オペレーションズ・リサーチ II (1)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

スケジュール

No.	内容
1	導入 (非線形最適化問題，ゲーム理論，多目的最適化問題)
2	非線形計画 1 (勾配，ヘッセ行列，凸性，最適性条件，ニュートン法)
3	非線形計画 2 (最急降下法，準ニュートン法，共役勾配法，信頼領域法)
4	非線形計画 3 (制約つき問題の最適性条件，KKT 条件，ペナルティ関数法，２次計画法，逐次 2 次計画法)
5	ゲーム理論 1 (種々のゲーム，標準形，純粋戦略，混合戦略，ナッシュ均衡)
6	ゲーム理論 2 (展開形ゲーム，繰り返しゲーム)
7	多目的最適化 (パレート最適性，重み付け法，ϵ 制約法，重み付きメトリック法)

オペレーションズ・リサーチ II の内容

- 非線形最適化 (nonlinear optimization)
- ゲーム理論 (game theory)
- 多目的最適化 (multiobjective optimization)

線形計画問題 (linear programming problem)

- 目的関数: 1 次関数 ($\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$)
- 制約条件: 1 次式 ($A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$)
- 比較的容易に解ける (シンプレックス法・内点法)

非線形計画問題 (nonlinear programming problem)

- 目的関数・制約条件のどちらか，あるいは両方が非線形の関数
- 一般には最適解を求めるのは難しい $\Rightarrow$ 近似解を求める
- 比較的容易に解ける問題もある (たとえば凸 2 次計画問題)
- ニューラルネットの学習も非線形計画問題

非線形計画問題の一般形 (その 1)

非線形計画問題の一般形

$$\begin{aligned} &\min \quad f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s.t.} \quad h_i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m && (m \text{ 個の等式制約条件}) \\ &\qquad\; g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, r && (r \text{ 個の不等式制約条件}) \\ &\qquad\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n && (\text{通常は省略}) \end{aligned}$$

一般形 (ベクトル表記)

$$\begin{aligned} &\min \quad f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s.t.} \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} && (m \text{ 個の等式制約条件}) \\ &\qquad\; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0} && (r \text{ 個の不等式制約条件}) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ h_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_r(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

基本的に最小化問題を考えることにする

非線形計画問題の一般形 (その 1)

非線形計画問題の一般形

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(\boldsymbol{x}) && \\
\text{s.t.} \quad & h_i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m && (m \text{ 個の等式制約条件}) \\
& g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, r && (r \text{ 個の不等式制約条件}) \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n && (\text{通常は省略})
\end{aligned}
$$

一般形 (ベクトル表記)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(\boldsymbol{x}) && \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} && (m \text{ 個の等式制約条件}) \\
& \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0} && (r \text{ 個の不等式制約条件})
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ h_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_r(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}
$$

基本的に**最小化問題**を考えることにする

非線形計画問題の一般形 (その 2)

非線形計画問題の例

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_1^2 + 3x_1x_2 \\
\text{s.t.} \quad 2\sin(3x_1x_2) + \cos(x_1) &= 1 \\
x_1^2 + x_2 &= 5 \\
2x_1 + x_2 &\leq 3 \\
x_1x_2^2 + x_1 &\geq 1
\end{aligned}
$$

一般形

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.} \quad & h_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\
& h_2(\boldsymbol{x}) = 0 \\
& g_1(\boldsymbol{x}) \leq 0 \\
& g_2(\boldsymbol{x}) \leq 0
\end{aligned}
$$

一般形 (ベクトル表記)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\boldsymbol{x}) \\ h_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}
$$

$$
f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 3x_1x_2 \qquad h_1(\boldsymbol{x}) = 2\sin(3x_1x_2) + \cos(x_1) - 1 \qquad g_1(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + x_2 - 3
$$

$$
h_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2 - 5 \qquad g_2(\boldsymbol{x}) = 1 - x_1x_2^2 - x_1
$$

非線形計画問題の一般形 (その 3)

一般形 (集合表記)

$$\begin{array}{ll} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \end{array}$$

実行可能領域 $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}\}$

各表記を適宜使い分ける

制約なし最適化問題 (unconstrained optimization problem)

$$\begin{array}{ll} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

制約付き最適化問題 (constrained optimization problem)

制約条件が付加された (非線形計画問題).

$$\begin{array}{ll} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \end{array}$$

非線形計画問題の例：サポートベクターマシン (その 1)

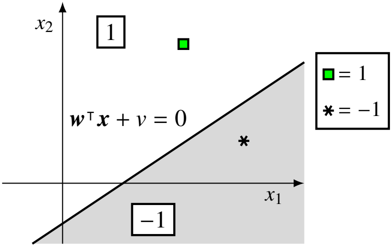
2 クラス線形分類器

入力 : $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

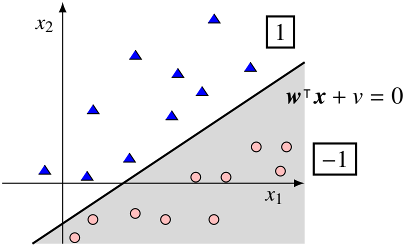
出力 : $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x} + v < 0$ なら -1, $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x} + v > 0$ なら 1

分類器の学習 (設計)

- (別の方法で) 分類済の学習データ $(\boldsymbol{x}^{(1)}, y^{(1)}), (\boldsymbol{x}^{(2)}, y^{(2)}), \ldots, (\boldsymbol{x}^{(m)}, y^{(m)})$
- $\boldsymbol{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ がデータ, $y^{(i)} \in \{-1, 1\}$ が分類 (分類器の出力)
- 学習データがうまく分類されるよう, 超平面の係数 $\boldsymbol{w}, v$ を決定



2 クラス線形分類器



分類器の学習

非線形計画問題の例：サポートベクターマシン (その 2)

制約条件

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}^{(i)} + v < 0, &\quad y^{(i)} = -1 \\
\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}^{(i)} + v > 0, &\quad y^{(i)} = 1
\end{aligned}
$$

1 つにまとめると

$$
y^{(i)}(\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}^{(i)} + v) > 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{*}
$$

規格化 †

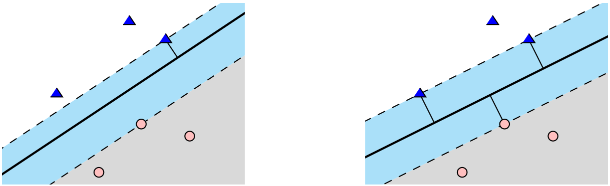
$$
y^{(i)}(\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}^{(i)} + v) \geq 1, \quad i = 1, \ldots, m \tag{**}
$$

† (*) 式の左辺の最小値を c とすると，$\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w}/c, v' = v/c$ は (**) 式を満たす

目的関数：マージン最大化

- 学習データから，超平面の係数 $\boldsymbol{w}, v$ をいい感じに決めたい
- 超平面からのマージン (超平面までの距離の最小値) を最大化

非線形計画問題の例：サポートベクターマシン (その 3)



$\boldsymbol{x}^{(i)}$ から $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x} + v = 0$ までの距離 d

単位法線ベクトル $\dfrac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|} = \dfrac{\boldsymbol{w}}{\sqrt{\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w}}}$ 方向に $\boldsymbol{x}^{(i)}$ から $-y^{(i)}d$ 進んだ点 $\boldsymbol{x}_0$ が超平面上

$$y^{(i)}\left\{\boldsymbol{w}^\top\left(\boldsymbol{x}^{(i)} - y^{(i)}\frac{d}{\sqrt{\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w}}}\boldsymbol{w}\right) + v\right\} = 0$$

$$y^{(i)}(\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}^{(i)} + v) = \frac{\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w}}{\sqrt{\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w}}}d$$

$$\frac{y^{(i)}(\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}^{(i)} + v)}{\sqrt{\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w}}} = d$$

左辺分子の最小値は制約条件 $y^{(i)}(\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}^{(i)} + v) \geq 1$ より 1. d を最大化するには **$\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w}$ を最小化**すればよい

非線形計画問題の例：サポートベクターマシン (その 4)

サポートベクターマシン

マージン最大化により得られる分類器モデル

サポートベクターマシンの学習

$$
\begin{aligned}
\min\ & \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w} \\
\text{s.t.}\ & y^{(i)}(\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}^{(i)} + v) \geq 1, \quad i = 1, \dots, m \\
& \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \\
& v \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ v \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} y^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(1)})^\top & 1 \\ y^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(2)})^\top & 1 \\ \vdots & \vdots \\ y^{(m)}(\boldsymbol{x}^{(m)})^\top & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} I & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^\top & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，以下のように書き直せる

$$
\begin{aligned}
\min\ & \boldsymbol{u}^\top Q \boldsymbol{u} \\
\text{s.t.}\ & A\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

凸 2 次計画問題の一種

非線形計画問題の例：サポートベクターマシン (その 4)

サポートベクターマシン

マージン最大化により得られる分類器モデル

サポートベクターマシンの学習

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{w} \\ \text{s.t.} \quad & y^{(i)}(\boldsymbol{x}^{(i)})^\top \boldsymbol{w} + y^{(i)} v \geq 1, \quad i = 1, \ldots, m \\ & \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \\ & v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ v \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} y^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(1)})^\top & 1 \\ y^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(2)})^\top & 1 \\ \vdots & \vdots \\ y^{(m)}(\boldsymbol{x}^{(m)})^\top & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} I & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^\top & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，以下のように書き直せる

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{u}^\top Q \boldsymbol{u} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

凸 2 次計画問題の一種

局所的最適解と大域的最適解

非線形計画問題 (P)

$$\begin{aligned} \min\ & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

大域的最適解 (global optimum, global minimum)

(P) の実行可能解 $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{F}$ が任意の実行可能解 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}^*) \le f(\boldsymbol{x})$$

を満たすとき，$\boldsymbol{x}^*$ を (P) の**大域的最適解**という．

局所的最適解 (local optimum, local minimum)

ある $\epsilon > 0$ が存在して，(P) の実行可能解 $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{F}$ が **$\boldsymbol{x}^*$ の ϵ 近傍内の**任意の実行可能解 $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^*; \epsilon) \cap \mathcal{F}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}^*) \le f(\boldsymbol{x})$$

を満たすとき，$\boldsymbol{x}^*$ を (P) の**局所的最適解**という．

$\boldsymbol{x}^*$ の ϵ 近傍 $B(\boldsymbol{x}^*; \epsilon)$ ($\boldsymbol{x}^*$ を中心とする半径 ϵ の超球の内部)

$$B(\boldsymbol{x}^*; \epsilon) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| < \epsilon\},\ \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

凸計画問題

凸計画問題 (convex programming problem)

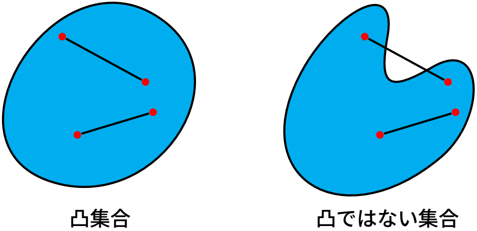
- 目的関数が**凸関数**，実行可能領域が**凸集合**
- 線形計画問題も含まれる
- 非線形でも比較的簡単に大域的最適解が求まる

凸集合 (convex set) の復習

$X \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合であるとは，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ と任意の実数 t $(0 \leq t \leq 1)$ に対して

$$(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \in X$$

が成り立つこと



凸計画問題 (続き)

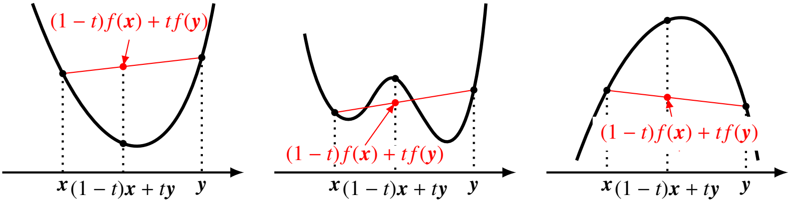
凸関数 (convex function)

$\mathbb{R}^n$ 上で定義された $f(\boldsymbol{x})$ が凸関数であるとは，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と任意の実数 $t\ (0 \le t \le 1)$ に対して

$$f((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) \le (1-t)f(\boldsymbol{x}) + tf(\boldsymbol{y})$$

が成り立つこと (不等号で成り立つ場合は**狭義**凸関数).

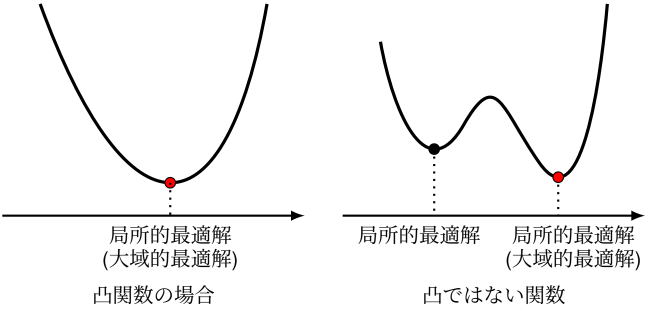
- 凸関数を上下反転したもの: **凹関数** (concave function)
- ややこしいので，凸関数を**下に凸**な関数，凹関数を**上に凸**な関数と呼ぶ場合も



凸関数の例　　凸ではない関数の例　　凹関数の例

凸関数の性質

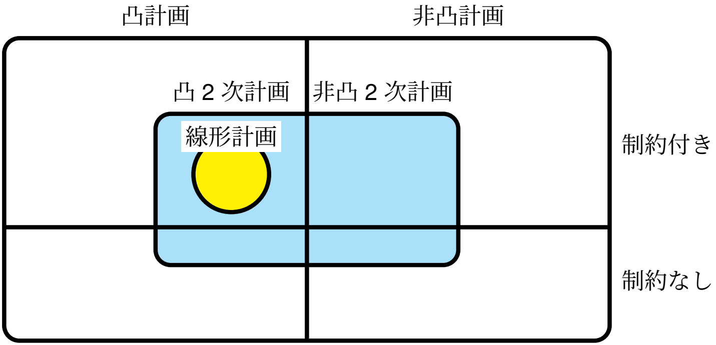
- 目的関数が凸: 局所的最適解 (極小点) = 大域的最適解 (最小点)
- 目的関数が凸でない: 局所的最適解 = 大域的最適解**とは限らない**
  局所的最適解と大域的最適解を区別するのも難しい
- 非線形最適化では，基本的に**局所的最適解を求める**ことを目指す



凸計画問題

- 目的関数が凸 ⇒ 局所的最適解を求めれば十分．大域的最適解でもある
- 実行可能領域が凸 ⇒ 局所的最適解を求めるのが比較的容易

非線形計画問題の分類



凸計画問題の分類

- 凸 2 次計画問題 (convex quadratic programming)
  目的関数は凸 2 次関数，制約条件は 1 次式 ⇒ 実行可能領域は凸集合
- 線形計画問題
  目的関数は線形 (1 次) 関数，制約条件は 1 次式 ⇒ 目的関数は凸関数
- より細かい分類として，2 次錐計画問題 (second-order cone programming problem), 半正定値計画問題 (semidefinite programming problem) などがある

ゲーム理論とは

- 意思決定を行う複数の人 (意思決定主体・プレイヤー) が相互にかかわり合う状況を数理モデルを用いて解析する学問
- ジョン・フォン・ノイマン (John von Neumann) の論文「On the theory of games of strategy」(1928) が始まり
- フォン・ノイマンと経済学者オスカー・モルゲンシュテルン (Oskar Morgenstern) の著書「ゲームの理論と経済行動」(1944) により学問分野として確立
- オペレーションズ・リサーチだけでなく経済学や心理学でも用いられる

ジョン・フォン・ノイマン

- 数学・物理・経済・コンピュータ科学など，幅広い分野で業績を残したすごい人
- 原爆開発のマンハッタン計画にも参加していた
- コンピュータのハードウェア設計の基礎を確立したため，現在のコンピュータはノイマン型と呼ばれる
- シンプレックス法を考案したダンツィークが，フォン・ノイマンに線形計画問題の説明をしに行ったところ，逆に 1 時間半みっちりレクチャーを受けたらしい

フォン・ノイマン
写真

John von Neumann

囚人のジレンマ

- 重大犯罪を犯した二人の囚人 1 と B の取り調べを検事が行う
- 囚人の選択肢は 2 つ．自白するか黙秘するか
- 一人が自白した場合，もう一人も自白すれば両者とも 8 年の刑，もう一人が黙秘すれば，自白した方は 3 ヶ月の刑で済み，黙秘した方は 10 年の刑
- 二人とも黙秘した場合，両者とも 1 年の刑
- 囚人は別々の部屋に隔離されており，互いに相談できない
- 刑期をできるだけ減らすために囚人達の取るべき行動は?

囚人の刑期 (囚人 1, 囚人 2) の表

囚人 1 \ 囚人 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年，1 年)	(10 年，3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月，10 年)	(8 年，8 年)

囚人 1 の行動?

囚人のジレンマ

- 重大犯罪を犯した二人の囚人 1 と B の取り調べを検事が行う
- 囚人の選択肢は 2 つ．自白するか黙秘するか
- 一人が自白した場合，もう一人も自白すれば両者とも 8 年の刑，もう一人が黙秘すれば，自白した方は 3 ヶ月の刑で済み，黙秘した方は 10 年の刑
- 二人とも黙秘した場合，両者とも 1 年の刑
- 囚人は別々の部屋に隔離されており，互いに相談できない
- 刑期をできるだけ減らすために囚人達の取るべき行動は?

囚人の刑期 (囚人 1, 囚人 2) の表

囚人 1 \ 囚人 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年，1 年)	(10 年，3 ヶ月)
自白	(**3 ヶ月**，10 年)	(**8 年**，8 年)

囚人 1 の行動?

- 自白 ⇒ 刑期は 3 ヶ月 (囚人 2 が黙秘)，8 年 (囚人 2 が自白)

囚人のジレンマ

- 重大犯罪を犯した二人の囚人 1 と B の取り調べを検事が行う
- 囚人の選択肢は 2 つ．自白するか黙秘するか
- 一人が自白した場合，もう一人も自白すれば両者とも 8 年の刑，もう一人が黙秘すれば，自白した方は 3 ヶ月の刑で済み，黙秘した方は 10 年の刑
- 二人とも黙秘した場合，両者とも 1 年の刑
- 囚人は別々の部屋に隔離されており，互いに相談できない
- 刑期をできるだけ減らすために囚人達の取るべき行動は?

囚人の刑期 (囚人 1, 囚人 2) の表

囚人 1 \ 囚人 2	黙秘	自白
黙秘	(**1 年**，1 年)	(**10 年**，3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月，10 年)	(8 年，8 年)

囚人 1 の行動?

- 自白 ⇒ 刑期は 3 ヶ月 (囚人 2 が黙秘)，8 年 (囚人 2 が自白)
- 黙秘 ⇒ 刑期は 1 年 (囚人 2 が黙秘)，10 年 (囚人 2 が自白)

囚人のジレンマ

- 重大犯罪を犯した二人の囚人 1 と B の取り調べを検事が行う
- 囚人の選択肢は 2 つ．自白するか黙秘するか
- 一人が自白した場合，もう一人も自白すれば両者とも 8 年の刑，もう一人が黙秘すれば，自白した方は 3 ヶ月の刑で済み，黙秘した方は 10 年の刑
- 二人とも黙秘した場合，両者とも 1 年の刑
- 囚人は別々の部屋に隔離されており，互いに相談できない
- 刑期をできるだけ減らすために囚人達の取るべき行動は?

囚人の刑期 (囚人 1, 囚人 2) の表

囚人 1 \ 囚人 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年，1 年)	(10 年，3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月，10 年)	(8 年，8 年)

囚人 1 の行動?

- 自白 ⇒ 刑期は 3 ヶ月 (囚人 2 が黙秘)，8 年 (囚人 2 が自白)
- 黙秘 ⇒ 刑期は 1 年 (囚人 2 が黙秘)，10 年 (囚人 2 が自白)

囚人 2 の行動によらず，自白した方が得!

囚人のジレンマ

- 重大犯罪を犯した二人の囚人 1 と B の取り調べを検事が行う
- 囚人の選択肢は 2 つ．自白するか黙秘するか
- 一人が自白した場合，もう一人も自白すれば両者とも 8 年の刑，もう一人が黙秘すれば，自白した方は 3 ヶ月の刑で済み，黙秘した方は 10 年の刑
- 二人とも黙秘した場合，両者とも 1 年の刑
- 囚人は別々の部屋に隔離されており，互いに相談できない
- 刑期をできるだけ減らすために囚人達の取るべき行動は?

囚人の刑期 (囚人 1, 囚人 2) の表

囚人 1 \ 囚人 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年，1 年)	(10 年，3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月，10 年)	(8 年，8 年)

囚人 1 の行動 (囚人 2 の行動も同じ)

- 自白 ⇒ 刑期は 3 ヶ月 (囚人 2 が黙秘)，8 年 (囚人 2 が自白)
- 黙秘 ⇒ 刑期は 1 年 (囚人 2 が黙秘)，10 年 (囚人 2 が自白)

囚人 2 の行動によらず，自白した方が得!

囚人のジレンマ (続き)

囚人の刑期 (囚人 1, 囚人 2) の表

囚人 1 \ 囚人 2	黙秘	自白
黙秘	(1 年，1 年)	(10 年，3 ヶ月)
自白	(3 ヶ月，10 年)	(8 年，8 年)

囚人のジレンマ

二人とも黙秘した方が得 (刑期 1 年) なのに，相談できない状況では，最善の行動を取ろうとすると二人とも自白する (刑期 8 年)

ゲーム理論の対象

- 囚人のジレンマに代表される，複数人 (プレイヤー) の意思決定の問題
- 各プレイヤーは合理的に行動すると仮定
- 囚人のジレンマのような各プレイヤーは相談できず，独立に意思決定する問題や，プレイヤー間の協力を考慮する問題
- 1 回だけでなく，複数回の意思決定を行う問題
- etc.

多目的最適化

ゲーム理論と多目的最適化の関係

ゲーム理論：　**複数**の意思決定主体が**各々の**目的関数を最適化

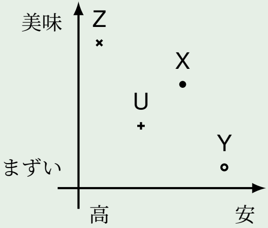
多目的最適化：　**一つ**の意思決定主体が**複数**の目的関数を最適化

2 目的最適化問題の例

- レストラン X, Y, Z, U を価格と味で評価
- どのレストランを選ぶべき?

レストラン	X	Y	Z	U
味	3	4	1	2
価格	3	1	4	2

(4 段階評価．4 が最もよい，1 が最も悪い)



多目的最適化

ゲーム理論と多目的最適化の関係

ゲーム理論： **複数**の意思決定主体が**各々の**目的関数を最適化

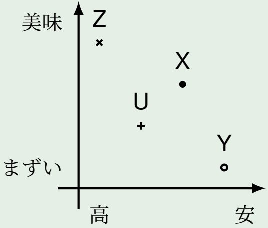
多目的最適化： **一つ**の意思決定主体が**複数**の目的関数を最適化

2 目的最適化問題の例

- レストラン X, Y, Z, U を価格と味で評価
- どのレストランを選ぶべき?

レストラン	X	Y	Z	U
味	3	4	1	2
価格	3	1	4	2

(4 段階評価．4 が最もよい，1 が最も悪い)



- レストラン U は選ばれない (レストラン X より味も価格も劣る)

多目的最適化

ゲーム理論と多目的最適化の関係

ゲーム理論： **複数**の意思決定主体が**各々の**目的関数を最適化

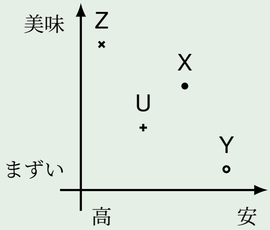
多目的最適化： **一つ**の意思決定主体が**複数**の目的関数を最適化

2 目的最適化問題の例

- レストラン X, Y, Z, U を価格と味で評価
- どのレストランを選ぶべき?

レストラン	X	Y	Z	U
味	3	4	1	2
価格	3	1	4	2

(4 段階評価．4 が最もよい，1 が最も悪い)



- レストラン U は選ばれない (レストラン X より味も価格も劣る)
- レストラン X，Y，Z の中でどれを選ぶかはその日の気分次第 ⇒ **パレート最適**
  各評価を重視する度合いで決まる