Лабораторная работа №5

Моделирование функциональных преобразователей

1. Теоретические сведения

Дифференцирующее звено

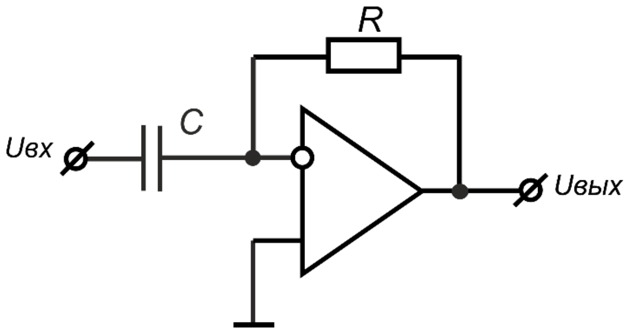

Рис.1. Дифференцирующее звено

Конденсатор C преобразует входное напряжение в ток:

$$I_c = C\frac{\partial U_{\text{вх}}}{\partial t}$$

Поскольку входной ток операционного усилителя мал, в идеальном случае равен 0, ток через резистор R равен току I_C.

$$I_R = I_C = C\frac{\partial U_{\text{вх}}}{\partial t}$$

Напряжение на резисторе $U_R = \varphi_0 - U_{\text{вых}} = I_R R$

Тогда

$$\boxed{U_{\text{вых}} = -RC\frac{\partial U_{\text{вх}}}{\partial t}}$$

Данная схема ведет себя неустойчиво из-за большого коэффициента усиления в области высоких частот. Даже слабый высокочастотный шум способен ввести схему в состояние насыщения. Для борьбы с этим явлением в схему дифференцирующего звена добавляют элементы R' C', благодаря чему в области высоких частот схема начинает проявлять свойства фильтра низких частот.

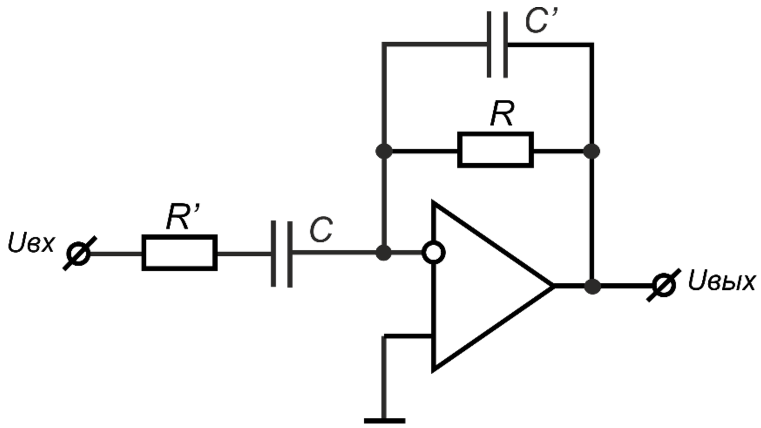

Рис.2. Дифференцирующее звено с ФНЧ

Произведение *R'C'* определяет частоту среза получаемого фильтра

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi R'C'}$$

Для минимального искажения дифференцирующих свойств в области низких частот емкость конденсатора *C'* рекомендуется выбирать порядка 30-100пФ.

Интегрирующее звено

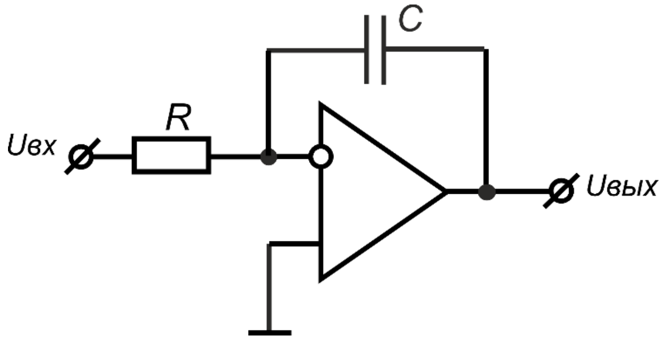

Рис.3. Интегрирующее звено

Резистор преобразует входное напряжение в ток

$$I_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{вх}}}{R}$$

Согласно концепции идеального операционного усилителя весь ток $I_{вх}$ поступает в конденсатор, что приводит к формированию напряжения на конденсаторе

$$U_C = \frac{1}{C}\int I\partial t = \frac{1}{C}\int \frac{U_{вх}}{R}\partial t = \frac{1}{RC}\int U_{вх}\partial t$$

Тогда выходное напряжение схемы равно

$$\boxed{U_{вых} = -\frac{1}{RC}\int U_{вх}\partial t}$$

Схему интегратора можно дополнить входными резисторами. В этом случае ток, поступающий в конденсатор будет представлять алгебраическую сумму входных токов. Тогда выходное напряжение схемы будет иметь вид:

$$\boxed{U_{вых} = -\frac{1}{C}\int \left(\frac{U_{вх1}}{R_1} + \frac{U_{вх2}}{R_2}\right)\partial t}$$

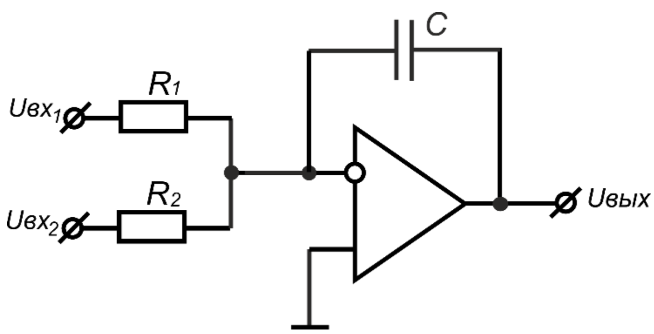

Рис.4. Суммирующий интегратор

Полученная схема интегрирует сумму входных сигналов

Решение дифференциальных уравнений

Многие задачи, например, расчет параметров системы автоматического управления предполагают решение дифференциальных уравнений. Запись дифференциального уравнения содержит в себе один или несколько операторов дифференцирования, которые можно реализовать при помощи нескольких последовательно включенных дифференцирующих звеньев на операционных усилителях:

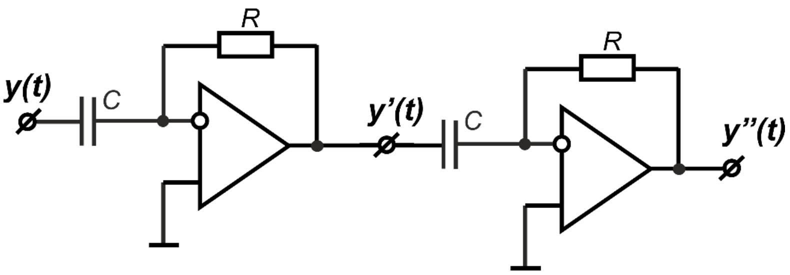

Рис.5. Каскадное включение дифференцирующих звеньев

Последовательное включение дифференцирующих звеньев предполагает подключение к выходам операционных усилителей емкостной нагрузки. Это приводит к неустойчивости данной схемы.

В целях повышения устойчивости решение дифференциальных уравнений осуществляют при помощи интеграторов, *методом переменных состояния*.

Пример

Дано дифференциальное уравнение:

$$y'' + k_1 y' + k_0 y = f(x) \qquad (1)$$

1) Выразим x как функцию от времени:

$$x = \frac{t}{\tau}$$

Тогда

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \text{x}} = \dot{y}\tau$$

$$y'' = \ddot{y}\tau^2$$

Получаем

$$\tau^2\ddot{y} + k_1\tau\dot{y} + k_0 y = f\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

2) Преобразуем выражение

$$k_0 y - f\left(\frac{t}{\tau}\right) = -\tau^2\ddot{y} - k_1\tau\dot{y}$$

Умножим на $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ и проинтегрируем

$$-\frac{1}{\tau}\int\left[k_0 - f\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]\partial t = \tau\dot{y} + k_1 y$$

Левая часть уравнения может быть рассчитана при помощи суммирующего интегратора (рис 4). Обозначим левую и правую часть уравнения за переменную Z_2

$$Z_2 = -\frac{1}{\tau}\int\left[k_0 - f\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]\partial t$$

$$Z_2 = \tau\dot{y} + k_1 y$$

3) Аналогично п.2 преобразуем выражение

$$Z_2 - k_1 y = \tau y'$$

Умножим на $\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ и проинтегрируем:

$$-\frac{1}{\tau}\int(Z_2 - k_1 y)\partial t = -y$$

Обозначим левую и правую часть уравнения за переменную Z_1

$$Z_1 = -\frac{1}{\tau}\int(Z_2 - k_1 y)\partial t$$

$$Z_1 = -y$$

Значение Z_1 так же может быть получено при помощи суммирующего интегратора. Решение уравнения – функция y(t) – может быть найдена инвертированием знака Z_1.

Значения Z_1 и Z_2 называют *переменными состояния*.

Функциональную схему, осуществляющую решение данного дифференциального уравнения, можно представить следующим образом:

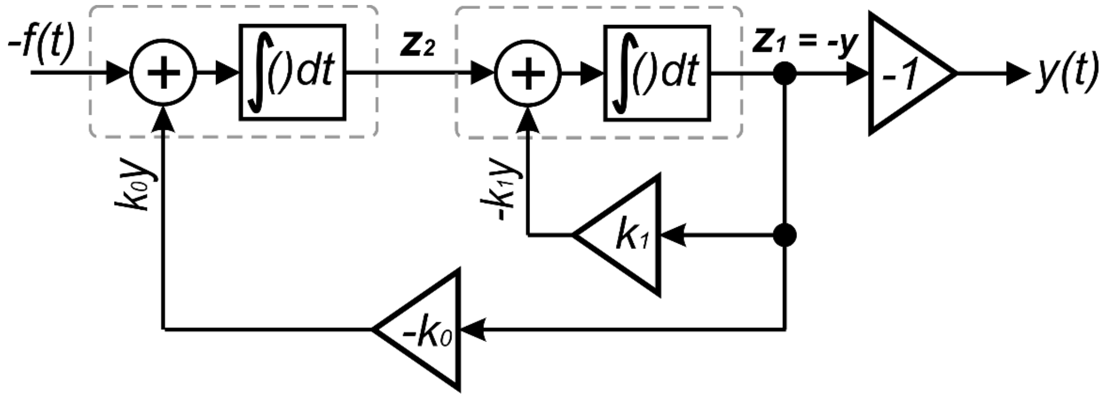

Рис.6. Схема решения дифференциального уравнения

В случае положительных значений коэффициенты k_1 и k_0 могут быть реализованы без использования операционных усилителей за счет входных резисторов суммирующих интеграторов.

Тогда электрическая схема полученного устройства имеет следующий вид:

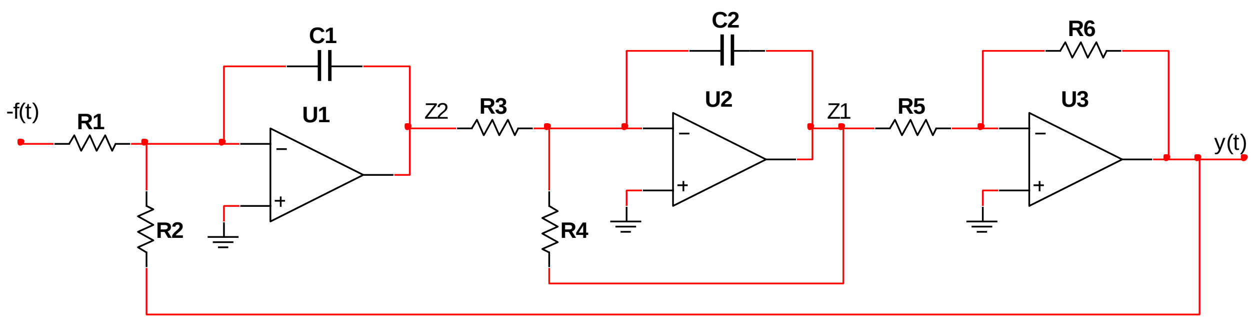

Рис.7. Схема электрическая принципиальная

Результат работы схемы представляет собой зависимость выходного напряжения от времени. Для нахождения значения найденной функции по исходному аргументу x необходимо воспользоваться обратной подстановкой $t = x \cdot \tau$ и определить значение в момент времени t.

2. Задание

1) Разработайте схему дифференцирующего звена. Постоянную времени τ выбрать из таблицы 1 согласно номеру компьютера. С помощью боде-плоттера проанализируйте АЧХ и ФЧХ полученного преобразователя.

2) Дополните схему дифференцирующего звена элементами фильтра низких частот. Обеспечьте подавление пика АЧХ.

3) Разработайте схему решения дифференциального уравнения. Вид уравнения выбрать по таблице 2.

3. Контрольные вопросы

1) Чем обусловлен большой коэффициент усиления дифференцирующего звена в области высоких частот?
2) Как по полученным значениям напряжения осуществить переход к значениям функции?
3) Поясните суть понятия «переменная состояния»
4) Какие параметры операционных будут являться источниками погрешностей рассмотренных схем?

4. Приложения

Таблица 1.

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
τ, мс	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200

Таблица 2.

Вар.	Уравнение
1	$y'' + 5y' + 2y = -f(x)$
2	$y'' + 2y' - 2y = -f(x)$
3	$y'' - 4y' + 12y = -f(x)$
4	$y'' - 5y' - 8y = -f(x)$
5	$y'' + 2y' + 7y = -f(x)$
6	$y'' - 6y' + 2y = -f(x)$
7	$-y'' + 8y' + 2y = -f(x)$
8	$y'' + 3y' - 2y = -f(x)$
9	$y'' - 5y' - 9y = -f(x)$
0	$y'' + 5y' - 3y = -f(x)$