Analysis 1

Serie 11

Differenzierbarkeit

Abgabe: 17.12.21

1. (3 Punkte) Beweisen Sie, dass folgende Funktionen auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar sind, und bestimmen Sie jeweils ihre Ableitung:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 7x\exp(x^2)$

b) $\cot\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto (\sin(x^2))^2$.

2. (2 Punkte) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

a) Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist f_k in 0 differenzierbar?

b) Ist für solche $k \in \mathbb{N}$ die Ableitung f_k' in 0 stetig?

3. (3 Punkte) Berechnen Sie die Ableitungen und bestimmen Sie alle globalen und lokalen Extrema folgender Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2\cos(x) + \sin^2(x)$

c) $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R};\ x \mapsto 4x\sqrt{4 - x^2}$.

4. (2 Punkte) Beweisen Sie:

a) Ist $f\colon \mathbb{R} \supseteq (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt

$$f \text{ konstant} \iff f' = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

b) Sind $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ und $g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = g'$, dann existiert ein $r \in \mathbb{R}$, sodass $f = g + r$.

5. (2 Bonuspunkte) Beweisen Sie das *Folgenkriterium für Grenzwerte*:

Sei $\langle A, d_A\rangle$, $\langle B, d_B\rangle$ metrische Räume, $f\colon A \supseteq D_f \to B$ eine Funktion und $a \in A$ ein Häufungspunkt von D_f. Dann gilt $\lim_{x\to a} f(x) = b$ genau dann, wenn für jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D_f mit $a_k \neq a$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \implies \lim_{k\to\infty} f(a_k) = b.$$

① a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7x\exp(x^2)$

$$= 7xe^{x^2}$$

nach der <u>Produktregel</u> gilt:

$$f'(x) = 7e^{x^2} + 7x \cdot 2xe^{x^2}$$

$$= (7 + 14x)e^{x^2}$$

$\longrightarrow$ f is everywhere differentiable.

b) $\cot: \mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\cot(x) = \frac{\sin(x)\cdot(-\sin(x)) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= \frac{-\sin(x)^2 - \cos(x)^2}{\sin(x)^2}$$

$$= (-1)\frac{1}{\sin(x)^2}$$

$\longrightarrow$ f is differentiable on $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\sin(x^2))^2$

nach der <u>Kettenregel</u> gilt:

$$f(x)' = 2\sin(x^2)\cdot\frac{d}{dx}\sin(x^2)\cdot 2x$$

$$= 4x\sin(x^2)\cos(x^2)\cdot 2x$$

$\longrightarrow$ f is everywhere differentiable.

<u>Ex. 1:</u> $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x)' = -\frac{1}{x^2}$$

<u>Ex. 2:</u>

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ does not exist.

---

② $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

a) Define $g_k(x) = x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $g_k: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$g_k(x)' = k \cdot x^{k-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^k \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= kx^{k-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{k-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to 0} kx^{k-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ depends on k:

If $k=1$, then this limit does not exist.

If $k \geq 2$, there $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ so $\underset{\downarrow \atop 0}{-kx^{k-1}} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{kx^{k-1}}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \underset{\downarrow \atop 0}{kx^{k-1}}$

<u>Sandwich-Lemma:</u>

$$f_k(x)' = \lim \frac{f_k(x) - f_k(h)}{x - h}$$

For $x=0$: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f_k(0) - f_k(h)}{-h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f_k(h)}{h} = \frac{h^k \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = h^{k-1}\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$

Definitive exists for all $k \geq 2$.

b) Continuous for all $k \geq 3$.

---

③ a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

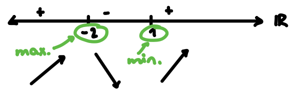
$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$

$f(x)' = 6x^2 + 6x - 12 \overset{?}{=} 0$

$= x^2 + x - 2 = 0$

$= (x-1)(x-2) = 0$

$\Longrightarrow x = 1, -2$



---

④ $f: \mathbb{R} \supset (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

a) f constant $\Longleftrightarrow f'(x) = 0$

<u>Proof:</u> If f is a constant function, then $f' = 0$ (by some them). Conversely, suppose that $f' = 0$. Suppose that $x, y \in (a,b)$. By the mean value then, there exists $c \in (a,b)$ such that $f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ so $0 = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Thus $f(x) - f(y) = 0$, and therefore $f(x) = f(y)$.

b) $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f' = g'$ if and only if $f = g + c$ for some constant c.

<u>Proof:</u> Define $h = f - g$. Applying a), we have $h' = 0$ iff h is a constant, say $h = c$. So $f' - g' = 0$ iff $h = c$ for some constant c. This is the same as saying $f = g + c$ iff $f' = g'$. q.e.d.

---

⑤ $\langle A, d_A \rangle$, $\langle B, d_B \rangle$ EXAM-TYPE OF QUESTION

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ holds iff for every sequence $a_k \longrightarrow a$,

$\lim_{k \to \infty} f(a_k) = b$.

<u>Proof:</u> Suppose first that $\lim_{x \to a} f(x) = b$, and let (a_k) be a sequence in A such that $a_k \longrightarrow a$.

We must show $\lim_{k \to \infty} f(a_k) = b$. Let $\varepsilon > 0$. Since $\lim_{x \to a} f(x) = b$, there exists $\delta > 0$ such that for all $x \in A$ with $d_A(x, a) < \delta$ we have $d_B(f(x), b) < \varepsilon$.

Since $a_k \to a$, there exist $N \in \mathbb{N}$ such that for all $k \geq N$, $d_A(a_k, a) < \delta$. Thus for all $k \geq N$, $d_B(f(a_k), b) < \varepsilon$.

Therefore $\lim_{k \to \infty} f(a_k) = b$.

For the converse, suppose on the contrary that $\lim_{x \to a} f(x) \neq b$. Then for some $\varepsilon > 0$ and every $\delta > 0$, there exists x such that $d_A(x, a) < \delta$ but $d_B(f(x), b) \geq \varepsilon$.

For each $n \in \mathbb{N}$, pick $a_n \in A$ such that $d_A(a_n, a) < \frac{1}{n}$ and $d_B(f(a_n), b) \geq \varepsilon$.

Because $d_A(a_n, a) < \frac{1}{n}$, we have $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, but since $d_B(f(a_n), b) \geq \varepsilon$, we have $\lim_{n \to \infty} f(a_n) \neq b$. q.e.d.