1　変分原理とは何か

局所的な記述：math::differential equations(ODE, PDE, SDE, etc.), physics::Newton eq, Maxwell eq, Schrodinger eq, etc)

大域的な記述：？？？

1.1　言葉の準備

・独立変数の変分

独立変数 x が　$x = a$ から $\tilde{x} = a + \Delta x$ になったときの Δx を独立変数 x の変分と呼ぶ.

・従属変数（函数）の変分

独立変数 x の変化に応じて函数 $f(x) = f(a)$ が $f(\tilde{x}) = f(a) + \Delta f$ になったときの Δf を函数 f の変分と呼ぶ.

1.1.1　変分の性質と最大最小問題

$x = a$ における変分 Δf が $\Delta f \geq 0$ であれば，$f(x)$ は $x = a$ で最小.

1.2　様々な函数のパラメーター

1.2.1　可算個のパラメーター

$f(\{x_i\})$ の形でかける場合 $\Rightarrow \Delta f = \sum_i \Delta_i f$　($\Delta_i f$ は i 番目の変数 x_i の変化に応じた変分)

1.2.2　非可算個のパラメーターとオイラーの公式

パラメーター x を用いて $y = y(x), y'(x) = dy/dx$ により

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x)) dx \tag{1}$$

の変分を考える．このときの I のように，函数 $y(x), y'(x)$ を変数として定まるものを汎関数と呼ぶ.

$y(x)$ を $y(x) + \eta(x)$ だけ変化させたときの I の変分 δI は $\nu(x)$ の 1 次まで求めると，

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_0}^{x_1} \left(f_y \cdot \eta(x) + f_{y'} \cdot \eta'(x)\right)\ dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) dx + \left[f_{y'} \cdot \eta(x)\right]_{x_0}^{x_1} \end{aligned} \tag{2}$$

となり，境界条件 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ のもとで $\delta I = 0$ となる十分条件は

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \tag{3}$$

とかける．この等式をオイラーの公式という．また，I を極値にするような函数 $y = y(x)$ を停留函数 (stationary function）と呼ぶ.

1.2.3　オイラーの公式の便利な変形

(4) を用いて次のような等式が得られる．

$$\frac{d}{dx}\left(f - y' f_{y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{4}$$

導出の際にはオイラーの公式を $df_{y'}/dx = f_y$ に注意すると良い．さらに，f が陽に x を含まない場合は，定数 c を用いて

$$f - y' f_{y'} = c \tag{5}$$

と書ける．

1.3　制約条件つきの変分問題（ラグランジュの未定係数法）

$$J = \int_{x_0}^{x_1} g(x, y, y')\ dx \tag{6}$$

が一定の値をとる条件のもとで，

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\ dx \tag{7}$$

の最小値を求める．

$\Rightarrow I + \lambda J$ の極値を制約条件なしに調べれば良い（$\lambda \in \mathbb{R}$）

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f_{y'} - f_y + \lambda \left(\frac{d}{dx} g_{y'} - g_y \right) = 0 \tag{8}$$

例題

（ここに図）

斜線部の面積 I を最小にする $y(x)$ は？

曲線の長さ J は

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}\ dx, \tag{9}$$

面積 I は

$$I = \int_{x_0}^{x_1} y\ dx \tag{10}$$

であり，双方 x を陽に持たない函数の積分で表されている．従って，$I + \lambda J$ が極値をとる $y(x)$ はオイラーの公式から，定数 c を用いて

$$y + \lambda \left(\sqrt{1 + (y')^2} + y' \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = c \tag{11}$$

を解くことにより与えられる．この式は容易に次のように変形できる．

$$y' = \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - c)^2}}{y - c} \tag{12}$$

この解はさらなる任意定数 b を用いて

$$(x-b)^2+(y-c)^2=\lambda^2 \tag{13}$$

という形になる．各パラメータは $\lambda=J/\pi,\ b=(x_0+x_1)/2,\ c=0, x_1=x_0+2\lambda$.

注

I を固定，J を最小にするためには $J+\lambda I$ を極小にすれば良い．この場合も円が停留曲線になる．