オペレーションズ・リサーチ II (7)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

スケジュール

No.	内容
1	導入 (非線形最適化問題，ゲーム理論，多目的最適化問題)
2	非線形計画 1 (勾配，ヘッセ行列，凸性，最適性条件，ニュートン法)
3	非線形計画 2 (最急降下法，準ニュートン法，共役勾配法，信頼領域法)
4	非線形計画 3 (制約つき問題の最適性条件，KKT 条件，ペナルティ関数法，２次計画法，逐次 2 次計画法)
5	ゲーム理論 1 (種々のゲーム，標準形，純粋戦略，混合戦略，ナッシュ均衡)
6	ゲーム理論 2 (展開形ゲーム，繰り返しゲーム)
7	多目的最適化 (パレート最適性，重み付け法，ϵ 制約法，重み付きメトリック法)

多目的最適化

ゲーム理論と多目的最適化の関係 (復習)

ゲーム理論： **複数**の意思決定主体が**各々の**目的関数を最適化

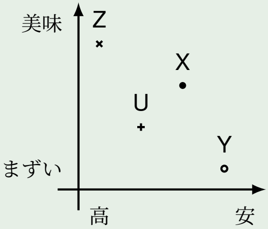
多目的最適化： **一つ**の意思決定主体が**複数**の目的関数を最適化

2 目的最適化問題の例 (復習)

- レストラン X, Y, Z, U を価格と味で評価
- どのレストランを選ぶべき?

レストラン	X	Y	Z	U
味	3	4	1	2
価格	3	1	4	2

(4 段階評価．4 が最もよい，1 が最も悪い)



- レストラン U は選ばれない (レストラン X より味も価格も劣る) ⇒ **パレート支配**
- レストラン X，Y，Z の中でどれを選ぶかはその日の気分次第 ⇒ **パレート最適**
  各評価を重視する度合いで決まる

多目的最適化問題の一般形

多目的最適化問題 (multi-objective optimization problem) の一般形 (MOP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

- **最小化**問題を考える
- 目的関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$
- 実行可能領域 $\mathcal{F}$ (個別の制約条件は考えない)

可能な範囲で解の間の優劣をつける ⇒ **パレート支配・パレート最適**

パレート支配・パレート最適

パレート支配 (weak/strong Pareto dominance)

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ が $\boldsymbol{x}' \in \mathcal{F}$ $(\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x})$ を

(弱) パレート支配： $f_i(\boldsymbol{x}) \leq f_i(\boldsymbol{x}')$ $(1 \leq i \leq m)$ かつ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')$

強パレート支配： $f_i(\boldsymbol{x}) < f_i(\boldsymbol{x}')$ $(1 \leq i \leq m)$

パレート最適性 (weak/strong Pareto optimality)

弱パレート最適： 強パレート支配する解が存在しない

(強) パレート最適： (弱) パレート支配する解が存在しない

ヴィルフレド・パレート (Vilfredo Pareto)

- イタリア人経済学者・社会学者
- 「結果の 80%は要因の 20%から生じる」という**パレートの法則** (Pareto principle) でも有名．80/20 ルールともいう
  - 世界の富の 80% は，総人口の 20% の富裕層が占めている
  - 会社全体の利益の 80% は，20% の社員が生み出している
  - etc.

パレート
写真

Vilfredo Pareto
(1948–1923)

パレート支配・パレート最適 (続き)

パレート支配 (weak/strong Pareto dominance)

$\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ が $\boldsymbol{x}' \in \mathcal{F}$ ($\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x}$) を

(弱) パレート支配： $f_i(\boldsymbol{x}) \leq f_i(\boldsymbol{x}')$ $(1 \leq i \leq m)$ かつ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')$

強パレート支配： $f_i(\boldsymbol{x}) < f_i(\boldsymbol{x}')$ $(1 \leq i \leq m)$

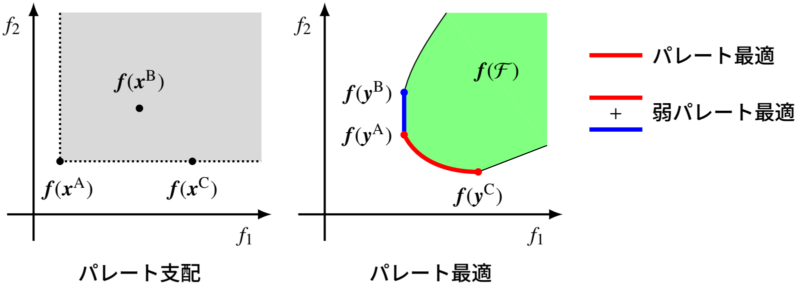
パレート最適性 (weak/strong Pareto optimality)

弱パレート最適： 強パレート支配する解が存在しない

(強) パレート最適： (弱) パレート支配する解が存在しない

- (弱) パレート支配は以下が 2 条件が成り立つこと
  - すべての i について $f_i(\boldsymbol{x}) \leq f_i(\boldsymbol{x}')$
  - 少なくとも 1 つの i に対して $f_i(\boldsymbol{x}) < f_i(\boldsymbol{x}')$
- 強パレート支配ならば (弱) パレート支配
- (強) パレート最適ならば弱パレート最適
- パレート最適解は**非劣** (nondominated/noninferior) 解や**パレート効率** (Pareto efficient) 解などとも呼ばれる

パレート支配・パレート最適の例



- $\boldsymbol{x}^{\mathrm{A}}$ は $\boldsymbol{x}^{\mathrm{B}}$ を強パレート支配し，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{C}}$ を (弱) パレート支配する
- $\boldsymbol{y}^{\mathrm{A}}$ と $\boldsymbol{y}^{\mathrm{C}}$ は (強) パレート最適解，$\boldsymbol{y}^{\mathrm{B}}$ は弱パレート最適解

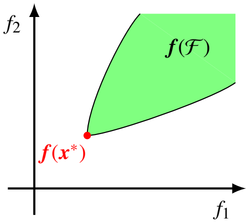
パレートフロント (Pareto front)

目的関数空間における (強) パレート最適解の集合．図の赤線

パレート最適集合 (Pareto optimal set)

(強) パレート最適解の集合．弱パレート最適解の集合は**弱パレート最適集合**

完全最適解



完全最適解 (complete optimal solution)

$\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{F}$ が任意の $\boldsymbol{x}' \in \mathcal{F}$ について $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}^*$ を**完全最適解** (complete optimal solution) という．

$\boldsymbol{x}^*$ はすべての目的関数 $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})$ を**同時に**最小化する解

- 完全最適解が存在するなら，1 個の目的関数 (たとえば $f_1(\boldsymbol{x})$) のみ最適化すればよい
  $\Rightarrow$ 多目的最適化を考える必要なし
- 以下，完全最適解が存在しない問題を対象
  $\Rightarrow$ 目的関数の間に**トレードオフ**の関係

多目的最適化手法

- パレート最適解は複数存在
- どれを採用するかは意思決定者の**選好** (preference) に依存
- 意思決定者が満足する解 (**満足解**; satisficing solution) が求まれば終了

非対話的手法 (non-interactive method)

意思決定者との反復的なインタラクションを用いない手法

無選好手法 *： 意思決定者の存在を考慮せず，一つの解を求める

事前的手法 †： 意思決定者の選好の事前情報を用いて一つの解を求める

事後的手法 ‡： 複数の解を求め，意思決定者が事後的に一つの解を選択する

* no-preference method, † a priori method, ‡ posteriori method

対話的手法 (interactive method)

意思決定者とのインタラクションを満足解が求まるまで反復する手法

目的関数が単一 (単目的; single-objective) の最適化問題は何らかの方法で解けるものとして，**単目的最適化問題に変換して解く手法**をいくつか紹介

重み付け法

重み付け法 (weighting method)

各目的関数に重み付けし，単目的最適化問題 (重み付け問題) を解く

元問題 (MOP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

重み付け問題 (weightinng problem) (WP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

重みベクトル (weight verctor) $\boldsymbol{w}$

$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$ は，$\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$，かつ $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$ を満たすよう選ぶ

重み付け法 (弱パレート最適性)

元問題 (MOP)

$$\min \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t.} \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

$\Longrightarrow$

重み付け問題 (weightinng problem) (WP)

$$\min \ \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t.} \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

(WP) の弱パレート最適性

(WP) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ は (MOP) の弱パレート最適解となる.

証明

$\boldsymbol{x}^*$ が (MOP) の弱パレート最適解ではないと仮定すると, $\boldsymbol{x}^*$ を強パレート支配する解 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ が存在. すなわち, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在. $\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ なので, このとき $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ が成り立つ. これは, $\boldsymbol{x}^*$ が (WP) の最適解であることに矛盾.

重み付け法 (パレート最適性)

(WP) のパレート最適性

以下のいずれかの条件が満たされるとき，(WP) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ は (MOP) のパレート最適解となる．

1. (WP) の最適解はただ一つ (一意)
2. $\boldsymbol{w} > \boldsymbol{0}$

証明

$\boldsymbol{x}^*$ が (MOP) のパレート最適解ではないと仮定する．このとき，$\boldsymbol{x}^*$ をパレート支配する解，すなわち，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ かつ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ が存在．

1. (WP) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が一意のとき

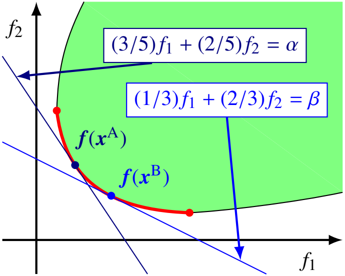
$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ が成り立つはず．しかし，$\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ より $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ となり矛盾．

2. $\boldsymbol{w} > \boldsymbol{0}$ のとき

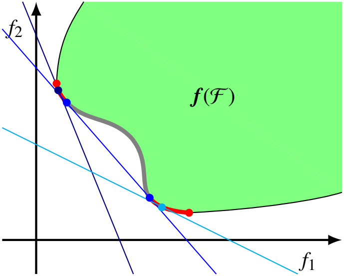
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ かつ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ より，$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$．$\boldsymbol{x}^*$ が (WP) の最適解であることに矛盾．

以上より，$\boldsymbol{x}^*$ は (MOP) のパレート最適解．

重み付け法の例



重み付け法で求まるパレート最適解



パレート最適解が求まらない場合

- 重みを変化させることでパレート最適解が求まる
- 実行可能領域の像 $\boldsymbol{f}(\mathcal{F})$ が凸でない場合，**求められないパレート最適解が存在**

重み付け法の用途

- 重みを $w_i = 1/m$ と設定 ⇒ **無選好手法**
- 意思決定者が重みを事前に指定 ⇒ **事前的手法**
- 重みを変化させて複数の解を求め出力 ⇒ **事後的手法**
- 対話的に重みを調整 ⇒ **対話的手法**

ϵ 制約法

ϵ 制約法 (ϵ-constraint method)

1 つの目的関数だけを残し，それ以外の目的関数を制約条件とした単目的最適化問題 (ϵ 制約問題) を解く

元問題 (MOP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

ϵ 制約問題 (ϵ-constraint problem) (ECP)

$$\begin{aligned} \min \quad & f_j(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{x}) \le \epsilon_i, \quad 1 \le i \le m,\ i \ne j \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

(ECP) の弱パレート最適性

(ECP) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ は (MOP) の弱パレート最適解となる．

(ECP) のパレート最適性

(ECP) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が一意なら，(MOP) のパレート最適解となる．

重み付け法と同様の性質

ϵ 制約法 (続き)

元問題 (MOP)

$$\min \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t.} \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

$\Longrightarrow$

ϵ 制約問題 (ϵ-constraint problem) (ECP)

$$\begin{aligned} &\min \ f_j(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s.t.} \ f_i(\boldsymbol{x}) \le \epsilon_i, \quad 1 \le i \le m, \ i \ne j \\ &\qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

重み付け法との相違点

ϵ_i を適切に調整すれば，(MOP) のパレート最適解を求めることができる

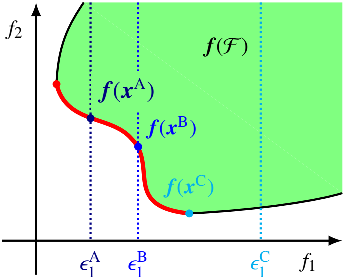
(MOP) のパレート最適解 $\boldsymbol{x}^\circ \in \mathcal{F}$ は，$\epsilon_i = f_i(\boldsymbol{x}^\circ)$ $(1 \le i \le m, i \ne j)$ とおいた (ECP) の最適解となる．

証明

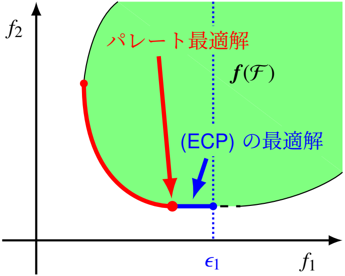
(MOP) のパレート最適解 $\boldsymbol{x}^\circ$ が，$\epsilon_i = f_i(\boldsymbol{x}^\circ)$ $(1 \le i \le m, i \ne j)$ とおいた (ECP) の最適解ではないと仮定する．
このときの (ECP) の最適解を $\boldsymbol{x}^*$ とすると，$f_i(\boldsymbol{x}^*) \le \epsilon_i = f_i(\boldsymbol{x}^\circ)$ $(1 \le i \le m, i \ne j)$ かつ $f_j(\boldsymbol{x}^*) < f_j(\boldsymbol{x}^\circ)$ が成り立つ．すなわち，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \le \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^\circ)$ かつ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) \ne \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^\circ)$ が成り立ち，$\boldsymbol{x}^*$ が $\boldsymbol{x}^\circ$ をパレート支配することがわかる．これは $\boldsymbol{x}^\circ$ のパレート最適性に矛盾する．

ϵ 制約法の例

$f_1(\boldsymbol{x}) \leq \epsilon_1$ を制約条件に追加し，$f_2(\boldsymbol{x})$ を最小化



ϵ_1 を変化させれば，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{A}}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{B}}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{C}}$ のいずれも求まる



(ECP) の最適解が一意でない場合，パレート最適解が求まるとは限らない

- $\boldsymbol{f}(\mathcal{F})$ が凸でなくても，パレート最適解を求めることができる
- (ECP) の最適解が一意でない場合，(ECP) の最適解の一つが (MOP) のパレート最適解．単目的最適化で最適解をすべて求めるのは難しいので，弱パレート最適解が求まる可能性もある

ϵ 制約法の用途

重み付け法と同様

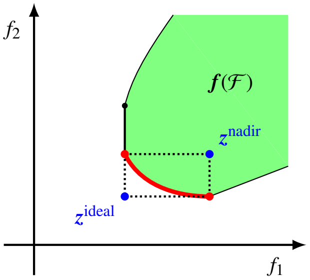
重み付きメトリック法 (準備)

理想点 (ideal objective vector) z^{ideal}

各目的関数の最小値 (下界値) を並べた点 (ベクトル)

最悪点 (nadir objective vector) z^{nadir}

パレートフロントにおける各目的関数の最大値 (上界値) を並べた点 (ベクトル)



重み付きメトリック法

重み付きメトリック法 (weighted metric method)

理想点 z^{ideal} と目的関数値 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の差の**重み付き L_p ノルム** *(weighted L_p-norm) を最小化する，単目的の最適化問題 (重み付き L_p 問題) を解く．ただし $1 \leq p \leq \infty$

* L_∞ ノルムは重み付き**チェビシェフノルム** (weighted Tchebycheff norm) とも呼ばれる

元問題 (MOP)

$$\min \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t.} \ \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

$\Rightarrow$

重み付き L_p 問題 (weightinng L_p-problem) (WLP)

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{m} w_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - z_i^{\text{ideal}} \right)^p \right\}^{1/p}$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

$f_i(\boldsymbol{x}) - z_i^{\text{ideal}} \geq 0$ に注意

参考：L_p ノルム

$p = 0$： $\|\boldsymbol{x}\|_0 = (\boldsymbol{x}$ の非零要素の個数)

$1 \leq p < \infty$： $\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x|^p \right)^{1/p}$

$p = \infty$： $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$

重み付きメトリック法 ($1 \leq p < \infty$ の場合)

- $p = 1$ のときは重み付け法と一致
- 性質も重み付け法と同様

元問題 (MOP)

$$\begin{aligned} &\min \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

重み付き L_p 問題 (weightinng L_p-problem) (WLP)

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{m} w_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - z_i^{\text{ideal}} \right)^p \right\}^{1/p}$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

(WLP) の弱パレート最適性 ($1 \leq p < \infty$)

(WLP) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ は (MOP) の弱パレート最適解となる.

(WLP) のパレート最適性 ($1 \leq p < \infty$)

以下のいずれかの条件が満たされるとき，(WLP) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ は (MOP) のパレート最適解となる.

1. (WLP) の最適解が一意
2. $\boldsymbol{w} > \boldsymbol{0}$

重み付きメトリック法 ($p = \infty$ の場合)

重み付きミニマックス法 (weighted min-max method) とも呼ばれる

元問題 (MOP)

$$\min \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{s.t.} \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

$\Rightarrow$

重み付きチェビシェフノルム問題 (WTP)

$$\min \ \max_{1 \le i \le m} \left\{ w_i (f_i(\boldsymbol{x}) - z_i^{\text{ideal}}) \right\} \qquad \text{s.t.} \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

(WTP) の弱パレート最適性

(WTP) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ は (MOP) の弱パレート最適解となる．

(WTP) のパレート最適性

(WLP) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が一意なら，(MOP) のパレート最適解となる．

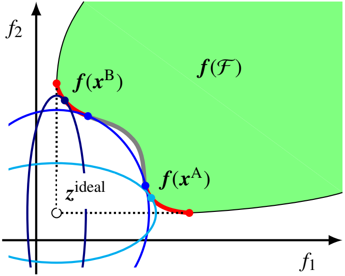
$\boldsymbol{w} > \boldsymbol{0}$ のときは，パレート最適解になるとは限らない

(WTP) のパレート最適性その 2

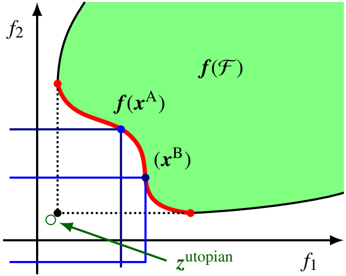
(MOP) のパレート最適解 $\boldsymbol{x}^\circ \in \mathcal{F}$ は，$\boldsymbol{w} > 0$ を適切に選べば，$\boldsymbol{z}^{\text{ideal}}$ を $\boldsymbol{z}^{\text{utopian}}$ に置き換えた (WTP) の最適解となる．

$\boldsymbol{z}^{\text{utopian}}$: $\boldsymbol{z}^{\text{utopian}} < \boldsymbol{z}^{\text{ideal}}$ を満たす点 (ベクトル)． $z_i^{\text{utopian}} = z_i^{\text{ideal}} - \epsilon_i \quad (1 \le i \le m, \epsilon_i > 0)$

重み付きメトリック法の例



重み付きメトリック法 ($p = 2$).
楕円は重みを変更したときの等高線



重み付きメトリック法 ($p = \infty$).
長方形は重みを変更したときの等高線

重み付きメトリック法の用途

重み付け法や ϵ 制約法と同様