オペレーションズ・リサーチ III (7)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

本文書のライセンスは CC-BY-SA にしたがいます

スケジュール

No.	内容
1	導入 (組合せ最適化，グラフ・ネットワーク，整数計画問題)
2	計算複雑さの理論
3	グラフ・ネットワーク 1 (グラフの分類，用語，種々の問題)
4	グラフ・ネットワーク 2 (最短経路問題，動的計画法)
5	グラフ・ネットワーク 3 (最小全域木，最大フロー問題)
6	グラフ・ネットワーク 4 (マッチング)
7	整数計画 (緩和問題，分枝限定法，切除平面法)

分枝限定法の概要

組合せ最適化問題

- ほとんどは強 NP 困難
  (擬) 多項式時間のアルゴリズムは存在しない (P $\neq$ NP ならば)
- 全列挙は効率が悪い
- 無駄な列挙を抑えて効率よく最適解を求める方法 $\Rightarrow$ **分枝限定法**

分枝限定法 (branch-and-bound method)：**最小化**問題の場合

- 可能であれば近似解を求めておく $\Rightarrow$ 暫定解とする
- 最適値の**上界値**：暫定解の目的関数値 (暫定解がなければ ∞)
- **分枝操作** (branching)：問題を部分問題・子問題 (subproblem) に再帰的に分割
  - 決定変数 (の一部) が取りうる範囲を限定あるいは固定
- **限定操作** (bounding)：部分問題の目的関数値の範囲を限定
  - 目的関数の**下界値**を計算
- **終端・枝刈り** (pruning)，**測深** (fathoming)：部分問題の計算を打ち切る
  - 部分問題の**下界値**が**上界値**より**大きい** $\Rightarrow$ 最適解が求まる可能性なし
  - 部分問題の最適解が求まった $\Rightarrow$ 必要に応じて暫定解を更新
  - 部分問題が実行不可能

分枝限定法の概要

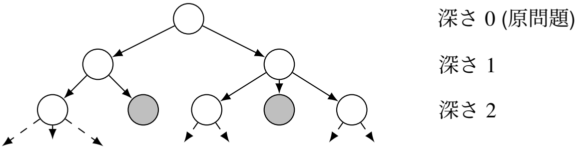
組合せ最適化問題

- ほとんどは強 NP 困難
  (擬) 多項式時間のアルゴリズムは存在しない (P $\neq$ NP ならば)
- 全列挙は効率が悪い
- 無駄な列挙を抑えて効率よく最適解を求める方法 $\Rightarrow$ **分枝限定法**

分枝限定法 (branch-and-bound method)：最大化問題の場合

- 可能であれば近似解を求めておく $\Rightarrow$ 暫定解とする
- 最適値の**下界値**：暫定解の目的関数値 (暫定解がなければ $-\infty$)
- **分枝操作** (branching)：問題を部分問題・子問題 (subproblem) に再帰的に分割
  - 決定変数 (の一部) が取りうる範囲を限定あるいは固定
- **限定操作** (bounding)：部分問題の目的関数値の範囲を限定
  - 目的関数の**上界値**を計算
- **終端・枝刈り** (pruning)，**測深** (fathoming)：部分問題の計算を打ち切る
  - 部分問題の**上界値**が**下界値**より**小さい** $\Rightarrow$ 最適解が求まる可能性なし
  - 部分問題の最適解が求まった $\Rightarrow$ 必要に応じて暫定解を更新
  - 部分問題が実行不可能

探索方法

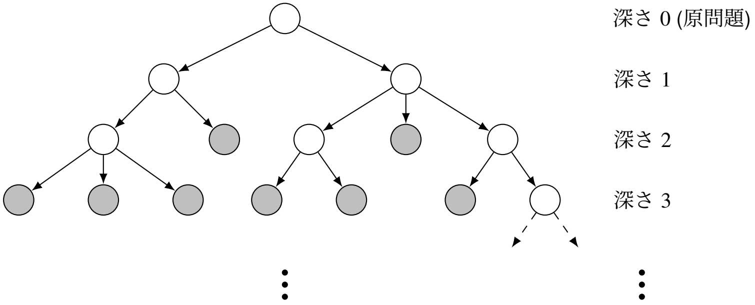


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　形状は根付き木

探索方法 (search strategy)

- **幅優先探索** (breadth-first search)
  - 探索木の深さが浅い節点 (部分問題) から順に探索
  - 部分問題を格納するための記憶領域が必要
- **深さ優先探索** (depth-first search)
  - 探索木の深い節点から順に探索
  - 必要な記憶領域が少ない
- **最良優先探索** (best-first search)
  - 目的関数値の推定値 (最小化問題の場合は下界値) がよい節点から順に探索
  - 必要な記憶領域は幅優先探索と深さ優先探索の間
  - 探索する部分問題が少なくなる

探索方法の種類：例



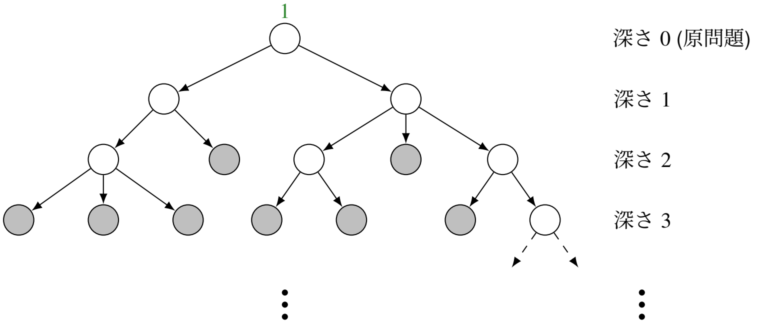
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



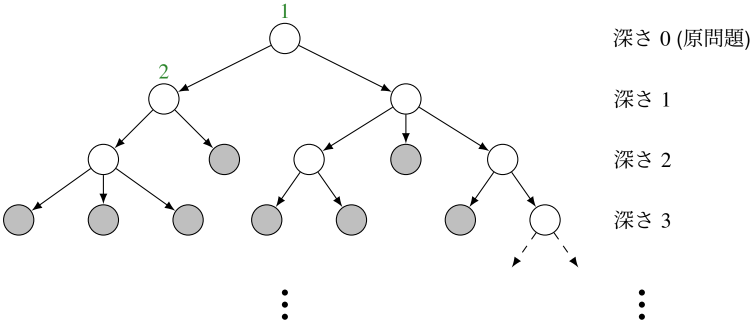
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



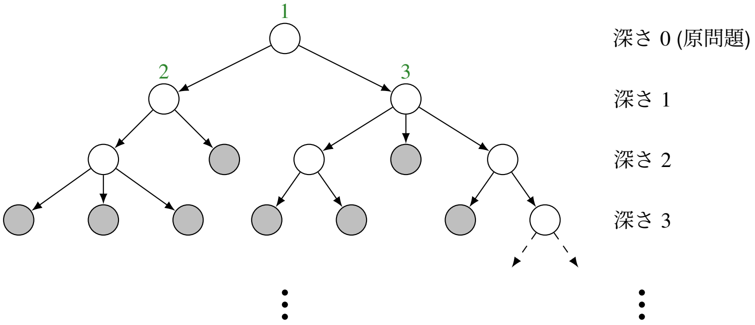
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



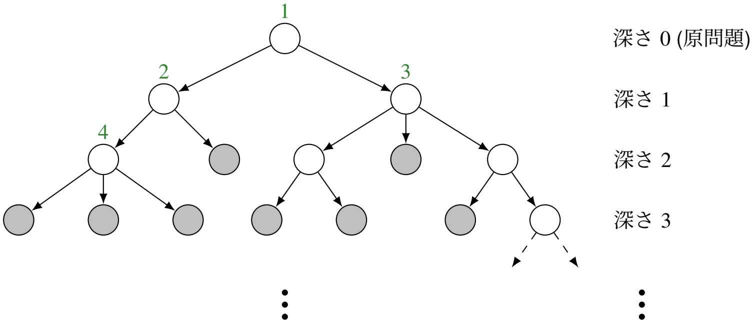
分枝木 †(branching tree), 列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



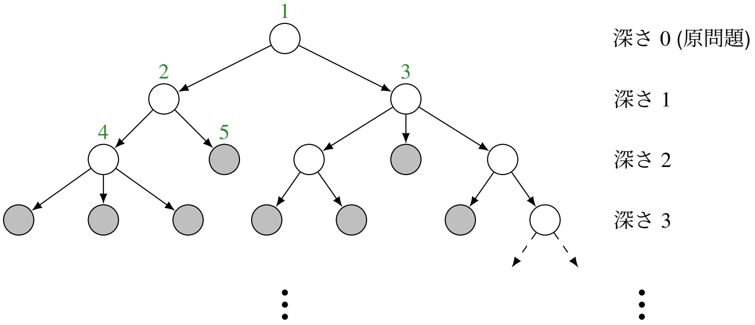
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



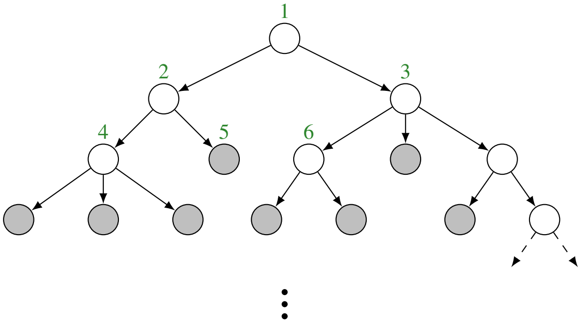
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- **幅優先探索 (breadth-first search)**
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



深さ 0 (原問題)

深さ 1

深さ 2

深さ 3

⋮

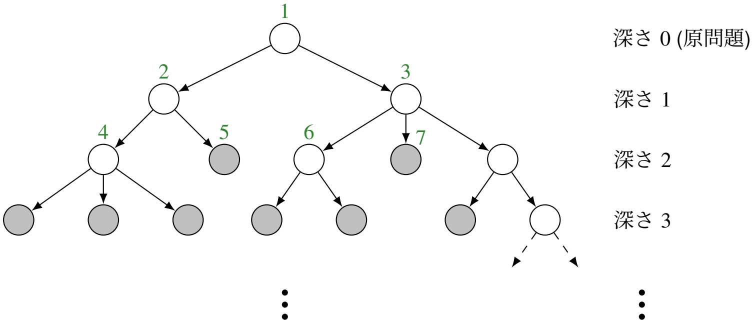
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



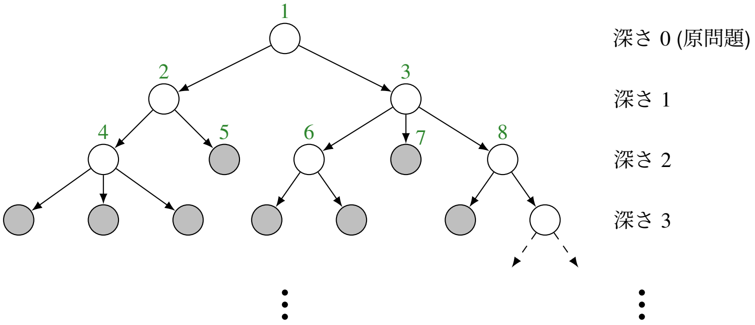
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- **幅優先探索 (breadth-first search)**
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



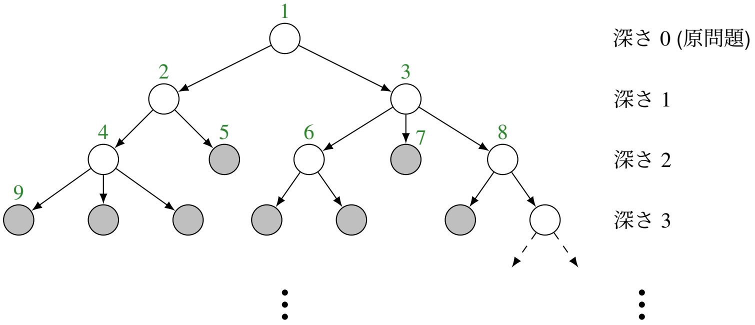
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 **(breadth-first search)**
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

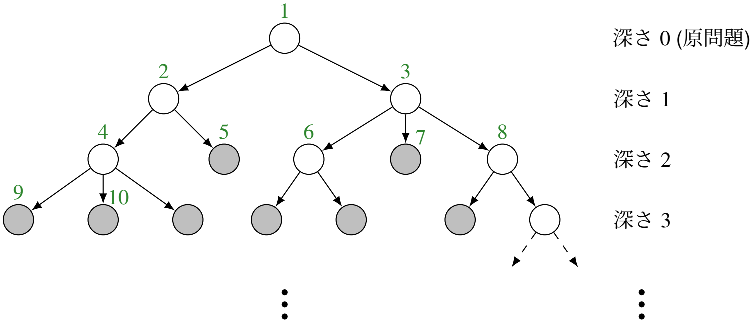


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- **幅優先探索 (breadth-first search)**
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



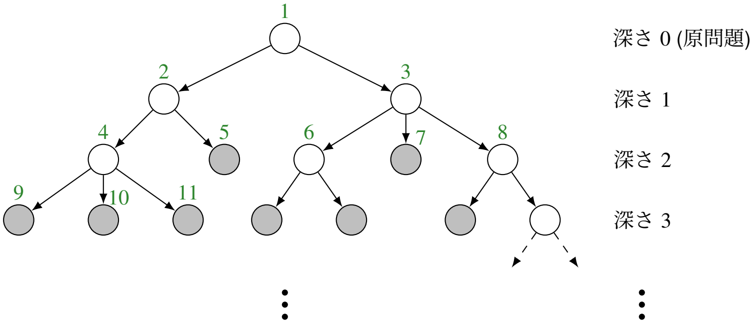
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- **幅優先探索 (breadth-first search)**
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

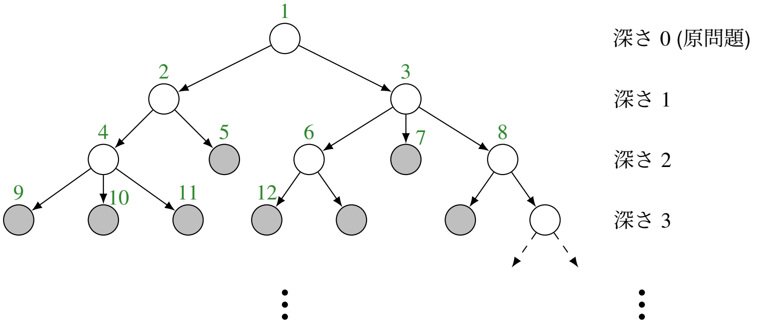


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- **幅優先探索 (breadth-first search)**
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



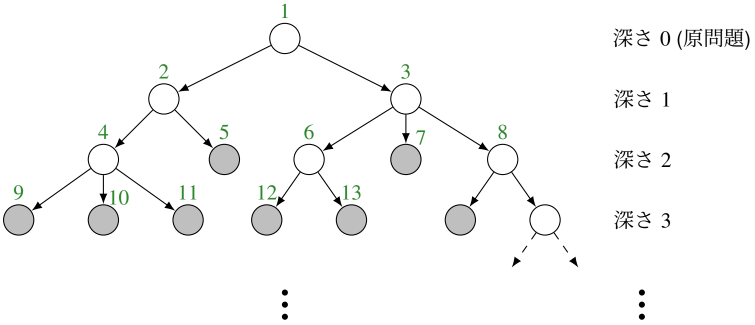
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- **幅優先探索 (breadth-first search)**
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

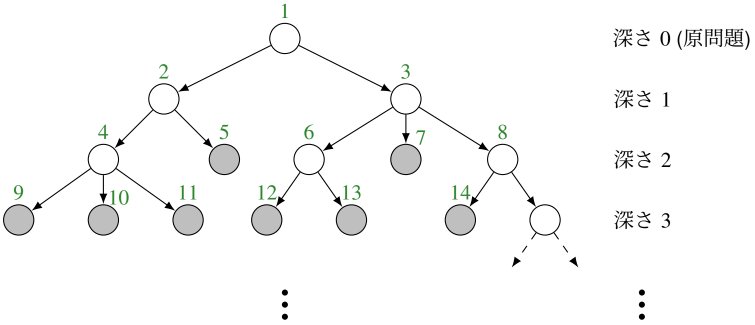


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



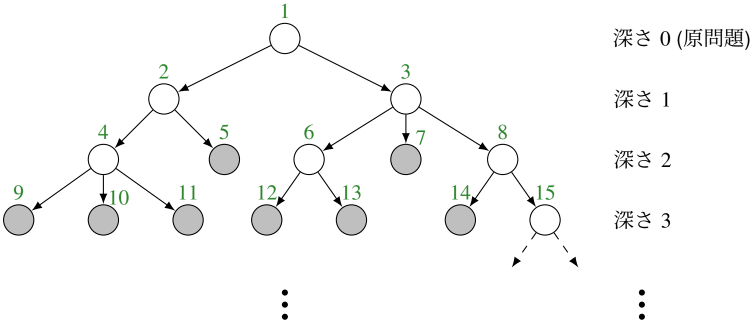
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



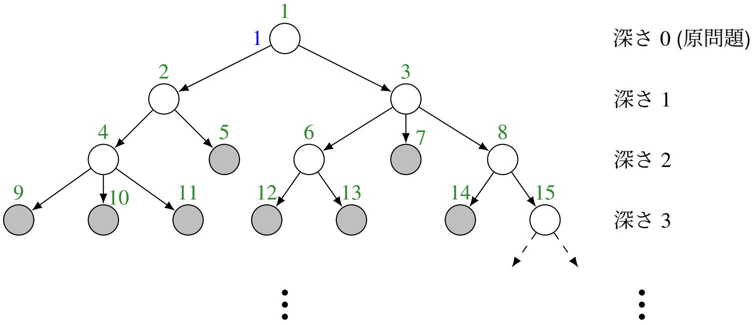
分枝木 †(branching tree), 列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



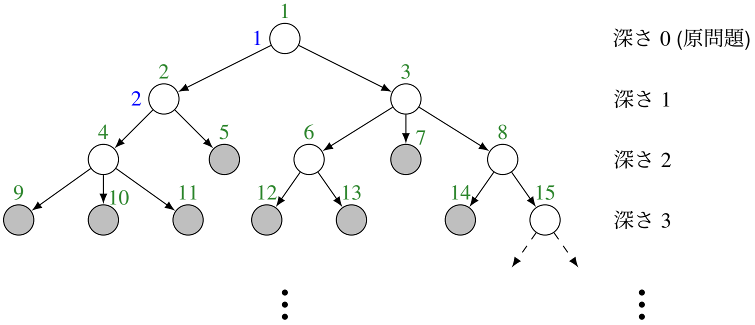
分枝木 [†](branching tree)，列挙木 [†](enumeration tree)

[†] 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

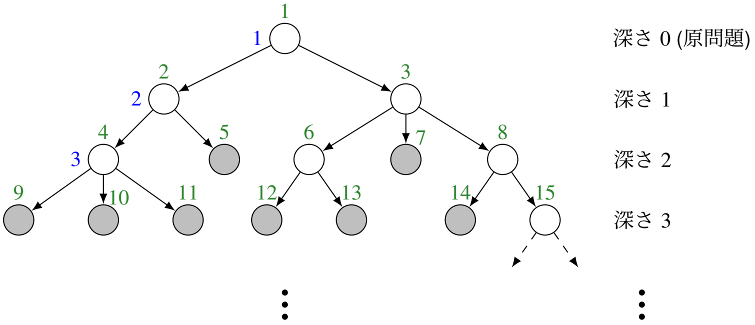


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

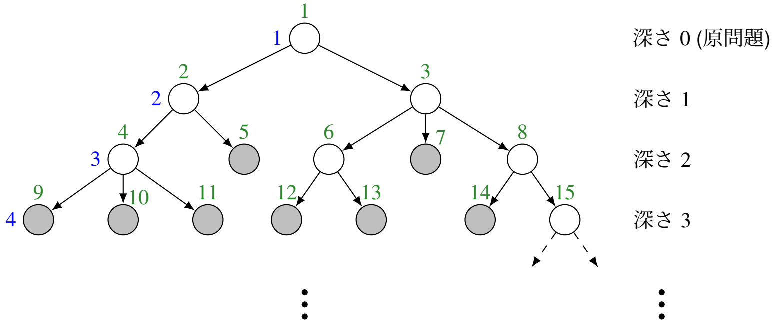


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

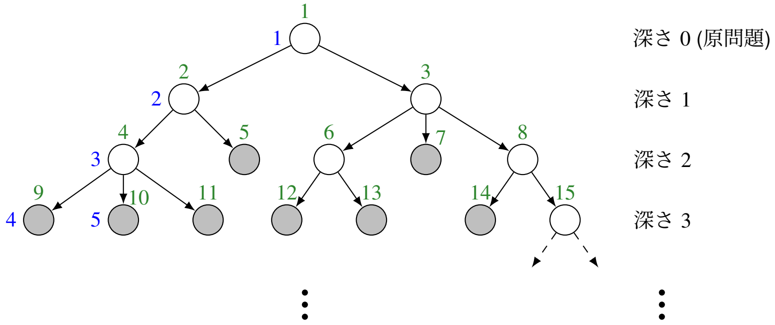


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



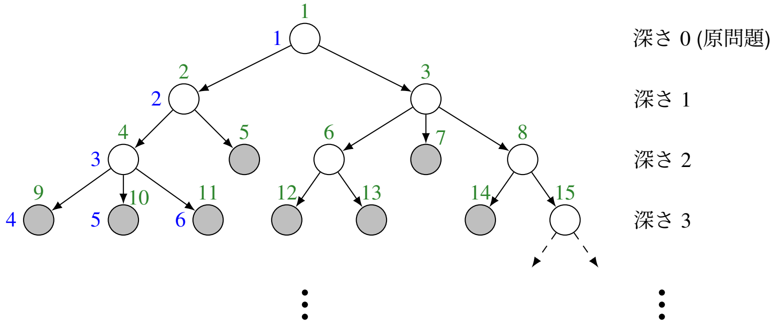
分枝木 †(branching tree), 列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

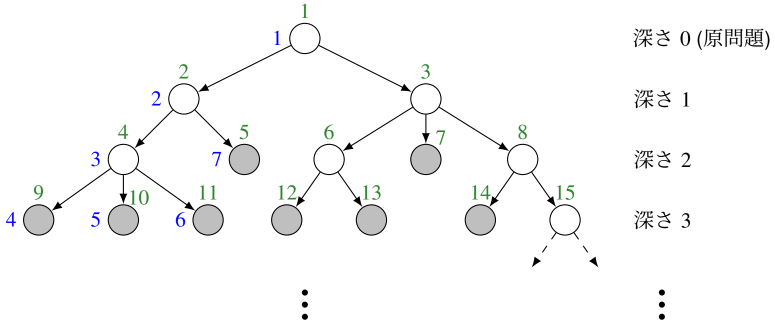


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

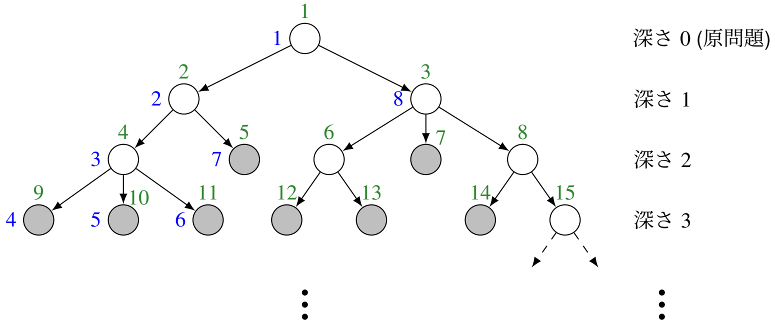


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

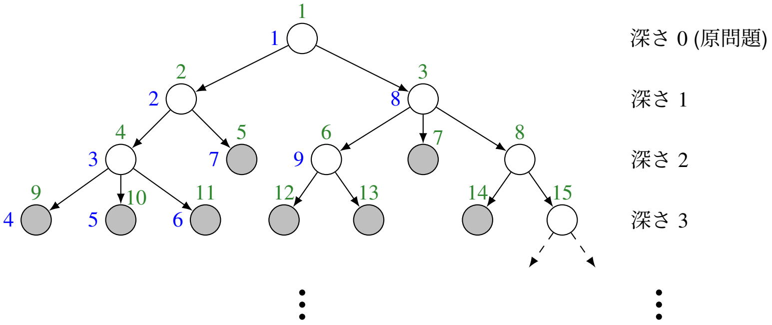


分枝木 †(branching tree), 列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



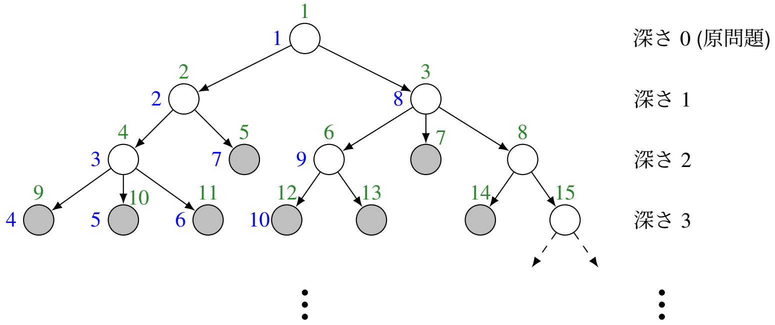
分枝木 [†](branching tree)，列挙木 [†](enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

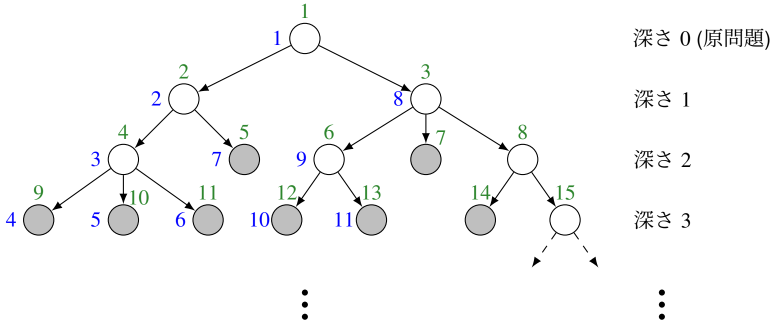


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

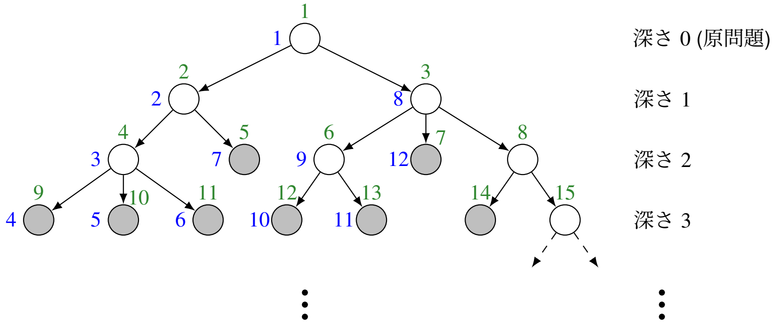


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



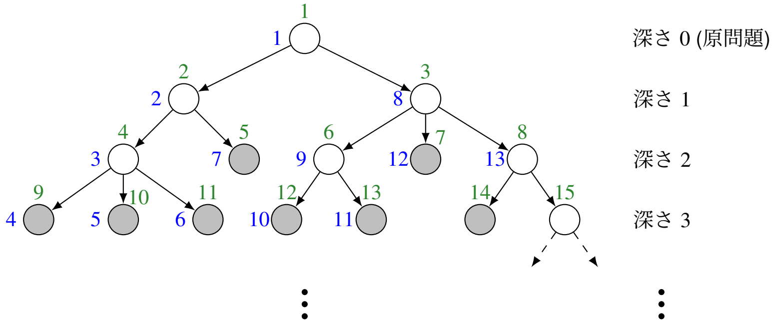
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例



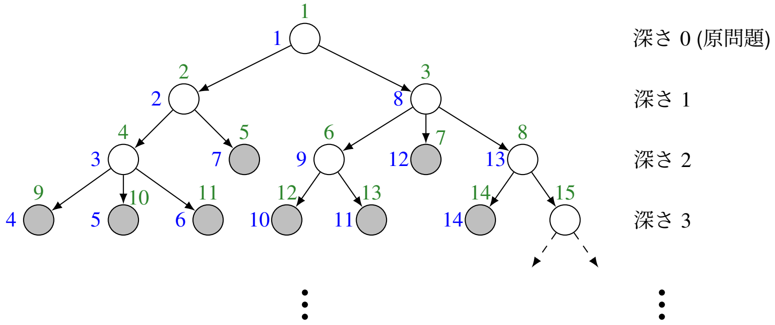
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

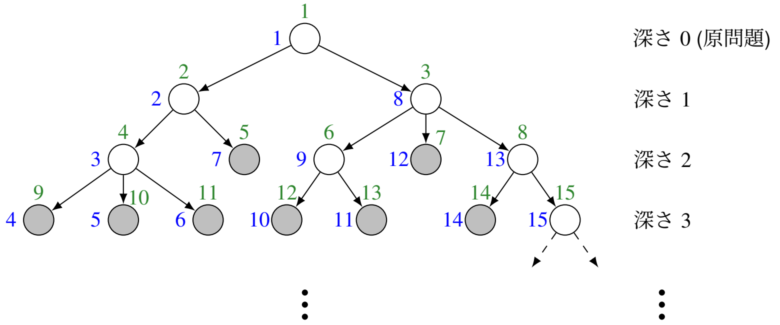


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

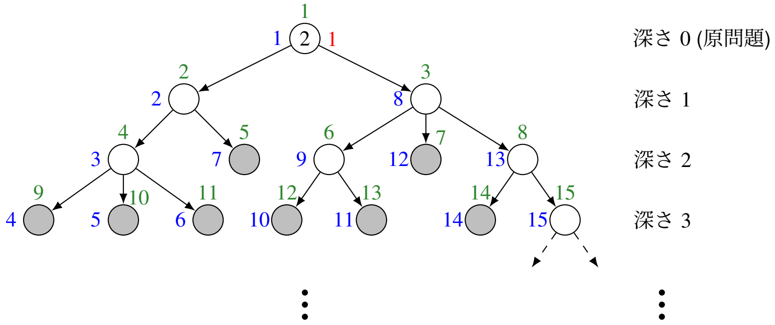


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- **深さ優先探索 (depth-first search)**
- 最良優先探索 (best-first search)

探索方法の種類：例

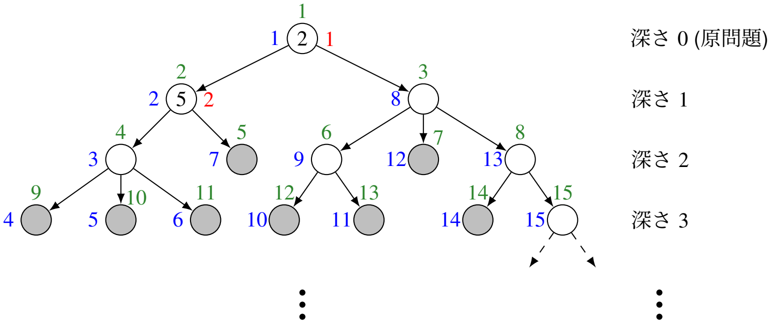


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例



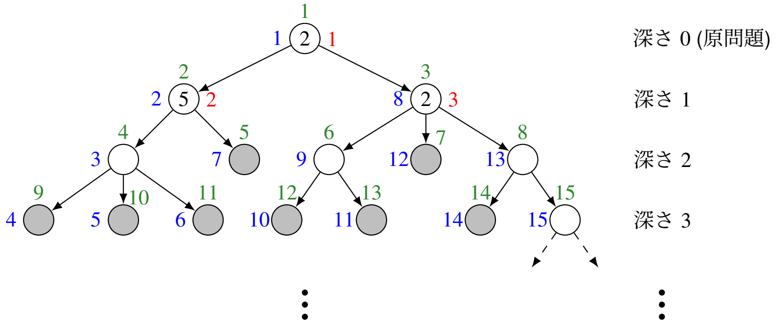
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)** 節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例



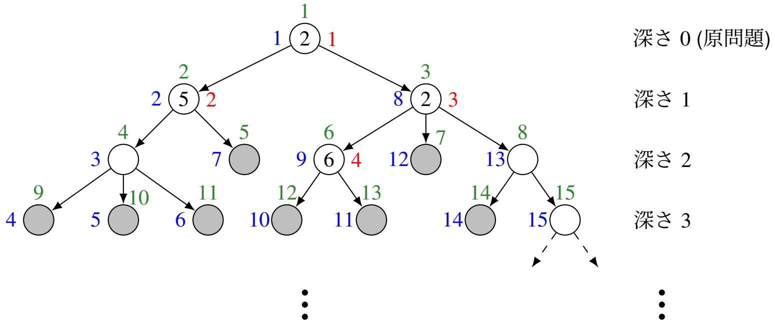
分枝木 †(branching tree), 列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例

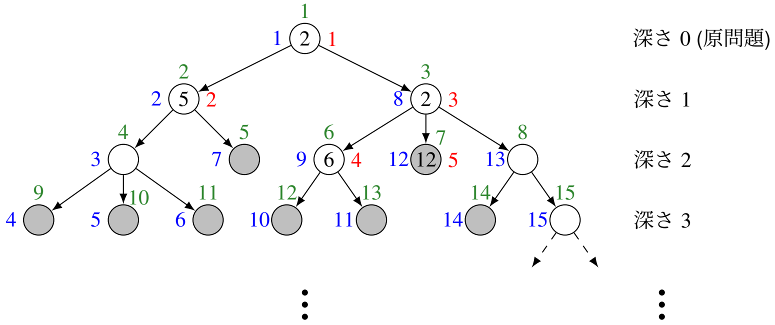


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例

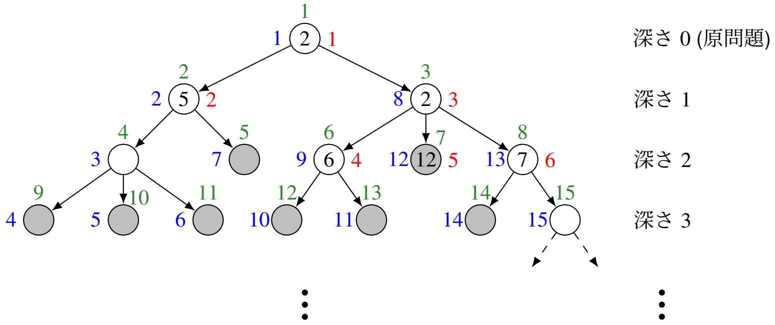


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例

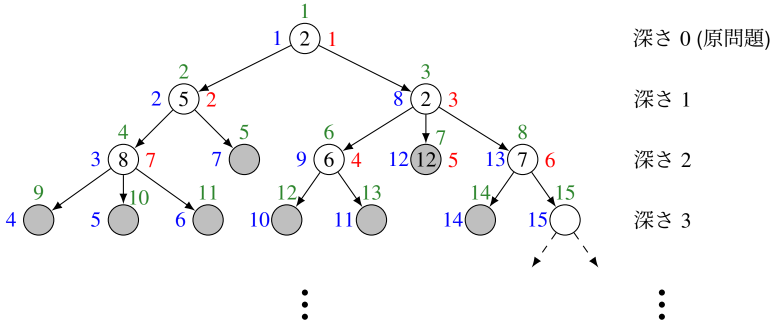


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例

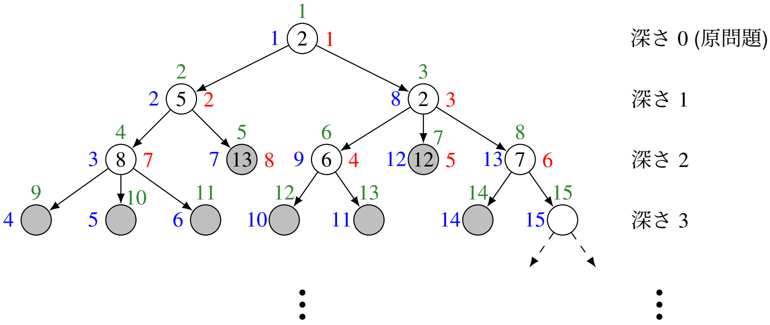


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例

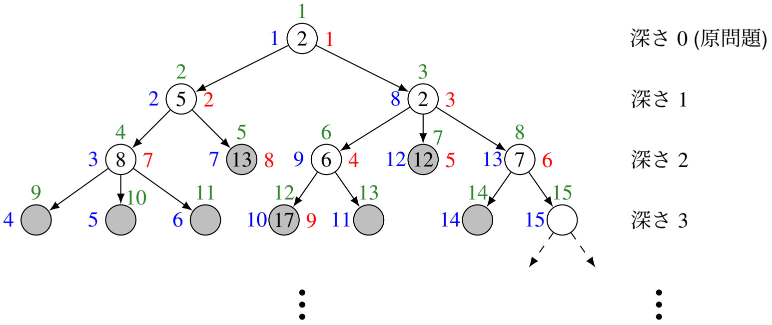


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例



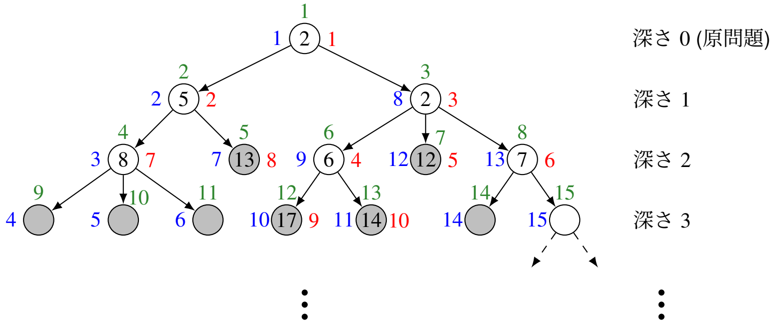
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例



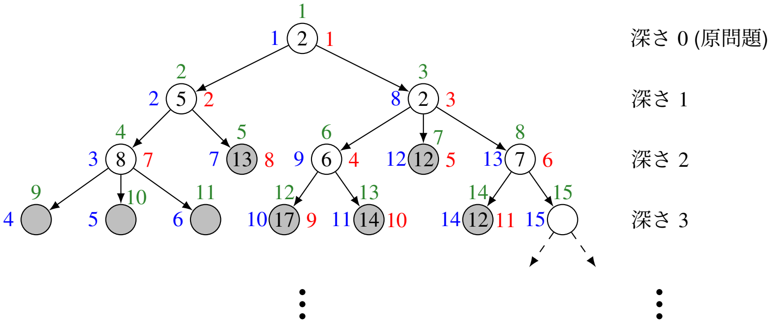
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例

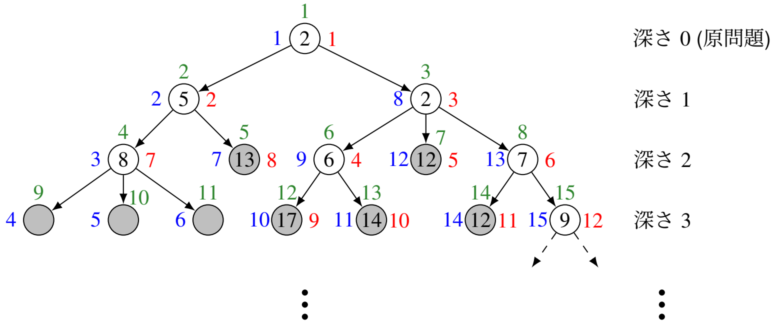


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例

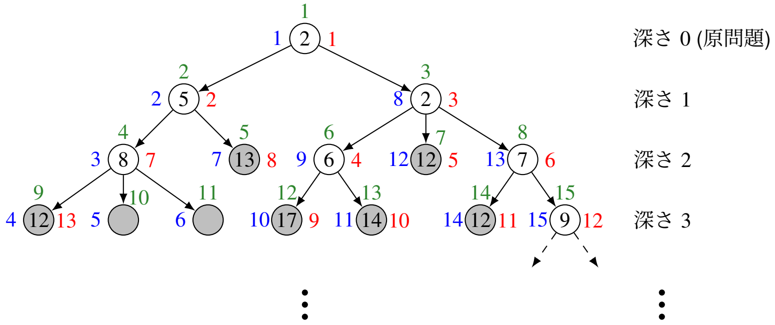


分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)　　† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例



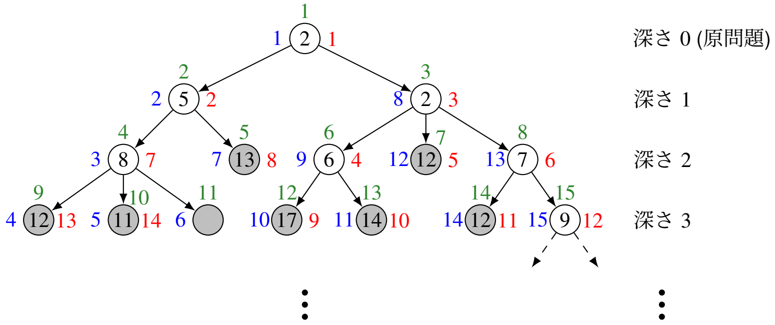
分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例



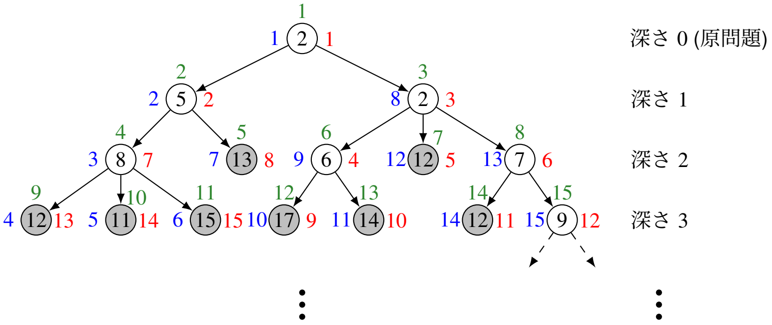
分枝木 †(branching tree), 列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

探索方法の種類：例



分枝木 †(branching tree)，列挙木 †(enumeration tree)

† 木：グラフの一種

探索方法

- 幅優先探索 (breadth-first search)
- 深さ優先探索 (depth-first search)
- **最良優先探索 (best-first search)**　　節点の数値は推定値 (最小化問題)

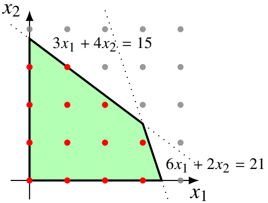
整数線形計画問題に対する分枝限定法

- 限定操作 ⇒ 整数制約を取り除いた緩和問題 (relaxation)
  $\begin{cases}\text{線形計画緩和 (linear programming relaxation)}\\ \text{連続緩和 (continuous relaxation)}\end{cases}$
- 分枝操作 ⇒ 緩和問題の最適解における非整数の決定変数の範囲を限定

例題

$$
\begin{aligned}
\text{max}\ \ & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.}\ \ & 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

($\mathbb{Z}_+$：非負整数全体の集合)



整数線形計画問題に対する分枝限定法

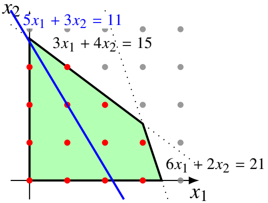
整数線形計画問題に対する分枝限定法

- 限定操作 $\Rightarrow$ 整数制約を取り除いた緩和問題 (relaxation)
  $\begin{cases} \text{線形計画緩和 (linear programming relaxation)} \\ \text{連続緩和 (continuous relaxation)} \end{cases}$
- 分枝操作 $\Rightarrow$ 緩和問題の最適解における非整数の決定変数の範囲を限定

例題

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

($\mathbb{Z}_+$：非負整数全体の集合)



整数線形計画問題に対する分枝限定法

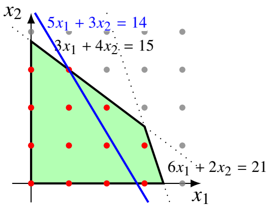
整数線形計画問題に対する分枝限定法

- 限定操作 ⇒ 整数制約を取り除いた緩和問題 (relaxation)
  - 線形計画緩和 (linear programming relaxation)
  - 連続緩和 (continuous relaxation)
- 分枝操作 ⇒ 緩和問題の最適解における非整数の決定変数の範囲を限定

例題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

($\mathbb{Z}_+$：非負整数全体の集合)



整数線形計画問題に対する分枝限定法

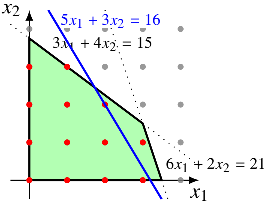
整数線形計画問題に対する分枝限定法

- 限定操作 ⇒ 整数制約を取り除いた緩和問題 (relaxation)
  $\begin{cases} \text{線形計画緩和 (linear programming relaxation)} \\ \text{連続緩和 (continuous relaxation)} \end{cases}$
- 分枝操作 ⇒ 緩和問題の最適解における非整数の決定変数の範囲を限定

例題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

($\mathbb{Z}_+$：非負整数全体の集合)



整数線形計画問題に対する分枝限定法

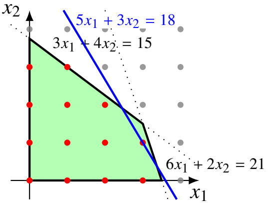
整数線形計画問題に対する分枝限定法

- 限定操作 $\Rightarrow$ 整数制約を取り除いた緩和問題 (relaxation)
  $\begin{cases} \text{線形計画緩和 (linear programming relaxation)} \\ \text{連続緩和 (continuous relaxation)} \end{cases}$
- 分枝操作 $\Rightarrow$ 緩和問題の最適解における非整数の決定変数の範囲を限定

例題

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

($\mathbb{Z}_+$ ：非負整数全体の集合)



整数線形計画問題に対する分枝限定法

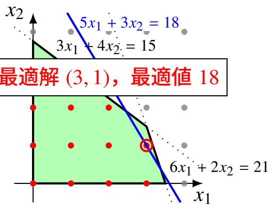
整数線形計画問題に対する分枝限定法

- 限定操作 ⇒ 整数制約を取り除いた緩和問題 (relaxation)
  $\begin{cases} \text{線形計画緩和 (linear programming relaxation)} \\ \text{連続緩和 (continuous relaxation)} \end{cases}$
- 分枝操作 ⇒ 緩和問題の最適解における非整数の決定変数の範囲を限定

例題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

($\mathbb{Z}_+$：非負整数全体の集合)

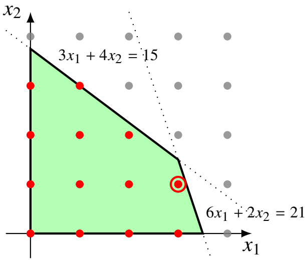


線形計画緩和による上界値

線形計画緩和

- 決定変数の整数制約を取り除いて連続変数に
- 実行可能領域が広がるので，最適値は大きくなる (少なくとも減らない)
  $\Rightarrow$ 原問題の最適値の上界値

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

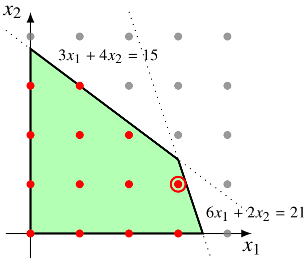


線形計画緩和による上界値

線形計画緩和

- 決定変数の整数制約を取り除いて連続変数に
- 実行可能領域が広がるので，最適値は大きくなる (少なくとも減らない)
  ⇒ 原問題の最適値の上界値

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

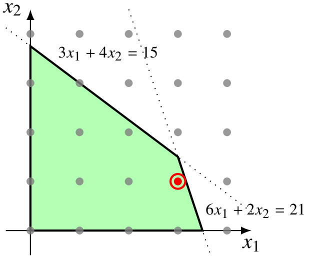


線形計画緩和による上界値

線形計画緩和

- 決定変数の整数制約を取り除いて**連続変数**に
- 実行可能領域が広がるので，最適値は大きくなる (少なくとも減らない)
  ⇒ 原問題の最適値の上界値

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

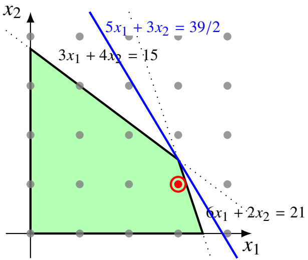


線形計画緩和による上界値

線形計画緩和

- 決定変数の整数制約を取り除いて連続変数に
- 実行可能領域が広がるので，最適値は大きくなる (少なくとも減らない)
  $\Rightarrow$ 原問題の最適値の上界値

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

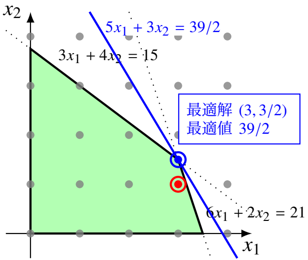


線形計画緩和による上界値

線形計画緩和

- 決定変数の整数制約を取り除いて連続変数に
- 実行可能領域が広がるので，最適値は大きくなる (少なくとも減らない)
  ⇒ 原問題の最適値の上界値

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

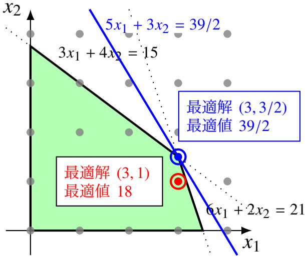


線形計画緩和による上界値

線形計画緩和

- 決定変数の整数制約を取り除いて連続変数に
- 実行可能領域が広がるので，最適値は大きくなる (少なくとも減らない)
  ⇒ 原問題の最適値の上界値

$$
\begin{aligned}
\max\ & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



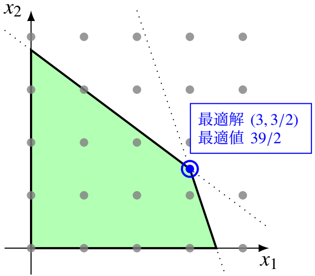
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索

深さ 0

分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



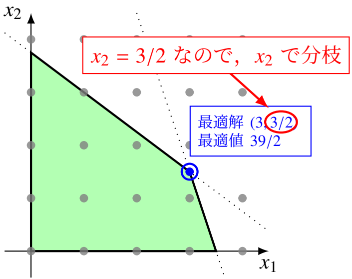
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索

深さ 0

分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



分枝限定法の適用例

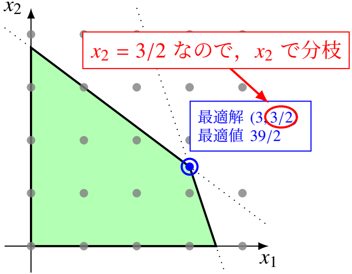
- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索

深さ 0

分枝木

- $x_2 > 3/2$ と $x_2 < 3/2$ で場合分け
- x_2 は整数なので
  - $x_2 \geq 2$
  - $x_2 \leq 1$

  の部分問題を生成



分枝限定法の適用例

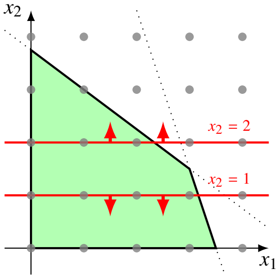
- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索

深さ 0

分枝木

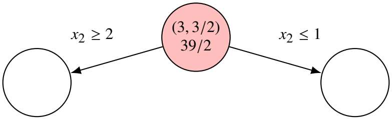
- $x_2 > 3/2$ と $x_2 < 3/2$ で場合分け
- x_2 は整数なので
  - $x_2 \geq 2$
  - $x_2 \leq 1$

  の部分問題を生成



分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索

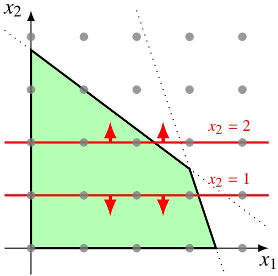


深さ 0

分枝木

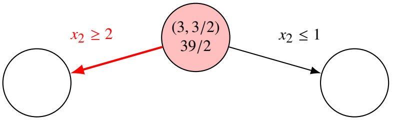
- $x_2 > 3/2$ と $x_2 < 3/2$ で場合分け
- x_2 は整数なので
  - $x_2 \geq 2$
  - $x_2 \leq 1$

  の部分問題を生成



分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索

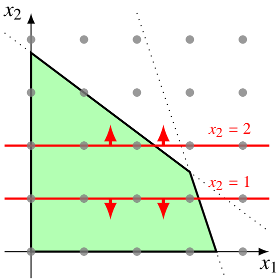


深さ 0

分枝木

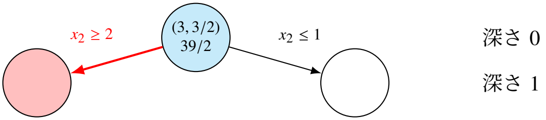
- $x_2 > 3/2$ と $x_2 < 3/2$ で場合分け
- x_2 は整数なので
  - $x_2 \geq 2$
  - $x_2 \leq 1$

  の部分問題を生成



分枝限定法の適用例

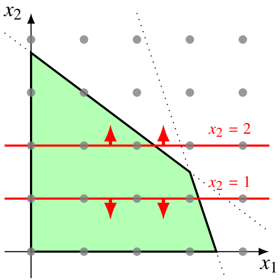
- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



分枝木

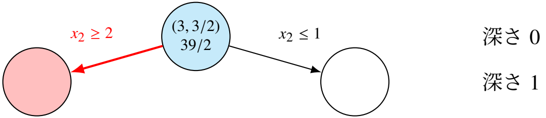
- $x_2 > 3/2$ と $x_2 < 3/2$ で場合分け
- x_2 は整数なので
  - $x_2 \geq 2$
  - $x_2 \leq 1$

  の部分問題を生成



分枝限定法の適用例

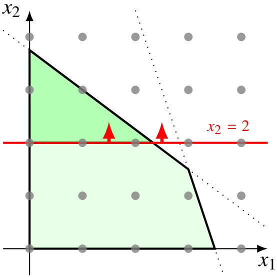
- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



分枝木

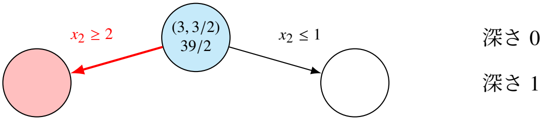
- $x_2 > 3/2$ と $x_2 < 3/2$ で場合分け
- x_2 は整数なので
  - $x_2 \geq 2$
  - $x_2 \leq 1$

  の部分問題を生成



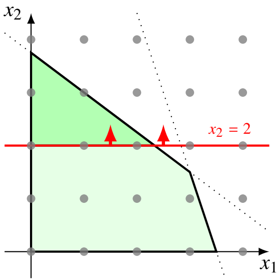
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



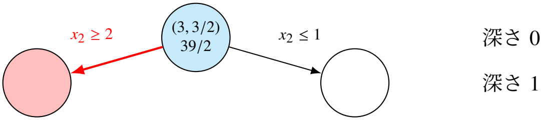
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



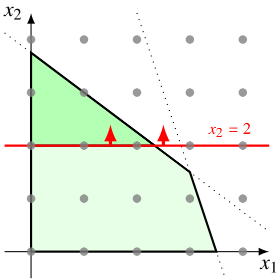
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



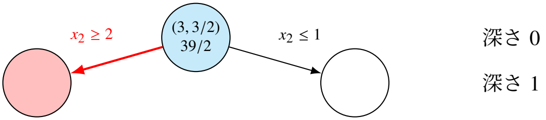
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



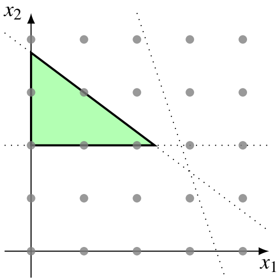
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



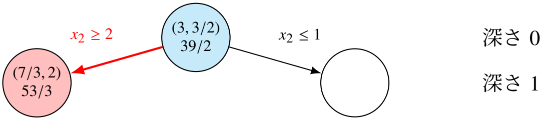
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



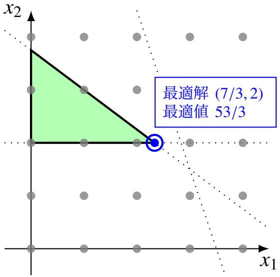
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



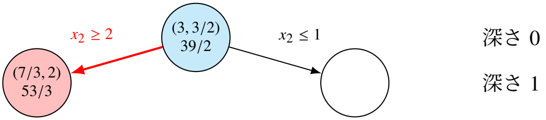
分枝木

$$\begin{aligned} \max \ & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \ & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



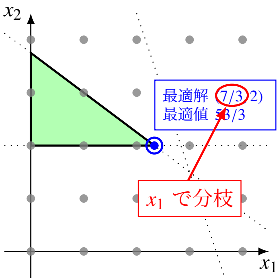
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



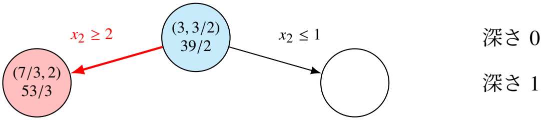
分枝木

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & {\color{red} x_2 \geq 2} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



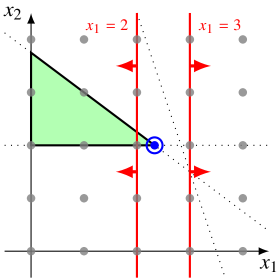
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



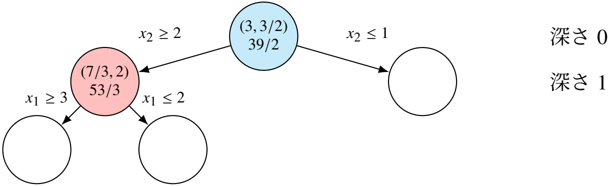
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



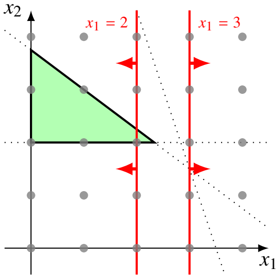
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



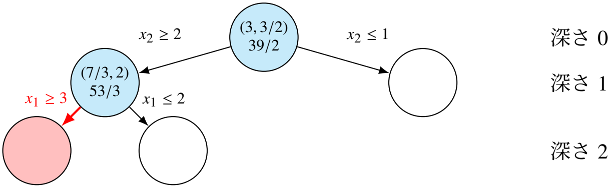
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



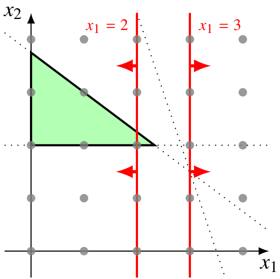
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



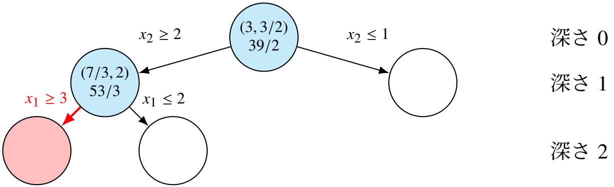
分枝木

$$
\begin{aligned}
\max\ & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



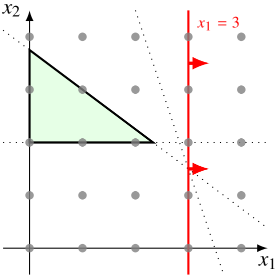
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



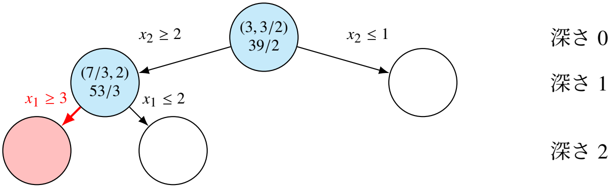
分枝木

$$
\begin{array}{rl}
\max & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
 & x_2 \geq 2 \\
 & x_1 \geq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



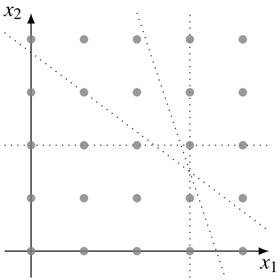
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



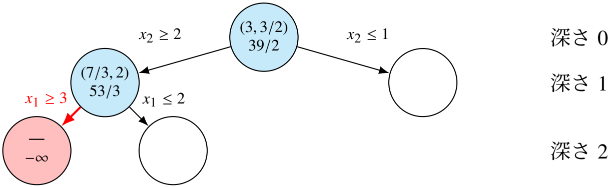
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1 \geq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



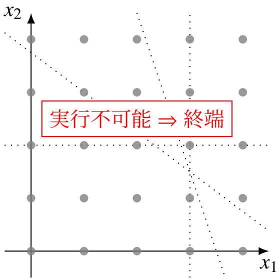
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



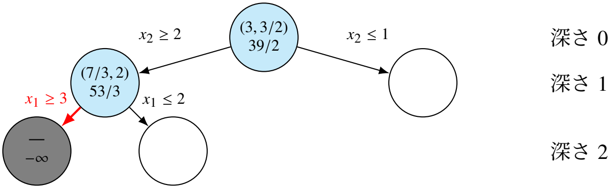
分枝木

$$
\begin{array}{rl}
\max & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1 \geq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



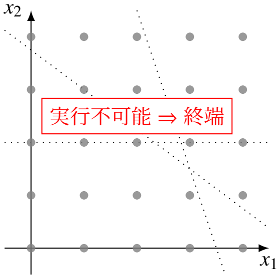
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



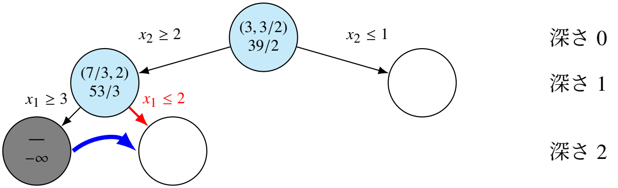
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1 \geq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



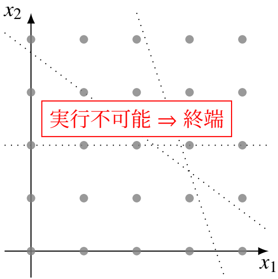
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



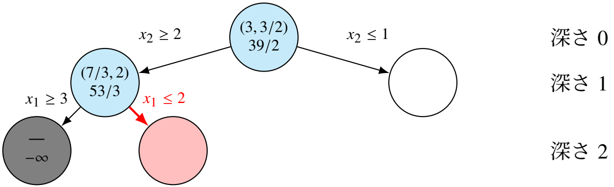
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1 \geq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



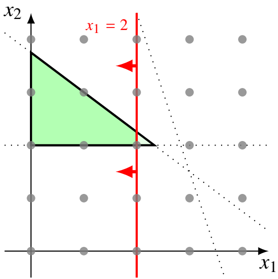
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



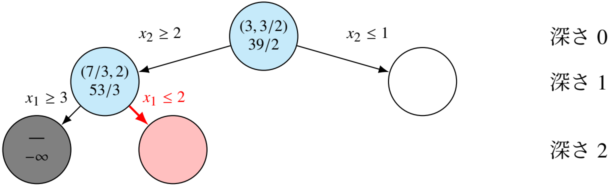
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max}\quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



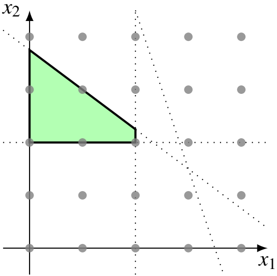
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



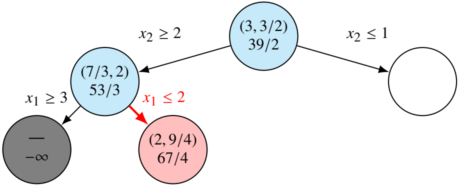
分枝木

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
 & x_2 \geq 2 \\
 & x_1 \leq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



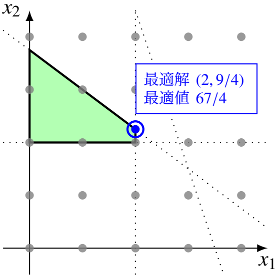
深さ 0

深さ 1

深さ 2

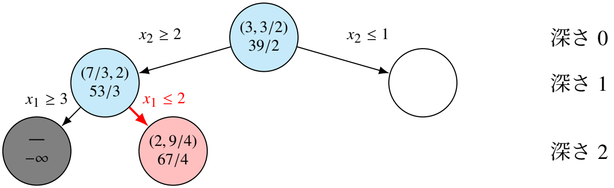
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



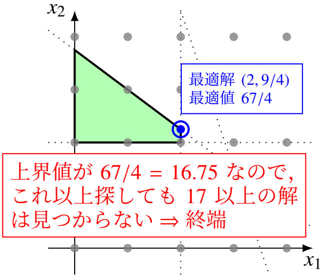
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



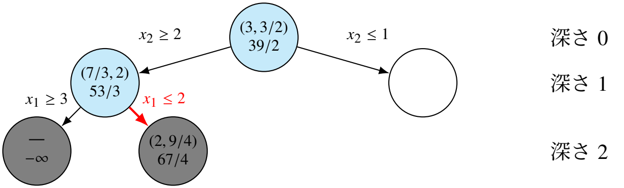
分枝木

$$
\begin{array}{rl}
\max & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



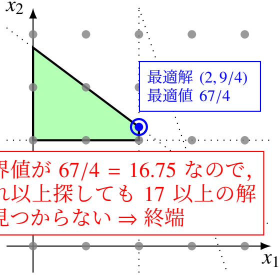
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



分枝木

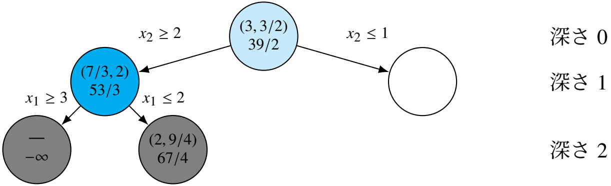
$$\begin{array}{rl} \text{max} & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_2 \geq 2 \\ & {\color{red} x_1 \leq 2} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



上界値が $67/4 = 16.75$ なので，これ以上探しても 17 以上の解は見つからない ⇒ 終端

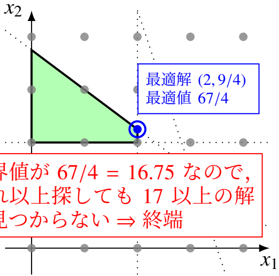
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



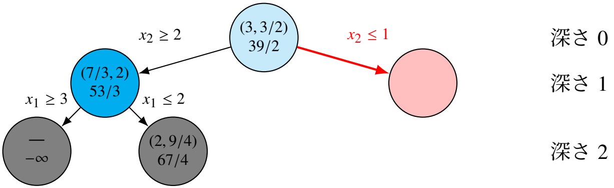
分枝木

$$
\begin{aligned}
\max\ & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



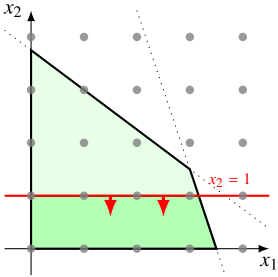
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



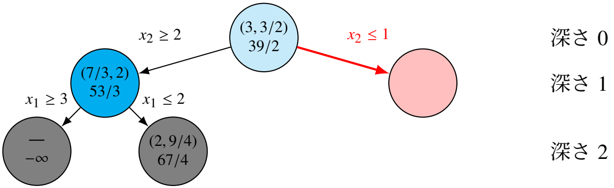
分枝木

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
 & x_2 \leq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



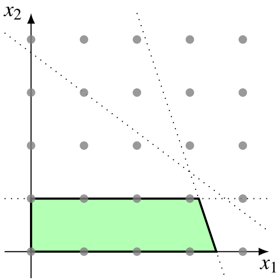
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



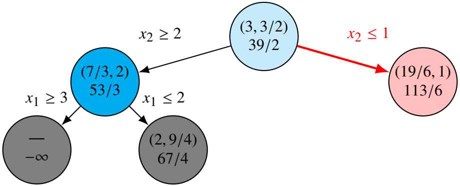
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& \color{red}{x_2 \leq 1} \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



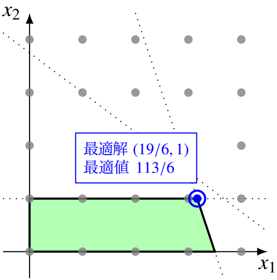
深さ 0

深さ 1

深さ 2

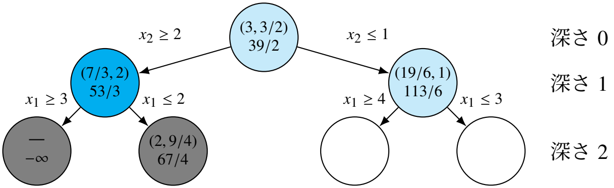
分枝木

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
 & \color{red}{x_2 \leq 1} \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



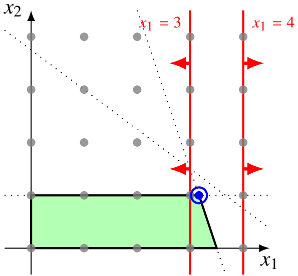
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



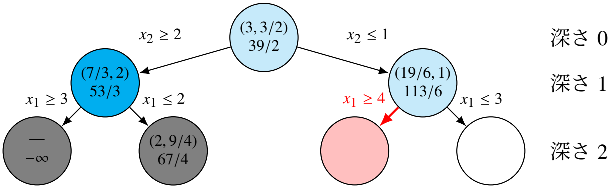
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& \color{red}{x_2 \leq 1} \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



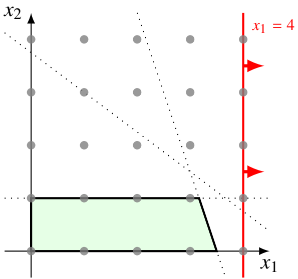
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



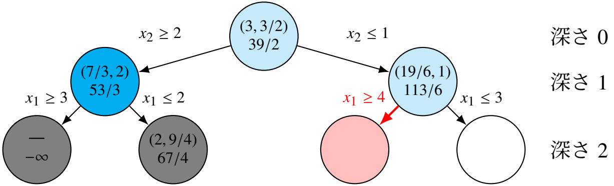
分枝木

$$
\begin{aligned}
\max\ & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1 \geq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



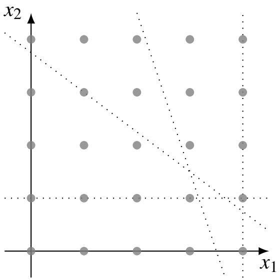
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



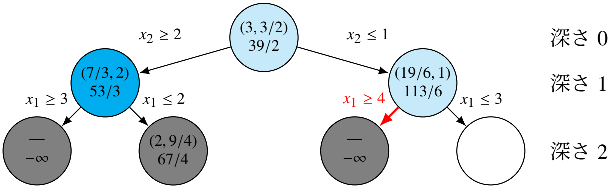
分枝木

$$
\begin{aligned}
\max\ & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t. } & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1 \geq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



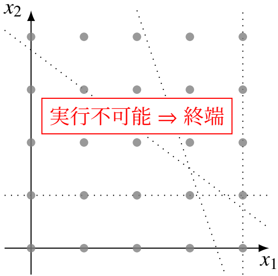
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



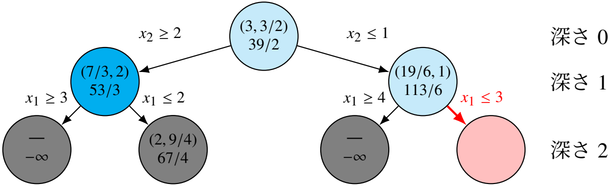
分枝木

$$\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1 \geq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



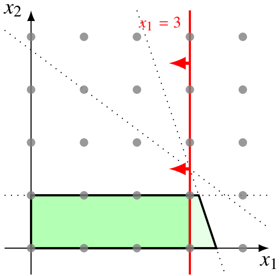
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



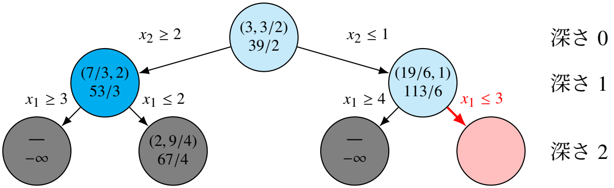
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



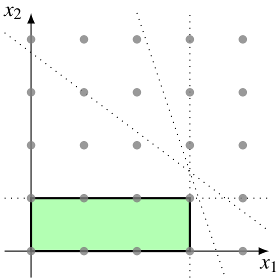
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



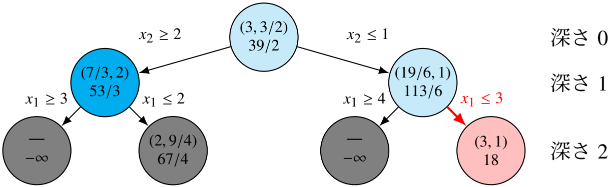
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



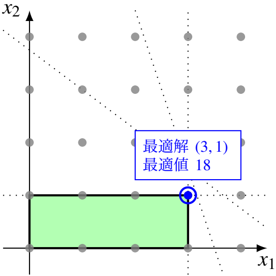
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



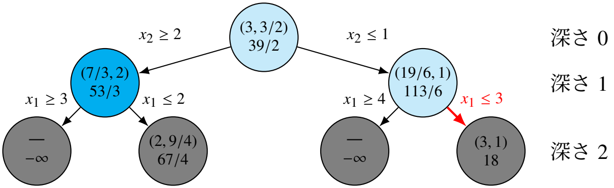
分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索

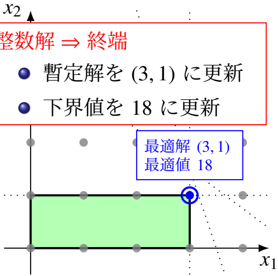


分枝木

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_2 \leq 1 \\ & \color{red}{x_1 \leq 3} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

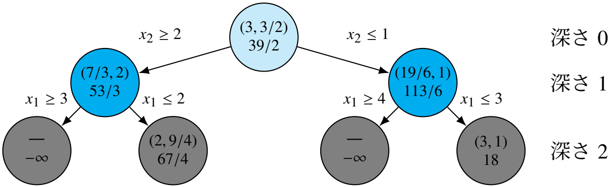
整数解 ⇒ 終端

- 暫定解を (3, 1) に更新
- 下界値を 18 に更新



分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索

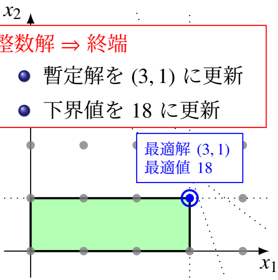


分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

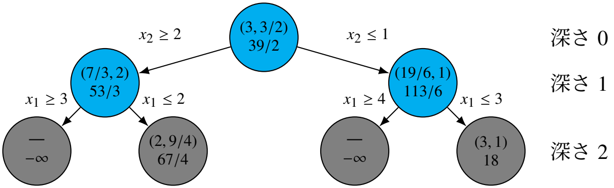
整数解 ⇒ 終端

- 暫定解を $(3, 1)$ に更新
- 下界値を 18 に更新



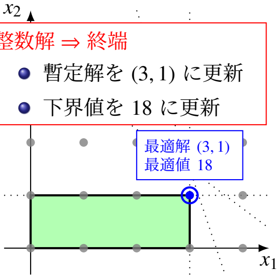
分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索



分枝木

$$
\begin{aligned}
\text{max}\quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

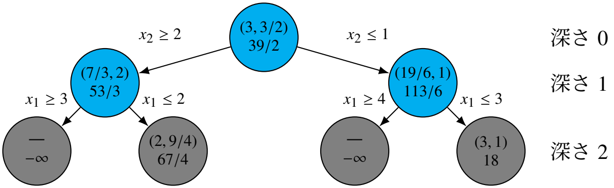


整数解 ⇒ 終端

- 暫定解を $(3, 1)$ に更新
- 下界値を 18 に更新

分枝限定法の適用例

- 最適値は 17 以上であることがわかっているものとする (下界値 17)
- 深さ優先探索

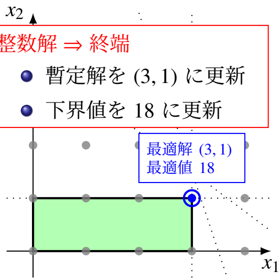


分枝木

整数解 ⇒ 終端

- 暫定解を (3, 1) に更新
- 下界値を 18 に更新

最適解 (3, 1)
最適値 18



切除平面法の概要

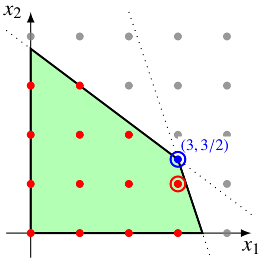
緩和問題

- 原問題の制約条件の一部を取り除いた問題
- 緩和問題の最適解が原問題の制約をすべて満たす **⇒原問題に対しても最適** †

† ラグランジュ緩和問題の場合は必ずしも当てはまらない

整数線形計画問題に対する切除平面法 (cutting-plane method) の基本アイデア

- 線形計画緩和の最適解が整数 ⇒ 原問題に対しても最適
- 線形計画緩和の最適解が整数となるよう，実行可能領域の無駄な部分を切り落とす ⇒ **カット** (cut) (**切除平面**; cutting plane) を制約条件として追加



切除平面法の概要

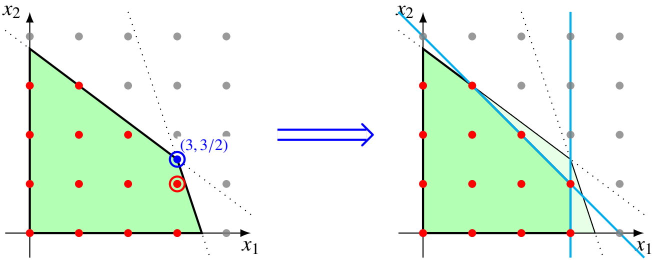
緩和問題

- 原問題の制約条件の一部を取り除いた問題
- 緩和問題の最適解が原問題の制約をすべて満たす **⇒原問題に対しても最適** †

† ラグランジュ緩和問題の場合は必ずしも当てはまらない

整数線形計画問題に対する切除平面法 (cutting-plane method) の基本アイデア

- 線形計画緩和の最適解が整数 ⇒ 原問題に対しても最適
- 線形計画緩和の最適解が整数となるよう，実行可能領域の無駄な部分を切り落とす ⇒ **カット** (cut) (**切除平面**; cutting plane) を制約条件として追加



切除平面法の概要

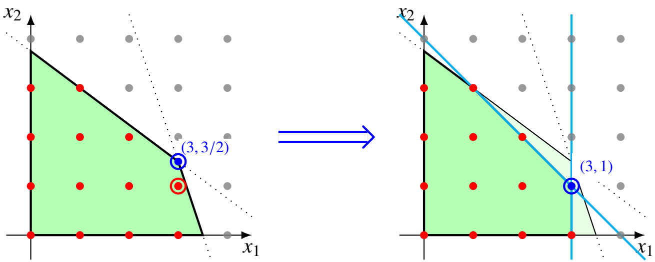
緩和問題

- 原問題の制約条件の一部を取り除いた問題
- 緩和問題の最適解が原問題の制約をすべて満たす **⇒原問題に対しても最適**†

† ラグランジュ緩和問題の場合は必ずしも当てはまらない

整数線形計画問題に対する切除平面法 (cutting-plane method) の基本アイデア

- 線形計画緩和の最適解が整数 ⇒ 原問題に対しても最適
- 線形計画緩和の最適解が整数となるよう，実行可能領域の無駄な部分を切り落とす ⇒ **カット** (cut) (**切除平面**; cutting plane) を制約条件として追加



切除平面法

妥当不等式 (valid inequality)

原問題 (整数計画問題) のすべての実行可能解が満たす不等式

カット (cut)・切除平面 (cutting plane)

与えられた (実行不可能な) 解 $\boldsymbol{x}_0$ が満たさない妥当不等式

切除平面法の手順

1. 線形計画緩和を解く
2. 最適解が整数解なら終了．そうでなければ，この最適解に対するカットを制約条件として追加し，1 へ

ゴモリー小数カット (Gomory fractional cut)

- 基底解の性質を利用
- シンプレックス法とともに用いる

ゴモリー小数カット：準備

準備

決定変数 $\boldsymbol{x}$ を基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ と非基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ に分けて，制約条件を書き直す．

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ A_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$\widetilde{A} = A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}$，$\widetilde{\boldsymbol{b}} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$ とおいて

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \widetilde{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \widetilde{\boldsymbol{b}}$$

第 i 行を抜き出して

$$x_{\mathrm{B}i} + \sum_{j=1}^{n-m} \widetilde{a}_{ij} x_{\mathrm{N}j} = \widetilde{b}_i \tag{$*$}$$

$\widetilde{A} = A_{\mathrm{B}}^{-1}A_{\mathrm{N}}$，$\widetilde{\boldsymbol{b}} = A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$ は，シンプレックスタブロー

$$\left(\begin{array}{c:c} \widetilde{\boldsymbol{c}}^{\top} & f - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\top}A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hdashline A_{\mathrm{B}}^{-1}A & A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}\right)$$

から求まる

ゴモリー小数カット

$$x_{\mathrm{B}i} + \sum_{j=1}^{n-m} \widetilde{a}_{ij} x_{\mathrm{N}j} = \widetilde{b}_i \qquad (*)$$

ゴモリー小数カット (Gomory fractional cut)

整数計画問題の線形計画緩和の最適基底解 $(\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^*, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}^*) = (A_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0}) = (\widetilde{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{0})$ を考える

- 基底変数 $x_{\mathrm{B}i}^*$ が非整数 $\Rightarrow \widetilde{b}_i$ が非整数
- $(*)$ 式の左辺の係数 $\widetilde{a}_{ij}$ を整数へ丸める ($\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数)

$$x_{\mathrm{B}i} + \sum_{j=1}^{n-m} \lfloor \widetilde{a}_{ij} \rfloor x_{\mathrm{N}j}$$

- 任意の整数解 $\boldsymbol{x}$ に対して以下が成り立つ

$$x_{\mathrm{B}i} + \sum_{j=1}^{n-m} \lfloor \widetilde{a}_{ij} \rfloor x_{\mathrm{N}j} \leq \lfloor \widetilde{b}_i \rfloor \qquad (**)$$

- $(*)$ から $(**)$ を引く

$$\sum_{j=1}^{n-m} (\widetilde{a}_{ij} - \lfloor \widetilde{a}_{ij} \rfloor) x_{\mathrm{N}j} \geq \widetilde{b}_i - \lfloor \widetilde{b}_i \rfloor \qquad \textbf{(ゴモリー小数カット)}$$

ゴモリー小数カット (続き)

$$\sum_{j=1}^{n-m} (\widetilde{a}_{ij} - \lfloor \widetilde{a}_{ij} \rfloor) x_{\mathrm{N}j} \geq \widetilde{b}_i - \lfloor \widetilde{b}_i \rfloor \qquad (***)$$

補足

- $(***)$ 式の右辺は正 (非整数の最適基底変数 $x^*_{\mathrm{B}i} = \widetilde{b}_i$ を選んだので)
- 現在の最適基底解 $(\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}^*_{\mathrm{N}})$ は $(***)$ 式を満たさない ($\boldsymbol{x}^*_{\mathrm{N}} = \mathbf{0}$ なので)
- $(***)$ 式を制約条件として追加 $\Rightarrow$ 現在の最適基底解は取り除かれる
- 切除平面法では，これを繰り返して整数解 (原問題の最適解) を求める
  ゴモリー小数カットを使えば，有限回の反復で終了 (ただし収束は遅い)
- ゴモリー小数カット以外にも，色々なカットが提案されている
- 整数計画問題を解くためのソフトウェアは，分枝限定法と切除平面法を組合せた**分枝切除法・分枝カット法** (branch-and-cut method) を用いている

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 1)

例題

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

線形計画緩和

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形

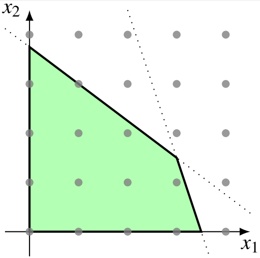
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 + s_1 = 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 + s_2 = 21 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$\begin{array}{rl} \text{max} & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 + s_1 = 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 + s_2 = 21 \\ & \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
	5	3	0	0	0
x_1	3	4	1	0	15
x_2	6	2	0	1	21

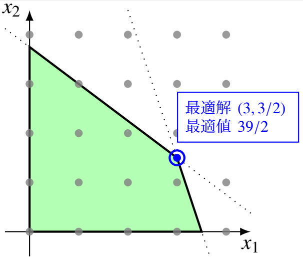


ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$\begin{array}{lll} \max & 5x_1 + 3x_2 & \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 + s_1 & = 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \quad + s_2 & = 21 \\ & & \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 & \end{array}$$

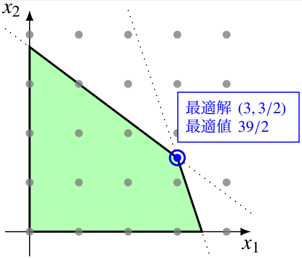
	x_1	x_2	s_1	s_2	
	0	0	$-4/9$	$-11/18$	$-39/2$
x_1	1	0	$-1/9$	$2/9$	3
x_2	0	1	$1/3$	$-1/6$	$3/2$



ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$\begin{array}{lrcl} \max & 5x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 + s_1 & = & 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 + s_2 & = & 21 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 & & \end{array}$$



	x_1	x_2	s_1	s_2	
	0	0	−4/9	−11/18	−39/2
x_1	1	0	−1/9	2/9	3
x_2	0	1	1/3	−1/6	3/2

最適基底解

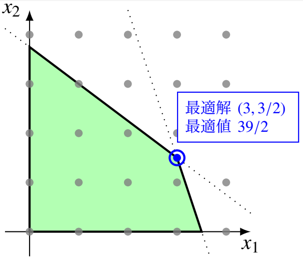
$$x_1 - \frac{1}{9}s_1 + \frac{2}{9}s_2 = 3$$

$$x_2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 = \frac{3}{2}$$

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$\begin{aligned} \max\ & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1 + 4x_2 + s_1 = 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 + s_2 = 21 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$



	x_1	x_2	s_1	s_2	
	0	0	$-4/9$	$-11/18$	$-39/2$
x_1	1	0	$-1/9$	$2/9$	3
x_2	0	1	$1/3$	$-1/6$	$3/2$

最適基底解

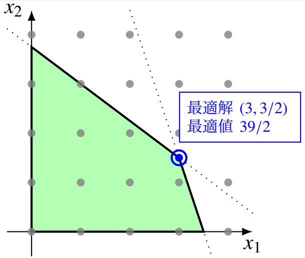
$$x_1 - \frac{1}{9}s_1 + \frac{2}{9}s_2 = 3$$

$$x_2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 = \frac{3}{2}$$

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$
\begin{array}{rll}
\max & 5x_1 + 3x_2 & \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 + s_1 & = 15 \\
 & 6x_1 + 2x_2 + s_2 & = 21 \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 &
\end{array}
$$



	x_1	x_2	s_1	s_2	
	0	0	−4/9	−11/18	−39/2
x_1	1	0	−1/9	2/9	3
x_2	0	1	1/3	−1/6	3/2

最適基底解

$$x_1 - \frac{1}{9}s_1 + \frac{2}{9}s_2 = 3$$

$$x_2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 = \frac{3}{2}$$

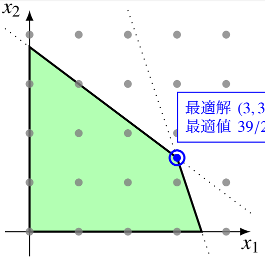
$$x_2 + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{6} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor$$

$$x_2 - s_2 \leq 1$$

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$\begin{array}{lrcl} \max & 5x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 + s_1 & = & 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 + s_2 & = & 21 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 & & \end{array}$$



	x_1	x_2	s_1	s_2	
	0	0	$-4/9$	$-11/18$	$-39/2$
x_1	1	0	$-1/9$	$2/9$	3
x_2	0	1	$1/3$	$-1/6$	$3/2$

最適基底解

$$x_1 - \frac{1}{9}s_1 + \frac{2}{9}s_2 = 3$$

$$x_2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{6} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor$$

$$x_2 \qquad - \qquad s_2 \leq 1$$

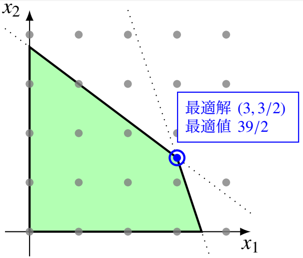
$$\begin{array}{rrrcl} & x_2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 & = & \frac{3}{2} \\ -) & x_2 \qquad - \quad s_2 & \leq & 1 \\ \hline & \frac{1}{3}s_1 + \frac{5}{6}s_2 & \geq & \frac{1}{2} \\ & 2\,s_1 + 5\,s_2 & \geq & 3 \end{array}$$

(カット)

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$\begin{array}{lrl} \max & 5x_1 + 3x_2 & \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 + s_1 & = 15 \\ & 6x_1 + 2x_2 \quad + s_2 & = 21 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 & \end{array}$$



$s_1 = 15 - 3x_1 - 4x_2$

$s_2 = 21 - 6x_1 - 2x_2$

により s_1, s_2 を消去

$6x_1 + 3x_2 \leq 22$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
	0	0	$-4/9$	$-11/18$	$-39/2$
x_1	1	0	$-1/9$	$2/9$	3
x_2	0	1	$1/3$	$-1/6$	$3/2$

最適基底解

$$x_1 - \frac{1}{9}s_1 + \frac{2}{9}s_2 = 3$$

$$x_2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{6} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor$$

$$x_2 - s_2 \leq 1$$

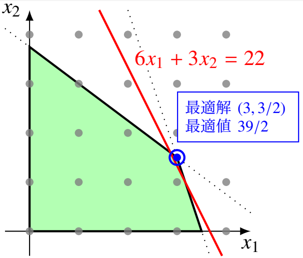
$$\begin{array}{rrcl} & x_2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 & = & \frac{3}{2} \\ -) & x_2 \qquad\quad - s_2 & \leq & 1 \\ \hline & \frac{1}{3}s_1 + \frac{5}{6}s_2 & \geq & \frac{1}{2} \\ & 2s_1 + 5s_2 & \geq & 3 \end{array}$$

(カット)

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$\begin{array}{lllllll} \text{max} & 5x_1 & +\,3x_2 & & & & \\ \text{s.t.} & 3x_1 & +\,4x_2 & +\,s_1 & & & = 15 \\ & 6x_1 & +\,2x_2 & & +\,s_2 & & = 21 \\ & \color{red}{6x_1} & \color{red}{+\,3x_2} & & & \color{red}{+\,s_3} & \color{red}{= 22} \\ & \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}$$



$$s_1 = 15 - 3x_1 - 4x_2$$
$$s_2 = 21 - 6x_1 - 2x_2$$

により s_1, s_2 を消去

$$6x_1 + 3x_2 \leq 22$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
	0	0	−4/9	−11/18	−39/2
x_1	1	0	−1/9	2/9	3
x_2	0	1	1/3	−1/6	3/2

最適基底解

$$x_1 - \frac{1}{9}s_1 + \frac{2}{9}s_2 = 3$$
$$\color{red}{x_2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 = \frac{3}{2}}$$

$$x_2 + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{6} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor$$
$$x_2 - s_2 \leq 1$$

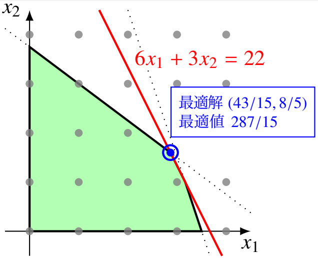
$$\begin{array}{rl} & x_2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 = \frac{3}{2} \\ -) & x_2 - s_2 \leq 1 \\ \hline & \frac{1}{3}s_1 + \frac{5}{6}s_2 \geq \frac{1}{2} \end{array}$$

$$2\,s_1 + 5\,s_2 \geq 3 \qquad \text{(カット)}$$

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$
\begin{array}{rl}
\max & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 + s_1 = 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 + s_2 = 21 \\
& 6x_1 + 3x_2 + s_3 = 22 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{array}
$$



$$s_1 = 15 - 3x_1 - 4x_2$$
$$s_2 = 21 - 6x_1 - 2x_2$$

により s_1, s_2 を消去

$$6x_1 + 3x_2 \leq 22$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
	0	0	$-4/9$	$-11/18$	$-39/2$
x_1	1	0	$-1/9$	$2/9$	3
x_2	0	1	$1/3$	$-1/6$	$3/2$

最適基底解

$$x_1 - \frac{1}{9}s_1 + \frac{2}{9}s_2 = 3$$
$$x_2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor s_1 + \left\lfloor -\frac{1}{6} \right\rfloor s_2 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor$$
$$x_2 - s_2 \leq 1$$

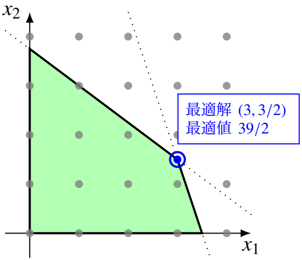
$$
\begin{array}{rl}
& x_2 + \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{6}s_2 = \frac{3}{2} \\
-) & x_2 - s_2 \leq 1 \\
\hline
& \frac{1}{3}s_1 + \frac{5}{6}s_2 \geq \frac{1}{2} \\
& 2\,s_1 + 5\,s_2 \geq 3
\end{array}
$$

(カット)

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

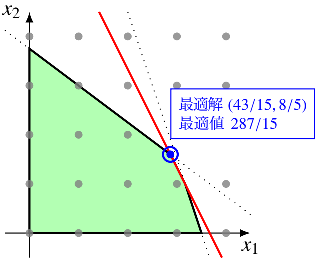
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 + s_1 = 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 + s_2 = 21 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 + s_1 = 15 \\
 & 6x_1 + 2x_2 + s_2 = 21 \\
 & \color{red}{6x_1 + 3x_2 + s_3 = 22} \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{array}
$$

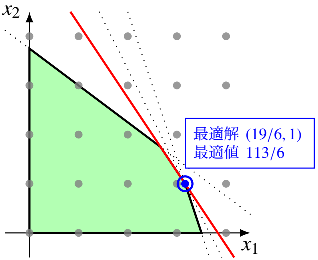


$6x_1 + 3x_2 \leq 22$

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$
\begin{array}{rl}
\max & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 + s_1 = 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 + s_2 = 21 \\
& 6x_1 + 3x_2 + s_3 = 22 \\
& 6x_1 + 4x_2 + s_4 = 23 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{array}
$$



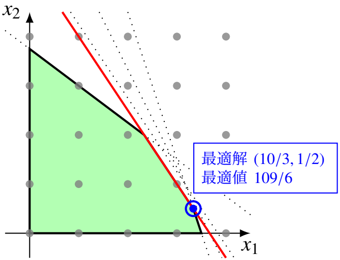
$6x_1 + 3x_2 \leq 22$

$6x_1 + 4x_2 \leq 23$

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$
\begin{array}{rlr}
\text{max} & 5x_1 + 3x_2 & \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 + s_1 & = 15 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \quad + s_2 & = 21 \\
 & 6x_1 + 3x_2 \quad\quad + s_3 & = 22 \\
 & 6x_1 + 4x_2 \quad\quad\quad + s_4 & = 23 \\
 & \color{red}{3x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad\quad + s_5} & \color{red}{= 11} \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0 &
\end{array}
$$



$6x_1 + 3x_2 \leq 22$

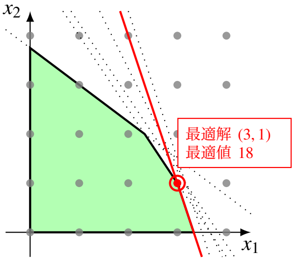
$6x_1 + 4x_2 \leq 23$

$3x_1 + 2x_2 \leq 11$

ゴモリー小数カットによる切除平面法の例 (その 2)

線形計画緩和

$$
\begin{array}{rllllllll}
\text{max} & 5x_1 + 3x_2 & & & & & & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 & + s_1 & & & & & & = 15 \\
 & 6x_1 + 2x_2 & & + s_2 & & & & & = 21 \\
 & 6x_1 + 3x_2 & & & + s_3 & & & & = 22 \\
 & 6x_1 + 4x_2 & & & & + s_4 & & & = 23 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & & & & & + s_5 & & = 11 \\
 & \color{red}{3x_1 + \ \ x_2} & & & & & & \color{red}{+ s_6} & \color{red}{= 10} \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 \geq 0 & & & & & & &
\end{array}
$$



$$6x_1 + 3x_2 \leq 22$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 23$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$3x_1 + x_2 \leq 10$$