НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИЭТ»

Курсовая работа на тему

«РАССЧЁТ ПАРАМЕТРОВ СПАСАТЕЛЬНОГО БАТУТА»

Выполнили:	Нежданов Иван Львович
	Буранова Елена Андреевна
Преподаватель:	Лисовец Юрий Павлович
Группа:	МП-40

Москва
2014

1 Введение

На рубеже XIX-XX веков и в начале XX века, когда многоэтажное строительство уже было распостранено в крупных городах США, а длинные пожарные автолестницы ещё не появились, перед пожарными стояла задача спасения людей из горящих зданий. Зачастую при пожаре путь вниз через лестницу перекрыт огнём, и люди сталкиваются со сложным выбором: выпрыгнуть из окна или сгореть.

Изобратателями того времени было предложено множество решений, основанных на том соображении, что если средства пожаротушения не помогут, то можно спрыгнуть вниз. Сохранились свидетельства о спасении людей с помощью ковров и брезентовой ткани и множества причудливых приспособлений.

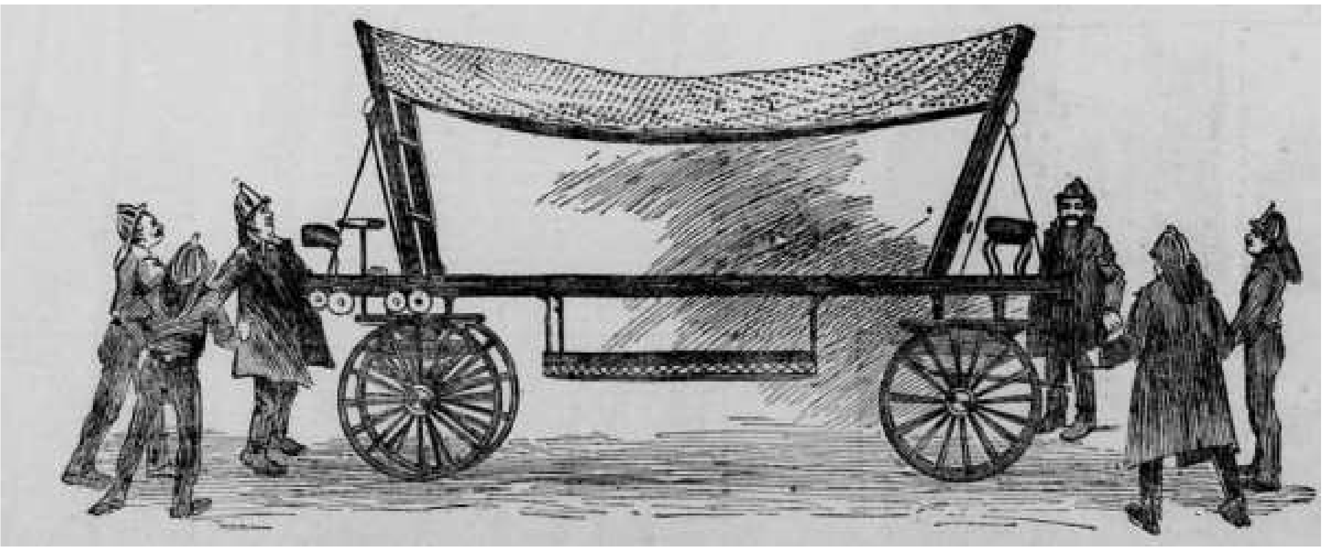


Рис. 1: Устройство для спасения людей из высотных зданий, Сан-Франциско, США, 1897 год

Одно такой устройство нашло широкое распостранение: запатентованная и названная по имени её изобретателя «спасательная сеть Браудера». Она состояла из круглой жёсткой рамы, к которой через пружины крепилась ткань. Поражные приезжали, собирали конструкцию и держали её на уровне плеч под окном, из которого выпрыгивали люди.

Согласно отчётам из старых газет, спасательные сети часто действовали, но и неудачное применение было не большой редкостью. Так, например, человек, летящий с большой высоты мог порвать сеть, или же отскочить от неё и покалечиться при падении. Известен случай, когда две испуганные женщины выпругнули из окна в обнимку. Сеть не выдержала их совместного веса и порвалась.

Начиная с 1970-х годов, пожарные лестницы начали вытеснять спасательные сети, и сегодня их можно увидеть разве что в старых фильмах. Однако, в некоторых случаях, когда, например, прибытие пожарной бригады может занять много времени или у пожарных нет нужного оборудования, спасательная сеть могла бы пригодиться. Эта проблема актуальна для современной России, достаточно привести в пример пожар в Сбербанке во Владивостоке в 2006 году.

No. 663,856. Patented Dec. 18, 1900.

T. F. BROWDER.

FIRE ESCAPE.

(Application filed Apr. 14, 1900.)

(No Model.)

Fig. 1.

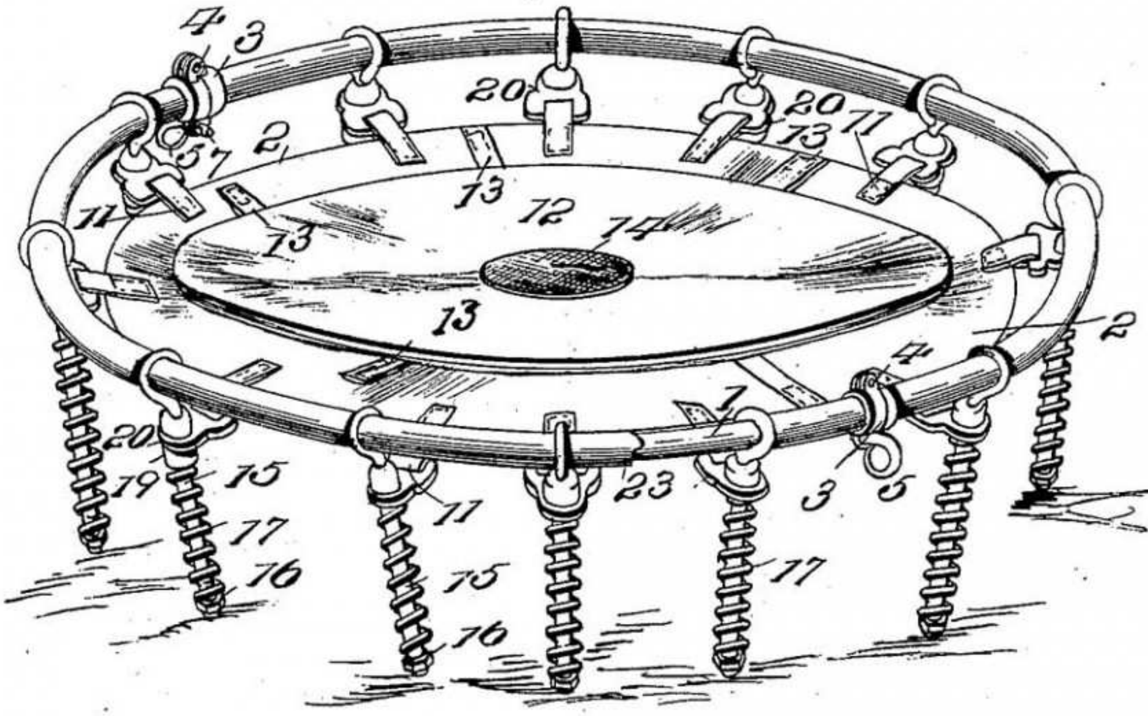
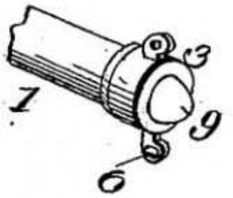


Fig. 3



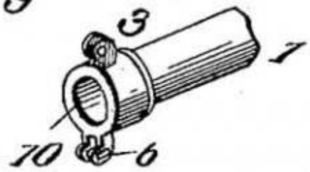


Fig. 2.

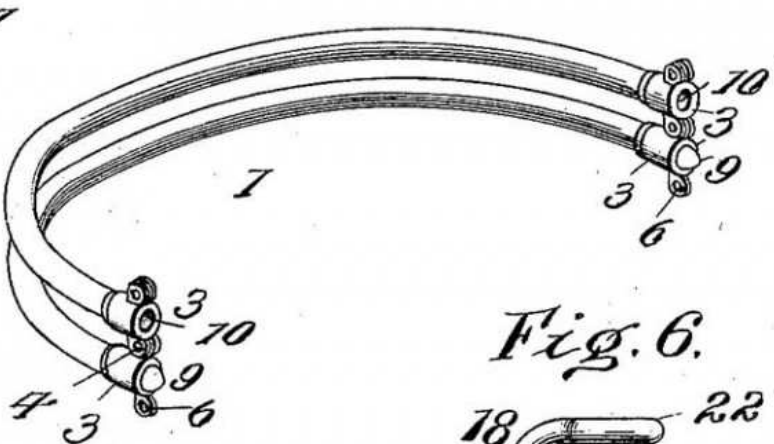


Fig. 4.

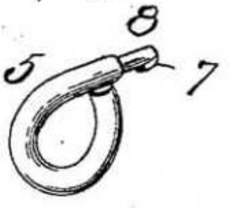


Fig. 6.

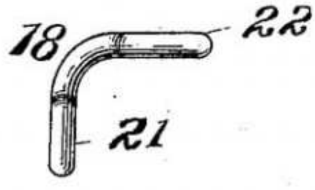
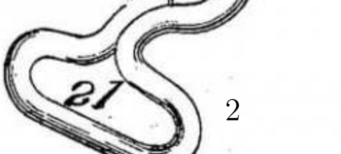


Fig. 5



2 Постановка задачи

Требуется рассчитать прочность полотна, натянутого на жёсткую раму, способного выдержать падение человека массой m кг с высоты H м. При этом не должно быть случаев, когда ткань прогнулась настолько, что человек расшибся об землю.

3 Идеализация модели

Примем следующие упрощающие предположения:

- изменение масы человека за время полёта пренебрежимо мало;
- выпрыгнувший из окна человек падает прямолинейно, перпендикулярно поверхности земли, и с ускорением свободного падения $g = 9.81$ м/с^2;
- вязкое трение воздуха, действующее на летящего человека, пренебрежимо мало;
- пожарные держат батут на фиксированной высоте h м и не прогибаются под тяжестью упавшего человека;
- ткань, из которой изготовлено полотно, не рвётся, а только растягивается;
- вес полотна пренебрежимо мал и оно туго натянуто (не прогибается под собственным весом);
- полотно крепится к каркасу жёстко, по всему периметру;
- каркас достаточно прочный и не изменяет свою форму,
- все точки каркаса лежат в одой плоскости;
- батут имеет форму квадрата со стороной 2 м.

Если полотно в момент максимального прогиба прогнулось настолько, что коснулось земли, считается, что человек разбился.

Область соприкосновения упавшего человека с батутом есть круг с радиусом r с центром в точке $x^{(0)}$.

4 Выбор переменных и констант

Обозначим:

- H — высота относительно поверхности земли, с которой прыгает человек;
- h — высота над поверхностью земли, на которой пожарные держат батут (максимальный допустимый прогиб полотна);
- $g = 9.81$ — ускорение свободного падения;
- m — масса человека;
- $f(t, x)$ — плотность распределённой силы, которую человек оказывает на батут;
- $V(t)$ — скорость падения человека в момент времени t;
- a — ширина стороны батута;
- r — «радиус» человека;
- $x^{(0)}$ — точка на поверхности батута, на которую упал человек.

5 Формализация математической модели

5.1 Описание падения человека

Скорость падающего человека находится в линейной зависимости от прошедшего времени падения:

$$V = V_0 + g \cdot t, \tag{1}$$

при этом $V_0 = 0$. Нас же интересует зависимость скорости человека не от времени, а от расстояния, которое он пролетел. Координата человека (вдоль вертикальной оси, 0 соответствует уровню земли):

$$y(t) = y_0 - g \cdot t^2/2, \tag{2}$$

где $y_0 = H$. Несложно показать, что при $y(t') = y'$ $t' = \sqrt{2(H - y')/g}$ и $V = g \cdot \sqrt{2(H - y')/g}$. В момент касания батута $y = h$, поэтому

$$V' = g \cdot \sqrt{2(H - h)/g} \tag{3}$$

5.2 Взаимодействие человека и батута

Очевидно, что поведение батута после падения на него человека будет описываться двумерным волновым уравнением. Значит, необходимо поставить корректную краевую задачу и решить её.

Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \right) + f(t, x_1, x_2), \tag{4}$$

где $f(t, x)$ — плотность распределённой силы, приложеной к батуту, c — агрегированная характеристика полотна (натяжение и прочность), $u(t, x)$ — отклонение точки полотна в направлении, перпендикулярном плоскости каркаса.

5.2.1 Начальные условия

Перед падением человека, батут плоский, поэтому первое начальное условия однородно:

$$u(t, x_1, x_2)\big|_{t=0} = 0. \tag{5}$$

При столкновении с батутом человек имеет импульс $p_ч = V' \cdot m$. Происходит абсолютно неупругое столкновение (человек продолжает двигаться вниз вместе с полотном батута) и импульс человека переходит в импульс системы человек-батут:

$$m_б V_б + m_ч V' = U \cdot (m_б + m_ч), \tag{6}$$

при этом $m_б = 0$, $V_б = 0$. Скорость человека в момент соприкосновении с батутом передаётся точкам полотна, то есть определяет второе начальное условие. Поскольку облась соприкосновения человека с батутом имеет форму круга с радиусом r, начальную скорость получать лишь точки в этой области. Чтобы избавиться от разрывного начального условия и одновременно учесть неидеальность формы человека, используем не разрывную функцию-столб, а двумерную функцию Гаусса с СКО $r/3$:

$$\frac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \exp\left(-\frac{(x_1 - x_1^{(0)})^2}{r^2/4.5} - \frac{(x_2 - x_2^{(0)})^2}{r^2/4.5} \right). \tag{7}$$

5.2.2 Граничные условия

Как было отмечено в п. 3, полотно жёстко прикреплено к каркасу. Из этого следуют однородные граничные условия:

$$u(t,x_1,x_2)\big|_{x_1=0}=0,\;\; u(t,x_1,x_2)\big|_{x_1=a}=0,\;\; u(t,x_1,x_2)\big|_{x_2=0}=0,\;\; u(t,x_1,x_2)\big|_{x_2=a}=0. \qquad (8)$$

5.2.3 Внешняя сила

После падения, человек оказывает на батут распределённый вес. Из-за функции (7) подавляющая часть веса приходится на круг радиуса r с центром в $x^{(0)}$, а его площадь равна πr^2, поэтому

$$f(t,x_1,x_2)=\exp\left(-\frac{(x_1-x_1^{(0)})^2}{r^2/4.5}-\frac{(x_2-x_2^{(0)})^2}{r^2/4.5}\right)/\pi r^2. \qquad (9)$$

6 Аналитическое и численное исследование модели

6.1 Аналитическое исследование

Аналитическое исследование содержит довольно-таки громоздкие выкладки: необходимо поставить задачу Штурма-Лиувилля, найти собственные значения и собственные функции краевой задачи, а потом, согласно теореме Стеклова, разложить начальные условия по базису из собственных функций. Одно лишь нахождение собственных значений в двумерном случае — черезвычайно трудоёмкая задача.

Можно пойти другим путём и применить формулу Пуассона-Парсеваля и сразу получить аналитическое решение:

$$u(t,x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi c}\iint_{r<ct}\frac{u_t(0,x_1,x_2)dy_1dy_2}{\sqrt{c^2t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}, \qquad (10)$$

однако, согласитесь, что данная формула тоже не проста для аналитического исследования.

6.2 Численное исследование

Для численного решения краевой задачи (4,5,7,8,9) отлично подходит эволюционно-факторизованн схема ввиду её безусловной устойчивости при весе $1/4\le\sigma\le 1/2$, малых вычислительных затрат и хорошей точности. Правда в среде matlab реализованны продвинутые методы решения гиперболических уравнений на треугольных сетках, которые обеспечивают ещё большую экономию машинных ресурсов.

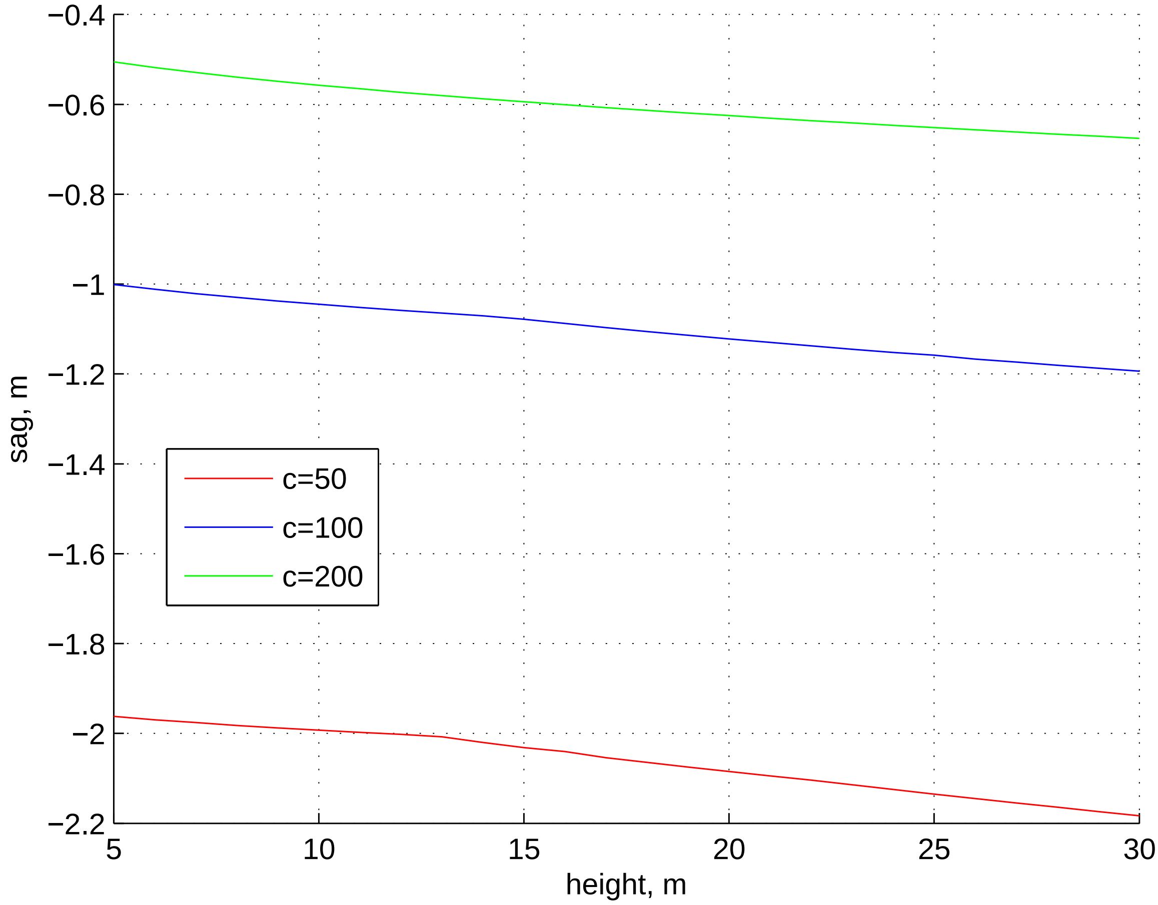


Рис. 2: Прогиб батута в зависимости от высоты прыжка при разных прочностях ткани

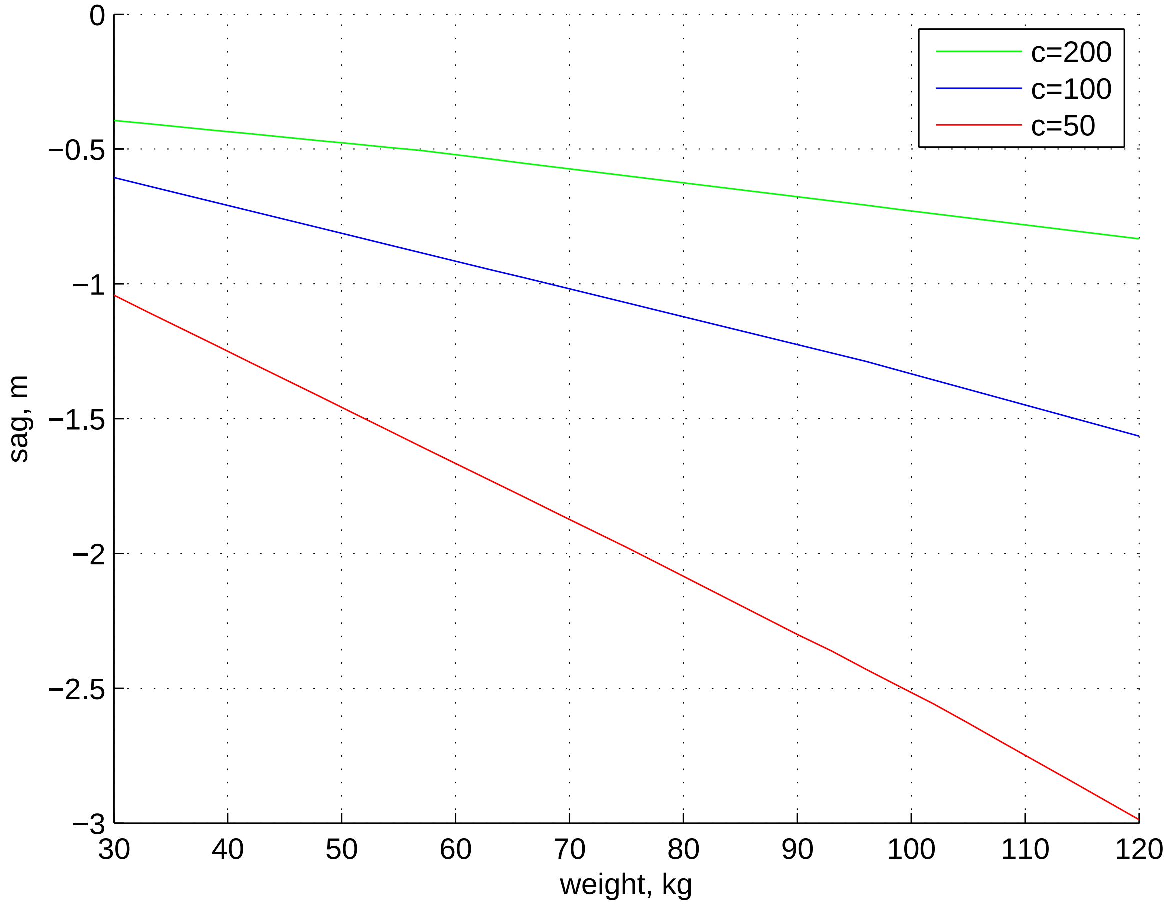


Рис. 3: Прогиб батута в зависимости от веса человека при разных прочностях ткани

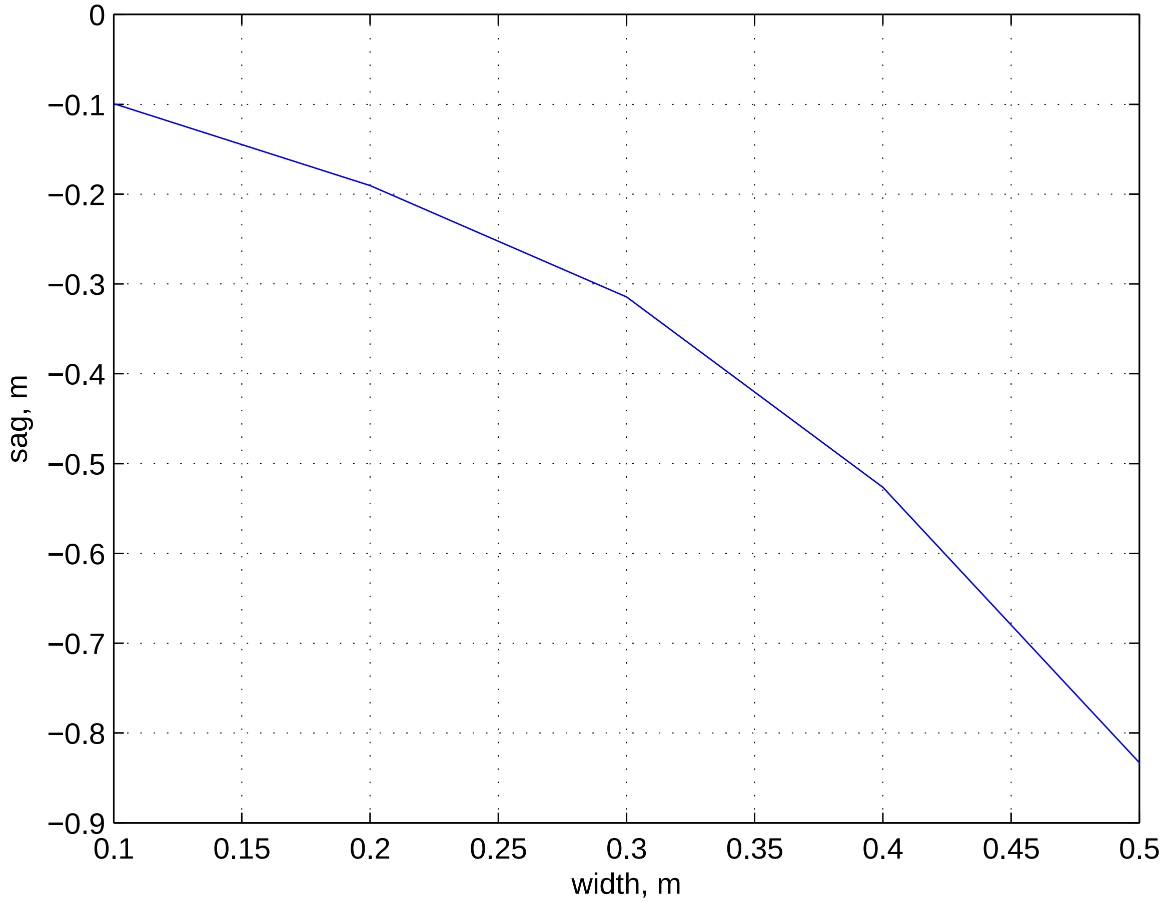


Рис. 4: Прогиб батута в зависимости от площади соприкосновения тела человека с батутом

Как видно из рисунков 2 и 4, глубина прогиба батута в гораздо большей степени зависит от веса человека, чем от высоты, с которой он прыгает. Также, можно дать рекомендацию прыгающим из зданий людям: если хорошо сгруппироваться при прыжке, можно существенно повысить свои шансы на выживание.

Возвращаясь к основной задаче, теперь можно дать ответ: прочности полотна в 200 единиц вполне достаточно для спасения людей весом до 120 кг, прыгающих с высоты до 30 метров.

7 Выводы

Была построена модель спасательного батута и провдено её численное исследование, были даны рекомендации спасающимся из горящих зданий.

К недостаткам данной модели можно отнести то, что было проведено исследование только квадратных батутов, в то время как большинство реально сущеструющих имеют форму круга. Однако, эту модель можно легко расширить на круглые батуты, перейдя к цилиндрическим координатам. Так же на существующих спасательных батутах полотно крепится к раме не жёстко, а с помощью пружин. Это даст граничные условия третьего рода, что существенно усложнит задачу.