Analysis 1

Serie 11

Differenzierbarkeit

Abgabe: 17.12.21

1. (3 Punkte) Beweisen Sie, dass folgende Funktionen auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar sind, und bestimmen Sie jeweils ihre Ableitung:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 7x\exp(x^2)$

b) $\cot\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto (\sin(x^2))^2$.

2. (2 Punkte) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

a) Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist f_k in 0 differenzierbar?

b) Ist für solche $k \in \mathbb{N}$ die Ableitung f_k' in 0 stetig?

3. (3 Punkte) Berechnen Sie die Ableitungen und bestimmen Sie alle globalen und lokalen Extrema folgender Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \ x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \ x \mapsto 2\cos(x) + \sin^2(x)$

c) $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R};\ \ x \mapsto 4x\sqrt{4 - x^2}$.

4. (2 Punkte) Beweisen Sie:

a) Ist $f\colon \mathbb{R} \supseteq (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt

$$f \text{ konstant} \iff f' = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

b) Sind $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ und $g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = g'$, dann existiert ein $r \in \mathbb{R}$, sodass $f = g + r$.

5. (2 Bonuspunkte) Beweisen Sie das *Folgenkriterium für Grenzwerte*:

Sei $\langle A, d_A\rangle$, $\langle B, d_B\rangle$ metrische Räume, $f\colon A \supseteq D_f \to B$ eine Funktion und $a \in A$ ein Häufungspunkt von D_f. Dann gilt $\lim_{x\to a} f(x) = b$ genau dann, wenn für jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D_f mit $a_k \neq a$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \implies \lim_{k\to\infty} f(a_k) = b.$$