

# Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний.

Шакиров Тимур Тагирович

Декабрь 2021

**Цель работы:** Измерить периоды крутильных колебаний при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тел и построить эллипсоид инерции.

**В работе используются:** установка для крутильных колебаний, набор твердых тел, секундомер.

## Теория.

Тензор инерции—характеристика пространственного распределения массы, определяется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \rho \int_V (y^2 + z^2) dV & -\rho \int_V xy dV & -\rho \int_V xz dV \\ -\rho \int_V xy dV & \rho \int_V (x^2 + z^2) dV & -\rho \int_V yz dV \\ -\rho \int_V xz dV & -\rho \int_V yz dV & \rho \int_V (x^2 + y^2) dV \end{pmatrix}$$

Правильно выбрав оси, всегда можно привести тензор к диагональному виду. Диагональные элементы  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  при этом называют главными моментами инерции тела. У тензора есть геометрическая интерпретация—эллипсоид инерции, определяемый уравнением  $J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1$ .

Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс  $J = \frac{1}{r^2}$ , где  $r$  — расстояние от центра эллипсоида до точки пересечения оси с эллипсоидом. Рамка, фиксирующая положения тела относительно себя, способна совершать колебания.

$$(I + I_p) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -f \varphi$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}} \quad (1)$$

Момент инерции относительно диагонали для прямоугольного параллелепипеда:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2}$$

Отсюда с учетом (1) получим:

$$(a^2 + b^2 + c^2) T_d^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2$$

Аналогично можно получить:

$$(b^2 + c^2) T_E^2 = b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2$$

$$(a^2 + c^2) T_P^2 = a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2$$

$$(a^2 + b^2) T_M^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2$$

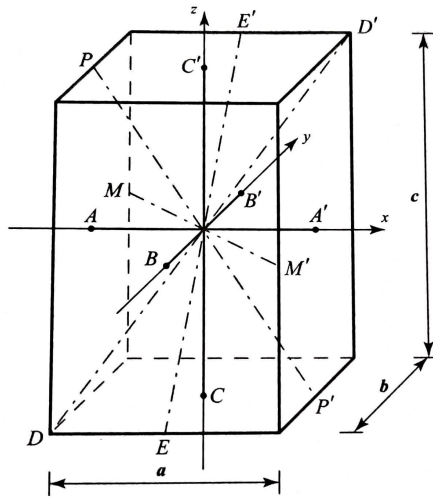


Рис. 1: Оси вращения параллелепипеда

## Ход работы

1. Убедились в работоспособности установки, научились закреплять в ней тела, убедились в малости затухания колебаний.
2. Для различных тел (параллелепипед, куб, цилиндр 1, цилиндр 2, рамка 1, рамка 2) промерили периоды колебаний методом рядов для  $n = 10$ . Также измерили геометрические размеры параллелепипеда и проверили равенства из теоретической части. Результаты внесли в таблицу:

Параллелепипед				
	1	2	3	$T_{cp}$
$T_x, c$	3.88	3.78	3.84	3.83
$T_y, c$	4.09	4.11	4.12	4.11
$T_z, c$	3.23	3.25	3.22	3.23
$T_d, c$	3.46	3.48	3.46	3.47
$T_E, c$	3.34	3.35	3.35	3.35
$T_P, c$	3.41	3.42	3.41	3.41
$T_M, c$	3.85	3.85	3.84	3.85
Куб				
$T_x, c$	3.03	3.06	3.05	3.05
$T_y, c$	3.06	3.06	3.04	3.06
$T_z, c$	3.05	3.05	3.04	3.05
$T_d, c$	3.05	3.05	3.04	3.05
$T_E, c$	3.04	3.07	3.06	3.06
$T_P, c$	3.06	3.07	3.04	3.06
$T_M, c$	3.05	3.05	3.07	3.06
Цилиндр 1				
$T_x$	3.04	3.08	3.08	3.07
$T_y$	3.26	3.26	3.25	3.26
Рамка 1				
$T$	2.58	2.56	2.56	2.57
Цилиндр 2				
$T_x$	6.80	6.80	6.80	6.80
$T_y$	6.48	6.45	6.45	6.46
Рамка 2				
$T$	4.46	4.44	4.44	4.45

$a, \text{ см}$	10.0
$b, \text{ см}$	5.0
$c, \text{ см}$	15.0
$(a^2 + b^2 + c^2)T_d^2, \text{ см}^2 \cdot \text{с}^2$	4210
$a^2T_x^2 + b^2T_y^2 + c^2T_z^2, \text{ см}^2 \cdot \text{с}^2$	4230
$(b^2 + c^2)T_E^2, \text{ см}^2 \cdot \text{с}^2$	2800
$b^2T_y^2 + c^2T_z^2, \text{ см}^2 \cdot \text{с}^2$	2770
$(a^2 + c^2)T_P^2, \text{ см}^2 \cdot \text{с}^2$	3790
$a^2T_x^2 + c^2T_z^2, \text{ см}^2 \cdot \text{с}^2$	3810
$(a^2 + b^2)T_M^2, \text{ см}^2 \cdot \text{с}^2$	1860
$a^2T_x^2 + b^2T_y^2, \text{ см}^2 \cdot \text{с}^2$	1890

3. Для построения эллипсоидов инерции вычислим величины  $\frac{1}{\sqrt{T^2 - T_P^2}}$ :

	параллелепипед	куб	цилиндр 1	цилиндр 2
$\frac{1}{\sqrt{T_x^2 - T_P^2}}$	0.352	0.609	0.595	0.194
$\frac{1}{\sqrt{T_y^2 - T_P^2}}$	0.312	0.602	0.499	0.214
$\frac{1}{\sqrt{T_z^2 - T_P^2}}$	0.511	0.609		

Сечения эллипсоидов главными плоскостями прикреплены в приложении. Эксперимент подтвердил теоретические зависимости из теоретической части отчета.

# Приложение

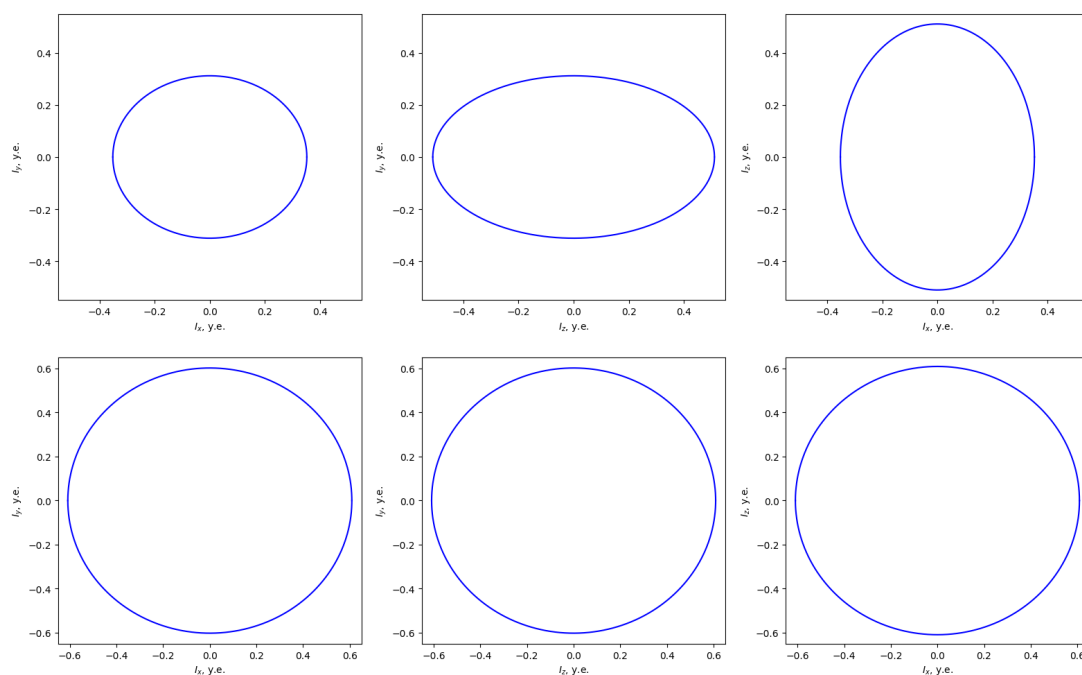


Рис. 2: Сечения эллипсоидов параллелепипеда(1 ряд) и куба(2 ряд)

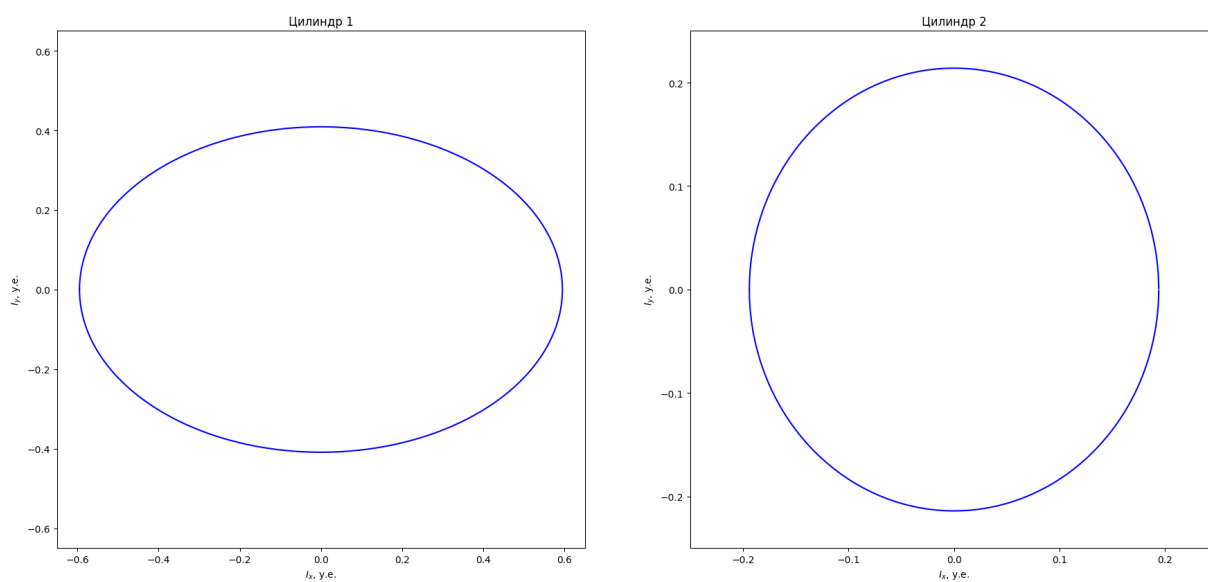


Рис. 3: сечения эллипсоидов цилиндра 1 и цилиндра 2