

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
образования

**Ульяновский государственный технический университет**

Факультет информационных систем и технологий

Кафедра «Прикладная математика и информатика»

## **Расчётно-графическая работа**

По дисциплине «Теория вероятностей, математическая статистика и теория  
случайных процессов»

**Выполнила:**  
студентка группы ПМбд-21  
Шувалова В.Д.

**Проверила:**  
к.т.н., доцент  
Кувайскова Ю.Е.

Ульяновск  
2024 г.

## ЗАДАНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ ПО «МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ»

### Задание:

1. Выбрать объект с двумя случайными параметрами  $X$  и  $Y$ , собрать выборку объёма  $n = 100$ . Результат оформить в виде таблицы.
2. Составить две отдельные выборки для  $X$  и  $Y$ .
3. Составить вариационные ряды для  $X$  и  $Y$ .
4. Составить группированные выборки для  $X$  и  $Y$  с числом интервалов  $k = 8 - 10$ .
5. По полученным группированным выборкам построить на **отдельных** графиках гистограмму частот, полигон частот и выборочную функцию распределения для каждой случайной величины  $X$  и  $Y$ .
6. По построенным графикам выбрать типы распределения величин  $X$  и  $Y$  (равномерное, показательное, нормальное и др.)
7. Вычислить точечные оценки математического ожидания и дисперсии для  $X$  и  $Y$ .
8. Найти **95%** и **99%** доверительные интервалы для **математического ожидания** и **дисперсии** случайных величин  $X$  и  $Y$ .
9. Определить параметры теоретического закона распределения для  $X$  и  $Y$ , используя метод моментов (кроме случая равномерного распределения).
10. Построить отдельно для  $X$  и  $Y$  на одном графике гистограмму, полигон и теоретическую плотность распределения вероятностей. (При построении графиков по оси ординат откладывать значения плотности относительной частоты  $\frac{n_i}{nw}$ ).
11. С уровнем значимости  $\alpha = 0,05$  проверить гипотезы о выбранных теоретических распределениях, используя критерий  $\chi^2$ .
12. Методом наименьших квадратов найти параметры  $a$  и  $b$  уравнения линейной среднеквадратической регрессии  $Y$  на  $X$  ( $y = ax + b$ )
13. Вычислить коэффициенты корреляции и детерминации. Сделать выводы о степени линейной связи между переменными  $X$  и  $Y$ .
14. Проверить значимость линейной регрессии  $y = ax + b$  по критерию Фишера.
15. Изобразить на одном графике диаграмму рассеивания (каждая пара  $(x; y)$  – изображается точкой) и прямую регрессии  $y = ax + b$ .

Исходными данными для примера являются измерения доли населения за чертой бедности за 2022 год в % (случайная величина Y) и инфляции за 2022 год в % (случайная величина X) в различных странах мира. Всего было рассмотрено 100 стран.

**Таблица 1. Сравнение инфляции и доли населения за чертой бедности в 100 странах мира**

<b>N</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>N</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>N</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>N</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>
<b>1</b>	6,24	14,30	<b>26</b>	13,50	8,60	<b>51</b>	20,10	14,40	<b>76</b>	8,39	17,50
<b>2</b>	9,88	5,50	<b>27</b>	9,89	38,83	<b>52</b>	10,63	17,90	<b>77</b>	11,52	46,00
<b>3</b>	21,69	36,21	<b>28</b>	12,27	42,40	<b>53</b>	6,33	9,90	<b>78</b>	12,68	25,31
<b>4</b>	17,81	37,81	<b>29</b>	8,87	24,53	<b>54</b>	14,65	43,70	<b>79</b>	3,23	5,60
<b>5</b>	8,54	31,80	<b>30</b>	10,21	33,72	<b>55</b>	21,23	37,70	<b>80</b>	4,27	8,20
<b>6</b>	6,50	12,40	<b>31</b>	7,99	14,70	<b>56</b>	8,25	31,55	<b>81</b>	8,00	42,10
<b>7</b>	7,74	13,30	<b>32</b>	17,77	10,10	<b>57</b>	16,48	12,30	<b>82</b>	5,87	17,10
<b>8</b>	14,32	6,00	<b>33</b>	11,85	29,40	<b>58</b>	8,43	8,80	<b>83</b>	16,00	12,60
<b>9</b>	6,15	27,02	<b>34</b>	7,20	12,50	<b>59</b>	6,89	21,90	<b>84</b>	15,97	26,70
<b>10</b>	17,95	5,00	<b>35</b>	8,05	31,74	<b>60</b>	4,63	9,40	<b>85</b>	8,03	41,90
<b>11</b>	11,92	14,80	<b>36</b>	9,02	24,53	<b>61</b>	6,47	34,50	<b>86</b>	20,05	7,30
<b>12</b>	5,00	38,50	<b>37</b>	3,21	29,87	<b>62</b>	8,40	13,10	<b>87</b>	17,54	33,50
<b>13</b>	7,66	8,20	<b>38</b>	8,50	36,51	<b>63</b>	4,52	16,90	<b>88</b>	15,81	29,42
<b>14</b>	3,19	40,20	<b>39</b>	7,29	22,80	<b>64</b>	8,74	21,04	<b>89</b>	6,20	4,80
<b>15</b>	10,50	16,90	<b>40</b>	5,14	46,10	<b>65</b>	3,06	16,00	<b>90</b>	12,03	46,10
<b>16</b>	11,86	19,30	<b>41</b>	7,35	72,06	<b>66</b>	9,00	19,90	<b>91</b>	16,33	15,40
<b>17</b>	10,30	32,14	<b>42</b>	21,00	21,70	<b>67</b>	1,99	15,70	<b>92</b>	6,40	30,21
<b>18</b>	14,43	26,70	<b>43</b>	4,87	33,80	<b>68</b>	3,80	15,70	<b>93</b>	6,26	30,66
<b>19</b>	17,22	41,40	<b>44</b>	21,34	30,02	<b>69</b>	16,92	4,30	<b>94</b>	13,95	13,60
<b>20</b>	18,34	42,50	<b>45</b>	4,75	33,61	<b>70</b>	7,24	17,10	<b>95</b>	9,94	29,61
<b>21</b>	5,21	17,70	<b>46</b>	6,55	12,20	<b>71</b>	8,83	22,38	<b>96</b>	4,70	12,70
<b>22</b>	4,58	34,50	<b>47</b>	8,51	13,60	<b>72</b>	17,86	25,20	<b>97</b>	14,02	27,02
<b>23</b>	6,90	11,60	<b>48</b>	11,50	18,60	<b>73</b>	8,92	12,00	<b>98</b>	5,32	16,70
<b>24</b>	6,53	37,54	<b>49</b>	13,81	36,81	<b>74</b>	6,91	34,38	<b>99</b>	7,90	17,20
<b>25</b>	3,76	6,70	<b>50</b>	8,46	14,80	<b>75</b>	19,05	22,07	<b>100</b>	7,46	21,14

**Таблица 2. Выборка для случайной величины X**

<b>N</b>	<b>X</b>	<b>N</b>	<b>X</b>	<b>N</b>	<b>X</b>	<b>N</b>	<b>X</b>	<b>N</b>	<b>X</b>
<b>1</b>	6,24	<b>21</b>	5,21	<b>41</b>	7,35	<b>61</b>	6,47	<b>81</b>	8,00
<b>2</b>	9,88	<b>22</b>	4,58	<b>42</b>	21,00	<b>62</b>	8,40	<b>82</b>	5,87
<b>3</b>	21,69	<b>23</b>	6,90	<b>43</b>	4,87	<b>63</b>	4,52	<b>83</b>	16,00
<b>4</b>	17,81	<b>24</b>	6,53	<b>44</b>	21,34	<b>64</b>	8,74	<b>84</b>	15,97
<b>5</b>	8,54	<b>25</b>	3,76	<b>45</b>	4,75	<b>65</b>	3,06	<b>85</b>	8,03
<b>6</b>	6,50	<b>26</b>	13,50	<b>46</b>	6,55	<b>66</b>	9,00	<b>86</b>	20,05
<b>7</b>	7,74	<b>27</b>	9,89	<b>47</b>	8,51	<b>67</b>	1,99	<b>87</b>	17,54
<b>8</b>	14,32	<b>28</b>	12,27	<b>48</b>	11,50	<b>68</b>	3,80	<b>88</b>	15,81
<b>9</b>	6,15	<b>29</b>	8,87	<b>49</b>	13,81	<b>69</b>	16,92	<b>89</b>	6,20
<b>10</b>	17,95	<b>30</b>	10,21	<b>50</b>	8,46	<b>70</b>	7,24	<b>90</b>	12,03
<b>11</b>	11,92	<b>31</b>	7,99	<b>51</b>	20,10	<b>71</b>	8,83	<b>91</b>	16,33
<b>12</b>	5,00	<b>32</b>	17,77	<b>52</b>	10,63	<b>72</b>	17,86	<b>92</b>	6,40
<b>13</b>	7,66	<b>33</b>	11,85	<b>53</b>	6,33	<b>73</b>	8,92	<b>93</b>	6,26
<b>14</b>	3,19	<b>34</b>	7,20	<b>54</b>	14,65	<b>74</b>	6,91	<b>94</b>	13,95
<b>15</b>	10,50	<b>35</b>	8,05	<b>55</b>	21,23	<b>75</b>	19,05	<b>95</b>	9,94
<b>16</b>	11,86	<b>36</b>	9,02	<b>56</b>	8,25	<b>76</b>	8,39	<b>96</b>	4,70
<b>17</b>	10,30	<b>37</b>	3,21	<b>57</b>	16,48	<b>77</b>	11,52	<b>97</b>	14,02
<b>18</b>	14,43	<b>38</b>	8,50	<b>58</b>	8,43	<b>78</b>	12,68	<b>98</b>	5,32
<b>19</b>	17,22	<b>39</b>	7,29	<b>59</b>	6,89	<b>79</b>	3,23	<b>99</b>	7,90
<b>20</b>	18,34	<b>40</b>	5,14	<b>60</b>	4,63	<b>80</b>	4,27	<b>100</b>	7,46

**Таблица 3. Выборка для случайной величины Y**

<b>N</b>	<b>Y</b>	<b>N</b>	<b>Y</b>	<b>N</b>	<b>Y</b>	<b>N</b>	<b>Y</b>	<b>N</b>	<b>Y</b>
<b>1</b>	14,30	<b>21</b>	17,70	<b>41</b>	45,90	<b>61</b>	34,50	<b>81</b>	42,10
<b>2</b>	5,50	<b>22</b>	34,50	<b>42</b>	21,70	<b>62</b>	13,10	<b>82</b>	17,10
<b>3</b>	36,21	<b>23</b>	11,60	<b>43</b>	33,80	<b>63</b>	16,90	<b>83</b>	12,60
<b>4</b>	37,81	<b>24</b>	37,54	<b>44</b>	30,02	<b>64</b>	21,04	<b>84</b>	26,70
<b>5</b>	31,80	<b>25</b>	6,70	<b>45</b>	33,61	<b>65</b>	16,00	<b>85</b>	41,90
<b>6</b>	12,40	<b>26</b>	8,60	<b>46</b>	12,20	<b>66</b>	19,90	<b>86</b>	7,30
<b>7</b>	13,30	<b>27</b>	38,83	<b>47</b>	13,60	<b>67</b>	15,70	<b>87</b>	33,50
<b>8</b>	6,00	<b>28</b>	42,40	<b>48</b>	18,60	<b>68</b>	15,70	<b>88</b>	29,42
<b>9</b>	27,02	<b>29</b>	24,53	<b>49</b>	36,81	<b>69</b>	4,30	<b>89</b>	4,80
<b>10</b>	5,00	<b>30</b>	33,72	<b>50</b>	14,80	<b>70</b>	17,10	<b>90</b>	46,10
<b>11</b>	14,80	<b>31</b>	14,70	<b>51</b>	14,40	<b>71</b>	22,38	<b>91</b>	15,40
<b>12</b>	38,50	<b>32</b>	10,10	<b>52</b>	17,90	<b>72</b>	25,20	<b>92</b>	30,21
<b>13</b>	8,20	<b>33</b>	29,40	<b>53</b>	9,90	<b>73</b>	12,00	<b>93</b>	30,66
<b>14</b>	40,20	<b>34</b>	12,50	<b>54</b>	43,70	<b>74</b>	34,38	<b>94</b>	13,60
<b>15</b>	16,90	<b>35</b>	31,74	<b>55</b>	37,70	<b>75</b>	22,07	<b>95</b>	29,61
<b>16</b>	19,30	<b>36</b>	24,53	<b>56</b>	31,55	<b>76</b>	17,50	<b>96</b>	12,70
<b>17</b>	32,14	<b>37</b>	29,87	<b>57</b>	12,30	<b>77</b>	46,00	<b>97</b>	27,02
<b>18</b>	26,70	<b>38</b>	36,51	<b>58</b>	8,80	<b>78</b>	25,31	<b>98</b>	16,70
<b>19</b>	41,40	<b>39</b>	22,80	<b>59</b>	21,90	<b>79</b>	5,60	<b>99</b>	17,20

<b>20</b>	42,50	<b>40</b>	46,10	<b>60</b>	9,40	<b>80</b>	8,20	<b>100</b>	21,14
-----------	-------	-----------	-------	-----------	------	-----------	------	------------	-------

**Таблица 4. Вариационный ряд для X**

<b>N</b>	<b>X</b>	<b>N</b>	<b>X</b>	<b>N</b>	<b>X</b>	<b>N</b>	<b>X</b>	<b>N</b>	<b>X</b>
<b>1</b>	1,99	<b>21</b>	6,20	<b>41</b>	7,99	<b>61</b>	9,94	<b>81</b>	15,81
<b>2</b>	3,06	<b>22</b>	6,24	<b>42</b>	8,00	<b>62</b>	10,21	<b>82</b>	15,97
<b>3</b>	3,19	<b>23</b>	6,26	<b>43</b>	8,03	<b>63</b>	10,30	<b>83</b>	16,00
<b>4</b>	3,21	<b>24</b>	6,33	<b>44</b>	8,05	<b>64</b>	10,50	<b>84</b>	16,33
<b>5</b>	3,23	<b>25</b>	6,40	<b>45</b>	8,25	<b>65</b>	10,63	<b>85</b>	16,48
<b>6</b>	3,76	<b>26</b>	6,47	<b>46</b>	8,39	<b>66</b>	11,50	<b>86</b>	16,92
<b>7</b>	3,80	<b>27</b>	6,50	<b>47</b>	8,40	<b>67</b>	11,52	<b>87</b>	17,22
<b>8</b>	4,27	<b>28</b>	6,53	<b>48</b>	8,43	<b>68</b>	11,85	<b>88</b>	17,54
<b>9</b>	4,52	<b>29</b>	6,55	<b>49</b>	8,46	<b>69</b>	11,86	<b>89</b>	17,77
<b>10</b>	4,58	<b>30</b>	6,89	<b>50</b>	8,50	<b>70</b>	11,92	<b>90</b>	17,81
<b>11</b>	4,63	<b>31</b>	6,90	<b>51</b>	8,51	<b>71</b>	12,03	<b>91</b>	17,86
<b>12</b>	4,70	<b>32</b>	6,91	<b>52</b>	8,54	<b>72</b>	12,27	<b>92</b>	17,95
<b>13</b>	4,75	<b>33</b>	7,20	<b>53</b>	8,74	<b>73</b>	12,68	<b>93</b>	18,34
<b>14</b>	4,87	<b>34</b>	7,24	<b>54</b>	8,83	<b>74</b>	13,50	<b>94</b>	19,05
<b>15</b>	5,00	<b>35</b>	7,29	<b>55</b>	8,87	<b>75</b>	13,81	<b>95</b>	20,05
<b>16</b>	5,14	<b>36</b>	7,35	<b>56</b>	8,92	<b>76</b>	13,95	<b>96</b>	20,10
<b>17</b>	5,21	<b>37</b>	7,46	<b>57</b>	9,00	<b>77</b>	14,02	<b>97</b>	21,00
<b>18</b>	5,32	<b>38</b>	7,66	<b>58</b>	9,02	<b>78</b>	14,32	<b>98</b>	21,23
<b>19</b>	5,87	<b>39</b>	7,74	<b>59</b>	9,88	<b>79</b>	14,43	<b>99</b>	21,34
<b>20</b>	6,15	<b>40</b>	7,90	<b>60</b>	9,89	<b>80</b>	14,65	<b>100</b>	21,69

**Таблица 5. Вариационный ряд для Y**

<b>N</b>	<b>Y</b>	<b>N</b>	<b>Y</b>	<b>N</b>	<b>Y</b>	<b>N</b>	<b>Y</b>	<b>N</b>	<b>Y</b>
<b>1</b>	4,30	<b>21</b>	12,50	<b>41</b>	17,10	<b>61</b>	26,70	<b>81</b>	34,50
<b>2</b>	4,80	<b>22</b>	12,60	<b>42</b>	17,20	<b>62</b>	27,02	<b>82</b>	36,21
<b>3</b>	5,00	<b>23</b>	12,70	<b>43</b>	17,50	<b>63</b>	27,02	<b>83</b>	36,51
<b>4</b>	5,50	<b>24</b>	13,10	<b>44</b>	17,70	<b>64</b>	29,40	<b>84</b>	36,81
<b>5</b>	5,60	<b>25</b>	13,30	<b>45</b>	17,90	<b>65</b>	29,42	<b>85</b>	37,54
<b>6</b>	6,00	<b>26</b>	13,60	<b>46</b>	18,60	<b>66</b>	29,61	<b>86</b>	37,70
<b>7</b>	6,70	<b>27</b>	13,60	<b>47</b>	19,30	<b>67</b>	29,87	<b>87</b>	37,81
<b>8</b>	7,30	<b>28</b>	14,30	<b>48</b>	19,90	<b>68</b>	30,02	<b>88</b>	38,50
<b>9</b>	8,20	<b>29</b>	14,40	<b>49</b>	21,04	<b>69</b>	30,21	<b>89</b>	38,83
<b>10</b>	8,20	<b>30</b>	14,70	<b>50</b>	21,14	<b>70</b>	30,66	<b>90</b>	40,20
<b>11</b>	8,60	<b>31</b>	14,80	<b>51</b>	21,70	<b>71</b>	31,55	<b>91</b>	41,40
<b>12</b>	8,80	<b>32</b>	14,80	<b>52</b>	21,90	<b>72</b>	31,74	<b>92</b>	41,90
<b>13</b>	9,40	<b>33</b>	15,40	<b>53</b>	22,07	<b>73</b>	31,80	<b>93</b>	42,10
<b>14</b>	9,90	<b>34</b>	15,70	<b>54</b>	22,38	<b>74</b>	32,14	<b>94</b>	42,40
<b>15</b>	10,10	<b>35</b>	15,70	<b>55</b>	22,80	<b>75</b>	33,50	<b>95</b>	42,50
<b>16</b>	11,60	<b>36</b>	16,00	<b>56</b>	24,53	<b>76</b>	33,61	<b>96</b>	43,70
<b>17</b>	12,00	<b>37</b>	16,70	<b>57</b>	24,53	<b>77</b>	33,72	<b>97</b>	45,90

<b>18</b>	12,20	<b>38</b>	16,90	<b>58</b>	25,20	<b>78</b>	33,80	<b>98</b>	46,00
<b>19</b>	12,30	<b>39</b>	16,90	<b>59</b>	25,31	<b>79</b>	34,38	<b>99</b>	46,10
<b>20</b>	12,40	<b>40</b>	17,10	<b>60</b>	26,70	<b>80</b>	34,50	<b>100</b>	46,10

**Таблица 6. Группированная выборка для X**

№ интервала	Границы интервалов		Представитель интервала $z_i$	Частоты $n_i$
	нижняя	верхняя		
1	1,99	3,96	2,98	7
2	3,96	5,93	4,95	12
3	5,93	7,90	6,92	20
4	7,90	9,87	8,89	19
5	9,87	11,84	10,86	9
6	11,84	13,81	12,83	7
7	13,81	15,78	14,80	6
8	15,78	17,75	16,77	8
9	17,75	19,72	18,74	6
10	19,72	21,69	20,71	6

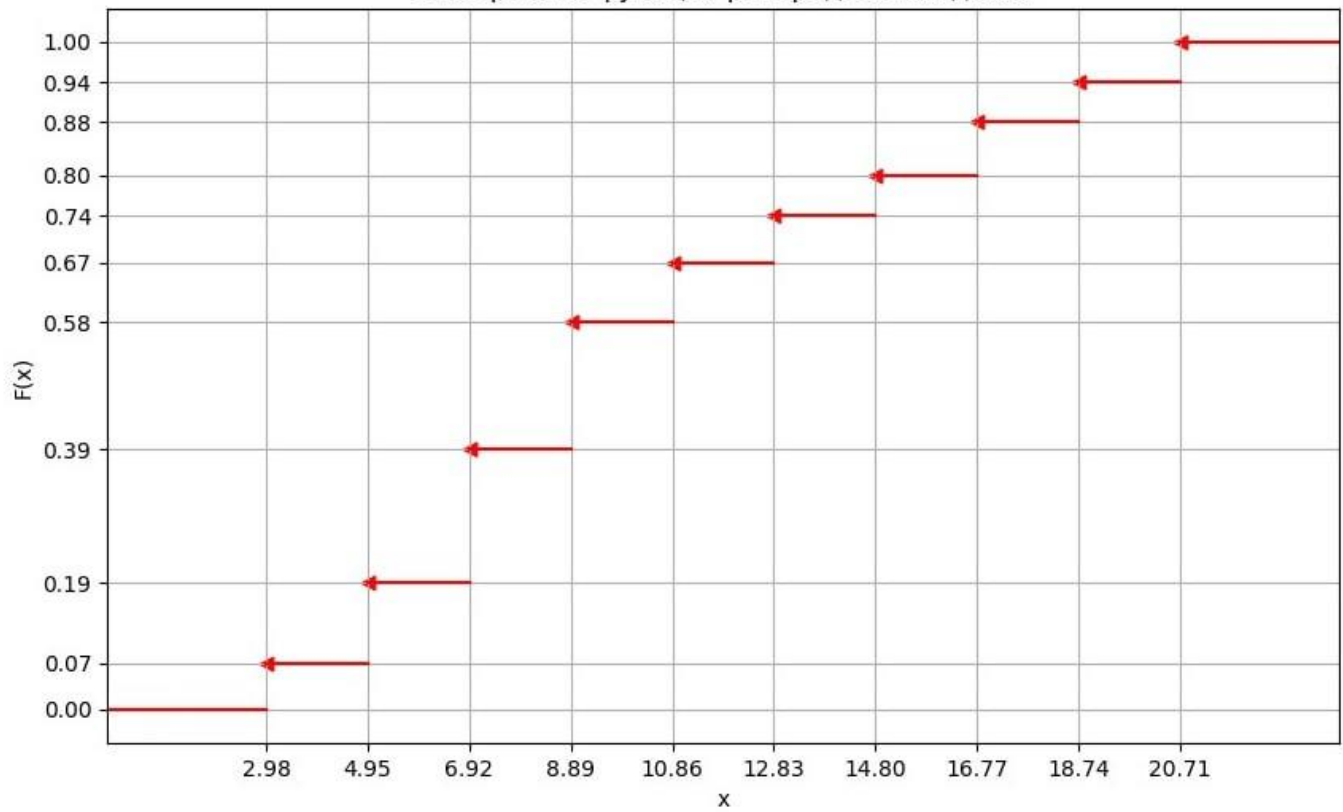
Относительные частоты $n_i / n$	Накопленные частоты $n_i$	Накопленные относительные частоты $n_i / n$	Плотность относительной частоты $n_i / n * w$
0,07	7	0,07	0,04
0,12	19	0,19	0,06
0,20	39	0,39	0,10
0,19	58	0,58	0,10
0,09	67	0,67	0,05
0,07	74	0,74	0,04
0,06	80	0,80	0,03
0,08	88	0,88	0,04
0,06	94	0,94	0,03
0,06	100	1,00	0,03

**Таблица 7. Группированная выборка для Y**

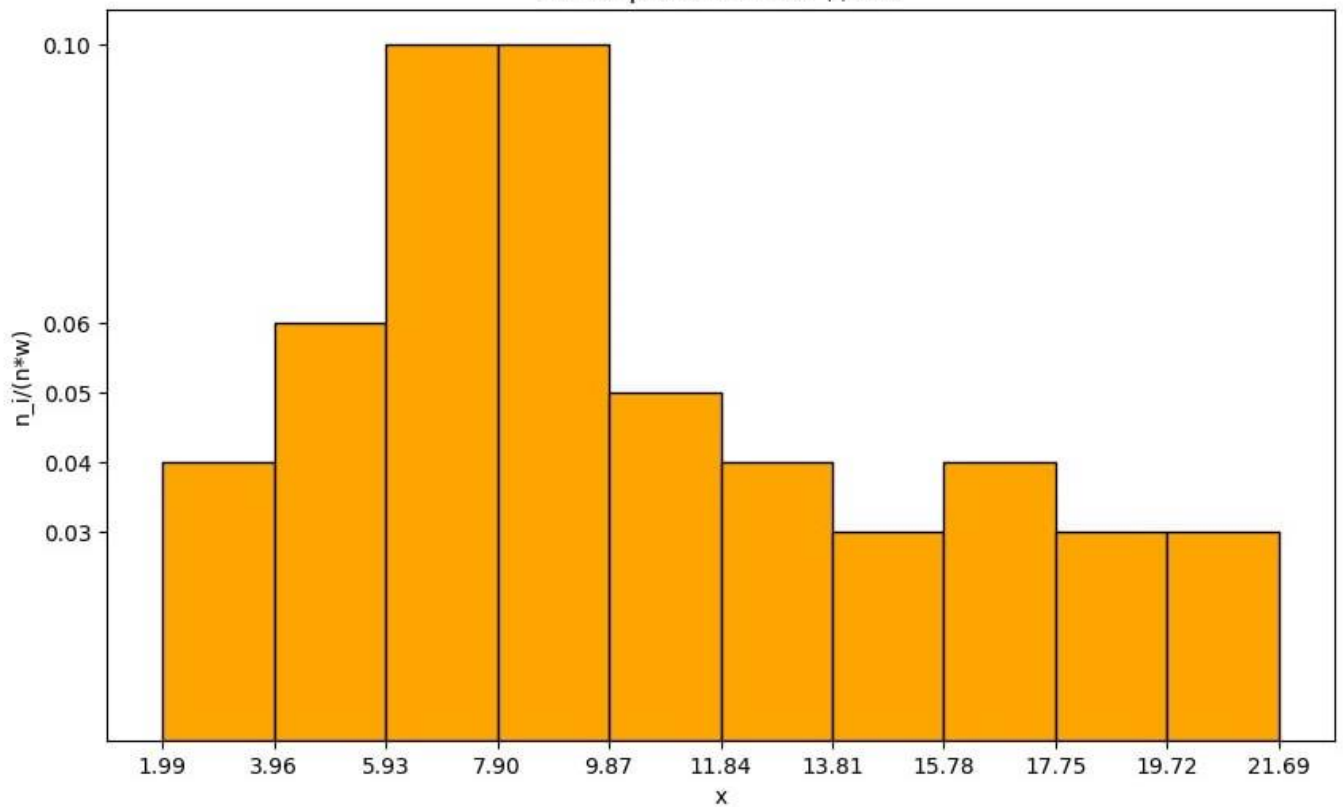
№ интервала	Границы интервалов		Представитель интервала $z_i$	Частоты $n_i$
	нижняя	верхняя		
1	4,30	8,48	6,39	10
2	8,48	12,66	10,57	12
3	12,66	16,84	14,75	15
4	16,84	21,02	18,93	11
5	21,02	25,20	23,11	9
6	25,20	29,38	27,29	6
7	29,38	33,56	31,47	12
8	33,56	37,74	35,65	11
9	37,74	41,92	39,83	6
10	41,92	46,10	44,01	8

Относительные частоты $n_i / n$	Накопленные частоты $n_i$	Накопленные относительные частоты $n_i / n$	Плотность относительной частоты $n_i / n * w$
0,10	10	0,10	0,02
0,12	22	0,22	0,03
0,15	37	0,37	0,04
0,11	48	0,48	0,03
0,09	57	0,57	0,02
0,06	63	0,63	0,01
0,12	75	0,75	0,03
0,11	86	0,86	0,03
0,06	92	0,92	0,01
0,08	100	1,00	0,02

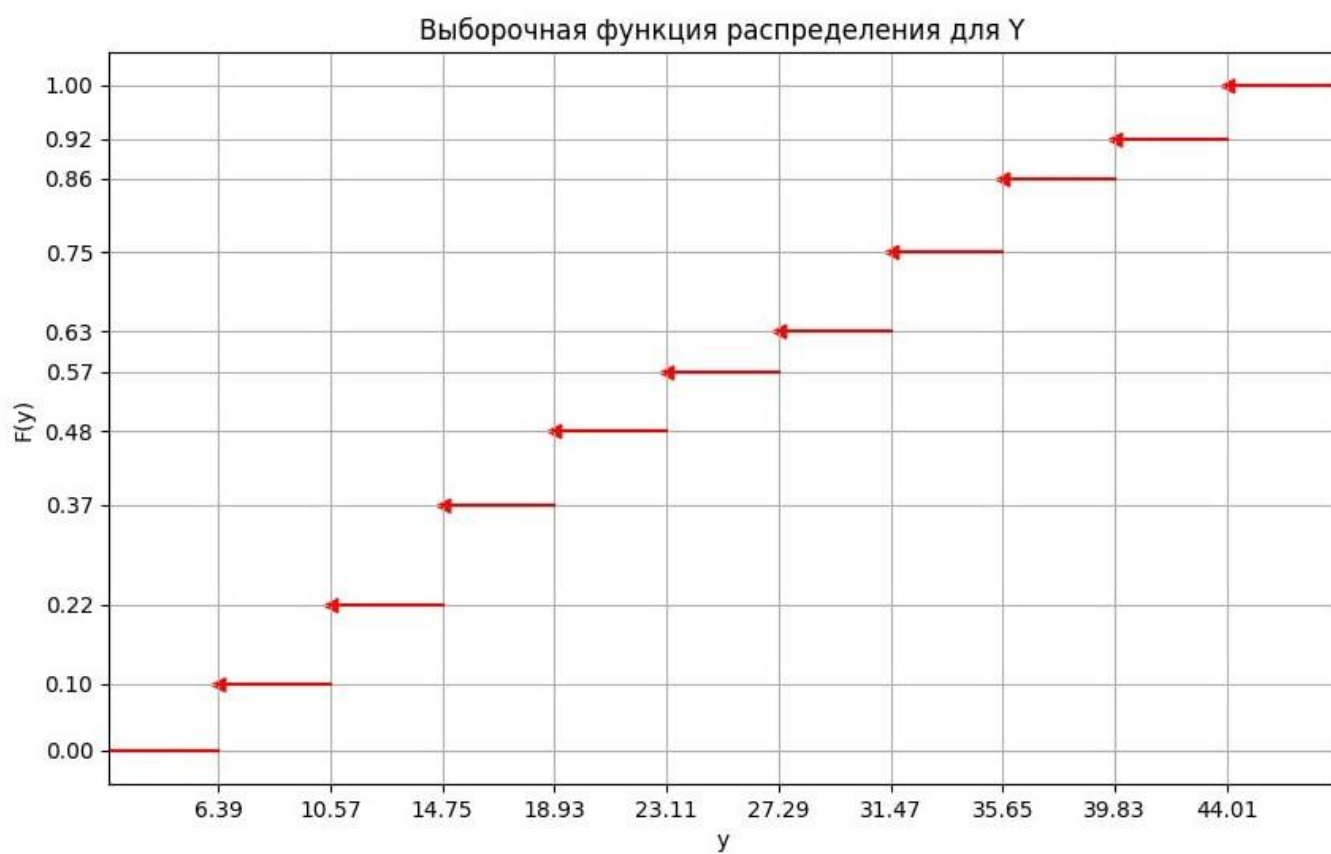
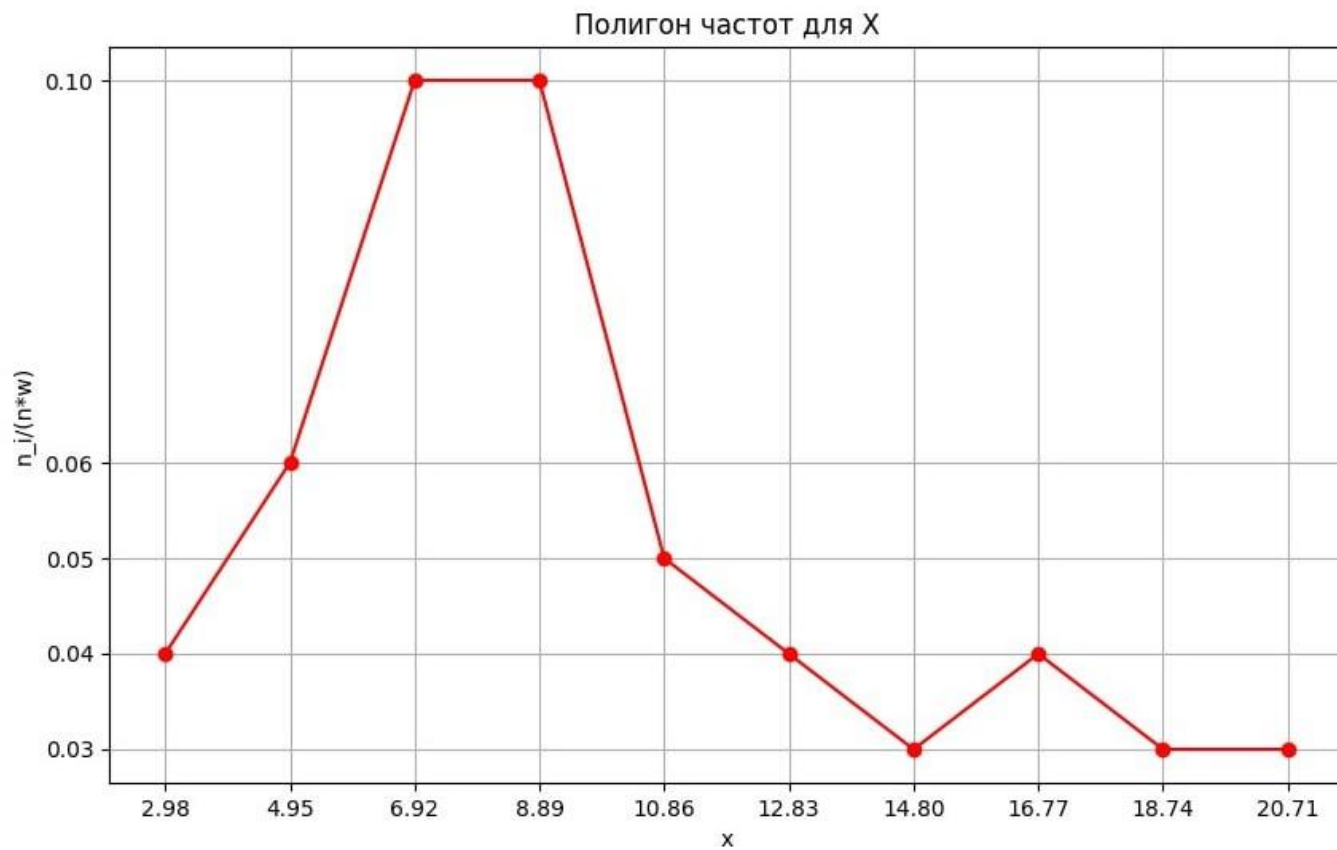
Выборочная функция распределения для X

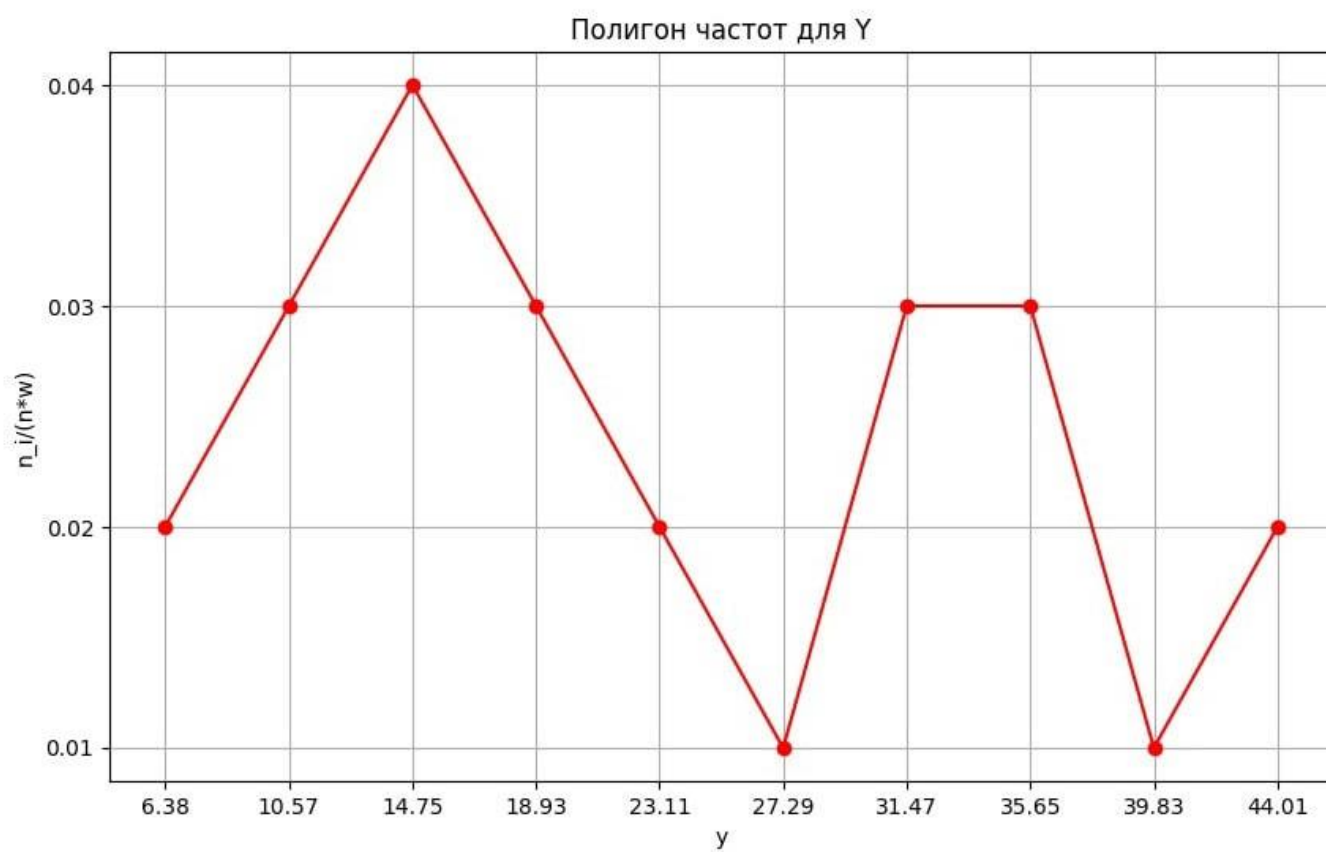
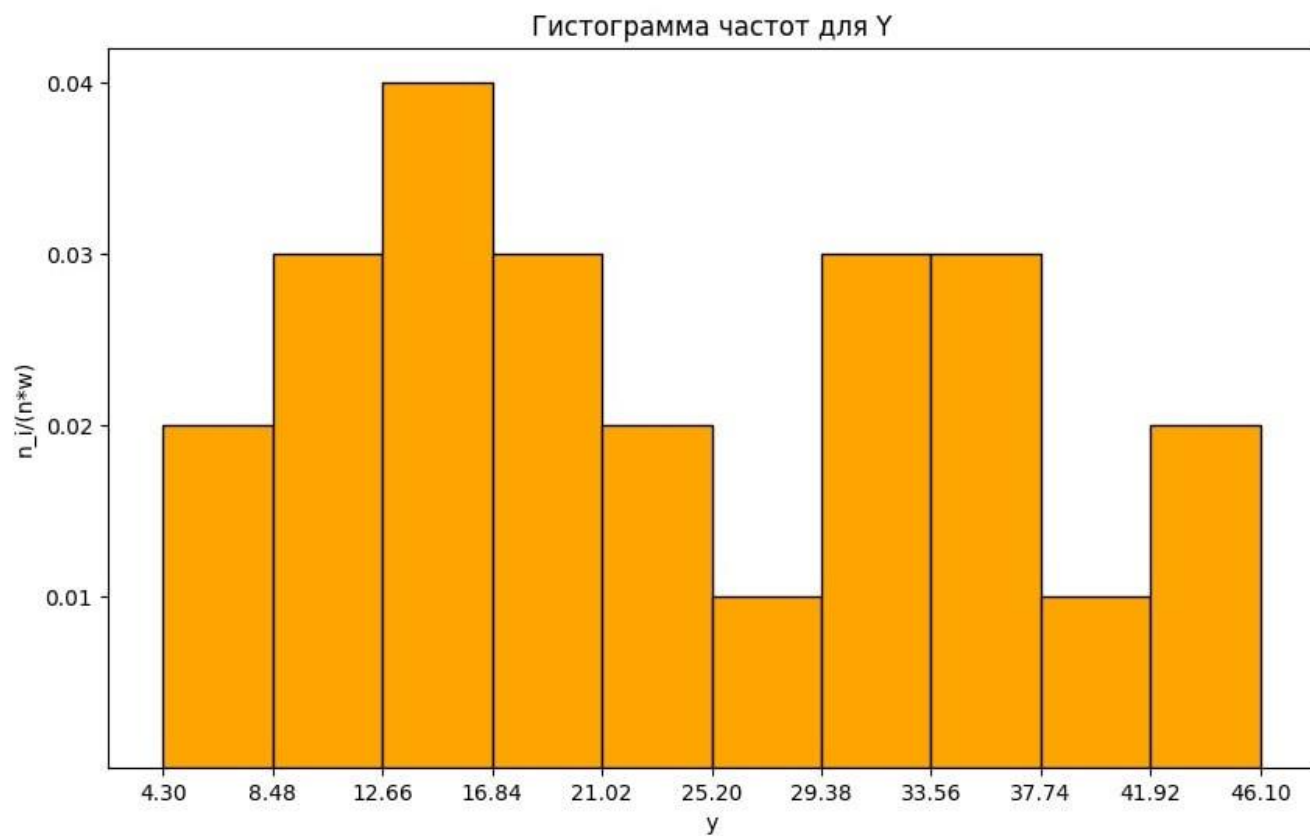


Гистограмма частот для X









**По графикам предположим типы распределения:**

- СВ X: нормальное распределение
- СВ Y: равномерное распределение

**Точечная оценка математического ожидания для СВ X:**

$$m_x^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 10,10$$

**Смещённая оценка дисперсии (выборочная дисперсия) для СВ X:**

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = 25,04$$

**Несмещённая оценка дисперсии для СВ X:**

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_x^* = 25,29$$

**Доверительные интервалы для математического ожидания СВ X:**

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = 10,10; S = 5,0289; n = 100; \alpha = 1 - p; t_{0,975}(99) = 1,9842;$$

$$t_{0,995}(99) = 2,6264$$

$$p = 95\% \quad 9,10 < m < 11,10$$

$$p = 99\% \quad 8,78 < m < 11,42$$

**Доверительные интервалы для дисперсии СВ X:**

$$\frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$$

$$S^2 = 25,29; n = 100; \alpha = 1 - p; \chi^2_{0,975}(99) = 129,6; \chi^2_{0,025}(99) = 74,2$$

$$\chi^2_{0,995}(99) = 140,2; \chi^2_{0,005}(99) = 67,3$$

$$p = 95\% \quad 19,32 < \sigma^2 < 33,74$$

$$p = 99\% \quad 17,86 < \sigma^2 < 37,20$$

**Параметры  $m$  и  $\sigma$  для нормального распределения СВ X:**

Ищем по методу моментов: приравниваем теоретические и выборочные моменты.

$$m_1 = M[X] = m_x; m_1^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; m_1 = m_1^* \Rightarrow m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} = 10,10$$

$$\mu_2 = D[X] = D_x; \mu_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \mu_2 = \mu_2^* \Rightarrow D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$D^* = (\sigma^*)^2 \Rightarrow (\sigma^*)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 25,04 \Rightarrow \sigma^* \approx 5,00$$

**Точечная оценка математического ожидания для СВ Y:**

$$m_x^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 23,22$$

**Смещённая оценка дисперсии (выборочная дисперсия) для СВ Y:**

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = 139,05$$

**Несмещённая оценка дисперсии для СВ Y:**

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_x^* = 140,45$$

**Доверительные интервалы для математического ожидания СВ Y:**

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = 23,22; S = 11,8512; n = 100; \alpha = 1 - p; t_{0,975}(99) = 1,9842;$$

$$t_{0,995}(99) = 2,6264$$

$$p = 95\% \quad 20,87 < m < 25,57$$

$$p = 99\% \quad 20,11 < m < 26,33$$

**Доверительные интервалы для дисперсии СВ Y:**

$$\frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$$

$$S^2 = 140,45; n = 100; \alpha = 1 - p; \chi^2_{0,975}(99) = 129,6; \chi^2_{0,025}(99) = 74,2$$

$$\chi^2_{0,995}(99) = 140,2; \chi^2_{0,005}(99) = 67,3$$

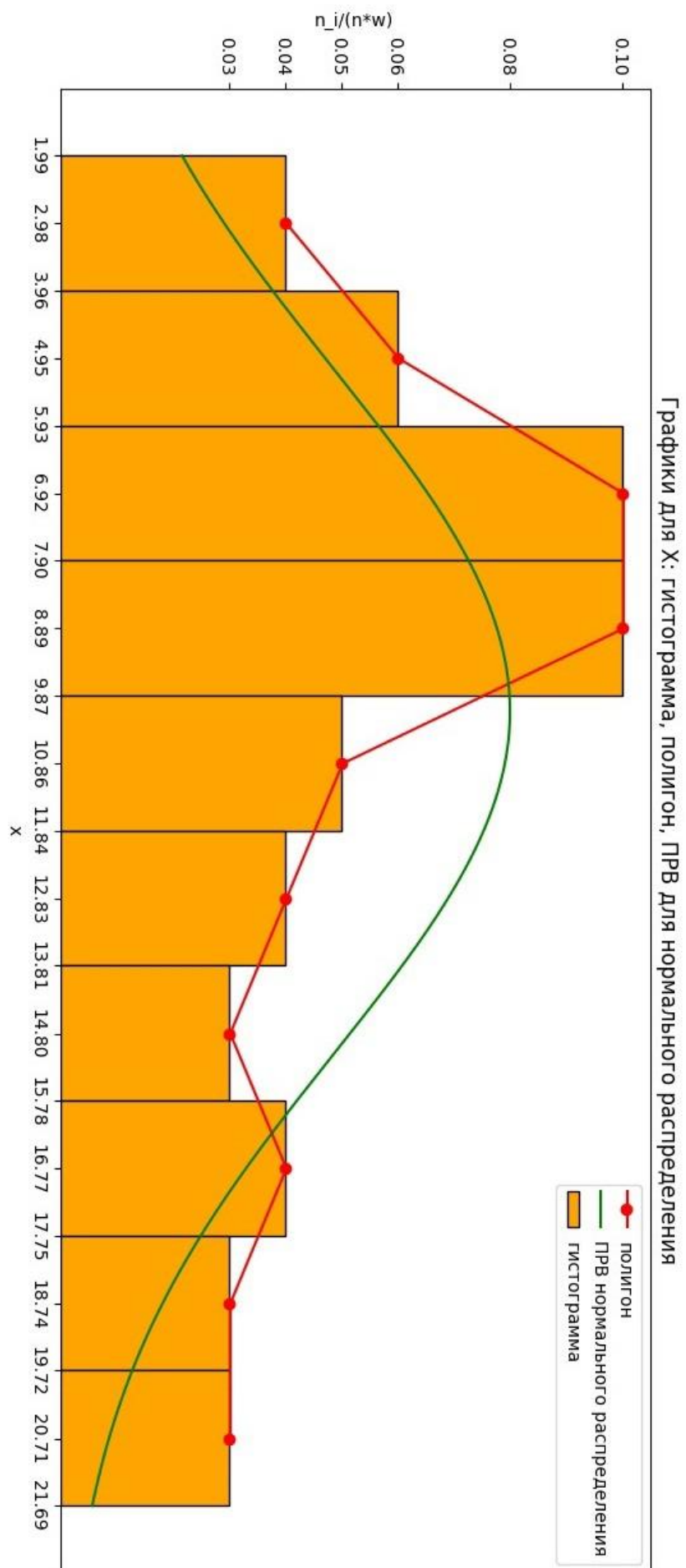
$$p = 95\% \quad 107,29 < \sigma^2 < 187,39$$

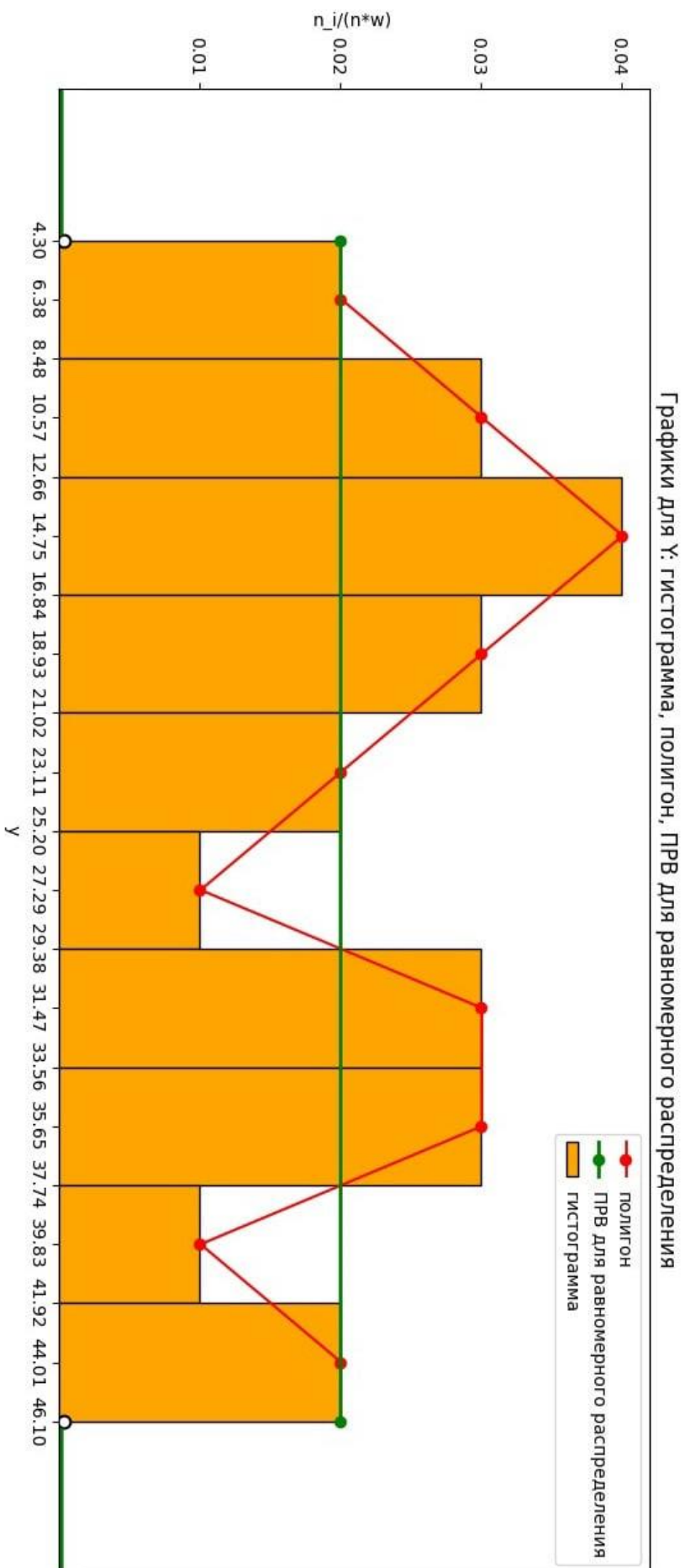
$$p = 99\% \quad 99,18 < \sigma^2 < 206,61$$

**Параметры а и b для равномерного распределения СВ Y:**

Метод моментов для равномерного распределения даёт плохие оценки, поэтому найдём параметры следующим образом. Равномерное распределение предполагает, что все элементы СВ расположены внутри отрезка [a; b], поэтому:

$$a^* = \min(x_i) = 4,30; b^* = \max(x_i) = 46,10$$





Проверим гипотезу о нормальном виде распределения СВ X. Для этого используем критерий  $\chi^2$  с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$  и числом степеней свободы  $r = k - l - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$ . Где  $l$  – число неизвестных параметров распределения, у нормального их 2:  $m$  и  $\sigma$ . Таким образом:  $\chi^2_{1-\alpha}(k - l - 1) = \chi^2_{0,95}(7) = 14,067$

Вероятности находим по формуле:  $p_i = F(b_i) - F(a_i) = \Phi\left(\frac{b_i - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - m}{\sigma}\right)$ , где  $\Phi(x)$  – функция Лапласа. В качестве мат. ожидания  $m$  берём среднее  $\bar{x} = 10,10$ . В качестве  $\sigma$  берём  $S$ . Ранее найдено:  $S^2 = 25,29 \Rightarrow S = \sqrt{S^2} = 5,03$ .

**Таблица 8. Расчёт значения хи-квадрат для СВ X**

№	Границы интервалов		Частоты $n_i$	Вероятности $p_i$	Теоретические частоты $np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
	Нижняя $a_i$	Верхняя $b_i$				
1	1,99	3,96	7	0,0575	5,75	0,2717
2	3,96	5,93	12	0,0921	9,21	0,8452
3	5,93	7,90	20	0,1267	12,67	4,2406
4	7,90	9,87	19	0,1501	15,01	1,0606
5	9,87	11,84	9	0,1567	15,67	2,8391
6	11,84	13,81	7	0,1336	13,36	3,0277
7	13,81	15,78	6	0,1004	10,04	1,6257
8	15,78	17,75	8	0,0649	6,49	0,3513
9	17,75	19,72	6	0,0362	3,62	1,5648
10	19,72	21,69	6	0,0174	1,74	10,4297

Полученное значение статистики:  $\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 26,2564$

Теоретическое значение:  $\chi^2_{1-\alpha}(k - l - 1) = \chi^2_{0,95}(7) = 14,067$

$\chi^2 > \chi^2_{0,95}(7) \Rightarrow$  гипотеза о нормальном виде распределения СВ X отклоняется.

Проверим гипотезу о равномерном распределении СВ Y. Для этого используем критерий  $\chi^2$  с уровнем значимости  $\alpha = 0,05$  и числом степеней свободы  $r = k - l - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$ . Где  $l$  – число неизвестных параметров распределения, у равномерного их 2:  $a$  и  $b$ . Таким образом:  $\chi^2_{1-\alpha}(k - l - 1) = \chi^2_{0,95}(7) = 14,067$

Вероятности находим по формуле:  $p_i = F(b_i) - F(a_i)$ ;  $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{при } x > b \end{cases}$

$a = 4,30; b = 46,10$  – найдены ранее. Распределение равномерное, поэтому  $p_i$  будут одинаковыми:  $p_i = 0,1$  для  $i = \overline{1, k}$ , где  $k = 10$

**Таблица 9. Расчёт значения хи-квадрат для СВ Y**

№	Границы интервалов		Частоты $n_i$	Вероятности $p_i$	Теоретические частоты $np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
	Нижняя $a_i$	Верхняя $b_i$				
1	4,30	8,48	10	0,1	10	0,0
2	8,48	12,66	12	0,1	10	0,4
3	12,66	16,84	15	0,1	10	2,5
4	16,84	21,02	11	0,1	10	0,1
5	21,02	25,20	9	0,1	10	0,1
6	25,20	29,38	6	0,1	10	1,6
7	29,38	33,56	12	0,1	10	0,4
8	33,56	37,74	11	0,1	10	0,1
9	37,74	41,92	6	0,1	10	1,6
10	41,92	46,10	8	0,1	10	0,4

Полученное значение статистики:  $\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 7,2$

Теоретическое значение:  $\chi^2_{1-\alpha}(k - l - 1) = \chi^2_{0,95}(7) = 14,067$

$\chi^2 \leq \chi^2_{0,95}(7) \Rightarrow$  гипотеза о равномерном виде распределения СВ Y принимается.

Найдём параметры **a** и **b** уравнения линейной среднеквадратической регрессии Y на X ( $y = ax + b$ ) методом наименьших квадратов:

$$Q_{xy} = \sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} = 538,19; Q_x = \sum x_i^2 - n \bar{x}^2 = 2504,17$$

$$a = \frac{Q_{xy}}{Q_x} = 0,2149; b = \bar{y} - a \bar{x} = 21,04$$

**Уравнение линейной регрессии:**

$$y = 0,2149x + 21,04$$

**Коэффициент корреляции:**

$$R = \sqrt{\frac{Q_r}{Q_y}} = 0,0912, \text{ где:}$$

факторная сумма квадратов (сумма квадратов, обусловленная регрессией):

$$Q_r = a^2 Q_x = 115,6658$$



общая сумма квадратов:

$$Q_y = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = 13904,51$$

Выборочный коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = [\text{знак } a]R = 0,0912$$

$|r_{xy}| = 0,0912 < 0,2 \Rightarrow$  линейная связь между X и Y практически отсутствует

**Коэффициент детерминации:**

$$R^2 = \frac{Q_r}{Q_y} = 0,0083 \Rightarrow 0,83\% \text{ дисперсии Y объясняется влиянием фактора X.}$$

**Проверка значимости линейной регрессии  $y = 0,2149x + 21,04$  по критерию Фишера:**

$$\text{Статистика Фишера: } F_B = \frac{Q_r(n-2)}{Q_e} = 0,8221, \text{ где:}$$

остаточная сумма квадратов:  $Q_e = Q_y - Q_r = 13788,84$  (из основного тождества

дисперсионного анализа:  $Q_y = Q_r + Q_e$ )

Квантиль распределения Фишера:  $F_{1-\alpha}(1, n-2) = F_{0,95}(1, 98) = 3,94$

$F_B \leq F_{1-\alpha}(1, n-2) \Rightarrow$  модель незначима: фактор X не оказывает влияние на СВ Y

Модель незначима  $\Rightarrow$  неадекватна и непригодна для прогноза.

