家用理论物理教程

Courses of Theoretical Physics

Shunz Dai[1]

Physics and Space Science College, China West Normal University

E-mail: 196883@outlook.com

[1] *My personal blog*

目录

微分几何

PART

I

Section 1. 局部坐标系

内地的物理学工作者喜好在网络社区上整理自己的笔记.这些笔记虽然名义上被称作“笔记”，但实质上都只是抄书罢了.笔者不喜好抄书，也不喜好做笔记，但对于本章节的内容，笔者仍将大量参考Chern的讲义[1]，并斗胆将这本书的所述内容改写成通俗的、适于家用的语言.当然，这样做会损失一些数学上的严谨，但笔者认为这无伤大雅.

1 局部坐标系

微分几何的研究对象是一个称为**流形**(Manifold)的集合，其上拥有线性结构与自然的拓扑结构.为了引出流形，我们先回顾一下线性空间、度量空间以及拓扑空间的公理化构造，然后逐步往集合上添加这些结构.

Definition 1.1. 域F上的线性空间V是这样一个集合，对任意$\alpha,\beta,\gamma\in V$；$a,b\in F$有
矢量加法映射$V\times V\to V$：
1)（交换律）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；
2)（结合律）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；
3)（零元）存在唯一的$0\in V$，使得$0+\alpha=\alpha$；
4)（逆元）对任意$\alpha\in V$，存在唯一的$\beta\in V$，使得$\alpha+\beta=0$.
矢量数乘映射$F\times V\to V$：
5)（酉性）对$1\in F$，有$1\alpha=\alpha$；
6)（结合律）$a(b\alpha)=(ab)\alpha$；
7)（分配律1）$(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$；
8)（分配律2）$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta$.

我们用$\mathbb{R}$表示实数域，记$\mathbb{R}^n$表示全体n元有序实数组构成的集合.任意$x\in\mathbb{R}^n$的第i个坐标均可用实数x^i表示，其中$i=1,\cdots,n$，称为**抽象指标**.

Remark. 需要注意的是，坐标x^i的上指标的标记方法是习惯上的约定，不可随意变更为下指标.我们会在稍晚些时候看出，这是非常有效的的符号表征方法.

$\mathbb{R}^n$除了上述的线性构造，还具有自然的度量结构.

Definition 1.2. S是一个集合，若存在一个映射$d:S\times S\to\mathbb{R}$，使得对于任意$x,y\in S$都满足：
1)（正定性）$d(x,y)\geqslant 0$，且$d(x,y)=0$当且仅当$x=y$时成立；
2)（对称性）$d(x,y)=d(y,x)$；
3)（三角不等式）$d(x,z)+d(z,y)\geqslant d(x,y)$，
则称(S,d)是一个度量空间，映射d称为S上的度量.

对任意$x,y\in\mathbb{R}^n$，命

$$d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to R,(x,y)\mapsto d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2},\tag{1.1}$$

容易验证映射(1.1)满足度量的定义，于是$(\mathbb{R}^n, d)$是一个度量空间.

> **Remark.** 需要注意的是，此时我们仅引入了度量结构（而不是内积结构），所以此时只有“距离”的概念，尚且没有“角度”的概念.

可以发现，$\mathbb{R}^n$还拥有自然的拓扑结构.

> **Definition 1.3.** 设S是一个集合，O是一些S的子集构成的集合.若O满足：
> 1)$\varnothing \in O$且$S \in O$；
> 2)O中任意多个元素的并集仍是O的元素；
> 3)O中有限多个元素的交集仍是O的元素，
> 则称(S, O)是一个拓扑空间，O的元素称为开集.

在$\mathbb{R}^n$中，记半径为r的开球为

$$O(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\},$$

若命

$$O = \{O(x, r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\},$$

则$(\mathbb{R}^n, O)$成为一个拓扑空间.我们陆续为集合$\mathbb{R}^n$加上线性结构、度量结构、拓扑结构后，$\mathbb{R}^n$便称为Euclidean空间.

> **Remark.** 这是Chern的表述.但笔者认为这样构造的$\mathbb{R}^n$上还没有内积结构，似乎并不能被称为“欧氏空间”.笔者认为Chern这样构造是想通过$\mathbb{R}^n$的拓扑结构与流形的拓扑结构对应.欧氏空间的一个比较通俗的定义是直接往线性结构上附加内积结构，不必有拓扑结构.

拓扑空间上还可以加入额外的Hausdorff性质，这种性质强调了拓扑空间是无限可分的.

> **Definition 1.4.** 设(S, O)是一个拓扑空间，若对于任意两点$x, y \in S$，都存在邻域$O(x, a), O(y, b) \in O$，使得$O(x, a) \cap O(y, b) = \varnothing$，则称这个拓扑空间是Hausdorff空间.

然后便可以给出流形的定义了.

> **Definition 1.5.** 设(M, O)是一个Hausdorff空间.若对于任意一点$x \in M$，都存在邻域$O(x, r) \in O$同胚于$\mathbb{R}^n$的一个开集，则称M是一个n维**拓扑流形**.

> **Remark.** “同胚”指的是一个映射$\phi_{O(x,r)} : O(x, r) \to U \subset \mathbb{R}^n$，形象的说，就是将弯曲空间的局部与欧氏空间等同起来，建立一个一一对应的映射关系.我们将$(O(x, r), \phi_{O(x,r)})$称为流形M的一个**坐标卡**.

References

[1] 陈省身，陈维桓.微分几何讲义[M].第二版.北京：北京大学出版社，2001