Analysis I

Prüfung Februar 2019

1. (5 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. (In dieser Aufgabe brauchen Sie Ihre Antworten *nicht* zu begründen.)

(a) Der Körper der komplexen Zahlen kann nicht angeordnet werden.

(b) Jede beschränkte Folge in einem metrischen Raum enthält eine konvergente Teilfolge.

(c) Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent in $\mathbb{R}$, dann auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

(d) Jede differenzierbare Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ ist gleichmässig stetig.

(e) Hat ein Polynom $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lokale Extremstelle in $c \in \mathbb{R}$, so gilt $f'(c) = 0$.

2. (4 Punkte)

(a) Definieren Sie: eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$.

(b) Beweisen Sie: sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$, so auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3. (6 Punkte) Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Reihen (mit $z \in \mathbb{C}$):

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{k+1}+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{\ln(k+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (2z-1)^{2k}$.

4. (6 Punkte)

(a) Definieren Sie: eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig in einem Punkt $a \in \mathbb{C}$.

(b) Zeigen Sie: die folgende komplexe Funktion ist überall stetig, aber nirgends differenzierbar:

$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \bar{z}.$$

(c) Zeigen Sie: die folgende reelle Funktion hat genau eine Nullstelle:

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto 2x + \sin(x) + 3.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz und den Satz von Rolle.

5. (4 Punkte) Bestimmen Sie:

(a) $\int\limits_0^1 x \sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int\limits_0^\pi x^2 \sin(2x)\,\mathrm{d}x.$