# オペレーションズ・リサーチ III (6)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

# スケジュール

| No. | 内容 |
|---|---|
| 1 | 導入 (組合せ最適化，グラフ・ネットワーク，整数計画問題) |
| 2 | 計算複雑さの理論 |
| 3 | グラフ・ネットワーク 1 (グラフの分類，用語，種々の問題) |
| 4 | グラフ・ネットワーク 2 (最短経路問題，動的計画法) |
| 5 | グラフ・ネットワーク 3 (最小全域木，最大フロー問題) |
| 6 | グラフ・ネットワーク 4 (マッチング) |
| 7 | 整数計画 (緩和問題，分枝限定法，切除平面法) |

# マッチング

**マッチング (matching)**

無向グラフ $G = (V, E)$ の**マッチング** (matching) とは，辺の部分集合 $M \subseteq E$ で，頂点を共有する辺が含まれないもの

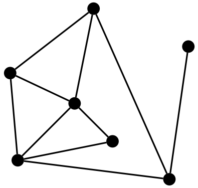
辺で接続した頂点を，重複がないようにペアリング (マッチ) したもの

**最大マッチング (maximum matching, maximum cardinality matching)**

最大本数の辺からなるマッチング

**最大重みマッチング (maximum weight matching)**

辺の重みの合計が最大となるマッチング



マッチング

# マッチング

**マッチング (matching)**

無向グラフ $G = (V, E)$ の**マッチング** (matching) とは，辺の部分集合 $M \subseteq E$ で，頂点を共有する辺が含まれないもの

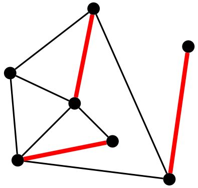
辺で接続した頂点を，重複がないようにペアリング (マッチ) したもの

**最大マッチング (maximum matching, maximum cardinality matching)**

最大本数の辺からなるマッチング

**最大重みマッチング (maximum weight matching)**

辺の重みの合計が最大となるマッチング

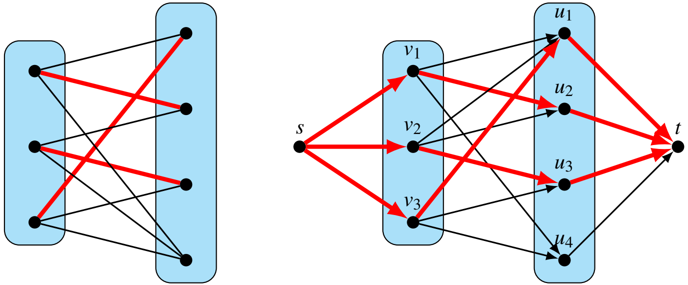


マッチング

# 二部グラフの最大マッチング

**二部グラフの最大マッチング (maximum (cardinality) bipartite matching)**

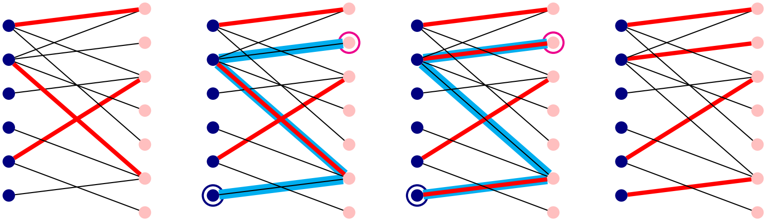
- **最大フロー問題として扱う**
- ホップクロフト・カープ法 (Hopcroft-Karp algorithm)



二部グラフの最大マッチング　　最大フロー問題

- 始点 $s$，終点 $t$ を追加
- 各辺の容量は 1
- フローの最大値 (フローの最大値) = $|M|$

# ホップクロフト・カープ法



(1) $M$ ($|M| = 3$)　(2) 最短 $M$-増加路　(3) 辺を反転　(4) $M'$ ($|M'| = 4$)

**$M$-交代路 ($M$-alternating path)**

マッチング $M$ の辺を交互に通過する路

**$M$-増加路 ($M$-augmenting path)**

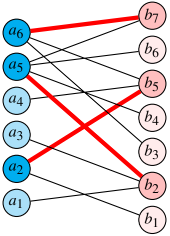
$M$-交代路のうち，以下の 2 条件を満たすもの

- 最初と最後の辺がいずれも $M$ に属さない
- 最初と最後の頂点はマッチしていない

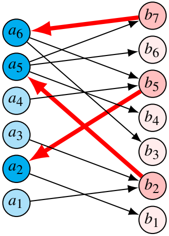
**ホップクロフト・カープ法 (Hopcroft-Karp algorithm)**

- 最短 $M$-増加路を同時に複数探して辺を反転．見つからなくなれば終了
- 計算量 $O(\sqrt{V}E)$

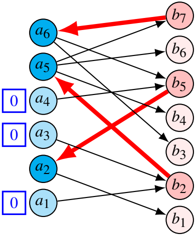
# 最短 $M$-増加路の探索方法



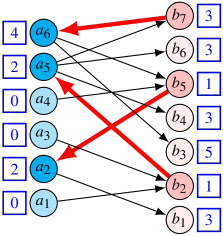

(1) マッチング $M$



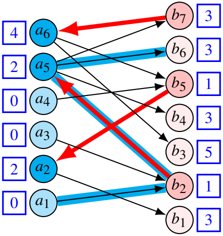

(2) 有向グラフに変換



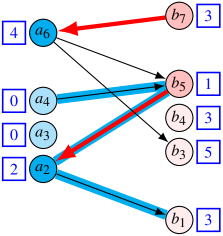

(3) マッチしていない左の頂点の距離を 0




(4) マッチしていない右の頂点までの最短距離 3

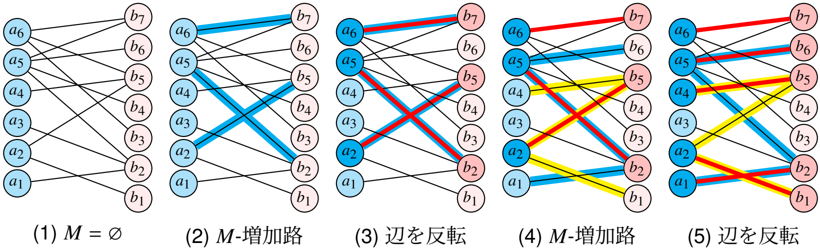



(5) 辺数 3 の $M$-増加路．見つかった経路は取り除く




(6) 辺数 3 の $M$-増加路．これ以外は見つからない

# ホップクロフト・カープ法の例




1. 空のマッチング $M = \emptyset$ からスタート
2. 辺数 1 の $M$-増加路を探す †
3. $M$-増加路の辺を反転． $M = \{(a_2, b_5), (a_5, b_2), (a_6, a_7)\}$
4. 辺数 3 の $M$-増加路を探す
5. $M$-増加路の辺を反転． $M = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_4, b_5), (a_5, b_6), (a_6, a_7)\}$

† ここで運よく $M$-増加路が 5 本見つかれば 1 回の反復で終わる

# 二部グラフのマッチング：ホールの定理

**近傍集合 (set of neighbors)**

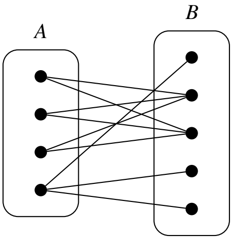
$\Gamma(X) = \{v \in V \setminus X \mid (u, v) \in E$ かつ $u \in X\}$

$X$ の頂点を除外しない集合 $\{v \in V \mid (u, v) \in E$ かつ $u \in X\}$ は neighborhood と呼ばれる．これも日本語で「近傍」とややこしいが，ここでは二部グラフしか考えないので同じもの

**ホールの定理 (Hall's theorem)・結婚定理 (marriage theorem)**

二部グラフ $G = (V, E)$ ($V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $|A| \leq |B|$)[†] において，$|M| = |A|$ を満たすマッチング $M$ が存在するための必要十分条件は，$A$ の任意の部分集合 $X \subseteq A$ について，$|\Gamma(X)| \geq |X|$ が成り立つこと．

[†] $K_{p,q}$ $(p \leq q)$




ホールの定理の条件を満たさない例

# 二部グラフのマッチング：ホールの定理

**近傍集合 (set of neighbors)**

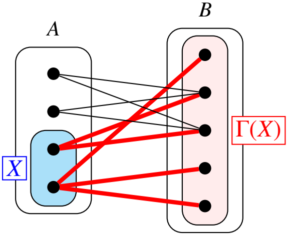
$\Gamma(X) = \{v \in V \setminus X \mid (u, v) \in E$ かつ $u \in X\}$

$X$ の頂点を除外しない集合 $\{v \in V \mid (u, v) \in E$ かつ $u \in X\}$ は neighborhood と呼ばれる．これも日本語で「近傍」とややこしいが，ここでは二部グラフしか考えないので同じもの

**ホールの定理 (Hall's theorem)・結婚定理 (marriage theorem)**

二部グラフ $G = (V, E)$ ($V = A \cup B$，$A \cap B = \emptyset$，$|A| \leq |B|$)[†] において，$|M| = |A|$ を満たすマッチング $M$ が存在するための必要十分条件は，$A$ の任意の部分集合 $X \subseteq A$ について，$|\Gamma(X)| \geq |X|$ が成り立つこと．

[†] $K_{p,q}$ $(p \leq q)$




ホールの定理の条件を満たさない例

# 二部グラフのマッチング：ホールの定理

**近傍集合 (set of neighbors)**

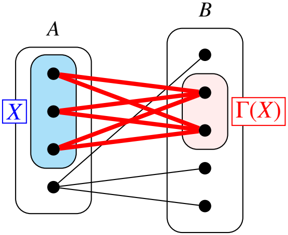
$\Gamma(X) = \{v \in V \setminus X \mid (u,v) \in E$ かつ $u \in X\}$

$X$ の頂点を除外しない集合 $\{v \in V \mid (u,v) \in E$ かつ $u \in X\}$ は neighborhood と呼ばれる．これも日本語で「近傍」とややこしいが，ここでは二部グラフしか考えないので同じもの

**ホールの定理 (Hall's theorem)・結婚定理 (marriage theorem)**

二部グラフ $G = (V, E)$ ($V = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, $|A| \le |B|$)† において，$|M| = |A|$ を満たすマッチング $M$ が存在するための必要十分条件は，$A$ の任意の部分集合 $X \subseteq A$ について，$|\Gamma(X)| \ge |X|$ が成り立つこと．

† $K_{p,q}$ $(p \le q)$




ホールの定理の条件を満たさない例

# 二部グラフのマッチング：ホールの定理

**近傍集合 (set of neighbors)**

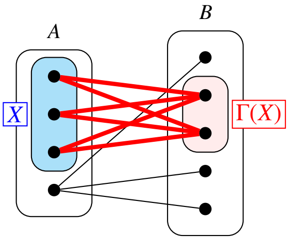
$\Gamma(X) = \{v \in V \setminus X \mid (u, v) \in E$ かつ $u \in X\}$

$X$ の頂点を除外しない集合 $\{v \in V \mid (u, v) \in E$ かつ $u \in X\}$ は neighborhood と呼ばれる．これも日本語で「近傍」とややこしいが，ここでは二部グラフしか考えないので同じもの

**ホールの定理 (Hall's theorem)・結婚定理 (marriage theorem)**

二部グラフ $G = (V, E)$ ($V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $|A| \leq |B|$)[†] において，$|M| = |A|$ を満たすマッチング $M$ が存在するための必要十分条件は，$A$ の任意の部分集合 $X \subseteq A$ について，$|\Gamma(X)| \geq |X|$ が成り立つこと．

† $K_{p,q}$ $(p \leq q)$




ホールの定理の条件を満たさない例

必要性は明らか ($|\Gamma(X)| < |X|$ ならダメ) なので，数学的帰納法で十分性を示す

# ホールの定理の証明 (前半)

## 証明の方針

- $A$ の任意の部分集合 $X \subseteq A$ について $|\Gamma(X)| \geq |X|$ が成り立つとき，$|M| = |A|$ を満たすマッチングが存在することを示す (十分性)
- $|A| = 1$ のとき，明らかに存在する
- $|A| = k$ のとき存在すると仮定し，$|A| = k + 1$ のときも存在することを示す

## ホールの定理の十分性の証明 (前半)

(i) $A$ の任意の真部分集合 $X \subset A$ について $|\Gamma(X)| > |X|$ が成り立つ場合

(1) 辺 $(a, b) \in E$ を任意に選び，$A' = A \setminus \{a\}$，$B' = B \setminus \{b\}$ とする．

(2) 頂点集合 $V' = A' \cup B'$ による $G$ の誘導部分グラフ $G' = (V', E')$ を考え，$G'$ における $X' \subseteq A'$ の近傍集合を $\Gamma'(X')$ とする．

(3) 任意の $X' \subseteq A' \subset A$ について以下が成り立つ．

 (a) $b \in \Gamma(X')$ のとき：$|\Gamma'(X')| = |\Gamma(X') \setminus \{b\}| = |\Gamma(X')| - 1 \geq |X'|$
 (b) $b \notin \Gamma(X')$ のとき：$|\Gamma'(X')| = |\Gamma(X')| > |X'|$

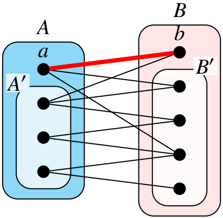
 すなわち，$|\Gamma'(X')| \geq |X'|$ が成り立ち，$G'$ はホールの定理の条件を満たす．

(4) $|A'| = k$ だから，数学的帰納法の仮定より $G'$ において $|M'| = |A'|$ を満たすマッチング $M'$ が存在する．

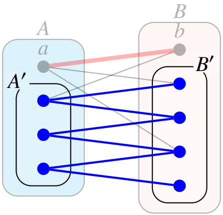
(5) $M = M' \cup \{(a, b)\}$ とすれば，条件を満たす $G$ のマッチングが得られる．

† $A$ の真部分集合 (proper subset) $X$：$X \subset A$ かつ $X \neq A$

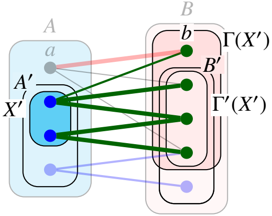
# ホールの定理の証明 (前半の図解)



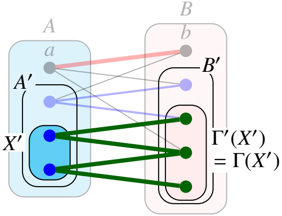

$G = (A \cup B, E)$ と $(a, b) \in E$,
$A' \subset A$, $B' \subset B$. $G$ は
$|\Gamma(X)| > |X|$ $(X \subset A)$ を満たす




$G' = (A' \cup B', E')$ が
$|\Gamma'(X')| \geq |X'|$ を満たす
ことを示す

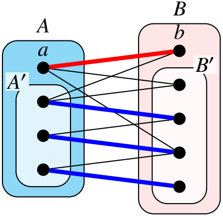



$b \in \Gamma(X')$ のとき,
$|\Gamma'(X')| = |\Gamma(X')| - 1 \geq |X'|$




$b \notin \Gamma(X')$ のとき,
$|\Gamma'(X')| = |\Gamma(X')| \geq |X'|$

$\boxed{|\Gamma'(X')| \geq |X'| \text{ を満たす}}$




$G$ のマッチング $M$ は,
$G'$ のマッチング $M'$ に
$(a, b)$ を追加したもの

# ホールの定理の証明 (後半)

## ホールの定理の十分性の証明 (後半)

(ii) $A$ のある真部分集合 $X \subset A$ について $|\Gamma(X)| = |X|$ が成り立つ場合

(1) $X' \subset X$ のとき $\Gamma(X') \subset \Gamma(X)$ より，頂点集合 $V_1 = X \cup \Gamma(X)$ による $G$ の誘導部分グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$ は定理の条件を満たす

(2) (1)，$|X| < |A| = k + 1$，および数学的帰納法の仮定より，$|M_1| = |X|$ を満たす $G_1$ のマッチング $M_1$ が存在する．

(3) $A_2 = A \setminus X$，$B_2 = B \setminus \Gamma(X)$ とし，頂点集合 $V_2 = A_2 \cup B_2$ による $G$ の誘導部分グラフを $G_2 = (V_2, E_2)$ とする．また，$G_2$ における $X_2$ の近傍集合を $\Gamma_2(X_2)$ と表す．

(4) 任意の $X_2 \subseteq A_2$ について，$X_2 \cap X = \varnothing$ より，

$$|\Gamma(X_2 \cup X)| \geq |X_2 \cup X| = |X_2| + |X|$$

が成り立つ．

(5) (ii) の条件より，

$$|\Gamma(X_2 \cup X)| = |\Gamma(X_2) \cup \Gamma(X)| = |\Gamma(X_2) \setminus \Gamma(X)| + |\Gamma(X)| = |\Gamma_2(X_2)| + |X|$$

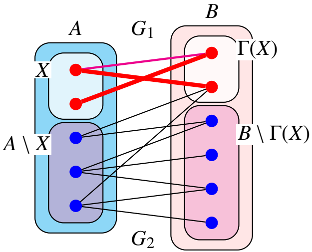
が成り立つ．

(6) (4)，(5) より，$|\Gamma_2(X_2)| \geq |X_2|$.

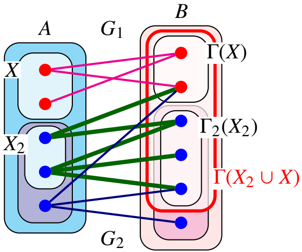
(7) (6) と $|A_2| < |A| = k + 1$ より，$G_2$ においても $|M_2| = |A_2|$ を満たすマッチング $M_2$ が存在する．

(8) $M = M_1 \cup M_2$ とすれば，条件を満たす $G$ のマッチングが得られる．

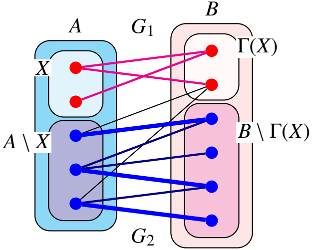
# ホールの定理の証明 (後半の図解)



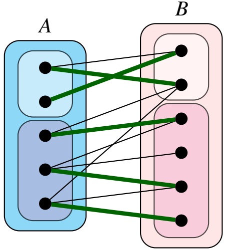

$|\Gamma(X)| = |X|$.  $G_1 = (X \cup \Gamma(X), E')$
のマッチング $M_1$  ($|M_1| = |X|$)




$|\Gamma(X_2 \cup X)| \geq |X_2 \cup X| = |X_2| + |X|$
$|\Gamma(X_2 \cup X)| = |\Gamma_2(X_2)| + |X|$
$|\Gamma_2(X_2)| \geq |X_2|$ が成り立つ




$G_2$ のマッチング $M_2$




$G$ のマッチング $M = M_1 \cup M_2$  ($|M| = |A|$)

# 平衡二部グラフの完全マッチング

**平衡二部グラフ (balanced bipartite graph)**

$|A| = |B| = n$ を満たす二部グラフ $G = (V, E) \quad (V = A \cup B,\ \ A \cap B = \emptyset)$

**完全マッチング (perfect matching)**

マッチしない頂点が存在しないマッチング

**結婚問題 (marriage problem)**

平衡二部グラフの完全マッチングを求める問題

**結婚定理：平衡二部グラフ版**

平衡二部グラフ $G = (V, E)$ $(V = A \cup B,\ \ A \cap B = \emptyset,\ \ |A| = |B|)$ において完全マッチングが存在するための必要十分条件は，$A$ の任意の部分集合 $X \subseteq A$ について，$|\Gamma(X)| \geq |X|$ が成り立つこと．

# 安定結婚問題

### 安定結婚問題 (stable marriage problem)・安定マッチング問題 (stable matching problem)

同じサイズの集合 $A$，$B$ について，以下が与えられている

- 各 $a \in A$ について，$b \in B$ の順位付け
- 各 $b \in B$ について，$a \in A$ の順位付け

なるべく希望順位を守って $A$ の要素と $B$ の要素をすべてペアリングする (**安定**な完全マッチングを求める) 問題

### 例 ($A = \{$ 男 1, 男 2, 男 3, 男 4 $\}$，$B = \{$ 女 1, 女 2, 女 3, 女 4 $\}$)

(a) 男による女の順位付け

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

(b) 女による男の順位付け

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

### 安定マッチング (stable matching)

現在のペアを解消したとしても，よりよいパートナーとペアになる可能性がないマッチング

# 安定マッチング・不安定マッチングの例

## 例 ($A = \{$ 男 1, 男 2, 男 3, 男 4$\}$, $B = \{$ 女 1, 女 2, 女 3, 女 4$\}$)

(a) 男による女の順位付け

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

(b) 女による男の順位付け

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

## 安定マッチングの例

(男 1, 女 2), (男 2, 女 1), (男 3, 女 3), (男 4, 女 4)

# 安定マッチング・不安定マッチングの例

## 例 ($A = \{$ 男 1, 男 2, 男 3, 男 4 $\}$, $B = \{$ 女 1, 女 2, 女 3, 女 4 $\}$)

(a) 男による女の順位付け

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | **女 1** |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | **女 2** |
| 男 3 | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | **女 4** | 女 3 |

(b) 女による男の順位付け

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | **男 1** | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | **男 2** | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | **男 4** | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

## 安定マッチングの例

(男 1, 女 2), (男 2, 女 1), (男 3, 女 3), (男 4, 女 4)

## 不安定 (unstable) マッチングの例

(男 1, 女 1), (男 2, 女 2), (男 3, 女 3), (男 4, 女 4)

# 安定マッチング・不安定マッチングの例

例 ($A$ = { 男 1, 男 2, 男 3, 男 4 }, $B$ = { 女 1, 女 2, 女 3, 女 4 })

(a) 男による女の順位付け

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | **女 1** |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | **女 2** |
| 男 3 | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | **女 4** | 女 3 |

(b) 女による男の順位付け

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | **男 1** | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | **男 1** | **男 2** | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | **男 4** | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

## 安定マッチングの例

(男 1, 女 2), (男 2, 女 1), (男 3, 女 3), (男 4, 女 4)

## 不安定 (unstable) マッチングの例

(**男 1**, 女 1), (男 2, **女 2**), (男 3, 女 3), (男 4, 女 4)

- **男 1** にとって，**女 2** は現在のパートナーである **女 1** よりも高順位
- **女 2** にとって，**男 1** は現在のパートナーである **男 2** よりも高順位

**男 1**，**女 2** は，現在のパートナーと別れて新しくペアになった方が得

# ゲール・シャープレーのアルゴリズム

## ゲール・シャープレーのアルゴリズム (Gale-Shapley algorithm)

- ゲール (David Gale) とシャープレー (Lloyd Stowell Shapley) による，安定マッチングを求めるためのアルゴリズム
- まだペアリングされていない $A$ の要素 $a$ を選び，希望順位の最も高い $B$ の要素 $b$ をパートナー候補とする．過去に断られた要素は対象外する．
- $b$ に現在パートナーがいない (フリー)，もしくはより希望順位の低いパートナー $a'$ とペアになっている場合，(現在のペアを解消後) $a$ とペアリングする．
- 以上を，$A$ のすべての要素がペアリングされるまで反復する
- $B$ の要素を基準にして，$A$ の要素とペアリングしてもよい
- 計算量 $O(n^2)$ $(n = |A| = |B|)$

- シャープレーは安定マッチングに関する功績が認められ，ロス (Alvin Elliot Roth) とともに 2012 年にノーベル経済学賞を受賞
- ゲールは 2008 年に亡くなっていたため，残念ながら受賞対象とはならなかった

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | **女 3** | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | 男 3 | 男 4 | **男 1** | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | **女 3** | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | **女 3** | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | 男 3 | 男 4 | **男 1** | **男 2** |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

男 2 が女 3 にプロポーズする．女 3 はすでに男 1 とペアになっているが，男 1 より男 2 の順位の方が高いので，ペアを解消して男 2 とペアになる．

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | **女 3** | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | 男 3 | 男 4 | **男 1** | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

男 2 が女 3 にプロポーズする．女 3 はすでに男 1 とペアになっているが，男 1 より男 2 の順位の方が高いので，ペアを解消して男 2 とペアになる．

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | **女 3** | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | **女 2** | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | 男 1 | 男 2 | 男 4 | **男 3** |
| **女 3** | 男 3 | 男 4 | **男 1** | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | **女 3** | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | **女 2** | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | **女 2** | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | 男 1 | 男 2 | **男 4** | **男 3** |
| **女 3** | 男 3 | 男 4 | **男 1** | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

男 4 が女 2 にプロポーズする．女 2 はすでに男 3 とペアになっているが，男 3 より男 4 の順位の方が高いので，ペアを解消して男 4 とペアになる．

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | **女 3** | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | **女 2** | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | 男 1 | 男 2 | **男 4** | 男 3 |
| **女 3** | 男 3 | 男 4 | **男 1** | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

男 4 が女 2 にプロポーズする．女 2 はすでに男 3 とペアになっているが，男 3 より男 4 の順位の方が高いので，ペアを解消して男 4 とペアになる．

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | **女 3** | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | **女 2** | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | 男 1 | 男 2 | **男 4** | 男 3 |
| **女 3** | 男 3 | 男 4 | **男 1** | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | **女 3** | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | **女 2** | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | 男 1 | 男 2 | **男 4** | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | **男 1** | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

男 3 が女 3 にプロポーズする．女 3 はすでに男 1 とペアになっているが，男 1 より男 3 の順位の方が高いので，ペアを解消して男 3 とペアになる．

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| 男1 | 女3 | 女2 | 女4 | 女1 |
| **男2** | 女3 | **女4** | 女1 | 女2 |
| **男3** | 女2 | **女3** | 女1 | 女4 |
| **男4** | **女2** | 女1 | 女4 | 女3 |

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| 女1 | 男1 | 男3 | 男2 | 男4 |
| **女2** | 男1 | 男2 | **男4** | 男3 |
| **女3** | **男3** | 男4 | 男1 | 男2 |
| **女4** | 男4 | 男3 | 男1 | **男2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| 男1 | 女3 | 女2 | 女4 | 女1 |
| 男2 | 女3 | 女4 | 女1 | 女2 |
| 男3 | 女2 | 女3 | 女1 | 女4 |
| 男4 | 女2 | 女1 | 女4 | 女3 |

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| 女1 | 男1 | 男3 | 男2 | 男4 |
| 女2 | 男1 | 男2 | 男4 | 男3 |
| 女3 | 男3 | 男4 | 男1 | 男2 |
| 女4 | 男4 | 男3 | 男1 | 男2 |

(b) 女を基準とした場合

男3が女3にプロポーズする．女3はすでに男1とペアになっているが，男1より男3の順位の方が高いので，ペアを解消して男3とペアになる．

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | **女 2** | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | **男 4** | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

男 1 が女 2 にプロポーズする．女 2 はすでに男 4 とペアになっているが，男 4 より男 1 の順位の方が高いので，ペアを解消して男 1 とペアになる．

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

男 1 が女 2 にプロポーズする．女 2 はすでに男 4 とペアになっているが，男 4 より男 1 の順位の方が高いので，ペアを解消して男 1 とペアになる．

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | **女 1** | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | 男 2 | **男 4** |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 男 1 | 女 3 | 女 2 | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | **女 1** | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | 男 2 | **男 4** |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | 女 2 | 女 4 | **女 1** |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | **男 1** | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| 女 2 | 男 1 | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| **男1** | 女3 | **女2** | 女4 | 女1 |
| **男2** | 女3 | **女4** | 女1 | 女2 |
| **男3** | 女2 | **女3** | 女1 | 女4 |
| **男4** | 女2 | **女1** | 女4 | 女3 |

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| **女1** | 男1 | 男3 | 男2 | **男4** |
| **女2** | **男1** | 男2 | 男4 | 男3 |
| **女3** | **男3** | 男4 | 男1 | 男2 |
| **女4** | 男4 | 男3 | 男1 | **男2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| **男1** | 女3 | **女2** | 女4 | **女1** |
| 男2 | 女3 | 女4 | 女1 | 女2 |
| 男3 | 女2 | 女3 | 女1 | 女4 |
| 男4 | 女2 | 女1 | 女4 | 女3 |

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| **女1** | **男1** | 男3 | 男2 | 男4 |
| **女2** | **男1** | 男2 | 男4 | 男3 |
| 女3 | 男3 | 男4 | 男1 | 男2 |
| 女4 | 男4 | 男3 | 男1 | 男2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | **女 1** | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | 男 2 | **男 4** |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| 男 3 | 女 2 | 女 3 | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| 女 3 | 男 3 | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | **女 1** | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | 男 2 | **男 4** |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| 男 4 | 女 2 | 女 1 | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| 女 4 | 男 4 | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | **女 1** | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | 男 2 | **男 4** |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | 女 1 | **女 4** | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| 女 1 | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | **男 4** | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | **女 1** | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | 男 2 | **男 4** |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | **女 1** | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | 女 1 | **女 4** | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | **男 3** | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | **男 4** | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

## ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | **女 1** | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | 男 2 | **男 4** |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| 男 2 | 女 3 | 女 4 | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | 女 1 | **女 4** | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | 男 2 | 男 4 |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | **男 4** | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | **女 1** | 女 4 | 女 3 |

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | 男 2 | **男 4** |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | 女 4 | **女 1** | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | 女 1 | **女 4** | 女 3 |

| | 1位 | 2位 | 3位 | 4位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | **男 2** | 男 4 |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | **男 4** | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの例

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | **女 4** | 女 1 | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | **女 1** | 女 4 | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | 男 2 | **男 4** |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | 男 4 | 男 3 | 男 1 | **男 2** |

(a) 男を基準とした場合

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **男 1** | 女 3 | **女 2** | 女 4 | 女 1 |
| **男 2** | 女 3 | 女 4 | **女 1** | 女 2 |
| **男 3** | 女 2 | **女 3** | 女 1 | 女 4 |
| **男 4** | 女 2 | 女 1 | **女 4** | 女 3 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 | 4 位 |
|---|---|---|---|---|
| **女 1** | 男 1 | 男 3 | **男 2** | 男 4 |
| **女 2** | **男 1** | 男 2 | 男 4 | 男 3 |
| **女 3** | **男 3** | 男 4 | 男 1 | 男 2 |
| **女 4** | **男 4** | 男 3 | 男 1 | 男 2 |

(b) 女を基準とした場合

基準にした方に有利な安定マッチングが求まる

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの正当性

$A$ を基準とするアルゴリズムを考える．

**ゲール・シャープレーのアルゴリズムの正当性 (完全マッチングが求まること)**

順位表の要素は有限 ($n^2$) で，各要素は最大 1 回しか参照しないので，アルゴリズムは有限回の反復で終了することに注意する．
終了時点で完全マッチングが求まらなかったとする．このとき，パートナーがいない $a \in A$ が存在する．一方，$B$ の各要素は，一度ペアリングされるとパートナーの変更しか起こらない．したがって，一度もペアリングされなかった $b \in B$ も存在する．しかし，いずれかの反復で $b$ が $a$ のパートナー候補に挙がっていたはずなので，矛盾．

**ゲール・シャープレーのアルゴリズムの正当性 (安定マッチングが求まること)**

安定でないマッチング $M$ が求まったとすると，以下を満たす $(a,b),(a',b') \in M$ が存在．

(1) $a$ にとって，$b'$ は $b$ よりも順位が高い

(2) $b'$ にとって，$a$ は $a'$ よりも順位が高い

(1) より，$b'$ は $b$ よりも先に $a$ のパートナー候補として挙がるので，$(a,b) \in M$ より

- $a$ は $b'$ に拒否された
- $b'$ にパートナーを解消された

のいずれか．いずれの場合も，$b'$ のその時点のパートナー $a''$ は，$b'$ にとって $a$ よりも順位が高い．しかし，(2) より，$b$ の最終的なパートナー $a'$ は，$b$ にとって $a$ より順位が低いので，$a''$ よりもさらに順位が低い．$b'$ が $a''$ とパートナーを解消するのは，より順位が高いパートナーが現われたときなので，矛盾．

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの練習問題

## 練習問題

医師 A, B, C を病院 1, 2, 3 に割り当てる問題

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 |
|---|---|---|---|
| 医師 A | 病院 1 | 病院 2 | 病院 3 |
| 医師 B | 病院 2 | 病院 3 | 病院 1 |
| 医師 C | 病院 1 | 病院 3 | 病院 2 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 |
|---|---|---|---|
| 病院 1 | 医師 C | 医師 A | 医師 B |
| 病院 2 | 医師 C | 医師 B | 医師 A |
| 病院 3 | 医師 B | 医師 C | 医師 A |

# ゲール・シャープレーのアルゴリズムの練習問題

## 練習問題

医師 A, B, C を病院 1, 2, 3 に割り当てる問題

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 |
|---|---|---|---|
| 医師 A | 病院 1 | 病院 2 | 病院 3 |
| 医師 B | 病院 2 | 病院 3 | 病院 1 |
| 医師 C | 病院 1 | 病院 3 | 病院 2 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 |
|---|---|---|---|
| 病院 1 | 医師 C | 医師 A | 医師 B |
| 病院 2 | 医師 C | 医師 B | 医師 A |
| 病院 3 | 医師 B | 医師 C | 医師 A |

## 解答

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 |
|---|---|---|---|
| 医師 A | 病院 1 | 病院 2 | **病院 3** |
| 医師 B | **病院 2** | 病院 3 | 病院 1 |
| 医師 C | **病院 1** | 病院 3 | 病院 2 |

| | 1 位 | 2 位 | 3 位 |
|---|---|---|---|
| 病院 1 | **医師 C** | 医師 A | 医師 B |
| 病院 2 | 医師 C | **医師 B** | 医師 A |
| 病院 3 | 医師 B | 医師 C | **医師 A** |

# 二部グラフの最大重みマッチング

**完全平衡二部グラフ (complete balanced bipartite graph) $K_{n,n}$**

完全二部グラフ $G = (A \cup B, E)$ において，$|A| = |B| = n$

**完全平衡二部グラフの最大重みマッチング (maximum weight bipartite matching)**

- 非負の重みの総和を最大化する完全マッチングを見つける
- 割当問題 (最大化・最小化とも) と等価

**ハンガリアン法 (Hungarian algorithm)**

- キューン (Harold William Kuhn) による割当問題 (最大化) の解法
- キューンは KKT 条件の 2 番目の K の人
- 割当問題が線形計画法により解けることを利用して，その双対問題を効率よく解くアルゴリズム
- 計算量 $O(n^4) \Rightarrow$ その後 $O(n^3)$ に改善
- 時間が足りないので詳細は省略

**ハンガリアン法の名前の由来**

ハンガリー人の数学者ケーニヒ (Gyula Kőnig) とエゲルヴァーリ (Jenő Elek Egerváry) の研究結果に基づいていることから．

# 一般のグラフの最大マッチング・最大重みマッチング

花アルゴリズム (blossom algorithm)

- 二部グラフの最大マッチング問題に対するホップクロフト・カープ法と同様の考え方
- $M$-増加路を見つけて辺を反転させる
- 一般のグラフの場合，$M$-増加路を求めるのが面倒
- 花 (blossom) と呼ばれる閉路を一つの頂点に圧縮することで効率化
- 計算量 $O(|E||V|^2)$
- 最大マッチングに対するアルゴリズムだが，最大重みマッチングにも適用可