Analysis 1

Serie 12

Riemann-Integral, Integration

Abgabe: 22.12.2021

1. (2 Punkte) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei $c \in (a,b)$. Beweisen Sie: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Einschränkungen $f|_{[a,c]}$, $f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar sind, und in diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. (2 Punkte) Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ mit Hilfe von Ober- und Untersummen

$$\int\limits_0^a \exp(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Betrachten Sie Partitionen $\{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \ldots, a\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Riemann-Integrale

a) $\int_0^\pi x \sin(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^1 x \exp(x^2)\,\mathrm{d}x$

c) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x$

d) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}\,\mathrm{d}x$.

4. (2 Punkte) Berechnen Sie das Riemann-Integral

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe (i) der Substitutionsregel; (ii) partieller Integration.

5. (2 Bonuspunkte) Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Beweisen Sie:

a) Für $c, d \in \mathbb{R}$ ist $cf + dg$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \big(cf(x) + dg(x)\big)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + d\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann folgt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$