Métodos Numéricos para Ingeniería
Método de SOR

Algoritmo del método de SOR

Para resolver $Ax = b$ dado el parámetro ω y una aproximación inicial $x^{(0)}$:

ENTRADA el número de ecuaciones y valores desconocidos n; las entradas a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ de la matriz A; las entradas b_i, $1 \leq i \leq n$ de b; las entradas XO_i, $1 \leq i \leq n$, de $XO = x^{(0)}$; el parámetro ω; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N.

SALIDA la solución aproximada $x_1, \ldots, x_n$ o un mensaje que indique que se superó el número de iteraciones.

PASO 1 Determine $k = 1$.

PASO 2 Mientras $(k \leq N)$ haga los pasos 3 - 6.

PASO 3 Para $i = 1, \ldots, n$

determine $x_i = (1-\omega)XO_i + \dfrac{1}{a_{ii}}\left[\omega\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}XO_j + b_i\right)\right]$.

PASO 4 Si $||x - XO||_\infty < TOL$ entonces SALIDA $(x_1, \ldots, x_n)$;
(El procedimiento fue exitoso.)
PARE.

PASO 5 Determine $k = k + 1$.

PASO 6 Para $i = 1, \ldots, n$ determine $XO_i = x_i$.

PASO 7 SALIDA ('número máximo de iteraciones excedido');
(El procedimiento no fue exitoso.)
PARE.

Una pregunta obvia es cómo se selecciona el valor adecuado de ω cuando se usa el método de SOR. A pesar de que no se conoce una respuesta completa a esta pregunta para el sistema lineal $Ax = b$, el siguiente resultado se puede utilizar en ciertas situaciones importantes.

Teorema: Si A es definida positiva y tridiagonal, entonces la selección óptima de ω, para el método de SOR es

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_J)]^2}}.$$

Problema

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden surgir al resolver ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la ecuación diferencial siguiente proviene de un balance de calor para una barra larga y delgada (véase la figura):

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h\,(T_a - T) = 0 \tag{0.1}$$

donde:
T : temperatura $[°C]$,
x : distancia a lo largo de la barra $[m]$,
h : coeficiente de transferencia de calor entre la barra y el aire del ambiente $[m^{-2}]$,
T_a : temperatura del aire circundante $[°C]$.

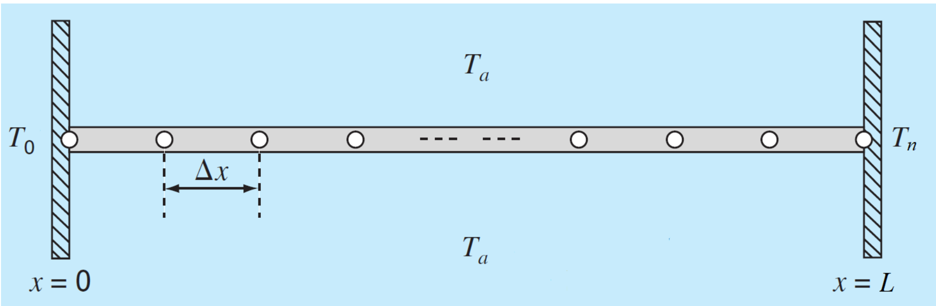
Esta ecuación se transforma en un sistema de ecuaciones lineales por medio del uso de una aproximación en diferencias finitas para la segunda derivada

$$\frac{d^2T}{dx^2} \approx \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2}$$

donde T_i denota la temperatura en el nodo i. Esta aproximación se sustituye en la ecuación (0.1) y se obtiene

$$-T_{i-1} + \left(2 + h\Delta x^2\right) T_i - T_{i+1} = h\Delta x^2 T_a, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Se puede plantear esta ecuación para cada uno de los nodos interiores de la barra, lo que resulta en un sistema tridiagonal de ecuaciones. Los nodos primero y último en los extremos de la barra están fijos por las condiciones de frontera.



Actividades

(1) Implemente en Python el algoritmo del método de SOR siguiendo estrictamente las instrucciones del documento. No se deben utilizar variantes alternativas del algoritmo.

(2) Plantee el problema anteriormente descrito como un sistema de ecuaciones lineales, $Ax = b$. Para ello:

 (i) Desarrolle una función en Python que reciba como parámetros de entrada los valores de L, h y Δx; y que entregue como salida la matriz A.

 (i) Desarrolle una función en Python que reciba como parámetros de entrada los valores de L, T_a, T_0, T_n, h y Δx; y que entregue como salida el vector b.

(3) Resuelva el sistema del apartado anterior, utilizando el algoritmo del método de SOR del ítem (1), con los siguientes parámetros: $x^{(0)} = \vec{0}$, $TOL = 10^{-13}$, $N = 1000$, $L = 10\,[m]$, $T_a = 20\,[°C]$, $T_0 = 40\,[°C]$, $T_n = 200\,[°C]$, $h = 0.02\,[m^{-2}]$ y $\Delta x = 2\,[m]$.