家用理论物理教程[1]

Courses of Theoretical Physics

Shunz Dai[2]

Physics and Space Science College, China West Normal University

E-mail: 196883@outlook.com

[1] 上一次更新时间：2021 年 3 月 3 日

[2] *My blog*

目录

微分几何

PART

I

内地的物理学工作者喜好在网络社区上整理自己的笔记.这些笔记虽然名义上被称作“笔记”，但实质上都只是抄书罢了.笔者不喜好抄书，也不喜好做笔记，但对于本章节的内容，笔者仍将大量参考Chern的讲义[1]，并斗胆将这本书的所述内容改写成通俗的、适于家用的语言.当然，这样做会损失一些数学上的严谨，但笔者认为这无伤大雅.

1 局部坐标系

微分几何的研究对象是一个称为**流形**(Manifold)[1]的集合，其上拥有线性结构与自然的拓扑结构.为了引出流形，我们先回顾一下线性空间、度量空间以及拓扑空间的公理化构造，然后逐步往集合上添加这些结构.

[1] 天地有正气，杂然赋流形.下则为河岳，上则为日星.於人曰浩然，沛乎塞苍冥.

文天祥《正气歌》，江泽涵译

Definition 1.1. 域F上的线性空间V是这样一个集合，对任意$\alpha,\beta,\gamma\in V$；$a,b\in F$有
矢量加法映射$V\times V\to V$：
1)（交换律）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；
2)（结合律）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；
3)（零元）存在唯一的$0\in V$，使得$0+\alpha=\alpha$；
4)（逆元）对任意$\alpha\in V$，存在唯一的$\beta\in V$，使得$\alpha+\beta=0$.
矢量数乘映射$F\times V\to V$：
5)（酉性）对$1\in F$，有$1\alpha=\alpha$；
6)（结合律）$a(b\alpha)=(ab)\alpha$；
7)（分配律1）$(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$；
8)（分配律2）$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta$.

我们用$\mathbb{R}$表示实数域，记$\mathbb{R}^n$表示全体n元有序实数组构成的集合.任意$x\in\mathbb{R}^n$的第i个坐标均可用实数x^i表示，其中$i=1,\cdots,n$，称为**抽象指标**.

Remark. 需要注意的是，坐标x^i的上指标的标记方法是习惯上的约定，不可随意变更为下指标.我们会在稍晚些时候看出，这是非常有效的的符号表征方法.

$\mathbb{R}^n$除了上述的线性构造，还具有自然的度量结构.

Definition 1.2. S是一个集合，若存在一个映射$d:S\times S\to\mathbb{R}$，使得对于任意$x,y\in S$都满足
1)（正定性）$d(x,y)\geqslant 0$，且$d(x,y)=0$当且仅当$x=y$时成立；
2)（对称性）$d(x,y)=d(y,x)$；
3)（三角不等式）$d(x,z)+d(z,y)\geqslant d(x,y)$，
则称(S,d)是一个度量空间，映射d称为S上的度量.

对任意$x,y\in\mathbb{R}^n$，命

$$d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to R,(x,y)\mapsto d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x^i-y^i)^2},\tag{1.1}$$

容易验证映射(1.1)满足度量的定义，于是$(\mathbb{R}^n, d)$是一个度量空间.

Remark. 需要注意的是，此时我们仅引入了度量结构（而不是内积结构），所以此时只有“距离”的概念，尚且没有“角度”的概念.

可以发现，$\mathbb{R}^n$还拥有自然的拓扑结构.

Definition 1.3. 设S是一个集合，O是一些S的子集构成的集合.若O满足
1)$\varnothing \in O$且$S \in O$;
2)O中任意多个元素的并集仍是O的元素；
3)O中有限多个元素的交集仍是O的元素，
则称(S, O)是一个拓扑空间，O的元素称为开集.

在$\mathbb{R}^n$中，记半径为r的开球为

$$O(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\},$$

若命

$$O = \{O(x, r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\},$$

则$(\mathbb{R}^n, O)$成为一个拓扑空间.我们陆续为集合$\mathbb{R}^n$加上线性结构、度量结构、拓扑结构后，$\mathbb{R}^n$便称为Euclidean空间.

Remark. 这是Chern的表述.但笔者认为这样构造的$\mathbb{R}^n$上还没有内积结构，似乎并不能被称为“欧氏空间”.笔者认为Chern这样构造是想通过$\mathbb{R}^n$的拓扑结构与流形的拓扑结构对应.欧氏空间的一个比较通俗的定义是直接往线性结构上附加内积结构，不必有拓扑结构.

拓扑空间上还可以加入额外的Hausdorff性质，这种性质强调了拓扑空间是无限可分的.

Definition 1.4. 设(S, O)是一个拓扑空间，若对于任意两点$x, y \in S$，都存在邻域$O(x, a), O(y, b) \in O$，使得$O(x, a) \cap O(y, b) \neq \varnothing$，则称这个拓扑空间是Hausdorff空间.

然后便可以给出流形的定义了.

Definition 1.5. 设(M, O)是一个Hausdorff空间.若对于任意一点$x \in M$，都存在邻域$O(x, r) \in O$同胚于$\mathbb{R}^n$的一个开集，则称M是一个n维**拓扑流形**.

Remark. “同胚”指的是一个映射

$$\varphi_{O_i} : O_i \subset O \to U \subset \mathbb{R}^n, u \in O_i \mapsto x^\mu \in U, \tag{1.2}$$

形象的说，就是将弯曲空间的局部与欧氏空间等同起来，建立一个一一对应的映射关系.我们将(O_i, φ_{O_i})称为流形M的一个**坐标卡**(Chart).同胚是一种在拓扑上很强的映射关系，以至于我们可以直接将映射φ_{O_i}的定义域和值域视为等同，直接将任意一点u（这是流形M的元素）的坐标定义成它在同胚映射φ_{O_i}下的像（这是欧氏空间$\mathbb{R}^n$的元素）：

$$x \equiv \varphi_{O_i}(u), \tag{1.3}$$

我们将(O_i, x^μ)称为一个**局部坐标系**.

有了流形局部与欧氏空间的同胚关系，我们便可以在流形上逐点定义同胚映射，用可数个局部坐标系覆盖整个流形.由于流形上的每个邻域$O(x,r)$都是开集，为了让这些开集能将流形覆盖，则相邻开集的交集必不为空集（这里就用到了流形的Hausdorff性质），现在我们来看看这个交集上会发生什么.

假设(O_i,x)和(O_j,x')是流形上的两个局部坐标系，且$O_i\cap O_j\neq\varnothing$.由于同胚映射是一一的，这意味着它还是可逆的，于是在O_i和O_j的交叠区域$O_i\cap O_j$（这也是一个开集）中可定义一个复合的同胚映射$\varphi_{O_j}\circ\varphi_{O_i}^{-1}$，其中$\varphi_{O_i}^{-1}$是$\varphi_{O_i}$的逆，因此它是从$\mathbb{R}^n$的开子集到$O_i\cap O_j$的映射，而$\varphi_{O_j}$又是从$O_i\cap O_j$到$\mathbb{R}^n$的开子集的映射，所以复合映射$\varphi_{O_j}\circ\varphi_{O_i}^{-1}$是从$\mathbb{R}^n$的一个开集到另一个开集的映射：

$$\varphi_{O_j}\circ\varphi_{O_i}^{-1}:U_i\subset\mathbb{R}^n\to U_j\subset\mathbb{R}^n,(x^1,\cdots,x^n)\mapsto(x'^1,\cdots,x'^n). \tag{1.4}$$

注意到(1.4)相当于“输入x^μ，输出x'^1；$\cdots$；输入x^μ，输出x'^n”，于是上述复合映射实质上是n个函数构成的函数组：

$$x'^\mu=x'^\mu(x^\nu), \tag{1.5}$$

这个函数组就是我们常说的坐标变换函数组.同理，我们可以导出复合映射$\varphi_{O_i}\circ\varphi_{O_j}^{-1}$的坐标变换函数组：

$$\varphi_{O_i}\circ\varphi_{O_j}^{-1}:U_j\subset\mathbb{R}^n\to U_i\subset\mathbb{R}^n,(x'^1,\cdots,x'^n)\mapsto(x^1,\cdots,x^n); \tag{1.6}$$

$$x^\mu=x^\mu(x'^\nu). \tag{1.7}$$

上述两个同胚映射是互逆的，这是因为$\varphi_{O_j}\circ\varphi_{O_i}^{-1}\circ\varphi_{O_i}\circ\varphi_{O_j}^{-1}=id$.如果坐标变换$x'^\mu=x'^\mu(x^\nu)$和$x^\mu=x^\mu(x'^\nu)$有直到$r\in\mathbb{Z}^+$阶连续的偏导数，则称这两个坐标系是$C^r$相容的.如果坐标变换有任意阶连续的偏导数，则称这两个坐标系是C^∞相容的.

Remark. 需要注意的是，相容性条件对$O_i\cap O_j=\varnothing$或$O_i\cap O_j\neq\varnothing$均成立，这意味着(1.5)和(1.7)的定义域分别是U_i和U_j，值域分别是U_j和U_i，而不是U_i和U_j中互相同胚的那部分开子集.事实上(1.4)和(1.6)也展示了这一点.

下面我们给出**坐标卡册**(Atlas)的定义.

Definition 1.6. 设M是一个n维流形，$\mathcal{A}=\{(O_i,\varphi_{O_i})\}$是数个坐标卡的集合.若$\mathcal{A}$满足
1)$\{O_i\}$构成M的开覆盖，也即$\bigcup\limits_{i=1}^{k}O_i=M,k\in\mathbb{Z}^+,k<\infty$；
2)任意$(O_i,\varphi_{O_i}),(O_j,\varphi_{O_j})\in\mathcal{A}$都是$C^r$相容的；
3)$\mathcal{A}$是极大的，
则称$\mathcal{A}$是M的一个C^r微分结构（同一拓扑流形可以有不同的微分结构）.如果在M上给定了一个C^r微分结构，则称M是一个C^r**微分流形**.

1.1 直角坐标系

最典型的例子就是正交直角坐标系，或者说是Cartesian坐标系，如图1所示.在这种坐标系中，坐标线是直线，且彼此正交.通常，我们用(x,y,z)来表述直角坐标系中的点.

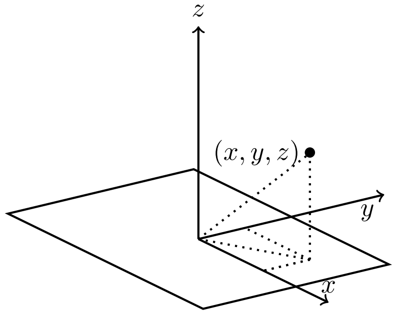

图 1. 直角坐标系

1.2 柱坐标系

柱坐标系如图2所示.通常，我们用(r,θ,z)来表述柱坐标系中的点，其中线参数$r\in[0,+\infty)$，$z\in\mathbb{R}$，角参数$\theta\in[0,2\pi)$，这些参数构成的坐标线彼此正交.将一个由柱坐标参数描述的点变换到由直角坐标参数描述的点总是容易的，我们有它的坐标变换映射

$$(r,\theta,z)\mapsto(x,y,z), \tag{1.8}$$

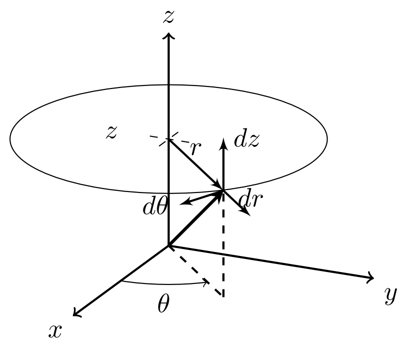

图 **2**. 柱坐标系

用坐标变换函数组表示就是

$$\begin{aligned} x(r,\theta,z)&=r\cos\theta;\\ y(r,\theta,z)&=r\sin\theta;\\ z(r,\theta,z)&=z. \end{aligned} \tag{1.9}$$

我们注意到1.9是光滑的，通过计算可知其Jacobi矩阵的行列式不为零，这意味着1.9还是可逆的.于是我们可以得到1.8的逆映射

$$(x,y,z)\mapsto(r,\theta,z), \tag{1.10}$$

用坐标变换函数组表示就是

$$\begin{aligned} r(x,y,z)&=\sqrt{x^2+y^2};\\ \theta(x,y,z)&=\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right);\\ z(x,y,z)&=z. \end{aligned} \tag{1.11}$$

1.3 球坐标系

球坐标系是除了直角坐标系以外最常用的坐标系，如图3所示.我们用(r,θ,φ)来描述球坐标系中的点，其中线参数$r\in[0,+\infty)$，角参数$\theta\in[0,\pi)$，$\varphi\in[0,2\pi)$，两个角参数通常隐含着系统的球对称性以及各向同性.与柱坐标系相同，球坐标系的Jacobi行列式也不为零，于是可以得到球坐标系到直角坐标系的坐标变换映射

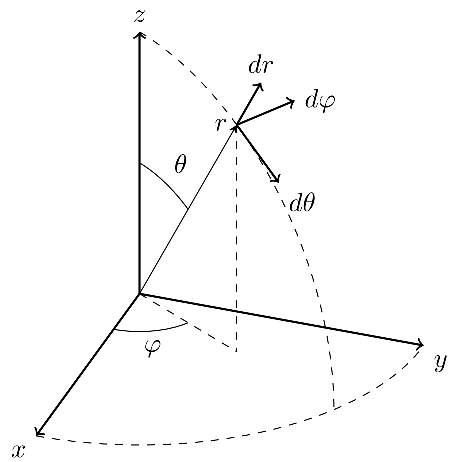

图 **3**. 球坐标系

$$(r,\theta,\varphi)\mapsto(x,y,z), \tag{1.12}$$

用坐标变换函数组表示就是

$$\begin{aligned} x(r,\theta,\varphi)&=r\sin\theta\cos\varphi;\\ y(r,\theta,\varphi)&=r\sin\theta\sin\varphi;\\ z(r,\theta,\varphi)&=r\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.13}$$

同样的有直角坐标系到球坐标系的逆变换

$$(r,\theta,\varphi)\mapsto(x,y,z), \tag{1.14}$$

用坐标变换函数组表示就是

$$
\begin{aligned}
r(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}; \\
\theta(x,y,z) &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right); \\
\varphi(x,y,z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

n维的超球坐标系由1个线参数$x'^1 \in [0,+\infty)$和$n-1$个角参数$x'^2,\cdots,x'^{n-2} \in [0,\pi)$，$x'^{n-1} \in [0,2\pi)$构成.超球坐标系到直角坐标系的坐标变换由如下映射给出

$$
\phi : R^n \to R^n; (x'^1,\cdots,x'^n) \mapsto (x^1,\cdots,x^n), \tag{1.16}
$$

用坐标变换函数组表示就是

$$
\begin{aligned}
x^1(x'^1,\cdots,x'^n) &= x'^1 \cos x'^2; \\
x^2(x'^1,\cdots,x'^n) &= x'^1 \sin x'^2 \cos x'^3; \\
x^3(x'^1,\cdots,x'^n) &= x'^1 \sin x'^2 \sin x'^3 \cos x'^4; \\
&\cdots \\
x^{n-1}(x'^1,\cdots,x'^n) &= x'^1 \sin x'^2 \cdots \sin x'^{n-2} \cos x'^{n-1}; \\
x^n(x'^1,\cdots,x'^n) &= x'^1 \sin x'^2 \cdots \sin x'^{n-2} \sin x'^{n-1}.
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

如果我们令$n=3$，并进行参数变换$x^1=z$，$x^2=x$，$x^3=y$，以及$x'^1=r$，$x'^2=\theta$，$x'^3=\varphi$，则(1.17)就回到了(1.13)的情况.

References

[1] 陈省身，陈维桓.微分几何讲义[M].第二版.北京：北京大学出版社，2001

[2] 陈维桓.微分流形初步[M].第二版.北京：高等教育出版社，2002