．最大値が 0 以下なら終了

(3) ピボット行の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	1	−1	3	0	0	0
s_1	3	1	1	1	0	5
s_2	2	−1	2	0	1	4

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ

(4) ピボット操作

ピボット列を，ピボット行の要素 (ピボット要素) を残して 0 にする．ピボット要素は 1 に

練習問題

例題

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 - x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\
& 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow$$

等式標準形

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 - x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 5 \\
& 2x_1 - x_2 + 2x_3 + s_2 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2 = 0
\end{array}
$$

(1) 初期化

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	1	−1	3	0	0	0
s_1	3	1	1	1	0	5
s_2	2	−1	2	0	1	4

初期実行可能基底解，相対コスト係数は以下の通り

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) ピボット列の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	1	−1	3	0	0	0
s_1	3	1	1	1	0	5
s_2	2	−1	2	0	1	4

1 行目が最大の列を選択．最大値が 0 以下なら終了

$\Rightarrow$ x_3 **の列**

(3) ピボット行の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	1	−1	3	0	0	0
s_1	3	1	1	1	0	5
s_2	2	−1	2	0	1	4

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ

(4) ピボット操作

ピボット列を，ピボット行の要素 (ピボット要素) を残して 0 にする．ピボット要素は 1 に

練習問題

例題

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\
& 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow$$

等式標準形

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 - x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 5 \\
& 2x_1 - x_2 + 2x_3 + s_2 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2 = 0
\end{aligned}
$$

(1) 初期化

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	1	−1	3	0	0	0
s_1	3	1	1	1	0	5
s_2	2	−1	2	0	1	4

初期実行可能基底解，相対コスト係数は以下の通り

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) ピボット列の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	1	−1	3	0	0	0
s_1	3	1	1	1	0	5
s_2	2	−1	2	0	1	4

1 行目が最大の列を選択．最大値が 0 以下なら終了
$\Rightarrow x_3$ **の列**

(3) ピボット行の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
	1	−1	3	0	0	0	
s_1	3	1	1	1	0	5	$5/1 = 5$
s_2	2	−1	2	0	1	4	$4/2 = 2$

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ $\Rightarrow s_2$ **の列**

(4) ピボット操作

ピボット列を，ピボット行の要素 (ピボット要素) を残して 0 にする．ピボット要素は 1 に

練習問題

例題

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 5 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + s_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2 = 0 \end{array}$$

(1) 初期化

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	1	−1	3	0	0	0
s_1	3	1	1	1	0	5
s_2	2	−1	2	0	1	4

初期実行可能基底解，相対コスト係数は以下の通り

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) ピボット列の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	1	−1	3	0	0	0
s_1	3	1	1	1	0	5
s_2	2	−1	2	0	1	4

1 行目が最大の列を選択．最大値が 0 以下なら終了

$\Rightarrow$ x_3 **の列**

(3) ピボット行の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
	1	−1	3	0	0	0	
s_1	3	1	1	1	0	5	$5/1 = 5$
s_2	2	−1	2	0	1	4	$4/2 = 2$

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ $\Rightarrow$ s_2 **の列**

(4) ピボット操作

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	−2	1/2	0	0	−3/2	−6
s_1	2	3/2	0	1	−1/2	3
x_3	1	−1/2	1	0	1/2	2

ピボット列を，ピボット行の要素 (ピボット要素) を残して 0 にする．ピボット要素は 1 に

練習問題 (続き)

(2) ピボット列の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	-2	$1/2$	0	0	$-3/2$	-6
s_1	2	$3/2$	0	1	$-1/2$	3
x_3	1	$-1/2$	1	0	$1/2$	2

1 行目が最大の列を選択．最大値が 0 以下なら終了
$\Rightarrow$ x_2 **の列**

(3) ピボット行の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
	-2	$1/2$	0	0	$-3/2$	-6	
s_1	2	$3/2$	0	1	$-1/2$	3	$3/(3/2) = 2$
x_3	1	$-1/2$	1	0	$1/2$	2	$2/(-1/2) = -4$

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ $\Rightarrow$ s_1 **の列**

(4) ピボット操作

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	$-8/3$	0	0	$-1/3$	$-4/3$	-7
x_2	$4/3$	1	0	$2/3$	$-1/3$	2
x_3	$5/3$	0	1	$1/3$	$1/3$	3

ピボット列を，ピボット行の要素 (ピボット要素) を残して 0 にする．ピボット要素は 1 に

(2) ピボット列の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	$-8/3$	0	0	$-1/3$	$-4/3$	-7
x_2	$4/3$	1	0	$2/3$	$-1/3$	2
x_3	$5/3$	0	1	$1/3$	$1/3$	3

1 行目が最大の列を選択．最大値が 0 以下なら終了
$\Rightarrow$ **終了**

解答

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 3)$，最適値 7
スラック変数は $(s_1, s_2) = (0, 0)$

練習問題その 2

例題 (最小化問題)

$$
\begin{array}{lrrrl}
\text{min} & x_1 & -\,2x_2 & +\,x_3 & \\
\text{s.t.} & x_1 & +\,x_2 & -\,2x_3 & \le 9 \\
 & -2x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & \le 6 \\
 & 3x_1 & +\,x_2 & -\,x_3 & \le 12 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \ge 0
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

等式標準形

(1) 初期化

初期実行可能基底解，相対コスト係数は以下の通り

(スラック変数を基底変数とした場合，目的関数は最初から非基底変数のみで表されていることに注意)

(2) ピボット列の選択

1 行目が**最小**の列を選択．**最小値が 0 以上**なら終了

(3) ピボット行の選択

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ

練習問題その 2

例題 (最小化問題)

$$
\begin{array}{lrl}
\text{min} & x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 & \\
\text{s.t.} & x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 & \le 9 \\
 & -2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 & \le 6 \\
 & 3x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 & \le 12 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \ge 0
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
$$

等式標準形

$$
\begin{array}{lrl}
\text{min} & x_1 - 2x_2 + x_3 & \\
\text{s.t.} & x_1 + \ \ x_2 + -2x_3 + s_1 \qquad\qquad & = 9 \\
 & -2x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad + s_2 \qquad & = 6 \\
 & 3x_1 + \ \ x_2 - x_3 \qquad\qquad + s_3 & = 12 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3 & \ge 0
\end{array}
$$

---

(1) 初期化

初期実行可能基底解，相対コスト係数は以下の通り

(スラック変数を基底変数とした場合，目的関数は最初から非基底変数のみで表されていることに注意)

(2) ピボット列の選択

1 行目が**最小**の列を選択．**最小値が 0 以上**なら終了

(3) ピボット行の選択

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ

練習問題その 2

例題 (最小化問題)

$$
\begin{array}{llllll}
\text{min} & x_1 - 2x_2 + x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 - 2x_3 \le 9 \\
 & -2x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\
 & 3x_1 + x_2 - x_3 \le 12 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow$$

等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & x_1 - 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + -2x_3 + s_1 = 9 \\
 & -2x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 6 \\
 & 3x_1 + x_2 - x_3 + s_3 = 12 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{array}
$$

(1) 初期化

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	1	−2	1	0	0	0	0
s_1	1	1	−2	1	0	0	9
s_2	−2	1	1	0	1	0	6
s_3	3	1	−1	0	0	1	12

初期実行可能基底解，相対コスト係数は以下の通り

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) ピボット列の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	1	−2	1	0	0	0	0
s_1	1	1	−2	1	0	0	9
s_2	−2	1	1	0	1	0	6
s_3	3	1	−1	0	0	1	12

1 行目が**最小**の列を選択．**最小値が 0 以上**なら終了

(3) ピボット行の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	1	−2	1	0	0	0	0
s_1	1	1	−2	1	0	0	9
s_2	−2	1	1	0	1	0	6
s_3	3	1	−1	0	0	1	12

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ

練習問題その 2

例題 (最小化問題)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 \le 9 \\ & -2x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \le 12 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + -2x_3 + s_1 = 9 \\ & -2x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 6 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 + s_3 = 12 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(1) 初期化

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	1	−2	1	0	0	0	0
s_1	1	1	−2	1	0	0	9
s_2	−2	1	1	0	1	0	6
s_3	3	1	−1	0	0	1	12

初期実行可能基底解，相対コスト係数は以下の通り

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{c}}_N = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) ピボット列の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	1	−2	1	0	0	0	0
s_1	1	1	−2	1	0	0	9
s_2	−2	1	1	0	1	0	6
s_3	3	1	−1	0	0	1	12

1 行目が**最小**の列を選択．**最小値が 0 以上**なら終了
⇒ x_2 の列

(3) ピボット行の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	1	−2	1	0	0	0	0
s_1	1	1	−2	1	0	0	9
s_2	−2	1	1	0	1	0	6
s_3	3	1	−1	0	0	1	12

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ

練習問題その 2

例題 (最小化問題)

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\text{min} & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \le 9 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \le 6 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \le 12 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \ge 0
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & x_1 - 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + -2x_3 + s_1 = 9 \\
 & -2x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 6 \\
 & 3x_1 + x_2 - x_3 + s_3 = 12 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{array}
$$

(1) 初期化

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	1	−2	1	0	0	0	0
s_1	1	1	−2	1	0	0	9
s_2	−2	1	1	0	1	0	6
s_3	3	1	−1	0	0	1	12

初期実行可能基底解，相対コスト係数は以下の通り

$$
\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{c}}_\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

(2) ピボット列の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	1	−2	1	0	0	0	0
s_1	1	1	−2	1	0	0	9
s_2	−2	1	1	0	1	0	6
s_3	3	1	−1	0	0	1	12

1 行目が**最小**の列を選択．**最小値が 0 以上**なら終了

$\Rightarrow$ **x_2 の列**

(3) ピボット行の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
	1	−2	1	0	0	0	0	
s_1	1	1	−2	1	0	0	9	$9/1 = 9$
s_2	−2	1	1	0	1	0	6	$6/1 = 6$
s_3	3	1	−1	0	0	1	12	$12/1 = 12$

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ $\Rightarrow$ **s_2 の列**

練習問題その 2(続き)

(4) ピボット操作

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	3	0	2	0	12
s_1	3	0	-3	1	-1	0	3
x_2	-2	1	1	0	1	0	6
s_3	5	0	-2	0	-1	1	6

ピボット列を，ピボット行の要素 (ピボット要素) を残して 0 にする．ピボット要素は 1 に

(2) ピボット列の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	-3	0	3	0	2	0	12
s_1	3	0	-3	1	-1	0	3
x_2	-2	1	1	0	1	0	6
s_3	5	0	-2	0	-1	1	6

1 行目が最小の列を選択．最小値が 0 以上なら終了
$\Rightarrow$ x_1 **の列**

(3) ピボット行の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
	-3	0	3	0	2	0	12	
s_1	3	0	-3	1	-1	0	3	$3/3 = 1$
x_2	-2	1	1	0	1	0	6	$6/(-2) = -3$
s_3	5	0	-2	0	-1	1	6	$6/5 = 1.2$

(右端の列)/(ピボット列) が 0 以上で，かつ最小の行を選ぶ $\Rightarrow$ s_1 **の列**

(4) ピボット操作

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	0	0	0	1	1	0	15
x_1	1	0	-1	$1/3$	$-1/3$	0	1
x_2	0	1	-1	$2/3$	$1/3$	0	8
s_3	0	0	3	$-5/3$	$2/3$	1	1

ピボット列を，ピボット行の要素 (ピボット要素) を残して 0 にする．ピボット要素は 1 に

練習問題その 2(続きその 2)

(2) ピボット列の選択

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	0	0	0	1	1	0	15
x_1	1	0	-1	$1/3$	$-1/3$	0	1
x_2	0	1	-1	$2/3$	$1/3$	0	8
s_3	0	0	3	$-5/3$	$2/3$	1	1

1 行目が最小の列を選択．最小値が 0 以下なら終了
$\Rightarrow$ 終了

解答

最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 8, 0)$，最適値 -15
スラック変数は $(s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 1)$

シンプレックス法の反復回数

基底解の数

- 決定変数 n 個，等式制約条件 m 個の場合
- n 個の非負制約から $n-m$ 個の非基底変数を選ぶ
  $\Rightarrow {}_nC_{n-m} = {}_nC_m$ 通り
- 実行可能基底解 (実行可能領域の端点) に限定してもたくさんある
  $\Rightarrow$ すべて調べるのは大変
- シンプレックス法は目的関数の増加方向に端点を辿るので，とても高速
  $\Rightarrow$ 本当?

Klee-Minty 例題

$$
\begin{array}{lll}
\text{max} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j & \\
\text{s.t.} & \displaystyle 2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \le 100^{i-1}, & i = 1, 2, \ldots, n \\
& x_i \ge 0, & i = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

シンプレックス法の反復は $2^n - 1$ 回必要
$n = 50$ のとき 1100 兆回, $n = 60$ のとき 120 京回！

シンプレックス法の反復回数

Klee-Minty 例題 ($n = 3$)

$$
\begin{array}{llcl}
\max & 100x_1 + 10x_2 + x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & \le & 1 \\
& 20x_1 + x_2 & \le & 100 \\
& 200x_1 + 20x_2 + x_3 & \le & 10000 \\
& x_1, \ x_2, \ x_3 & \ge & 0
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{llcl}
\max & 100x_1 + 10x_2 + x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + s_1 & = & 1 \\
& 20x_1 + x_2 + s_2 & = & 100 \\
& 200x_1 + 20x_2 + x_3 + s_3 & = & 10000 \\
& x_1, \ x_2, \ x_3, \ s_1, \ s_2, \ s_3 & \ge & 0
\end{array}
$$

⓪

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	100	10	1	0	0	0	0
s_1	1	0	0	1	0	0	1
s_2	20	1	0	0	1	0	100
s_3	200	20	1	0	0	1	10000

①

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	0	10	1	−100	0	0	−100
x_1	1	0	0	1	0	0	1
s_2	0	1	0	−20	1	0	80
s_3	0	20	1	−200	0	1	9800

②

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	0	0	1	100	−10	0	−900
x_1	1	0	0	1	0	0	1
x_2	0	1	0	−20	1	0	80
s_3	0	0	1	200	−20	1	8200

③

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−100	0	1	0	−10	0	−1000
s_1	1	0	0	1	0	0	1
x_2	20	1	0	0	1	0	100
s_3	−200	0	1	0	−20	1	8000

④

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	100	0	0	0	10	−1	−9000
s_1	1	0	0	1	0	0	1
x_2	20	1	0	0	1	0	100
x_3	−200	0	1	0	−20	1	8000

⑤

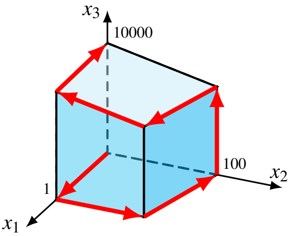
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	0	0	0	−100	10	−1	−9100
x_1	1	0	0	1	0	0	1
x_2	0	1	0	−20	1	0	80
x_3	0	0	1	200	−20	1	8200

⑥

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	0	−10	0	100	0	−1	−9900
x_1	1	0	0	1	0	0	1
s_2	0	1	0	−20	1	0	80
x_3	0	20	1	−200	0	1	9800

⑦

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	−100	−10	0	0	0	−1	−10000
s_1	1	0	0	1	0	0	1
s_2	20	1	0	0	1	0	100
x_3	200	20	1	0	0	1	10000



8 つの端点すべてを通る

基底解の退化

シンプレックス法の問題点その 1

- 相対コスト係数の絶対値が最大の列を選択する最大係数規則
  ⇒ 問題のパラメータによっては，反復回数が多くなる
- 目的関数値の改善量を最大化する最大改善規則
  ⇒ 同様の問題が知られている
- 幸いなことに，めったに起こらない
- 最大係数規則は平均的には優れている

シンプレックス法の問題点その 2

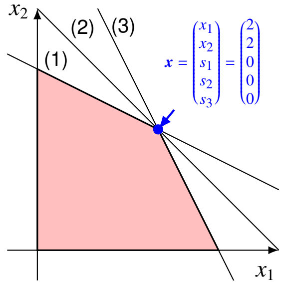
- 非基底変数の選択規則によっては，最適解に到達できない例題が存在
  ⇒ 基底解の**退化** (degeneracy) による**巡回** (cycling) の問題

基底解の退化

基底変数の中に 0 となるものが存在するとき，基底解は**退化**している (degenerate) という

退化していると何が問題?

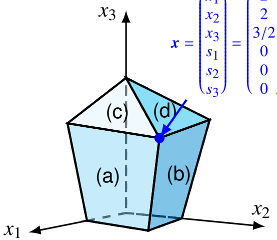
退化の例



$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcll} \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & s_1 & & & & & = & 6 & (1) \\ & x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & & & = & 4 & (2) \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & & & + & s_3 & = & 6 & (3) \\ & x_1, & & x_2, & & s_1, & & s_2, & & s_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

基底変数 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ のいずれも 0 を含む



$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcll} \text{s.t.} & 12x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & + & s_1 & & & & & & & = & 12 & (a) \\ & -3x_1 & - & 12x_2 & - & 4x_3 & & & + & s_2 & & & & & = & 12 & (b) \\ & 4x_1 & - & x_2 & + & 12x_3 & & & & & + & s_3 & & & = & 24 & (c) \\ & -x_1 & + & 4x_2 & + & 12x_3 & & & & & & & + & s_4 & = & 24 & (d) \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & s_1, & & s_2, & & s_3, & & s_4 & \geq & 0 & \end{array}$$

基底変数 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_4 \end{pmatrix}$ のいずれも 0 を含む

退化による巡回

退化による巡回 (cycling)

- 退化している基底解において，非基底変数と値 0 の基底変数を入れ替えても，解は変化しない ⇒ 複数の基底変数・非基底変数の組が同じ端点を表す
- 非基底変数と基底変数を何度入れ替えても，同じ端点を表す基底解から抜け出せない ⇒ **巡回** (cycling)
- 巡回が発生すると，シンプレックス法が無限ループに陥る

巡回が発生する例題

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcl}
\text{max} & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4 & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{11}{2}x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & + & 9x_4 & + & s_1 & & & & & = & 0 \\
 & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & x_4 & & & + & s_2 & & & = & 0 \\
 & x_1 & & & & & & & & & & & + & s_3 & = & 1 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & s_1, & & s_2, & & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

巡回の例

⓪

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	10	−57	−9	−24	0	0	0	0
s_1	1/2	−11/2	−5/2	9	1	0	0	0
s_2	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

①

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	0	53	41	−204	−20	0	0	0
x_1	1	−11	−5	18	2	0	0	0
s_2	0	4	2	−8	−1	1	0	0
s_3	0	11	5	−18	−2	0	1	1

②

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	0	0	29/2	−98	−27/4	−53/4	0	0
x_1	1	0	1/2	−4	−3/4	11/4	0	0
x_2	0	1	1/2	−2	−1/4	1/4	0	0
s_3	0	0	−1/2	4	3/4	−11/4	1	1

③

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	−29	0	0	18	15	−93	0	0
x_3	2	0	1	−8	−3/2	11	0	0
x_2	−1	1	0	2	1/2	−5	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

④

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	−20	−9	0	0	21/2	−141/2	0	0
x_3	−2	4	1	0	1/2	−9/2	0	0
x_4	−1/2	1/2	0	1	1/4	−5/4	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

⑤

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	22	−93	−21	0	0	24	0	0
s_1	−4	8	2	0	1	−9	0	0
x_4	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

⑥

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	10	−57	−9	−24	0	0	0	0
s_1	1/2	−11/2	−5/2	9	1	0	0	0
s_2	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

$\Downarrow$

元に戻った

- 非基底変数と入れ替える基底変数の候補が複数ある場合は，上の行を優先した
- 基底変数を $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ s_1 \\ s_3 \end{pmatrix}$ と選んだ基底解

$\Rightarrow$ すべて原点を表す

巡回の回避方法

ブランドの規則 (Bland's rule, 最小添字規則)

入れ替え候補が複数存在する場合，非基底変数・基底変数ともに，**添字がもっとも小さい**ものを優先

- x_1 と x_3 なら，x_1 を優先
- 決定変数が $x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_m$ の場合
  $\Rightarrow$ スラック変数 $s_1, \ldots, s_m$ は $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ とみなす
- 実はどんな順番でもよい．最初に順番を決めておくことが大事

定理

ブランドの規則を用いることで，シンプレックス法は有限回の反復で終了する

略証

- ブランドの規則を使えば，一度調べた基底変数の組には戻ってこない
- 基底変数の組の数は有限個なので，有限回で別の端点へ移動する

普通は最大係数規則でよい

- ブランドの規則は反復回数が多くなる
- 巡回はめったに起こらない

ブランドの規則の適用例

⓪

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	10	−57	−9	−24	0	0	0	0
s_1	1/2	−11/2	−5/2	9	1	0	0	0
s_2	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

①

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	0	53	41	−204	−20	0	0	0
x_1	1	−11	−5	18	2	0	0	0
s_2	0	4	2	−8	−1	1	0	0
s_3	0	11	5	−18	−2	0	1	1

②

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	0	0	29/2	−98	−27/4	−53/4	0	0
x_1	1	0	1/2	−4	−3/4	11/4	0	0
x_2	0	1	1/2	−2	−1/4	1/4	0	0
s_3	0	0	−1/2	4	3/4	−11/4	1	1

③

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	−29	0	0	18	15	−93	0	0
x_3	2	0	1	−8	−3/2	11	0	0
x_2	−1	1	0	2	1/2	−5	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

④

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	−20	−9	0	0	21/2	−141/2	0	0
x_3	−2	4	1	0	1/2	−9/2	0	0
x_4	−1/2	1/2	0	1	1/4	−5/4	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

⑤

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	22	−93	−21	0	0	24	0	0
s_1	−4	8	2	0	1	−9	0	0
x_4	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

⑥

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	10	−57	−9	−24	0	0	0	0
s_1	1/2	−11/2	−5/2	9	1	0	0	0
s_2	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

$\Downarrow$

元に戻った

ブランドの規則の適用例

⓪

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	10	−57	−9	−24	0	0	0	0
s_1	1/2	−11/2	−5/2	9	1	0	0	0
s_2	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

①

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	0	53	41	−204	−20	0	0	0
x_1	1	−11	−5	18	2	0	0	0
s_2	0	4	2	−8	−1	1	0	0
s_3	0	11	5	−18	−2	0	1	1

②

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	0	0	29/2	−98	−27/4	−53/4	0	0
x_1	1	0	1/2	−4	−3/4	11/4	0	0
x_2	0	1	1/2	−2	−1/4	1/4	0	0
s_3	0	0	−1/2	4	3/4	−11/4	1	1

③

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	−29	0	0	18	15	−93	0	0
x_3	2	0	1	−8	−3/2	11	0	0
x_2	−1	1	0	2	1/2	−5	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

④

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	−20	−9	0	0	21/2	−141/2	0	0
x_3	−2	4	1	0	1/2	−9/2	0	0
x_4	−1/2	1/2	0	1	1/4	−5/4	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

⑤

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	22	−93	−21	0	0	24	0	0
s_1	−4	8	2	0	1	−9	0	0
x_4	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

⑥

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	10	−57	−9	−24	0	0	0	0
s_1	1/2	−11/2	−5/2	9	1	0	0	0
s_2	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

$\Downarrow$

元に戻った

ブランドの規則の適用例

⓪

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	10	−57	−9	−24	0	0	0	0
s_1	1/2	−11/2	−5/2	9	1	0	0	0
s_2	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

①

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	0	53	41	−204	−20	0	0	0
x_1	1	−11	−5	18	2	0	0	0
s_2	0	4	2	−8	−1	1	0	0
s_3	0	11	5	−18	−2	0	1	1

②

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	0	0	29/2	−98	−27/4	−53/4	0	0
x_1	1	0	1/2	−4	−3/4	11/4	0	0
x_2	0	1	1/2	−2	−1/4	1/4	0	0
s_3	0	0	−1/2	4	3/4	−11/4	1	1

③

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	−29	0	0	18	15	−93	0	0
x_3	2	0	1	−8	−3/2	11	0	0
x_2	−1	1	0	2	1/2	−5	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

④

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	−20	−9	0	0	21/2	−141/2	0	0
x_3	−2	4	1	0	1/2	−9/2	0	0
x_4	−1/2	1/2	0	1	1/4	−5/4	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

⑤

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	22	−93	−21	0	0	24	0	0
s_1	−4	8	2	0	1	−9	0	0
x_4	1/2	−3/2	−1/2	1	0	1	0	0
s_3	1	0	0	0	0	0	1	1

6'

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	0	−27	1	−44	0	−20	0	0
s_1	0	−4	−2	8	1	−1	0	0
x_1	1	−3	−1	2	0	2	0	0
s_3	0	3	1	−2	0	−2	1	1

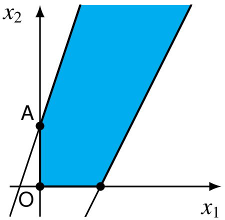
⑦

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	0	−30	0	−42	0	−18	−1	−1
s_1	0	2	0	4	1	−5	2	2
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1
x_3	0	3	1	−2	0	−2	1	1

脱出成功！

非有界な線形計画問題

目的関数値が ∞ (最大化問題), $-\infty$ (最小化問題)
$\Rightarrow$ シンプレックス法を適用するとどうなる?



$$\begin{array}{lrrl} \max & x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & -3x_1 + x_2 & \le & 1 \\ & 2x_1 - x_2 & \le & 2 \\ & x_1,\ x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrl} \max & x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & -3x_1 + x_2 + s_1 & = & 1 \\ & 2x_1 - x_2 + \quad + s_2 & = & 2 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 & \ge & 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{O}}$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
	1	2	0	0	0
s_1	−3	1	1	0	1
s_2	2	−1	0	1	2

$\boxed{\text{A}}$

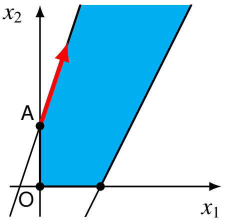
	x_1	x_2	s_1	s_2	
	7	0	−2	0	−2
x_2	−3	1	1	0	1
s_2	−1	0	1	1	3

非有界な問題

非有界な線形計画問題

目的関数値が ∞ (最大化問題), $-\infty$ (最小化問題)

$\Rightarrow$ シンプレックス法を適用するとどうなる?



$$\begin{array}{lrl} \text{max} & x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.t.} & -3x_1 + x_2 & \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 & \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{max} & x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.t.} & -3x_1 + x_2 + s_1 & = 1 \\ & 2x_1 - x_2 + \quad + s_2 & = 2 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 & \geq 0 \end{array}$$

O

	x_1	x_2	s_1	s_2	
	1	2	0	0	0
s_1	-3	1	1	0	1
s_2	2	-1	0	1	2

A

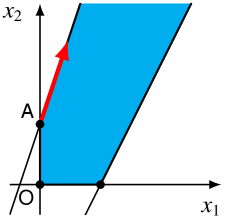
	x_1	x_2	s_1	s_2	
	7	0	-2	0	-2
x_2	-3	1	1	0	1
s_2	-1	0	1	1	3

x_1 はいくらでも大きくできる

非有界な問題

非有界な線形計画問題

目的関数値が ∞ (最大化問題), $-\infty$ (最小化問題)
$\Rightarrow$ シンプレックス法を適用するとどうなる?



$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.t.} & -3x_1 + x_2 & \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 & \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.t.} & -3x_1 + x_2 + s_1 & = 1 \\ & 2x_1 - x_2 + \quad + s_2 & = 2 \\ & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2 & \geq 0 \end{array}$$

O

	x_1	x_2	s_1	s_2	
	1	2	0	0	0
s_1	-3	1	1	0	1
s_2	2	-1	0	1	2

A

	x_1	x_2	s_1	s_2	
	7	0	-2	0	-2
x_2	-3	1	1	0	1
s_2	-1	0	1	1	3

x_1 はいくらでも大きくできる

$\Downarrow$

問題が非有界かどうか判定可能

2 段階シンプレックス法

シンプレックス法のアルゴリズム (最大化問題の場合)

1. **初期化**
   適当な実行可能基底解・対応するシンプレックスタブローを求める
   (実行可能基底解を求める方法が必要だが，後で考える)
2. **ピボット列の選択**
   タブローの 1 行目の要素が正の列 j 　(ピボット列) を選択
   - 複数ある場合は絶対値がもっとも大きい列
   - 存在しなければ最適解が求まったものとして終了
     最適解は右端の列の 2 行目以降．右端の列の 1 行目は最適値の (-1) 倍
3. **ピボット行の選択**
   タブローの右端の列の各要素を列 j の各要素で割る．
   0 以上かつ，もっとも小さい値となった行 i (ピボット行) を選択 $\Rightarrow$ ピボット要素 (i, j)
4. **ピボット操作**
   行基本変形を施して，列 j のピボット要素 (i, j) 以外を 0 に，ピボット要素を 1 に変形

2 段階シンプレックス法

シンプレックス法のアルゴリズム (最大化問題の場合)

1. **初期化**
   適当な実行可能基底解・対応するシンプレックスタブローを求める
   (実行可能基底解を求める方法が必要だが，後で考える)
2. **ピボット列の選択**
   タブローの 1 行目の要素が正の列 j (ピボット列) を選択
   - 複数ある場合は絶対値がもっとも大きい列
   - 存在しなければ最適解が求まったものとして終了
     最適解は右端の列の 2 行目以降．右端の列の 1 行目は最適値の (-1) 倍
3. **ピボット行の選択**
   タブローの右端の列の各要素を列 j の各要素で割る．
   0 以上かつ，もっとも小さい値となった行 i (ピボット行) を選択 $\Rightarrow$ ピボット要素 (i, j)
4. **ピボット操作**
   行基本変形を施して，列 j のピボット要素 (i, j) 以外を 0 に，ピボット要素を 1 に変形

- 今までは，スラック変数を基底変数とすれば実行可能基底解が得られる問題ばかり
- 実行可能基底解が簡単には求まらない問題を考える

実行可能基底解が簡単には求まらない例

実行可能基底解が簡単に求まる例

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \le 2 \\ & x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \le 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + s_1 = 2 \\ & x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + s_2 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + s_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \end{array}$$

スラック変数を基底変数に選んだ基底解 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{0}$ なので実行可能

簡単には求まらない例

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \le -3 \\ & x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \le -6 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + s_1 = -3 \\ & x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + s_2 = -6 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + s_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \end{array}$$

スラック変数を基底変数に選んだ基底解 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{0}$ ではないので**実行不可能**

2 段階シンプレックス法 (two-phase method) の手順

フェーズ I

- 元の問題に対する実行可能基底解を求めるための**新たな問題 (線形計画問題)** をつくる
- この問題にシンプレックス法を適用

フェーズ II

- 元の問題にシンプレックス法を適用
- 初期値はフェーズ 1 で求まった実行可能基底解

実行可能基底解を求めるための線形計画問題

- 制約違反量を最小化する線形計画問題 $\Rightarrow$ 制約違反量も決定変数とする
- 最適値が 0 より大きいなら，元の問題は実行不可能 $\Rightarrow$ 実行可能性も判定できる

2 段階シンプレックス法の適用例

例題

$$\begin{aligned}
\text{max}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.}\quad & -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \le -3 \\
& x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \le -6 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 6 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\text{max}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.}\quad & -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + s_1 = -3 \\
& x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + s_2 = -6 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + s_3 = 6 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{aligned}$$

準備

- ここで問題になるのは **1 番目**と **2 番目**の制約条件
  (3 番目の制約条件は，スラック変数 s_3 を基底変数に選べばよい)
- 制約条件の**右辺が 0 以上**になるよう (−1) 倍する

$$\begin{aligned}
\text{max}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - s_1 = 3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - s_2 = 6 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + s_3 = 6 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \ge 0
\end{aligned}$$

2 段階シンプレックス法の適用例 (フェーズ I・その 1)

元の問題

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1+2x_2+x_3+x_4 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1+2x_2+x_3-x_4-s_1 & = & 3 \\ & x_1+x_2+x_3+2x_4-s_2 & = & 6 \\ & x_1+2x_2+x_3+2x_4+s_3 & = & 6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ s_1,\ s_2,\ s_3 & \geq & 0 \end{array}$$

制約違反を最小化する問題 (*)

$$\begin{array}{lrcl} \min & w_1+w_2 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1+2x_2+x_3-x_4-s_1+w_1 & = & 3 \\ & x_1+x_2+x_3+2x_4-s_2+w_2 & = & 6 \\ & x_1+2x_2+x_3+2x_4+s_3 & = & 6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ w_1,\ w_2 & \geq & 0 \end{array}$$

制約違反を表す決定変数 w_1, w_2 を追加，その和を最小化する

0

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	w_1	w_2	
	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
w_1	2	2	1	−1	−1	0	0	1	0	3
w_2	−1	1	1	2	0	−1	0	0	1	6
s_3	1	2	1	2	0	0	1	0	0	6

w_1, w_2, s_3 を基底変数としてタブローを作成

0'

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	w_1	w_2	
	−1	−3	−2	−1	1	1	0	0	0	−9
w_1	2	2	1	−1	−1	0	0	1	0	3
w_2	−1	1	1	2	0	−1	0	0	1	6
s_3	1	2	1	2	0	0	1	0	0	6

1 行目 (相対コスト係数の行) は基底変数の係数が 0 でなければならないので，掃き出し
$\Rightarrow$ 2 行目と 3 行目を 1 行目から引く

- (*) の実行可能基底解に対するタブローが得られたので，準備完了
- 次は (*) をシンプレックス法で解く

2 段階シンプレックス法の適用例 (フェーズ I・その 2)

0'

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	w_1	w_2	
	−1	−3	−2	−1	1	1	0	0	0	−9
w_1	2	2	1	−1	−1	0	0	1	0	3
w_2	−1	1	1	2	0	−1	0	0	1	6
s_3	1	2	1	2	0	0	1	0	0	6

1

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	w_1	w_2	
	2	0	−1/2	−5/2	−1/2	1	0	3/2	0	−9/2
x_2	1	1	1/2	−1/2	−1/2	0	0	1/2	0	3/2
w_2	−2	0	1/2	5/2	1/2	−1	0	−1/2	1	9/2
s_3	1	0	1/2	3	1	0	1	−1	0	3

2

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	w_1	w_2	
	7/6	0	−1/2	0	1/3	1	5/6	2/3	0	−2
x_2	5/6	1	1/2	0	−1/3	0	1/6	1/3	0	2
w_2	−7/6	0	1/2	0	−1/3	−1	−5/6	1/3	1	2
x_4	−1/3	0	0	1	1/3	0	1/3	−1/3	0	1

3

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	w_1	w_2	
	2	1	0	0	0	1	1	1	0	0
x_3	5/3	2	1	0	−2/3	0	1/3	2/3	0	4
w_2	−2	−1	0	0	0	−1	−1	0	1	0
x_4	−1/3	0	0	1	1/3	0	1/3	−1/3	0	1

3'

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	w_1	w_2	
	2	1	0	0	0	1	1	1	1	0
x_3	−7/3	0	1	0	−2/3	−2	−5/3	2/3	−2	4
x_2	2	1	0	0	0	1	1	0	1	0
x_4	−1/3	0	0	1	1/3	0	1/3	−1/3	0	1

- 3でシンプレックス法終了．最適値が 0 なので，元の問題は実行可能
- 基底変数に w_2 が残ったままなので，w_1 以外の非基底変数と入れ替え
  ⇒ ここでは x_2 を選択

1 行目，w_1, w_2 の列は不要なので削除

2 段階シンプレックス法の適用例 (フェーズ II)

③"

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
x_3	$-7/3$	0	1	0	$-2/3$	-2	$-5/3$	4
x_2	2	1	0	0	0	1	1	0
x_4	$-1/3$	0	0	1	$1/3$	0	$1/3$	1

⓪

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	1	2	1	1	0	0	0	0
x_3	$-7/3$	0	1	0	$-2/3$	-2	$-5/3$	4
x_2	2	1	0	0	0	1	1	0
x_4	$-1/3$	0	0	1	$1/3$	0	$1/3$	1

1 行目に $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

0'

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	$-1/3$	0	0	0	$1/3$	0	$-2/3$	-5
x_3	$-7/3$	0	1	0	$-2/3$	-2	$-5/3$	4
x_2	2	1	0	0	0	1	1	0
x_4	$-1/3$	0	0	1	$1/3$	0	$1/3$	1

1 行目，基底変数の係数を 0 にする
⇒ 2 行目，3 行目 ×2，4 行目を引く

0'

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	$-1/3$	0	0	0	$1/3$	0	$-2/3$	-5
x_3	$-7/3$	0	1	0	$-2/3$	-2	$-5/3$	4
x_2	2	1	0	0	0	1	1	0
x_4	$-1/3$	0	0	1	$1/3$	0	$1/3$	1

準備完了．シンプレックス法を適用

①

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	0	0	0	-1	0	0	-1	-6
x_3	-3	0	1	2	0	-2	-1	6
x_2	2	1	0	0	0	1	1	0
s_1	-1	0	0	3	1	0	1	3

終了．
最適値 -6
最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 6, 0)$
最適スラック変数 $(s_1, s_2, s_3) = (3, 0, 0)$

練習問題

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\
& 2x_1 + x_2 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{array}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

制約違反 $w_1 + w_2$ を最小化する問題

w_1, w_2 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
w_1						
w_2						

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．
フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
w_1						
w_2						

1

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	

2

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	

不要な 1 行目と w_1, w_2 の列を削除すれば，
フェーズ I 終了

練習問題

練習問題

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\
& 2x_1 + x_2 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\
& 2x_1 + x_2 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

制約違反 $w_1 + w_2$ を最小化する問題

w_1, w_2 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
w_1						
w_2						

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．
フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
w_1						
w_2						

1

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	

2

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	

不要な 1 行目と w_1, w_2 の列を削除すれば，
フェーズ I 終了

練習問題

練習問題

$$\begin{array}{rl} \text{max} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ & 2x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{rl} \text{max} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

制約違反 $w_1 + w_2$ を最小化する問題

$$\begin{array}{rl} \text{min} & +w_1 + w_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + w_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ w_1,\ w_2 \geq 0 \end{array}$$

w_1, w_2 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
w_1						
w_2						

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．
フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
w_1						
w_2						

1

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	

2

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	

不要な 1 行目と w_1, w_2 の列を削除すれば，
フェーズ I 終了

練習問題

練習問題

$$\begin{array}{rl} \text{max} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ & 2x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{rl} \text{max} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

制約違反 $w_1 + w_2$ を最小化する問題

$$\begin{array}{rl} \text{min} & +w_1 + w_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + w_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ w_1,\ w_2 \geq 0 \end{array}$$

w_1, w_2 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
	0	0	0	1	1	0
w_1	1	-1	2	1	0	3
w_2	2	1	0	0	1	4

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す.
フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
w_1						
w_2						

1

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	

2

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	

不要な 1 行目と w_1, w_2 の列を削除すれば,
フェーズ I 終了

練習問題

練習問題

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 - 2x_3 & = & -3 \\ & 2x_1 + x_2 & = & 4 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ & 2x_1 + x_2 & = & 4 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

制約違反 $w_1 + w_2$ を最小化する問題

$$\begin{array}{lrcl} \min & + w_1 + w_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 & = & 3 \\ & 2x_1 + x_2 + w_2 & = & 4 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3, \ w_1, \ w_2 & \geq & 0 \end{array}$$

w_1, w_2 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
	0	0	0	1	1	0
w_1	1	−1	2	1	0	3
w_2	2	1	0	0	1	4

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．
フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
	−3	0	−2	0	0	−7
w_1	1	−1	2	1	0	3
w_2	2	1	0	0	1	4

1

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	

2

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	

不要な 1 行目と w_1, w_2 の列を削除すれば，
フェーズ I 終了

練習問題

練習問題

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\
& 2x_1 + x_2 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\
& 2x_1 + x_2 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

制約違反 $w_1 + w_2$ を最小化する問題

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & + w_1 + w_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 = 3 \\
& 2x_1 + x_2 + w_2 = 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ w_1,\ w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

w_1, w_2 を基底変数としたタブロー

0

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
	0	0	0	1	1	0
w_1	1	−1	2	1	0	3
w_2	2	1	0	0	1	4

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．
フェーズ I スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
	−3	0	−2	0	0	−7
w_1	1	−1	2	1	0	3
w_2	2	1	0	0	1	4

1

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
	0	3/2	−2	0	3/2	−1
w_1	0	−3/2	2	1	−1/2	1
x_1	1	1/2	0	0	1/2	2

2

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
	0	0	0	1	1	0
x_3	0	−3/4	1	1/2	−1/4	1/2
x_1	1	1/2	0	0	1/2	2

不要な 1 行目と w_1, w_2 の列を削除すれば，
フェーズ I 終了

練習問題 (続き)

練習問題

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ & 2x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

制約違反 $w_1 + w_2$ を最小化する問題

$$\begin{array}{ll} \min & w_1 + w_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + w_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ w_1,\ w_2 \geq 0 \end{array}$$

2'

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	−3/4	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

フェーズ I で得られたタブローに $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

0

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	−3/4	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．
フェーズ II スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	−3/4	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

1

	x_1	x_2	x_3	

フェーズ II 終了．最適値は
最適解は

練習問題

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ & 2x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

制約違反 $w_1 + w_2$ を最小化する問題

$$\begin{array}{ll} \min & w_1 + w_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + w_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ w_1,\ w_2 \geq 0 \end{array}$$

2'

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	$-3/4$	1	$1/2$
x_1	1	$1/2$	0	2

フェーズ I で得られたタブローに $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

0

	x_1	x_2	x_3	
	1	2	2	0
x_3	0	$-3/4$	1	$1/2$
x_1	1	$1/2$	0	2

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．
フェーズ II スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	$-3/4$	1	$1/2$
x_1	1	$1/2$	0	2

1

	x_1	x_2	x_3	

フェーズ II 終了．最適値は
最適解は

練習問題 (続き)

練習問題

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 - 2x_3 & = -3 \\ & 2x_1 + x_2 & = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 & = 3 \\ & 2x_1 + x_2 & = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq 0 \end{array}$$

制約違反 $w_1 + w_2$ を最小化する問題

$$\begin{array}{lrl} \min & w_1 + w_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 & = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + w_2 & = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ w_1,\ w_2 & \geq 0 \end{array}$$

2'

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	−3/4	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

フェーズ I で得られたタブローに $c^\top$ を追加

0

	x_1	x_2	x_3	
	1	2	2	0
x_3	0	−3/4	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．
フェーズ II スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	
	0	3	0	−3
x_3	0	−3/4	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

1

x_1	x_2	x_3	

フェーズ II 終了．最適値は
最適解は

練習問題 (続き)

練習問題

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 - 2x_3 & = -3 \\ & 2x_1 + x_2 & = 4 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 & \geq 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{lrl} \max & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 & = 3 \\ & 2x_1 + x_2 & = 4 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3 & \geq 0 \end{array}$$

制約違反 $w_1 + w_2$ を最小化する問題

$$\begin{array}{lrl} \min & w_1 + w_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 & = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + w_2 & = 4 \\ & x_1, \ x_2, \ x_3, \ w_1, \ w_2 & \geq 0 \end{array}$$

2'

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	−3/4	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

フェーズ I で得られたタブローに $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

0

	x_1	x_2	x_3	
	1	2	2	0
x_3	0	−3/4	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す．
フェーズ II スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	
	0	3	0	−3
x_3	0	−3/4	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

1

	x_1	x_2	x_3	
	−6	0	0	−15
x_3	−3/2	0	1	7/2
x_2	2	1	0	4

フェーズ II 終了．最適値は
最適解は

練習問題 (続き)

練習問題

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ & 2x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

制約条件の右辺を 0 以上に揃える

$$\begin{array}{ll} \text{max} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

制約違反 $w_1 + w_2$ を最小化する問題

$$\begin{array}{ll} \text{min} & w_1 + w_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + w_2 = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ w_1,\ w_2 \geq 0 \end{array}$$

2'

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	$-3/4$	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

フェーズ I で得られたタブローに $\boldsymbol{c}^\top$ を追加

0

	x_1	x_2	x_3	
	1	2	2	0
x_3	0	$-3/4$	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

1 行目の基底変数の係数を 0 に掃き出す.
フェーズ II スタート

0'

	x_1	x_2	x_3	
	0	3	0	-3
x_3	0	$-3/4$	1	1/2
x_1	1	1/2	0	2

1

	x_1	x_2	x_3	
	-6	0	0	-15
x_3	$-3/2$	0	1	7/2
x_2	2	1	0	4

フェーズ II 終了．最適値は 11,
最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (0, 4, 7/2)$