オペレーションズ・リサーチ III (3)

田中 俊二

shunji.tanaka@okayama-u.ac.jp

スケジュール

No.	内容
1	導入 (組合せ最適化，グラフ・ネットワーク，整数計画問題)
2	計算複雑さの理論
3	グラフ・ネットワーク 1 (グラフの分類，用語，種々の問題)
4	グラフ・ネットワーク 2 (最短経路問題，動的計画法)
5	グラフ・ネットワーク 3 (最小全域木，最大フロー問題)
6	グラフ・ネットワーク 4 (マッチング)
7	整数計画 (緩和問題，分枝限定法，切除平面法)

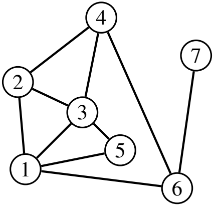
グラフ

グラフ $G = (V, E)$ (復習)

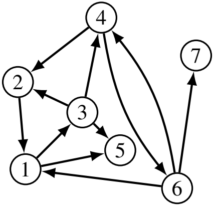
- V: 頂点 (vertex)，節点 (node) の集合．頂点数 $n = |V|$
- E: 辺，枝 (edge) の集合．辺数 $m = |E|$

無向グラフと有向グラフ

- **無向グラフ** (undirected graph)
  - 辺に方向がない
  - (u, v) と (v, u) は同じ辺
- **有向グラフ** (directed graph, digraph)
  - (u, v) は $u \to v$ の向き，(v, u) は $v \to u$ の向き
  - 有向グラフの辺は有向辺や孤 (arc) とも



無向グラフ



有向グラフ

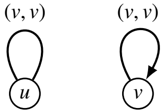
グラフの種類：単純グラフ

ループ (loop)

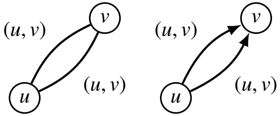
同じ頂点を結ぶ辺 (v, v)

並列辺 (parallel edge)

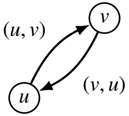
同じ辺 (u, v) が複数存在



ループ



並列辺



並列辺**ではない**

単純グラフ (simple graph)

ループや並列辺を持たないグラフ

$(u, v), (v, u) \in E$ である有向グラフも単純グラフ．辺の向きが違うので OK

単純グラフ・単純有向グラフのみ扱う．辺集合は $E = \{(u, v) \mid u \neq v\}$ で表される

部分グラフ

部分グラフ (subgraph)

グラフから一部の頂点と辺を取り出してできるグラフ.

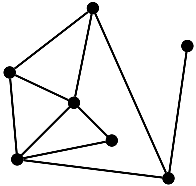
グラフ $G = (V, E)$ の部分グラフを $G' = (V', E')$ とすると，$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$

G 自身も G の部分グラフ．G と異なる部分グラフ：**真** (proper) 部分グラフ

誘導部分グラフ (induced subgraph)

グラフから一部の頂点，および**その頂点を両端とする辺**を取り出してできるグラフ

誘導部分グラフを $G'' = (V'', E'')$ とすると，$V'' \subseteq V$, $E'' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V''\}$



$G = (V, E)$

部分グラフ

部分グラフ (subgraph)

グラフから一部の頂点と辺を取り出してできるグラフ.

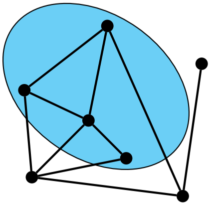
グラフ $G = (V, E)$ の部分グラフを $G' = (V', E')$ とすると，$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$

G 自身も G の部分グラフ．G と異なる部分グラフ：**真** (proper) 部分グラフ

誘導部分グラフ (induced subgraph)

グラフから一部の頂点，および**その頂点を両端とする辺**を取り出してできるグラフ

誘導部分グラフを $G'' = (V'', E'')$ とすると，$V'' \subseteq V$, $E'' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V''\}$



$G = (V, E)$

部分グラフ

部分グラフ (subgraph)

グラフから一部の頂点と辺を取り出してできるグラフ.

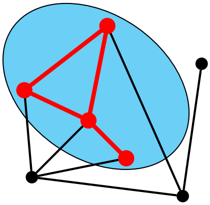
グラフ $G = (V, E)$ の部分グラフを $G' = (V', E')$ とすると，$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$

G 自身も G の部分グラフ．G と異なる部分グラフ：**真** (proper) 部分グラフ

誘導部分グラフ (induced subgraph)

グラフから一部の頂点，および**その頂点を両端とする辺**を取り出してできるグラフ

誘導部分グラフを $G'' = (V'', E'')$ とすると，$V'' \subseteq V$, $E'' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V''\}$



$G = (V, E)$

部分グラフ

部分グラフ (subgraph)

グラフから一部の頂点と辺を取り出してできるグラフ.

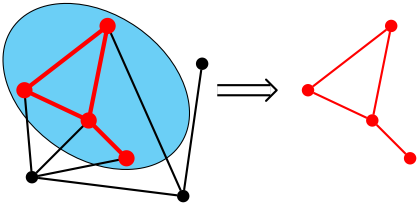
グラフ $G = (V, E)$ の部分グラフを $G' = (V', E')$ とすると，$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$

G 自身も G の部分グラフ．G と異なる部分グラフ：**真** (proper) 部分グラフ

誘導部分グラフ (induced subgraph)

グラフから一部の頂点，および**その頂点を両端とする辺**を取り出してできるグラフ

誘導部分グラフを $G'' = (V'', E'')$ とすると，$V'' \subseteq V$, $E'' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V''\}$



$G = (V, E)$ $\Longrightarrow$ $G'' = (V'', E'')$

路・閉路

隣接 (adjacent)

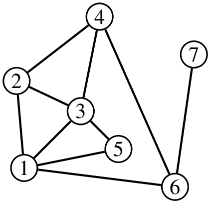
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接 :$2, 3, 5, 6$
路 :$1, 3, 4, 2, 5$
単純路 :$1, 3, 5$
閉路 :$2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2$
単純閉路 :$2, 1, 6, 4, 2$

路・閉路

隣接 (adjacent)

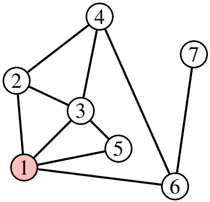
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路	:2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

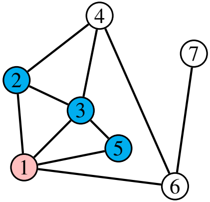
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接：2, 3, 5, 6
路：1, 3, 4, 2, 5
単純路：1, 3, 5
閉路：2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路：2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

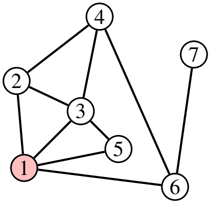
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路	:2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

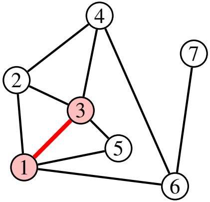
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路	:2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

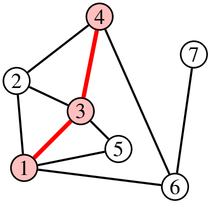
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接 :$2, 3, 5, 6$
路 :$1, 3, 4, 2, 5$
単純路 :$1, 3, 5$
閉路 :$2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2$
単純閉路 :$2, 1, 6, 4, 2$

路・閉路

隣接 (adjacent)

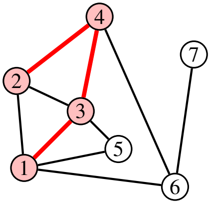
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接 : $2, 3, 5, 6$
路 : $1, 3, 4, 2, 5$
単純路 : $1, 3, 5$
閉路 : $2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2$
単純閉路 : $2, 1, 6, 4, 2$

路・閉路

隣接 (adjacent)

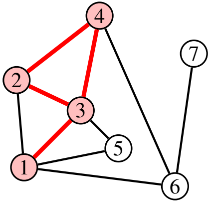
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路	:2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

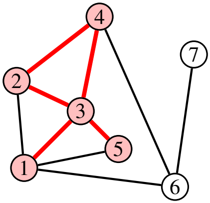
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路	:2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

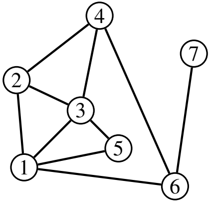
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接 :$2, 3, 5, 6$
路 :$1, 3, 4, 2, 5$
単純路 :$1, 3, 5$
閉路 :$2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2$
単純閉路 :$2, 1, 6, 4, 2$

路・閉路

隣接 (adjacent)

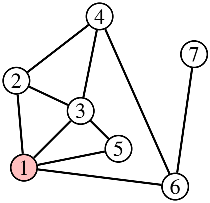
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接 : $2, 3, 5, 6$
路 : $1, 3, 4, 2, 5$
単純路 : $1, 3, 5$
閉路 : $2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2$
単純閉路 : $2, 1, 6, 4, 2$

路・閉路

隣接 (adjacent)

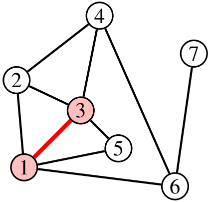
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接 :2, 3, 5, 6
路 :1, 3, 4, 2, 5
単純路 :1, 3, 5
閉路 :2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路 :2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

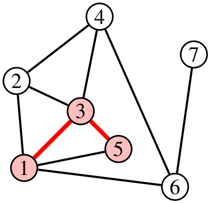
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	: $2, 3, 5, 6$
路	: $1, 3, 4, 2, 5$
単純路	: $1, 3, 5$
閉路	: $2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2$
単純閉路	: $2, 1, 6, 4, 2$

路・閉路

隣接 (adjacent)

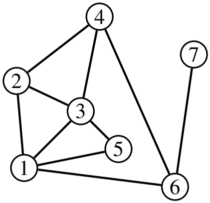
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	**:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2**
単純閉路	:2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

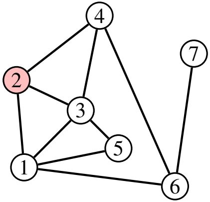
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接：2, 3, 5, 6
路：1, 3, 4, 2, 5
単純路：1, 3, 5
閉路：2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路：2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

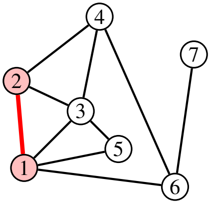
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	**:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2**
単純閉路	:2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

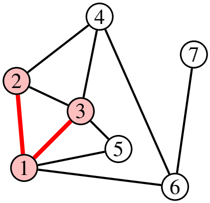
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路	:2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

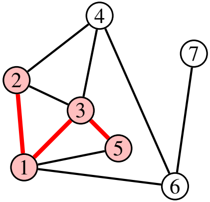
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	**:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2**
単純閉路	:2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

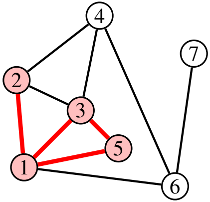
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路	:2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

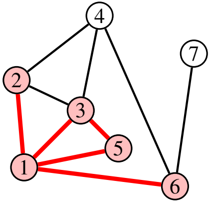
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接 :2, 3, 5, 6
路 :1, 3, 4, 2, 5
単純路 :1, 3, 5
閉路 :2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路 :2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

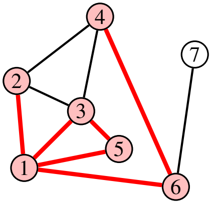
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接 : $2, 3, 5, 6$
路 : $1, 3, 4, 2, 5$
単純路 : $1, 3, 5$
閉路 : $2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2$
単純閉路 : $2, 1, 6, 4, 2$

路・閉路

隣接 (adjacent)

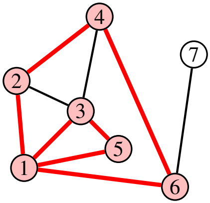
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路	:2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

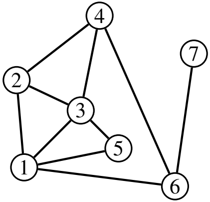
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接：2, 3, 5, 6
路：1, 3, 4, 2, 5
単純路：1, 3, 5
閉路：2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路：2, 1, 6, 4, 2

路・閉路

隣接 (adjacent)

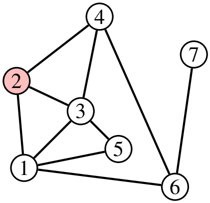
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接 : $2, 3, 5, 6$
路 : $1, 3, 4, 2, 5$
単純路 : $1, 3, 5$
閉路 : $2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2$
単純閉路 : $2, 1, 6, 4, 2$

路・閉路

隣接 (adjacent)

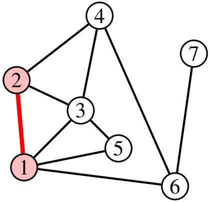
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接：$2, 3, 5, 6$
路：$1, 3, 4, 2, 5$
単純路：$1, 3, 5$
閉路：$2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2$
単純閉路：$2, 1, 6, 4, 2$

路・閉路

隣接 (adjacent)

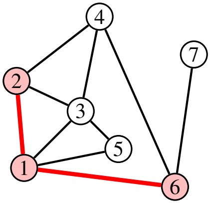
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接	:2, 3, 5, 6
路	:1, 3, 4, 2, 5
単純路	:1, 3, 5
閉路	:2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路	**:2, 1, 6, 4, 2**

路・閉路

隣接 (adjacent)

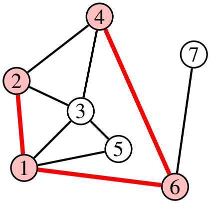
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接 : $2, 3, 5, 6$
路 : $1, 3, 4, 2, 5$
単純路 : $1, 3, 5$
閉路 : $2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2$
単純閉路 : $2, 1, 6, 4, 2$

路・閉路

隣接 (adjacent)

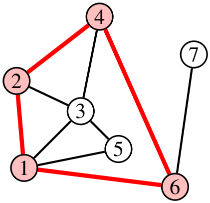
頂点と辺で直接接続すること

路・道 (path)

- 始点から終点まで至る経路 (辺の集合)
- 有向グラフの場合：**有向路** (directed path)
- 同じ頂点を 2 回以上訪れない路：とくに**単純路** (simple path)

閉路 (cycle)

- 始点と終点が同じ路
- 有向グラフの場合は有向閉路 (directed cycle)
- 途中で同じ頂点を 2 回以上訪れない閉路：とくに**単純閉路** (simple cycle)



隣接：2, 3, 5, 6
路：1, 3, 4, 2, 5
単純路：1, 3, 5
閉路：2, 1, 3, 5, 1, 6, 4, 2
単純閉路：2, 1, 6, 4, 2

連結グラフ・連結成分

連結グラフ (connected graph)

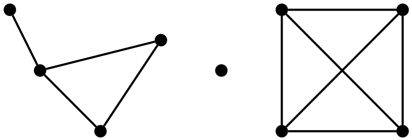
- 任意の 2 頂点間に路が存在するグラフ
- 連結でないグラフ：非連結グラフ (disconnected graph)

連結成分 (connected component)

極大で連結な部分グラフ

極大 (maximal)

他の部分グラフの真部分グラフ**ではない**・これ以上頂点や辺を追加できないこと



連結グラフ・連結成分

連結グラフ (connected graph)

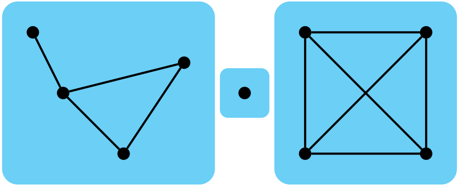
- 任意の 2 頂点間に路が存在するグラフ
- 連結でないグラフ：非連結グラフ (disconnected graph)

連結成分 (connected component)

極大で連結な部分グラフ

極大 (maximal)

他の部分グラフの真部分グラフ**ではない**・これ以上頂点や辺を追加できないこと



連結グラフ・連結成分

連結グラフ (connected graph)

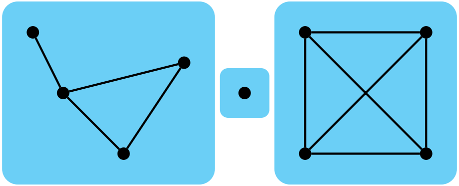
- 任意の 2 頂点間に路が存在するグラフ
- 連結でないグラフ：非連結グラフ (disconnected graph)

連結成分 (connected component)

極大で連結な部分グラフ

極大 (maximal)

他の部分グラフの真部分グラフ**ではない**・これ以上頂点や辺を追加できないこと



連結成分は 3 個

連結グラフ・連結成分

連結グラフ (connected graph)

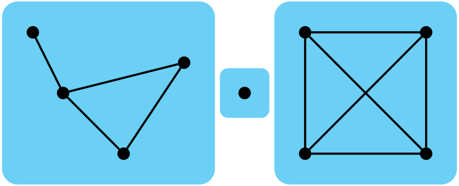
- 任意の 2 頂点間に路が存在するグラフ
- 連結でないグラフ：非連結グラフ (disconnected graph)

連結成分 (connected component)

極大で連結な部分グラフ

極大 (maximal)

他の部分グラフの真部分グラフ**ではない**・これ以上頂点や辺を追加できないこと



連結成分は 3 個

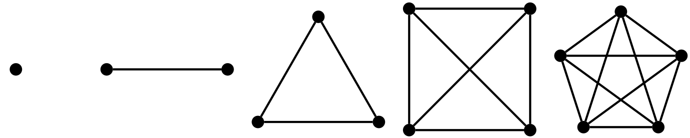
強連結 (strongly connected)

有向グラフにおいて，任意の 2 頂点間に**有向路**が存在

完全グラフ

完全グラフ (complete graph)・頂点の次数

- 任意の 2 頂点が辺で接続するグラフ． $\forall u, v \in V$ $(u \neq v)$ について $(u, v) \in E$
- 有向グラフの場合は $(u, v), (v, u) \in E$
- 頂点 1 個のみのグラフも完全グラフとみなす
- 頂点数が n の完全無向グラフ：K_n と表す



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

次数 (degree)

- ある頂点に接続する辺の本数
- 有向グラフの場合
  - 頂点に入ってくる辺の本数：**入次数** (in-degree)
  - 頂点から出ていく辺の本数：**出次数** (out-degree)

完全グラフ $\Leftrightarrow$ 頂点の次数がすべて (頂点数) -1

頂点次数の応用例：オイラーグラフ (その 1)

オイラー路 (Eulerian path)

すべての辺をちょうど 1 回ずつ通る路

オイラー閉路 (Eulerian cycle, Eulerian circuit)

すべての辺をちょうど 1 回ずつ通る閉路

オイラーグラフ (Eulerian graph)

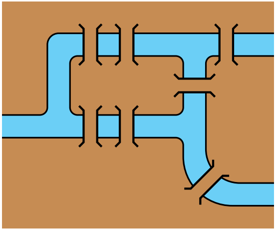
オイラー閉路が存在するグラフ

「オイラー」の由来は，数学者レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler) が**ケーニヒスベルクの 7 つの橋**の解を与えたことから

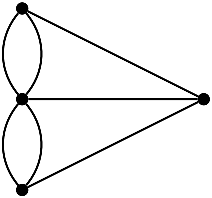
頂点次数の応用例：オイラーグラフ (その 2)

ケーニヒスベルクの 7 つの橋 (Seven Bridges of Königsberg)

プロイセン西部の街ケーニヒスベルクには 7 つの橋が架かっている．すべての橋をちょうど 1 回ずつ通って出発地点に戻る閉路は存在するか



ケーニヒスベルクの 7 つの橋

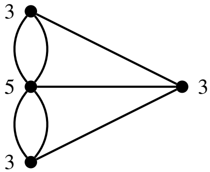


グラフによる表現

頂点次数の応用例：オイラーグラフ (その 3)

オイラーグラフと頂点次数の関係

連結グラフがオイラーグラフであるための必要十分条件は，すべての頂点の次数が偶数



ケーニヒスベルクの 7 つの橋の頂点次数
いずれも奇数なので，オイラーグラフではない

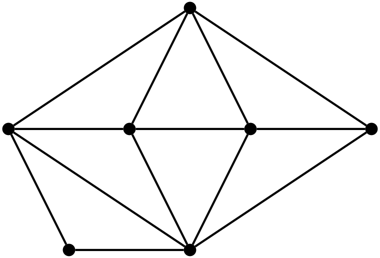
一筆書き (オイラー路) と頂点次数の関係

連結グラフが一筆書き可能であるための必要十分条件は，奇数次数の頂点が 0 個あるいは 2 個

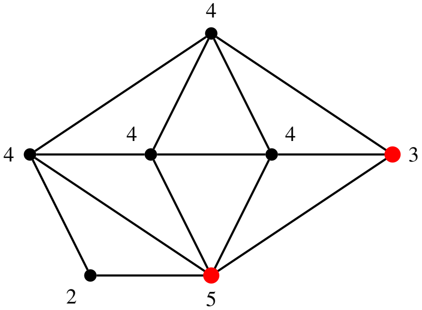
オイラーグラフ，もしくはオイラーグラフから辺を 1 本取り除いたグラフを考えればよい

次数が奇数の頂点 (存在する場合) は，一筆書きの始点と終点

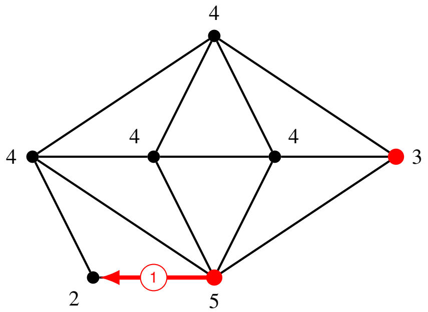
一筆書きの練習問題



一筆書きの練習問題

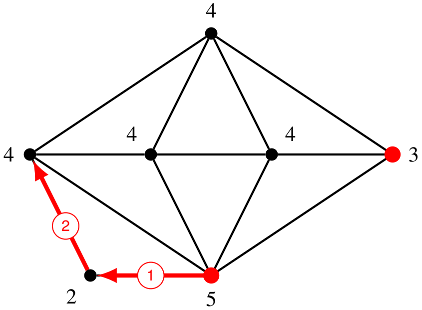


一筆書きの練習問題



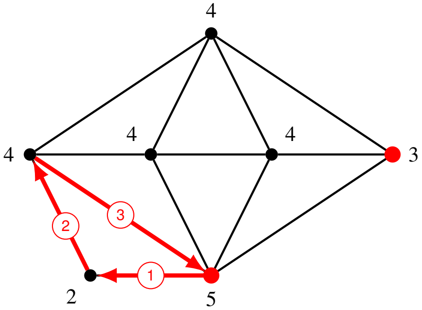
行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



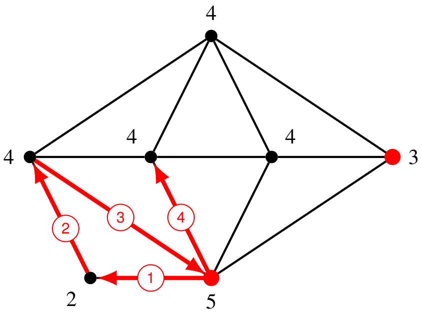
行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



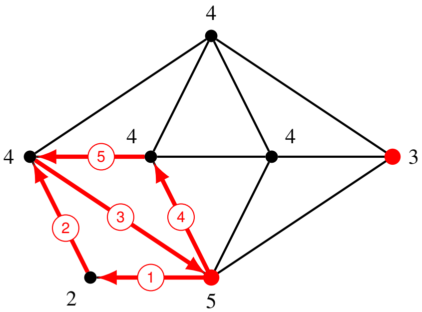
行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



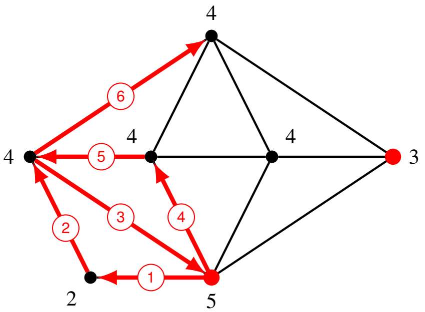
行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



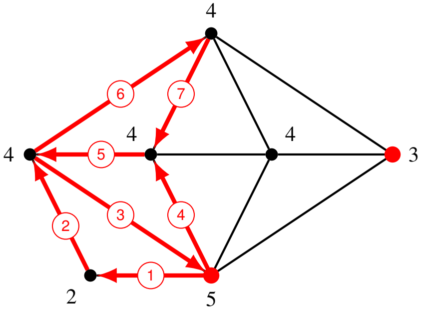
行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



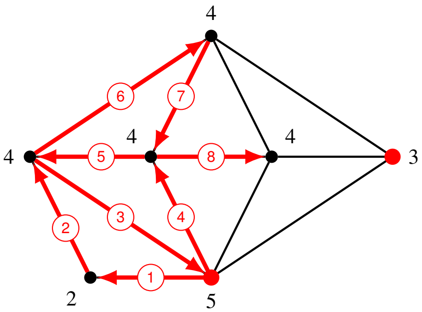
行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



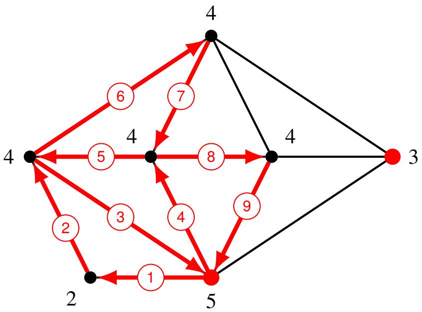
行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



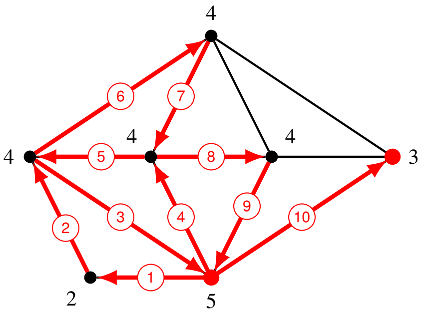
行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



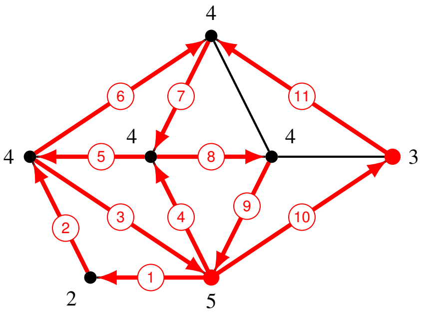
行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



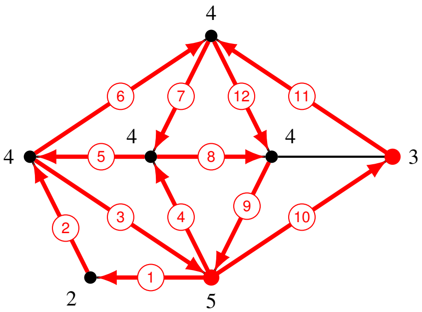
行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



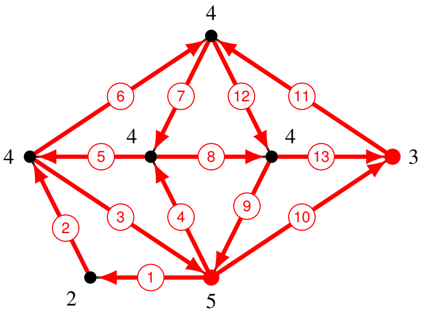
行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

一筆書きの練習問題



行き詰まらないように気をつけながら辺を通ればよい (答はたくさんある)

森・木

森 (forest)

閉路を持たない (無向) グラフ

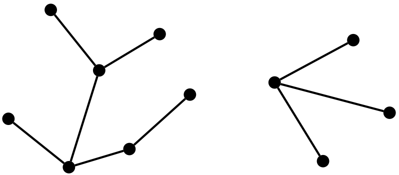
木 (tree)

連結な森．森の連結成分

葉 (leaf)

次数 1 の木の頂点

木に辺を 1 本追加すると，必ず閉路ができる



森

森・木

森 (forest)

閉路を持たない (無向) グラフ

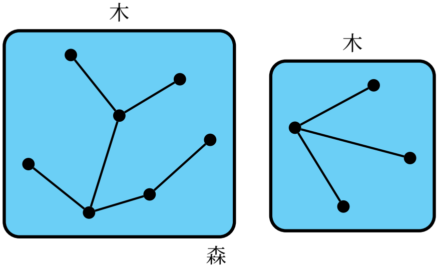
木 (tree)

連結な森．森の連結成分

葉 (leaf)

次数 1 の木の頂点

木に辺を 1 本追加すると，必ず閉路ができる



森・木

森 (forest)

閉路を持たない (無向) グラフ

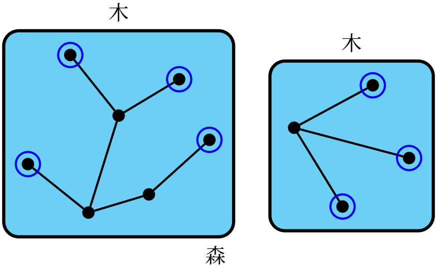
木 (tree)

連結な森．森の連結成分

葉 (leaf)

次数 1 の木の頂点

木に辺を 1 本追加すると，必ず閉路ができる



森・木

森 (forest)

閉路を持たない (無向) グラフ

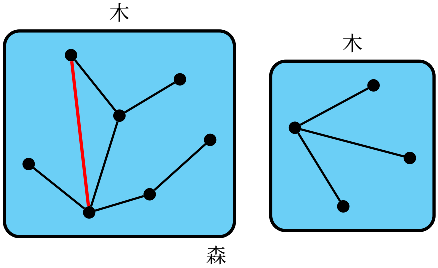
木 (tree)

連結な森．森の連結成分

葉 (leaf)

次数 1 の木の頂点

木に辺を 1 本追加すると，必ず閉路ができる



森・木

森 (forest)

閉路を持たない (無向) グラフ

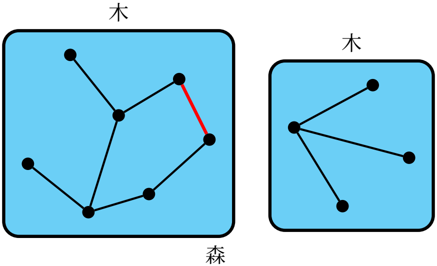
木 (tree)

連結な森．森の連結成分

葉 (leaf)

次数 1 の木の頂点

木に辺を 1 本追加すると，必ず閉路ができる

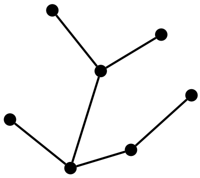


根付き木

根付き木 (rooted tree)

- **根** (root) を持つ木
- 根を一番上に，根からの距離 (通過する辺の本数) に応じて頂点を配置

親 (parent)：	辺で接続された頂点のうち，根に近い方
子 (child)：	辺で接続された頂点のうち，根から遠い方
兄弟 (sibling)：	同じ親を持つ頂点
先祖 (ancestor)：	根方向に辿ることのできる頂点．親の親など
子孫 (descendant)：	根と逆方向に辿ることのできる頂点．子の子など



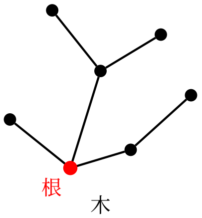
木

根付き木

根付き木 (rooted tree)

- **根** (root) を持つ木
- 根を一番上に，根からの距離 (通過する辺の本数) に応じて頂点を配置

親 (parent)：	辺で接続された頂点のうち，根に近い方
子 (child)：	辺で接続された頂点のうち，根から遠い方
兄弟 (sibling)：	同じ親を持つ頂点
先祖 (ancestor)：	根方向に辿ることのできる頂点．親の親など
子孫 (descendant)：	根と逆方向に辿ることのできる頂点．子の子など

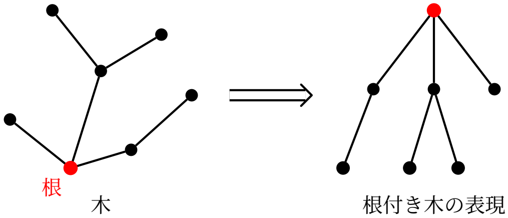


根付き木

根付き木 (rooted tree)

- **根** (root) を持つ木
- 根を一番上に，根からの距離 (通過する辺の本数) に応じて頂点を配置

親 (parent)：	辺で接続された頂点のうち，根に近い方
子 (child)：	辺で接続された頂点のうち，根から遠い方
兄弟 (sibling)：	同じ親を持つ頂点
先祖 (ancestor)：	根方向に辿ることのできる頂点．親の親など
子孫 (descendant)：	根と逆方向に辿ることのできる頂点．子の子など



根付き木

根付き木 (rooted tree)

- **根** (root) を持つ木
- 根を一番上に，根からの距離 (通過する辺の本数) に応じて頂点を配置

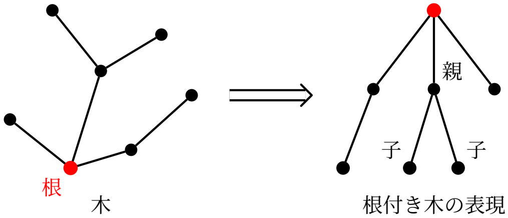
親 (parent)： 辺で接続された頂点のうち，根に近い方

子 (child)： 辺で接続された頂点のうち，根から遠い方

兄弟 (sibling)： 同じ親を持つ頂点

先祖 (ancestor)： 根方向に辿ることのできる頂点．親の親など

子孫 (descendant)： 根と逆方向に辿ることのできる頂点．子の子など



根付き木

根付き木 (rooted tree)

- **根** (root) を持つ木
- 根を一番上に，根からの距離 (通過する辺の本数) に応じて頂点を配置

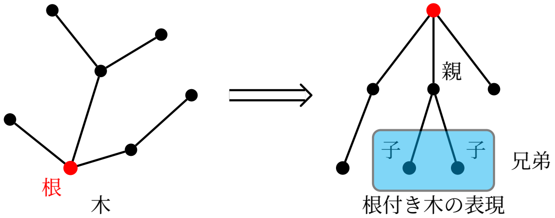
親 (parent)： 辺で接続された頂点のうち，根に近い方

子 (child)： 辺で接続された頂点のうち，根から遠い方

兄弟 (sibling)： 同じ親を持つ頂点

先祖 (ancestor)： 根方向に辿ることのできる頂点．親の親など

子孫 (descendant)： 根と逆方向に辿ることのできる頂点．子の子など



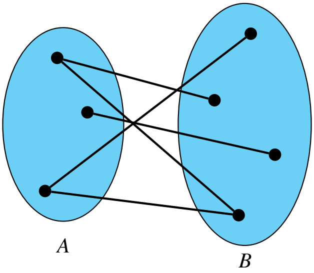
二部グラフ

二部グラフ (bipartite graph)

- 頂点集合 V を 2 つの部分集合 A, B ($A \cup B = V, A \cap B = \emptyset$) に分割
- A の頂点同士，B の頂点同士は隣接しない (辺は A，B 間のみ)

完全二部グラフ (complete bipartite graph)

- A の任意の頂点 u と B の任意の頂点 v が隣接
- A の要素数を $p = |A|$，B の要素数を $q = |B|$ として，$K_{p,q}$ と表す



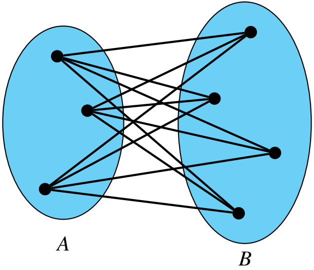
二部グラフ

二部グラフ (bipartite graph)

- 頂点集合 V を 2 つの部分集合 A, B ($A \cup B = V$, $A \cap B = \emptyset$) に分割
- A の頂点同士，B の頂点同士は隣接しない (辺は A，B 間のみ)

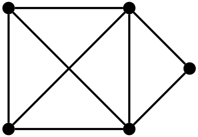
完全二部グラフ (complete bipartite graph)

- A の任意の頂点 u と B の任意の頂点 v が隣接
- A の要素数を $p = |A|$，B の要素数を $q = |B|$ として，$K_{p,q}$ と表す

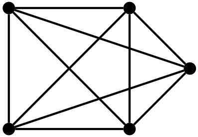


完全二部グラフ $K_{3,4}$

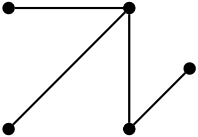
次の (1)~(3) のグラフに当てはまるものをすべて選べ.
(a) 単純グラフ，(b) 連結グラフ，(c) 完全グラフ，(d) 木，(e) 二部グラフ



(1)



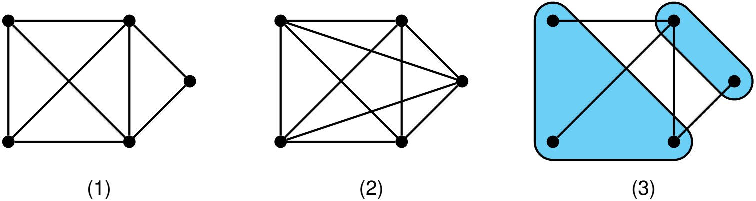
(2)



(3)

グラフの練習問題

次の (1)~(3) のグラフに当てはまるものをすべて選べ.
(a) 単純グラフ，(b) 連結グラフ，(c) 完全グラフ，(d) 木，(e) 二部グラフ

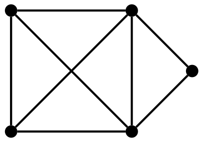


解答

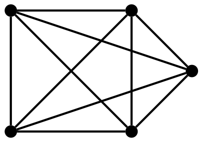
(1) (a), (b)
(2) (a), (b), (c)
(3) (a), (b), (d), (e)

グラフの練習問題

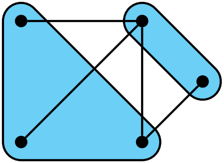
次の (1)~(3) のグラフに当てはまるものをすべて選べ.
(a) 単純グラフ, (b) 連結グラフ, (c) 完全グラフ, (d) 木, **(e) 二部グラフ**



(1)



(2)



(3)

解答

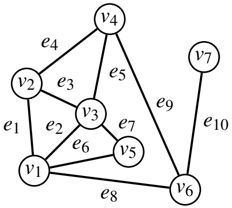
(1) (a), (b)
(2) (a), (b), (c)
(3) (a), (b), (d), **(e)**

単純グラフの行列表現：接続行列

接続行列 (incidence matrix)

- $G=(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n\times m$ 行列 $C=(c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k) \text{ または } e_j=(v_k,v_i)\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$	$c_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k)\\ -1, & e_j=(v_k,v_i)\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10}\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

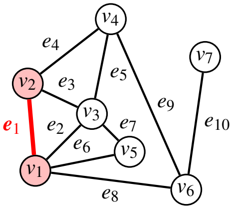
辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列

接続行列 (incidence matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n \times m$ 行列 $C = (c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \text{ または } e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \\ -1, & e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\\
v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

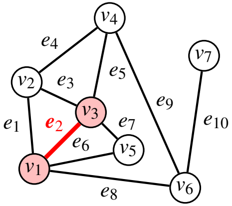
辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列

接続行列 (incidence matrix)

- $G=(V,E)$,　$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,　$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n\times m$ 行列 $C=(c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k) \text{ または } e_j=(v_k,v_i)\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$	$c_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k)\\ -1, & e_j=(v_k,v_i)\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$



無向グラフ

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \\
\hline
v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

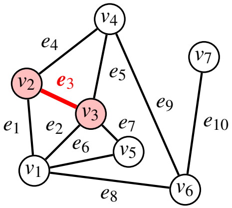
辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列

接続行列 (incidence matrix)

- $G=(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n\times m$ 行列 $C=(c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k) \text{ または } e_j=(v_k,v_i)\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$	$c_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k)\\ -1, & e_j=(v_k,v_i)\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$



無向グラフ

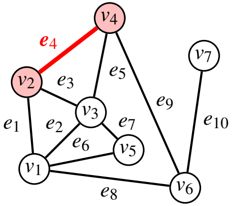
$$
\begin{array}{c}
\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10}\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

接続行列 (incidence matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n \times m$ 行列 $C = (c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \text{ または } e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \\ -1, & e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

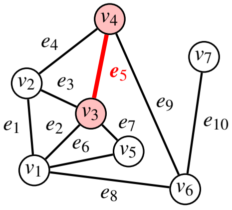
辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列

接続行列 (incidence matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n \times m$ 行列 $C = (c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \text{ または } e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \\ -1, & e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

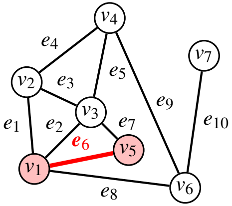
辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列

接続行列 (incidence matrix)

- $G = (V, E)$,　$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,　$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n \times m$ 行列 $C = (c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \text{ または } e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \\ -1, & e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

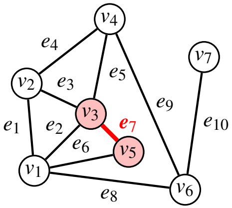
辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列

接続行列 (incidence matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n \times m$ 行列 $C = (c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \text{ または } e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \\ -1, & e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$



無向グラフ

$$
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

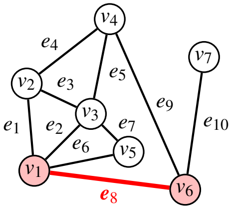
辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列

接続行列 (incidence matrix)

- $G=(V,E),\quad V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\},\quad E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n\times m$ 行列 $C=(c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k) \text{ または } e_j=(v_k,v_i)\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$	$c_{ij}=\begin{cases}1, & e_j=(v_i,v_k)\\ -1, & e_j=(v_k,v_i)\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$



無向グラフ

$$\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array}\\
\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}$$

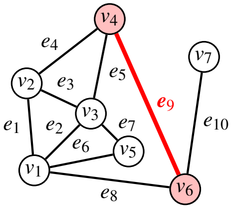
辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列

接続行列 (incidence matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n \times m$ 行列 $C = (c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \text{ または } e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \\ -1, & e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

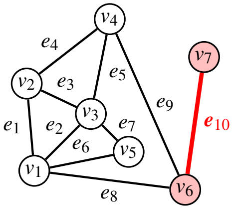
辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列

接続行列 (incidence matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n \times m$ 行列 $C = (c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \text{ または } e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \\ -1, & e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$



無向グラフ

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \\
\hline
v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

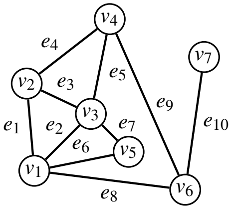
辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列

接続行列 (incidence matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n \times m$ 行列 $C = (c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \text{ または } e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \\ -1, & e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

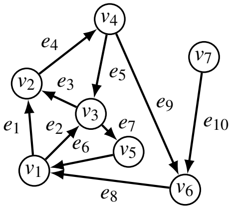
辺 e_j に接続する頂点の行が 1 (2 箇所)，それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列 (続き)

接続行列 (incidence matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n \times m$ 行列 $C = (c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \text{ または } e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \\ -1, & e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$



有向グラフ

$$
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

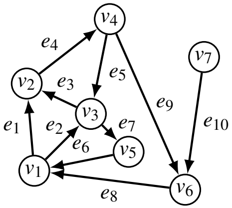
辺 e_j に接続する頂点の行は -1 (入) と 1 (出)． それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列 (続き)

接続行列 (incidence matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n \times m$ 行列 $C = (c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \text{ または } e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \\ -1, & e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$



有向グラフ

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

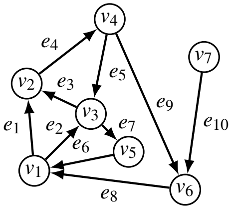
辺 e_j に接続する頂点の行は -1 (入) と 1 (出)．それ以外 0

単純グラフの行列表現：接続行列 (続き)

接続行列 (incidence matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする
- **接続行列** (incidence matrix)：$n \times m$ 行列 $C = (c_{ij})$

無向グラフ	有向グラフ
$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \text{ または } e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j = (v_i, v_k) \\ -1, & e_j = (v_k, v_i) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$



有向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

辺 e_j に接続する頂点の行は -1 (入) と 1 (出)．それ以外 0

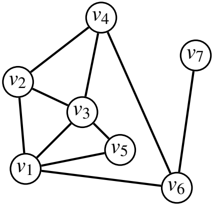
単純グラフの行列表現：隣接行列

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E\ ^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

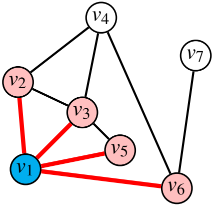
v_i と v_j が隣接するとき 1，それ以外 0

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

v_i と v_j が隣接するとき 1，それ以外 0

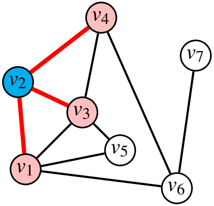
単純グラフの行列表現：隣接行列

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E\ ^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

v_i と v_j が隣接するとき 1，それ以外 0

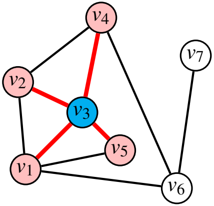
単純グラフの行列表現：隣接行列

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

v_i と v_j が隣接するとき 1，それ以外 0

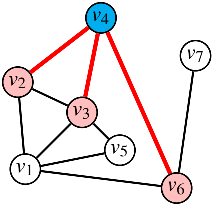
単純グラフの行列表現：隣接行列

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

v_i と v_j が隣接するとき 1，それ以外 0

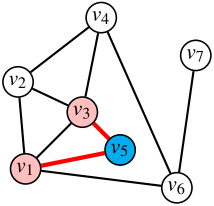
単純グラフの行列表現：隣接行列

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

v_i と v_j が隣接するとき 1，それ以外 0

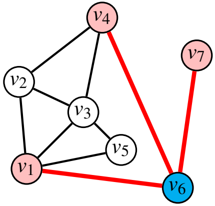
単純グラフの行列表現：隣接行列

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$,　$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E\ ^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



無向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

v_i と v_j が隣接するとき 1，それ以外 0

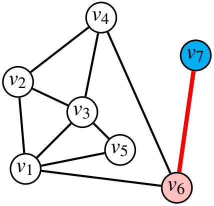
単純グラフの行列表現：隣接行列

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$,　$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



無向グラフ

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

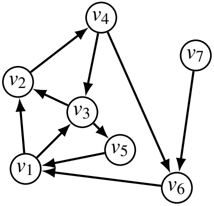
v_i と v_j が隣接するとき 1，それ以外 0

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



有向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

v_i から v_j へ辺が出ていくとき 1，それ以外 0

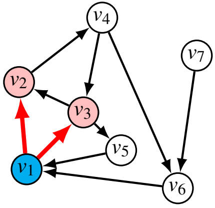
単純グラフの行列表現：隣接行列 (続き)

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



有向グラフ

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\
\hline
v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

v_i から v_j へ辺が出ていくとき 1，それ以外 0

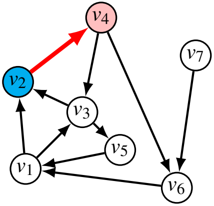
単純グラフの行列表現：隣接行列 (続き)

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G=(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E \text{ または } (v_j,v_i)\in E\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$	$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E^{\dagger}\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$

† $(v_j,v_i)\in E$ のとき $a_{ij}=1$ とする流儀もある



有向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7\end{array}\\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

v_i から v_j へ辺が出ていくとき 1，それ以外 0

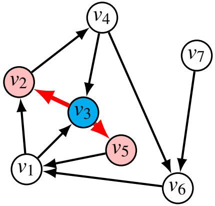
単純グラフの行列表現：隣接行列 (続き)

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



有向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\\
v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

v_i から v_j へ辺が出ていくとき 1，それ以外 0

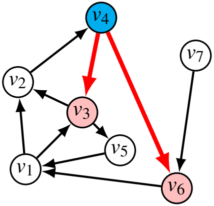
単純グラフの行列表現：隣接行列 (続き)

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G=(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E \text{ または } (v_j,v_i)\in E\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$	$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E^{\dagger}\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$

† $(v_j,v_i)\in E$ のとき $a_{ij}=1$ とする流儀もある



有向グラフ

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}\end{array}$$

v_i から v_j へ辺が出ていくとき 1，それ以外 0

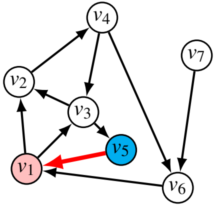
単純グラフの行列表現：隣接行列 (続き)

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



有向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

v_i から v_j へ辺が出ていくとき 1，それ以外 0

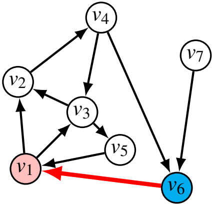
単純グラフの行列表現：隣接行列 (続き)

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$,　$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E\ ^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



有向グラフ

$$
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

v_i から v_j へ辺が出ていくとき 1，それ以外 0

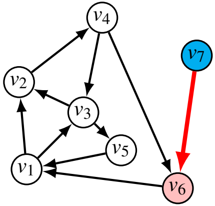
単純グラフの行列表現：隣接行列 (続き)

隣接行列 (adjacency matrix)

- $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする
- **隣接行列** (adjacency matrix)：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

無向グラフ (対称行列)	有向グラフ
$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \text{ または } (v_j, v_i) \in E \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E^{\dagger} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

† $(v_j, v_i) \in E$ のとき $a_{ij} = 1$ とする流儀もある



有向グラフ

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

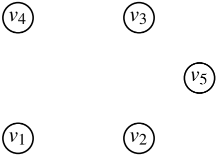
v_i から v_j へ辺が出ていくとき 1，それ以外 0

練習問題：接続行列と隣接行列

$$
\begin{array}{c@{}c}
 & \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

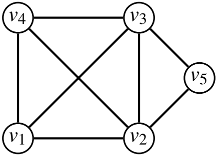
接続行列

$\Longrightarrow$



有向グラフ

$\Longleftarrow$



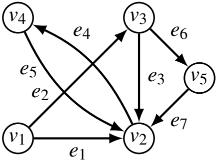
無向グラフ

隣接行列

練習問題：接続行列と隣接行列

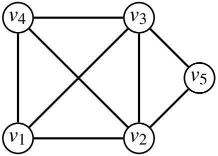
$$
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad \Longrightarrow
$$

接続行列



有向グラフ

$$\Longleftarrow$$



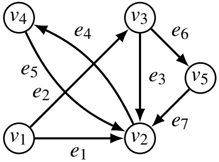
無向グラフ

隣接行列

練習問題：接続行列と隣接行列

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \\
\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad \Longrightarrow
$$

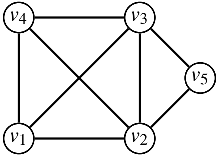
接続行列



有向グラフ

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\
\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad \Longleftarrow
$$

隣接行列



無向グラフ

グラフ彩色

グラフ彩色 (graph coloring)

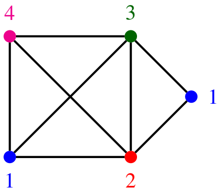
- 無向グラフの頂点を色分けする問題
- 隣接する頂点は異なる色を割り当てる

辺彩色 (edge coloring) と区別して，頂点彩色 (vertex coloring) と呼ばれる場合も

彩色数 (chromatic number)

与えられたグラフを彩色するのに必要な色数の最小値

一般のグラフに対して彩色数を求める問題は強 NP 困難



彩色数 4 のグラフ

4 色定理

4 色定理 (Four color Theorem)

地図 (境界線で区切られた平面上の領域) は 4 色で塗り分け可能

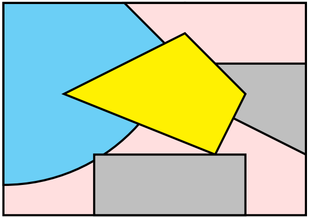
- 境界線を挟んで隣り合う領域は異なる色
- 一点で隣り合う領域は同じ色でも構わない

グラフ彩色との関係

平面グラフの彩色と等価

平面グラフ (planar graph)

辺が交差しないよう平面上に描くことのできるグラフ



地図の塗り分け

4 色定理

4 色定理 (Four color Theorem)

地図 (境界線で区切られた平面上の領域) は 4 色で塗り分け可能

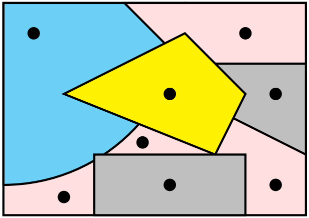
- 境界線を挟んで隣り合う領域は異なる色
- 一点で隣り合う領域は同じ色でも構わない

グラフ彩色との関係

平面グラフの彩色と等価

平面グラフ (planar graph)

辺が交差しないよう平面上に描くことのできるグラフ



地図の塗り分け

4 色定理

4 色定理 (Four color Theorem)

地図 (境界線で区切られた平面上の領域) は 4 色で塗り分け可能

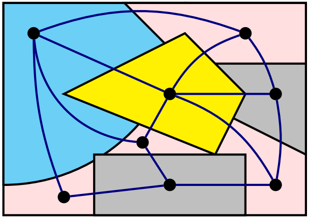
- 境界線を挟んで隣り合う領域は異なる色
- 一点で隣り合う領域は同じ色でも構わない

グラフ彩色との関係

平面グラフの彩色と等価

平面グラフ (planar graph)

辺が交差しないよう平面上に描くことのできるグラフ



地図の塗り分け

4 色定理

4 色定理 (Four color Theorem)

地図 (境界線で区切られた平面上の領域) は 4 色で塗り分け可能

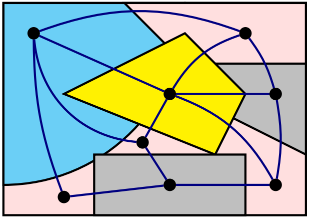
- 境界線を挟んで隣り合う領域は異なる色
- 一点で隣り合う領域は同じ色でも構わない

グラフ彩色との関係

平面グラフの彩色と等価

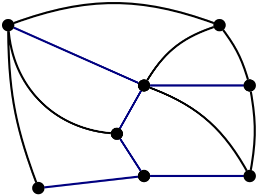
平面グラフ (planar graph)

辺が交差しないよう平面上に描くことのできるグラフ



地図の塗り分け

$\Longrightarrow$



平面グラフ

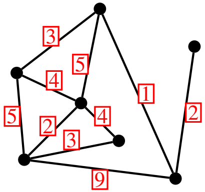
4 色定理をめぐるあれこれ

- ケネス・アッペル (Kenneth Appel) とウォルフガング・ハーケン (Wolfgang Haken) が 1976 年に証明
- コンピュータを使って，2000 通り近いパターンをしらみ潰しにチェックするというもの
- 後に見つかったミスを修正した証明は，「Every Planar Map is Four-Colorable」(1989) という本にまとめられている
- 現在でも，より洗練された証明は見つかっていない
- 2024 年 10 月にも 6 ページの証明が発表されたが，間違いが見つかってすぐに取り下げられた

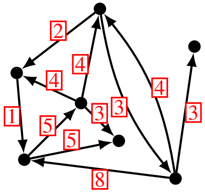
ネットワーク

ネットワーク (network)

辺に重み (距離やコストなど) を付加したグラフ



無向グラフ



有向グラフ

ハミルトン路問題・ハミルトン閉路問題

ハミルトン路 (Hamiltonian path)

すべての頂点をちょうど 1 回ずつ巡る路

ハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle, Hamiltonian circuit)

すべての頂点をちょうど 1 回ずつ巡る閉路

ハミルトン路問題・ハミルトン閉路問題

ハミルトン路問題： ハミルトン路が存在するかどうかを判定する問題
ハミルトン閉路問題： ハミルトン閉路が存在するかどうかを判定する問題

ハミルトン路問題・ハミルトン閉路問題はいずれも強 NP 完全

巡回セールスマン問題 (traveling salesman problem)

重み和が最小のハミルトン閉路を求める問題

巡回セールスマン問題は強 NP 困難

ハミルトングラフ

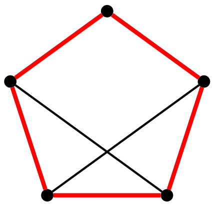
ハミルトングラフ (Hamiltonian graph)

ハミルトン閉路が存在するグラフ

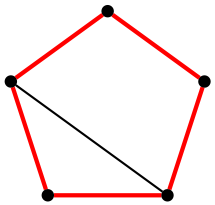
頂点数 n が 3 以上のグラフがハミルトングラフとなるための十分条件

ディラックの条件： 頂点の次数がすべて $n/2$ 以上

オーレの条件： 隣接しない 2 頂点の次数の和がすべて n 以上



(1)



(2)

(1) ディラックの条件を満たさないが，オーレの条件は満たすハミルトングラフ
(2) どちらも満たさないハミルトングラフ

ハミルトングラフ

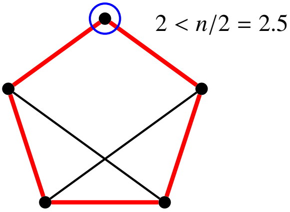
ハミルトングラフ (Hamiltonian graph)

ハミルトン閉路が存在するグラフ

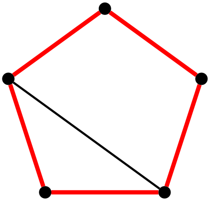
頂点数 n が 3 以上のグラフがハミルトングラフとなるための十分条件

ディラックの条件： 頂点の次数がすべて $n/2$ 以上

オーレの条件： 隣接しない 2 頂点の次数の和がすべて n 以上



(1)



(2)

(1) ディラックの条件を満たさないが，オーレの条件は満たすハミルトングラフ
(2) どちらも満たさないハミルトングラフ

ハミルトングラフ

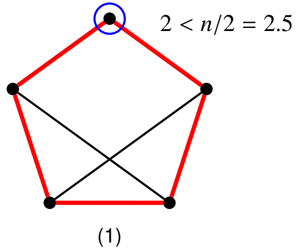
ハミルトングラフ (Hamiltonian graph)

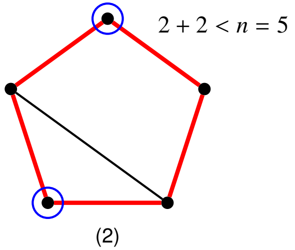
ハミルトン閉路が存在するグラフ

頂点数 n が 3 以上のグラフがハミルトングラフとなるための十分条件

ディラックの条件： 頂点の次数がすべて $n/2$ 以上

オーレの条件： 隣接しない 2 頂点の次数の和がすべて n 以上





(1) ディラックの条件を満たさないが，オーレの条件は満たすハミルトングラフ
(2) どちらも満たさないハミルトングラフ

最短経路問題

最短経路問題 (shortest path problem)

ネットワーク上で最短路 (辺の重みの和が最小の路) を求める問題

最短経路問題の種類

- 単一点対 (single-pair) 最短経路問題
  2 頂点間の最短路を求める問題
- 単一始点 (single-source) 最短経路問題
  ある頂点から残りすべての頂点への最短路を求める問題
- 全点対 (all-pairs) 最短経路問題
  すべての 2 頂点の組に対して最短路を求める問題

上の最短経路問題はいずれも多項式時間で求解可能

マッチング

マッチング (matching)

無向グラフ $G = (V, E)$ の**マッチング** (matching) とは，辺の部分集合 $M \subseteq E$ で，頂点を共有する辺が含まれないもの

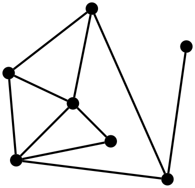
辺で接続した頂点を，重複がないようにペアリングしたもの

最大マッチング (maximum matching, maximum cardinality matching)

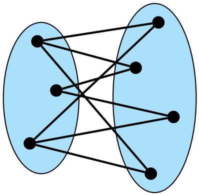
最大本数の辺からなるマッチング

最大重みマッチング (maximum weight matching)

辺の重みの合計が最大となるマッチング



マッチング



二部グラフのマッチング

マッチング

マッチング (matching)

無向グラフ $G=(V,E)$ の**マッチング** (matching) とは，辺の部分集合 $M \subseteq E$ で，頂点を共有する辺が含まれないもの

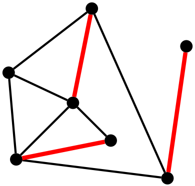
辺で接続した頂点を，重複がないようにペアリングしたもの

最大マッチング (maximum matching, maximum cardinality matching)

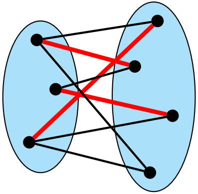
最大本数の辺からなるマッチング

最大重みマッチング (maximum weight matching)

辺の重みの合計が最大となるマッチング



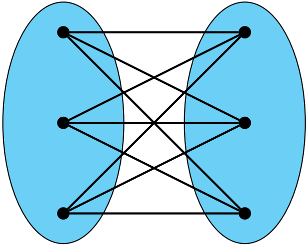
マッチング



二部グラフのマッチング

完全二部グラフの最大重みマッチングと割当問題

完全二部グラフ $K_{n,n}$ の最大重みマッチング ＝ 割当問題 (ただし，目的関数最大化)

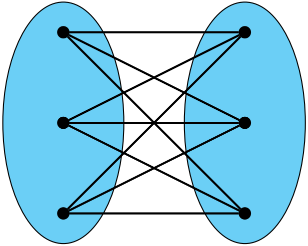


バイト \ シフト	午前	午後	深夜
X	5	6	7
Y	4	5	8
Z	6	3	9

- 最大マッチング・最大重みマッチングはいずれも多項式時間で求解可能
- もちろん，割当問題も多項式時間で求解可能

完全二部グラフの最大重みマッチングと割当問題

完全二部グラフ $K_{n,n}$ の最大重みマッチング ＝ 割当問題 (ただし，目的関数最大化)



バイト \ シフト	午前	午後	深夜
X	5	6	7
Y	4	5	8
Z	6	3	9

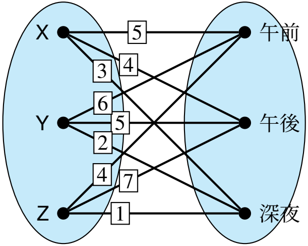
⇓ 10 から引いて最大化問題に変換 ⇓

バイト \ シフト	午前	午後	深夜
X	5	4	3
Y	6	5	2
Z	4	7	1

- 最大マッチング・最大重みマッチングはいずれも多項式時間で求解可能
- もちろん，割当問題も多項式時間で求解可能

完全二部グラフの最大重みマッチングと割当問題

完全二部グラフ $K_{n,n}$ の最大重みマッチング ＝ 割当問題 (ただし，目的関数最大化)



バイト \ シフト	午前	午後	深夜
X	5	6	7
Y	4	5	8
Z	6	3	9

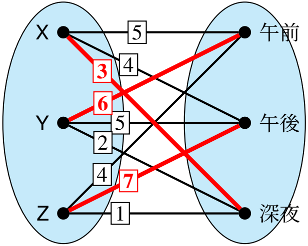
⇓ 10 から引いて最大化問題に変換 ⇓

バイト \ シフト	午前	午後	深夜
X	5	4	3
Y	6	5	2
Z	4	7	1

- 最大マッチング・最大重みマッチングはいずれも多項式時間で求解可能
- もちろん，割当問題も多項式時間で求解可能

完全二部グラフの最大重みマッチングと割当問題

完全二部グラフ $K_{n,n}$ の最大重みマッチング ＝ 割当問題 (ただし，目的関数最大化)



バイト \ シフト	午前	午後	深夜
X	5	6	**7**
Y	**4**	5	8
Z	6	**3**	9

⇓ 10 から引いて最大化問題に変換 ⇓

バイト \ シフト	午前	午後	深夜
X	5	4	**3**
Y	**6**	5	2
Z	4	**7**	1

- 最大マッチング・最大重みマッチングはいずれも多項式時間で求解可能
- もちろん，割当問題も多項式時間で求解可能

全域木

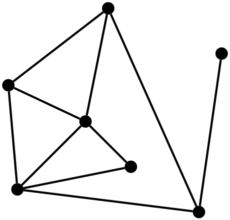
全域木 (spanning tree)

すべての頂点を含む部分グラフのうち，木となっているもの

最小全域木 (minimum spanning tree)

辺の重みの和が最小となる全域木

「最小全域木」は「最小**重み**全域木」の意味で使われるのが一般的 (紛らわしい)



全域木

最小全域木は多項式時間で求まる

全域木

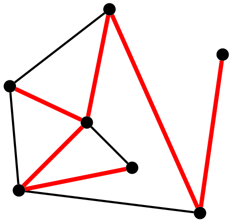
全域木 (spanning tree)

すべての頂点を含む部分グラフのうち，木となっているもの

最小全域木 (minimum spanning tree)

辺の重みの和が最小となる全域木

「最小全域木」は「最小**重み**全域木」の意味で使われるのが一般的 (紛らわしい)



全域木

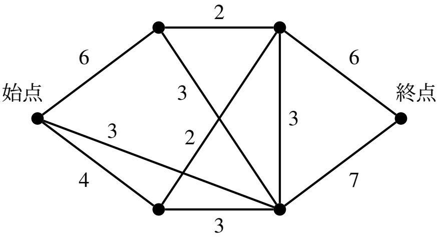
最小全域木は多項式時間で求まる

最大フロー問題

最大フロー問題 (maximum flow problem)

- 始点の頂点 (source) から終点の頂点 (sink) までのフロー (モノの流れ) を最大化する問題
- 辺の重み：辺に流せる最大フロー・容量 (capacity)

- 最大フロー問題は多項式時間で求解可能
- 線形計画問題として扱うこともできる

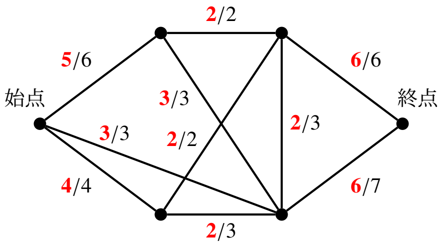


最大フロー問題

最大フロー問題 (maximum flow problem)

- 始点の頂点 (source) から終点の頂点 (sink) までのフロー (モノの流れ) を最大化する問題
- 辺の重み：辺に流せる最大フロー・容量 (capacity)

- 最大フロー問題は多項式時間で求解可能
- 線形計画問題として扱うこともできる

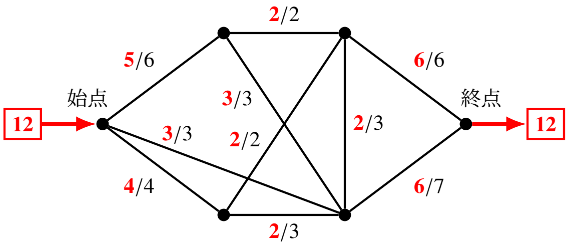


最大フロー問題

最大フロー問題 (maximum flow problem)

- 始点の頂点 (source) から終点の頂点 (sink) までのフロー (モノの流れ) を最大化する問題
- 辺の重み：辺に流せる最大フロー・容量 (capacity)

- 最大フロー問題は多項式時間で求解可能
- 線形計画問題として扱うこともできる

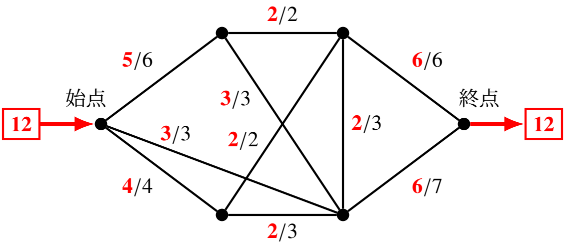


最大フロー問題

最大フロー問題 (maximum flow problem)

- 始点の頂点 (source) から終点の頂点 (sink) までのフロー (モノの流れ) を最大化する問題
- 辺の重み：辺に流せる最大フロー・容量 (capacity)

- 最大フロー問題は多項式時間で求解可能
- 線形計画問題として扱うこともできる



最大フロー：12

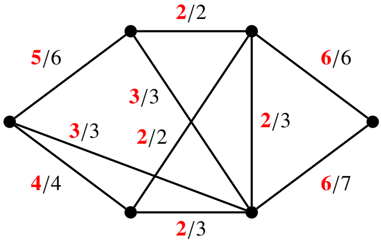
最大フロー最小カット定理

最小カット問題 (minimum cut problem)

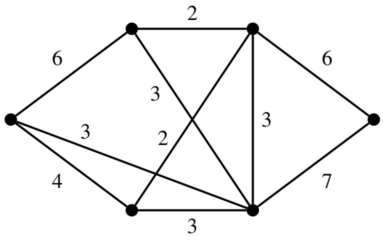
- 重み和が最小となるカットを見つける問題
- カット：取り除くとグラフやネットワークが 2 分割される辺集合

最大フロー最小カット定理 (max-flow min-cut theorem)

(フローの最大値) = (始点と終点を分けるカットの重み和の最小値)



最大フロー：12



最小カット：

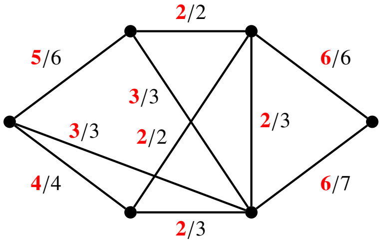
最大フロー最小カット定理

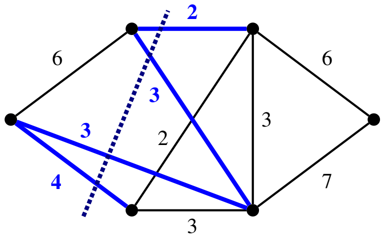
最小カット問題 (minimum cut problem)

- 重み和が最小となるカットを見つける問題
- カット：取り除くとグラフやネットワークが 2 分割される辺集合

最大フロー最小カット定理 (max-flow min-cut theorem)

(フローの最大値) = (始点と終点を分けるカットの重み和の最小値)





最大フロー：12

最小カット：

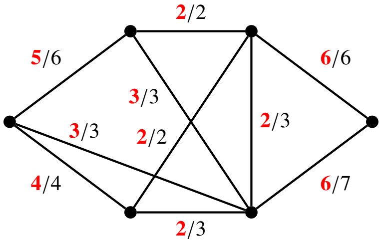
最大フロー最小カット定理

最小カット問題 (minimum cut problem)

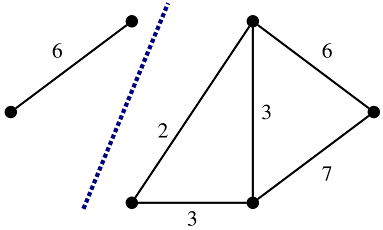
- 重み和が最小となるカットを見つける問題
- カット：取り除くとグラフやネットワークが 2 分割される辺集合

最大フロー最小カット定理 (max-flow min-cut theorem)

(フローの最大値) = (始点と終点を分けるカットの重み和の最小値)



最大フロー：12



最小カット：

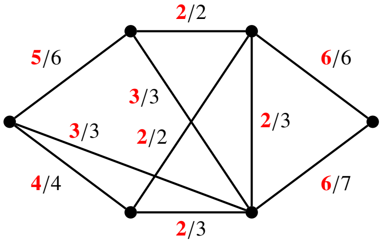
最大フロー最小カット定理

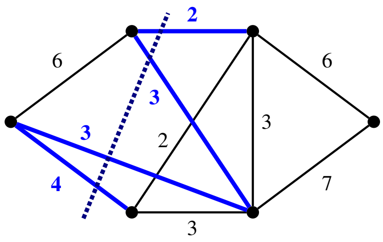
最小カット問題 (minimum cut problem)

- 重み和が最小となるカットを見つける問題
- カット：取り除くとグラフやネットワークが 2 分割される辺集合

最大フロー最小カット定理 (max-flow min-cut theorem)

(フローの最大値) = (始点と終点を分けるカットの重み和の最小値)





最大フロー：12

最小カット：

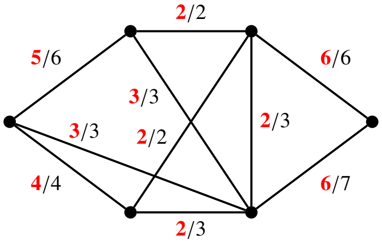
最大フロー最小カット定理

最小カット問題 (minimum cut problem)

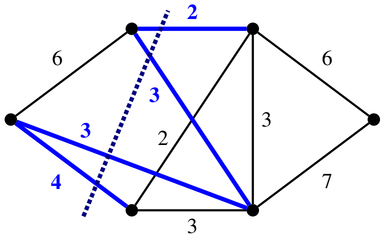
- 重み和が最小となるカットを見つける問題
- カット：取り除くとグラフやネットワークが 2 分割される辺集合

最大フロー最小カット定理 (max-flow min-cut theorem)

(フローの最大値) = (始点と終点を分けるカットの重み和の最小値)



最大フロー：12



最小カット：**4 + 3 + 3 + 2 = 12**