オペレーションズ・リサーチ II (6)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

スケジュール

No.	内容
1	導入 (非線形最適化問題，ゲーム理論，多目的最適化問題)
2	非線形計画 1 (勾配，ヘッセ行列，凸性，最適性条件，ニュートン法)
3	非線形計画 2 (最急降下法，準ニュートン法，共役勾配法，信頼領域法)
4	非線形計画 3 (制約つき問題の最適性条件，KKT 条件，ペナルティ関数法，２次計画法，逐次 2 次計画法)
5	ゲーム理論 1 (種々のゲーム，標準形，純粋戦略，混合戦略，ナッシュ均衡)
6	ゲーム理論 2 (展開形ゲーム，繰り返しゲーム)
7	多目的最適化 (パレート最適性，重み付け法，ϵ 制約法，重み付きメトリック法)

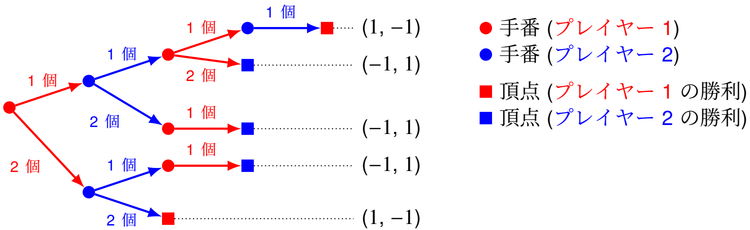
展開形ゲーム

展開形ゲーム (extensive form game) とは?

- ゲームの表現方法の一つ
- 交代手番ゲームや不確定ゲーム，完全情報ゲームなどを表すのに適している
- **ゲームの木** (game tree) を用いる

完全情報ゲームの例：石取りゲーム (交代手番ゲーム)

4 個の石がある．プレイヤー 1，プレイヤー 2，プレイヤー 1，⋯ の順に 1 個または 2 個の石を取っていく．最後に石を取ったプレイヤーが負け (利得 -1)．勝ったプレイヤーの利得は 1.



ゲームの木

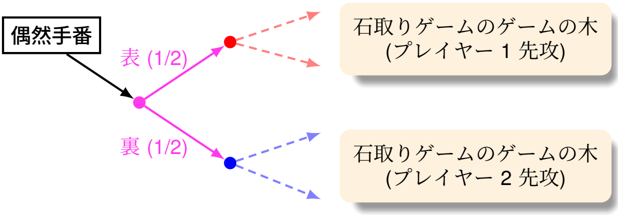
展開形ゲーム：偶然手番

不確定ゲームの例：コイントスで先攻・後攻を決めるゲーム

先ほどの石取りゲームの先攻・後攻をコイントスで決める．表が出たらプレイヤー 1 が先攻，裏が出たらプレイヤー 2 が先攻．

偶然手番 (chance move)

結果が偶然により決まる手番



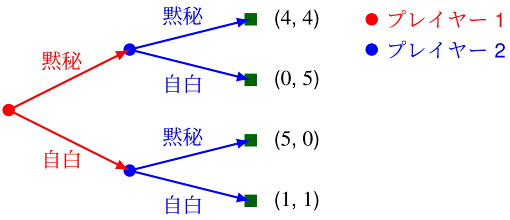
ゲームの木

展開形ゲーム：不完全情報ゲーム

囚人のジレンマ改

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(4, 4)	(0, 5)
自白	(5, 0)	(1, 1)

- 同時手番ゲームは交代手番ゲームに変換
- プレイヤー 2 がプレイヤー 1 の行動に応じて自分の行動を切り替えるのは不可能

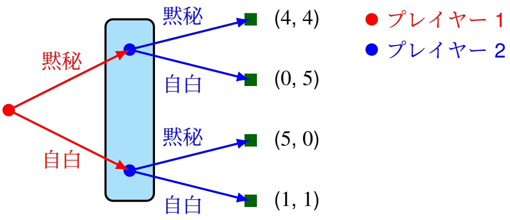


展開形ゲーム：不完全情報ゲーム

囚人のジレンマ改

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(4, 4)	(0, 5)
自白	(5, 0)	(1, 1)

- 同時手番ゲームは交代手番ゲームに変換
- **プレイヤー 2 がプレイヤー 1 の行動に応じて自分の行動を切り替えるのは不可能**

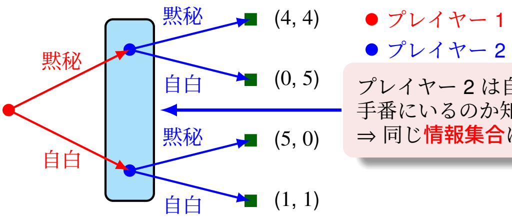


展開形ゲーム：不完全情報ゲーム

囚人のジレンマ改

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(4，4)	(0，5)
自白	(5，0)	(1，1)

- 同時手番ゲームは交代手番ゲームに変換
- プレイヤー 2 がプレイヤー 1 の行動に応じて自分の行動を切り替えるのは不可能



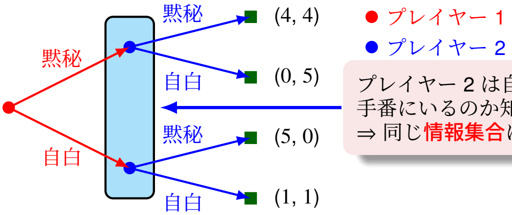
プレイヤー 2 は自分がどちらの手番にいるのか知り得ない
⇒ 同じ**情報集合**に属する

展開形ゲーム：不完全情報ゲーム

囚人のジレンマ改

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(4, 4)	(0, 5)
自白	(5, 0)	(1, 1)

- 同時手番ゲームは交代手番ゲームに変換
- プレイヤー 2 がプレイヤー 1 の行動に応じて自分の行動を切り替えるのは不可能



プレイヤー 2 は自分がどちらの手番にいるのか知り得ない
⇒ 同じ**情報集合**に属する

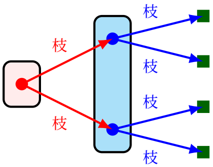
完全情報ゲーム

すべての情報集合がただ 1 つの手番からなるゲーム

展開形ゲームの要素

展開形ゲームの要素

- プレイヤー数：n
- ゲームの木
  - 節点 (node)：手番
  - 終端節点 (terminal node)：ゲーム終了
  - 枝 (edge)：行動
- 各プレイヤー i の手番の集合：P_i (P_0 は偶然手番)
- 偶然手番 (存在するなら) における確率
- 各頂点におけるプレイヤー i の利得関数：$h_i(s_1, \ldots, s_n)$
  s_i はプレイヤー i の**戦略** (プレイヤーの行動計画)
- 各プレイヤーの**情報集合**
  - 情報集合同士は交わりを持たない
  - 同じ情報集合に属する手番は同じ数の枝 (行動) を持つ



終端節点：$(h_1(s_{11}, s_{21}), h_2(s_{11}, s_{21}))$

終端節点：$(h_1(s_{11}, s_{22}), h_2(s_{11}, s_{22}))$

終端節点：$(h_1(s_{12}, s_{21}), h_2(s_{12}, s_{21}))$

終端節点：$(h_1(s_{12}, s_{22}), h_2(s_{12}, s_{22}))$

展開形ゲームにおける戦略

局所戦略 (local strategy)

各情報集合における純粋戦略 (行動)・混合戦略

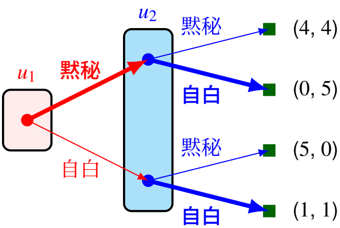
戦略

局所戦略の組

不完全情報ゲームにおける戦略の例：囚人のジレンマ

プレイヤー 1： u_1 における**黙秘**, 自白

プレイヤー 2： u_2 における黙秘, **自白**

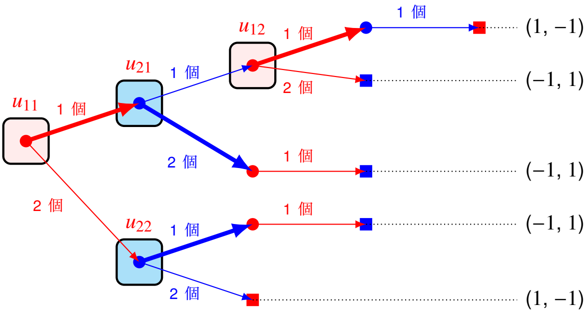


展開形ゲームにおける戦略 (続き)

完全情報ゲームにおける戦略の例：石取りゲーム

プレイヤー 1： (u_{11} における **1 個**・2 個, u_{12} における **1 個**・2 個) の組

プレイヤー 2： (u_{21} における 1 個・**2 個**, u_{12} における **1 個**・2 個) の組



展開形ゲームにおけるナッシュ均衡

期待利得

プレイヤーの純粋戦略の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ に対する期待利得：$H_i(s_1, \ldots, s_n)$

偶然手番がなければ $H_i(s_1, \ldots, s_n) = h_i(s_1, \ldots, s_n)$

ナッシュ均衡

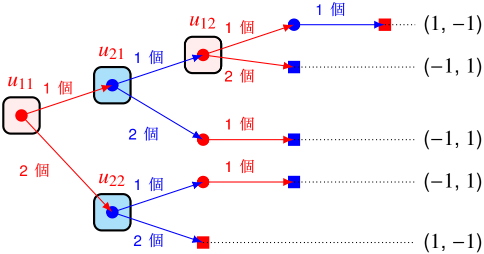
プレイヤーの純粋戦略の組 $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ が**ナッシュ均衡** (Nash equilibrium) であるとは，任意の i $(1 \leq i \leq n)$ と任意の $s_i \in S_i$ に対して $H_i(s_i, s_{-i}^*) \leq H_i(s_i^*, s_{-i}^*)$ が成り立つことをいう．

混合戦略の場合も同様

後退帰納法 (backward induction)

- **完全情報**展開形ゲームに対する純粋戦略のナッシュ均衡の求め方
- 終端節点から逆方向に各手番の最適な行動を求めていく

後退帰納法の例：石取りゲーム



後退帰納法の例：石取りゲーム

u_{12}： 1 個 . . . 利得 1， 2 個 . . . 利得 −1

u_{21}： 1 個 . . . 利得 −1， 2 個 . . . 利得 1

u_{22}： 1 個 . . . 利得 1， 2 個 . . . 利得 −1

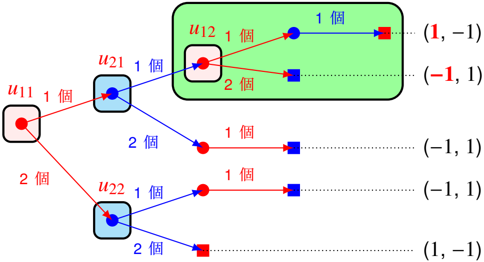
u_{11}： 1 個 . . . 利得 −1， 2 個 . . . 利得 −1

純粋戦略のナッシュ均衡 (プレイヤー 2 が必ず勝つ)

プレイヤー 1： (u_{11} で 1 個, u_{12} で 1 個)， (u_{11} で 2 個, u_{12} で 1 個)

プレイヤー 2： (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)， (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)

後退帰納法の例：石取りゲーム



後退帰納法の例：石取りゲーム

u_{12}： **1 個 . . . 利得 1，2 個 . . . 利得 −1**

u_{21}： 1 個 . . . 利得 −1， 2 個 . . . 利得 1

u_{22}： 1 個 . . . 利得 1， 2 個 . . . 利得 −1

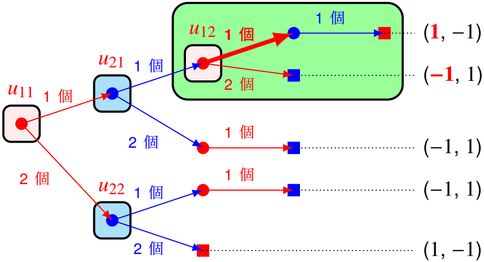
u_{11}： **1 個 . . . 利得 −1，2 個 . . . 利得 −1**

純粋戦略のナッシュ均衡 (プレイヤー 2 が必ず勝つ)

プレイヤー 1： (u_{11} で 1 個, u_{12} で 1 個)，(u_{11} で 2 個, u_{12} で 1 個)

プレイヤー 2： (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)，(u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)

後退帰納法の例：石取りゲーム



後退帰納法の例：石取りゲーム

u_{12}： **1 個** ... 利得 1， 2 個 ... 利得 −1

u_{21}： 1 個 ... 利得 −1， 2 個 ... 利得 1

u_{22}： 1 個 ... 利得 1， 2 個 ... 利得 −1

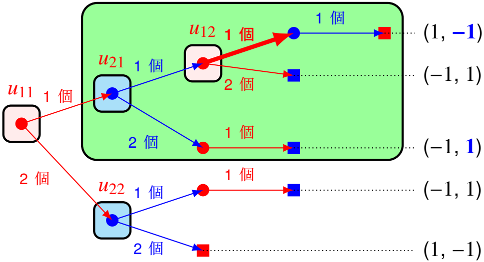
u_{11}： 1 個 ... 利得 −1， 2 個 ... 利得 −1

純粋戦略のナッシュ均衡 (プレイヤー 2 が必ず勝つ)

プレイヤー 1： (u_{11} で 1 個, u_{12} で 1 個)， (u_{11} で 2 個, u_{12} で 1 個)

プレイヤー 2： (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)， (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)

後退帰納法の例：石取りゲーム



後退帰納法の例：石取りゲーム

u_{12}： **1 個** . . . 利得 1，2 個 . . . 利得 −1

$\boldsymbol{u_{21}}$： **1 個 . . . 利得 −1，2 個 . . . 利得 1**

u_{22}： 1 個 . . . 利得 1，2 個 . . . 利得 −1

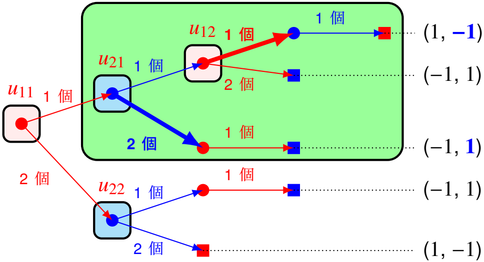
u_{11}： 1 個 . . . 利得 −1，2 個 . . . 利得 −1

純粋戦略のナッシュ均衡 (プレイヤー 2 が必ず勝つ)

プレイヤー 1： (u_{11} で 1 個, u_{12} で 1 個)，(u_{11} で 2 個, u_{12} で 1 個)

プレイヤー 2： (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)，(u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)

後退帰納法の例：石取りゲーム



後退帰納法の例：石取りゲーム

u_{12}： **1 個** . . . 利得 1，2 個 . . . 利得 −1

u_{21}： 1 個 . . . 利得 −1，**2 個** . . . 利得 1

u_{22}： 1 個 . . . 利得 1，2 個 . . . 利得 −1

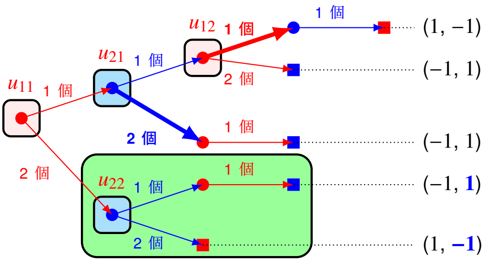
u_{11}： 1 個 . . . 利得 −1，2 個 . . . 利得 −1

純粋戦略のナッシュ均衡 (プレイヤー 2 が必ず勝つ)

プレイヤー 1： (u_{11} で 1 個, u_{12} で 1 個)，(u_{11} で 2 個, u_{12} で 1 個)

プレイヤー 2： (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)，(u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)

後退帰納法の例：石取りゲーム



後退帰納法の例：石取りゲーム

u_{12}： **1 個** ... 利得 1， 2 個 ... 利得 −1

u_{21}： 1 個 ... 利得 −1， **2 個** ... 利得 1

$\boldsymbol{u_{22}}$： **1 個 ... 利得 1，2 個 ... 利得 −1**

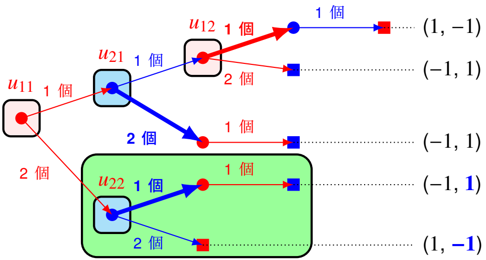
u_{11}： 1 個 ... 利得 −1， 2 個 ... 利得 −1

純粋戦略のナッシュ均衡 (プレイヤー 2 が必ず勝つ)

プレイヤー 1： (u_{11} で 1 個, u_{12} で 1 個)，(u_{11} で 2 個, u_{12} で 1 個)

プレイヤー 2： (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)，(u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)

後退帰納法の例：石取りゲーム



後退帰納法の例：石取りゲーム

u_{12}： **1 個** ... 利得 1，2 個 ... 利得 -1

u_{21}： 1 個 ... 利得 -1，**2 個** ... 利得 1

u_{22}： **1 個** ... 利得 1，2 個 ... 利得 -1

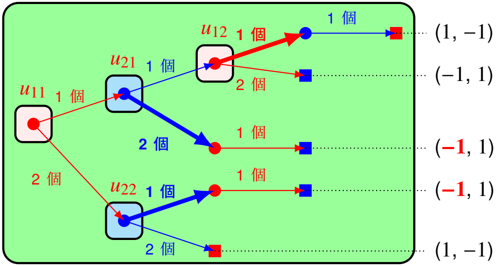
u_{11}： 1 個 ... 利得 -1，2 個 ... 利得 -1

純粋戦略のナッシュ均衡 (プレイヤー 2 が必ず勝つ)

プレイヤー 1： (u_{11} で 1 個, u_{12} で 1 個)，(u_{11} で 2 個, u_{12} で 1 個)

プレイヤー 2： (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)，(u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)

後退帰納法の例：石取りゲーム



後退帰納法の例：石取りゲーム

u_{12}： **1 個** . . . 利得 1，2 個 . . . 利得 −1

u_{21}： 1 個 . . . 利得 −1，**2 個** . . . 利得 1

u_{22}： **1 個** . . . 利得 1，2 個 . . . 利得 −1

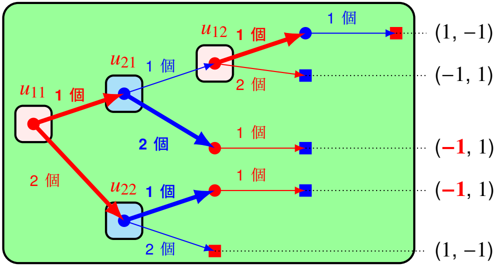
$\boldsymbol{u_{11}}$： 1 個 . . . 利得 −1，2 個 . . . 利得 −1

純粋戦略のナッシュ均衡 (プレイヤー 2 が必ず勝つ)

プレイヤー 1： (u_{11} で 1 個, u_{12} で 1 個)，(u_{11} で 2 個, u_{12} で 1 個)

プレイヤー 2： (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)，(u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)

後退帰納法の例：石取りゲーム



後退帰納法の例：石取りゲーム

u_{12}： **1 個** . . . 利得 1， 2 個 . . . 利得 −1

u_{21}： 1 個 . . . 利得 −1， **2 個** . . . 利得 1

u_{22}： **1 個** . . . 利得 1， 2 個 . . . 利得 −1

u_{11}： **1 個** . . . 利得 −1， **2 個** . . . 利得 −1

純粋戦略のナッシュ均衡 (プレイヤー 2 が必ず勝つ)

プレイヤー 1： (u_{11} で 1 個, u_{12} で 1 個)， (u_{11} で 2 個, u_{12} で 1 個)

プレイヤー 2： (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)， (u_{21} で 2 個, u_{22} で 1 個)

後退帰納法の練習問題：チェーン店ゲーム

チェーン店ゲーム (chainstore game)

- A 市の市場は，大手チェーンストア (プレイヤー 2) の支店が独占
- 同じ商品を販売する別の事業者 (プレイヤー 1) は，A 市に開店する (IN) か，他の小規模な市に開店する (OUT) かを決定
- 他の市に開店する場合，

  プレイヤー 1：　利得 1
  プレイヤー 2：　A 市の市場独占による利得 5

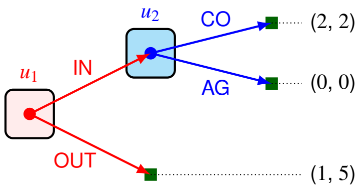
- プレイヤー 1 が A 市に開店する場合，プレイヤー 2 は，プレイヤー 1 と協調して価格を維持する（COOPERATIVE) か，値下げ競争を仕掛ける (AGGRESSIVE) かを決定
- 協調する場合，

  プレイヤー 1：　利得 2
  プレイヤー 2：　利得 2

- 競争する場合，

  プレイヤー 1：　利得 0
  プレイヤー 2：　利得 0

後退帰納法の練習問題：チェーン店ゲーム (続き)



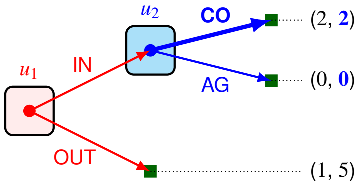
後退帰納法：チェーン店ゲーム

u_2：

u_1：

ナッシュ均衡は　　　　，そのときの利得は

後退帰納法の練習問題：チェーン店ゲーム (続き)



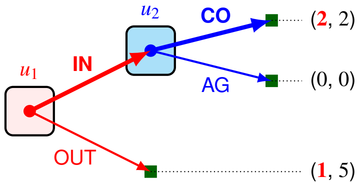
後退帰納法：チェーン店ゲーム

u_2： **CO**. . . 利得 2， AG. . . 利得 0

u_1：

ナッシュ均衡は　　　　，そのときの利得は

後退帰納法の練習問題：チェーン店ゲーム (続き)



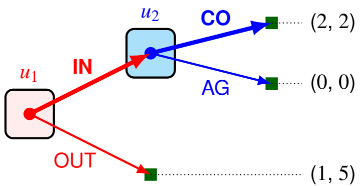
後退帰納法：チェーン店ゲーム

u_2： **CO**... 利得 2，AG... 利得 0

u_1： **IN**... 利得 2，OUT... 利得 1

ナッシュ均衡は　　　　，そのときの利得は

後退帰納法の練習問題：チェーン店ゲーム (続き)



後退帰納法：チェーン店ゲーム

u_2： **CO**. . . 利得 2，AG. . . 利得 0

u_1： **IN**. . . 利得 2，OUT. . . 利得 1

ナッシュ均衡は (**IN**, **CO**)，そのときの利得は (2, 2)

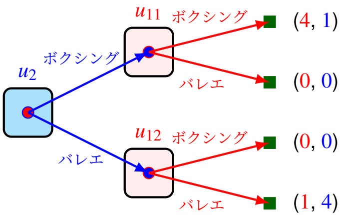
標準形ゲームへの変換

展開形ゲームの標準形ゲームへの変換

純粋戦略は各情報集合における行動の組合せ ⇒ すべて列挙

男女の争い（レディーファースト版）

- 同時手番ゲームではなく女 (プレイヤー 2) が先に選択する逐次手番ゲーム
- 他は男女の争いと同じ



利得行列

男 \ 女	ボ	バ
(ボ,　ボ)	(4, 1)	(0, 0)
(ボ,　バ)	(4, 1)	(1, 4)
(バ,　ボ)	(0, 0)	(0, 0)
(バ,　バ)	(0, 0)	(1, 4)

標準形ゲーム・展開形ゲームにおけるナッシュ均衡

チェーン店ゲームのナッシュ均衡

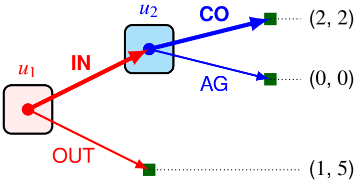
展開形ゲーム： (IN, CO)

標準形ゲーム： (IN, CO), (OUT, AG)

(OUT, AG) がナッシュ均衡であることの確認

- プレイヤー 1 が OUT ⇒ IN に変更：利得 1 ⇒ 0
- プレイヤー 2 が AG ⇒ CO に変更：利得 5 ⇒ 5

いずれも最適応答



利得行列

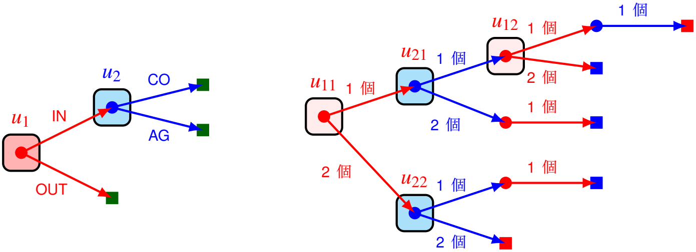
1 \ 2	CO	AG
IN	**(2, 2)**	(0, 0)
OUT	(1, 5)	**(1, 5)**

- プレイヤー 1 の行動が OUT の場合，プレイヤー 2 の手番には到達しない
- 到達しない手番についても最適な行動を想定するのが望ましいが，(OUT, AG) ではそうなっていない ⇒ **より条件の厳しい均衡の定義が必要**

部分ゲーム完全均衡

部分ゲーム (subgame)

- ゲームの木の一部でゲームとして完結しているもの
- 情報集合を分割してはだめ
- ゲームの木全体も部分ゲームの一つ
- 後退帰納法：部分ゲームにおけるナッシュ均衡



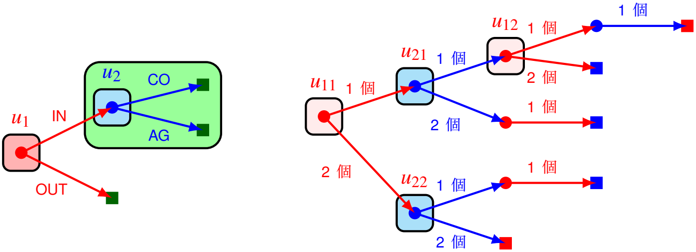
部分ゲーム完全均衡 (subgame perfect equilibrium)

- 展開形ゲームに対するナッシュ均衡よりも強い条件
- すべての妥当な (proper) 部分ゲームに対してナッシュ均衡

部分ゲーム完全均衡

部分ゲーム (subgame)

- ゲームの木の一部でゲームとして完結しているもの
- 情報集合を分割してはだめ
- ゲームの木全体も部分ゲームの一つ
- 後退帰納法：部分ゲームにおけるナッシュ均衡



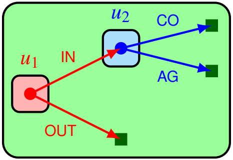
部分ゲーム完全均衡 (subgame perfect equilibrium)

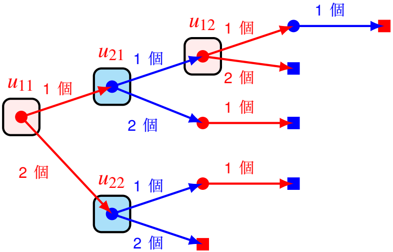
- 展開形ゲームに対するナッシュ均衡よりも強い条件
- すべての妥当な (proper) 部分ゲームに対してナッシュ均衡

部分ゲーム完全均衡

部分ゲーム (subgame)

- ゲームの木の一部でゲームとして完結しているもの
- 情報集合を分割してはだめ
- **ゲームの木全体も部分ゲームの一つ**
- 後退帰納法：部分ゲームにおけるナッシュ均衡





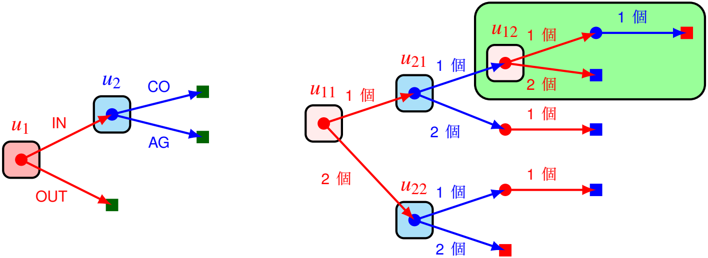
部分ゲーム完全均衡 (subgame perfect equilibrium)

- 展開形ゲームに対するナッシュ均衡よりも強い条件
- すべての妥当な (proper) 部分ゲームに対してナッシュ均衡

部分ゲーム完全均衡

部分ゲーム (subgame)

- ゲームの木の一部でゲームとして完結しているもの
- 情報集合を分割してはだめ
- ゲームの木全体も部分ゲームの一つ
- 後退帰納法：部分ゲームにおけるナッシュ均衡



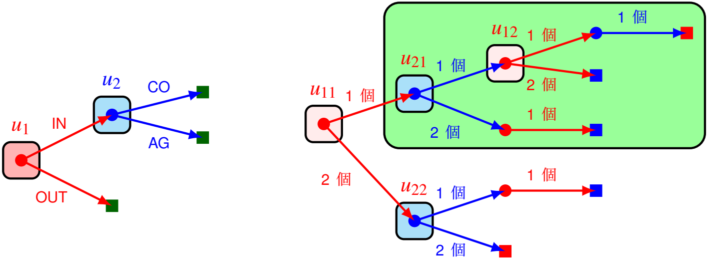
部分ゲーム完全均衡 (subgame perfect equilibrium)

- 展開形ゲームに対するナッシュ均衡よりも強い条件
- すべての妥当な (proper) 部分ゲームに対してナッシュ均衡

部分ゲーム完全均衡

部分ゲーム (subgame)

- ゲームの木の一部でゲームとして完結しているもの
- 情報集合を分割してはだめ
- ゲームの木全体も部分ゲームの一つ
- 後退帰納法：部分ゲームにおけるナッシュ均衡



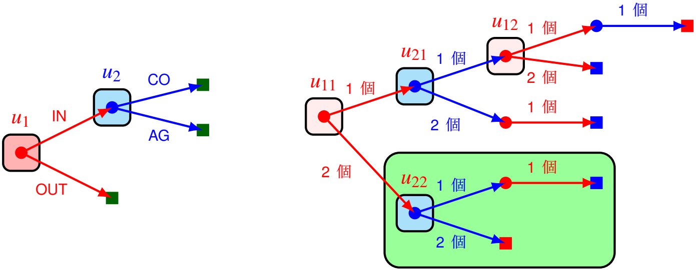
部分ゲーム完全均衡 (subgame perfect equilibrium)

- 展開形ゲームに対するナッシュ均衡よりも強い条件
- すべての妥当な (proper) 部分ゲームに対してナッシュ均衡

部分ゲーム完全均衡

部分ゲーム (subgame)

- ゲームの木の一部でゲームとして完結しているもの
- 情報集合を分割してはだめ
- ゲームの木全体も部分ゲームの一つ
- 後退帰納法：部分ゲームにおけるナッシュ均衡



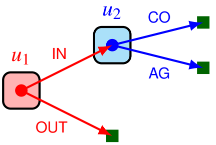
部分ゲーム完全均衡 (subgame perfect equilibrium)

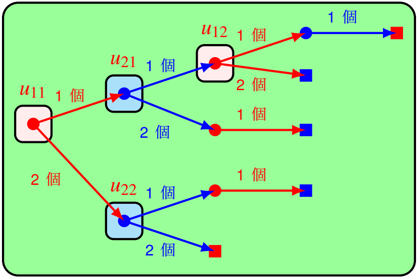
- 展開形ゲームに対するナッシュ均衡よりも強い条件
- すべての妥当な (proper) 部分ゲームに対してナッシュ均衡

部分ゲーム完全均衡

部分ゲーム (subgame)

- ゲームの木の一部でゲームとして完結しているもの
- 情報集合を分割してはだめ
- **ゲームの木全体も部分ゲームの一つ**
- 後退帰納法：部分ゲームにおけるナッシュ均衡





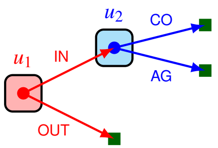
部分ゲーム完全均衡 (subgame perfect equilibrium)

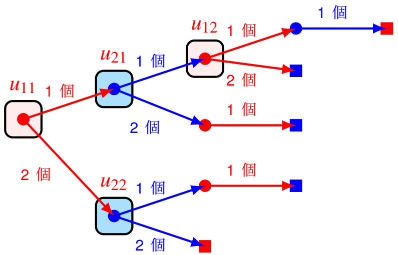
- 展開形ゲームに対するナッシュ均衡よりも強い条件
- すべての妥当な (proper) 部分ゲームに対してナッシュ均衡

部分ゲーム完全均衡

部分ゲーム (subgame)

- ゲームの木の一部でゲームとして完結しているもの
- **情報集合を分割してはだめ**
- ゲームの木全体も部分ゲームの一つ
- 後退帰納法：部分ゲームにおけるナッシュ均衡





部分ゲーム完全均衡 (subgame perfect equilibrium)

- 展開形ゲームに対するナッシュ均衡よりも強い条件
- すべての**妥当な** (proper) 部分ゲームに対してナッシュ均衡

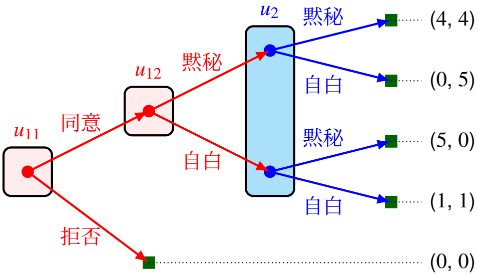
部分ゲーム完全均衡：妥当な部分ゲーム

妥当な部分ゲーム

部分ゲームのうち，開始点の手番が 1 つだけのもの

妥当な部分ゲームの例：囚人のジレンマ改 2

プレイヤー 1 が同意すれば囚人のジレンマをプレイ．そうでなければ終了



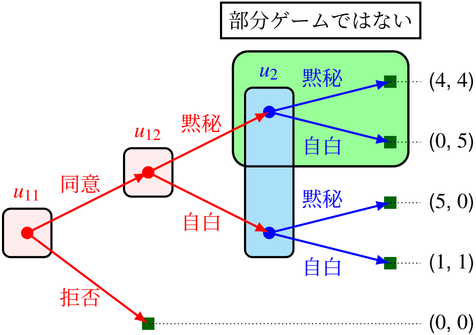
部分ゲーム完全均衡：妥当な部分ゲーム

妥当な部分ゲーム

部分ゲームのうち，開始点の手番が 1 つだけのもの

妥当な部分ゲームの例：囚人のジレンマ改 2

プレイヤー 1 が同意すれば囚人のジレンマをプレイ．そうでなければ終了



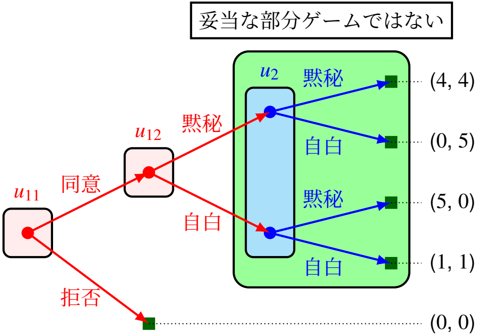
部分ゲーム完全均衡：妥当な部分ゲーム

妥当な部分ゲーム

部分ゲームのうち，開始点の手番が 1 つだけのもの

妥当な部分ゲームの例：囚人のジレンマ改 2

プレイヤー 1 が同意すれば囚人のジレンマをプレイ．そうでなければ終了



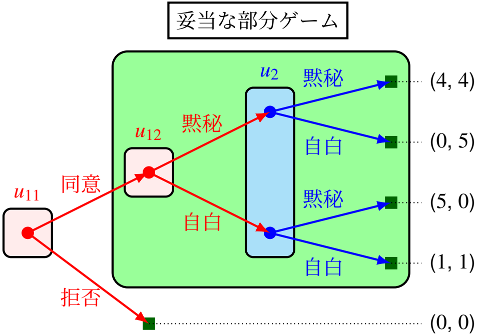
部分ゲーム完全均衡：妥当な部分ゲーム

妥当な部分ゲーム

部分ゲームのうち，開始点の手番が 1 つだけのもの

妥当な部分ゲームの例：囚人のジレンマ改 2

プレイヤー 1 が同意すれば囚人のジレンマをプレイ．そうでなければ終了



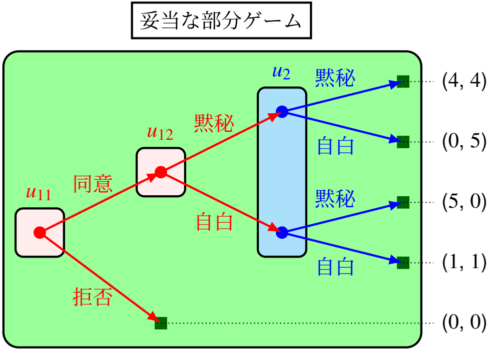
部分ゲーム完全均衡：妥当な部分ゲーム

妥当な部分ゲーム

部分ゲームのうち，開始点の手番が 1 つだけのもの

妥当な部分ゲームの例：囚人のジレンマ改 2

プレイヤー 1 が同意すれば囚人のジレンマをプレイ．そうでなければ終了



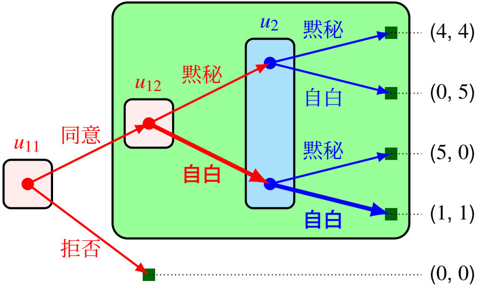
妥当な部分ゲーム

部分ゲームのうち，開始点の手番が 1 つだけのもの

妥当な部分ゲームの例：囚人のジレンマ改 2

プレイヤー 1 が同意すれば囚人のジレンマをプレイ．そうでなければ終了

囚人のジレンマのナッシュ均衡は (自白, 自白)



不完全情報ゲームの部分ゲーム完全均衡

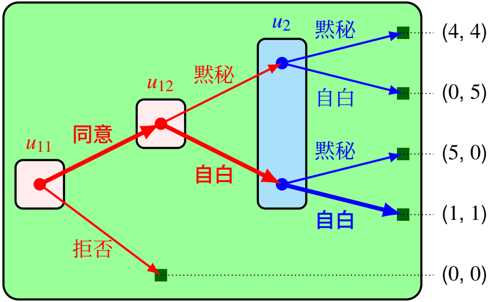
妥当な部分ゲーム

部分ゲームのうち，開始点の手番が 1 つだけのもの

妥当な部分ゲームの例：囚人のジレンマ改 2

プレイヤー 1 が同意すれば囚人のジレンマをプレイ．そうでなければ終了

部分ゲーム完全均衡は (同意・自白，自白)



練習問題：ボランティアのジレンマ

ボランティアのジレンマ (volunteer's dilemma)

- プレイヤーのいずれかがコスト 1 を負担すれば，全員がより大きな利得 3 を得る
  コストを負担したプレイヤーの利得は $3 - 1 = 2$
- コストを負担する人数が増えても利得は変わらない
- 誰もコストを負担しなければ利得は 0

利得行列
C は協調 (cooperation)・負担，D は裏切り (defection)・負担しない

1\2	C_2	D_2
C_1	$(2, 2)$	$(2, 3)$
D_1	$(3, 2)$	$(0, 0)$

ナッシュ均衡

練習問題：ボランティアのジレンマ

ボランティアのジレンマ (volunteer's dilemma)

- プレイヤーのいずれかがコスト 1 を負担すれば，全員がより大きな利得 3 を得る
  コストを負担したプレイヤーの利得は $3 - 1 = 2$
- コストを負担する人数が増えても利得は変わらない
- 誰もコストを負担しなければ利得は 0

利得行列
C は協調 (cooperation)・負担，D は裏切り (defection)・負担しない

1\2	C_2	D_2
C_1	$(2, 2)$	$(2, 3)$
D_1	$(3, 2)$	$(0, 0)$

ナッシュ均衡

(D_1, D_2)： D_1 から C_1 に変更すると，利得は 0 から 2 に増加 ⇒ D_1 は最適応答ではない

(C_1, D_2)： C_1 から D_1 に変更すると，利得は 2 から 0 に減少．D_2 から C_2 に変更すると，利得は 3 から 2 に減少．**ナッシュ均衡**

(D_1, C_2)： (C_1, D_2) と同様．**ナッシュ均衡**

(C_1, C_2)： C_1 から D_1 に変更すると，利得は 2 から 3 に増加．C_1 は最適応答ではない．

練習問題：ボランティアのジレンマ

ボランティアのジレンマ (volunteer's dilemma)

- プレイヤーのいずれかがコスト 1 を負担すれば，全員がより大きな利得 3 を得る
  コストを負担したプレイヤーの利得は $3 - 1 = 2$
- コストを負担する人数が増えても利得は変わらない
- 誰もコストを負担しなければ利得は 0

利得行列

C は協調 (cooperation)・負担，D は裏切り (defection)・負担しない

1\2	C_2	D_2
C_1	$(2, 2)$	$(2, 3)$
D_1	$(3, 2)$	$(0, 0)$

ナッシュ均衡

(D_1, D_2)： D_1 から C_1 に変更すると，利得は 0 から 2 に増加 $\Rightarrow$ D_1 は最適応答ではない

(C_1, D_2)： C_1 から D_1 に変更すると，利得は 2 から 0 に減少．D_2 から C_2 に変更すると，利得は 3 から 2 に減少．**ナッシュ均衡**

(D_1, C_2)： (C_1, D_2) と同様．**ナッシュ均衡**

(C_1, C_2)： C_1 から D_1 に変更すると，利得は 2 から 3 に増加．C_1 は最適応答ではない．

タダ乗りするのが得 (n 人の場合は $n - 1$ 人がタダ乗りするのがナッシュ均衡！)

練習問題：ボランティアのジレンマ (続き)

ボランティアのジレンマ ×2

1 回目のプレイでいずれも D ならば 2 回目をプレイ．2 回目はコストが 1 から 2 に増加

利得行列 (1 回目)

1\2	C_{21}	D_{21}
C_{11}	$(2,2)$	$(2,3)$
D_{11}	$(3,2)$	$(0,0)$

利得行列 (2 回目)

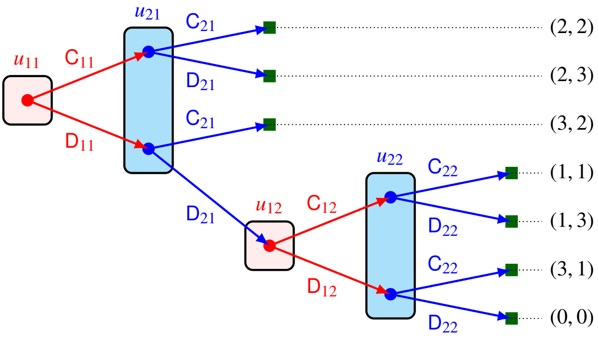
1\2	C_{22}	D_{22}
C_{12}	$(1,1)$	$(1,3)$
D_{12}	$(3,1)$	$(0,0)$

ゲームの木

練習問題：ボランティアのジレンマ (続き)

ボランティアのジレンマ ×2

1 回目のプレイでいずれも D ならば 2 回目をプレイ．2 回目はコストが 1 から 2 に増加



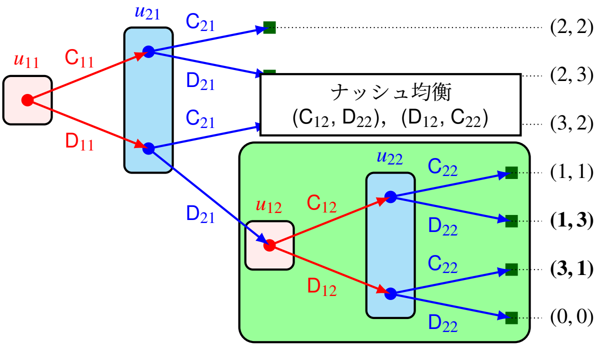
ゲームの木

部分ゲーム完全均衡

練習問題：ボランティアのジレンマ (続き)

ボランティアのジレンマ ×2

1 回目のプレイでいずれも D ならば 2 回目をプレイ．2 回目はコストが 1 から 2 に増加



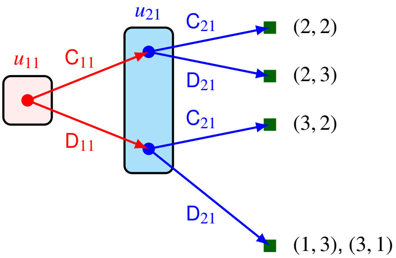
ゲームの木

部分ゲーム完全均衡

練習問題：ボランティアのジレンマ (続き)

ボランティアのジレンマ ×2

1 回目のプレイでいずれも D ならば 2 回目をプレイ．2 回目はコストが 1 から 2 に増加



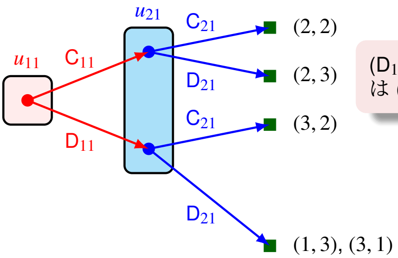
ゲームの木

部分ゲーム完全均衡

練習問題：ボランティアのジレンマ (続き)

ボランティアのジレンマ ×2

1 回目のプレイでいずれも D ならば 2 回目をプレイ．2 回目はコストが 1 から 2 に増加



(D_{11}, D_{21}) は，(C_{11}, D_{21}) あるいは (D_{11}, C_{21}) に支配される

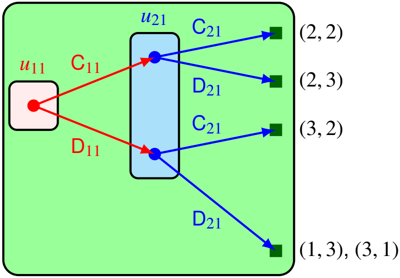
ゲームの木

部分ゲーム完全均衡

練習問題：ボランティアのジレンマ (続き)

ボランティアのジレンマ ×2

1 回目のプレイでいずれも D ならば 2 回目をプレイ．2 回目はコストが 1 から 2 に増加



ナッシュ均衡
(C_{11}, D_{21}), (D_{11}, C_{21})

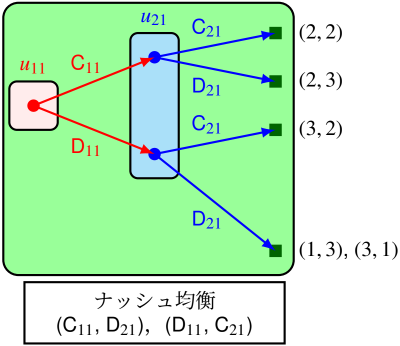
ゲームの木

部分ゲーム完全均衡

練習問題：ボランティアのジレンマ (続き)

ボランティアのジレンマ ×2

1 回目のプレイでいずれも D ならば 2 回目をプレイ．2 回目はコストが 1 から 2 に増加



ゲームの木

部分ゲーム完全均衡

(C_{11}, D_{21}), (D_{11}, C_{21}) と (C_{12}, D_{22}), (D_{12}, C_{22}) の組合せ (4 通り)

繰り返しゲーム

繰り返しゲーム (repeated game)

同一のゲームを繰り返しプレイ

割引因子 (discount factor)

- 将来得られるであろう利得は，すぐに得られる利得より価値が低い
  $\Rightarrow$ 利得を割り引いて考える
- 現在から t 回先に得られる利得は δ^t 倍
- δ $(0 < \delta < 1)$：**割引因子** (discount factor)

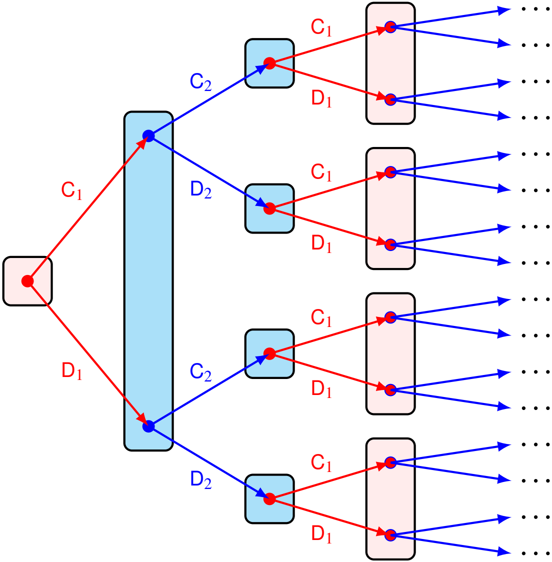
繰り返し囚人のジレンマ

以下の囚人のジレンマの一般形を無限回プレイ．黙秘は協力 (coorperation; C), 自白は裏切り (defection; D) とする．ただし，$P > Q > R > S$．

利得行列

$1 \setminus 2$	C_2	D_2
C_1	(Q, Q)	(S, P)
D_1	(P, S)	(R, R)

繰り返し囚人のジレンマの展開形



ゲームの木が無限に大きくなるので，別の方法で解析

繰り返し囚人のジレンマにおける戦略

繰り返し囚人のジレンマにおける戦略

以下の 4 通りを考える

常に協力する戦略 (all-C)：	常に協力
常に裏切る戦略 (all-D)：	常に裏切り
トリガー戦略 (trigger)：	初回は協力．2 回目以降は，相手が過去一度でも裏切っていれば裏切り，そうでなければ協力
しっぺ返し戦略 (tit-for-tat)：	初回は協力．2 回目以降は相手の直前の行動を真似る

(all-C, all-C) における各プレイヤーの割引総利得 (1 回の利得 (Q, Q))

$$Q + \delta Q + \delta^2 Q + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t Q = \frac{Q}{1-\delta}$$

(all-C, trigger)，(all-C, tit-for-tat)，(trigger, trigger)，(tit-for-tat, tit-for-tat) も同じ

繰り返し囚人のジレンマにおける各戦略の割引総利得

利得行列

1 \ 2	C$_2$	D$_2$
C$_1$	(Q, Q)	(S, P)
D$_1$	(P, S)	(R, R)

(all-D, trigger)，(all-D, tit-for-tat) における各プレイヤーの割引総利得

1 回目は (P, S)，2 回目以降は (R, R) なので，プレイヤー 1 は

$$P + \frac{\delta R}{1-\delta} = \frac{R}{1-\delta} + (P - R)$$

プレイヤー 2 は

$$S + \frac{\delta R}{1-\delta} = \frac{R}{1-\delta} - (R - S)$$

各戦略に対する利得行列

1 \ 2	all-C	all-D	trigger	tit-for-tat
all-C	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{S}{1-\delta}, \frac{P}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$
all-D	$\left(\frac{P}{1-\delta}, \frac{S}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{R}{1-\delta}, \frac{R}{1-\delta}\right)$	$\left(P + \frac{\delta R}{1-\delta}, S + \frac{\delta R}{1-\delta}\right)$	$\left(P + \frac{\delta R}{1-\delta}, S + \frac{\delta R}{1-\delta}\right)$
trigger	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(S + \frac{\delta R}{1-\delta}, P + \frac{\delta R}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$
tit-for-tat	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(S + \frac{\delta R}{1-\delta}, P + \frac{\delta R}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$

繰り返し囚人のジレンマにおけるナッシュ均衡

各戦略に対する利得行列

$1 \setminus 2$	all-C	all-D	trigger	tit-for-tat
all-C	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{S}{1-\delta}, \frac{P}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$
all-D	$\left(\frac{P}{1-\delta}, \frac{S}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{R}{1-\delta}, \frac{R}{1-\delta}\right)$	$\left(P + \frac{\delta R}{1-\delta}, S + \frac{\delta R}{1-\delta}\right)$	$\left(P + \frac{\delta R}{1-\delta}, S + \frac{\delta R}{1-\delta}\right)$
trigger	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(S + \frac{\delta R}{1-\delta}, P + \frac{\delta R}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$
tit-for-tat	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(S + \frac{\delta R}{1-\delta}, P + \frac{\delta R}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$	$\left(\frac{Q}{1-\delta}, \frac{Q}{1-\delta}\right)$

ナッシュ均衡

- (all-D, all-D) (ワンショット囚人のジレンマと同様)
- (trigger, trigger)，(trigger, tit-for-tat)，(tit-for-tat, trigger)，(tit-for-tat, tit-for-tat)

$$P + \frac{\delta R}{1-\delta} = (P-R) + \frac{R}{1-\delta} \leq \frac{Q}{1-\delta}$$

のときナッシュ均衡．整理して，$\delta \geq \dfrac{P-Q}{P-R}$ のときナッシュ均衡

- 割引因子 δ が大きければ，プレイヤー間の協調が生まれる
- 割引因子 $\delta = 0$ のときは，将来の利得を無視するため協調は生まれない
- **任意の戦略を許しても**，(δ が大きければ) (triger, triger) や (tit-for-tat, tit-for-tat) などはナッシュ均衡となることを示せる

アクセルロッドの実験

アクセルロッド (Robert Axelrod) の実験 (1980)

- 繰り返し囚人のジレンマに対するコンピュータプログラムの競技大会
- 反復回数 200 回
- 14 のプログラム + 行動をランダムに選択するプログラムの総当たり戦
- 優勝は**しっぺ返し戦略**，最下位は (さすがに) ランダム
- しっぺ返し戦略のプログラム (FORTRAN) はたった 4 行!
- 一番長い 77 行のプログラムは 14 位
- 2 位もしっぺ返し戦略 (41 行) だが，相手が 2 回目に裏切り始めると，相手より 1 回多く裏切り返す戦略．そして，3 回目は 2 回，4 回目は 3 回と増やしていく．さらに，ある条件を満たすとこの回数をリセット．

フォーク定理

標準形ゲームにおけるミニマックス利得 (minmax payoff)

$$v_i = \min_{q_{-i} \in Q_{-i}} \max_{q_i \in Q_i} f_i(q_i, q_{-i})$$

プレイヤー i が (混合戦略も含めて) 最適行動を取るなら，最低でも v_i の利得が得られる

割引平均利得 (discounted average payoff)

割引総利得 V に対して $(1-\delta)V$

毎回一定の利得 c が得られるとすると，割引総利得は $\frac{c}{1-\delta}$. $\frac{c}{1-\delta} = V$ とおいて，$c = (1-\delta)V$ が平均を表すと考える

フォーク定理 (folk theorem)

無限回繰り返しゲームにおいて，割引因子 δ を十分大きくとれば，各プレイヤー i の**割引平均利得**が**ミニマックス利得** v_i より大きいナッシュ均衡を (実行可能な範囲で) 達成可能

「folk」は民間伝承 (folklore) から来ている．研究者の間では知られた定理だったが，誰も証明を出版しようとしなかったため

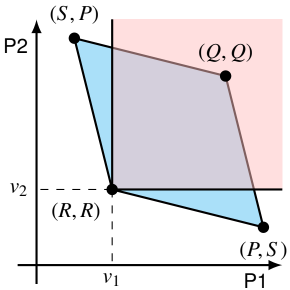
繰り替し囚人のジレンマに対するフォーク定理

利得行列

1 \ 2	C$_2$	D$_2$
C$_1$	(Q, Q)	(S, P)
D$_1$	(P, S)	(R, R)

ミニマックス利得 $v_1 = v_2$

- プレイヤー 1 の D$_1$ は C$_1$ を支配 ⇒ プレイヤー 2 の行動にかかわらず最適応答は D$_1$
- プレイヤー 1 の利得を最小化するプレイヤー 2 の行動は D$_2$
- ミニマックス利得 $v_1 = v_2 = R$



- 実行可能な範囲は純粋戦略の組 (Q, Q), (S, P), (R, R), (P, S) で囲まれた領域
- $x > v_1$ かつ $y > v_2$ と重なる領域が，ナッシュ均衡で達成可能な割引平均利得
- (trigger, trigger) の割引平均利得

$$\left((1-\delta)\frac{Q}{1-\delta}, (1-\delta)\frac{Q}{1-\delta}\right) = (Q, Q)$$