

## オペレーションズ・リサーチ I (6)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

本文書のライセンスは CC-BY-SA にしています



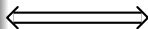
## スケジュール

No.	内容
1	オペレーションズ・リサーチと最適化，線形計画問題の基礎 (1)
2	線形計画問題の基礎 (2)，線形計画問題の標準形
3	シンプレックス (単体) 法 1
4	シンプレックス (単体) 法 2，2 段階シンプレックス法
5	双対問題，双対定理，相補性定理
6	双対シンプレックス法，感度分析
7	内点法

# シンプレックスタブローの関係

## 例題

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 - 2x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 - x_2 \leq 2 \\
 & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

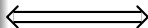


## 双対問題

$$\begin{aligned}
 \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\
 & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 - 2x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\
 & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\
 & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{aligned}$$



## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned}
 \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\
 & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\
 & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

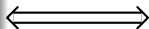
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_3$	0	1	0	-3	1	3

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$t_1$	$t_2$	
	5	0	3	2	0	-2
$t_2$	1	0	-1	1	1	1
$y_2$	-2	1	3	-1	0	1

# シンプレックスタブローの関係

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

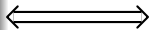


## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_3 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



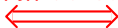
## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + 2y_2 + 9y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2y_1 + y_2 + 3y_3 - t_1 = 1 \\ & y_1 - y_2 - 2y_3 - t_2 = -2 \\ & y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_3$	0	1	0	-3	1	3

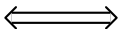
関係ありそう



	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$t_1$	$t_2$	
	5	0	3	2	0	-2
$t_2$	1	0	-1	1	1	1
$y_2$	-2	1	3	-1	0	1

## シンプレックスタブローの関係 (続き)

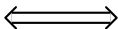
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$t_1$	$t_2$	
	5	0	3	2	0	-2
$t_2$	1	0	-1	1	1	1
$y_2$	-2	1	3	-1	0	1

## シンプレックスタブローの関係 (続き)

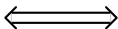
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$t_1$	$t_2$	
	5	0	3	2	0	-2
$t_2$	1	0	-1	1	1	1
$y_2$	-2	1	3	-1	0	1

## シンプレックスタブローの関係 (続き)

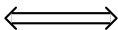
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$t_1$	$t_2$	
	5	0	3	2	0	-2
$t_2$	1	0	-1	1	1	1
$y_2$	-2	1	3	-1	0	1

変数の順序を入れ替える

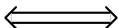
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$t_1$	$t_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
	2	0	5	0	3	-2
$t_2$	1	1	1	0	-1	1
$y_2$	-1	0	-2	1	3	1

## シンプレックスタブローの関係 (続き)

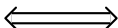
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$t_1$	$t_2$	
	5	0	3	2	0	-2
$t_2$	1	0	-1	1	1	1
$y_2$	-2	1	3	-1	0	1

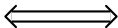
変数の順序を入れ替える

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$t_1$	$t_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
	2	0	5	0	3	-2
$t_2$	1	1	1	0	-1	1
$y_2$	-1	0	-2	1	3	1

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3

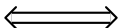


		$t_2$	$y_2$
$t_1$	2	1	-1
$t_2$	0	1	0
$y_1$	5	1	-2
$y_2$	0	0	1
$y_3$	3	-1	3
	-2	1	1



## シンプレックスタブローの関係 (続き)

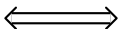
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$t_1$	$t_2$	
	5	0	3	2	0	-2
$t_2$	1	0	-1	1	1	1
$y_2$	-2	1	3	-1	0	1

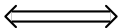
変数の順序を入れ替える

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$t_1$	$t_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
	2	0	5	0	3	-2
$t_2$	1	1	1	0	-1	1
$y_2$	-1	0	-2	1	3	1

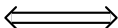
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



		$t_2$	$y_2$
$t_1$	2	1	-1
$t_2$	0	1	0
$y_1$	5	1	-2
$y_2$	0	0	1
$y_3$	3	-1	3
	-2	1	1

## シンプレックスタブローの関係 (続き)

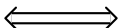
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



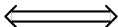
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$t_1$	$t_2$	
	5	0	3	2	0	-2
$t_2$	1	0	-1	1	1	1
$y_2$	-2	1	3	-1	0	1

変数の順序を入れ替える

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$t_1$	$t_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
	2	0	5	0	3	-2
$t_2$	1	1	1	0	-1	1
$y_2$	-1	0	-2	1	3	1

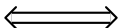


	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3

		$t_2$	$y_2$
$t_1$	2	1	-1
$t_2$	0	1	0
$y_1$	5	1	-2
$y_2$	0	0	1
$y_3$	3	-1	3
	-2	1	1

## シンプレックスタブローの関係 (続き)

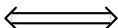
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



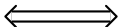
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$t_1$	$t_2$	
	5	0	3	2	0	-2
$t_2$	1	0	-1	1	1	1
$y_2$	-2	1	3	-1	0	1

変数の順序を入れ替える

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$t_1$	$t_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
	2	0	5	0	3	-2
$t_2$	1	1	1	0	-1	1
$y_2$	-1	0	-2	1	3	1

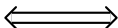


	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3

		$t_2$	$y_2$
$t_1$	2	1	-1
$t_2$	0	1	0
$y_1$	5	1	-2
$y_2$	0	0	1
$y_3$	3	-1	3
	-2	1	1

## シンプレックスタブローの関係 (続き)

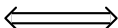
	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$t_1$	$t_2$	
	5	0	3	2	0	-2
$t_2$	1	0	-1	1	1	1
$y_2$	-2	1	3	-1	0	1

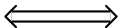
変数の順序を入れ替える

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



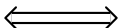
	$t_1$	$t_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
	2	0	5	0	3	-2
$t_2$	1	1	1	0	-1	1
$y_2$	-1	0	-2	1	3	1

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-1	0	-1	0	-2
$x_1$	1	-1	0	1	0	2
$s_1$	0	-1	1	2	0	5
$s_3$	0	1	0	-3	1	3



	$t_2$	$y_2$
$t_1$	2	1
$t_2$	0	1
$y_1$	5	1
$y_2$	0	0
$y_3$	3	-1
	-2	1

	$x_1$	$s_1$	$s_3$	$x_2$	$s_2$	
	0	0	0	-1	-1	-2
$x_1$	1	0	0	-1	1	2
$s_1$	0	1	0	-1	2	5
$s_3$	0	0	1	1	-3	3



	$t_2$	$y_2$
$t_2$	0	1
$y_2$	0	0
$t_1$	2	1
$y_1$	5	1
$y_3$	3	-1
	-2	1

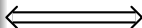
## 辞書の関係

### 主問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

### 基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{s.t.} \quad & A_B x_B + A_N x_N = b \\ & x_B, \quad x_N \geq 0 \end{aligned}$$

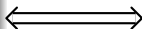


### 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A_B^T y \geq c_B \\ & A_N^T y \geq c_N \end{aligned}$$

### 基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{s.t.} \quad & A_B x_B + A_N x_N = b \\ & x_B, \quad x_N \geq 0 \end{aligned}$$



### 双対問題 (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A_B^T y - s_B = c_B \\ & A_N^T y - s_N = c_N \\ & s_B, \quad s_N \geq 0 \end{aligned}$$

## 辞書の関係 (続き)

基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

双対問題 (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B^\top \mathbf{y} - \mathbf{s}_B = \mathbf{c}_B \\ & \mathbf{A}_N^\top \mathbf{y} - \mathbf{s}_N = \mathbf{c}_N \\ & \mathbf{s}_B, \mathbf{s}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

y: 消去  
 $\mathbf{s}_N$ : 基底変数  
 $\mathbf{s}_B$ : 非基底変数

辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\}^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \end{aligned}$$

辞書

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (\mathbf{A}_B^{-1})^\top \mathbf{c}_B + (\mathbf{A}_B^{-1})^\top \mathbf{s}_B \\ g &= \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b})^\top \mathbf{c}_B + (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b})^\top \mathbf{s}_B \\ \mathbf{s}_N &= -\mathbf{c}_N + \mathbf{A}_N^\top \mathbf{y} \\ &= -\left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\} + (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{s}_B \end{aligned}$$

$(\mathbf{X}^\top)^{-1} = (\mathbf{X}^{-1})^\top$  に注意

## 辞書の関係 (続き)

基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

双対問題 (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B^\top \mathbf{y} - \mathbf{s}_B = \mathbf{c}_B \\ & \mathbf{A}_N^\top \mathbf{y} - \mathbf{s}_N = \mathbf{c}_N \\ & \mathbf{s}_B, \mathbf{s}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

y: 消去

$\mathbf{s}_N$ : 基底変数

$\mathbf{s}_B$ : 非基底変数

辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\}^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \end{aligned}$$

辞書

$$\begin{aligned} g &= (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b})^\top \mathbf{c}_B + (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b})^\top \mathbf{s}_B \\ \mathbf{s}_N &= -\left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\} + (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{s}_B \end{aligned}$$

## 辞書の関係 (続き)

基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

双対問題 (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B^\top \mathbf{y} - \mathbf{s}_B = \mathbf{c}_B \\ & \mathbf{A}_N^\top \mathbf{y} - \mathbf{s}_N = \mathbf{c}_N \\ & \mathbf{s}_B, \quad \mathbf{s}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

y: 消去  
 $\mathbf{s}_N$ : 基底変数  
 $\mathbf{s}_B$ : 非基底変数

辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\}^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \end{aligned}$$

辞書

$$\begin{aligned} g &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b})^\top \mathbf{s}_B \\ \mathbf{s}_N &= -\left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\} + (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{s}_B \end{aligned}$$



## 辞書の関係 (続き)

基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

双対問題 (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B^\top \mathbf{y} - \mathbf{s}_B = \mathbf{c}_B \\ & \mathbf{A}_N^\top \mathbf{y} - \mathbf{s}_N = \mathbf{c}_N \\ & \mathbf{s}_B, \mathbf{s}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

y: 消去  
s<sub>N</sub>: 基底変数  
s<sub>B</sub>: 非基底変数

辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\}^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \end{aligned}$$

実行可能:  $\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

最適:  $\tilde{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \leq \mathbf{0}$

辞書

$$\begin{aligned} g &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b})^\top \mathbf{s}_B \\ \mathbf{s}_N &= -\left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\} + (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{s}_B \end{aligned}$$

実行可能:  $\tilde{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \leq \mathbf{0}$

最適:  $\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

## 辞書の関係 (続き)

基底・非基底変数に分解

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

双対問題 (等式制約版)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_B^\top \mathbf{y} - \mathbf{s}_B = \mathbf{c}_B \\ & \mathbf{A}_N^\top \mathbf{y} - \mathbf{s}_N = \mathbf{c}_N \\ & \mathbf{s}_B, \mathbf{s}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

y: 消去  
s<sub>N</sub>: 基底変数  
s<sub>B</sub>: 非基底変数

辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\}^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \end{aligned}$$

実行可能:  $\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

最適:  $\tilde{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \leq \mathbf{0}$

辞書

$$\begin{aligned} g &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b})^\top \mathbf{s}_B \\ \mathbf{s}_N &= -\left\{ \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \right\} + (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{s}_B \end{aligned}$$

実行可能:  $\tilde{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B \leq \mathbf{0}$

最適:  $\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

双対実行可能 (dual feasible)

主問題の基底解  $(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)$  が  $\tilde{\mathbf{c}}_N \leq \mathbf{0}$  を満たす

## 双対シンプレックス法

- 主問題に対するシンプレックスタブローを用いて双対問題を解く
- 双対実行可能な基底解を辿る．主問題に対して実行可能となれば終了
- 双対問題において非基底変数を基底変数と入れ替える  
⇔ 主問題において基底変数を非基底変数と入れ替える

双対シンプレックス法 (dual simplex method) : **最大化**問題の場合

- **初期化**

適当な**双対**実行可能基底解・対応するシンプレックスタブローを求める

- **ピボット行の選択**

タブローの**右端の列**の要素が**負**の**行  $i$**  (ピボット**行**) を選択

- 複数ある場合は絶対値がもっとも大きい**行**
- 存在しなければ最適解が求まったものとして終了  
最適解は右端の列の 2 行目以降．右端の列の 1 行目は最適値の  $(-1)$  倍

- **ピボット列の選択**

**1 行目の非基底変数の列**の要素を**行  $i$** の各要素で割る．0 以上かつ、もっとも小さい値となった**列  $j$**  (ピボット**列**) を選択 ⇒ ピボット要素  $(i, j)$

- **ピボット操作**

行基本変形を施して、列  $j$  のピボット要素  $(i, j)$  以外を 0 に、ピボット要素を 1 に変形

## 双対シンプレックス法

- 主問題に対するシンプレックスタブローを用いて双対問題を解く
- 双対実行可能な基底解を辿る．主問題に対して実行可能となれば終了
- 双対問題において非基底変数を基底変数と入れ替える  
⇔ 主問題において基底変数を非基底変数と入れ替える

双対シンプレックス法 (dual simplex method) : **最小化**問題の場合

- **初期化**

適当な**双対**実行可能基底解・対応するシンプレックスタブローを求める

- **ピボット行の選択**

タブローの**右端の列**の要素が**正**の**行  $i$**  (ピボット**行**) を選択

- 複数ある場合は絶対値がもっとも大きい**行**
- 存在しなければ最適解が求まったものとして終了  
最適解は右端の列の 2 行目以降．右端の列の 1 行目は最適値の  $(-1)$  倍

- **ピボット列の選択**

**1 行目の非基底変数の列**の要素を**行  $i$** の各要素で割る．0 以上かつ、もっとも小さい値となった**列  $j$**  (ピボット**列**) を選択 ⇒ ピボット要素  $(i, j)$

- **ピボット操作**

行基本変形を施して、列  $j$  のピボット要素  $(i, j)$  以外を 0 に、ピボット要素を 1 に変形

## 双対シンプレックス法の例その1

### 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \leq -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

### 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$s_1, s_2$  を基底変数としたタブローは双対実行可能

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-1	-2	-1	0	0	0
$s_1$	-1	1	1	1	0	-1
$s_2$	1	-2	-3	0	1	-3

## 双対シンプレックス法の例その1

### 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \leq -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

### 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$s_1, s_2$  を基底変数としたタブローは双対実行可能

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-1	-2	-1	0	0	0
$s_1$	-1	1	1	1	0	-1
$s_2$	1	-2	-3	0	1	-3

# 双対シンプレックス法の例その1

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \leq -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$s_1, s_2$  を基底変数としたタブローは双対実行可能

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-1	-2	-1	0	0	0
$s_1$	-1	1	1	1	0	-1
$s_2$	1	-2	-3	0	1	-3

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & -y_1 - 3y_2 \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 + y_2 \geq -1 \\ & y_1 - 2y_2 \geq -2 \\ & y_1 - 3y_2 \geq -1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & -y_1 - 3y_2 \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 + y_2 - t_1 = -1 \\ & y_1 - 2y_2 - t_2 = -2 \\ & y_1 - 3y_2 - t_3 = -1 \\ & y_1, y_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

# 双対シンプレックス法の例その1

## 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \leq -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$s_1, s_2$  を基底変数としたタブローは双対実行可能

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-1	-2	-1	0	0	0
$s_1$	-1	1	1	1	0	-1
$s_2$	1	-2	-3	0	1	-3

## 双対問題

$$\begin{aligned} \min \quad & -y_1 - 3y_2 \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 + y_2 \geq -1 \\ & y_1 - 2y_2 \geq -2 \\ & y_1 - 3y_2 \geq -1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 双対問題の等式標準形

$$\begin{aligned} \min \quad & -y_1 - 3y_2 \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 + y_2 - t_1 = -1 \\ & y_1 - 2y_2 - t_2 = -2 \\ & y_1 - 3y_2 - t_3 = -1 \\ & y_1, y_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	-1	-3	0	0	0	0
$t_1$	1	-1	1	0	0	1
$t_2$	-1	2	0	1	0	2
$t_3$	-1	3	0	0	1	1



## 双対シンプレックス法の例その 1 (続き)

(2) ピボット行 (基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-1	-2	-1	0	0	0
$s_1$	-1	1	1	1	0	-1
$s_2$	1	-2	-3	0	1	-3

(3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-1	-2	-1	0	0	0
$s_1$	-1	1	1	1	0	-1
$s_2$	1	-2	-3	0	1	-3
	-1	1	1/3			

(4) ピボット操作

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-4/3	-4/3	0	0	-1/3	1
$s_1$	-2/3	1/3	0	1	1/3	-2
$x_3$	-1/3	2/3	1	0	-1/3	1

(2) ピボット行 (基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-4/3	-4/3	0	0	-1/3	1
$s_1$	-2/3	1/3	0	1	1/3	-2
$x_3$	-1/3	2/3	1	0	-1/3	1

## 双対シンプレックス法の例その 1 (続き)

### (2) ピボット行 (基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-1	-2	-1	0	0	0
$s_1$	-1	1	1	1	0	-1
$s_2$	1	-2	-3	0	1	-3

### (3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-1	-2	-1	0	0	0
$s_1$	-1	1	1	1	0	-1
$s_2$	1	-2	-3	0	1	-3
	-1	1	1/3			

### (4) ピボット操作

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-4/3	-4/3	0	0	-1/3	1
$s_1$	-2/3	1/3	0	1	1/3	-2
$x_3$	-1/3	2/3	1	0	-1/3	1

### (2) ピボット行 (基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-4/3	-4/3	0	0	-1/3	1
$s_1$	-2/3	1/3	0	1	1/3	-2
$x_3$	-1/3	2/3	1	0	-1/3	1

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	-1	-3	0	0	0	0
$t_1$	1	-1	1	0	0	1
$t_2$	-1	2	0	1	0	2
$t_3$	-1	3	0	0	1	1

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	-1	-3	0	0	0	0
$t_1$	1	-1	1	0	0	1
$t_2$	-1	2	0	1	0	2
$t_3$	-1	3	0	0	1	1

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	-2	0	0	0	1	1
$t_1$	2/3	0	1	0	1/3	4/3
$t_2$	-1/3	0	0	1	-2/3	4/3
$y_2$	-1/3	1	0	0	1/3	1/3

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	-2	0	0	0	1	1
$t_1$	2/3	0	1	0	1/3	4/3
$t_2$	-1/3	0	0	1	-2/3	4/3
$y_2$	-1/3	1	0	0	1/3	1/3

## 双対シンプレックス法の例 (その 3)

(3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	$-4/3$	$-4/3$	0	0	$-1/3$	1
$s_1$	$-2/3$	$1/3$	0	1	$1/3$	$-2$
$x_3$	$-1/3$	$2/3$	1	0	$-1/3$	1
	2	$-4$			$-1$	

(4) ピボット操作

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	0	$-2$	0	$-2$	$-1$	5
$x_1$	1	$-1/2$	0	$-3/2$	$-1/2$	3
$x_3$	0	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$	2

解答

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$ , 最適値  $-5$   
 スラック変数  $(s_1, s_2) = (0, 0)$

双対最適解  $(y_1, y_2) = (2, 1)$

双対スラック変数  $(t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 0)$

## 双対シンプレックス法の例 (その 3)

### (3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-4/3	-4/3	0	0	-1/3	1
$s_1$	-2/3	1/3	0	1	1/3	-2
$x_3$	-1/3	2/3	1	0	-1/3	1
	2	-4			-1	

### (4) ピボット操作

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	0	-2	0	-2	-1	5
$x_1$	1	-1/2	0	-3/2	-1/2	3
$x_3$	0	1/2	1	-1/2	-1/2	2

## 解答

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$ , 最適値  $-5$   
 スラック変数  $(s_1, s_2) = (0, 0)$

双対最適解  $(y_1, y_2) = (2, 1)$

双対スラック変数  $(t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 0)$

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	-2	0	0	0	1	1
$t_1$	2/3	0	1	0	1/3	4/3
$t_2$	-1/3	0	0	1	-2/3	4/3
$y_2$	-1/3	1	0	0	1/3	1/3

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	0	0	3	0	2	5
$y_1$	1	0	3/2	0	1/2	2
$t_2$	0	0	1/2	1	-1/2	2
$y_2$	0	1	1/2	0	1/2	1

## 双対シンプレックス法の例 (その 3)

### (3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-4/3	-4/3	0	0	-1/3	1
$s_1$	-2/3	1/3	0	1	1/3	-2
$x_3$	-1/3	2/3	1	0	-1/3	1
	2	-4			-1	

### (4) ピボット操作

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	0	-2	0	-2	-1	5
$x_1$	1	-1/2	0	-3/2	-1/2	3
$x_3$	0	1/2	1	-1/2	-1/2	2
	$-t_1$	$-t_2$	$-t_3$	$-y_1$	$-y_2$	

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	-2	0	0	0	1	1
$t_1$	2/3	0	1	0	1/3	4/3
$t_2$	-1/3	0	0	1	-2/3	4/3
$y_2$	-1/3	1	0	0	1/3	1/3

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	0	0	3	0	2	5
$y_1$	1	0	3/2	0	1/2	2
$t_2$	0	0	1/2	1	-1/2	2
$y_2$	0	1	1/2	0	1/2	1

## 解答

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$ , 最適値  $-5$   
 スラック変数  $(s_1, s_2) = (0, 0)$

双対最適解  $(y_1, y_2) = (2, 1)$

双対スラック変数  $(t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 0)$

## 双対シンプレックス法の例 (その 3)

### (3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-4/3	-4/3	0	0	-1/3	1
$s_1$	-2/3	1/3	0	1	1/3	-2
$x_3$	-1/3	2/3	1	0	-1/3	1
	2	-4			-1	

### (4) ピボット操作

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	0	-2	0	-2	-1	5
$x_1$	1	-1/2	0	-3/2	-1/2	3
$x_3$	0	1/2	1	-1/2	-1/2	2
	$-t_1$	$-t_2$	$-t_3$	$-y_1$	$-y_2$	

### 解答

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$ , 最適値  $-5$   
 スラック変数  $(s_1, s_2) = (0, 0)$

双対最適解  $(y_1, y_2) = (2, 1)$

双対スラック変数  $(t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 0)$

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	-2	0	0	0	1	1
$t_1$	2/3	0	1	0	1/3	4/3
$t_2$	-1/3	0	0	1	-2/3	4/3
$y_2$	-1/3	1	0	0	1/3	1/3

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	0	0	3	0	2	5
$y_1$	1	0	3/2	0	1/2	2
$t_2$	0	0	1/2	1	-1/2	2
$y_2$	0	1	1/2	0	1/2	1

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$y_1$	$y_2$	
	3	0	2	0	0	5
$t_2$	1/2	1	-1/2	0	0	2
$y_1$	3/2	0	1/2	1	0	2
$y_2$	1/2	0	1/2	0	1	1

## 双対シンプレックス法の例 (その 3)

### (3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-4/3	-4/3	0	0	-1/3	1
$s_1$	-2/3	1/3	0	1	1/3	-2
$x_3$	-1/3	2/3	1	0	-1/3	1
	2	-4			-1	

### (4) ピボット操作

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	0	-2	0	-2	-1	5
$x_1$	1	-1/2	0	-3/2	-1/2	3
$x_3$	0	1/2	1	-1/2	-1/2	2
	$-t_1$	$-t_2$	$-t_3$	$-y_1$	$-y_2$	

### 解答

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$ , 最適値  $-5$   
 スラック変数  $(s_1, s_2) = (0, 0)$

双対最適解  $(y_1, y_2) = (2, 1)$

双対スラック変数  $(t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 0)$

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	-2	0	0	0	1	1
$t_1$	2/3	0	1	0	1/3	4/3
$t_2$	-1/3	0	0	1	-2/3	4/3
$y_2$	-1/3	1	0	0	1/3	1/3

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	0	0	3	0	2	5
$y_1$	1	0	3/2	0	1/2	2
$t_2$	0	0	1/2	1	-1/2	2
$y_2$	0	1	1/2	0	1/2	1

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$y_1$	$y_2$	
	3	0	2	0	0	5
$t_2$	1/2	1	-1/2	0	0	2
$y_1$	3/2	0	1/2	1	0	2
$y_2$	1/2	0	1/2	0	1	1

	$t_2$	$y_1$	$y_2$
$t_1$	3	1/2	3/2
$t_2$	0	1	0
$t_3$	2	-1/2	1/2
$y_1$	0	0	1
$y_2$	0	0	0
	5	2	2

## 双対シンプレックス法の例 (その 3)

(3) ピボット列 (非基底変数) の選択

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	-4/3	-4/3	0	0	-1/3	1
$s_1$	-2/3	1/3	0	1	1/3	-2
$x_3$	-1/3	2/3	1	0	-1/3	1
	2	-4			-1	

(4) ピボット操作

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	0	-2	0	-2	-1	5
$x_1$	1	-1/2	0	-3/2	-1/2	3
$x_3$	0	1/2	1	-1/2	-1/2	2
	$-t_1$	$-t_2$	$-t_3$	$-y_1$	$-y_2$	

解答

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 2)$ , 最適値  $-5$   
 スラック変数  $(s_1, s_2) = (0, 0)$

双対最適解  $(y_1, y_2) = (2, 1)$

双対スラック変数  $(t_1, t_2, t_3) = (0, 2, 0)$

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	-2	0	0	0	1	1
$t_1$	2/3	0	1	0	1/3	4/3
$t_2$	-1/3	0	0	1	-2/3	4/3
$y_2$	-1/3	1	0	0	1/3	1/3

	$y_1$	$y_2$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	
	0	0	3	0	2	5
$y_1$	1	0	3/2	0	1/2	2
$t_2$	0	0	1/2	1	-1/2	2
$y_2$	0	1	1/2	0	1/2	1

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$y_1$	$y_2$	
	3	0	2	0	0	5
$t_2$	1/2	1	-1/2	0	0	2
$y_1$	3/2	0	1/2	1	0	2
$y_2$	1/2	0	1/2	0	1	1

	$t_2$	$y_1$	$y_2$
$t_1$	3	1/2	3/2
$t_2$	0	1	0
$t_3$	2	-1/2	1/2
$y_1$	0	0	1
$y_2$	0	0	0
	5	2	2



## 双対シンプレックス法の利点

- 基底解が実行可能，双対実行可能のいずれかなら OK
  - 実行可能  $\Rightarrow$  シンプレックス法
  - 双対実行可能  $\Rightarrow$  双対シンプレックス法
- 最適解を求めた後で新たに制約条件が追加された場合も OK
  - 元の最適基底解が制約条件を満たす  $\Rightarrow$  解き直す必要なし
  - 元の最適基底解が制約条件を満たさない  $\Rightarrow$  解き直す必要あり  
 $\Rightarrow$  双対実行可能なので**双対シンプレックス法の出番**
- 最適解を求めた後で制約条件の右辺ベクトルが変化した場合も OK
  - やはり元の最適基底解は双対実行可能  $\Rightarrow$  双対シンプレックス法  
(目的関数の係数ベクトルが変化した場合：実行可能なのでシンプレックス法)
  - 次の話題の**感度分析**とも関連

### 例題

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \leq -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

### 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 双対シンプレックス法の利点

- 基底解が実行可能, 双対実行可能のいずれかなら OK
  - 実行可能  $\Rightarrow$  シンプレックス法
  - 双対実行可能  $\Rightarrow$  双対シンプレックス法
- 最適解を求めた後で新たに制約条件が追加された場合も OK
  - 元の最適基底解が制約条件を満たす  $\Rightarrow$  解き直す必要なし
  - 元の最適基底解が制約条件を満たさない  $\Rightarrow$  解き直す必要あり  
 $\Rightarrow$  双対実行可能なので**双対シンプレックス法の出番**
- 最適解を求めた後で制約条件の右辺ベクトルが変化した場合も OK
  - やはり元の最適基底解は双対実行可能  $\Rightarrow$  双対シンプレックス法  
(目的関数の係数ベクトルが変化した場合: 実行可能なのでシンプレックス法)
  - 次の話題の**感度分析**とも関連

### 例題 + 新たな制約条件

$$\begin{aligned}\max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \leq -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -3 \\ & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq -6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

### 等式標準形

$$\begin{aligned}\max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\ & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + s_3 = -6 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0\end{aligned}$$

## 双対シンプレックス法の例その2

### 例題 + 新たな制約条件

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \leq -1 \\
 & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -3 \\
 & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq -6 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

### 等式標準形

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = -1 \\
 & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + s_2 = -3 \\
 & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + s_3 = -6 \\
 & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

元の最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	
	0	-2	0	-2	-1	5
$x_1$	1	-1/2	0	-3/2	-1/2	3
$x_3$	0	1/2	1	-1/2	-1/2	2

制約条件を追加

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-2	0	-2	-1	0	5
$x_1$	1	-1/2	0	-3/2	-1/2	0	3
$x_3$	0	1/2	1	-1/2	-1/2	0	2
$s_3$	-1	-2	2	0	0	1	-6

基底変数の列を掃き出す。双対実行可能なので準備完了

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	-2	0	-2	-1	0	5
$x_1$	1	-1/2	0	-3/2	-1/2	0	3
$x_3$	0	1/2	1	-1/2	-1/2	0	2
$s_3$	0	-7/2	0	-1/2	1/2	1	-7

1 回の反復で終了

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	0	0	0	-12/7	-9/7	-4/7	9
$x_1$	1	0	0	-10/7	-4/7	-1/7	4
$x_3$	0	0	1	-4/7	-3/7	1/7	1
$x_2$	0	1	0	1/7	-1/7	-2/7	2

元の最適解の近くに最適解がありそう  $\Rightarrow$  反復回数が少なくて済む!

# 感度分析

## 感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化  $\Rightarrow$  最適基底解の変化？
  - 目的関数の係数
  - 制約条件の右辺

## 最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには、製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	4	
原材料 A	2	1	2	120
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240

# 感度分析

## 感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化  $\Rightarrow$  最適基底解の変化？
  - 目的関数の係数
  - 制約条件の右辺

## 最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには、製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	8	5	4	
原材料 A	2	1	2	120
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240

# 感度分析

## 感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化  $\Rightarrow$  最適基底解の変化？
  - 目的関数の係数
  - 制約条件の右辺

## 最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには、製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	12	5	4	
原材料 A	2	1	2	120
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240

# 感度分析

## 感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化  $\Rightarrow$  最適基底解の変化？
  - 目的関数の係数
  - 制約条件の右辺

## 最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには、製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	4	
原材料 A	2	1	2	120
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240

# 感度分析

## 感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化  $\Rightarrow$  最適基底解の変化？
  - 目的関数の係数
  - **制約条件の右辺**

## 最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには、製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	4	
原材料 A	2	1	2	<b>100</b>
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240



# 感度分析

## 感度分析 (sensitivity analysis)

- 現実的な問題は正確に式で表すのは難しい
  - 不確かな値を使って解いた後により正確な値が分かった
  - 状況が変化して値も変化した
  - etc.
- 線形計画問題の値が変化  $\Rightarrow$  最適基底解の変化？
  - 目的関数の係数
  - **制約条件の右辺**

## 最適プロダクトミックス問題の例

- 原材料 A, B, C から薬品 1, 2, 3 を生産する薬品工場
- 各薬品を生産するには、製品の種類に応じた原材料が必要
  - 各原材料の在庫量を超えて使用することはできない
  - 得られる利益は各薬品ごとに異なる
- 目的：総利益が最大各薬品の生産量を決定

	薬品 1	薬品 2	薬品 3	在庫量
利益	6	5	4	
原材料 A	2	1	2	<b>80</b>
原材料 B	4	2	1	180
原材料 C	3	2	2	240

## 目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

### 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

### 等式標準形

$$\begin{array}{llllll}\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 & & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 & & & & = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 & + s_2 & & & = 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & + s_3 & & = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 & \geq & 0\end{array}$$

### 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  薬品 1 は作らないほうが得

# 目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

薬品 1 を値上げして利益確保

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  薬品 1 は作らないほうが得

# 目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\max \quad 8x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

薬品 1 を値上げして利益確保

## 等式標準形

$$\max \quad 8x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$x_3$	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_2$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$s_3$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
$x_3$	-2	0	0	-1	-2	0	-480
$x_2$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$s_3$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480

⇒ 薬品 1 は作らないほうが得

最適解は  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$  のまま

# 目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\max \quad 12x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

薬品 1 を値上げて利益確保

## 等式標準形

$$\max \quad 12x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-2	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	2	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480

⇒ 薬品 1 は作らないほうが得

最適解は  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$  のまま

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$  は最適解ではない

# 目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\max \quad 12x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

薬品 1 を値上げて利益確保

## 等式標準形

$$\max \quad 12x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-2	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	2	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480

⇒ 薬品 1 は作らないほうが得

最適解は  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$  のまま

境目は利益 10

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$  は最適解ではない

## 目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

### 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

### 等式標準形

$$\begin{array}{llllll}\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 & & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 & & & & = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 & + s_2 & & & = 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & + s_3 & & = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

### 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
$x_2$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
$s_3$	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480

⇒ 薬品 2 はたくさん作る

# 目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

薬品 2 を値下げしてみる

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 ⇒ 薬品 2 はたくさん作る



# 目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

薬品 2 を値下げしてみる

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-2	0	0	-4/3	-4/3	0	-400
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  薬品 2 はたくさん作る

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 400

# 目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

薬品 2 を値下げしてみる

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-2	0	0	-4/3	-4/3	0	-400
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	2	0	0	-2	0	0	-240
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  薬品 2 はたくさん作る

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 400

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$  は最適解ではない

# 目的関数の係数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

薬品 2 を値下げしてみる

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-2	0	0	-4/3	-4/3	0	-400
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	2	0	0	-2	0	0	-240
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  薬品 2 はたくさん作る

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 400

境目は利益 3

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$  は最適解ではない

## 目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

### 問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

### 辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \quad \bar{\mathbf{c}}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ (\bar{\mathbf{c}}_N &= \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B) \end{aligned}$$

### 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

### 非基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_N$  が  $\mathbf{c}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$  相対コスト係数  $\bar{\mathbf{c}}_N$  は  $\bar{\mathbf{c}}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}$  に変化
- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

### 基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_B$  が  $\mathbf{c}_B + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow \begin{cases} \text{相対コスト係数 } \bar{\mathbf{c}}_N \text{ は } \bar{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (0^\top \quad \Delta \quad 0^\top) \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件:  $\Delta \leq -\underline{\Delta}$  または  $\Delta \geq \bar{\Delta}$ 
  - $\underline{\Delta}$ : (行の要素)  $> 0$  の列に関する  $-(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値
  - $\bar{\Delta}$ : (行の要素)  $< 0$  の列に関する  $(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値

## 目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

### 問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

### 辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ (\bar{\mathbf{c}}_N &= \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B) \end{aligned}$$

### 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$-4+\Delta$	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
$x_2$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
$s_3$	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

### 非基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_N$  が  $\mathbf{c}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$  相対コスト係数  $\bar{\mathbf{c}}_N$  は  $\bar{\mathbf{c}}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化
- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

### 基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_B$  が  $\mathbf{c}_B + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow \begin{cases} \text{相対コスト係数 } \bar{\mathbf{c}}_N \text{ は } \bar{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \begin{pmatrix} 0^\top & \Delta & 0^\top \end{pmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件:  $\Delta \leq -\underline{\Delta}$  または  $\Delta \geq \bar{\Delta}$ 
  - $\underline{\Delta}$ : (行の要素)  $> 0$  の列に関する  $-(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値
  - $\bar{\Delta}$ : (行の要素)  $< 0$  の列に関する  $(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値

## 目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

### 問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

### 辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ (\bar{\mathbf{c}}_N &= \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B) \end{aligned}$$

### 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$-4+\Delta$	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
$x_2$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
$s_3$	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

### 非基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_N$  が  $\mathbf{c}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$  相対コスト係数  $\bar{\mathbf{c}}_N$  は  $\bar{\mathbf{c}}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化
- 相対コスト係数の絶対値 (4) だけ増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

### 基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_B$  が  $\mathbf{c}_B + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow \begin{cases} \text{相対コスト係数 } \bar{\mathbf{c}}_N \text{ は } \bar{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (0^\top \quad \Delta \quad 0^\top) \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件:  $\Delta \leq -\underline{\Delta}$  または  $\Delta \geq \bar{\Delta}$ 
  - $\underline{\Delta}$ : (行の要素)  $> 0$  の列に関する  $-(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値
  - $\bar{\Delta}$ : (行の要素)  $< 0$  の列に関する  $(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値

## 目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

### 問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

### 辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ (\bar{\mathbf{c}}_N &= \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B) \end{aligned}$$

### 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

### 非基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_N$  が  $\mathbf{c}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$  相対コスト係数  $\bar{\mathbf{c}}_N$  は  $\bar{\mathbf{c}}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}$  に変化
- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

### 基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_B$  が  $\mathbf{c}_B + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow \begin{cases} \text{相対コスト係数 } \bar{\mathbf{c}}_N \text{ は } \bar{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (0^\top \quad \Delta \quad 0^\top) \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件:  $\Delta \leq -\underline{\Delta}$  または  $\Delta \geq \bar{\Delta}$ 
  - $\underline{\Delta}$ : (行の要素)  $> 0$  の列に関する  $-(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値
  - $\bar{\Delta}$ : (行の要素)  $< 0$  の列に関する  $(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値

# 目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

## 問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

## 辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ (\bar{\mathbf{c}}_N &= \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B) \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

## 非基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_N$  が  $\mathbf{c}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$  相対コスト係数  $\bar{\mathbf{c}}_N$  は  $\bar{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  
 $\Rightarrow -(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top$  のある列に  $\Delta$  をかけたもの  
 $\Rightarrow -\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$  のある行に  $\Delta$  をかけたもの
- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

## 基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_B$  が  $\mathbf{c}_B + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow \begin{cases} \text{相対コスト係数 } \bar{\mathbf{c}}_N \text{ は } \bar{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \begin{pmatrix} 0^\top & \Delta & 0^\top \end{pmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件:  $\Delta \leq -\underline{\Delta}$  または  $\Delta \geq \bar{\Delta}$ 
  - $\underline{\Delta}$ : (行の要素)  $> 0$  の列に関する  $-(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値
  - $\bar{\Delta}$ : (行の要素)  $< 0$  の列に関する  $(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値



# 目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

## 問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

## 辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{c}}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ (\tilde{\mathbf{c}}_N &= \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B) \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$$

## 非基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_N$  が  $\mathbf{c}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$  相対コスト  $-(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top$  のある列に  $\Delta$  をかけたもの  $\Rightarrow -\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$  のある行に  $\Delta$  をかけたもの
- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

## 基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_B$  が  $\mathbf{c}_B + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow \begin{cases} \text{相対コスト係数 } \tilde{\mathbf{c}}_N \text{ は } \tilde{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \begin{pmatrix} 0^\top & \Delta & 0^\top \end{pmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件:  $\Delta \leq -\underline{\Delta}$  または  $\Delta \geq \bar{\Delta}$ 
  - $\underline{\Delta}$ : (行の要素)  $> 0$  の列に関する  $-(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値
  - $\bar{\Delta}$ : (行の要素)  $< 0$  の列に関する  $(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値

# 目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

## 問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

## 辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ (\bar{\mathbf{c}}_N &= \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B) \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$-4-2\Delta$	0	0	$-1+\Delta/3$	$-2-2\Delta/3$	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$$

## 非基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_N$  が  $\mathbf{c}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$  相対コスト  $-(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top$  のある列に  $\Delta$  をかけたもの  $\Rightarrow -\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$  のある行に  $\Delta$  をかけたもの
- 相対コスト係数の絶対値だけ増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

## 基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_B$  が  $\mathbf{c}_B + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow \begin{cases} \text{相対コスト係数 } \bar{\mathbf{c}}_N \text{ は } \bar{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \begin{pmatrix} 0^\top & \Delta & 0^\top \end{pmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件:  $\Delta \leq -\underline{\Delta}$  または  $\Delta \geq \bar{\Delta}$ 
  - $\underline{\Delta}$ : (行の要素)  $> 0$  の列に関する  $-(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値
  - $\bar{\Delta}$ : (行の要素)  $< 0$  の列に関する  $(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値

# 目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{c}}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ (\tilde{\mathbf{c}}_N &= \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B) \end{aligned}$$

最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$-4-2\Delta$	0	0	$-1+\Delta/3$	$-2-2\Delta/3$	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$$

非基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_N$  が  $\mathbf{c}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$  相対コスト係数の絶対値が増える。基底変数・非基底変数が入れ替わる

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ のある行に } \Delta \text{ をかけたもの}$$

基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_B$  が  $\mathbf{c}_B + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow \begin{cases} \text{相対コスト係数 } \tilde{\mathbf{c}}_N \text{ は } \tilde{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \begin{pmatrix} 0^\top & \Delta & 0^\top \end{pmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件:  $\Delta \leq -\underline{\Delta}$  または  $\Delta \geq \bar{\Delta}$ 
  - $\underline{\Delta}$ : (行の要素)  $> 0$  の列に関する  $-(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値
  - $\bar{\Delta}$ : (行の要素)  $< 0$  の列に関する  $(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値

# 目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{c}}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ (\tilde{\mathbf{c}}_N &= \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B) \end{aligned}$$

最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$-4-2\Delta$	0	0	$-1+\Delta/3$	$-2-2\Delta/3$	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$$

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$$

非基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_N$  が  $\mathbf{c}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$  相対コスト係数  $\tilde{\mathbf{c}}_N$  は  $\tilde{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  
 $\Rightarrow -(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top$  のある列に  $\Delta$  をかけたもの  
 $\Rightarrow -\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$  のある行に  $\Delta$  をかけたもの
- 相対コスト係数の絶対値が増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ のある行に } \Delta \text{ をかけたもの}$$

基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_B$  が  $\mathbf{c}_B + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$ 

$$\begin{cases} \text{相対コスト係数 } \tilde{\mathbf{c}}_N \text{ は } \tilde{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \begin{pmatrix} 0^\top & \Delta & 0^\top \end{pmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ に変化} \end{cases}$$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件:  $\Delta \leq -\underline{\Delta}$  または  $\Delta \geq \bar{\Delta}$ 
  - $\underline{\Delta}$ : (行の要素)  $> 0$  の列に関する  $-(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値
  - $\bar{\Delta}$ : (行の要素)  $< 0$  の列に関する  $(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値

# 目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{c}}_N^\top \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ (\tilde{\mathbf{c}}_N &= \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \mathbf{c}_B) \end{aligned}$$

最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$-4-2\Delta$	0	0	$-1+\Delta/3$	$-2-2\Delta/3$	0	$-480-80\Delta$
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
$x_2$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
$s_3$	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$$

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$$

非基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_N$  が  $\mathbf{c}_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$  相対コスト係数は  $-(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top$  のある列に  $\Delta$  をかけたもの  $\Rightarrow -\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$  のある行に  $\Delta$  をかけたもの
- 相対コスト係数の絶対値が増えれば、基底変数・非基底変数が入れ替わる

$$\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ のある行に } \Delta \text{ をかけたもの}$$

基底変数の係数が変化した場合

- $\mathbf{c}_B$  が  $\mathbf{c}_B + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow \begin{cases} \text{相対コスト係数 } \tilde{\mathbf{c}}_N \text{ は } \tilde{\mathbf{c}}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^\top \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{c}_B^\top \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \begin{pmatrix} 0^\top & \Delta & 0^\top \end{pmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \text{ に変化} \end{cases}$
- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件:  $\Delta \leq -\underline{\Delta}$  または  $\Delta \geq \bar{\Delta}$ 
  - $\underline{\Delta}$ : (行の要素)  $> 0$  の列に関する  $-(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値
  - $\bar{\Delta}$ : (行の要素)  $< 0$  の列に関する  $(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値

# 目的関数の係数が変化した場合 (辞書を用いた計算)

問題

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

辞書

$$\begin{aligned} f &= c_B^T A_B^{-1} b + \bar{c}_N^T x_N \\ x_B &= A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\ (\bar{c}_N &= c_N - (A_B^{-1} A_N)^T c_B) \end{aligned}$$

最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	$-4-2\Delta$	0	0	$-1+\Delta/3$	$-2-2\Delta/3$	0	$-480-80\Delta$
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
$x_2$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
$s_3$	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$$A_B^{-1} A_N$$

$$A_B^{-1} b$$

非基底変数の係数が変化した場合

- $c_N$  が  $c_N + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$  相対コスト係数  $\bar{c}_N$  は  $\bar{c}_N - (A_B^{-1} A_N)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  
 $\Rightarrow -(\bar{c}_N - (A_B^{-1} A_N)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix})$  のある列に  $\Delta$  をかけたもの  
 $\Rightarrow -A_B^{-1} A_N$  のある行に  $\Delta$  をかけたもの
- 相対コスト係数の絶対値が1以上になると、基底変数・非基底変数が入れ替わる

$$A_B^{-1} b \text{ のある行に } \Delta \text{ をかけたもの}$$

基底変数の係数が変化した場合

- $c_B$  が  $c_B + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$  に変化  $\Rightarrow$ 

$$\begin{cases} \text{相対コスト係数 } \bar{c}_N \text{ は } \bar{c}_N - (A_B^{-1} A_N)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ に変化} \\ \text{最適値 } c_B^T A_B^{-1} b \text{ は } c_B^T A_B^{-1} b + \begin{pmatrix} 0^T & \Delta & 0^T \end{pmatrix} A_B^{-1} b \text{ に変化} \end{cases}$$

- 基底変数・非基底変数が入れ替わる条件:  $\Delta \leq -\underline{\Delta}$  または  $\Delta \geq \bar{\Delta}$  ( $\underline{\Delta} = 2, \bar{\Delta} = 3$ )
  - $\underline{\Delta}$ : (行の要素)  $> 0$  の列に関する  $-(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値
  - $\bar{\Delta}$ : (行の要素)  $< 0$  の列に関する  $(\text{相対コスト係数})/(\text{行の要素})$  の最小値

## 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

### 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

### 等式標準形

$$\begin{array}{llllll}\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 & & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 & & & & = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 & + s_2 & & & = 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & + s_3 & & = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 & \geq 0\end{array}$$

### 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
$x_2$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
$s_3$	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
⇒ 原材料 2 の在庫量が変わるとどうなる？

# 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 等式標準形

原材料 2 の在庫量が増加

$$\begin{aligned}
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
 & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  原材料 2 の在庫量が増加するとどうなる？



# 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 210 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 210 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

原材料 2 の在庫量が増加

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
$x_2$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
$s_3$	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-540
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	10
$x_2$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	100
$s_3$	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	20

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  原材料 2 の在庫量が増加するとどうなる？

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 100, 10)$

# 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 270 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 270 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

原材料 2 の在庫量が増加

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-540
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	10
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	100
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	20

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-660
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	-10
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	140
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	-20

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  原材料 2 の在庫量が増加するとどうなる？

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 100, 10)$

現在の基底解は実行不可能に

# 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 270 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 270 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

原材料 2 の在庫量が増加

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-540
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	10
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	100
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	20

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-660
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	-10
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	140
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	-20

境目は在庫量 240

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  原材料 2 の在庫量が増加するとどうなる?

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 100, 10)$

現在の基底解は実行不可能に

# 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 等式標準形

原材料 2 の在庫量が増加

$$\begin{aligned}
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
 & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 ⇒ 原材料 2 の在庫量が増加するとどうなる？

# 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 120 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 120 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

原材料 2 の在庫量が増加

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-360
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	40
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	40
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	80

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  原材料 2 の在庫量が増加するとどうなる？

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 40, 40)$

# 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 30 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

原材料 2 の在庫量が増加

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-360
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	40
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	40
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	80

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-180
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	70
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	-20
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	140

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  原材料 2 の在庫量が増加するとどうなる？

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 40, 40)$

現在の基底解は実行不可能に

# 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 30 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

原材料 2 の在庫量が増加

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-360
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	40
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	40
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	80

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-180
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	70
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	-20
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	140

境界は在庫量 60

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80, 20)$ , 最適値 480  
 $\Rightarrow$  原材料 2 の在庫量が増加するとどうなる?

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 40, 40)$

現在の基底解は実行不可能に

## 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

### 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

### 等式標準形

$$\begin{array}{llllll}\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 & & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 & & & & = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 & + s_2 & & & = 180 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & + s_3 & & = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 & \geq 0\end{array}$$

### 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
$x_2$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
$s_3$	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$-120 \leq \Delta \leq 60$  のとき,

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80 + 2\Delta/3, 20 - \Delta/3)$ ,

最適値  $480 + 2\Delta$



## 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

### 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{array}{ll}\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 + \Delta \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

### 等式標準形

$$\begin{array}{llllll}\max & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 & & & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 & & & & = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 & + s_2 & & & = 180 + \Delta \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & + s_3 & & = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 & \geq 0\end{array}$$

### 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	20
$x_2$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	80
$s_3$	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	40

$-120 \leq \Delta \leq 60$  のとき,

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80 + 2\Delta/3, 20 - \Delta/3)$ ,

最適値  $480 + 2\Delta$

## 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

### 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 + \Delta \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

### 等式標準形

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 + \Delta \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
 & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

### 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	-480
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0	20
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0	80
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1	40

$-120 \leq \Delta \leq 60$  のとき,

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80 + 2\Delta/3, 20 - \Delta/3)$ ,

最適値  $480 + 2\Delta$

# 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 + \Delta \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 + \Delta \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\
 & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
	-4	0	0	-1	-2	0
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	0
$x_2$	2	1	0	-1/3	2/3	0
$s_3$	-1	0	0	-2/3	-2/3	1

$-120 \leq \Delta \leq 60$  のとき,

最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80 + 2\Delta/3, 20 - \Delta/3)$ ,

最適値  $480 + 2\Delta$

# 制約条件の右辺定数が変化した場合 (最適プロダクトミックスの例・続き)

## 最適プロダクトミックス問題の例題

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180 + \Delta \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 等式標準形

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 180 + \Delta \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 240 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 最適シンプレックスタブロー

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	
	-4	0	0	-1	-2	0	$-480 - 2\Delta$
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	$20 - \Delta/3$
$x_2$	2	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	$80 + 2\Delta/3$
$s_3$	-1	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	$40 - 2\Delta/3$

$-120 \leq \Delta \leq 60$  のとき,  
最適解  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 80 + 2\Delta/3, 20 - \Delta/3)$ ,  
最適値  $480 + 2\Delta$

## 辞書

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{c}}_N^T \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N \\ (\tilde{\mathbf{c}}_N &= \mathbf{c}_N - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)^T \mathbf{c}_B) \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とすると, } \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b} + \Delta \mathbf{e}_2 \Rightarrow \begin{cases} f \rightarrow f + \Delta \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}_B \rightarrow \mathbf{x}_B + \Delta \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

$\mathbf{A}_N$  の  $s_2$  の列は  $\mathbf{e}_2 \Rightarrow$  タブローの  $s_2$  の列の 2 ~ 4 行は  $\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{e}_2$   
 $s_2$  の相対コスト係数は  $0 - (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{e}_2)^T \mathbf{c}_B = -\mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{e}_2$

最終列に  $s_2$  の列の  $\Delta$  倍を足せばよい  
 (1 番目の制約なら  $s_1$  の列, 3 番目の制約なら  $s_3$  の列)