家用理论物理教程

从入门到转行

Shunz Dai[1]

Physics and Space Science College, China West Normal University

E-mail: 196883@outlook.com

DRAFT

[1] *My Personal Blog*

目录

PART

I

引言

我从2019年9月就开始写这份笔记了，但写到今天也只有寥寥数页。原本的笔记也有这样一个引言部分，主要讲述了我整个大学四年的艰难历程，但现在看来，那些文字只不过是自己感动自己罢了[1]现在，我重写了这份引言，用尽量简短的语言来阐述这份笔记做了些什么工作。

这份笔记受微分几何的影响颇深，而微分几何是我大学四年以来尤其喜爱的数学工具。相比于线性代数，微分几何为代数问题赋予了几何的看法，这使得我们能够从不同方向去看同一事物，像盲人摸象一般拼凑出研究对象的各种性质；相比于微积分（当然，我指的是高等数学中的微积分，而不是数学分析中的微积分），微分几何更注重“基本结构”，它没有繁多的运算技巧，不必将问题拘谨在冗长的计算中。事实上，理论物理与微分几何的关系可以说是“殊途同归”，它们都用到了公理化（或者说是“第一性原理”）的方法。在研究这种问题时，我们总可以从几条基本公理（或基本假设）出发，逐步推理出宏伟的结构。

我时常向朋友举例说明普通物理与理论物理的差异，这一差异正如这两个问题间的差异：第一个问题是“305497855加406804039等于多少”，第二个问题是“1加2为什么等于2加1”。对于第一个问题，我认为稍稍用点心便能计算出结果，是只有难度没有深度的问题；而对于第二个问题，我的朋友往往不能理解，他们通常会笑着问我：“这是什么问题，那你说为什么1加2等于2加1？”，这时候我就会回答：“因为加法满足交换律”。我们在小学数学课上就已经学过“交换律”“结合律”“分配律”之类的东西，当我们在大学听到“1加2为什么等于2加1”这种问题时，按理说我们应当立即给出答案才对，但事实是我们往往答不出来。其原因就是我们从小到大受过的数学训练的目的就不是为了记住这些基本结构，而是为了将数学作为一种“工具”进行应用。所以，我认为第二个问题是既有难度也有深度的问题，真要把这“第一性原理”弄清楚，还不是一个简单的事。

在繁琐冗长的计算训练中，我们逐步忘却了那些基本结构的作用。当然，这些论断不意味着我们在学习理论物理时不需要任何实际计算、应用，只是说，我们在学习理论物理时更应该将注意力放在基本结构上，而简单的计算能够加深理解，这就已经足够了，我们不必将精力放在如同上述第一个问题的复杂计算上。

这份笔记中，我们将通篇使用Einstein求和约定，并始终保持上下指标的差异，这种差异原则上与度量张量升降指标无关，是一种源自事物本身的“对偶”属性。至于“为什么物理量甲是上指标，物理量乙是下指标”这样的问题，我给出这样的解释：一是你首先要约定一个称为“上指标”的东西，然后才能找到与“上”对立的那个“下”；二是为了在引入度量张量后，各个物理量的指标位置关系仍然成立。这个解释很抽象，仿佛是“只可意会不可言传”。事实上也确实是这样，我们应当在学习中不断思考“对偶”的意义，多加计算方能修成正果。

[1] 我仍然保留了那些文字，放在附录中：9.

微分几何

PART

II

1 微分流形

2 张量场与微分形式场

3 联络与曲率

对于任意标量场$\phi \in \Gamma(T_{(0,0)}M)$，其外微分$d\phi$仍是是一个张量场

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\nu} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\nu} \in \Gamma(T_{(0,1)}M), \tag{3.1}$$

这意味着$d\phi$仍是张量丛截面的元素，用学物理家的话来说也就是$d\phi$仍然满足张量的变换规律.

一个自然的问题是，对于切矢量场或余切矢量场，其外微分是否仍然是张量丛截面的元素？但问题就出在这，外微分算子是一个定义在外形式丛截面上的线性算子，切矢量场不是外形式丛截面中的元素，因此我们无法对一个切矢量场求外微分；余切矢量场作为1微分形式场，虽然它是外形式丛截面的元素，但它只是一种全反对称的张量场，我们无法对一个一般的非全反对称张量场求外微分.这些困难意味着我们需要推广外微分算子，寻找一个定义在一般张量丛截面$\Gamma(T_{(p,q)}M)$上的线性微分算子，让我们能对那些不在外形式丛截面中的张量场进行“微分”运算.这样构造的线性微分算子就是**仿射联络**.

Remark. 余切矢量场$\omega \in \Gamma(T_{(0,1)}M)$在局部坐标系改变时满足

$$\omega = \omega_{\mu} dx^{\mu} = \omega_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\nu} = \omega'_{\nu} dx'^{\nu}, \tag{3.2}$$

我们对(3.2)求全微分得到

$$\begin{aligned} d\omega &= d\omega'_{\nu} \wedge dx'^{\nu} \\ &= d\left(\omega_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right) \wedge dx'^{\nu} \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} d\omega_{\mu} \wedge dx'^{\nu} + \omega_{\mu} d\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right) \wedge dx'^{\nu} \\ &= \left(\frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} + \omega_{\mu} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\nu}}\right) dx'^{\rho} \wedge dx'^{\nu} \\ &= \frac{\partial \omega'_{\nu}}{\partial x'^{\rho}} dx'^{\rho} \wedge dx'^{\nu}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

注意到3.3中产生了一个二阶偏微分项，与张量的变换规律对比可知，这一项破坏了

张量的变换规律.但外微分形式场的全反对称特性可以消除掉这一项带来的影响，即

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\omega'_\nu}{\partial x'^\rho}dx'^\rho\wedge dx'^\nu &= 2\partial'_{[\rho}\omega'_{\nu]}dx'^\rho\otimes dx'^\nu \\
&= 2\left(\partial_{[\sigma}\omega_{\mu]}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}+\omega_\mu\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^{[\rho}\partial x'^{\nu]}}\right)dx'^\rho\otimes dx'^\nu \\
&= 2\partial_{[\sigma}\omega_{\mu]}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}dx'^\rho\otimes dx'^\nu,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

所以$d\omega$实际上仍是张量场.但微分形式场说到底只是一种特殊的全反对称张量场,对于一般的张量场，我们无法通过张量场自身的对称性消除上述二阶偏微分项.

现代微分几何中的联络指的是一般矢量丛上的联络.这一节我们先讨论切丛$T_{(1,0)}(M)$上的联络（称为**仿射联络**），然后逐步构造出张量丛$T_{(p,q)}(M)$上的联络.下面，我们直接给出仿射联络的定义.

Definition 3.1. 仿射联络是一个映射

$$D:\Gamma(T_{(1,0)}M)\to\Gamma(T_{(1,1)}M),$$

它满足下列条件：

1. 对任意的$A,B\in\Gamma(T_{(1,0)}M)$有 D(A+B)=D(A)+D(B);
2. 对任意的$A\in\Gamma(T_{(1,0)}M),\alpha\in\Gamma(T_{(0,0)}M)$有$D(\alpha A)=d\alpha\otimes A+\alpha D(A)$.

局部上，联络由一组1微分形式给出.我们先来看自然标架场$\{\partial_\mu\}$的联络，命

$$D(\partial_\mu)=\omega^\rho_\mu\otimes\partial_\rho=\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}dx^\nu\otimes\partial_\rho, \tag{3.5}$$

其中$\omega^\rho_\mu=\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}dx^\nu$，$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$称为**联络系数**，它是局部坐标系中的光滑函数.将ω^ρ_μ作为矩阵ω第ρ行第μ列的元素，这样构造的矩阵ω称为**联络方阵**.可见，任意两个联络间的差异完全体现在联络方阵上.现在，我们来看联络的变换规律.在标架变换下，由联络的定义立即得到

$$
\begin{aligned}
D(\partial'_\nu) &= D\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\partial_\mu\right) \\
&= d\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)\otimes\partial_\mu+\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}D\left(\partial_\mu\right) \\
&= \left[d\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\right)+\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega^\rho_\mu\right]\otimes\partial_\rho \\
&= \left[d\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\right)\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho}+\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega^\rho_\mu\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho}\right]\otimes\partial'_\sigma \\
&= \omega'^\sigma_\nu\otimes\partial'_\sigma,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

其中

$$\omega'^\sigma_\nu=d\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\right)\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho}+\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega^\rho_\mu\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho}, \tag{3.7}$$

这就是联络方阵在局部标架场改变时的变换公式.我们还可以进一步展开(3.7)，得到

$$\Gamma'^\sigma{}_{\nu\lambda}=\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\lambda\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho}+\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho}, \tag{3.8}$$

这正是通常意义下的联络变换公式.可见联络系数$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$并不是一个张量，但引入它能使$D(\partial_\mu)$遵循张量的变换规律.

稍作思考可以发现，若使用全反对称化的技巧，我们也能利用联络系数构造出一个张量.我们将在稍后给出具体讨论.

切丛截面的联络在余切丛截面上诱导出一个联络（仍记为D），易看出它是从$\Gamma(T_{(0,1)}M)$到$\Gamma(T_{(0,2)}M)$的映射. 现在现在我们来考察$\{\partial_\mu\}$的对偶标架$\{dx^\mu\}$的联络.$D(dx^\mu)$由下式确定

$$d\left(\partial_\mu, dx^\nu\right) = \left(D(\partial_\mu), dx^\nu\right) + \left(\partial_\mu, D(dx^\nu)\right),$$

我们设

$$D(dx^\nu) = {\omega^*}^\nu{}_\rho \otimes dx^\rho,$$

于是

$$\left(\partial_\mu, D(dx^\nu)\right) = \left(\partial_\mu, {\omega^*}^\nu{}_\rho \otimes dx^\rho\right) = {\omega^*}^\nu{}_\rho \delta^\rho_\mu = {\omega^*}^\nu{}_\mu.$$

考虑到对偶标架满足

$$(\partial_\mu, dx^\nu) = \delta^\nu_\mu,$$

于是得到

$$\begin{aligned} {\omega^*}^\nu{}_\mu &= \left(\partial_\mu, D(dx^\nu)\right) = -\left(D(\partial_\mu), dx^\nu\right) &(3.9)\\ &= -\left(\omega^\rho_\mu \otimes \partial_\rho, dx^\nu\right) = -\omega^\rho_\mu \delta^\nu_\rho = -\omega^\nu_\mu, &(3.10)\end{aligned}$$

即 $D(dx^\nu) = -\omega^\nu_\rho \otimes dx^\rho$. 至此，我们就能计算任意$A \in T_{(1,0)}(M)$与$B \in T_{(0,1)}(M)$的联络了.在局部坐标系下，我们有：

$$\begin{aligned} D(A) &= D(A^\mu \partial_\mu)\\ &= dA^\mu \otimes \partial_\mu + A^\mu D(\partial_\mu)\\ &= (\partial_\rho A^\mu + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}) dx^\rho \otimes \partial_\mu\\ &= \nabla_\rho A^\mu dx^\rho \otimes \partial_\mu; \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} D(B) &= D(B_\mu dx^\mu)\\ &= dB_\mu \otimes dx^\mu + B_\mu D(dx^\mu)\\ &= (\partial_\rho B_\mu - B_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}) dx^\rho \otimes dx^\mu\\ &= \nabla_\rho B_\mu dx^\rho \otimes dx^\mu, \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中

$$\begin{aligned} \nabla_\rho A^\mu &= \partial_\rho A^\mu + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}; &(3.13)\\ \nabla_\rho B_\mu &= \partial_\rho B_\mu - B_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}. &(3.14)\end{aligned}$$

这正是通常意义下的**协变导数**运算.由此可见，协变导数是一种依赖于局部坐标系的分量表述.用类似的方法，我们能得到$T_{(p,q)}(M)$上的诱导联络.

Definition 3.2. 在一般张量丛$T_{(p,q)}M$上，由仿射联络诱导的联络是一个映射

$$D : \Gamma(T_{(p,q)}M) \to \Gamma(T_{(p,q+1)}M),$$

设任意$S \in \Gamma(T_{(p,q)}M)$，则S的联络在局部坐标系下满足

$$\begin{aligned} D(S) &= D(S^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q}\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_p}\otimes dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_q}) \\ &= \nabla_\rho S^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} dx^\rho\otimes\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_p}\otimes dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_q}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中

$$\begin{aligned} \nabla_\rho S^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} = {}& \partial_\rho S^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} \\ &+ S^{\sigma\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q}\Gamma^{\mu_1}{}_{\sigma\rho}+\cdots+S^{\mu_1\cdots\sigma}{}_{\nu_1\ldots\nu_q}\Gamma^{\mu_p}{}_{\sigma\rho} \\ &- S^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\sigma\ldots\nu_q}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu_1\rho}-\cdots-S^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu_q\rho}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

PART III

分析力学

4 Lagrange力学

在Newton力学体系中，我们用Newton方程研究力学系统的演化.所谓“Newton方程”指的是Newton第二定律

$$\vec{F}=m\vec{a}=\frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{4.1}$$

我们可以像下面这样修改(4.1)得到一个有意思的表述形式.我们假设系统所受的合外力是一个保守力，即对于任意一个有界闭区域S，$\vec{F}$满足

$$\int_{\partial S}F_\mu dx^\mu=0, \tag{4.2}$$

其中F_μ是$\vec{F}$在坐标系下的分量.对于任意保守力，我们可以引入一个标量场$V(x)$，使得$F_\mu=-\partial_\mu V(x)$.通过分析量纲可知，标量场$V(x)$应具有能量的量纲，我们将这个标量场称为**势场**.

Remark. 对(4.2)用一下Stokes定理可以得到

$$0=\int_{\partial S}F_\mu dx^\mu=\int_S\partial_\nu F_\mu dx^\nu\wedge dx^\mu=-\int_S\partial_\nu\partial_\mu V(x)dx^\nu\wedge dx^\mu,$$

可见引入标量场$V(x)$并不改变保守力$\vec{F}$的性质.

于是，借助标量场$V(x)$我们可以将(4.1)改写为

$$-\partial_\mu V(x)-\frac{dp_\mu}{dt}=0. \tag{4.3}$$

至此，我们的准备工作就差不多了.但你可能认为，将Newton方程从(4.1)变到(4.3)好像并没有什么，怎么就“有意思”了？确实是这样，但我们要知道这只是一个开始，我们将在后面看到(4.3)蕴含的优越性.

4.1 最小作用量原理

我们总是看到如“水自发的往低处流”，“光线的传播路径总是用时最少的路径”，或者“各种原子的核外电子排布总使得原子总能量最低”等观测现象.这种现象与数学中的“极值”概念相似，于是我们给出这样一个第一性原理，称为**最小作用量原理**.

Definition 4.1. 客体的作用量取极值时，总能导出客体所满足的运动方程.

这个定义云里雾里，什么是作用量？为什么作用量要取极值？我们给出这样的解释.

作用量是这样一个无量纲的泛函

$$S=\int ds, \tag{4.4}$$

其中ds是某个微分式[2].我们可以根据不同的情况分别考虑(4.4)的具体形式.令

$$S(x^\mu(t);\dot{x}^\mu(t)) = \int ds = \frac{1}{\alpha}\int L(x^\mu(t);\dot{x}^\mu(t))dt, \tag{4.5}$$

其中α是一个比例系数，$L(x^\mu(t);\dot{x}^\mu(t))$是一个函数，$t$是一个参数，这就是一般情形下的作用量.我们可以为式中的比例系数、函数以及参数赋予物理意义，使其拥有表征物理量的量纲，这样我们就可以使作用量描述物理系统了.例如，当我们设比例系数α具有长度的量纲，将函数L解释为折射率$L=n(x)$，并将参数t诠释为光走的几何路程$t=l$，此时(4.5)就变成了

$$S = \int ds = \frac{1}{\alpha}\int n(x)dl,$$

这样构造的作用量描述的就是光程.等等.

于是我们就解释了什么是作用量.现在，我们回答第二个问题，为什么作用量要取极值？很遗憾的是，我无法回答这个问题.最小作用量原理是一个第一性原理，它无法被证伪.但我们知道，物理学是一门以实验为基础的学科.我们用最小作用量原理可以导出各种系统的运动方程，而这些运动方程预言的物理现象经受住了大量实验的考验.凭借“证有不证无”的观念，如果要证明最小作用量原理是错的，就要求我们拿出一个不满足最小作用量原理预言的实验证据，我们可以拿这一实验证据去证明最小作用量原理的错误，但在此之前，我们将全盘接受这一原理.

我们求作用量的极值时要使用**变分**.变分的运算规则几乎与微分完全一致，差异仅在作用对象上：前者作用在泛函上，后者作用在普通函数上.现在我们举一个利用最小作用量原理解决实际问题的例子，顺便看看变分是怎样运算的.

Example. （最速降线问题）求质点的轨迹方程，使得在同一平面上，质点由A点至B点用时最短.

由题可知，我们应该寻找作用量

$$S = \frac{1}{\alpha}\int_A^B dt$$

的极值，其中t表示时间，比例系数α具有时间的量纲.我们设质点轨迹方程为隐函数

$$f(x(t),y(t)) = 0,$$

其中x表示质点在水平方向上的坐标，y表示质点在竖直方向上的坐标.在一个无穷小的时间间隔dt内，质点将会移动

$$dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{(dx)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(dx)^2} = \sqrt{1+y'^2}dx,$$

其中$y'\equiv dy/dx$.考虑到机械能守恒

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = mgy,$$

[2] ds本质上是一个微分形式场，即流形外形式丛的截面.我们这里只讨论ds是1微分形式场的情况，即普通的微分式.

于是我们得到质点的瞬时速度满足

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{2gy} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{dt}dx,$$

即

$$dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx.$$

于是我们以x为参数，以y, y'为泛函变量构造作用量

$$S(y(x); y'(x)) = \frac{1}{\alpha}\int_A^B dt = \frac{1}{\alpha}\int_A^B \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx.$$

现在我们计算$S(y(x); y'(x))$的变分,为了与微分运算d区分，我们将变分运算记为δ，则

$$\delta S(y(x); y'(x)) = \frac{1}{\alpha}\int_A^B \delta\left(\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right)dx,$$

其中

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right) &= \frac{\delta}{\delta y}\left(\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right)\delta y + \frac{\delta}{\delta y'}\left(\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right)\delta y' \\ &= -\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\delta y + \frac{y'}{2gy}\left(\frac{1+y'^2}{2gy}\right)^{-\frac{1}{2}}\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ &= -\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\delta y + \frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{2gy}\left(\frac{1+y'^2}{2gy}\right)^{-\frac{1}{2}}\delta y\right] - \frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{2gy}\left(\frac{1+y'^2}{2gy}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\delta y\end{aligned}$$

5 Hamilton力学

Lagrange力学描述的是位形流形上的力学规律，是比Newton力学更深刻的分析工具.然而，Lagrange力学也有不足：Euler-Lagrange方程是一个二阶方程，它在大多数情况下不易求解.如果能想办法让描述力学系统的方程的阶数降下来，则在求解运动规律时就方便多了.Hamilton力学由此而生.Hamilton力学是辛流形上的力学规律，其参数为广义坐标x^μ以及广义动量p_μ.Lagrange力学中有Lagrange函数$L(x^\mu; \dot{x}^\mu)$，对应的，Hamilton力学中也有Hamilton函数，我们将其表示为$H(x^\mu; p_\mu)$.由Hamilton函数逐步搭建的力学体系能提供丰富的信息，事实上，由Heisenberg建立的矩阵力学就来源于经典Hamilton力学的量子化.

5.1 Hamilton方程

对Lagrange函数$L(x^\mu; \dot{x}^\mu)$变分，得到

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\delta\dot{x}^\mu, \tag{5.1}$$

Lagrange函数具有能量的量纲，于是Lagrange函数对广义速度的偏导数具有动量的量纲.不妨将这个具有动量量纲的量称为“广义动量”.

Definition 5.1. 广义动量p_μ定义为

$$p_\mu := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}. \tag{5.2}$$

于是(5.1)可以改写成

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + p_\mu \delta \dot{x}^\mu; \tag{5.3}$$

再根据Euler-Lagrange方程得到

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \dot{p}_\mu,$$

所以(5.3)变成

$$\delta L = \dot{p}_\mu \delta x^\mu + p_\mu \delta \dot{x}^\mu. \tag{5.4}$$

为了得到某个以p_μ为变量的变分，我们对(5.4)进行Legendre变换得到

$$\delta L = \dot{p}_\mu \delta x^\mu + \delta(p_\mu \dot{x}^\mu) - \dot{x}^\mu \delta p_\mu,$$

移项得到

$$\delta(p_\mu \dot{x}^\mu - L) = -\dot{p}_\mu \delta x^\mu + \dot{x}^\mu \delta p_\mu. \tag{5.5}$$

所以,若

Definition 5.2. 定义Hamilton函数为

$$H := p_\mu \dot{x}^\mu - L, \tag{5.6}$$

则H就是以x^μ和p_μ为变量的函数.于是我们可以建立如下原理

Theorem 5.1. Hamilton方程组是指如下两个方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x^\mu} &= -\dot{p}_\mu; \\ \frac{\partial H}{\partial p_\mu} &= \dot{x}^\mu. \end{aligned} \tag{5.7}$$

可见，Hamilton力学研究的是1阶方程，但方程的数量比Lagrange力学增加了一倍.

5.2 Poisson括号

设任意力学量A是x^μ与p_μ的函数$A(x^\mu(t);p_\mu(t))$，我们来研究A随时间变化的规律.由于

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_\mu}\frac{dp_\mu}{dt}, \tag{5.8}$$

考虑到Hamilton方程(5.7)，带入(5.8)得到

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{\partial H}{\partial p_\mu} - \frac{\partial A}{\partial p_\mu}\frac{\partial H}{\partial x^\mu}. \tag{5.9}$$

(5.9)存在着一种反对称性，我们可以用一个双线性映射表示之.

Definition 5.3. 以x^μ与p_μ为变量的力学量X与Y的Poisson括号为

$$\{X,Y\} := \frac{\partial X}{\partial x^\mu}\frac{\partial Y}{\partial p_\mu} - \frac{\partial X}{\partial p_\mu}\frac{\partial Y}{\partial x^\mu}. \tag{5.10}$$

Remark. Poisson括号满足

1. 反对称性：$\{X,Y\} = -\{Y,X\}$;
2. Jacobi恒等式：$\{\{X,Y\},Z\} + \{\{Z,X\}Y\} + \{\{Y,Z\},X\} = 0.$

事实上Poisson括号构成一个**Lie代数**，我们将在**??**中进一步论述Lie代数的性质.

(5.9)可用Poisson括号表示为

$$\frac{dA}{dt} = \{A,H\}. \tag{5.11}$$

Hamilton方程也可以修改成Poisson括号的形式

$$\begin{aligned} \{p_\mu, H\} &= \dot{p}_\mu; \\ \{x^\mu, H\} &= \dot{x}^\mu, \end{aligned} \tag{5.12}$$

而x^μ与x^ν、p_μ与p_ν、x^μ与p_ν的Poisson括号分别为

$$\{x^\mu, x^\nu\} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial p_\rho} - \frac{\partial x^\mu}{\partial p_\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} = 0; \tag{5.13}$$

$$\{p_\mu, p_\nu\} = \frac{\partial p_\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial p_\nu}{\partial p_\rho} - \frac{\partial p_\mu}{\partial p_\rho}\frac{\partial p_\nu}{\partial x^\rho} = 0; \tag{5.14}$$

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial p_\nu}{\partial p_\rho} - \frac{\partial x^\mu}{\partial p_\rho}\frac{\partial p_\nu}{\partial x^\rho} = \delta^\mu_\rho \delta^\rho_\nu = \delta^\mu_\nu. \tag{5.15}$$

作为广义动量的特例，我们来看看角动量的Poisson括号. 角动量即$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$，其分量满足

$$L^\rho = \varepsilon^{\rho\mu\nu} x_\mu p_\nu; L_\rho = \varepsilon_{\rho\mu\nu} x^\mu p^\nu.$$

其中$x_\mu \equiv \delta_{\mu\sigma} x^\sigma$，$p^\nu \equiv \delta^{\nu\sigma} p_\sigma$.于是角动量的Poisson括号为

$$\begin{aligned} \{L_\mu, L^\nu\} &= \frac{\partial L_\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial L^\nu}{\partial p_\rho} - \frac{\partial L_\mu}{\partial p_\rho}\frac{\partial L^\nu}{\partial x^\rho} \\ &= \varepsilon_{\mu\rho\sigma}\varepsilon^{\nu\lambda\rho} p^\sigma x_\lambda - \varepsilon_{\mu\lambda\rho}\varepsilon^{\nu\rho\sigma} x^\lambda p_\sigma \\ &= -\delta^\nu_\mu p^\sigma x_\sigma + p^\nu x_\mu + \delta^\nu_\mu x^\sigma p_\sigma - x^\nu p_\mu \\ &= \delta^\nu_\mu \left(x^\sigma p_\sigma - p^\sigma x_\sigma\right) + p^\nu x_\mu - x^\nu p_\mu \\ &= p^\nu x_\mu - x^\nu p_\mu, \end{aligned}$$

即$\{L_\mu, L_\nu\} = p_\nu x_\mu - x_\nu p_\mu$.注意到

$$p_\nu x_\mu - x_\nu p_\mu = \left(\delta^\beta_\nu \delta^\alpha_\mu - \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu\right) x_\alpha p_\beta = \varepsilon_{\sigma\mu\nu}\varepsilon^{\sigma\alpha\beta} x_\alpha p_\beta = \varepsilon_{\sigma\mu\nu} L^\sigma,$$

于是得到

$$\{L_\mu, L_\nu\} = \varepsilon_{\sigma\mu\nu} L^\sigma. \tag{5.16}$$

我们还可以证明：

Exercise. 定义角动量的平方为$L^2 \equiv L_\mu L^\mu$，则L^2与角动量的Poisson括号为

$$\{L^2, L_\mu\} = 0. \tag{5.17}$$

回到力学量A随时间变化的规律问题上，我们得到如下引理.

Lemma 5.2. 若力学量$A(x^\mu; p_\mu)$与Hamiltonian的Poisson括号为零，即

$$\{A, H\} = 0, \tag{5.18}$$

则物理量A是一个**守恒荷**.

我们举一个例子.

Example. 求自由粒子的守恒荷.
设局部坐标下某自由粒子的Lagrangian为

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

则广义动量

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\rho} \dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\rho} \right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\delta^\mu_\rho \dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu \delta^\nu_\rho \right) = g_{\rho\mu} \dot{x}^\mu.$$

因此$\dot{x}^\mu \equiv g^{\mu\nu} p_\nu$，于是Hamiltonian为

$$H = p_\mu \dot{x}^\mu - L = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu,$$

用Poisson括号可得

$$\begin{aligned} \{p_\mu, H\} &= 0; \\ \{H, H\} &= 0. \end{aligned}$$

所以此时广义动量和Hamiltonian守恒.

5.3 Noether定理

Theorem 5.3. 设ϵ是一个无穷小量.若无穷小坐标变换$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon f^\mu(x)$保持Hamiltonian不变，则$Q \equiv p_\mu f^\mu(x)$是一个守恒荷.

Proof. 要证Q是守恒荷，即证$\dot{Q}$为零:

$$\begin{aligned} \dot{Q} \equiv \frac{dQ}{dt} &= \{Q, H\} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x^\rho} \frac{\partial H}{\partial p_\rho} - \frac{\partial H}{\partial x^\rho} \frac{\partial Q}{\partial p_\rho} \\ &= p_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial H}{\partial p_\rho} - f^\rho \frac{\partial H}{\partial x^\rho}. \end{aligned}$$

下面来计算Hamiltonian的变分.由于坐标变换保持Hamiltonian不变，则有$\delta H = 0$，

于是

$$0 = \delta H = \frac{\partial H}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\delta p_\mu, \tag{5.19}$$

其中δx^μ可直接由坐标变换得到：

$$\begin{aligned} x^\mu \to x'^\mu &= x^\mu + \epsilon f^\mu(x) \\ \Rightarrow \delta x^\mu &= \epsilon f^\mu(x); \end{aligned} \tag{5.20}$$

δp_μ要从广义动量的定义出发得到：

$$\begin{aligned} & p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \\ \Rightarrow \quad & p'_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'^\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu}\frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}'^\mu} = p_\nu \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}'^\mu}\text{fi} \end{aligned}$$

由坐标变换可推得

$$\begin{aligned} & x'^\mu = x^\mu + \epsilon f^\mu(x) \\ \Rightarrow \quad & \dot{x}'^\mu = \dot{x}^\mu + \epsilon \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\rho}\dot{x}^\rho \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial \dot{x}'^\mu}{\partial \dot{x}^\nu} = \delta^\mu_\nu + \epsilon \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\rho}\delta^\rho_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}'^\mu} = \delta^\nu_\mu - \epsilon \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu}, \end{aligned}$$

其中最后一步可用反证法证明

$$\frac{\partial \dot{x}'^\mu}{\partial \dot{x}^\nu}\frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}'^\rho} = \left(\delta^\mu_\nu + \epsilon \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}\right)\left(\delta^\nu_\mu - \epsilon \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu}\right) = \delta^\mu_\rho + O(\epsilon^2),$$

省略高阶无穷小只剩单位矩阵，说明左侧两个矩阵确实是互逆的.但我们尚未证明逆矩阵的唯一性，为此，我们假设

$$\frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}'^\mu} = \delta^\nu_\mu + \epsilon h^\nu_\mu,$$

其中h^ν_μ是以坐标为变量的函数.于是

$$\begin{aligned} \delta^\mu_\rho &= \frac{\partial \dot{x}'^\mu}{\partial \dot{x}^\nu}\frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}'^\rho} \\ &= \left(\delta^\mu_\nu + \epsilon \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}\right)\left(\delta^\nu_\rho + \epsilon h^\nu_\rho\right) \\ &= \delta^\mu_\rho + \epsilon\left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\rho} + h^\mu_\rho\right) + O(\epsilon^2) \\ &\Rightarrow \epsilon\left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\rho} + h^\mu_\rho\right) = 0, \end{aligned}$$

要使上式对于任意无穷小量ϵ都成立，唯有

$$h^\mu_\rho = -\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\rho},$$

这样就证明了解的唯一性.所以

$$\begin{aligned} p'_\mu &= p_\nu \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}'^\mu} = p_\nu \left(\delta^\nu_\mu - \epsilon \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \right) \\ &= p_\mu - \epsilon p_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \\ \Rightarrow \delta p_\mu &= -\epsilon p_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \end{aligned} \tag{5.21}$$

将(5.20)和(5.21)带入(5.19)得到

$$0 = \delta H = -\epsilon \left[p_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial H}{\partial p_\mu} - f^\mu \frac{\partial H}{\partial x^\mu} \right] = -\epsilon \dot{Q}. \tag{5.22}$$

要使(5.22)对于任意的无穷小量ϵ都成立，唯有$\dot{Q}=0$，得证.

□

Theorem 5.4. 守恒荷Q是无穷小坐标变换的生成元.

力学量$A(x^\mu; p_\mu)$的变分为

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial A}{\partial p_\mu} \delta p_\mu,$$

从上面对守恒荷的证明可知，δx^μ和δp_μ能够借助守恒荷Q表述为

Exercise.

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \epsilon f^\mu = \epsilon \{x^\mu, Q\}; \\ \delta p_\mu &= -\epsilon p_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} = \epsilon \{p_\mu, Q\}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

(5.23)请读者自行证明.因此δA可以进一步写成

$$\delta A = \epsilon \left(\frac{\partial A}{\partial x^\mu} \{x^\mu, Q\} + \frac{\partial A}{\partial p_\mu} \{p_\mu, Q\} \right).$$

在经典情形下，生成元构造尚不明显.但在Poisson括号量子化后，可以非常明显的展示出生成元构造.例如

$$\begin{aligned} x^\mu \to x'^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu \\ &= x^\mu + \epsilon [x^\mu, Q] \\ &= x^\mu - \epsilon Q x^\mu + \epsilon x^\mu Q \\ &= (1 - \epsilon Q)\, x^\mu \,(1 + \epsilon Q) \\ &= e^{-\epsilon Q} x^\mu e^{\epsilon Q}, \end{aligned}$$

其中第四个等号省略了$O(\epsilon^2)$.

广义相对论

PART

IV

6 Einstein-Hilbert作用量

7 引力场方程的精确解

7.1 真空静态球对称时空的引力场方程

Einstein引力场方程是一个二阶张量方程，在$c=1$的自然单位制下，其形式为

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu} \tag{7.1}$$

其中$R_{\mu\nu}$为Ricci张量，R为Ricci标量，$g_{\mu\nu}$为时空度规，Λ为宇宙学常数，$T_{\mu\nu}$为应力-能量张量(Stress-energy tensor)，G为万有引力常数.以下内容在不另外说明的情况下，使用的均是$c=1$的自然单位制.
若用$g^{\mu\nu}$对(1)的两个协变指标缩并，可以得到一个标量方程

$$-R+4\Lambda=8\pi GT \tag{7.2}$$

其中T是$T_{\mu\nu}$的迹.将(2)代入(1)消去Ricci标量，可以得到引力场方程的一个等效形式

$$R_{\mu\nu}-\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi G(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \tag{7.3}$$

对于真空，能量-应力张量及其迹均为零.于是显而易见的，此时引力场方程为

$$R_{\mu\nu}=\Lambda g_{\mu\nu} \tag{7.4}$$

由对称性可知，静态球对称度规形式为

$$g_{\mu\nu}=diag\left(-A(r),B(r),r^2,r^2Sin\theta\right) \tag{7.5}$$

其中A和B是两个只与半径r相关的函数.假设时空坐标的仿射参量为τ，利用$g_{\mu\nu}$构造如下拉氏量

$$L=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=-A(r)\dot{t}^2+B(r)\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2Sin\theta\dot{\varphi}^2 \tag{7.6}$$

其中$\dot{x}^\mu\equiv dx/d\tau$. 将$L$代入Euler-Lagrange方程

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}=0 \tag{7.7}$$

可以得到四个方程

$$\begin{aligned}\ddot{t}+\frac{A'}{A}\dot{t}\dot{r}=0\\ \ddot{r}+\frac{A'}{2B}\dot{t}^2+\frac{B'}{2B}\dot{r}^2-\frac{r}{B}\dot{\theta}^2-\frac{rSin^2\theta}{B}\dot{\varphi}^2=0\\ \ddot{\theta}+\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}-Sin\theta Cos\theta\dot{\varphi}^2=0\\ \ddot{\varphi}+\frac{2Cos\theta}{Sin\theta}\dot{\theta}\dot{\varphi}+\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi}=0\end{aligned}$$

又知测地线方程为

$$\ddot{x}^\rho+\Gamma^\rho_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=0 \tag{7.8}$$

将这四个等式与测地线方程作对比，容易看出，静态球对称时空的非零Christoffel符号分别为

$$\begin{aligned}&\Gamma^0_{10}=\Gamma^0_{01}=\frac{A'}{2A}\\ &\Gamma^1_{00}=\frac{A'}{2B};\Gamma^1_{11}=\frac{B'}{2B};\Gamma^1_{22}=-\frac{r}{B};\Gamma^1_{33}=-\frac{rSin^2\theta}{B}\\ &\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{r};\Gamma^2_{33}=-Sin\theta Cos\theta\\ &\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=\frac{Cos\theta}{Sin\theta};\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=\frac{1}{r}\end{aligned} \tag{7.9}$$

Riemann曲率张量为

$$R_{\mu\rho\nu}{}^{\sigma}=-\partial_\mu\Gamma^\sigma_{\rho\nu}+\partial_\rho\Gamma^\sigma_{\mu\nu}-\Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \tag{7.10}$$

对$\rho\sigma$指标缩并,得到Ricci张量为

$$R_{\mu\nu}=R_{\mu\rho\nu}{}^{\rho}=-\partial_\mu\Gamma^\rho_{\rho\nu}+\partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu}-\Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\lambda}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\rho\lambda} \tag{7.11}$$

缩并Christoffel符号可以化简为

$$\Gamma^\rho_{\rho\nu}=\partial_\nu ln\sqrt{|g|} \tag{7.12}$$

其中g为度规的行列式，可以算得

$$ln\sqrt{|g|}=ln(ABr^4Sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}lnA+\frac{1}{2}lnB+2lnr+ln(Sin\theta) \tag{7.13}$$

将其代入Ricci张量中就得到

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}&=-\partial_\mu\partial_\nu ln\sqrt{|g|}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda ln\sqrt{|g|}+\partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu}-\Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\\ &=-\partial_\mu\partial_\nu\left[\frac{1}{2}lnA+\frac{1}{2}lnB+2lnr+ln(Sin\theta)\right]\\ &+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda\left[\frac{1}{2}lnA+\frac{1}{2}lnB+2lnr+ln(Sin\theta)\right]\\ &+\partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu}-\Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\end{aligned} \tag{7.14}$$

计算可知，Ricci张量的非零元素全部在对角线上

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{(A')^2}{4AB} + \frac{A'}{rB} \\
R_{11} &= -\frac{A''}{2A} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{(A')^2}{4A^2} + \frac{B'}{rB} \\
R_{22} &= 1 - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + \frac{rB'}{2B^2} \\
R_{33} &= Sin^2\theta - \frac{Sin^2\theta}{B} - \frac{rSin^2\theta A'}{2AB} + \frac{rSin^2\theta B'}{2B^2} = Sin^2\theta R_{22}
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

综上所述，联立(4)(5)(15)，可以得到真空静态球对称时空的相互独立的场方程为

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{(A')^2}{4AB} + \frac{A'}{rB} = -\Lambda A \tag{7.16}$$

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{(A')^2}{4A^2} + \frac{B'}{rB} = \Lambda B \tag{7.17}$$

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + \frac{rB'}{2B^2} = \Lambda r^2 \tag{7.18}$$

其中缺少了R_{33}分量的方程，这是因为R_{33}分量列出的方程是一个冗余的方程.

下面分$\Lambda = 0$及$\Lambda \neq 0$两种情况分别说明场方程解的具体形式.

7.1.1 Schwarzschild解

$\Lambda = 0$对应的场方程为

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{(A')^2}{4AB} + \frac{A'}{rB} = 0 \tag{7.19}$$

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{(A')^2}{4A^2} + \frac{B'}{rB} = 0 \tag{7.20}$$

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{rA'}{2AB} + \frac{rB'}{2B^2} = 0 \tag{7.21}$$

用B乘以(19)，A乘以(20)，算得

$$BR_{00} + AR_{11} = \frac{A'B + AB'}{B} = \frac{(AB)'}{B} = 0 \tag{7.22}$$

积分得到

$$AB = k_1 \tag{7.23}$$

其中$k_1 \in R$是积分常数.将(23)代入(21)，得到

$$k_1 = A + rA' = (rA)' \tag{7.24}$$

积分得到

$$A = k_1 + \frac{k_2}{r} \tag{7.25}$$

其中$k_2 \in R$是积分常数.将(25)带回(23)得到

$$B = \frac{k_1}{k_1 + \frac{k_2}{r}} \tag{7.26}$$

时空线元即

$$ds^2 = -\left(k_1 + \frac{k_2}{r}\right)dt^2 + \frac{k_1}{k_1 + \frac{k_2}{r}}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2Sin^2\theta d\varphi^2 \tag{7.27}$$

观察27可知，这一线元对应的时空在无穷远处应渐近平直

$$\lim_{r\to\infty} A = \lim_{r\to\infty} B = 1 \tag{7.28}$$

因此可得积分常数$k_1 = 1$.另一个积分常数k_2可由测地线方程的弱场近似求得，其值为$-2GM$，其中M为引力源的质量.这样，便求得度规为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2Sin^2\theta d\varphi^2 \tag{7.29}$$

这一解是Karl Schwarzschild率先得到的，因此又被称为Schwarzschild解.

7.1.2 Schwarzschild-de Sitter解

$\Lambda \neq 0$对应的场方程就是(16)(17)(18)本身.使用Schwarzschild解中同样的方法，用B乘以(16)，A乘以(17)，算得

$$BR_{00} + AR_{11} = \frac{A'B + AB'}{B} = \frac{(AB)'}{B} = 0 \tag{7.30}$$

积分得到

$$AB = k_3 \tag{7.31}$$

其中$k_3 \in R$是积分常数.将(31)代入(18)，得到

$$k_3 = A + rA' + \Lambda r^2 = (rA)' + \Lambda r^2 \tag{7.32}$$

积分得到

$$A = k_3 + \frac{k_4}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{7.33}$$

其中$k_4 \in R$是积分常数.将(33)带回(31)得到

$$B = \frac{k_3}{k_3 + \frac{k_4}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2} \tag{7.34}$$

时空线元即

$$ds^2 = -\left(k_3 + \frac{k_4}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \frac{k_3}{k_3 + \frac{k_4}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2Sin^2\theta d\varphi^2 \tag{7.35}$$

考虑到$\Lambda = 0$时这一线元应退化到Schwarzschild度规，于是有$k_3 = k_1 = 1, k_4 = k_2 = -2GM$.这样，便求得度规为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2Sin^2\theta d\varphi^2 \tag{7.36}$$

这一度规构造的时空称为Schwarzschild-de Sitter时空.

量子场论

PART

V

测试

Section 8. 量子力学

8 量子力学

笼统的说，将一个经典物理系统进行量子化的方法有三种.

第一种方法是利用波动力学进行量子化，这种方法的核心是Schrodinger方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\overrightarrow{x},t)+V(\overrightarrow{x})\psi(\overrightarrow{x},t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\overrightarrow{x},t). \tag{8.1}$$

如你所见，Schrodinger方程是一个复的二阶偏微分方程，整个波动力学围绕这个方程展开，不停的解方程，这一过程用到的那些特殊函数我至今没有弄懂.但我可以不负责任的说，整个量子力学的核心不是微分方程，而是代数.因此，接下来的内容与你会不会球谐函数、Legendre函数无关紧要.

第二种方法是利用矩阵力学进行量子化，这种方法来源于Hamilton力学.之前，我们在Hamilton力学中引入了一个Lie代数结构，称为Poisson括号.通过计算我们发现，整个Hamilton力学都能改写成Poisson括号的形式，体现出和谐的统一性.使用这种方法，我们能对量子力学进行公理化构造，得出非常好的结论.

至于第三种方法，我们先卖个关子，等到**??**再进行阐述.

现在，我们给出量子力学的5条公理，接下来的内容完全建立在这5条公理之上.我们要声明，这5条公理不可证伪，因此不存在“为什么是这样”的问题.物理归根结底是一门以实验为基础的学科，以这5条公理为基础建立的整个量子力学体系经受了住大量实验的验证，因此我们说这5条公理是有效的.

Definition 8.1. 给定一个孤立的力学系统，可根据如下5条公理构建一个量子力学系统：

1. 存在一个复Hilbert空间$\mathcal{H}$，量子系统的状态由$\mathcal{H}$中的矢量$|\psi\rangle$ 描述，两个矢量$|\psi\rangle, c|\psi\rangle (c\in\mathbb{C})$ 描述相同状态.

2. 经典力学中的力学量$A(\overrightarrow{x},t)$对应了$\mathcal{H}$中的一个Hermitian算子

$$\hat{A}(\overrightarrow{x},t):\mathcal{H}\to\mathcal{H}, \hat{A}=\hat{A}^\dagger.$$

   对A的测量值是$\hat{A}$的特征值.

3. 力学量A,B的Poisson括号对应了Hermitian算符$\hat{A},\hat{B}$的对易括号

$$\{A,B\}\Rightarrow\frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{B}],$$

其中$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$.

4. 若某一时刻量子系统处于$|\psi\rangle$状态，我们记此时测量力学量A的期望为$\langle A\rangle$，它满足
$$\langle A\rangle=\frac{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

5. 豆腐脑要吃甜的.

Remark.

1. 完备的内积空间即Hilbert空间.其中完备性要求空间中的任意Cauchy序列均收敛，内积结构使得空间拥有了度量.

   $\mathcal{H}$存在一个对偶空间$\mathcal{H}^*$，$\mathcal{H}^*$中的矢量记为$\langle\psi|$.设算子$\hat{A}$的一组特征值$\{a_n\}$对应的正交归一特征向量为$|n\rangle$，满足$\langle m|n\rangle=\delta_{mn}$，其中由$\langle\cdot|\cdot\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$诱导的内积结构就是$\mathcal{H}$上的内积.

2. 算子$\hat{A}$的Hermitian性使得$\hat{A}$的特征值必定是实数.这是因为
$$\begin{aligned}\hat{A}|\psi_n\rangle=a_n|\psi_n\rangle&\Rightarrow\langle\psi_n|\hat{A}|\psi_n\rangle=a_n\langle\psi_n|\psi_n\rangle;\\ \langle\psi_n|\hat{A}^\dagger=a_n^*\langle\psi_n|&\Rightarrow\langle\psi_n|\hat{A}^\dagger|\psi_n\rangle=a_n^*\langle\psi_n|\psi_n\rangle,\end{aligned}$$
   考虑到$\hat{A}$的Hermitian性，于是有
$$a_n^*\langle\psi_n|\psi_n\rangle=\langle\psi_n|\hat{A}^\dagger|\psi_n\rangle=\langle\psi_n|\hat{A}|\psi_n\rangle=a_n\langle\psi_n|\psi_n\rangle,$$
   即$a_n^*=a_n$.要使等式成立，则a_n必为实数.这样约定是因为量子系统中出现的测量值为复数时没有意义.

3. 由(5.13)得
$$\begin{aligned}\{x^\mu,x^\nu\}&=0\Rightarrow\frac{1}{i\hbar}[\hat{x}^\mu,\hat{x}^\nu]=0;\\ \{p_\mu,p_\nu\}&=0\Rightarrow\frac{1}{i\hbar}[\hat{p}_\mu,\hat{p}_\nu]=0;\\ \{x^\mu,p_\nu\}&=\delta^\mu_\nu\Rightarrow\frac{1}{i\hbar}[\hat{x}^\mu,\hat{p}_\nu]=\delta^\mu_\nu.\end{aligned}$$

4. 若系统的状态矢量$|\psi\rangle$是归一化的，则$\langle\psi|\psi\rangle=1$，此时$\langle A\rangle=\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$.

5. 豆腐脑不可以是咸的.

接下来我们便可以开始正题了.

8.1 绘景

首先，我们给出一个描述力学量算符随时间演化的方程，称为Heisenberg方程.

Definition 8.2. Heisenberg方程是对(5.11)量子化的结果

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} \Rightarrow \frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]. \tag{8.2}$$

(8.2)是Hamilton力学在量子力学公理下的直接结论，它的解具有特别的结构.

Lemma 8.1. (8.2)的解形如

$$\hat{A}(t) = e^{-\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}. \tag{8.3}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}\right) &= \frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}\right)\hat{A}(0)e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t} + e^{-\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}\right) \\
&= -\frac{1}{i\hbar}\hat{H}e^{-\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t} + e^{-\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)\frac{1}{i\hbar}\hat{H}e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t} \\
&= -\frac{1}{i\hbar}\hat{H}\hat{A}(t) + \frac{1}{i\hbar}\hat{A}(t)\hat{H} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}].
\end{aligned}$$

□

Remark. 为简化记号，我们命

$$\begin{aligned}
U(t) &\equiv e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}; \\
U^\dagger(t) &\equiv e^{-\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t},
\end{aligned}$$

于是(8.3)可以写成

$$\hat{A}(t) = U^\dagger(t)\hat{A}(0)U(t). \tag{8.4}$$

我们将Heisenberg方程描述的体系称为Heisenberg绘景.在Heisenberg绘景下，算符含时，态不含时.我们设系统的归一化的状态为$|\psi\rangle_H$，则力学量$A(t)$的期望

$$\begin{aligned}
\langle A\rangle &= \langle\psi|_H\hat{A}(t)|\psi\rangle_H \\
&= \langle\psi|_H U^\dagger(t)\hat{A}(0)U(t)|\psi\rangle_H \\
&= \langle\psi(t)|_S\hat{A}(0)|\psi(t)\rangle_S,
\end{aligned} \tag{8.5}$$

其中

$$|\psi(t)\rangle_S = U(t)|\psi\rangle_H, \tag{8.6}$$

这个操作称为绘景变换——它将Heisenberg绘景下的状态矢量$|\psi\rangle_H$变换为Schrodinger绘景下的状态矢量$|\psi(t)\rangle_S$.在Schrodinger绘景下，算符不含时，态含时.我们将(8.6)两侧同时对时间求导，于是得到

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_S = \frac{\partial}{\partial t}e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}|\psi\rangle_H = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}e^{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}t}|\psi\rangle_H = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}|\psi\rangle_S, \tag{8.7}$$

(8.7)即Schrodinger方程

Definition 8.3. Schrodinger方程为

$$\hat{H}|\psi\rangle_S = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_S. \tag{8.8}$$

附录

PART VI

9 自述

2016年7月，我最终还是拿到了西华师范大学物理与空间科学学院的录取通知书。在此之前，我一度以为自己只能读专科了，想着中学毕业后到武汉铁路职业技术学院学习开地铁，然后当个地铁司机。唯一令我不解的是，我填写志愿时网站上写的是“物理专业”，而当录取通知下来时却变成了“物理专业（师范）”。我不知道的是，多出的这两个字便是噩梦的开始。但不管怎样，我终于有学上了。那年暑假，我发了条微博，大意是我想奉献我的一生投入物理研究。不久后便有前辈评论说我太年轻太简单太幼稚，大部分搞科研的都是水文章的和搬砖的。但那时的我还不能理解。

后来我便入学了。在我的想象中，大学是学术自由的地方，我可以学习任何我想学的东西。2016年9月30日，学院举办了西华师范大学天文系的成立仪式，我见到了几位院士、天文系主任邓李才研究员以及朱进老师。我们学校作为一个二本学校，成为了新中国历史上第7所具有天文系的学校，在当时来看这是一件非常令人骄傲的事。然而刚高兴不久，期末考试立刻就给了我一个下马威，将我的大学梦击得粉碎：我期末正考一下就挂了两科，一门是体育1（公共必修课），一门是书法训练（教师教育必修课），而我的第一门专业必修课，力学，也只有不到70分，高等数学1也不到80分。所幸的是，在2017年初的补考中，我顺利的通过了补考，至少在当时我还没有挂科记录。但按照硬性条件，由于我有了两次补考记录，我大学生涯一上来就失去保研资格。

大一下学期是一个好的开始，这学期我们学习了电磁学和高等数学2，前者让我初步认识到梯度、散度、旋度的物理意义，而后者的矢量分析部分着实令我兴奋。在这一学期的学习中，我注意到正交曲线坐标系的Jacobian恰好就是几个Lamé系数的乘积。这个发现尤其重要，是这场噩梦中为数不多的让人欣慰的部分。可以说，我大学生涯的大部分时间都是为了找到一个解释：为什么正交曲线坐标系的Jacobian恰好就是几个Lamé系数的乘积？同学期，我在微博上认识了日本东北大学的李韬瀚博士，虽然他嘴臭，开玩笑没下限，但他在大学期间给予了我莫大的帮助，是为数不多的令我感激的人。通过李博士，我短暂的结识了一位复旦物理系的前辈，她比我早一年入学。通过她，我得知复旦的理论力学课程上会把Lamé系数称为“度规系数”，这里出现了“度规”一词。而当我查找与“度规”相关的资料时，搜索结果将我导向了“微分几何”。2017年6月份，我购买了一本《微分几何与拓扑学简明教程》，通过这本书开头几页的内容，我逐渐了解到矢量分析背后庞大的数学体系。这个过程很像是一场解谜游戏：我意外获得了一个上锁的箱子，通过与其他玩家的交流，我得知了钥匙的位置信息，然后我又去寻找钥匙，通过一个人的奋斗以及历史的行程，我找到了钥匙并打开箱子，发现箱子里面装了另一把钥匙，新的目标是寻找与这把新钥匙对应的新箱子……这是一个探索的过程，是与未知对抗的过程，我沉溺于其中。当年7月，闫沐霖教授到我们学院做了一次报告，题目是de Sitter不变的狭义相对论。可惜我当时学识尚浅，没能听懂。7月中旬，在这学期最终的期末考试中，我正考又挂了一科英语2。

2017年暑假，我因挂科逐渐变得焦虑，在班级群发出的成绩单中，我是唯一一个专业成绩靠前、正考挂科次数也靠前的学生。在度过焦虑的假期后，我迎来了大二上学期，也迎来了英语2的补考。我的补考终于还是挂了，这意味着我要进行重修了。即便要进行

重修，我还是将重心放在了理论力学与线性代数课程上，为此，我购买了《经典力学的数学方法》和全套《代数学引论》。学习理论力学时，我把重心全部放在了分析力学上，把Lagrange力学学得滚瓜烂熟，但对Hamilton力学不求甚解，这是因为最开始我不能很好的理解Legendre变换以及相空间等构造；而学习线性空间、对偶空间和张量的公理化构造时，我一度陷入困境，没有办法时甚至将书上的对应内容抄了五六遍，效果当然微乎其微。大二上学期，我们新增了公共选修课，同学们纷纷选择最容易通过的两性教育，我抢不过，所以选择了物理系某位“三清博士”开设的“物理学前沿讲座”。这门课程中，“三清博士”仅作为主持人的角色，真正讲课的是由他邀请的学院的不同方向的老师。通过这门课，我认识了王旭东老师。王老师是“非交换几何”的专家，他告诉我们，物理学院未来会给本科生提供学习理论物理的机会。我得到了他的联系方式，在2017年11月初通过简单的面试后，开始学习广义相对论与量子场论。说上去高大上，实际上就是允许本科生旁听研究生的课程。与我一同的本科生中，有几个同年级的公费师范生以及一位军训时带我们寝室的师姐。一开始我当然是没听懂的，即便我晓得什么是“度规”，但还是不能理解那无穷无尽的指标以及升降指标的机制。师姐倒是记了很多笔记，我却认为不懂得原理，记了也没用，所以没怎么记笔记。王老师要求旁听的本科生每周都要去办公室问问题，我即便没听懂，还是硬着头皮去请教他，问题无非是不懂指标的含义、升降指标的规则。王老师听了很生气，他说你又不记笔记，怎么能懂？后来我还是没怎么做笔记，但我下狠心买了全套的《微分几何入门与广义相对论》，这套书在11月11日到货。那天我还在参加英语2的重修课程，中午取了快递之后就返回了重修教室。我确认收货时发现双十一活动中这套书打折降价了很多，我联系店家希望能退差价。得知不能退差价后，我很沮丧。我告诉店家当天是我的生日，能不能祝我生日快乐，店家满足了我的要求。改变是在学习协变导数时，仿佛突然间一切都变得顺理成章了：普通导数算符作用到矢量分量上不满足张量变换规律，于是修正普通导数算符得到协变导数算符，它作用到矢量分量上的结果还是协变的；约定一种作用到度规上为零的协变导数算符，这种协变导数算符与普通导数算符的差异体现在联络上；联络可以通过轮换指标，用Christoffel符号表述；测地线满足最小作用量原理，通过推导线元的变分，可以得到测地线方程……到了12月的时候，我已逐步理解Riemann曲率张量以及Einstein场方程的结构了。但对于量子场论，我还是一窍不通。这学期我又挂了英语3，重修的英语2还是没过。此时的我就像一只惊弓之鸟，对一切考试都无比焦虑。在2018年1月回家的火车上，我向我的理论力学老师发了一封邮件，我问他我的学习有没有“好高骛远”的嫌疑。这个问题我不敢问王老师，之前上课时我曾隐晦的向王老师传达过这个观点，王老师有些愠怒的说，本科的知识就像是自行车，骑得再好也比不上汽车。不久后理论力学老师回复我，说这个问题最好面谈。我后来还是没有去找他，不了了之。

2018年是我最困难的一年。年初教育部发文，表明要规范高校毕业生质量，那时的官方语言叫做“严格把关”。我现在回想起来，我那时可能已经隐约感到学校要学习这一精神了，这大概在潜意识里对我造成了巨大的压力。3月份，我第一次去找辅导员，我告诉他，我英语太差了，估计我要毕不了业了。辅导员想不通，他说你都毕不了业，那谁还毕得了业，四级过不了还有校四级，挂科过不了还有大补考，言下之意就是毕业要求水得很，我不必多虑。但没过多久，一次班会上辅导员就表示校四级和大补考取消了，这对我的“学术自由”是一记重击。一开始我想休学调整，但后来选择了心理咨询。从6月开始直到期末考试，我一度要进行每周一次的心理咨询。第一次去心理咨询时，我希望获得一份心理状况的评估，我填了一个量表，得到的反馈结果是轻度抑郁，重度焦虑。但没过多久我就发现学校的心理咨询中心也水得很，我其实并不是真的需要心理咨询，我只是想找人

说话罢了。那学期我们正在学习数学物理方法和原子物理学，我认为数学物理方法里的内容都是无用的技巧，靠计算机就行了，学生不需要当“人肉计算机”；而原子物理我哪怕到了现在也一窍不通。我还和电工学实验的老师的研究生吵了一架，最后实验考试我都没去。我告诉王老师，我状态太差了，不想做了。王老师说没事。大二上学期的期末考试当然考得稀烂，挂了原子物理、教育学、马克思主义基本原理和教师基本素养，未修到的学分绩点累计达到了18点，再多2点我就要留级了。那时是我平均学分绩点最低的时候，只有1。59点，哪怕是现在[3]，我也只有1。69点，勉强达到了毕业的1。60点要求。

2018年暑假，我终于在家人面前崩溃了，我大哭了一场，整个人都是呆滞的：唾液从唇边流下，流成一条线，母亲看到后问我是不是被狗咬过；有一次我前往家附近的超市，准备从后门出去时被店员拦住，店员说要从前门走，她看我的眼神是看精神病的那种眼神。9月，经过了一个暑假的休整，大三上学期开学了。我也逐步恢复过来，补考通过了教师基本素养和教育学，但原子物理和马克思主义基本原理我还是挂了，需要重修。那学期我重修了马克思主义基本原理和英语2，虽然“马原”的成绩录入出了点问题，但两门课程的重修考试我都通过了。我只剩下两门课程没有通过：英语3和原子物理。

2019年初，我参与了为期一学期的教育实习，也就是到高中当实习老师。实习期间，我常常会忘记我还在读大学，更多的时候我感到每天的经历都是一样的，每天都在做同样的事，就像动物园里的动物，进行着无时不刻的刻板行为。实习开始时，我说我想让学生高屋建瓴的学习物理，结果学生对物理根本就不感兴趣，没有探索的欲望。或者说，高中不是要培养对某一学科具有较强认知的学生，而是要培养德智体美劳全面发展的学生。不光是高中，哪怕是大学对物理专业的学生的培养方案，也是要求学生德智体美劳全面发展。实习期间有过几个同学来办公室问我相对论是什么，强相互作用力是什么，但这超出了他们的理解范围，甚至后者也超出了我的理解范围，我只能给他们一个虚无缥缈的回答，他们似懂非懂，然后说“谢谢老师”，就走开了。他们总是对高大上的物理问题感兴趣，例如暗物质，弦论等内容，而要理解这些内容，需要花很多功夫去学习基础知识，否则就真的有好高骛远之嫌。对物理学抱有极大兴趣的人是少数，他们是纯粹的理想主义者，活在自己的世界里，理想推动着他们前进；更多的人是无比现实的，生活推动着他们前进。理想主义者需要现实一点，现实主义者也要有一点梦想，如何在这两者间找到一个平衡状态，这才是老师应该教会学生的。我看到有的学生文化课很糟，什么都学不进去，但他们也许充满了正义感，也许在平时乖巧可人，他们也能很快乐。有学生对我说，你为什么要去学这些东西，你看你愁眉苦脸的，你看我多开心。我觉得很有道理，人作为动物，活着才是最重要的，然后才是满足自我实现需求。我想，我或许应该放下点东西了。

2019年7月，我在王老师的支持下，前往贵州参加了引力协会组织的相对论学术年会，了解了大部分物理工作者的日常工作。我发现许多前辈的工作根本不涉及微分几何，我甚至没有听到或看到几个张量结构，这令我非常惊讶，也很令人沮丧：一开始，别人说我这是好高骛远，要把基础打好。那时我还会自省，觉得别人说的有道理，本科生毛都没长齐还做什么科研？现在我真的了解到别人所做的工作，发现别人的基础可能还没有我好，我便开始怀疑：到底什么才是“基础好”？Yau等人得到正质量定理，Yau的物理基础好吗？引力会议上作报告的物理工作者不会微分几何，他们的数学基础好吗？于是我不再随便相信他人对我的“建议”。对一个人的“建议”一定要是客观的、符合实际情况的。如果一个人根本不了解我，只是刚刚接触我，了解到我的工作后便不假思索的擅自给予我一个“建议”，那这个“建议”还是客观的吗？

我开始重新审视我过去的工作。我的大学生涯充满了别人的傲慢与偏见，到底是我真

[3]指的是2019年中旬.

的做得不够好，还是我不够自信？第一位歧视我出身的人是那位与我短暂接触的复旦学姐，她的言语中时常带有一份对二本学生的不屑。有一天我告诉她群是关于对称性的理论，她却对我的表述嗤之以鼻,从那以后我便没有与她往来过。“物理学前沿讲座”的期末考核是让学生提交一份关于物理学的小论文，我写的是关于度规张量与梯度散度旋度、体元的关联，那位“三清博士”给我评了78分。后来他告诉我，我的那篇论文“仅仅是当时你对度规张量的粗浅认识”“对于你论文里的具体内容我并不是太懂”“没有体现出你太多的自己的个人观点”“物理永远不是数学”。我逐渐发现，你与物理工作者谈物理的时候，他会给你吹数学，张口纤维丛，闭口上同调，还会讲甜甜圈和咖啡杯拓扑同胚；而当你真的与他谈数学的时候，例如告诉他集合X的拓扑$\mathcal{X}$是X的所有子集构成的集合与空集之并，满足如下两条：

1. 有限个X的子集的交是拓扑的元素；
2. 无限个X的子集的并是拓扑的元素。

他就会恼羞成怒：数学不能算物理……数学！……物理学家的事，能叫数学么？接连便是难懂的话，什么“扩大希尔伯特空间”，什么“重整化”之类，引得众人都哄笑起来，教室内外充满了快活的空气。我认为将数学与物理作为对立的两面在很大程度上是反智的、幼稚可笑的。物理的公理化被列为Hilbert著名演讲的数个问题之一，而根据历史进程，我们有理由相信一切物理都是能够公理化的。但不少物理工作者都认为“物理不是数学”，用这种论断将自己麻痹在一种模糊不清的表述之中，竟对此引以为傲。这样的经历数不胜数，而我对此感到厌烦。

朝闻道，夕死可矣。

2019年8月23日，于三峡大学
2019年9月5日，修订于凉山州
2020年5月17日，修订于三峡大学