

LINEARE ALGEBRA I IM HS 2021

FRANK KUTZSCHEBAUCH

1. THEMA

Def. Gruppe, Beweis elementarer Eigenschaften (Eindeutigkeit des Inversen, des neutralen Elements ...) Def. Gruppenhomomorphismus, Gruppenisomorphismus, Bild, Kern eines Gruppenhomomorphismus, elementare Eigenschaften, Gruppentafel

2. THEMA

Def. Ring, Nullteilerfreiheit, Def. Körper, Beweis elementarer Rechenregeln, Beweis des Satzes: endliche nullteilerfreie kommutative Ringe mit Eins sind Körper.

3. THEMA

Def. Vektorraum über Körper, elementare Rechenregeln, Untervektorräume, 3 Beispiele von Vektorräumen: z.B. Folgen, Polynome, Abbildungen in einen Körper,

4. THEMA

Fundamentallemma über homogene Gleichungssysteme mit Beweis

5. THEMA

Def. Span und Erzeugendensystem eines Vektorraums, Abhängigkeitslemma mit Beweis

6. THEMA

Schrankenlemma mit Beweis

7. THEMA

Def. der Basis und der Dimension eines Vektorraumes, Eindeutigkeitslemma mit Beweis, Basis-Satz, Äquivalenzsatz mit Beweis,

8. THEMA

Dimensionssatz mit Beweis,

Basen, Dimension oder linear unabhängige Teilmengen in folgenden Beispielen: reelle Zahlen als \mathbb{Q} -Vektorraum, Standard-Raum, reelle Folgen, Abbildungen in einen Körper, reelle Polynome.

9. THEMA

Begriff des Ranges einer Teilmenge, Anwendungen der elementaren Vektorraumtheorie auf lineare Gleichungssysteme,

Def. Homomorphismen von Vektorräumen,

Satz: endlichdimensionale Vektorräume sind isomorph, genau dann wenn sie gleiche Dimension haben (mit Beweis)

10. THEMA

Dimensionsformel für Vektorraumhomomorphismen mit Beweis

11. THEMA

Äquivalenzsatz für lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen derselben Dimension
Anwendung der Dimensionsformel zur Bestimmung der Dimension des Lösungsraumes eines homogenen linearen Gleichungssystems,

12. THEMA

Def. Dualraum, Konstruktion einer Basis des Dualraums von $\text{Abb}[M, K]$ (Abbildungen mit endlichem Träger)

13. THEMA

Satz über die direkte Summe von Unterräumen mit Beweis , Dimensionsformel für Summen mit Beweis

14. THEMA

Def. Spalten- und Zeilenrang,

Satz über Gleichheit von Zeilen- und Spaltenrang mit Beweis

15. THEMA

Def. elementare Zeilen- und Spaltenumformungen, Beweis der Invarianz des Ranges einer Matrix unter elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen,

16. THEMA

Normalformen-Satz für Matrizen: Jede Matrix kann man durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in Normalform $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bringen. (Man muss die Formulierung exakter können als hier aufgeschrieben!)

Normalformen-Satz für Lineare Abbildungen: Für jedes $f \in \text{Hom}(V, W)$ gibt es Basen A und B mit $\text{Mat}(f, A, B) = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (Man muss die Formulierung exakter können als hier aufgeschrieben!)

Beweis der Äquivalenz dieser beiden Aussagen und Beweis eines dieser äquivalenten Sätze

17. THEMA

Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis, Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ bzgl. Basen von V und W , Übergangsmatrizen und Transformationsformel für diese Matrizen

18. THEMA

Definition Determinantenfunktionen, Beweis der Eindeutigkeit bis auf Faktor

19. THEMA

Satz über Zusammenhang zwischen Determinante und Invertierbarkeit mit Beweis

20. THEMA

Cramersche Regel, Definition der Cofaktoren. Entwicklung der Determinante nach Zeilen und Spalten mit Beweis, Def. der adjungierten Matrix und Zusammenhang mit der Inversen

21. THEMA

Beweis des Existenzsatzes für Determinante

22. THEMA

Def. Signum einer Permutation, Leibnizformel oder vollständige Entwicklung der Determinante mit Beweis