

オペレーションズ・リサーチ II (5)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

本文書のライセンスは CC-BY-SA にしています



スケジュール

No.	内容
1	導入 (非線形最適化問題, ゲーム理論, 多目的最適化問題)
2	非線形計画 1 (勾配, ヘッセ行列, 凸性, 最適性条件, ニュートン法)
3	非線形計画 2 (最急降下法, 準ニュートン法, 共役勾配法, 信頼領域法)
4	非線形計画 3 (制約つき問題の最適性条件, KKT 条件, ペナルティ関数法, 2 次計画法, 逐次 2 次計画法)
5	ゲーム理論 1 (種々のゲーム, 標準形, 純粋戦略, 混合戦略, ナッシュ均衡)
6	ゲーム理論 2 (展開形ゲーム, 繰り返しゲーム)
7	多目的最適化 (パレート最適性, 重み付け法, ϵ 制約法, 重み付きメトリック法)

ゲーム理論の基礎

ゲーム理論とは (復習)

- 意思決定を行う複数の人 (意思決定主体・プレイヤー) が相互にかかわり合う状況を数理モデルを用いて解析する学問
- ジョン・フォン・ノイマン (John von Neumann) の論文「On the theory of games of strategy」(1928) が始まり
- フォン・ノイマンと経済学者オスカー・モルゲンシュテルン (Oskar Morgenstern) の著書「ゲームの理論と経済行動」(1944) により学問分野として確立
- オペレーションズ・リサーチだけでなく経済学や心理学でも用いられる

用語の説明

プレイヤー (player) ゲームに参加して意思決定を行う人

手番 (move) 各プレイヤーが行動するタイミング

戦略 (strategy) 各プレイヤーの行動 (action) 計画

結果 (outcome/consequence) 行動によって決まるゲームの結果

選好順序 (preference order) 結果に対する各プレイヤーの評価

利得 (payoff) ・ 効用 (utility) 選好順序を数値化したもの

ゲームの種類：ゼロ和ゲーム・非ゼロ和ゲーム

ゼロ和ゲーム・非ゼロ和ゲーム

ゼロ和ゲーム (zero-sum game) 各プレイヤーの利害が完全に相反するゲーム。プレイヤーの総利得が一定 (0)

非ゼロ和ゲーム (non-zero-sum game) 各プレイヤーの行動の組み合わせにより総利得が変化するゲーム

ゼロ和ゲームの例：じゃんけんゲーム

プレイヤー 1, 2 がじゃんけんをし、負けた方が勝った方に 10 円を支払う。引き分けなら何もしない。

儲け (プレイヤー 1, プレイヤー 2) の表. (利得)=(儲け)

1 \ 2	グー	チョキ	パー
グー	(0 円, 0 円)	(10 円, -10 円)	(-10 円, 10 円)
チョキ	(-10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)	(10 円, -10 円)
パー	(10 円, -10 円)	(-10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)

非ゼロ和ゲームの例：囚人のジレンマ (prisoner's dilemma)

刑期 (プレイヤー 1, プレイヤー 2) の表. (利得)= -(刑期)

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年, 1 年)	(10 年, 3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月, 10 年)	(8 年, 8 年)

ゲームの種類：ワンショットゲーム・繰り返しゲーム

ワンショットゲーム・繰り返しゲーム

ワンショットゲーム (one-shot game) ゲームは1回で終了

繰り返しゲーム (repeated game) 同じゲームを複数回繰り返す

繰り返しゲームの分類

有限回繰り返し (finitely repeated) ゲーム 有限回で終了

無限回繰り返し (infinitely repeated) ゲーム 無限回繰り返す

有限回で終了することがわかっているならば、プレイヤーの戦略が変化する可能性がある

繰り返しゲームの例

- 繰り返しじゃんけんゲーム
- 繰り返し囚人のジレンマ ⇒ 「しっぺ返し戦略」が有名

ゲームの種類：同時手番ゲーム・逐次手番ゲーム

同時手番ゲーム・逐次手番ゲーム

同時手番ゲーム (simultaneous game)

すべてのプレイヤーが同時に行動。その際、他のプレイヤーの行動を知ることができない

逐次手番ゲーム (sequential game)

プレイヤーは一人ずつ順番に行動。行動し終わった他のプレイヤーの行動を知ることができる (ただし、後で説明する完全情報ゲームの場合)

同時手番ゲームの例

- じゃんけんゲーム、繰り返しじゃんけんゲーム
- 囚人のジレンマ、繰り返し囚人のジレンマ

逐次手番ゲームの例

- 将棋、囲碁、チェスなどのボードゲーム、麻雀
- 神経衰弱、大富豪などのカードゲーム

ゲームの種類：完全情報ゲーム・不完全情報ゲーム

完全情報ゲーム・不完全情報ゲーム

完全情報ゲーム (game with perfect information)*

すべてのプレイヤーが、各プレイヤーのこれまでの行動とその結果を知っている

不完全情報ゲーム (game with imperfect information)

プレイヤーのこれまでの行動とその結果を、一部またはすべて知ることができない

* 正確な定義は、「展開型ゲームとして記述したとき、すべての情報集合がただ 1 つの手番からなるゲーム」

完全情報ゲームの例

- 将棋，囲碁，チェスなどのボードゲーム

不完全情報ゲームの例

- ポーカーやブリッジなどのカードゲーム，麻雀
他のプレイヤーの手札や手牌を見ることができない
- 繰り返しじゃんけん・囚人のジレンマなど同時手番ゲーム
「これまでの行動」には同じ回の他のプレイヤーの手番も含まれるため

ゲームの種類：情報完備ゲーム・情報不完備ゲーム

情報完備ゲーム・情報不完備ゲーム

情報完備ゲーム (game with complete information)*

すべてのプレイヤーが、ゲームのルールや各プレイヤーの取りうる戦略・利得などの情報を共有知識 (common knowledge) として持つ

情報不完備ゲーム (game with incomplete information)

ゲームのルールやプレイヤーの取りうる戦略や利得などの情報を一部利用できない

情報不完備ゲームの例

- 人狼ゲーム
他のプレイヤーの役割・目的がわからない

ゲームの種類：協力ゲーム・非協力ゲーム

協力ゲーム・非協力ゲーム

協力ゲーム (cooperative game)

プレイヤーが互いに交渉して提携 (coalition) することが可能. ただし,

- 合意に拘束力がある (裏切りは不可)
- ゲームの戦略に関する事前 (ゲーム開始前) の交渉

非協力ゲーム (noncooperative game)

事前に拘束力のある合意を取ることができない

- ゲーム内での合意や提携は許される

非協力ゲームの例

- (繰り返し) じゃんけんゲーム, (繰り返し) 囚人のジレンマ
- 交互提案ゲーム \Rightarrow ゲーム内で交渉・合意を行うため, 非協力ゲーム

交互提案 (alternating offers, sequential bargaining) ゲーム

- 1 万円をプレイヤー 1, 2 で分配する
- まずプレイヤー 1 が自分の取り分を提案する. プレイヤー 2 が受け入れれば終了
- 次にプレイヤー 2 が自分の取り分を提案する. プレイヤー 1 が受け入れれば終了.
- 以下, これを合意が得られるまで繰り返す

ゲームの種類：有限ゲーム・無限ゲーム

有限ゲーム・無限ゲーム

有限ゲーム (finite game) 有限の手番でゲームが終了する

無限ゲーム (infinite game) 有限の手番でゲームが終了するとは限らない

有限ゲームの例

- オセロ，将棋*，チェス*，囲碁*

* 千日手などは別の方法で解決するとした場合

無限ゲームの例

- 交互提案ゲーム，将棋，チェス，囲碁

ゲームの種類：確定ゲーム・不確定ゲーム

確定ゲーム・不確定ゲーム

確定ゲーム (deterministic game) 偶然に左右されないゲーム

不確定ゲーム (non-deterministic game) 偶然の要素 (偶然手番) があるゲーム

確定ゲームの例

- 将棋, 囲碁, チェスなどのボードゲーム

不確定ゲームの例

- ポーカーやブリッジなどのカードゲーム, 麻雀

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを、女はバレエをより好むが、二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして、それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので、今は別の形で表すことも多いが、このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・非ゼロ和
ワンショット・繰り返し
同時手番・逐次手番
完全情報・不完全情報

情報完備・情報不完備
協力・非協力
有限・無限
確定・不確定

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを、女はバレエをより好むが、二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして、それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので、今は別の形で表すことも多いが、このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**
ワンショット・繰り返し
同時手番・逐次手番
完全情報・不完全情報

情報完備・情報不完備
協力・非協力
有限・無限
確定・不確定

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを、女はバレエをより好むが、二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして、それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので、今は別の形で表すことも多いが、このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**
ワンショット・繰り返し
同時手番・逐次手番
完全情報・不完全情報

情報完備・情報不完備
協力・非協力
有限・無限
確定・不確定

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを、女はバレエをより好むが、二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして、それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので、今は別の形で表すことも多いが、このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**
ワンショット・繰り返し
同時手番・逐次手番*
完全情報・不完全情報

情報完備・情報不完備
協力・非協力
有限・無限
確定・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを、女はバレエをより好むが、二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして、それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので、今は別の形で表すことも多いが、このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**
ワンショット・繰り返し
同時手番・逐次手番*
完全情報・**不完全情報**

情報完備・情報不完備
協力・非協力
有限・無限
確定・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを、女はバレエをより好むが、二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして、それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので、今は別の形で表すことも多いが、このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**
ワンショット・繰り返し
同時手番・逐次手番*
完全情報・**不完全情報**

情報完備・情報不完備
協力・非協力
有限・無限
確定・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを、女はバレエをより好むが、二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして、それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので、今は別の形で表すことも多いが、このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**
ワンショット・繰り返し
同時手番・逐次手番*
完全情報・**不完全情報**

情報完備・情報不完備
協力・**非協力**
有限・無限
確定・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを、女はバレエをより好むが、二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして、それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので、今は別の形で表すことも多いが、このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**
ワンショット・繰り返し
同時手番・逐次手番*
完全情報・**不完全情報**

情報完備・情報不完備
協力・**非協力**
有限・無限
確定・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

例：男女の争いの分類

男女の争い (battle of sexes)

- 男女がある夜のデートの後でボクシング観戦かバレエ鑑賞に出かける
- 男はボクシングを、女はバレエをより好むが、二人とも別々の選択をするよりも一緒に出かける方を好む
- お互いに相談はしないものとして、それぞれどちらを選ぶべきか

男女の利得 (男, 女) の表

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ポリコレ的に色々まずいので、今は別の形で表すことも多いが、このまま使うことに

男女の争いの分類

ゼロ和・**非ゼロ和**
ワンショット・繰り返し
同時手番・逐次手番*
完全情報・**不完全情報**

情報完備・情報不完備
協力・**非協力**
有限・無限
確定・不確定

* 逐次手番ゲームとして扱うこともできる

標準形ゲーム

標準形ゲーム (normal form game) とは?

ゲームの表現方法の一つ. 戦略形ゲーム (strategic form game) ともいう

標準形ゲームの要素

- プレイヤー数: n
- プレイヤー i が選択可能な行動 (戦略) の集合 (戦略集合): S_i
- プレイヤー i の利得関数 (payoff function): $f_i(s_1, \dots, s_n)$ ($s_j \in S_j$)
 - $f_i(s_1, \dots, s_n)$: プレイヤー j ($1 \leq j \leq n$) の行動が s_j のときのプレイヤー i の利得
 - 利得行列 (payoff matrix): 利得関数を表 (行列) で表したもの

戦略は行動計画 (行動の集まり) だが, 標準形ゲームでは行動と (純粹) 戦略は同じ意味

例: じゃんけんゲーム

- プレイヤー数 $n = 2$
- 戦略集合 $S_1 = S_2 = \{ \text{グー}, \text{チョキ}, \text{パー} \}$
- 利得関数 $f_1(s_1, s_2) = f_2(s_2, s_1)$ (対称ゲーム)

$$f_1(s_1, s_2) = \begin{cases} 0 & ((s_1, s_2) = (\text{グー}, \text{グー}), (\text{チョキ}, \text{チョキ}), (\text{パー}, \text{パー})) \\ 10 & ((s_1, s_2) = (\text{グー}, \text{チョキ}), (\text{チョキ}, \text{パー}), (\text{パー}, \text{グー})) \\ -10 & ((s_1, s_2) = (\text{グー}, \text{パー}), (\text{チョキ}, \text{グー}), (\text{パー}, \text{チョキ})) \end{cases}$$

ゼロ和ゲーム・非ゼロ和ゲーム

ゼロ和ゲーム

任意の s_1, \dots, s_n の組に対し,

$$\sum_{i=1}^n f_i(s_1, \dots, s_n) = 0 \quad (*)$$

が成り立つ

非ゼロ和ゲーム ゼロ和ゲームではないゲーム

定和ゲーム (*) 式の右辺が定数 K のゲーム. ゼロ和ゲームと等価

じゃんけんゲームは明らかにゼロ和ゲーム. たとえば, $(s_1, s_2) = (\text{グー}, \text{チョキ})$ に対して

$$\sum_{i=1}^2 f_i(\text{グー}, \text{チョキ}) = f_1(\text{グー}, \text{チョキ}) + f_2(\text{グー}, \text{チョキ}) = 10 + (-10) = 0$$

囚人のジレンマ (利得は -(刑期)) は,

$$f_1(\text{自白}, \text{自白}) + f_2(\text{自白}, \text{自白}) = -8 + (-8) = -16$$

$$f_1(\text{黙秘}, \text{黙秘}) + f_2(\text{黙秘}, \text{黙秘}) = -1 + (-1) = -2$$

より非ゼロ和で, 定和でもない.

最適応答

最適応答 (best response)

プレイヤー i の行動 $s_i \in S_i$ が他の $n-1$ のプレイヤーの行動の組 $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S_{-i}$ に対して**最適応答** (best response) であるとは,

$$f_i(s_i, s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} f_i(t_i, s_{-i})$$

が成り立つことをいう ($f_i(s_i, s_{-i}) = f_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$).

他のプレイヤーの行動が与えられているとして、自身の利得が最適 (最大) になる行動

最適応答の例：じゃんけんゲーム

プレイヤー 2 の「パー」に対するプレイヤー 1 の最適応答は「チョキ」

最適応答の例：囚人のジレンマ

プレイヤー 2 の「黙秘」に対するプレイヤー 1 の最適応答は「自白」

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年, 1 年)	(10 年, 3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月, 10 年)	(8 年, 8 年)

支配戦略

弱支配 (weak dominance)

プレイヤー i について、行動 s_i が行動 t_i を弱支配するとは、以下の 2 条件が成り立つことである。

1. すべての $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $f_i(s_i, s_{-i}) \geq f_i(t_i, s_{-i})$
2. 少なくとも 1 つの $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $f_i(s_i, s_{-i}) > f_i(t_i, s_{-i})$

(強) 支配 ((strong) dominance)

プレイヤー i について、行動 s_i が行動 t_i を (強) 支配するとは、以下の条件が成り立つことである。

1. すべての $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $f_i(s_i, s_{-i}) > f_i(t_i, s_{-i})$

最適応答との関係

プレイヤー i の行動 s_i が s_{-i} に対する最適応答なら、 s_i を強支配する行動は存在しない

支配戦略の例：囚人のジレンマ

プレイヤー 1 の「**自白**」は「**黙秘**」を支配する。プレイヤー 2 も同様

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年, 1 年)	(10 年, 3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月, 10 年)	(8 年, 8 年)

ナッシュ均衡

ナッシュ均衡 (Nash equilibrium)

プレイヤーの行動の組 (s_1^*, \dots, s_n^*) が**ナッシュ均衡** (Nash equilibrium) であるとは、すべてのプレイヤー i ($1 \leq i \leq n$) について、 s_i^* が s_{-i}^* に対する最適応答であること、すなわち、任意の i ($1 \leq i \leq n$) と任意の $s_i \in S_i$ に対して $f_i(s_i, s_{-i}^*) \leq f_i(s_i^*, s_{-i}^*)$ が成り立つことをいう。

「ナッシュ」はアメリカ人数学者ジョン・ナッシュ (John Nash) から。1994 年にノーベル経済学賞を受賞している。映画「ビューティフル・マインド」(2001) のモデル。

ナッシュ均衡の例：囚人のジレンマ

ナッシュ均衡は **(自白, 自白)** のみ。

(自白, 自白) プレイヤー 1, 2 とも、自白から黙秘に変更すると、刑期が 8 年から 10 年に延びる

(自白, 黙秘) プレイヤー 2 は、自白すれば刑期が 10 年から 8 年に減る。 **(黙秘, 自白)** も同様

(黙秘, 黙秘) プレイヤー 1, 2 とも、黙秘から自白に変更すると、刑期が 1 年から 3 ヶ月に減る

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年, 1 年)	(10 年, 3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月, 10 年)	(8 年, 8 年)

ナッシュ均衡の例

ナッシュ均衡の例：じゃんけんゲーム

ナッシュ均衡は**存在しない**。

(グー, グー) プレイヤー 1, 2 とも, グーからパーに変更すると, 利得が 0 円から 10 円に増加. (チョキ, チョキ), (パー, パー) も同様

(グー, チョキ) プレイヤー 2 は, チョキからパーに変更すると, 利得が -10 円から 10 円に増加. 他の組合せも同様.

1 \ 2	グー	チョキ	パー
グー	(0 円, 0 円)	(10 円, -10 円)	(-10 円, 10 円)
チョキ	(-10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)	(10 円, -10 円)
パー	(10 円, -10 円)	(-10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)

練習問題：男女の争いのナッシュ均衡

ナッシュ均衡は？

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ナッシュ均衡の例

ナッシュ均衡の例：じゃんけんゲーム

ナッシュ均衡は**存在しない**。

(グー, グー) プレイヤー 1, 2 とも, グーからパーに変更すると, 利得が 0 円から 10 円に増加. (チョキ, チョキ), (パー, パー) も同様

(グー, チョキ) プレイヤー 2 は, チョキからパーに変更すると, 利得が -10 円から 10 円に増加. 他の組合せも同様.

1 \ 2	グー	チョキ	パー
グー	(0 円, 0 円)	(10 円, -10 円)	(-10 円, 10 円)
チョキ	(-10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)	(10 円, -10 円)
パー	(10 円, -10 円)	(-10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)

練習問題：男女の争いのナッシュ均衡

ナッシュ均衡は **(ボクシング, ボクシング)**, **(バレエ, バレエ)** の 2 つ.

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

ナッシュ均衡の意味 (その 2)

他のプレイヤーの行動を予想して自分の行動を最適化していくと、ナッシュ均衡に収束

囚人のジレンマ

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年, 1 年)	(10 年, 3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月, 10 年)	(8 年, 8 年)

相手が黙秘すると予想した場合

プレイヤー 1 「プレイヤー 2 が黙秘する」と予想

⇒ 最適応答は「自白」

プレイヤー 2 「プレイヤー 1 は、「プレイヤー 2 が黙秘する」と予想して自白する」と予想

⇒ 最適応答は「自白」

プレイヤー 1 「プレイヤー 2 は、「プレイヤー 1 は、「プレイヤー 2 が黙秘する」と予想して自白する」と予想し、結局自白する」と予想

⇒ 最適応答は「自白」. (**自白**, **自白**) がナッシュ均衡

相手が自白すると予想した場合

プレイヤー 1 「プレイヤー 2 が自白する」と予想

⇒ 最適応答は「自白」

プレイヤー 2 「プレイヤー 1 は、「プレイヤー 2 が自白する」と予想して自白する」と予想

⇒ 最適応答は「自白」. (**自白**, **自白**) がナッシュ均衡

ナッシュ均衡の意味 (その 2)

男女の争い

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

女が「男はボクシングを選ぶ」と予想した場合

女 「男はボクシングを選ぶ」と予想

⇒ 最適応答は「ボクシング」

男 「女は、「男はボクシングを選ぶ」と予想してボクシングを選ぶ」と予想

⇒ 最適応答は「ボクシング」. (ボクシング, ボクシング) がナッシュ均衡

女が「男はバレエを選ぶ」と予想した場合

女 「男はバレエを選ぶ」と予想

⇒ 最適応答は「バレエ」

男 「女は、「男はバレエを選ぶ」と予想してバレエを選ぶ」と予想

⇒ 最適応答は「バレエ」. (バレエ, バレエ) がナッシュ均衡

ナッシュ均衡の意味 (その 3)

じゃんけんゲーム

1 \ 2	グー	チョキ	パー
グー	(0 円, 0 円)	(10 円, -10 円)	(-10 円, 10 円)
チョキ	(-10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)	(10 円, -10 円)
パー	(10 円, -10 円)	(-10 円, 10 円)	(0 円, 0 円)

「相手がグー」と予想した場合

プレイヤー 1 「プレイヤー 2 はグー」と予想

⇒ 最適応答は「パー」

プレイヤー 2 「プレイヤー 1 は、「プレイヤー 2 はグー」と予想してパー」と予想

⇒ 最適応答は「チョキ」

プレイヤー 1 「プレイヤー 2 は、「プレイヤー 1 は、「プレイヤー 2 はグー」と予想してパー」と予想」してチョキ」と予想

⇒ 最適応答は「グー」

プレイヤー 2 「プレイヤー 1 は、「プレイヤー 2 は、「プレイヤー 1 は、「プレイヤー 2 はグー」と予想してパー」と予想」してチョキ」と予想してグー」と予想

⇒ 最適応答は「パー」

.....

収束しない. ナッシュ均衡は存在しない

ゼロ和 2 人ゲームのナッシュ均衡

任意の $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ の組に対して $f_1(s_1, s_2) + f_2(s_1, s_2) = 0$ が成り立つので,

$$f_1(s_1, s_2) = f(s_1, s_2), \quad f_2(s_1, s_2) = -f(s_1, s_2)$$

と表す.

プレイヤー 1 は $f(s_1, s_2)$ の**最大化**, プレイヤー 2 は $f(s_1, s_2)$ の**最小化**が目的

ゼロ和 2 人ゲームのナッシュ均衡

(s_1^*, s_2^*) がナッシュ均衡となるための必要十分条件は, (s_1^*, s_2^*) が $f(s_1, s_2)$ の**鞍点**であること.

証明

- プレイヤー 1 の行動 s_1^* はプレイヤー 2 の行動 s_2^* に対する最適応答
 $\Leftrightarrow f(s_1, s_2^*) \leq f(s_1^*, s_2^*) \quad (\forall s_1 \in S_1)$
 $\Leftrightarrow f(s_1^*, s_2^*)$ はプレイヤー 1 の行動に関して極大
- プレイヤー 2 の行動 s_2^* はプレイヤー 1 の行動 s_1^* に対する最適応答
 $\Leftrightarrow -f(s_1^*, s_2) \leq -f(s_1^*, s_2^*) \quad (\forall s_2 \in S_2)$
 $\Leftrightarrow f(s_1^*, s_2^*)$ はプレイヤー 2 の行動に関して極小

パレート支配・パレート最適

(弱) パレート支配 ((weak) Pareto dominance)

行動の組 (s_1, \dots, s_n) が行動の組 (t_1, \dots, t_n) を (弱) **パレート支配** するとは、以下の2条件が成り立つことである。

- すべての i に対して $f_i(s_1, \dots, s_n) \geq f_i(t_1, \dots, t_n)$
- 少なくとも1つの i に対して $f_i(s_1, \dots, s_n) > f_i(t_1, \dots, t_n)$

強パレート支配 (strong Pareto dominance)

行動の組 (s_1, \dots, s_n) が行動の組 (t_1, \dots, t_n) を **強パレート支配** するとは、以下の条件が成り立つことである。

- すべての i に対して $f_i(s_1, \dots, s_n) > f_i(t_1, \dots, t_n)$

弱パレート最適 (weakly Pareto optimal)

行動の組 (s_1^*, \dots, s_n^*) が **弱パレート最適** であるとは、 (s_1^*, \dots, s_n^*) を強パレート支配する行動の組が存在しないことをいう。

(強) パレート最適 ((strongly) Pareto optimal)

行動の組 (s_1^*, \dots, s_n^*) が (強) **パレート最適** であるとは、 (s_1^*, \dots, s_n^*) を (弱) パレート支配する行動の組が存在しないことをいう。

ナッシュ均衡のパレート最適性

ナッシュ均衡がパレート最適とは限らない

囚人のジレンマ

- パレート最適な行動の組：(黙秘, 黙秘), (黙秘, 自白), (自白, 黙秘)
- ナッシュ均衡 (自白, 自白) はパレート最適**ではない**

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年, 1 年)	(10 年, 3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月, 10 年)	(8 年, 8 年)

男女の争い

- パレート最適な行動の組：(ボクシング, ボクシング), (バレエ, バレエ)
- ナッシュ均衡 (ボクシング, ボクシング), (バレエ, バレエ) はいずれもパレート最適

男 \ 女	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

純粋戦略・混合戦略

純粋戦略 (pure strategy) ・ 混合戦略 (mixed strategy)

純 (粋) 戦略 (pure strategy) **確定的**に行動を選択

混合戦略 (mixed strategy) **確率的**に行動を選択

標準形ゲームの場合、プレイヤーの行動 = 純粋戦略

混合戦略

- $q_i(s_i)$: プレイヤー i が純粋戦略 (行動) $s_i \in S_i$ を選択する確率
- プレイヤー i の混合戦略を q_i で表す (可能な q_i の集合: Q_i)

期待利得関数 (expected payoff function)

混合戦略の組 (q_1, \dots, q_n) におけるプレイヤー i の利得を表す関数

$$F_i(q_1, \dots, q_n) = \sum_{s_1 \in S_1} \cdots \sum_{s_n \in S_n} \prod_{j=1}^n q_j(s_j) f_i(s_1, \dots, s_n)$$

混合戦略の例：じゃんけんゲーム

グー・チョキ・パーを等確率 (1/3) で選択するプレイヤー 1 の混合戦略

$$q_1(\text{グー}) = q_1(\text{チョキ}) = q_1(\text{パー}) = 1/3$$

実行可能利得

実行可能利得 (feasible payoff)

混合戦略を変化させることで実現可能な期待利得関数 (F_1, \dots, F_n) の値

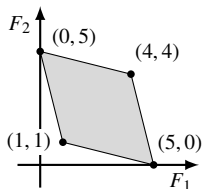
実行可能利得の例：囚人のジレンマ改

刑期と利得の対応表

刑期	利得
3 ヶ月	5
1 年	4
8 年	1
10 年	0

行動と利得の表

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(4, 4)	(0, 5)
自白	(5, 0)	(1, 1)



頂点は純粋戦略の組

プレイヤー 1, 2 が黙秘する確率をそれぞれ p_1, p_2 とする.

$$\begin{aligned}
 F_1(q_1, q_2) &= 4p_1p_2 + 0p_1(1-p_2) + 5p_1(1-p_2) + 1(1-p_1)(1-p_2) \\
 &= 4p_1p_2 + 0p_1(1-p_2) + 5p_1(1-p_2) + 1(1-p_1)(1-p_2) \\
 &= 4p_1 - p_2 + 1
 \end{aligned}$$

$$F_2(q_1, q_2) = F_1(q_2, q_1) = 4p_2 - p_1 + 1$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} F_1(q_1, q_2) \\ F_2(q_1, q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

実行可能利得の例：男女の争い

実行可能利得の例：男女の争い

1 \ 2	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

プレイヤー 1, 2 がボクシングを選択する確率をそれぞれ p_1 , p_2 とする.

$$\begin{aligned} F_1(q_1, q_2) &= 4p_1p_2 + 0p_1(1-p_2) + 0p_1(1-p_2) + 1(1-p_1)(1-p_2) \\ &= 5p_1p_2 - (p_1 + p_2) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(q_1, q_2) &= 1p_1p_2 + 0p_1(1-p_2) + 0p_1(1-p_2) + 4(1-p_1)(1-p_2) \\ &= 5p_1p_2 - 4(p_1 + p_2) + 4 \end{aligned}$$

$x = F_1(q_1, q_2)$, $y = F_2(q_1, q_2)$ とおくと,

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{3}(x - y) + 1, \quad p_1p_2 = \frac{1}{15}(4x - y)$$

$0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1$ より, 2 次方程式 $g(t) = t^2 - (p_1 + p_2)t + p_1p_2 = 0$ は $0 \leq t \leq 1$ の範囲で 2 つの実数解を持つ. したがって,

$$p_1p_2 \geq 0 \quad (g(0) \geq 0)$$

$$1 - (p_1 + p_2) + p_1p_2 \geq 0 \quad (g(1) \geq 0)$$

$$0 \leq \frac{p_1 + p_2}{2} \leq 1 \quad (0 \leq (\text{放物線の軸}) \leq 1)$$

$$(p_1 + p_2)^2 - 4p_1p_2 \geq 0 \quad (x \text{ 軸と交点を持つ})$$

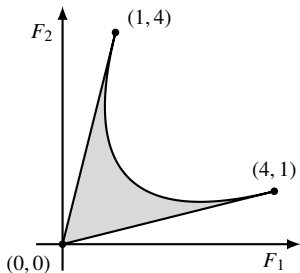
実行可能利得の例：男女の争い (続き)

$$\frac{1}{15}(4x - y) \geq 0 \quad (g(0) \geq 0)$$

$$1 - \left\{ \frac{1}{3}(x - y) + 1 \right\} + \frac{1}{15}(4x - y) \geq 0 \quad (g(1) \geq 0)$$

$$0 \leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3}(x - y) + 1 \right\} \leq 1 \quad (0 \leq (\text{放物線の軸}) \leq 1)$$

$$\left(\frac{1}{3}(x - y) + 1 \right)^2 - \frac{4}{15}(4x - y) \geq 0 \quad (x \text{ 軸と交点を持つ})$$



頂点は純粋戦略の組

整理して,

$$4x - y \geq 0$$

$$x - 4y \leq 0$$

$$-3 \leq x - y \leq 3$$

$$5x^2 + 5y^2 - 10xy - 18x - 18y + 45 \geq 0$$

混合戦略のナッシュ均衡

混合戦略の最適応答

プレイヤー i の戦略 $q_i \in Q_i$ が他の $n-1$ のプレイヤーの戦略の組 $q_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n) \in Q_{-i}$ に対して最適応答であるとは,

$$F_i(q_i, q_{-i}) = \max_{r_i \in Q_i} F_i(r_i, q_{-i})$$

が成り立つことをいう.

混合戦略のナッシュ均衡

プレイヤーの戦略の組 (q_1^*, \dots, q_n^*) がナッシュ均衡であるとは, すべてのプレイヤー i ($1 \leq i \leq n$) について, q_i^* が q_{-i}^* に対する最適応答であること, すなわち, 任意の i ($1 \leq i \leq n$) と任意の $q_i \in Q_i$ に対して $F_i(q_i, q_{-i}^*) \leq F_i(q_i^*, q_{-i}^*)$ が成り立つことをいう.

混合戦略まで含めて考えると, (プレイヤー・戦略の数が有限なら) ナッシュ均衡は必ず存在!

混合戦略のナッシュ均衡：囚人のジレンマの例

混合戦略のナッシュ均衡：囚人のジレンマ改の例

1 \ 2	黙秘	自白
黙秘	(4, 4)	(0, 5)
自白	(5, 0)	(1, 1)

プレイヤー 1, 2 が黙秘する確率をそれぞれ p_1 , p_2 とする.

- プレイヤー 2 の混合戦略 q_2 (確率 p_2) に対するプレイヤー 1 の最適応答 q_1^* (確率 p_1^*)

- プレイヤー 1 の黙秘の期待利得: $4p_2 + 0(1 - p_2) = 4p_2$
- プレイヤー 1 の自白の期待利得: $5p_2 + 1(1 - p_2) = 4p_2 + 1$

したがって, $p_1^* = 0$.

- プレイヤー 1 の混合戦略 q_1 (確率 p_1) に対するプレイヤー 2 の最適応答 q_2^* (確率 p_2^*)

- プレイヤー 2 の黙秘の期待利得: $4p_1 + 0(1 - p_1) = 4p_1$
- プレイヤー 2 の自白の期待利得: $5p_1 + 1(1 - p_1) = 4p_1 + 1$

したがって, $p_2^* = 0$.

- ナッシュ均衡は**純粋戦略の組 (自白, 自白)** のみ

混合戦略のナッシュ均衡：男女の争いの例

混合戦略のナッシュ均衡：男女の争いの例

1 \ 2	ボクシング	バレエ
ボクシング	(4, 1)	(0, 0)
バレエ	(0, 0)	(1, 4)

プレイヤー 1, 2 がボクシングを選択する確率をそれぞれ p_1 , p_2 とする。

- プレイヤー 2 の混合戦略 q_2 (確率 p_2) に対するプレイヤー 1 の最適応答 q_1^* (確率 p_1^*)
 - プレイヤー 1 のボクシングの期待利得： $4p_2 + 0(1 - p_2) = 4p_2$
 - プレイヤー 1 のバレエの期待利得： $0p_2 + 1(1 - p_2) = 1 - p_2$

$$\text{したがって, } p_1^* = \begin{cases} 0 & (0 \leq p_2 < 0.2) \\ \text{任意} & (p_2 = 0.2) \\ 1 & (0.2 < p_2 \leq 1) \end{cases}$$

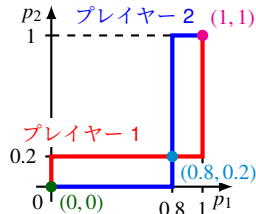
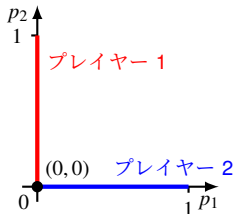
- プレイヤー 1 の混合戦略 q_1 (確率 p_1) に対するプレイヤー 2 の最適応答 q_2^* (確率 p_2^*)

$$\text{同様に, } p_2^* = \begin{cases} 0 & (0 \leq p_1 < 0.8) \\ \text{任意} & (p_1 = 0.8) \\ 1 & (0.8 < p_1 \leq 1) \end{cases}$$

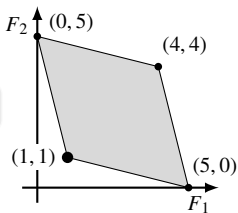
- ナッシュ均衡は $(p_1^*, p_2^*) = (0, 0), (1, 1), (0.8, 0.2)$.
- 純粋戦略の組 (ボクシング, ボクシング), (バレエ, バレエ) と, 混合戦略の組 (ボクシング 0.8・バレエ 0.2, ボクシング 0.2・バレエ 0.8)

最適応答・実行可能利得のグラフ

最適応答

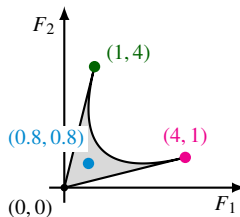


実行可能利得



囚人のジレンマ改

混合戦略: $(p_1^*, p_2^*) = (0, 0)$
 期待利得: $(F_1^*, F_2^*) = (1, 1)$



男女の争い

混合戦略: $(p_1^*, p_2^*) = (0, 0), (1, 1), (0.8, 0.2)$
 期待利得: $(F_1^*, F_2^*) = (1, 4), (4, 1), (0.8, 0.8)$

ゼロ和 2 人ゲームに対する混合戦略のナッシュ均衡

ゼロ和 2 人ゲーム

期待利得関数 $F_1(q_1, q_2) = -F_2(q_1, q_2) = F(q_1, q_2)$

マクシミン戦略 (maximin strategy) ・ ミニマックス戦略 (minimax strategy)

- プレイヤー 1 の **マクシミン戦略** (maximin strategy) q_1^* : 以下を実現する q_1

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2)$$

- プレイヤー 2 の **ミニマックス戦略** (minimax strategy) q_2^* : 以下を実現する q_2

$$\min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

q_1^* : (q_2 に関する期待利得の最小値) を最大化

q_2^* : (q_1 に関する期待利得の最大値) を最小化

他のプレイヤーは **自分にとってもっとも不利な戦略** (他プレイヤーにとっては最適応答) を選択すると予想して、期待利得を最適化 (最大化または最小化)

ゼロ和 2 人ゲームに対する混合戦略のナッシュ均衡 (続き)

マクシミン戦略・ミニマックス戦略の関係

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) \leq \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

証明

$$\min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) \leq F(q_1, q_2) \leq \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

したがって,

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) \leq \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

さらに,

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) \leq \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

ミニマックス定理

ゼロ和 2 人ゲームにおいて

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) = \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2)$$

が成り立つ.

プレイヤー 1 のマクシミン戦略とプレイヤー 2 のミニマックス戦略の組は、
ナッシュ均衡！

非線形計画問題の双対性との関係

ラグランジュ関数

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(\mathbf{x})$$

ラグランジュ双対問題 (LD)

$$\begin{aligned} \sup_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}} L_D(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{s.t. } \boldsymbol{\lambda} &\in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^r \end{aligned}$$

等価な主問題 (P2)

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{x}} L_P(\mathbf{x}) &= \sup_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{s.t. } \mathbf{x} &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

弱双対定理

任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ((P2) の実行可能解), および任意の $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^r$ ((LD) の実行可能解) について, $L_D(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq L_P(\mathbf{x})$ が成り立つ. すなわち,

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}} \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq \inf_{\mathbf{x}} \sup_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

ゼロ和 2 人ゲームに対する混合戦略のナッシュ均衡の例

コイン合わせゲーム (matching pennies)

2 人のプレイヤーがコインの表裏を同時に選択する。両者同じ面ならプレイヤー 1 の勝ち、違う面ならプレイヤー 2 の勝ちとし、勝者は敗者に 10 円支払う。

利得行列 (10 円 = 利得 1)		
1 \ 2	裏	表
裏	(1, -1)	(-1, 1)
表	(-1, 1)	(1, -1)

混合戦略のナッシュ均衡：コイン合わせゲーム

プレイヤー 1, プレイヤー 2 が表の確率をそれぞれ p_1, p_2 とすると、利得関数は、

$$\begin{aligned} F(q_1, q_2) &= p_1(p_2 - (1 - p_2)) + (1 - p_1)(-p_2 + (1 - p_2)) \\ &= (1 - 2p_1)(1 - 2p_2) \end{aligned}$$

$F(q_1, q_2)$ を最小化する q_2 (プレイヤー 2 の最適応答) は、

- $2p_1 < 1$ のとき: $p_2 = 1$. $F(q_1, q_2) = 2p_1 - 1$
- $2p_1 = 1$ のとき: $0 \leq p_2 \leq 1$. $F(q_1, q_2) = 0$
- $2p_1 > 1$ のとき: $p_2 = 0$. $F(q_1, q_2) = 1 - 2p_1$

$\min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) = \min\{2p_1 - 1, 0, 1 - 2p_1\}$ より、プレイヤー 1 のマクシミン戦略は $p_1^* = 0.5$,

そのときの利得関数の値は 0. 同様に、プレイヤー 2 のミニマックス戦略は $p_2^* = 0.5$ で、そのときの利得関数の値は 0. 各プレイヤーが表裏を等確率で選択するのがナッシュ均衡。