オペレーションズ・リサーチ II (5)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

スケジュール

No.	内容
1	導入 (非線形最適化問題，ゲーム理論，多目的最適化問題)
2	非線形計画 1 (勾配，ヘッセ行列，凸性，最適性条件，ニュートン法)
3	非線形計画 2 (最急降下法，準ニュートン法，共役勾配法，信頼領域法)
4	非線形計画 3 (制約つき問題の最適性条件，KKT 条件，ペナルティ関数法，２次計画法，逐次 2 次計画法)
5	ゲーム理論 1 (種々のゲーム，標準形，純粋戦略，混合戦略，ナッシュ均衡)
6	ゲーム理論 2 (展開形ゲーム，繰り返しゲーム)
7	多目的最適化 (パレート最適性，重み付け法，ϵ 制約法，重み付きメトリック法)

ゲーム理論の基礎

ゲーム理論とは (復習)

- 意思決定を行う複数の人 (意思決定主体・プレイヤー) が相互にかかわり合う状況を数理モデルを用いて解析する学問
- ジョン・フォン・ノイマン (John von Neumann) の論文「On the theory of games of strategy」(1928) が始まり
- フォン・ノイマンと経済学者オスカー・モルゲンシュテルン (Oskar Morgenstern) の著書「ゲームの理論と経済行動」(1944) により学問分野として確立
- オペレーションズ・リサーチだけでなく経済学や心理学でも用いられる

用語の説明

プレイヤー (player)	ゲームに参加して意思決定を行う人
手番 (move)	各プレイヤーが行動するタイミング
戦略 (strategy)	各プレイヤーの行動 (action) 計画
結果 (outcome/consequence)	行動によって決まるゲームの結果
選好順序 (preference order)	結果に対する各プレイヤーの評価
利得 (payoff)・**効用** (utility)	選好順序を数値化したもの

ゲームの種類：ゼロ和ゲーム・非ゼロ和ゲーム

ゼロ和ゲーム・非ゼロ和ゲーム

ゼロ和ゲーム (zero-sum game) 各プレイヤーの利害が完全に相反するゲーム．プレイヤーの総利得が一定 (0)

非ゼロ和ゲーム (non-zero-sum game) 各プレイヤーの行動の組み合わせにより総利得が変化するゲーム

ゼロ和ゲームの例：じゃんけんゲーム

プレイヤー 1, 2 がじゃんけんをし，負けた方が勝った方に 10 円を支払う．引き分けなら何もしない．

儲け (プレイヤー 1, プレイヤー 2) の表．(利得)=(儲け)

1 \ 2	グー	チョキ	パー
グー	(0 円，0 円)	(10 円，−10 円)	(−10 円, 10 円)
チョキ	(−10 円，10 円)	(0 円，0 円)	(10 円, −10 円)
パー	(10 円，−10 円)	(−10 円，10 円)	(0 円, 0 円)

非ゼロ和ゲームの例：囚人のジレンマ (prisoner’s dilemma)

刑期 (プレイヤー 1, プレイヤー 2) の表．(利得)= −(刑期)

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年，1 年)	(10 年，3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月，10 年)	(8 年，8 年)

ゲームの種類：ワンショットゲーム・繰り返しゲーム

ワンショットゲーム・繰り返しゲーム

ワンショットゲーム (one-shot game)　ゲームは 1 回で終了
　繰り返しゲーム (repeated game)　同じゲームを複数回繰り返す

繰り返しゲームの分類

有限回繰り返し (finitely repeated) ゲーム　有限回で終了
無限回繰り返し (infinitely repeated) ゲーム　無限回繰り返す

有限回で終了することがわかっていれば，プレイヤーの戦略が変化する可能性がある

繰り返しゲームの例

- 繰り返しじゃんけんゲーム
- 繰り返し囚人のジレンマ ⇒ 「しっぺ返し戦略」が有名

ゲームの種類：同時手番ゲーム・逐次手番ゲーム

同時手番ゲーム・逐次手番ゲーム

同時手番ゲーム (simultanous game)
すべてのプレイヤーが同時に行動．その際，他のプレイヤーの行動を知ることができない

逐次手番ゲーム (sequential game)
プレイヤーは一人ずつ順番に行動．行動し終わった他のプレイヤーの行動を知ることができる (ただし，後で説明する完全情報ゲームの場合)

同時手番ゲームの例

- じゃんけんゲーム，繰り返しじゃんけんゲーム
- 囚人のジレンマ，繰り返し囚人のジレンマ

逐次手番ゲームの例

- 将棋，囲碁，チェスなどのボードゲーム，麻雀
- 神経衰弱，大富豪などのカードゲーム

ゲームの種類：完全情報ゲーム・不完全情報ゲーム

完全情報ゲーム・不完全情報ゲーム

完全情報ゲーム (game with perfect information)*
すべてのプレイヤーが，各プレイヤーのこれまでの行動とその結果を知っている

不完全情報ゲーム (game with imperfect information)
プレイヤーのこれまでの行動とその結果を，一部またはすべて知ることができない

* 正確な定義は，「展開型ゲームとして記述したとき，すべての情報集合がただ 1 つの手番からなるゲーム」

完全情報ゲームの例

- 将棋，囲碁，チェスなどのボードゲーム

不完全情報ゲームの例

- ポーカーやブリッジなどのカードゲーム，麻雀
  他のプレイヤーの手札や手牌を見ることができない
- 繰り返しじゃんけん・囚人のジレンマなど同時手番ゲーム
  「これまでの行動」には同じ回の他のプレイヤーの手番も含まれるため

ゲームの種類：情報完備ゲーム・情報不完備ゲーム

情報完備ゲーム・情報不完備ゲーム

情報完備ゲーム (game with complete information)
すべてのプレイヤーが，ゲームのルールや各プレイヤーの取りうる戦略・利得などの情報を共有知識 (common knowledge) として持つ

情報不完備ゲーム (game with incomplete information)
ゲームのルールやプレイヤーの取りうる戦略や利得などの情報を一部利用できない

情報不完備ゲームの例

- 人狼ゲーム
  他のプレイヤーの役割・目的がわからない

ゲームの種類：協力ゲーム・非協力ゲーム

協力ゲーム・非協力ゲーム

協力ゲーム (cooperative game)

プレイヤーが互いに交渉して提携 (coaliation) することが可能．ただし，

- 合意に拘束力がある (裏切りは不可)
- ゲームの戦略に関する事前 (ゲーム開始前) の交渉

非協力ゲーム (noncooperative game)

事前に拘束力のある合意を取ることができない

- ゲーム内での合意や提携は許される

非協力ゲームの例

- (繰り返し) じゃんけんゲーム，(繰り返し) 囚人のジレンマ
- 交互提案ゲーム ⇒ ゲーム内で交渉・合意を行うため，非協力ゲーム

交互提案 (alternating offers, sequential bargening) ゲーム

- 1 万円をプレイヤー 1, 2 で分配する
- まずプレイヤー 1 が自分の取り分を提案する．プレイヤー 2 が受け入れれば終了
- 次にプレイヤー 2 が自分の取り分を提案する．プレイヤー 1 が受け入れれば終了．
- 以下，これを合意が得られるまで繰り返す

ゲームの種類：有限ゲーム・無限ゲーム

有限ゲーム・無限ゲーム

有限ゲーム (finite game) 有限の手番でゲームが終了する

無限ゲーム (infinite game) 有限の手番でゲームが終了するとは限らない

有限ゲームの例

- オセロ，将棋 *，チェス *，囲碁 *

* 千日手などは別の方法で解決するとした場合

無限ゲームの例

- 交互提案ゲーム，将棋，チェス，囲碁

ゲームの種類：確定ゲーム・不確定ゲーム

確定ゲーム・不確定ゲーム

確定ゲーム (deterministic game) 偶然に左右されないゲーム

不確定ゲーム (non-deterministic game) 偶然の要素 (偶然手番) があるゲーム

確定ゲームの例

- 将棋，囲碁，チェスなどのボードゲーム

不確定ゲームの例

- ポーカーやブリッジなどのカードゲーム，麻雀

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを，女はバレエをより好むが，二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして，それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4,　1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので，今は別の形で表すことも多いが，このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・非ゼロ和	情報完備・情報不完備
ワンショット・繰り返し	協力・非協力
同時手番・逐次手番	有限・無限
完全情報・不完全情報	確定・不確定

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを，女はバレエをより好むが，二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして，それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので，今は別の形で表すことも多いが，このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**	情報完備・情報不完備
ワンショット・繰り返し	協力・非協力
同時手番・逐次手番	有限・無限
完全情報・不完全情報	確定・不確定

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを，女はバレエをより好むが，二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして，それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので，今は別の形で表すことも多いが，このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**	情報完備・情報不完備
ワンショット・繰り返し	協力・非協力
同時手番・逐次手番	有限・無限
完全情報・不完全情報	確定・不確定

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを，女はバレエをより好むが，二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして，それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4,　1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので，今は別の形で表すことも多いが，このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**	情報完備・情報不完備
ワンショット・繰り返し	協力・非協力
同時手番・逐次手番 *	有限・無限
完全情報・不完全情報	確定・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを，女はバレエをより好むが，二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして，それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので，今は別の形で表すことも多いが，このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**	情報完備・情報不完備
ワンショット・繰り返し	協力・非協力
同時手番・逐次手番 *	有限・無限
完全情報・**不完全情報**	確定・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを，女はバレエをより好むが，二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして，それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので，今は別の形で表すことも多いが，このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**	**情報完備**・情報不完備
ワンショット・繰り返し	協力・非協力
同時手番・逐次手番 *	有限・無限
完全情報・**不完全情報**	確定・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを，女はバレエをより好むが，二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして，それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので，今は別の形で表すことも多いが，このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**	**情報完備**・情報不完備
ワンショット・繰り返し	協力・**非協力**
同時手番・逐次手番 *	有限・無限
完全情報・**不完全情報**	確定・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを，女はバレエをより好むが，二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして，それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので，今は別の形で表すことも多いが，このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**	**情報完備**・情報不完備
ワンショット・繰り返し	協力・**非協力**
同時手番・逐次手番 *	**有限**・無限
完全情報・**不完全情報**	確定・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを，女はバレエをより好むが，二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして，それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4,　1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので，今は別の形で表すことも多いが，このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**	**情報完備**・情報不完備
ワンショット・繰り返し	協力・**非協力**
同時手番・逐次手番 *	**有限**・無限
完全情報・**不完全情報**	**確定**・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

標準形ゲーム

標準形ゲーム (normal form game) とは?

ゲームの表現方法の一つ．戦略形ゲーム (strategic form game) ともいう

標準形ゲームの要素

- プレイヤー数：n
- プレイヤー i が選択可能な行動 (戦略) の集合 (**戦略集合**)：S_i
- プレイヤー i の**利得関数** (payoff function)：$f_i(s_1, \ldots, s_n)$ $(s_j \in S_j)$
  - $f_i(s_1, \ldots, s_n)$：プレイヤー j $(1 \leq j \leq n)$ の行動が s_j のときのプレイヤー i の利得
  - **利得行列** (payoff matrix)：利得関数を表 (行列) で表したもの

戦略は行動計画 (行動の集まり) だが，標準形ゲームでは行動と (純粋) 戦略は同じ意味

例：じゃんけんゲーム

- プレイヤー数 $n = 2$
- 戦略集合 $S_1 = S_2 = \{$ グー, チョキ, パー $\}$
- 利得関数 $f_1(s_1, s_2) = f_2(s_2, s_1)$ (対称ゲーム)

$$f_1(s_1, s_2) = \begin{cases} 0 & ((s_1, s_2) = (\text{グー}, \text{グー}), (\text{チョキ}, \text{チョキ}), (\text{パー}, \text{パー})) \\ 10 & ((s_1, s_2) = (\text{グー}, \text{チョキ}), (\text{チョキ}, \text{パー}), (\text{パー}, \text{グー})) \\ -10 & ((s_1, s_2) = (\text{グー}, \text{パー}), (\text{チョキ}, \text{グー}), (\text{パー}, \text{チョキ})) \end{cases}$$

ゼロ和ゲーム・非ゼロ和ゲーム

ゼロ和ゲーム

任意の $s_1, \ldots, s_n$ の組に対し,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(s_1, \ldots, s_n) = 0 \tag{*}$$

が成り立つ

非ゼロ和ゲーム ゼロ和ゲームではないゲーム

定和ゲーム (*) 式の右辺が定数 K のゲーム．ゼロ和ゲームと等価

じゃんけんゲームは明らかにゼロ和ゲーム．たとえば，$(s_1, s_2) = (\text{グー}, \text{チョキ})$ に対して

$$\sum_{i=1}^{2} f_i(\text{グー}, \text{チョキ}) = f_1(\text{グー}, \text{チョキ}) + f_2(\text{グー}, \text{チョキ}) = 10 + (-10) = 0$$

囚人のジレンマ (利得は −(刑期)) は,

$$f_1(\text{自白}, \text{自白}) + f_2(\text{自白}, \text{自白}) = -8 + (-8) = -16$$

$$f_1(\text{黙秘}, \text{黙秘}) + f_2(\text{黙秘}, \text{黙秘}) = -1 + (-1) = -2$$

より非ゼロ和で，定和でもない．

最適応答

最適応答 (best response)

プレイヤー i の行動 $s_i \in S_i$ が他の $n-1$ のプレイヤーの行動の組 $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S_{-i}$ に対して**最適応答** (best response) であるとは,

$$f_i(s_i, s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} f_i(t_i, s_{-i})$$

が成り立つことをいう ($f_i(s_i, s_{-i}) = f_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$).

他のプレイヤーの行動が与えられているとして，自身の利得が最適 (最大) になる行動

最適応答の例：じゃんけんゲーム

プレイヤー 2 の「パー」に対するプレイヤー 1 の最適応答は「チョキ」

最適応答の例：囚人のジレンマ

プレイヤー 2 の「黙秘」に対するプレイヤー 1 の最適応答は「自白」

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年，1 年)	(10 年，3 ヶ月)
自白	(**3 ヶ月**，10 年)	(8 年，8 年)

支配戦略

弱支配 (weak dominance)

プレイヤー i について，行動 s_i が行動 t_i を**弱支配**するとは，以下の 2 条件が成り立つことである．

1. すべての $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $f_i(s_i, s_{-i}) \geq f_i(t_i, s_{-i})$
2. 少なくとも 1 つの $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $f_i(s_i, s_{-i}) > f_i(t_i, s_{-i})$

(強) 支配 ((strong) dominance)

プレイヤー i について，行動 s_i が行動 t_i を (強) **支配**するとは，以下の条件が成り立つことである．

1. すべての $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $f_i(s_i, s_{-i}) > f_i(t_i, s_{-i})$

最適応答との関係

プレイヤー i の行動 s_i が s_{-i} に対する最適応答なら，s_i を強支配する行動は存在しない

支配戦略の例：囚人のジレンマ

プレイヤー 1 の「**自白**」は「**黙秘**」を支配する．プレイヤー 2 も同様

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(**1 年**，1 年)	(**10 年**，3 ヶ月)
自白	(**3 ヶ月**，10 年)	(**8 年**，8 年)

ナッシュ均衡

ナッシュ均衡 (Nash equilibrium)

プレイヤーの行動の組 $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ が**ナッシュ均衡** (Nash equilibrium) であるとは，すべてのプレイヤー i $(1 \leq i \leq n)$ について，s_i^* が s_{-i}^* に対する最適応答であること，すなわち，任意の i $(1 \leq i \leq n)$ と任意の $s_i \in S_i$ に対して
$f_i(s_i, s_{-i}^*) \leq f_i(s_i^*, s_{-i}^*)$ が成り立つことをいう．

「ナッシュ」はアメリカ人数学者ジョン・ナッシュ (John Nash) から．1994 年にノーベル経済学賞を受賞している．映画「ビューティフル・マインド」(2001) のモデル．

ナッシュ均衡の例：囚人のジレンマ

ナッシュ均衡は **(自白, 自白)** のみ．

- (自白, 自白) プレイヤー 1, 2 とも，自白から黙秘に変更すると，刑期が 8 年から 10 年に延びる
- (自白, 黙秘) プレイヤー 2 は，自白すれば刑期が 10 年から 8 年に減る．(黙秘, 自白) も同様
- (黙秘, 黙秘) プレイヤー 1, 2 とも，黙秘から自白に変更すると，刑期が 1 年から 3 ヶ月に減る

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年，1 年)	(10 年，3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月，10 年)	**(8 年，8 年)**

ナッシュ均衡の例

ナッシュ均衡の例：じゃんけんゲーム

ナッシュ均衡は**存在しない**.

(グー, グー) プレイヤー 1, 2 とも，グーからパーに変更すると，利得が 0 円から 10 円に増加．(チョキ, チョキ)，(パー, パー) も同様

(グー, チョキ) プレイヤー 2 は，チョキからパーに変更すると，利得が −10 円から 10 円に増加．他の組合せも同様.

1 \ 2	グー	チョキ	パー
グー	(0 円, 0 円)	(10 円, −10 円)	(−10 円, 10 円)
チョキ	(−10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)	(10 円, −10 円)
パー	(10 円, −10 円)	(−10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)

練習問題：男女の争いのナッシュ均衡

ナッシュ均衡は？

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ナッシュ均衡の例

ナッシュ均衡の例：じゃんけんゲーム

ナッシュ均衡は**存在しない**.

(グー, グー) プレイヤー 1, 2 とも，グーからパーに変更すると，利得が 0 円から 10 円に増加．(チョキ, チョキ)，(パー, パー) も同様

(グー, チョキ) プレイヤー 2 は，チョキからパーに変更すると，利得が −10 円から 10 円に増加．他の組合せも同様.

1 \ 2	グー	チョキ	パー
グー	(0 円，0 円)	(10 円，−10 円)	(−10 円, 10 円)
チョキ	(−10 円，10 円)	(0 円，0 円)	(10 円, −10 円)
パー	(10 円，−10 円)	(−10 円，10 円)	(0 円, 0 円)

練習問題：男女の争いのナッシュ均衡

ナッシュ均衡は **(ボクシング, ボクシング)**，**(バレエ, バレエ)** の 2 つ.

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(**4**，**1**)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(**1**, **4**)

ナッシュ均衡の意味 (その 2)

他のプレイヤーの行動を予想して自分の行動を最適化していくと，ナッシュ均衡に収束

囚人のジレンマ

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年，1 年)	(10 年，3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月，10 年)	**(8 年，8 年)**

相手が黙秘すると予想した場合

プレイヤー 1 「プレイヤー 2 が黙秘する」と予想
⇒ 最適応答は「自白」

プレイヤー 2 「プレイヤー 1 は,「プレイヤー 2 が黙秘する」と予想して自白する」と予想
⇒ 最適応答は「自白」

プレイヤー 1 「プレイヤー 2 は,「プレイヤー 1 は,「プレイヤー 2 が黙秘する」と予想して自白する」と予想し，結局自白する」と予想
⇒ 最適応答は「自白」. (**自白**, **自白**) がナッシュ均衡

相手が自白すると予想した場合

プレイヤー 1 「プレイヤー 2 が自白する」と予想
⇒ 最適応答は「自白」

プレイヤー 2 「プレイヤー 1 は,「プレイヤー 2 が自白する」と予想して自白する」と予想
⇒ 最適応答は「自白」. (**自白**, **自白**) がナッシュ均衡

ナッシュ均衡の意味 (その 2)

男女の争い

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(**4**, **1**)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(**1**, **4**)

女が「男はボクシングを選ぶ」と予想した場合

女　「男はボクシングを選ぶ」と予想
⇒ 最適応答は「ボクシング」

男　「女は,「男はボクシングを選ぶ」と予想してボクシングを選ぶ」と予想
⇒ 最適応答は「ボクシング」. (**ボクシング**, **ボクシング**) がナッシュ均衡

女が「男はバレエを選ぶ」と予想した場合

女　「男はバレエを選ぶ」と予想
⇒ 最適応答は「バレエ」

男　「女は,「男はバレエを選ぶ」と予想してバレエを選ぶ」と予想
⇒ 最適応答は「バレエ」. (**バレエ**, **バレエ**) がナッシュ均衡

ナッシュ均衡の意味 (その 3)

じゃんけんゲーム

1 \ 2	グー	チョキ	パー
グー	(0 円, 0 円)	(10 円, −10 円)	(−10 円, 10 円)
チョキ	(−10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)	(10 円, −10 円)
パー	(10 円, −10 円)	(−10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)

「相手がグー」と予想した場合

プレイヤー 1　「プレイヤー 2 はグー」と予想
⇒ 最適応答は「パー」

プレイヤー 2　「プレイヤー 1 は,「プレイヤー 2 はグー」と予想してパー」と予想
⇒ 最適応答は「チョキ」

プレイヤー 1　「プレイヤー 2 は,「プレイヤー 1 は,「プレイヤー 2 はグー」と予想してパー」と予想」してチョキ」と予想
⇒ 最適応答は「グー」

プレイヤー 2　「プレイヤー 1 は,「プレイヤー 2 は,「プレイヤー 1 は,「プレイヤー 2 はグー」と予想してパー」と予想」してチョキ」と予想してグー」と予想
⇒ 最適応答は「パー」

………　………

収束しない．ナッシュ均衡は存在しない

ゼロ和 2 人ゲームのナッシュ均衡

任意の $s_1 \in S_1,\, s_2 \in S_2$ の組に対して $f_1(s_1, s_2) + f_2(s_1, s_2) = 0$ が成り立つので,

$$f_1(s_1, s_2) = f(s_1, s_2), \quad f_2(s_1, s_2) = -f(s_1, s_2)$$

と表す.

プレイヤー 1 は $f(s_1, s_2)$ の**最大化**, プレイヤー 2 は $f(s_1, s_2)$ の**最小化**が目的

ゼロ和 2 人ゲームのナッシュ均衡

(s_1^*, s_2^*) がナッシュ均衡となるための必要十分条件は, (s_1^*, s_2^*) が $f(s_1, s_2)$ の**鞍点**であること.

証明

- プレイヤー 1 の行動 s_1^* はプレイヤー 2 の行動 s_2^* に対する最適応答
  $\Leftrightarrow f(s_1, s_2^*) \leq f(s_1^*, s_2^*) \ \ (\forall s_1 \in S_1)$
  $\Leftrightarrow f(s_1^*, s_2^*)$ はプレイヤー 1 の行動に関して極大
- プレイヤー 2 の行動 s_2^* はプレイヤー 1 の行動 s_1^* に対する最適応答
  $\Leftrightarrow -f(s_1^*, s_2) \leq -f(s_1^*, s_2^*) \ \ (\forall s_2 \in S_2)$
  $\Leftrightarrow f(s_1^*, s_2^*)$ はプレイヤー 2 の行動に関して極小

パレート支配・パレート最適

(弱) パレート支配 ((weak) Pareto dominance)

行動の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ が行動の組 $(t_1, \ldots, t_n)$ を (弱) **パレート支配**するとは，以下の 2 条件が成り立つことである．

- すべての i に対して $f_i(s_1, \ldots, s_n) \geq f_i(t_1, \ldots, t_n)$
- 少なくとも 1 つの i に対して $f_i(s_1, \ldots, s_n) > f_i(t_1, \ldots, t_n)$

強パレート支配 (strong Pareto dominance)

行動の組 $(s_1, \ldots, s_n)$ が行動の組 $(t_1, \ldots, t_n)$ を**強パレート支配**するとは，以下の条件が成り立つことである．

- すべての i に対して $f_i(s_1, \ldots, s_n) > f_i(t_1, \ldots, t_n)$

弱パレート最適 (weakly Pareto optimal)

行動の組 $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ が**弱パレート最適**であるとは，$(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ を強パレート支配する行動の組が存在しないことをいう．

(強) パレート最適 ((strongly) Pareto optimal)

行動の組 $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ が (強) **パレート最適**であるとは，$(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ を (弱) パレート支配する行動の組が存在しないことをいう．

ナッシュ均衡のパレート最適性

ナッシュ均衡がパレート最適とは限らない

囚人のジレンマ

- パレート最適な行動の組：(黙秘, 黙秘)，(黙秘, 自白)，(自白, 黙秘)
- ナッシュ均衡 (自白, 自白) はパレート最適**ではない**

1 \ 2	黙秘	**自白**
黙秘	(1 年，1 年)	(10 年，3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月，10 年)	**(8 年，8 年)**

男女の争い

- パレート最適な行動の組：(ボクシング, ボクシング)，(バレエ, バレエ)
- ナッシュ均衡 (ボクシング, ボクシング)，(バレエ, バレエ) はいずれもパレート最適

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(**4**，**1**)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(**1**, **4**)

純粋戦略・混合戦略

純粋戦略 (pure strategy)・混合戦略 (mixed strategy)

純 (粋) 戦略 (pure strategy)　**確定的**に行動を選択

混合戦略 (mixed strategy)　**確率的**に行動を選択

標準形ゲームの場合，プレイヤーの行動 = 純粋戦略

混合戦略

- $q_i(s_i)$：プレイヤー i が純粋戦略 (行動) $s_i \in S_i$ を選択する確率
- プレイヤー i の混合戦略を q_i で表す (可能な q_i の集合：Q_i)

期待利得関数 (expected payoff function)

混合戦略の組 $(q_1, \ldots, q_n)$ におけるプレイヤー i の利得を表す関数

$$F_i(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{s_1 \in S_1} \cdots \sum_{s_n \in S_n} \prod_{j=1}^{n} q_j(s_j) f_i(s_1, \ldots, s_n)$$

混合戦略の例：じゃんけんゲーム

グー・チョキ・パーを等確率 (1/3) で選択するプレイヤー 1 の混合戦略

$q_1(\text{グー}) = q_1(\text{チョキ}) = q_1(\text{パー}) = 1/3$

実行可能利得

実行可能利得 (feasible payoff)

混合戦略を変化させることで実現可能な期待利得関数 $(F_1, \ldots, F_n)$ の値

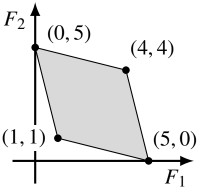
実行可能利得の例：囚人のジレンマ改

刑期と利得の対応表

刑期	利得
3 ヶ月	5
1 年	4
8 年	1
10 年	0

行動と利得の表

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(4, 4)	(0, 5)
自白	(5, 0)	(1, 1)



頂点は純粋戦略の組

プレイヤー 1, 2 が黙秘する確率をそれぞれ p_1, p_2 とする．

$$
\begin{aligned}
F_1(q_1, q_2) &= 4p_1p_2 + 0p_1(1-p_2) + 5p_1(1-p_2) + 1(1-p_1)(1-p_2) \\
&= 4p_1p_2 + 0p_1(1-p_2) + 5p_1(1-p_2) + 1(1-p_1)(1-p_2) \\
&= 4p_1 - p_2 + 1 \\
F_2(q_1, q_2) &= F_1(q_2, q_1) = 4p_2 - p_1 + 1
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{pmatrix} F_1(q_1, q_2) \\ F_2(q_1, q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

実行可能利得の例：男女の争い

実行可能利得の例：男女の争い

1 \ 2	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4,　1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

プレイヤー 1, 2 がボクシングを選択する確率をそれぞれ p_1，p_2 とする．

$$\begin{aligned} F_1(q_1,q_2) &= 4p_1p_2 + 0p_1(1-p_2) + 0p_1(1-p_2) + 1(1-p_1)(1-p_2) \\ &= 5p_1p_2 - (p_1+p_2) + 1 \\ F_2(q_1,q_2) &= 1p_1p_2 + 0p_1(1-p_2) + 0p_1(1-p_2) + 4(1-p_1)(1-p_2) \\ &= 5p_1p_2 - 4(p_1+p_2) + 4 \end{aligned}$$

$x = F_1(q_1,q_2)$，$y = F_2(q_1,q_2)$ とおくと，

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{3}(x-y) + 1, \quad p_1p_2 = \frac{1}{15}(4x-y)$$

$0 \le p_1 \le 1, 0 \le p_2 \le 1$ より，2 次方程式 $g(t) = t^2 - (p_1+p_2)t + p_1p_2 = 0$ は $0 \le t \le 1$ の範囲で 2 つの実数解を持つ．したがって，

$$p_1p_2 \ge 0 \qquad (g(0) \ge 0)$$

$$1 - (p_1+p_2) + p_1p_2 \ge 0 \qquad (g(1) \ge 0)$$

$$0 \le \frac{p_1+p_2}{2} \le 1 \qquad (0 \le (\text{放物線の軸}) \le 1)$$

$$(p_1+p_2)^2 - 4p_1p_2 \ge 0 \qquad (x \text{ 軸と交点を持つ})$$

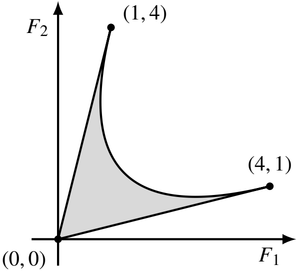
実行可能利得の例：男女の争い (続き)

$$\frac{1}{15}(4x - y) \geq 0 \qquad (g(0) \geq 0)$$

$$1 - \left\{\frac{1}{3}(x - y) + 1\right\} + \frac{1}{15}(4x - y) \geq 0 \qquad (g(1) \geq 0)$$

$$0 \leq \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}(x - y) + 1\right\} \leq 1 \qquad (0 \leq (\text{放物線の軸}) \leq 1)$$

$$\left(\frac{1}{3}(x - y) + 1\right)^2 - \frac{4}{15}(4x - y) \geq 0 \qquad (x\ \text{軸と交点を持つ})$$



頂点は純粋戦略の組

整理して,

$$4x - y \geq 0$$
$$x - 4y \leq 0$$
$$-3 \leq x - y \leq 3$$
$$5x^2 + 5y^2 - 10xy - 18x - 18y + 45 \geq 0$$

混合戦略のナッシュ均衡

混合戦略の最適応答

プレイヤー i の戦略 $q_i \in Q_i$ が他の $n-1$ のプレイヤーの戦略の組 $q_{-i} = (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n) \in Q_{-i}$ に対して最適応答であるとは,

$$F_i(q_i, q_{-i}) = \max_{r_i \in Q_i} F_i(r_i, q_{-i})$$

が成り立つことをいう.

混合戦略のナッシュ均衡

プレイヤーの戦略の組 $(q_1^*, \ldots, q_n^*)$ がナッシュ均衡であるとは，すべてのプレイヤー i $(1 \le i \le n)$ について，q_i^* が q_{-i}^* に対する最適応答であること，すなわち，任意の i $(1 \le i \le n)$ と任意の $q_i \in Q_i$ に対して $F_i(q_i, q_{-i}^*) \le F_i(q_i^*, q_{-i}^*)$ が成り立つことをいう.

混合戦略まで含めて考えると，(プレイヤー・戦略の数が有限なら) ナッシュ均衡は必ず存在！

混合戦略のナッシュ均衡：囚人のジレンマの例

混合戦略のナッシュ均衡：囚人のジレンマ改の例

$1 \setminus 2$	黙秘	自白
黙秘	(4, 4)	(0, 5)
自白	(5, 0)	(1, 1)

プレイヤー 1, 2 が黙秘する確率をそれぞれ p_1，p_2 とする．

- プレイヤー 2 の混合戦略 q_2 (確率 p_2) に対するプレイヤー 1 の最適応答 q_1^* (確率 p_1^*)
  - プレイヤー 1 の黙秘の期待利得：$4p_2 + 0(1 - p_2) = 4p_2$
  - プレイヤー 1 の自白の期待利得：$5p_2 + 1(1 - p_2) = 4p_2 + 1$

  したがって，$p_1^* = 0$.
- プレイヤー 1 の混合戦略 q_1 (確率 p_1) に対するプレイヤー 2 の最適応答 q_2^* (確率 p_2^*)
  - プレイヤー 2 の黙秘の期待利得：$4p_1 + 0(1 - p_1) = 4p_1$
  - プレイヤー 2 の自白の期待利得：$5p_1 + 1(1 - p_1) = 4p_1 + 1$

  したがって，$p_2^* = 0$.
- ナッシュ均衡は**純粋戦略の組 (自白, 自白)** のみ

混合戦略のナッシュ均衡：男女の争いの例

混合戦略のナッシュ均衡：男女の争いの例

1 \ 2	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4,　1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

プレイヤー 1, 2 がボクシングを選択する確率をそれぞれ p_1，p_2 とする．

- プレイヤー 2 の混合戦略 q_2 (確率 p_2) に対するプレイヤー 1 の最適応答 q_1^* (確率 p_1^*)
  - プレイヤー 1 のボクシングの期待利得：$4p_2 + 0(1 - p_2) = 4p_2$
  - プレイヤー 1 のバレエの期待利得：$0p_2 + 1(1 - p_2) = 1 - p_2$

したがって，$p_1^* = \begin{cases} 0 & (0 \leq p_2 < 0.2) \\ \text{任意} & (p_2 = 0.2) \\ 1 & (0.2 < p_2 \leq 1) \end{cases}$

- プレイヤー 1 の混合戦略 q_1 (確率 p_1) に対するプレイヤー 2 の最適応答 q_2^* (確率 p_2^*)

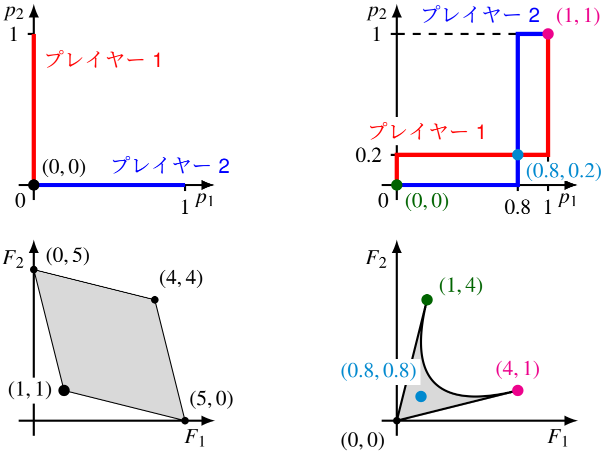
同様に，$p_2^* = \begin{cases} 0 & (0 \leq p_1 < 0.8) \\ \text{任意} & (p_1 = 0.8) \\ 1 & (0.8 < p_1 \leq 1) \end{cases}$

- ナッシュ均衡は $(p_1^*, p_2^*) = (0, 0), (1, 1), (0.8, 0.2)$.
- 純粋戦略の組 (ボクシング, ボクシング), (バレエ, バレエ) と，混合戦略の組 **(ボクシング 0.8・バレエ 0.2，ボクシング 0.2・バレエ 0.8)**

最適応答・実行可能利得のグラフ

最適応答

実行可能利得



囚人のジレンマ改

男女の争い

混合戦略: $(p_1^*, p_2^*) = (0, 0)$
期待利得: $(F_1^*, F_2^*) = (1, 1)$

混合戦略: $(p_1^*, p_2^*) = (0, 0), (1, 1), (0.8, 0.2)$
期待利得: $(F_1^*, F_2^*) = (1, 4), (4, 1), (0.8, 0.8)$

ゼロ和 2 人ゲームに対する混合戦略のナッシュ均衡

ゼロ和 2 人ゲーム

期待利得関数 $F_1(q_1, q_2) = -F_2(q_1, q_2) = F(q_1, q_2)$

マクシミン戦略 (maximin strategy)・ミニマックス戦略 (minimax strategy)

- プレイヤー 1 の**マクシミン戦略** (maximin strategy) q_1^*：以下を実現する q_1

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2)$$

- プレイヤー 2 の**ミニマックス戦略** (minimax strategy) q_2^*：以下を実現する q_2

$$\min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

q_1^*： (q_2 に関する期待利得の最小値) を最大化

q_2^*： (q_1 に関する期待利得の最大値) を最小化

他のプレイヤーは**自分にとってもっとも不利な戦略** (他プレイヤーにとっては最適応答) を選択すると予想して，期待利得を最適化 (最大化または最小化)

ゼロ和 2 人ゲームに対する混合戦略のナッシュ均衡 (続き)

マクシミン戦略・ミニマックス戦略の関係

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) \leq \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

証明

$$\min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) \leq F(q_1, q_2) \leq \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

したがって,

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) \leq \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

さらに,

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) \leq \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

ミニマックス定理

ゼロ和 2 人ゲームにおいて

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) = \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

が成り立つ.

プレイヤー 1 の**マクシミン戦略**とプレイヤー 2 の**ミニマックス戦略**の組は,
ナッシュ均衡！

非線形計画問題の双対性との関係

ラグランジュ関数

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j g_j(\boldsymbol{x})$$

ラグランジュ双対問題 (LD)

$$\begin{aligned} \text{sup} \quad & L_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^r_{\geq 0} \end{aligned}$$

等価な主問題 (P2)

$$\begin{aligned} \text{inf} \quad & L_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

弱双対定理

任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ((P2) の実行可能解)，および任意の $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^r_{\geq 0}$ ((LD) の実行可能解) について，$L_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq L_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．すなわち，

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}} \inf_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq \inf_{\boldsymbol{x}} \sup_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

ゼロ和 2 人ゲームに対する混合戦略のナッシュ均衡の例

コイン合わせゲーム (matching pennies)

2 人のプレイヤーがコインの表裏を同時に選択する．両者同じ面ならプレイヤー 1 の勝ち，違う面ならプレイヤー 2 の勝ちとし，敗者は勝者に 10 円支払う．

利得行列 (10 円 = 利得 1)

1 \ 2	裏	表
裏	$(1,\ -1)$	$(-1,\ 1)$
表	$(-1,\ 1)$	$(1,\ -1)$

混合戦略のナッシュ均衡：コイン合わせゲーム

プレイヤー 1，プレイヤー 2 が表の確率をそれぞれ p_1, p_2 とすると，利得関数は，

$$\begin{aligned} F(q_1, q_2) &= p_1(p_2 - (1 - p_2)) + (1 - p_1)(-p_2 + (1 - p_2)) \\ &= (1 - 2p_1)(1 - 2p_2) \end{aligned}$$

$F(q_1, q_2)$ を最小化する q_2 (プレイヤー 2 の最適応答) は，

- $2p_1 < 1$ のとき：$p_2 = 1$． $F(q_1, q_2) = 2p_1 - 1$
- $2p_1 = 1$ のとき：$0 \le p_2 \le 1$． $F(q_1, q_2) = 0$
- $2p_1 > 1$ のとき：$p_2 = 0$． $F(q_1, q_2) = 1 - 2p_1$

$\min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) = \min\{2p_1 - 1, 0, 1 - 2p_1\}$ より，プレイヤー 1 のマクシミン戦略は $p_1^* = 0.5$，そのときの利得関数の値は 0．同様に，プレイヤー 2 のミニマックス戦略は $p_2^* = 0.5$ で，そのときの利得関数の値は 0．各プレイヤーが表裏を等確率で選択するのがナッシュ均衡．