オペレーションズ・リサーチ II 補足資料

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

制約付き非線形計画問題に対するラグランジュの未定乗数法

制約付き非線形計画問題 (P1)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & h_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ \ i = 1, \ldots, m \\ & g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0, \ \ j = 1, \ldots, r \end{aligned}$$

ラグランジュの未定乗数法 (method of Lagrange multiplier)

- KKT 条件を用いて局所的最適解を求める方法
- KKT 条件を満たす解を求める
- $f(\boldsymbol{x})$, $g_j(\boldsymbol{x})$ が凸関数，$h_i(\boldsymbol{x})$ が 1 次関数なら，**大域的最適解**が求まる (第 4 回 p. 10)

制約付き非線形計画問題に対するラグランジュの未定乗数法 (続き)

制約付き非線形計画問題 (P1)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.} \quad & h_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ \ i = 1, \ldots, m \\
& g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0, \ \ j = 1, \ldots, r
\end{aligned}
$$

KKT 条件 (第 4 回 p. 2)

ラグランジュ関数

$$
L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j g_j(\boldsymbol{x})
$$

を用いて,

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} && \text{(A)} \\
h_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \ \ 1 \leq i \leq m && \text{(B)} \\
g_j(\boldsymbol{x}^*) \leq 0, \ \ 1 \leq j \leq r && \text{(C)} \\
\mu_j g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0, \ \ 1 \leq j \leq r && \text{(D)} \\
\mu_j \geq 0, \ \ 1 \leq j \leq r && \text{(E)}
\end{aligned}
$$

ラグランジュの未定乗数法の例

例題

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1 x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & h_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ & h_2(\boldsymbol{x}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1 x_2 \\ h_1(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 \\ h_2(\boldsymbol{x}) &= x_1 + x_2 + 2x_3 - 3 \end{aligned}$$

$f(\boldsymbol{x})$ が凸であることの確認

ヘッセ行列 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ を計算する．

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} f(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} f(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} f(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} f(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

固有値は 6，$6 \pm 2\sqrt{2}$ であり，いずれも正なので，正定行列．したがって，$f(\boldsymbol{x})$ は凸関数 (第 2 回 p. 8)．また，$h_1(\boldsymbol{x})$，$h_2(\boldsymbol{x})$ はいずれも $\boldsymbol{x}$ の 1 次関数だから，ラグランジュの未定乗数法により大域的最適解が求まる．

ラグランジュの未定乗数法の例 (続き)

KKT 条件

ラグランジュ関数

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= f(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 h_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 h_2(\boldsymbol{x}) \\
&= 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1 x_2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5) + \lambda_2(x_1 + x_2 + 2x_3 - 3)
\end{aligned}
$$

を用いて，

$$
\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 8x_2 + 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ 6x_3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}
$$

$$
\begin{aligned}
h_1(\boldsymbol{x}) &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 = 0 \\
h_2(\boldsymbol{x}) &= x_1 + x_2 + 2x_3 - 3 = 0
\end{aligned}
$$

KKT 条件を満たす解が大域的最適解．以下の連立方程式を解けばよい．

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 \phantom{{}+6x_3} + 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\
2x_1 + 8x_2 \phantom{{}+6x_3} + \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\
+ 6x_3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

これを解いて，大域的最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ $((\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0))$，最適値 $f(x_1, x_2, x_3) = 5$ が求まる．