Задача 4.1.

$$\mathsf{P}(y \mid \vec{x}\,) \propto \mathsf{P}(y) \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(x^{(k)} \mid y) = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(k)}-\mu_{yk})^2}{2\sigma^2}} \propto$$

$$\propto e^{-\frac{\sum_{k=1}^{n}(x^{(k)}-\mu_{yk})^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{\rho(\vec{x},\vec{\mu}\,y)}{2\sigma^2}}.$$

Соответствующее выражение максимально тогда, когда минимально расстояние от $\vec{x}$ до $\vec{\mu}_y$. □

Задача 4.2.

Поскольку вывод классификатора не зависит от входа, то доля позитивных ответов не зависит от актуального класса и TPR = FPR. Это значит, что средняя точка треугольной ROC-кривой лежит на диагонали и площадь под этой кривой равна 0.5. □

Задача 4.3.

$$E_N = \mathsf{P}(y \neq y_n) = \mathsf{P}(1 \mid x)\mathsf{P}(0 \mid x_n) + \mathsf{P}(0 \mid x)\mathsf{P}(1 \mid x_n) \to$$

$$\to 2\mathsf{P}(0 \mid x)\mathsf{P}(1 \mid x) \leqslant 2\min(\mathsf{P}(0 \mid x), \mathsf{P}(1 \mid x)) = 2E_B. \quad \square$$