

密级 _____



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

脉冲星计时应用研究

作者姓名 _____ 易疏序

指导教师 _____ 张双南 研究员

_____ 中国科学院高能物理研究所

学位类别 _____ 理学博士

学科专业 _____ 粒子物理与原子核物理

培养单位 _____ 中国科学院高能物理研究所

2016 年 5 月

Typeset by L^AT_EX 2_• at April 12, 2016

With package CAsthesis2012 ? of CT_EX.ORG

Studies on the Applications of Pulsar Timing

**By
Shu-Xu Yi**

**A Dissertation Submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
In partial fulfillment of the requirement
For the degree of
Ph.D. of Particle Physics and Nuclear Physics**

**Institute of High Energy Physics
Chinese Academy of Sciences**

April, 2016

研究生学位论文声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立进行研究工作所取得的成果，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签名：_____ 日期：_____

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解中国科学院高能物理研究所“关于中国科学院高能物理所研究生论文及研究成果使用权的规定”（2001）高发研生字第315号文件，即：高能物理研究所拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按规定提交学位论文，高能物理研究所可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，高能物理研究所可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供科研人员阅读，或在所内网站供科研人员浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆等相关部门报送可以公开的学位论文。

签名：_____ 日期：_____

脉冲星计时应用研究

易疏序（粒子物理与原子核物理）

导师：张双南 研究员

摘要

本博士论文是对我博士期间研究工作的总结，主体部分是脉冲星计时，其中包括三个研究工作：1、脉冲星计时在探测单一引力波源的应用；2、用脉冲星的磁倾角演化来解释脉冲星的计时噪声；3、提出一种新方法，用脉冲星计时来研究超过传统方法频率上限的引力波源。

在第一部分，我们利用脉冲星PSR B1937+21的高频次计时观测结果搜寻引力波单源。我们的主要数据来自Jodrell Bank天文台的Lovell望远镜，观测日期是从2011年6月至2013年5月。平均而言，两次观测的间隔仅为一天。这样的高频次观测使得我们对引力波的可探测频率范围扩展到了 4.98×10^{-6} Hz，扩展了脉冲星计时方法的适用范围。同时我们还利用了Westerbork综合射电望远镜(Westerbork Synthesis Radio Telescope)的三个波段的数据来修正星际介质的色散效应和含时散射。可以看到，修正后的计时残差中存在一个未知结构，这个结构的幅度约为150 ns，对应于功率谱上的频率为 3.4 yr^{-1} 。我们认为这个结构是引力波信号，或者来自小行星伴星等，因为这个结构并非贯穿整个观测时间跨度。因此我们认为这个结构来自脉冲星自身的转动不稳定性，即红噪音的体现。在除掉这个噪音成分之后，我们给出了引力波单源的强度上限：在频率 $\nu = 10^{-7}$ Hz处，当引力波的位置与极化方向为随机时 $h_s \leq 1.53 \times 10^{-11}$ ；而当引力波源的位置和极化方向为最优时， $h_s \leq 4.99 \times 10^{-14}$ 。

在第二部分，我们研究了脉冲星计时红噪音的一种可能的起源：脉冲星磁倾角 χ 演化。我们考虑的制动力矩来自磁偶极辐射与电流损失的结合。我们发现 χ 的演化会在计时残差中引入额外的三次和四次多项式成分。这两项受以下因素决定：1、磁偶极辐射的效率；2、脉冲星管(pulsar tube)中的相对电流强度；3、磁倾角。用这个模型可以解释下列观测现象：(a)年轻脉冲星 $\ddot{\nu} > 0$ ；(b)年老脉冲星 $\ddot{\nu}$ 既可以大于零也可以小于零；(c) $\ddot{\nu}$ 的绝对值与 $-\dot{\nu}$ 成正比；(d)制动指数和脉冲星

的特征年龄成正比；如果 χ 的演化仅仅来自脉冲星的进动，则它不能解释制动指数小于 3 的脉冲星。这种情况需要磁场自身发生变化。把此模型与观测相比较，我们得出结论： χ 的偏移方向在脉冲星的一生中会有多次改变。而 χ 的演化不足以解释蟹状星云脉冲星（Crab pulsar）的自转行为，因为观测到的 χ 与 $\dot{\chi}$ 与用此模型结合观测的计时残差计算出的不一致。

在第三部分里，我们试图解决这样一个问题：脉冲星计时能探测的引力波频率不能高于观测的 Nyquist 频率。引力波一旦超过这个频率后，计时残差里就不会留下时间相关的结构，而是留下白噪声。引力波导致的白噪声的方差是脉冲星和引力波相对位置的函数。我们提出，通过观察这种独特的函数我们可以探测高于 Nyquist 频率的引力波，我们称这种引力波为“超 Nyquist 频率引力波”。我们用模拟数据来展示此方法的可行性。我们从 *PPTA DRI* 和 *NANOGrav* 的公开数据中挑选出一个引力波阵列，试图找到超 Nyquist 频率引力波信号。结果在 65.6% 的概率水平上与无引力波一致。我们也画出了所选出的脉冲星阵列对超 Nyquist 频率引力波的敏感度天图。引力波源在以下位置时，我们的脉冲星阵列对其最敏感： $\lambda_s = -0.82$, $\beta_s = -1.03$ (rad); 对应的引力波强度是在 $f = 1 \times 10^{-5}$ Hz 处 $h = 6.31 \times 10^{-11}$.

除主体内容之外，本论文也总结了本人博士期间的其他研究工作，即对广义相对论中 Birkhoff 定理的研究。在这个工作中我们指出人们对 Birkhoff 定理普遍存在误用，即认为球对称质量分布的物质对其内部真空区域没有引力作用。我们对爱因斯坦场方程（Einstein Field Equation）求精确解，表明外部的球对称物质对内部真空区域的度规有影响，并展示了在一个特定的情形下，误用的 Birkhoff 定理产生的结果与正确使用结果之间的差异。

关键词： 脉冲星，中子星，引力波

Studies on the Applications of Pulsar Timing

Yi Shu-Xu (Particle Physics and Nuclear Physics)

Directed by Prof. Zhang Shuang-Nan

Abstract

This thesis includes my work during my Ph.D study. The main focus of the thesis is on three aspects of applications of pulsar timing, namely: 1) Gravitational Waves (GWs) searching; 2) To explain the long term red timing noise of pulsar via the evolution of the inclination angle of neutron star; 3) Set up a novel method to detect gravitational wave whose frequency is higher than the Nyquist frequency by pulsar timing array.

On the first aspect, we present the results of a search for gravitational waves (GWs) from individual sources using high cadence observations of PSR B1937+21. The data were acquired from an intensive observation campaign with the Lovell telescope at Jodrell Bank, between June 2011 and May 2013. The almost daily observations allow us to probe GWs with frequencies up to 4.98×10^{-6} Hz, extending the upper bound of the typical frequency range probed by Pulsar Timing Arrays (PTA). We used observations taken at three different radio frequency bands with the Westerbork Synthesis Radio Telescope in order to correct for dispersion measure effects and scattering variances. The corrected timing residuals exhibit an unmodeled periodic noise with an amplitude ~ 150 ns and a frequency of 3.4 yr^{-1} . As the signal is present not in the entire data set, we attribute it to the rotational behaviour of the pulsar, ruling out the possibilities of it being either due to a GW or an asteroid as the cause. After removing this noise component, we place limits on the GW strain of individual sources equaling to $h_s = 1.53 \times 10^{-11}$ and $h_s = 4.99 \times 10^{-14}$ at 10^{-7} MHz for random and optimal sources locations respectively.

On the second aspect, we study the possibility that the long term red timing-noise in pulsars originates from the evolution of the magnetic inclination angle χ . The braking torque under consideration is a combination of the dipole radiation and the current loss. We find that the evolution of χ can give rise to extra cubic and fourth-order polynomial terms in the timing residuals. These two terms are determined by the efficiency of the dipole

radiation, the relative electric-current density in the pulsar tube and χ . The following observation facts can be explained with this model: a) young pulsars have positive $\ddot{\nu}$; b) old pulsars can have both positive and negative $\ddot{\nu}$; c) the absolute values of $\ddot{\nu}$ are proportional to $-\dot{\nu}$; d) the absolute values of the braking indices are proportional to the characteristic ages of pulsars. If the evolution of χ is purely due to rotation kinematics, then it can not explain the pulsars with braking index less than 3, and thus the intrinsic change of the magnetic field is needed in this case. Comparing the model with observations, we conclude that the drift direction of χ might oscillate many times during the lifetime of a pulsar. The evolution of χ is not sufficient to explain the rotation behavior of the Crab pulsar, because the observed χ and $\dot{\chi}$ are inconsistent with the values indicated from the timing residuals using this model.

In the third part, we try to find a method to solve the following limitation of the traditional pulsar timing methods of Gravitational Waves (GW) detecting: The detectable gravitational waves (GWs) with traditional pulsar timing methods have a maximum frequency which is set by the Nyquist frequency of the observation. Beyond this frequency, GWs leave no temporal-correlated signals but instead white noise in the timing residuals. The variance of the GW-induced white noise is a function of the position of pulsars relative to the GW source. We propose that by observing this unique functional form in the timing data, we can detect the GWs, the frequency of which is higher than the Nyquist frequency (Super-Nyquist Frequency GW, or SNFGW). We demonstrate the feasibility of the proposed method with simulated timing data. Using the selected dataset from the PPTA DR1 and NANOGrav publicly available data sets, we try to detect the signals from single SNFGW sources. The result is consistent with no GW detection with 65.5% probability. An all-sky map of the sensitivity of the selected PTA to single SNFGW sources is generated and the position of the GW source where the selected PTA is most sensitivity to is $\lambda_s = -0.82$, $\beta_s = -1.03$ (rad); the corresponding minimum GW strain is $h = 6.31 \times 10^{-11}$ at $f = 1 \times 10^{-5}$ Hz.

Besides the main topic, this thesis includes also my other work during my Ph.D study, i.e., the study of the Birkhoff theorem in General Relativity (GR). In this work we point out a common misunderstanding of the theorem, i.e., a spherically symmetric distribution of mass does not affect the gravitational field inside. By solving the Einstein equation analytically, we show that the spherically symmetric matter can also affect the inside metric. A specific case is given to illustrate the difference between the results from the common

ABSTRACT

misunderstanding and the correct one.

Keywords: Pulsar, Neutron Star, Gravitational Waves

目 录

| | |
|----------------------------|------------|
| 摘要 | I |
| Abstract | III |
| 目录 | VII |
| 主要缩写和名词释义 | XIII |
| 第一章 引言 | 1 |
| 1.1 中子星与脉冲星 | 1 |
| 1.2 脉冲星的辐射机制 | 4 |
| 1.2.1 脉冲星磁层 | 4 |
| 1.2.2 射电辐射 | 5 |
| 1.2.3 高能辐射 | 10 |
| 1.3 脉冲星的周期不稳定性 | 11 |
| 1.3.1 计时噪音 | 11 |
| 1.3.2 周期跃变 | 14 |
| 1.4 星际介质对射电脉冲信号的影响 | 19 |
| 1.4.1 色散 | 19 |
| 1.4.2 法拉第旋转 | 20 |
| 1.4.3 散射 | 22 |
| 1.4.4 闪烁 | 24 |
| 1.5 引力波对脉冲信号的到达时间的影响 | 25 |
| 1.5.1 超大质量双黑洞作为引力波源 | 28 |
| 1.5.2 随机引力波背景 | 30 |
| 1.5.3 脉冲星计时阵列 | 31 |

| | |
|--|-----------|
| 第二章 脉冲星计时的观测系统与数据处理 | 33 |
| 2.1 观测系统 | 33 |
| 2.1.1 模拟滤波器系统 | 33 |
| 2.1.2 自相关频谱仪 | 34 |
| 2.1.3 相干消色散系统 | 35 |
| 2.2 从原始数据到 TOA | 35 |
| 2.3 从 TOA 到科学模型 | 38 |
| 2.3.1 回溯脉冲发射时间 TOE | 39 |
| 2.3.2 模型拟合 | 40 |
| 2.4 TOA 中的红噪音对脉冲星自转模型的影响与 TOA 白化 | 41 |
| 第三章 利用对脉冲星 PSR B1937+21 的密集观测限制引力波单源的强度 | 43 |
| 3.1 背景介绍 | 43 |
| 3.2 观测 | 44 |
| 3.3 数据处理 | 45 |
| 3.3.1 修正随时间变化的色散与散射脉冲轮廓展宽 | 45 |
| 3.3.2 计时模型 | 48 |
| 3.4 限制引力波单源强度 | 50 |
| 3.4.1 噪音模型和探测阈值 | 50 |
| 3.4.2 引力波单源上限曲线 | 50 |
| 3.5 讨论 | 52 |
| 3.6 总结 | 52 |
| 第四章 寻找脉冲星长期计时红噪声的起源—磁倾角演化作为一种可能性 | 57 |
| 4.1 背景介绍 | 57 |
| 4.2 当存在电流损失制动时的等效磁场 | 59 |
| 4.3 磁倾角演化与计时残差 | 59 |
| 4.4 χ 的起源以及其对表观制动指数的影响 | 62 |
| 4.5 一些讨论 | 62 |
| 4.5.1 磁倾角的不同定义 | 62 |
| 4.5.2 蟹状星云脉冲星的计时残差 | 63 |

| | |
|---|------------|
| 4.5.3 对脉冲星计时红噪声的修正 | 64 |
| 4.6 总结与结论 | 64 |
| 第五章 用PTA测量超过Nyquist频率的引力波 | 65 |
| 5.1 背景介绍 | 65 |
| 5.2 脉冲星的位置于超Nyquist引力波引起的白噪声幅度的关系 | 66 |
| 5.3 用模拟数据来检验本方法 | 68 |
| 5.4 利用从PPTA DRI和NANOGrav dfg+12中选出的PTA探测超Nyquist频率的引力波 | 70 |
| 5.5 对单个超Nyquist频率引力波的探测敏感度 | 74 |
| 5.6 讨论 | 75 |
| 5.6.1 目标引力波源 | 75 |
| 5.6.2 脉冲星项 | 79 |
| 第六章 博士期间进行的其他研究工作:关于Birkhoff定理的常见误解以及光线偏折计算:推广的Shapiro延迟以及其实验室检验 | 81 |
| 6.1 背景介绍 | 81 |
| 6.1.1 围绕中心物体的薄壳层产生的度规 | 82 |
| 6.1.2 空心薄壳层情况下的光线偏折与延迟 | 84 |
| 6.2 总结与讨论 | 86 |
| 第七章 总结与展望 | 89 |
| 7.1 引力波探测 | 89 |
| 7.2 脉冲星计时噪声 | 90 |
| 附录 A 第六节中提到对Birkhoff定理让人引起误解的相关文献段落 | 93 |
| 参考文献 | 97 |
| 在学期间学术成果情况 | 105 |
| 简历 | 107 |
| 致谢 | 109 |

表 格

| | |
|--|----|
| 2.1 TEMPO2 修正项与其典型值 | 40 |
| 3.1 第三章中所用数据总结 | 43 |
| 3.2 PSR B1937+21 的最佳拟合参数 | 49 |
| 3.3 谐波参数 | 49 |
| 4.1 ATNF 脉冲星的 ξ_{break} | 63 |
| 5.1 PPTA DRI 脉冲星的 σ_{total} , σ_{remain} 及平均 TOA 不确定度 (Ave. ΔTOA) | 71 |
| 5.2 NANOGrav dfg+12 脉冲星的 σ_{total} , σ_{remain} 及平均 TOA 不确定度 (Ave. ΔTOA) | 72 |
| 5.3 本工作挑选的 25 颗脉冲星。 | 73 |

插 图

| | |
|---|----|
| 1.1 中子星结构示意图 | 2 |
| 1.2 周期—周期变化率 ($P - \dot{P}$) 图 | 3 |
| 1.3 Coldreich & Julian 模型的示意图 | 6 |
| 1.4 脉冲星磁层辐射图 | 6 |
| 1.5 射电脉冲星辐射锥几何结构示意图 | 8 |
| 1.6 PSR J0631+1036 的辐射轮廓与线偏振方位角随脉冲相位的变化 | 8 |
| 1.7 旋转矢量模型的示意图 | 9 |
| 1.8 两种辐射锥模型 | 10 |
| 1.9 脉冲星磁层间隙示意图 | 11 |
| 1.10 脉冲星辐射区极冠区和外间隙位置示意图 | 12 |
| 1.11 脉冲星 PSR B2148+63 的计时残差 | 13 |
| 1.12 脉冲轮廓和自转减慢率之间的相关 | 15 |
| 1.13 脉冲星 PSR B0531+21 的周期跃变现象 | 16 |
| 1.14 出现过周期跃变的脉冲星在周期—周期导数图中的位置 | 17 |
| 1.15 中子星内部超流涡旋转移与钉扎示意图 | 18 |
| 1.16 脉冲信号在星际介质中色散示意图 | 19 |
| 1.17 不同波段的脉冲轮廓 | 20 |
| 1.18 脉冲星银河系分布与银河系电子密度分布图 | 21 |
| 1.19 法拉第旋转的示意图 | 21 |
| 1.20 脉冲轮廓的指数尾巴随射电频率的减小而增加 | 22 |
| 1.21 星际介质散射的薄屏模型 | 23 |
| 1.22 菲涅尔区示意图 | 24 |
| 1.23 modulation index 随 DM 和频率的变化 | 25 |
| 1.24 模拟的同一个引力波源在三颗不同的脉冲星的计时残差功率谱上留下的痕迹 | 29 |

| | |
|--|----|
| 1.25 引力波单源强度分布天图 | 29 |
| 1.26 Hellings & Downs 曲线 | 30 |
| 1.27 探测到引力波的概率随时间的变化 | 31 |
| | |
| 2.1 脉冲星信号传输链 | 36 |
| | |
| 3.1 数据的观测日期示意图 | 45 |
| 3.2 DM 随 MJD 的变化图与 ΔTOA 随 $\tau_{1\text{GHz}}$ 的变化 | 46 |
| 3.3 WSRT 与 42FT 的计时残差 | 47 |
| 3.4 MJD=56428 的八个频道内的脉冲轮廓 | 47 |
| 3.5 脉冲轮廓模版 | 48 |
| 3.6 WSRT 的计时残差 | 54 |
| 3.7 拟合后计时残差的功率谱 | 55 |
| 3.8 PSR B1937+21 对引力波单源强度的限制 | 56 |
| | |
| 4.1 对模拟的 TOA 进行二次多项式拟合后的计时残差 | 61 |
| | |
| 5.1 超 Nyquist 频率引力波示意图 | 66 |
| 5.2 横坐标为 ι , 纵坐标是 1000 颗随机分布的脉冲星的 ξ 的平均值, 误差棒是 ξ 的标准差。 | 68 |
| 5.3 不同的引力波强度 h 下, 模拟的脉冲星的计时残差方程与 μ^2 的关系 .. | 69 |
| 5.4 通过拟合 μ^2 -方差关系得到的 $(\bar{\xi}h/\omega)^2$ 与注入引力波的 $(\xi_0 h/\omega)^2$ 之间 的关系 | 70 |
| 5.5 PPTA DRI 脉冲星的计时残差 | 73 |
| 5.6 NANOGrav dfg+12 脉冲星的计时残差 | 74 |
| 5.7 $\log \mu^2$ 与 $\log \sigma_{\text{system}}^2$ 之间加权相关系数的天图 | 75 |
| 5.8 1000 次交换脉冲星的 σ_{system} 后所得到的, $\log \mu^2$ - $\log \sigma_{\text{system}}^2$ 之间的最 大 WCC 的归一化概率密度分布 | 76 |
| 5.9 我们所使用的数据对单一超 Nyquist 频率引力波源的敏感度天图 | 77 |
| 5.10 本文描述的方法对引力波的敏感度, 以及其与其他方法的比较 | 78 |
| | |
| 6.1 中心物体周围的薄壳层示意图 | 83 |
| 6.2 光线在经过或者穿过薄壳层时的偏折示意图 | 85 |

插 图

| | |
|---------------------------------------|----|
| 6.3 光线偏折距离 ξ 随 L 的变化 | 85 |
| 6.4 光线延迟时间 Δt 随 L 的变化 | 86 |

主要缩写和名词释义

| | |
|----------|--|
| ATNF | 澳大利亚国立望远镜机构 (Australia Telescope National Facility) |
| DM | 色散度量 (Dispersion Measure) |
| EPTA | 欧洲脉冲星计时阵列 (European Pulsar Timing Array) |
| FAST | 五百米口径球面射电望远镜 (Five hundred meter Aperture Spherical Telescope) |
| GW | 引力波 (Gravitational Wave) |
| LT | Lovel射电望远镜 (Lovell Telescope) |
| NANOGrav | 北美纳赫兹引力波天文台 (North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves) |
| OLS | 普通最小二乘法 (Ordinary Least Square) |
| POA | 脉冲到达相位 (pulse Phase Of Arrival) |
| PPTA | Parkes 脉冲星计时阵列 (Parkes pulsar timing array) |
| RM | 法拉第旋转度量 (Faraday Rotation Measure) |
| SKA | 平方千米阵 (Square Kilometre Array) |
| TOA | 脉冲到达时间 (pulse Time OF Arrival) |
| TOE | 脉冲发射时间 (pulse Time OF Emission) |
| TT | 地面时 (Terrestrial Time) |
| WLS | 权重最小二乘法 (Weighted Least Square) |

通篇只出现过一次的术语和缩写的定义请见正文，不在此列出。

第一章 引言

1.1 中子星与脉冲星

当一颗中等质量的恒星耗竭了核聚变的燃料后，星体便会失去热压的支撑而在自身引力的牵引下落向其富铁的核心。陡然上升的核心温度与密度，导致了质子与电子结合生成中子的反应，即逆 β 衰变或电子俘获过程(Bisnovatyi-Kogan & Seidov 1970): $p^+ + e^- \rightarrow n + \nu_e$ 。电子在此过程中被大量消耗，导致核心区的电子简并压无法承受超量的恒星外层物质堆积，于是发生坍塌。当核心密度到达 $4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ 时，原子核内的中子开始溢出，变成自由中子(Pethick et al. 1995)。大量的简并态中子就此产生，并形成了中子的费米简并压，阻止了核心的进一步坍塌(Landau 1932)。骤然释放的巨大引力势能，通过反弹激波与逃逸的中微子等方式(Bethe 1990)，迅速传递给星体外层。一颗II型，或者Ib，Ic型超新星便爆发了。

在超新星爆发后的遗迹中，留下了由大量中子构成的致密核心，即一颗中子星。中子星的另一种可能的产生方式是：白矮星通过吸积其伴星的物质增长到超过钱德拉塞卡质量极限(Chandrasekhar limit)，进而发生塌缩形成中子星(Whelan & Iben 1973)。中子星的结构如图1.1所示。中子星的直径大约10千米，质量是若干倍的太阳质量(Lattimer & Prakash 2007)。中子星的表面是一层由晶格化的原子核和电子组成的外壳层。再向内部，密度超过 $4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ 时，原子核内的中子溢出而成为自由中子。再向内密度进一步增加处，原子核不复存在，简并的中子形成超流超导的费米液体。中子星的最核心，物质将以何种形式存在还未有定论(Pandharipande et al. 1976)。自1934年Baade & Zwicky (1934)首次提出中子星的概念，至此后的30余年，中子星只存在于物理学家的想像之中，没有人会料到天文学家会真的发现这样的天体。直到1967年，当时还是研究生的Jocelyn Bell和他的导师Hewish发现了来自射电源CP1919(即日后的脉冲星PSR B1919+21)的有规律的射电脉冲信号(Hewish et al. 1968)，“脉冲星”由此得名。不久，敏感的理论家Gold和Pacini意识到这个新发现的天体很可能就是物理学家们描述的中子星(Gold 1968; Pacini 1968)：高速自转的致密中子星辐射出狭窄的射电束，这束辐射每扫过地球一次，望远镜便接收到一次脉冲信号。

在首颗脉冲星被发现后的40多年间，大量的脉冲星被相继发现。在射电波

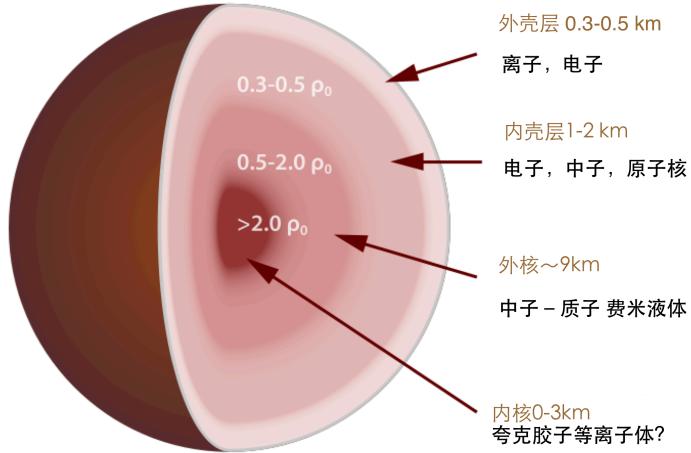


图 1.1：中子星结构示意图：图中 ρ_0 代表饱和核物质密度。超过该密度后原子核开始接触(Haensel et al. 2006)。图片翻译自网站 en.wikipedia.org 词条 “Neutron Star”。

段以外，光学(Cocke et al. 1969; Mignani 2011)、X射线(Caballero & Wilms 2012)、 γ 射线望远镜(Abdo et al. 2013; Fichtel et al. 1975; Thompson 2008)也发现了不少脉冲星的对应天体。如今，在澳大利亚国立望远镜机构 (Australia Telescope National Facility, ATNF) 的列表里已经收录了 2328 颗形形色色的脉冲星(Manchester et al. 2005)。其中有的是像 PSR B1919+21一样的普通脉冲星(Hewish et al. 1968)，另外还有像 PSR B1937+21 那样每秒自转近千周的毫秒脉冲星(Backer et al. 1982a) (milisecond pulsar, MSP)，像 PSR 1913+16 处于双星系统中的脉冲星双星(Hulse & Taylor 1975) (Binary pulsar)，像 Centaurus X-3 那样正在从伴星吸积物质的吸积脉冲星(Giacconi et al. 1971) (accretion powered pulsar)。以及像 PSR B1957+20 那样正在用星风摧毁伴星的“黑寡妇”(Black Widow) Fruchter et al. (1990)等。

天文学家们按照脉冲星的自转周期 (P)、周期的变化率 (\dot{P})，把这些脉冲星画在一张所谓的 $P - \dot{P}$ 图上 (见图 1.2)。从这幅图上我们可以发现，脉冲星集中分布于两个区域：低自转速率、高减速率的右上角 (我们称其为普通脉冲星)，和高自转速率、低减速率的左下角 (毫秒脉冲星)。如果我们假设脉冲星的自转减慢是由于其磁偶极场在转动中的磁偶极辐射带走了能量(Deutsch 1955)，那么脉冲星的表面磁场强度就可以用如下公式计算出(Lorimer & Kramer 2012)：

$$B_s = 3.2 \times 10^{19} \sqrt{PP}, \quad (1.1)$$

这里脉冲星的周期 P 以秒为单位，计算出的磁场单位是高斯 (Gauss)。

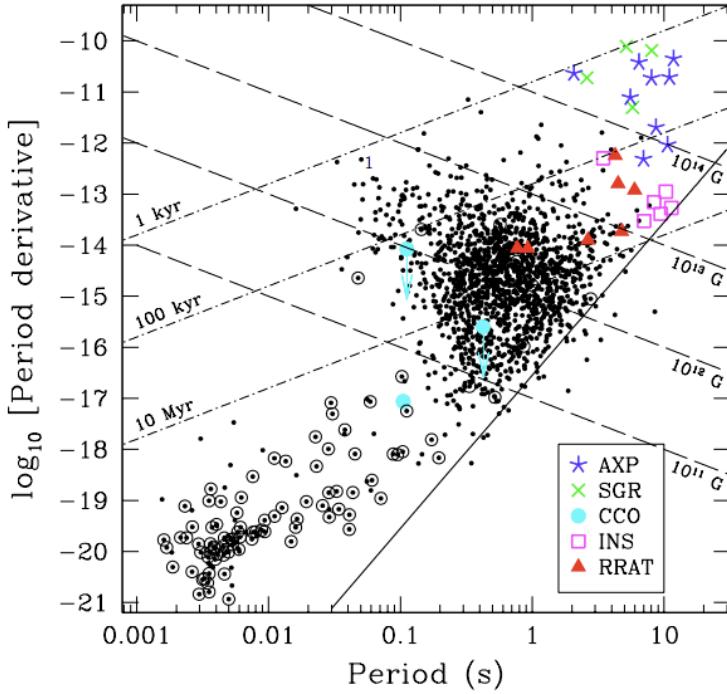


图 1.2: 周期—周期变化率($P - \dot{P}$)图。图中英文缩写分别代表: **AXP**, Anomalous X-ray pulsars 反常 X 射线脉冲星; **SGR**, Soft Gamma Repeaters 软伽马射线重复暴; **RPP**, Rotation-powered pulsar 旋转供能脉冲星; **CCO**, Compact Central object 致密中心体 (超新星遗迹); **INS**, Isolated Neutral Stars 孤立中子星; **RRAT**, Rotating Radio Transients (旋转射电暂现源)。空心圆圈代表脉冲星双星。图中点划线表示脉冲星特征年龄为常数, 虚线表示按照公式1.1 计算出的磁场强度为常数, 实线代表“死亡线”。本图来自 Kaspi 的综述文章 ([Kaspi 2010](#))。

此外, 我们也可以定义一个大致描述脉冲星年龄的参数, 称为特征年龄:

$$\tau \equiv \frac{P}{2\dot{P}}. \quad (1.2)$$

通过上面两个公式, 我们可以在 $P - \dot{P}$ 图上标出等磁场线 (虚线) 和等年龄线 (点划线)。有了这两条线的帮助, 我们从图 1.2 中看出了另外的信息: 普通脉冲星一般年轻, 而且拥有较强的磁场; 而毫秒脉冲星普遍年老, 而且磁场较弱。此外, 毫秒脉冲星多出现于星团与双星系统中。目前流行的理论这样认为 ([Bisnovatyi-Kogan & Komberg 1974](#)): 在双星系统中, 年轻的中子星从其伴星吸积物质, 物质落在中子星表面使其自转逐渐加速。同时中子星表面的磁场被吸积的等离子体物质所掩埋, 因此减弱。吸积过程结束后, 便形成了一颗低表面磁场的毫秒脉冲星 ([Zhang & Kojima 2006](#))。

图 1.2 中的黑色实线被称为死亡线 ([Chen & Ruderman 1993; Margon et al. 1975](#))。

理论家们预言，如果中子星的表面磁场及自转速度位于死亡线以下，则脉冲星的辐射机制便会失效，因此不会产生可观测的辐射。

但从图上我们可以看到，有一些脉冲星出现在了死亡线以下。这说明死亡线背后的脉冲星辐射机制过于简单，不能完全解释实际观测。下一节将介绍脉冲星辐射机制和磁层的情况。

1.2 脉冲星的辐射机制

谈到非吸积脉冲星的辐射，其内涵为以下三个部分：磁偶(多)极辐射、相干射电辐射和高能辐射。

当中子星的磁轴与自转轴不重合时，自然会产生一个变化的磁偶（多）极矩，从而辐射电磁波。通常人们认为，中子星的自转能主要通过这种方式损失。因此人们用公式1.1来估算中子星表面磁场。然而，以这种方式产生的电磁波频率必然与中子星的自转频率相同，即 $1\text{ Hz} - 1\text{ kHz}$ 。如此低频的电磁波，因其频率小于脉冲星周围等离子体的临界频率（critical frequency）而无法传播出来。

真正被人们探测到的脉冲星辐射，是指从 100 MHz 到 100 GHz 频率范围的射电辐射，和从光学一直到 γ 射线的高能辐射。对于这两种辐射的产生机理现在尚不完全清楚。不过这两种辐射的存在有一个共同前提，就是脉冲星周围必须有大量的带电粒子，这就是脉冲星的磁层。

1.2.1 脉冲星磁层

人们一度以为，中子星巨大的引力束缚能将导致它周围的等离子体密度极低(Hoyle et al. 1964; Pacini 1967)。直到1969年Goldreich和Julian在他们的文章《脉冲星电动力学》(Goldreich & Julian 1969)中得出结论：因为高速自转和强磁场，中子星的周围不可能是真空。从那以后，中子星磁层才逐渐被人们认识。

Goldreich和Julian考虑了一个最简单的特例—中子星磁轴和自转轴平行（平行转子）的情况。首先他们假设中子星处于真空中。由于中子星的内部是良导体，因此当中子星在自身磁场中旋转的时候，就会在其内部产生一个感生电场，使每个电荷受到的洛伦兹力被平衡掉：

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}, \quad (1.3)$$

其中， $\boldsymbol{\Omega}$ 为中子星的自转角速度矢量。

接着他们在中子星外的真空中求解静电场的拉普拉斯方程 (Laplace Equation), 然后以在中子星表面电场切向分量必须连续为边界条件解出中子星外部的电势分布:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{B_S \Omega R^5}{6cr^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (1.4)$$

其中, B_S 是中子星表面磁场, r 和 θ 是通常的球极坐标。

这样, 一个外部电场会作用在中子星表面电荷上, 提供一个远远大于重力的电场力。因此, 电荷会从中子星表面被抽出进入中子星周围的空间, 形成一个包裹中子星的电荷层。在电场和磁场的共同作用下, 电荷产生漂移, 而漂移的角速度正好与中子星自转速度一致。因此中子星便有了一个共转磁层。磁层中的电荷分布被称为 Goldreich & Julian 分布:

$$\rho(r, \theta) = -\frac{B_S \Omega R^3}{4\pi c r^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (1.5)$$

其中 R 为中子星半径¹。

在邻近中子星的地方, 磁层中共转电荷速度很慢, 由此电流产生的次生磁场便可以忽略。因此磁场近似于磁偶极场, 且磁力线闭合。而随着与中子星自转轴距离的增加, 共转磁层中粒子的线速度越来越大, 情况也逐渐发生变化。在共转速度等于光速的位置, 人们定义了一个光速圆柱 (或简称光柱面; light cylinder), 其半径为 $r_c = c/\Omega$.

实际上, 在到达光速圆柱之前, Goldreich & Julian 分布以及磁层的共转条件就已经被破坏了: 一方面, 随着磁层中电荷的环流速度越来越大, 产生的次级磁场将逐渐扭曲原来的磁偶极场, 产生很强的径向和环向分量; 另一方面, 磁场强度的减弱以及电荷惯性质量的增加, 使磁场越来越难以束缚住电荷。于是在光柱面附近, 相对论性电荷开始脱离磁层而向外逃逸形, 成脉冲星风。Goldreich & Julian 模型的示意图见图 1.3, 图中所标注的中性面指的是 Goldreich & Julian 分布中正电荷和负电荷的交界面, 在此面上为电中性, 故又称零电荷面。图 1.4 是 Goldreich & Julian 磁层俯视图: 在光柱面内部磁场线符合磁偶极场, 在靠近以及超出光柱面的部分, 磁场线向环向扭曲。电荷流也从单纯的共转环流变成径向逃逸的脉冲星风。Goldreich 和 Julian 的工作是开创性的, 后人对于中子星磁层的研究几乎都要从此出发。但是在此需要指出, 这个最初的模型存在很多严重的理论问题, 例如中子星的整体电荷问题 (Michel & Li 1999), 电流回路问题等等 (Beskin et al. 1993)。另外, 把平行转子推广到倾斜转子也是一个棘手的工作 (Mestel 1971; Mestel & Pryce

¹ 在 Goldreich & Julian (1969) 的原始表达式中, 还有一个改成因子 $\frac{1}{1-(\omega r/c)^2} \sin^2 \theta$

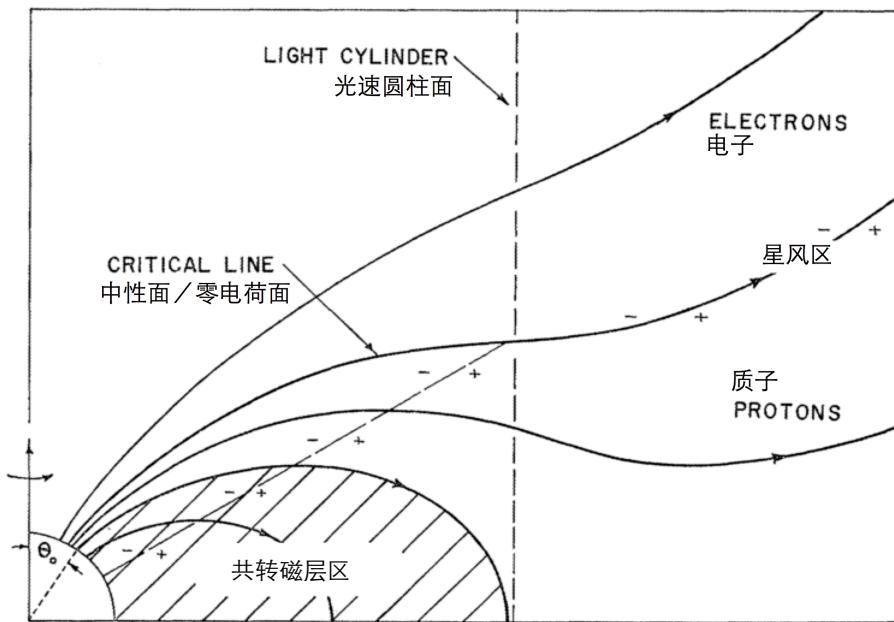


图 1.3: Goldreich & Julian 模型的示意图。本图摘自 Goldreich & Julian (1969)。

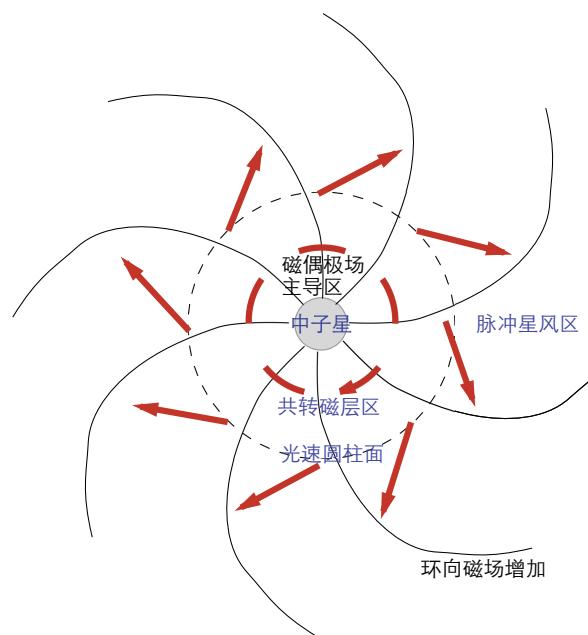


图 1.4: 脉冲星磁层的俯视图。黑色放射状实线是磁场线，黑色虚线圆圈代表光速圆柱面，红色剪头代表电荷运动方向。

1992)。如今，越来越多的人放弃了对“优雅的解析方法”的执着，而转向用数值计算来研究这个问题，见 Michel 等人的综述文章 (Michel 1982)。

1.2.2 射电辐射

脉冲星射电辐射的亮温度高达 10^{35} K (Soglasnov et al. 2004)，并且是高度偏振的。所有非相干的辐射过程都无法产生这么高的亮温度和偏振度，因此人们相信脉冲星的射电辐射过程一定是相位相干的叠加。但任何一种机制都要在磁场强度跨越 6 个量级、自转频率跨越 4 个量级的情况下产生相似的辐射，难度可想而知。也正因为如此，脉冲星的射电辐射机制现在还不能确定。

目前提出的脉冲星射电辐射机制大致分为三类：天线机制、等离子体机制和脉泽 (Maser) 机制。下面将对这三类机制分别做简介：

天线机制，即一团电荷限制在很小的体积内整体被加速。当这个电荷团的尺度小于所辐射电磁波的半波长时，它们的辐射相位相同而产生相干叠加 (Komesaroff 1970; Ruderman & Sutherland 1975; Sturrock 1971)。这样， N 个电荷发射的电磁波功率就是单个电荷的 N^2 倍，而不是非相干叠加的 N 倍。天线机制遇到的最大问题是，很难找到一种方法来快速地产生这样一团紧凑的电荷，并且在很长时间内保持这团电荷的形状 (Melrose 1981, 1992)。

第二类机制，即等离子体机制利用了某种等离子体不稳定性来产生等离子体波，进而发出相干的射电辐射 (Arons & Barnard 1986; Asseo 1993; Melrose 1992)。这类机制遇到的障碍是如何快速地使等离子体不稳定性增长，以及等离子体扰动产生的能量如何直接从中逃逸出来。

第三类机制，即脉泽机制就是射电波段的激光，是光子经过负吸收系数的介质而产生的 (Melrose 1981; Rowe 1995)。脉泽机制相对于等离子体加速机制的优点是，脉泽辐射可以直接从磁层中逃逸出来。然而脉泽机制产生的辐射单色性很好，而观测中脉冲星在射电波段的辐射频率范围是非常宽的，如何获得一个宽频带的辐射是脉泽机制需要解决的问题。

尽管脉冲星射电辐射的机制尚未明确，但通过对比观测，我们对辐射区的位置和形状有不少限制，人们也建立了一些唯象模型。

对于射电辐射区的位置和形状，现在广泛接受的模型是，脉冲星的射电辐射区在一个以磁轴为中心的狭窄锥束里 (Radhakrishnan & Cooke 1969)。辐射区的图示见图 1.5 所示：如图中所标， α 是脉冲星自转轴和磁轴之间的夹角，称为磁倾角； β 是视线方向和磁轴最近时的夹角。当脉冲星自转轴、磁轴与视线方向位于同一平面时，定义脉冲相位 $\phi = 0$ ，此平面被称为基准面 (fiducial plane)。

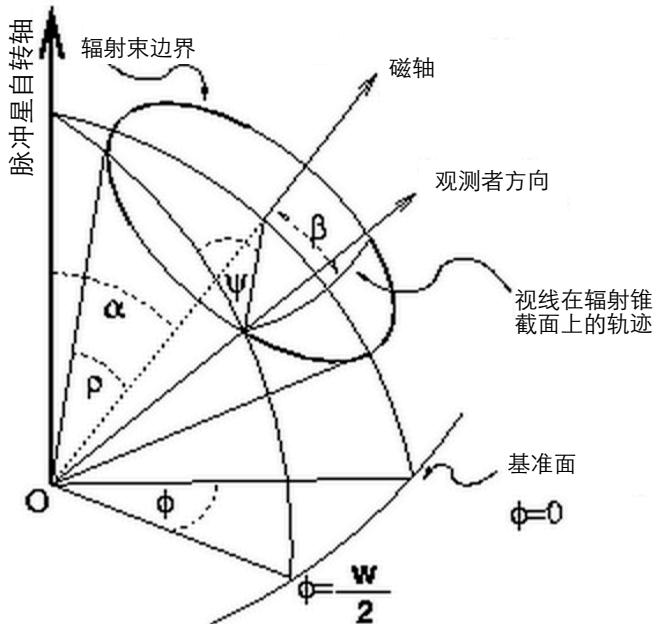


图 1.5: 脉冲星辐射锥几何结构示意图。本图来自 [Lorimer & Kramer \(2012\)](#)。 α 是脉冲星自转轴和磁轴之间的夹角，称为磁倾角； β 是视线方向和磁轴最近时的夹角。当脉冲星自转轴、磁轴与视线方向位于同一平面时，定义脉冲相位 $\phi = 0$ ，此平面被称为基准面（fiducial plane）。

辐射锥束模型成功地给出了脉冲星线偏振方位角随脉冲相位变化的一个非常自然的解释，即旋转矢量模型（Rotating-vector model）([Radhakrishnan & Cooke 1969](#))：在对脉冲星的射电偏振研究中，经常会看到脉冲的偏振方位角随脉冲相位有一个 S 形的变化曲线，如图 1.6：

旋转矢量模型认为，线偏振的方位角就是辐射产生处的磁场方向（尽管具体机制尚不清楚）。当视线扫过辐射锥不同部位时，线偏振方位角自然呈现出如上图的 S 型，如图 1.7：通过简单的几何关系可以预言线偏振方位角随相位的变化关系为：

$$\tan(\Psi - \Psi_0) = \frac{\sin \alpha \sin(\phi - \phi_0)}{\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (1.6)$$

因此，用上式拟合线 S 形图就可以得到脉冲星的磁倾角 α 视线和脉冲星磁轴的夹角 β ([Rookyard et al. 2014](#))。

在辐射锥模型的框架下，我们观测到的脉冲轮廓宽度由视线与辐射锥相交的范围大小决定：

$$\sin^2\left(\frac{W}{4}\right) = \frac{\sin^2(\rho/2) - \sin^2(\beta/2)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}. \quad (1.7)$$

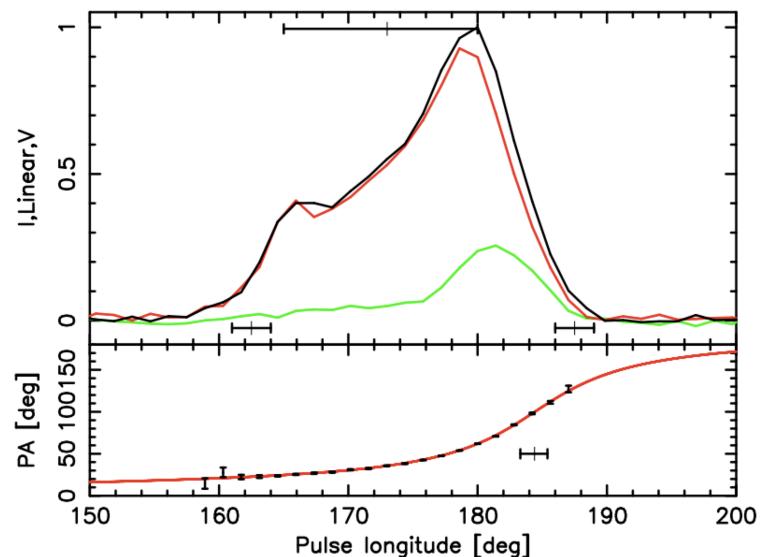


图 1.6: 上图: 脉冲星 PSR J0631+1036 的辐射轮廓: 黑色为辐射轮廓的总强度, 红色代表线偏振成分, 绿色代表圆偏振成分。下图: 线偏振方位角随脉冲相位的变化。本图来自 [Rookyard et al. \(2014\)](#)。

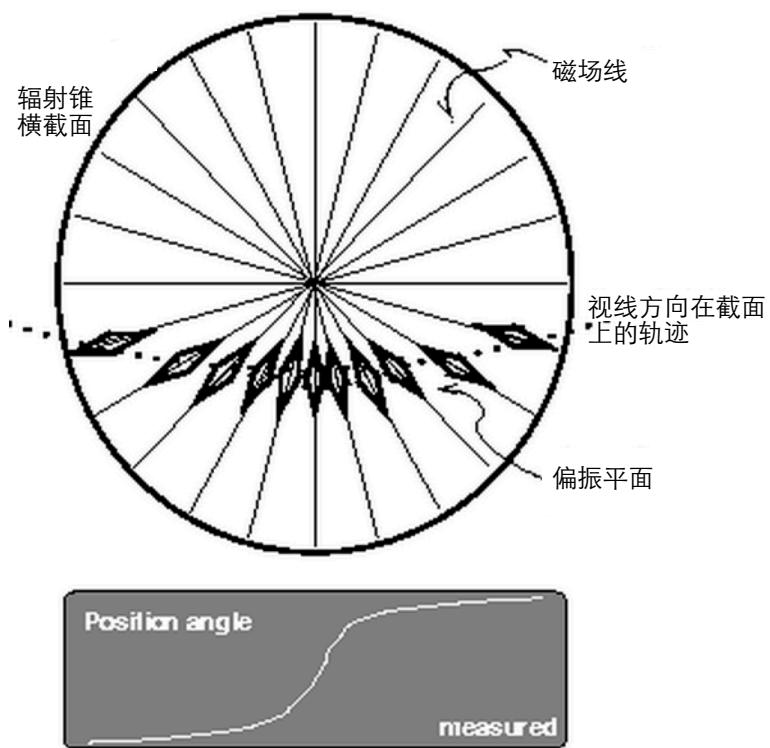


图 1.7: 旋转矢量模型的示意图。本图来自 [Lorimer & Kramer \(2012\)](#)。

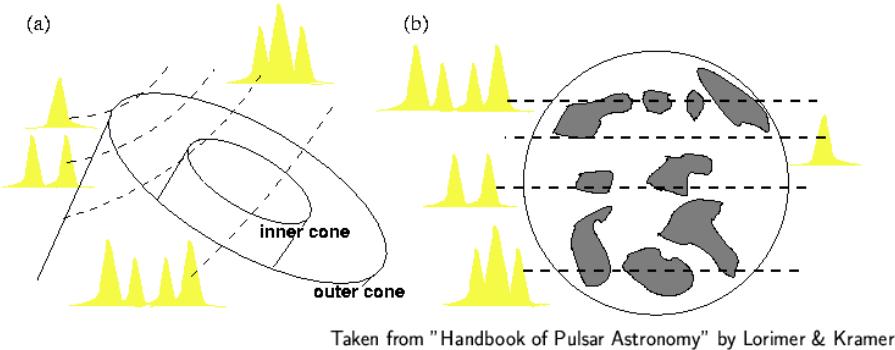


图 1.8：为了解释脉冲轮廓的多个成分，人们提出两种辐射锥模型。（a）多个辐射锥嵌套模型；（b）辐射物质在辐射锥内碎片分布的模型。

其中， W 是脉冲轮廓的宽度， ρ 是脉冲星辐射锥的张角。因此，我们可以用公式1.7，结合由偏振得到的 α 和 β 来计算出脉冲星辐射锥的张角 ρ .

观测发现，脉冲轮廓往往有不止一个峰成分。为了解释这个观测现象，Oster, Sieber 和 Rankin 等人提出了多个嵌套在一起的辐射锥的模型(Oster & Sieber 1976; Rankin 1993; Sieber & Oster 1977)。Lyne 和 Manchester 等人则提出了辐射物质在辐射锥内饰碎片化分布的模型(Lyne & Manchester 1988)。在这两个模型中，观测到的脉冲轮廓峰成分的个数由观测者的视线方向决定，如图 1.8。

在观测中人们还发现脉冲星的脉冲轮廓宽度随着射电频率的增加而减小，这个现象在修正了星际介质散射的影响后依然存在。于是人们推测不同频率的射电辐射是从辐射锥的不同高度处发射出来的，而辐射锥在不同的高度张角不同，因此造成了这种观测上的变化，这个模型叫半径—频率映射模型（radius-to-frequency mapping model）(Cordes 1978)。

1.2.3 高能辐射

对射电辐射而言，人们不知其辐射机制却知道辐射区形状和位置；而对高能辐射则刚好相反，其机制大致是清楚的，而其辐射区的位置还不知道。

在脉冲星磁层的某些地方，磁力线不能束缚电荷（开放磁力线或靠近光速圆柱面的区域）。由于没有等离子体堆积，电场沿磁场方向的分量不能被完全屏蔽，这导致电荷可以沿磁力线加速。这种加速区被称为“间隙（gap）”。被加速的电荷由于曲率辐射或者同步辐射而产生高能 γ 光子。

在强磁场环境下， γ 光子发生分裂变成正负电子对(Erber 1966)。这些次级的电荷又被电场加速而产生新的 γ 光子。这样的过程可以级联发生，产生大量的高能

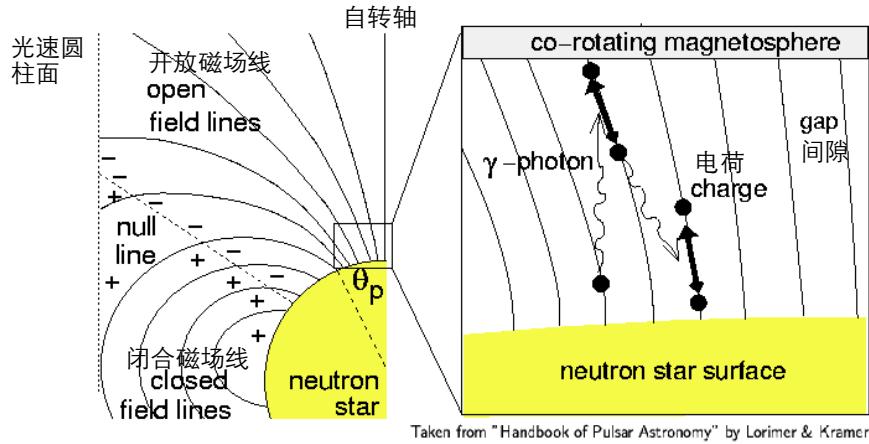


图 1.9: 脉冲星磁层间隙的示意图。左图: 磁轴和自转轴平行时的磁场示意图。右图: 间隙内电荷加速、 γ 光子分裂过程示意图。本图取自([Lorimer & Kramer 2012](#))。

光子，同时大大提高间隙区域的电荷密度。如图 1.9 所示：

根据间隙出现的不同位置，脉冲星的高能辐射机制分为内间隙（inner gap）模型和外间隙（outer gap）模型。内间隙模型我们在这里只介绍极冠（polar cap）模型。

极冠模型认为，在靠近中子星表面的极冠区存在能加速电荷、并级联产生大量次级电荷的间隙。在加速区内，下行电荷撞到中子星表面，产生了热辐射。这些热辐射产生的种子光子被加速向上的高能电子逆康普顿散射而发出高能辐射([Zhang & Harding 2000](#))。

在解释了高能辐射的同时，极冠模型还一道解决了射电辐射的问题。因为目前提出的射电辐射模型都需要一个机制，来在极冠区产生大量的等离子体，而 Goldreich & Julian 密度是远不够的。

尽管极冠模型很自然，但后来陆续发现的一些没有探测到射电辐射的高能脉冲星（例如：Gemingan, J0537-6910, PKS 1209-51/52, J1811-1925 和 J1846-0258）使人们开始怀疑，脉冲星的高能辐射来自与射电辐射不同的区域。[Hollow \(1973\)](#)指出，在靠近光柱面的外磁层也存在一个间隙，被称为外间隙。电荷在这里加速产生的同步辐射与曲率辐射光子也可以解释观测到的高能辐射。对一些脉冲星高能辐射的光变曲线的拟合更加支持外间隙模型。

1.3 脉冲星的周期不稳定性

因为脉冲星有巨大的转动惯量，它的自转是极其稳定的。在很大程度上，它的

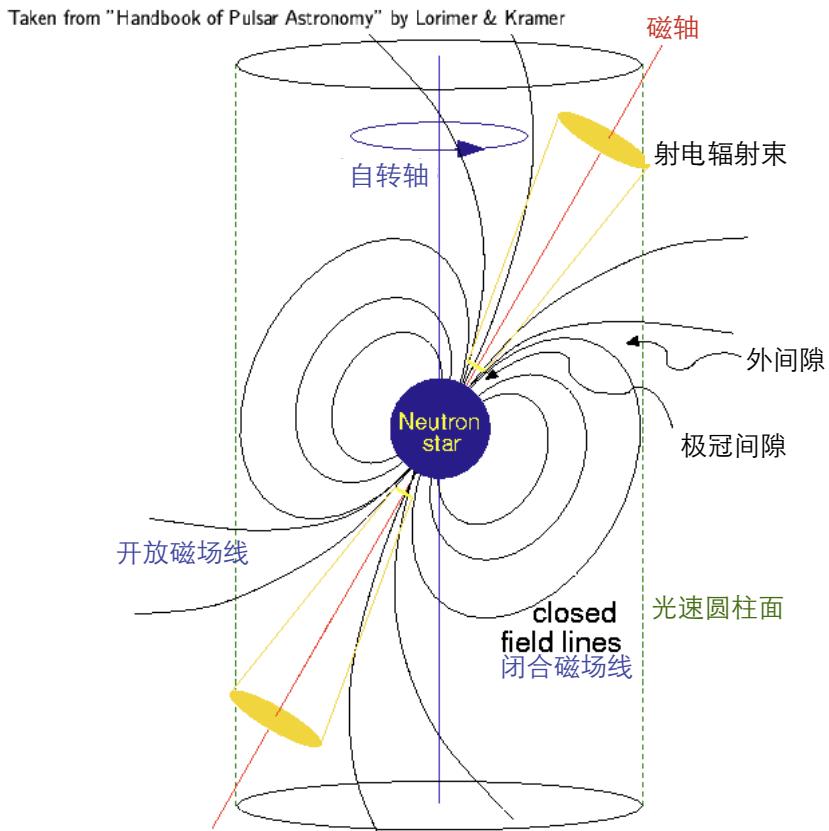


图 1.10: 脉冲星辐射区极冠区和外间隙位置示意图。本图来自 (Lorimer & Kramer 2012)。

自转应该如何演化，也是可以预测的。但是，脉冲星并非刚体，而它的磁场也非标准的偶极磁场，并且可能是变化的，因此我们不能用恒定磁场的磁偶极辐射功率等于转动能损失率的方法完全精确地预言脉冲星的脉冲到达时间（Time Of Arrival；以下简称 TOA，下一章将详细介绍 TOA 数据如何获得）会如何变化。这些超出可预测范围的 TOA 变化，有一部分来自脉冲星自身的不稳定性，另一部分来自脉冲信号在星际空间的传播。本节将关注前者，而后者将在下一节着重介绍。

脉冲星自身的不稳定性又可分为两类，计时噪音（timing noise）和周期跃变（Glitch）。计时噪音是连续的、随机的 TOA 噪声，通常表现为红噪音，即不同时刻的噪音存在相关性；周期跃变是比较罕见的现象，它是指脉冲星的自转突然变快，还有更罕见的反周期跃变（anti-glitch），顾名思义，是指周期突然变慢。

1.3.1 计时噪音

在去掉脉冲星 TOA 中可预测部分后，剩下的部分称为计时残差（timing residuals，下一章将详细介绍计时残差如何得到以及如何使用）。许多脉冲星的计

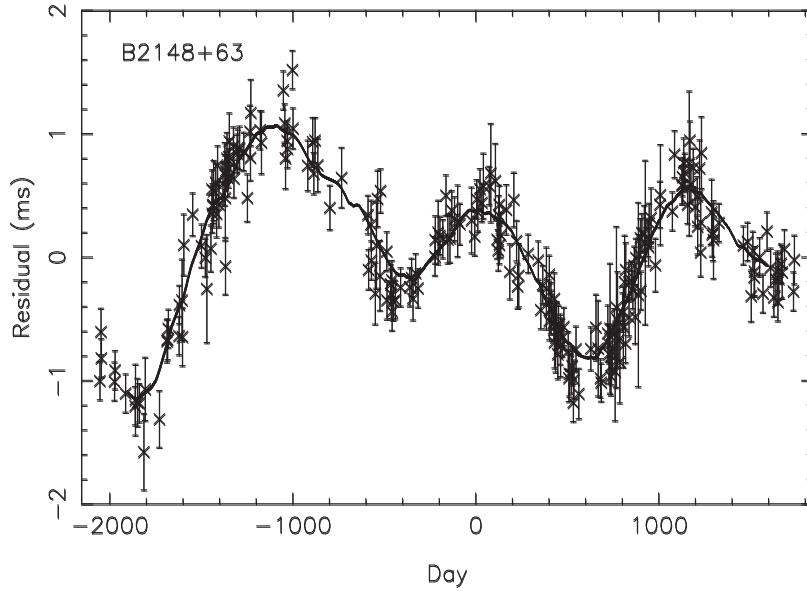


图 1.11: 脉冲星 PSR B2148+63 的计时残差, 可以看到其中有准周期的结构。本图取自 Hobbs et al. (2010)。

时残差表现出准周期的结构, 也就是说在这些脉冲星的 TOA 中包含了“很红的”计时噪音, 如图 1.11 (Hobbs et al. 2010)。一般来说, 越年轻的脉冲星越表现出强的计时噪音。

暂撇开这些计时噪音的形成机制不谈, 人们发现这些噪音可以用脉冲到达相位或自转频率、或自转频率的导数, 这三个量的随机游走来很好地重现 (Boynton et al. 1972):

$$\phi = \phi_s + \phi_R, \quad (1.8)$$

其中, ϕ 是脉冲星自转相位, ϕ_s 代表了它长期衰减演化的成分, ϕ_R 代表了随机游走的成分, 后者可以表示成:

$$\begin{aligned} \phi_R &= \sum_{i=1}^N \Delta\phi_i H(t - t_i), \\ \phi_R &= \sum_{i=1}^N \Delta\nu_i(t - t_i) H(t - t_i), \\ \phi_R &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \Delta\dot{\nu}_i(t - t_i)^2 H(t - t_i). \end{aligned} \quad (1.9)$$

其中 $\Delta\phi_i$, $\Delta\nu_i$, $\Delta\dot{\nu}_i$ 和 $H(t - t_i)$ 分别是相位跃变量, 自转频率跃变量, 自转变化率跃变量和阶跃函数。

这种随机游走模型最早由 Boynton 等人提出。他们在文章中说, 相较于其他模型, 他们的模型是最简单、最可能的物理模型。不过在这里需要指出, 红噪音又称为布朗噪音 (Brown noise), 最早就是用于描述类似布朗运动的随机游走过程, 因

此，上述参数的随机游走能重现出计时噪音的红噪音特性并不奇怪。这种描述只是数学上的，而没有解释计时噪音的产生原理，所以后来人们还是不断地提出假说来解释脉冲星计时噪音，诸如下列几种：

1、小行星带：Shannon et al. (2013a)指出，一个小行星带对 PSR B1937+21 的引力扰动会让这颗脉冲星的 TOA 中表现出观测到的红噪音。从数学上，给脉冲星加上一个小行星带，相当于给它的 TOA 模型中加上若干个正弦函数。因此用小行星带解释脉冲星红噪音的数学本质是对计时噪音做傅立叶级数展开 (Fourier series expansion)。接下来我们会看到，磁场震荡模型的数学本质也是如此。

2、物质的随机吸积 (Groth 1971)：一团团物质下落到中子星表面，给中子星带来断续的、随机的角动量改变。Boynton et al. (1972) 中给出了物质吸积率和计时噪音的关系：

$$dM/dt = 10^{-19}(\Delta\nu/\nu)^{-1}M_{\odot} \text{ yrs.} \quad (1.10)$$

这些吸积物质可能来自超新星爆发时抛出物质的回落，这也可以顺道解释为什么年轻的脉冲星表现出更多的计时噪音，这是因为年老的脉冲星已经完成了这一物质吸积过程。类似的，下面两种模型也能解释这种计时噪音和年龄的关联。这种模型和接下来的两种模型数学上都等价于方程 (1.9) 描述的随机游走。

3、星体非平衡收缩 (Papaliolios & Carleton 1970)：随着脉冲星的自转速度下降，星体受到的离心力也在减小，于是原先的中子星形状就逐渐偏离了平衡态，有着改变形状而趋就新平衡态之势。当这种趋势强烈到超过某个临界值时，中子星的椭率就会发生一个改变 $\Delta\epsilon$ ，因而其转动惯量，进而自转频率也发生相应的改变。自转频率随椭率的改变由以下公式描述：

$$\Delta\epsilon = -\frac{\Delta\nu}{2\nu}. \quad (1.11)$$

这些微小形变在脉冲星自转变慢的过程中不断发生，从而产生了观测到的随机噪音。这个机制同样可以解释为什么年老的脉冲星表现出较小的计时噪音：年老的脉冲星自转减慢率小，所以中子星形状偏离平衡态需要更长的时间。

4、脉冲星磁层辐射的随机模式转换 (Lyne et al. 2010)：许多的脉冲星射电辐射存在两种模式。脉冲星在这两种模式之间做随机的切换。这两种模式对应于两种自转减慢率，因此这种随机切换会给脉冲星带来随机的计时噪音。更重要的是，Lyne et al. (2010) 的文章展示了 6 颗脉冲星的计时噪音随脉冲轮廓变化之间的相关性，如图 1.12，这为他们的模型提供了重要的证据。

不同于其他模型，Lyne 等人的模型可以利用脉冲轮廓变化的观测来预言计时噪音，从而准确地过滤掉噪音而提高其他信号的信噪比。而其他的模型都是通过

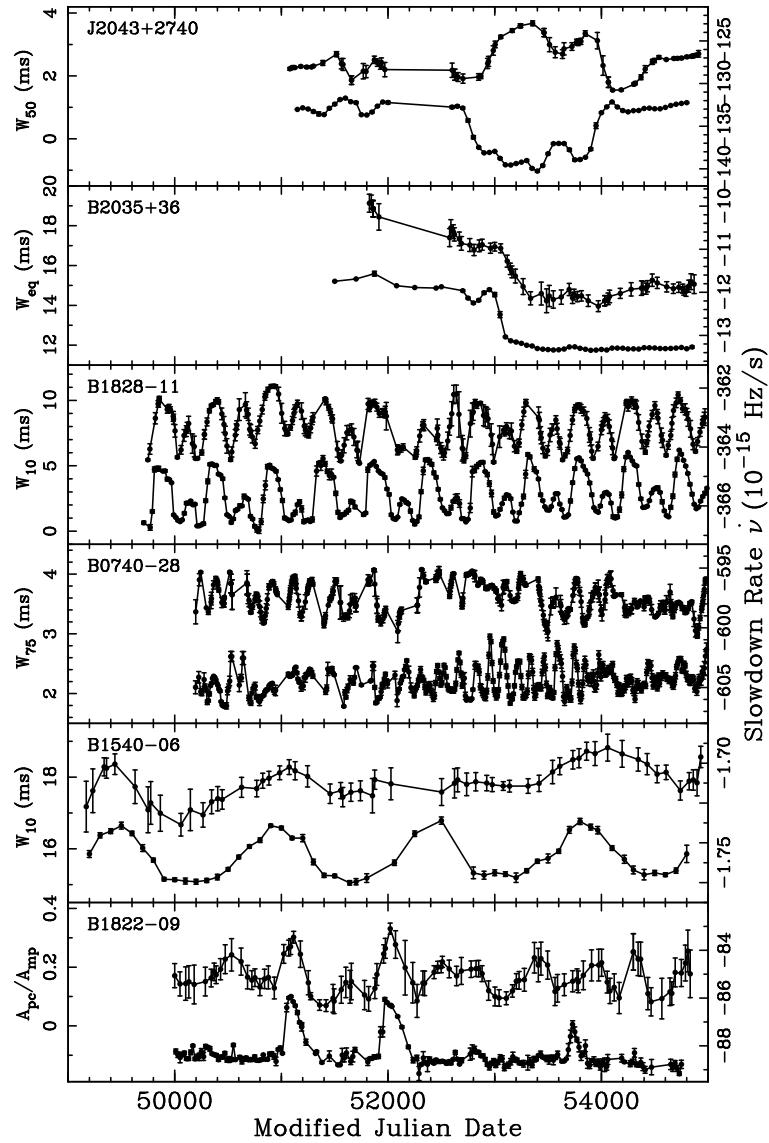


图 1.12: 六颗脉冲星显示出脉冲轮廓（每幅图的上曲线，左侧坐标轴）和自转减慢率（每幅图下曲线，右侧坐标轴）的同步变化。其中 W 和 A_{pc}/A_{mp} 是定义用以描述脉冲轮廓形状的参数，详情见 [Lyne et al. \(2010\)](#)。

拟合 TOA 把计时噪音吸收到模型的各种参数中，这种做法会把我们希望看到的信号，比如引力波信号也当成计时噪音吸收掉，正如“把孩子同洗澡水一起倒掉”。

5、磁场演化：谢祎和张双南([Zhang & Xie 2012a](#))提出，脉冲星磁场存在着长期的衰减，并伴随着短时标的震荡。变化的磁场会造成中子星的减速力矩变化，从而改变脉冲星的自转周期。因此这个模型也可以解释脉冲星的计时噪音的产生。由于磁场存在长期衰减，年老的脉冲星计时噪音较小的事实亦可被融入此框架内。

但这个模型只是个唯像模型，即它不能通过由其他观测限制的物理参数来预测脉冲星的计时噪声，也不能通过拟合前面的计时噪声来预测后面的计时噪声。

1.3.2 周期跃变

周期跃变是一种罕见的现象，即脉冲星的自转频率在很短的时间内跳跃 10^{-3} Hz- 100μ Hz。跃变以后往往伴随着自转频率的缓慢恢复趋势，如图 1.13。Espinoza 等人研究了 102 颗脉冲星的 315 个周期跃变现象，因此更多的关于周期跃变观测方面的信息，可见他们的论文(Espinoza et al. 2011)。

这种周期跃变多现于年轻脉冲星和磁星中，见图 1.14。

一开始人们对此现象十分不解：脉冲星从哪里突然获得了额外的角动量呢？一个自然的想法是脉冲星形状的突变，造成其转动惯量的变化。不过人们很快却发现这种方法产生的周期跃变相比观测而言太小了。因此人们开始逐渐相信，脉冲星的壳层从内部超流体中快速地获得了角动量。

中子星的壳层和磁层耦合在一起，因磁层的辐射带走转动能，使壳层减速。而如 1.1 节所说，中子星壳层以下是超流态中子，这部分流体与壳层的耦合很弱，因此中子星的内部依然保持着很快的转速。随着壳层不断损失角动量，中子星内部与外部的转速差异越来越大。当这种差异达到某个临界值时，内部流体与壳层的耦合会突然增大，从而把内部的角动量快速地转移给壳层。

微观上，中子星内部超流和壳层的角动量转移过程如下：

在超流液体中，角动量由一个个涡旋流管携带，每个流管携带的角动量为 $2\pi n \hbar m$ ，其中 n 为正整数， m 为中子质量， $\hbar \equiv h/2\pi$ ， h 是普朗克常数 (Plank constant)。超流体的整体角动量由其中的涡旋个数决定。中子星内部若想降低角动量，只能通过把涡旋流管向外排出。这些流管向外移动，试图进入中子星壳层，把角动量转移给壳层。但当这些流管接触到中子星内壳层时，因为与晶格化的原子核发生作用而被“钉扎”在边界，无法继续向外移动。因此角动量无法从中子星内部转移到壳层，换言之，作用在中子星壳层上的减速力矩无法传递到中子星内部(Alpar et al. 1993)，上述过程如图 1.15 所示：

当中子星壳层和内部的转动速度差异增加时，涡旋流管受到的 Magnus 力随之增加。Magnus 力和转速差异的关系由下面方程给出：

$$\mathbf{F} = \rho \Delta \mathbf{v} \times \boldsymbol{\kappa}. \quad (1.12)$$

其中 $\boldsymbol{\kappa}$ 是流管的环量。当 Magnus 力大于钉扎力时，涡旋流管一下子从边界进入中子星壳层，把角动量猛地传递给壳层，从而引发观测到的周期跃变。

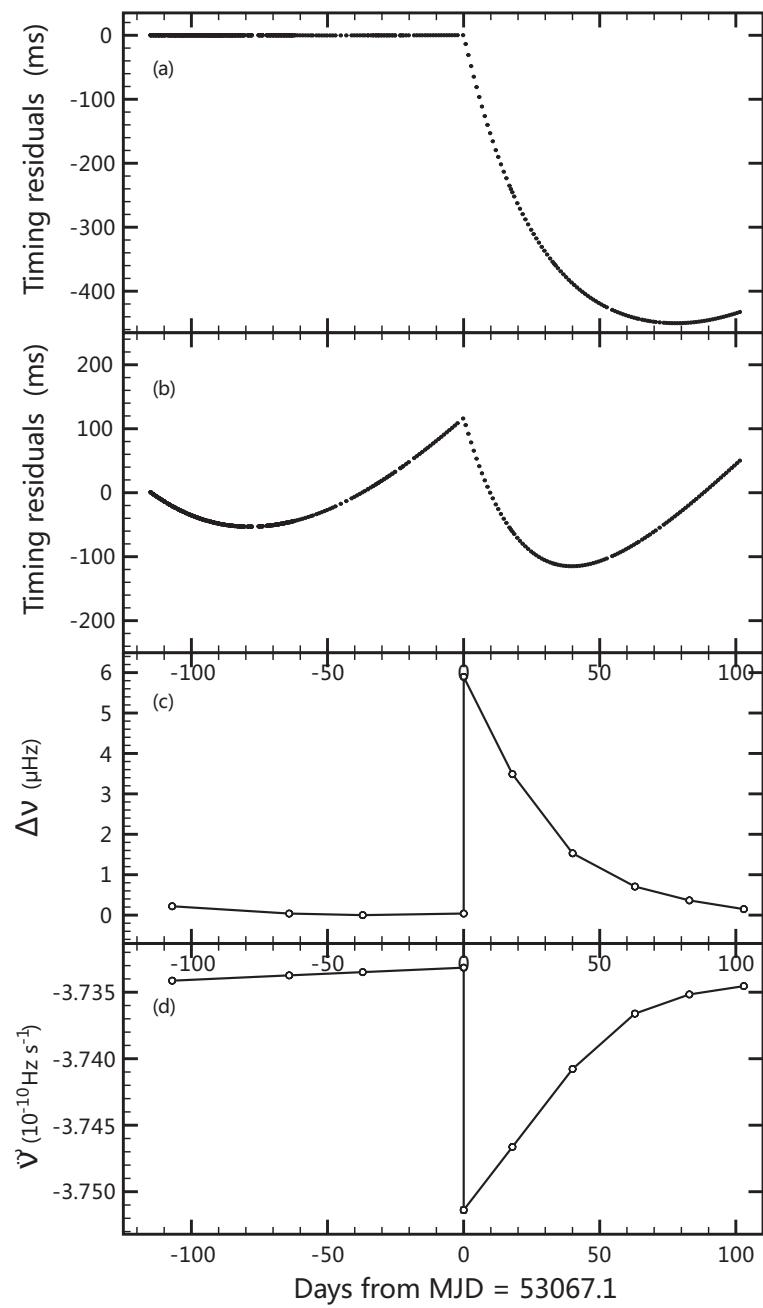


图 1.13: 脉冲星 PSR B0531+21 的周期跃变现象: 上两个图是用两种均匀减速的模型拟合得到的计时残差。下面两个图是自转频率和自转频率导数在周期跃变前后的变化。本图选自 [Espinoza et al. \(2011\)](#)。

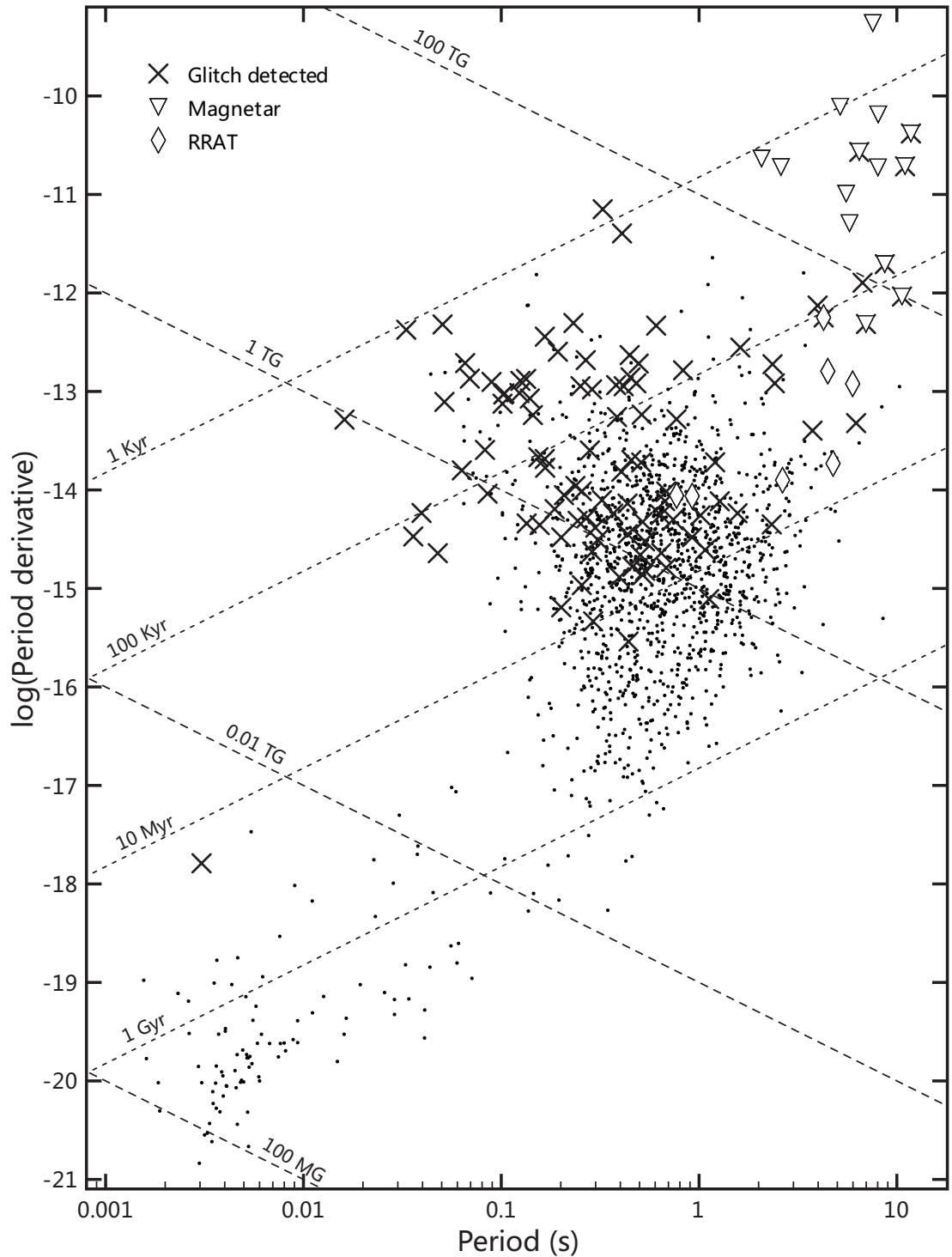


图 1.14: 出现过周期跃变的脉冲星在周期—周期导数图用“ \times ”符号标出。本图取自 [Espinoza et al. \(2011\)](#)。

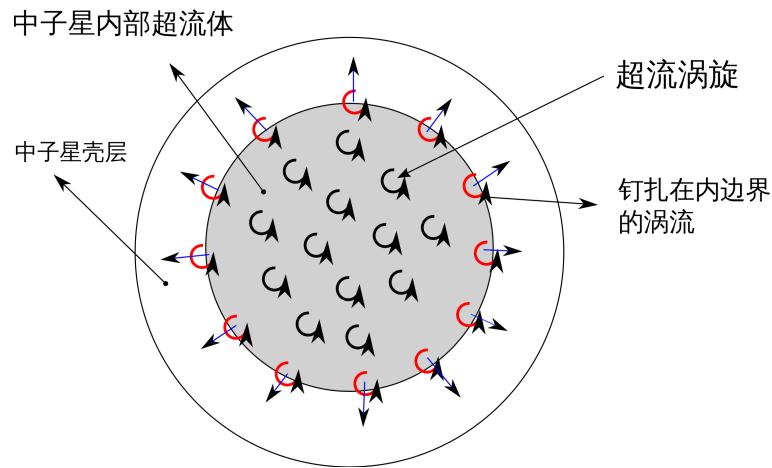


图 1.15: 中子星内部超流涡旋转移与钉扎示意图。

周期跃变发生后，中子星壳层和内部的转速差异减小，两部分再次脱耦。转速增加了的中子星壳层磁偶极辐射的功率增加了，因此受到更大的减速力矩，开始了自转频率的恢复过程。

除了以上描述的这种周期跃变之外，还有一种脉冲星自转频率突然减慢的“反周期跃变” ([Archibald et al. 2013](#))。目前对于反周期跃变的成因尚无广泛接受的解释。可能的解释有：突然出现的星风制动 ([Harding et al. 1999; Thompson & Blaes 1998; Thompson et al. 2000](#))，磁力线的突然扭结 ([Beloborodov 2009](#)) 等。

1.4 星际介质对射电脉冲信号的影响

射电脉冲信号离开脉冲星磁层之后，直至到达射电望远镜之前，电磁波包飞越了广袤的星际空间。那里充盈着的星际介质会对辐射信号造成诸多影响。当忽略掉星际介质的空间不均匀性和含时扰动后，星际介质对射电脉冲信号的零阶影响体现在两个积分效应：色散和法拉第旋转 (Faraday Rotation)。星际介质的空间不均匀性造成了脉冲轮廓的散射展宽，而视线方向上星际介质密度的随时间变化产生了观测到的闪烁。接下来我们就对上述的效应逐一简介。

1.4.1 色散

星际介质的大部分是由质子和电子组成的等离子体。由于电子的质量远远小于质子，因此对电磁波响应并造成电磁波传播效应的主要还是电子。在这样的星际



图 1.16: 脉冲信号在星际介质中色散示意图。

介质中，电磁波的传播速度为：

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2 c}, \quad (1.13)$$

其中 c 是真空中的光速， f_p 是等离子频率：

$$f_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\pi m_e}}. \quad (1.14)$$

上式中 e 是电子电荷量， m_e 是电子质量。因此，不同频率的波包需要的传播时间也不同，从公式 (1.13) 可以看出，频率越高的信号达到时间越早，如图 1.16。这就是脉冲信号在星际介质中的色散效应。不同频率信号的到达时间差为：

$$\Delta t = \frac{e^2}{2\pi m_e c} \times (f_1^{-2} - f_2^{-2}) \times \int_0^d n_e dl. \quad (1.15)$$

上式中的最后一项，即电子数密度沿视线方向的积分即被定义为色散量度 (Dispersion Measure)：

$$DM = \int_0^d n_e dl. \quad (1.16)$$

如果我们把脉冲轮廓依其频率排列，公式 1.15 告诉我们脉冲轮廓的顶峰应该组成一个关于频率的二次函数，如图 1.17。通过拟合这个函数，我们可以得到 DM 值。当我们知道视线方向上的电子密度分布时，我们就可以通过公式 (1.16) 计算出脉冲星的大致距离。目前为止最好的对银河系电子密度分布的测量结果来自 NE2001 (Cordes & Lazio 2002)，如图 1.18。反过来说，我们也要用其他方法独立地得到一些脉冲星的距离，然后来校准银河系的电子密度分布。

1.4.2 法拉第旋转

从第 1.2.2 我们知道，脉冲星的辐射是高度偏振的。法拉第旋转效应是指，脉冲星辐射电磁波的线偏振方位角在传播过程中发生改变，如图 1.19。线偏振的电磁波可以分解为左旋圆偏振和右旋圆偏振两部分。当沿着电磁波传播方向存在磁场时，左旋和右旋电磁波的对称性被破坏了。这是因为在圆偏振电磁波的作用下，

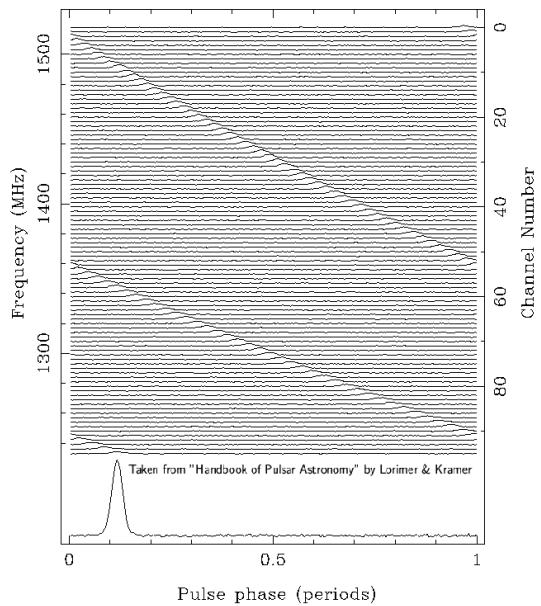


图 1.17: 不同频段的脉冲轮廓。本图取自 *Handbook of pulsar astronomy* (Lorimer & Kramer 2012)

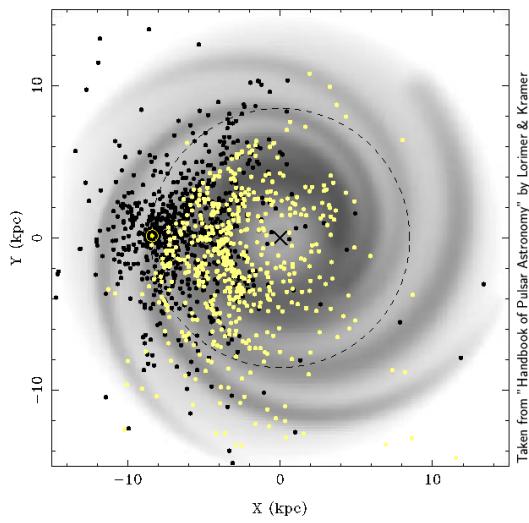


图 1.18: 观测到的脉冲星在银河系的分布以及银河系中电子密度分布 NE2001 (Cordes & Lazio 2002) (以灰度表示)。黑色的点是用低频射电波段 (主要是 430 MHz) 发现的脉冲星, 黄色的点是用高频射电 (主要是 1.4 GHz) 发现的脉冲星。

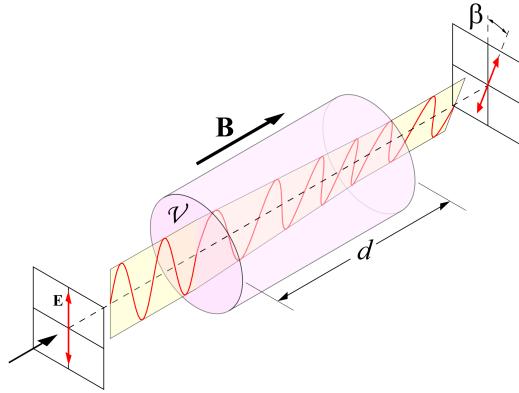


图 1.19: 法拉第旋转的示意图, 本图取自维基百科英文版词条 *Faraday Rotation*。

电子会做以电磁波传播方向为轴的圆周运动。而电子的圆周运动会产生磁场, 这个次生磁场磁矩和原先已经存在的磁场作用, 使左旋电子和右旋电子处于不同的能量状态。详细的计算给出, 当存在视线方向的磁场时, 折射率公式变为:

$$n = 1 / \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2} \mp \frac{f_p f_B}{f^3}}. \quad (1.17)$$

公式里的 \mp 符号其中负号对应于左旋圆偏振电磁波, 正号对应于右旋圆偏振, f_B 是回旋频率:

$$f_B = \frac{eB_{||}}{2\pi m_e c}. \quad (1.18)$$

$B_{||}$ 即代表电磁波传播方向、亦即视线方向上的磁场。因此而造成的线偏振方位角转动为:

$$\Delta\Phi_{PPA} = \frac{e^3}{2\pi m_e^2 c^2 f^2} \int_0^d n_e B_{||} dl. \quad (1.19)$$

假设一开始所有频率的电磁波线偏振方位角都是一样的 (见第 1.2.2 节旋转矢量模型), 那么到了被望远镜接收到的时候, 不同频率的电磁波线偏振方位角之间就会出现差异:

$$\Delta\Phi_{PPA} = (f_1^{-2} - f_2^{-2}) \times RM, \quad (1.20)$$

其中 RM 即被称作旋转量度 (Rotation Measure), 定义为:

$$RM = \frac{e^3}{2\pi m_e^2 c^4} \int_0^d n_e B_{||} dl, \quad (1.21)$$

通过公式 (1.20) 拟合不同波段的线偏振方位角, 人们就可以得到 RM, 结合 DM

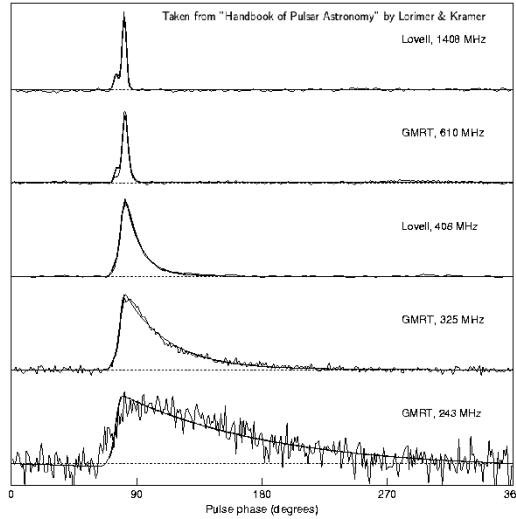


图 1.20: 脉冲轮廓的指数尾巴随射电频率的减小而增加。本图取自 *Handbook of pulsar astronomy* (Lorimer & Kramer 2012)。

就可以估计星际介质中沿视线方向上的平均磁场强度：

$$\langle B_{\parallel} \rangle = \frac{\int_0^d n_e B_{\parallel} dl}{\int_0^d n_e dl} = 1.23 \mu G \left(\frac{RM}{\text{rad m}^{-2}} \right) \left(\frac{DM}{\text{cm}^{-3}\text{pc}} \right)^{-1}. \quad (1.22)$$

不过用上述方法估测的磁场结果非常粗糙，有时甚至不能代表真实情况 (Mitra et al. 2003)。

1.4.3 散射

在低频波段上，我们常常会发现脉冲轮廓有一个指数衰减的尾巴，如图 1.20。并且频率越低，这个尾巴越长。这个现象可以很好的用“脉冲信号在传播中被不均匀的星际介质散射”来解释：

假设星际介质的不均匀性集中于一个放置于地球和脉冲星之间的屏幕上，屏幕的厚度为 a ，如图 1.21。屏上某处的电子密度相较于平均值有个差异 Δn_e 。那么相应的在这一点上电磁波的相速度也会不同。当电磁波穿过这个薄屏后，原本平直的波前就会扭曲，这相当于波前的法向发生偏转。以光子的语言来描述的话，就是光子与星际介质发生了散射。这种散射使脉冲星由严格的点源扩展为一个圆盘。详细的计算表明 (Lorimer & Kramer 2012) 这个圆盘上的流强符合高斯分布 (Gaussian distribution)：

$$I(\theta) d\theta \propto \exp(-\theta^2/\theta_d^2) 2\pi\theta d\theta. \quad (1.23)$$

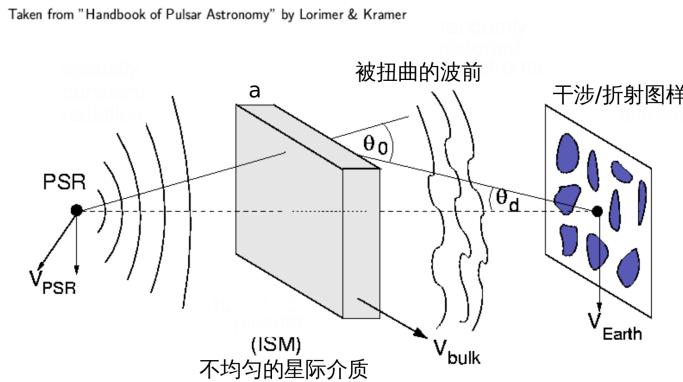


图 1.21：把星际介质的散射作用简化为在一个位于脉冲星和地球之间的薄屏上，此图翻译自 *Handbook of pulsar astronomy* (Lorimer & Kramer 2012)。

其中 $\theta_d = \frac{e^2 \Delta n_e \sqrt{d}}{2\pi m_e \sqrt{a} f^2}$.

这些来自散射屏幕不同位置的光子离开屏幕到达地球的路程不同，因此到达时间也有一个差异：

$$\Delta t(\theta) = \frac{\theta^2 d}{c}. \quad (1.24)$$

结合上面两个公式就会得到流强随时间的变化：

$$I(t) \propto \exp(-\Delta t/\tau_s), \quad (1.25)$$

其中， τ_s 被称为散射时标 (Scattering timescale)，

$$\tau_s = \frac{e^4}{4\pi^2 m_e^2} \frac{\Delta n_e^2}{a} d^2 f^{-4}. \quad (1.26)$$

上面的公式告诉我们，脉冲轮廓的指数尾巴的长度和 f^{-4} 成正比。以上的讨论是在最简化的单层散射屏幕模型框架内得到的。如果更真实的情况，即星际介质的不均匀性分布在整个视线上，并且不均匀的尺度服从 Kolmogorov spectrum ([Kolmogorov 1941](#))，那么计算出的散射时标则与 $f^{-4.4}$ 成正比，这与观测符合得更好。

1.4.4 闪烁

顾名思义，闪烁就是脉冲星的射电流强随时间的变化。它的原理和恒星在大气中的眨眼类似。闪烁可分为三类，为了更好的理解这三类不同的闪烁，我们需要先回忆一下波动光学中的一些概念。

如果电磁波源和接收器之间如果没有任何障碍物，那么电磁波就自由地传播到接收器。如果在中途出现散射障碍物，那么被散射的电磁波到达接收器时会与

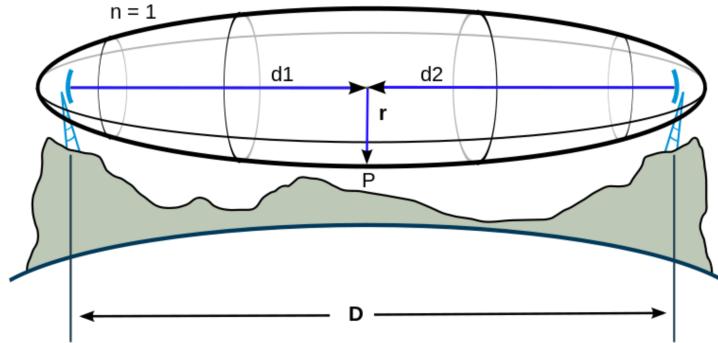


图 1.22: 菲涅尔区示意图, 本图取自维基百科英文版词条 *Fresnel Zone*.

沿直线未经散射的电磁波发生干涉。有些情况下, 干涉使接收器接收到的流强增加, 这种情况称为相长干涉; 在另一些情况下, 干涉使接收器收到的流强减小, 称为相消干涉。菲涅尔区 (Fresnel zones) 是一系列椭圆面包围的区域, 如图 1.22, 计算表明如果障碍物出现在奇数菲涅尔区, 则发生相长干涉, 出现在偶数菲涅尔区, 则发生相消干涉。

第一菲涅尔区的半径为:

$$l_F = \sqrt{\frac{d}{k}}, \quad (1.27)$$

其中 k 是波数。

在单散射屏模型的框架下, 一块星际介质密度涨落区就是散射物体。如果散射物体的尺度大于第一菲涅尔半径, 那么散射物体横跨视线方向的移动就不会太大地影响到接受器收到的流强, 相反, 接收器相对于干涉图样的运动决定了闪烁出现的频率和强弱。这种情况就被称为弱闪烁 (Weak scintillation)。

相反, 如果散射物体尺度小于或者与第一菲涅尔半径可比, 那么散射物体相对于视线方向的移动就决定了闪烁的频率和强弱, 这种情况称为强闪烁 (Strong scintillation)。

在强闪烁的情形下, 又分为衍射性 (defractive) 闪烁和折射性 (refractive) 闪烁。他们的区别在于: 衍射性闪烁的散射范围内只包含了一块或者较少的散射团块, 因此接收位置上的明暗变化来自干涉图样; 而折射式闪烁的散射范围包含了多块散射物质, 接受位置上的明暗变化来自几何光学的光线汇聚与发散, 如图 1.21。图 1.23 表示, 在特定频率或特定 DM 下, 通过观测量 modulation index 可以判断闪烁究竟属于哪种类型。其中 modulation index 定义为:

$$m = \sigma_S / \langle S \rangle, \quad (1.28)$$

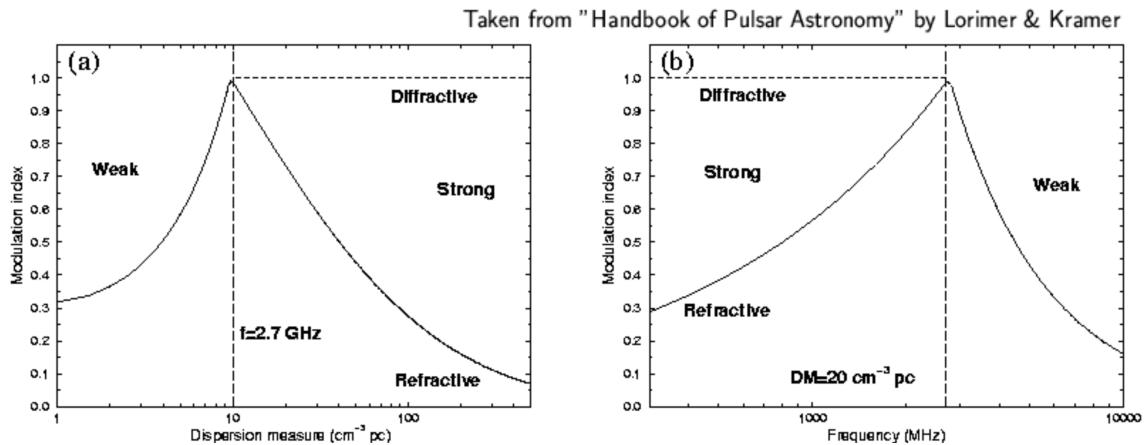


图 1.23: modulation index 随 DM (a) 与随频率(b) 的变化。本图取自 *Handbook of pulsar astronomy* (Lorimer & Kramer 2012)。

σ_S 是所观测到流强变化的标准差， $\langle S \rangle$ 是其平均值。

关于闪烁这部分内容，本论文工作中没有涉及，因此在引文中介绍的很粗略。如果读者想了解更详细的内容可以参考 *Handbook of pulsar astronomy* 的第一章第 2 节和第四章第 2 节。

1.5 引力波对脉冲信号的到达时间的影响

到目前为止, 我们都在谈论脉冲星。接下在本节中我们会谈论引力波, 因为测量引力波是脉冲星计时的一个重要而且有前途的方向, 也是我博士期间主要工作之一。

广义相对论认为, 时间和空间共同组成了 3+1 维的黎曼流形 (Riemann Manifold), 而物质和能量, 或者用相对论的语言, 能量动量张量, 决定了这个流形的几何性质。用来描述上述思想的方程, 就是爱因斯坦场方程 (Einstein field equation):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.29)$$

方程左边, $R_{\mu\nu}$ 是黎曼曲率张量, $g_{\mu\nu}$ 是度规张量, R 是标量曲率, 这三个量是 3+1 维黎曼流形的内禀几何量, 前面两个都可以由度规张量计算出。 $T_{\mu\nu}$ 是能量动量张量。

由于场方程是高度非线性的关于 $g_{\mu\nu}$ 的二阶偏微分方程, 所以很难求解。但微扰论的经验告诉我们, 只要我们把研究对象限制在一个小邻域内, 总可以得到线性的初级近似。

所以当我们对度规做如下展开:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.30)$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 是闵可夫斯基时空 (Minkowski Spacetime) 的度规, $h_{\mu\nu}$ 代表对平直时空的微小偏离, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ 。并将此带入方程 (1.29), 我们就得到了场方程的线性近似:

$$\left(-\frac{1}{c^2}\partial_0^2 + \nabla^2\right)\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.31)$$

其中 $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h$ 。在从方程 (1.29) 得到方程 (1.31) 的过程中我们用了洛伦兹规范 (Lorentz gauge), 即

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (1.32)$$

当远离源时, 即在真空中, 方程 (1.31) 即一个波动方程, 且所描述波的波速为 c , 即光速。这个波就被称为引力波, 它描述度规扰动在时空背景上的传递。

度规是对称的 4 阶张量, 因此 $h_{\mu\nu}$ 有 10 个自由度。而采用了洛伦兹规范后还剩下 6 个自由度。现在再加上新的规范条件:

$$h_i^i = 0, \partial^i h_{ij} = 0. \quad (1.33)$$

这条件分别为无迹 (Traceless) 条件和横波 (Transverse) 条件, 因此这个规范又叫 TT 规范。在 TT 规范下, $h_{\mu\nu}$ 只剩下 2 个自由度:

$$\mathbf{h}_{ab}^{\text{TT}} = \mathbf{h}_{ab}^+ + \mathbf{h}_{ab}^\times, \quad (1.34)$$

其中 $a, b = 1, 2$, 而 $\mathbf{h}_{ab}^+ = h^+\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{h}_{ab}^\times = h^\times\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, 这两项即引力波的两种偏振模式, 分别称为 plus 模式和 cross 模式, 即整个 4×4 的矩阵只剩下 $i = 1, 2$ 的分量非零。

引力波所传播之处, 物质会感受到潮汐力:

$$\ddot{s}_i = \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}^{\text{TT}} s_j, \quad (1.35)$$

其中 s_i 是粒子之间的固有距离, 或在 The Proper Detector Frame (PDF) 中的坐标。因此, 引力波的能量动量会以潮汐力的方式传递给物质。

利用引力波能够传递能量的特点, 人们设计了多种共振探测器, 利用仪器的固有频率和引力波频率相同引起的共振来放大机械振动, 继而试图探测这种机械振动。而自由粒子之间固有距离在引力波作用下变化这一特质, 被人们利用设计了

激光干涉仪和脉冲星计时测量引力波的方法。本文的工作只涉及脉冲星计时的方法，对于想了解其他方法的读者，可以阅读 Maggiore 的教科书([Maggiore 2007b](#))，上述关于引力波的数学推导也可参考此书。

脉冲星和太阳系质心可以看做两个在宇宙中的自由质点。当有一列引力波经过脉冲星和太阳连线时，根据公式 ([1.35](#))，就可以推算出脉冲星和太阳系质心之间的距离随时间的变化。进而，可以直接计算出引力波在脉冲星 TOA 上引起的变量化([Zhu et al. 2014](#)):

$$r(t, \Omega) = F_+(\Omega) \Delta A_+(t) + F_\times(\Omega) \Delta A_\times(t). \quad (1.36)$$

上式中， Ω 是指向引力波传播方向的单位矢量， $F_+(\Omega)$ 和 $F_\times(\Omega)$ 是几何因子，它们只依赖于引力波源和脉冲星的相对位置：

$$\begin{aligned} F_+(\Omega) &= \frac{1}{4(1 - \cos \theta)} \{ (1 + \sin^2 \beta) \cos^2 \beta_p \cos[2(\lambda - \lambda_p)] \\ &\quad - \sin 2\beta \sin 2\beta_p \cos(\lambda - \lambda_p) + \cos^2 \beta (2 - 3 \cos^2 \beta_p) \}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$F_\times = \frac{1}{2(1 - \cos \theta)} \{ \cos \beta \sin 2\beta_p \sin(\lambda - \lambda_p) - \sin \beta \cos^2 \beta_p \sin 2(\lambda - \lambda_p) \}. \quad (1.38)$$

其中， β ， λ 和 β_p ， λ_p 分别是引力波源和脉冲星的赤经赤纬， θ 是引力波源方向和脉冲星方向的夹角。

而 $\Delta A_{+,\times}(t)$ 则包含两项，

$$\Delta A_{+,\times}(t) = A_{+,\times}(t) - A_{+,\times}(t_p), \quad (1.39)$$

分别代表引力波在 t 时刻经过太阳系（地球），以及引力波在 $t_p = t - d_p(1 - \cos \theta)/c$ 时刻经过脉冲星时引起的太阳系质心和脉冲星质心坐标的随时间变化，它们分别被称为地球项和脉冲星项。而 $A_{+,\times}(t)$ 的具体形式则依赖于引力波源的种类([Babak & Sesana 2012; Ellis et al. 2012; Jenet et al. 2004a](#))。

1.5.1 超大质量双黑洞作为引力波源

利用脉冲星的 TOA 寻找引力波，其对引力波频率的敏感范围由脉冲星的观测采样情况决定。根据信号处理的知识，我们知道，如果想从一个总时间长度为 T ，总数据点数为 N 的时间序列里找到一个周期信号，那么这个周期信号的频率一定要满足 $T^{-1} < f < N(2T)^{-1}$ 。

对于目前的脉冲星计时项目数据而言，这个范围大致在 10^{-9} - 10^{-7} Hz (Manchester et al. 2013a; van Haasteren et al. 2011a)。在这个频率范围内，天文上感兴趣源主要是超大质量双黑洞。

目前人们普遍相信，每个星系的中心都有一个质量在 10^6 - $10^8 M_{\odot}$ 的超大质量黑洞。当两个星系并合后，中心的超大质量黑洞就会绕转，辐射出频率为 10^{-9} - 10^{-7} Hz 的引力波。随着引力波带走双星的轨道能量，两颗超大质量黑洞就会逐渐靠近，绕转频率会逐渐升高，辐射出的引力波功率也会增大。频率随时间的变化为 (Lee et al. 2011)：

$$\omega = 2 \left(\frac{5}{256} \right)^{3/8} \frac{1}{M_c^{5/8} \tau^{3/8} (1+z)^{5/8}}, \quad (1.40)$$

这里 $M_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}$ 被称为 Chirp 质量， z 是引力波源的红移， τ 是距离两个黑洞完全并合还剩的时间，这个公式是在几何单位制下的 ($G = c = 1$)。

如果 $L/c \sim \tau$ (其中 L 是脉冲星和太阳的距离， τ 是引力波源频率的变化时标)，公式 (1.39) 中的地球项和脉冲星项的频率就会显著不同，因此脉冲星的 TOA 中会混入两个频率的正弦信号。这两个正弦成分的幅度比满足关系：

$$\frac{\kappa_p}{\kappa_e} = \left(\frac{\omega_p}{\omega_e} \right)^{-1/3}. \quad (1.41)$$

因此，如果在脉冲星计时残差的功率谱上看到两个单色峰如图 1.24，并且幅值与频率间满足关系 (1.41)，那么就有可能是引力波单源的信号。

利用检查脉冲星计时残差功率谱的办法，我们可以给出单个引力波源强度的上限。在第三章里，我们将着重介这方面的工作。

但由于前面说过的原因，脉冲星 TOA 中准周期信号可能的来源有很多，因此用单颗脉冲星无法认证引力波信号。而同一列引力波会在两颗脉冲星的计时残差间留下相关的特征。检查多颗脉冲星中彼此相关的这种结构，可以用来探测引力波。朱兴江等人 (Zhu et al. 2014) 就是利用这一方法，使用了 20 颗脉冲星的 TOA 数据做相关分析，试图在全天范围内寻找引力波单源。虽然没有找到显著的引力波信号，但是也给出了引力波强度上限的天图，见图 1.25。最新的限制来自 Schutz & Ma (2016)。

1.5.2 随机引力波背景

在宇宙学尺度上，各个方向都有大量的并合星系。因此超大质量双黑洞的数目应该是非常多的。这些数目众多的引力波准单色源的信号在不同相位。不同频

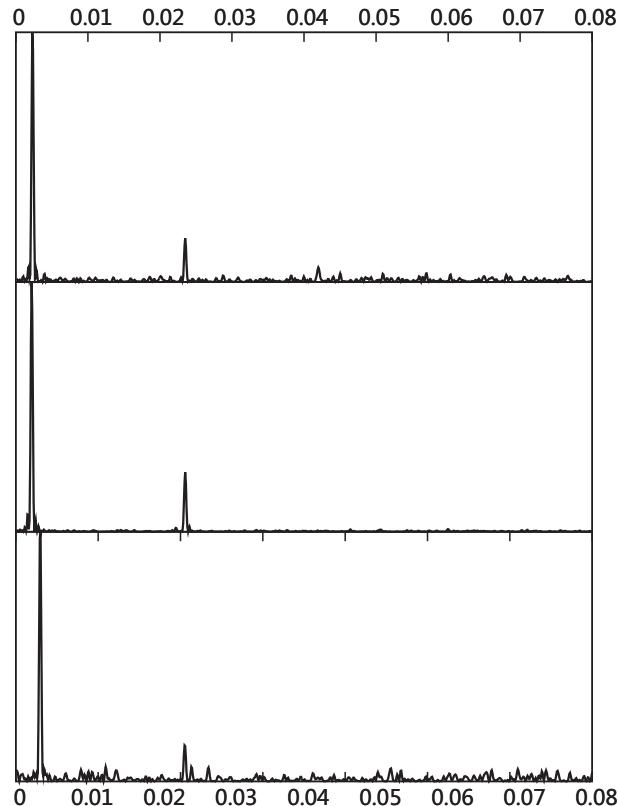


图 1.24: 模拟的同一个引力波源在三颗不同的脉冲星的计时残差功率谱上留下的痕迹。低频处的峰对应于各脉冲星的脉冲星项，高频处的峰对应共同的地球项。横坐标单位是 day^{-1} 。

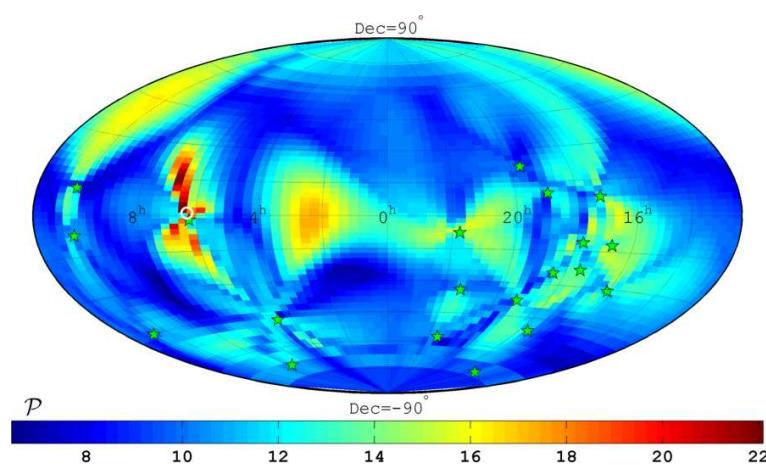


图 1.25: 利用 PPTA DR1 数据画出的引力波单源的探测统计量在全天的分布。白色圆圈标出了探测显著性最高的位置，绿色五角星标注了绘制此图所用的 20 颗 PPTA 脉冲星的位置。

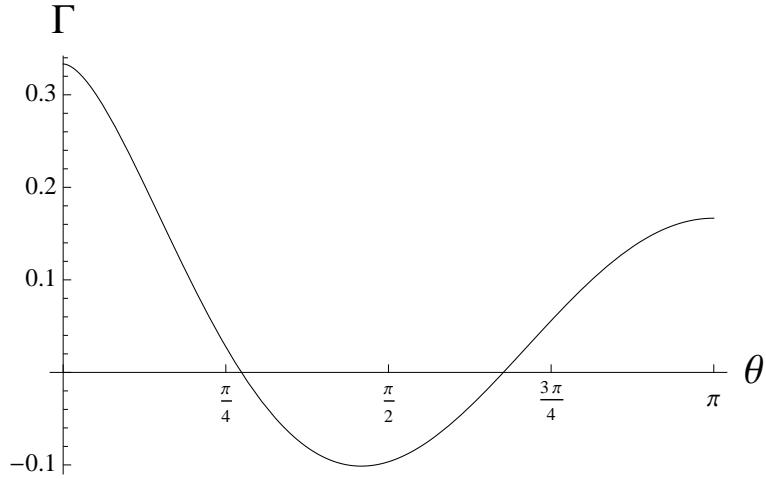


图 1.26: Hellings & Downs 曲线。Hellings & Downs 曲线也可见 [Lee et al. \(2008\)](#).

率上，沿着各个方向随机地到达脉冲星—地球组成的“引力波探测器”上，就形成了一个各向同性的连续引力波谱，被称为随机引力波背景 ([Begelman et al. 1980; Jaffe & Backer 2003b](#))。

Phinney 在其开创性的文章 ([Phinney 2001a](#)) 中计算得出，上述过程产生的引力波功率谱为：

$$h_c^2(f) = h_0^2 f^{-4/3}. \quad (1.42)$$

因此脉冲星信号穿过随机引力波背景时会在 TOA 中留下幂指数为 $-4/3$ 的红噪音。

通过研究单颗脉冲星的红噪音强度，人们可以对随机引力波背景的强度给一个上限。但要证认这个信号，则依然要借助多颗脉冲星计时残差中的相关关系。Hellings 和 Downs 在 1983 年的文章里证明，由随机引力波背景引起的各颗脉冲星的两点相关函数满足：

$$\alpha_{ij} = \frac{1 - \cos \gamma_{ij}}{2} \ln\left(\frac{1 - \cos \gamma_{ij}}{2}\right) - \frac{1}{6} \frac{1 - \cos \gamma_{ij}}{2} + \frac{1}{3}. \quad (1.43)$$

其中， γ_{ij} 是某两颗脉冲星方向的夹角。方程 (1.43) 被称为 Hellings & Downs 曲线，如图 1.26，然而最初 Hellings 和 Downs 的文章 ([Hellings & Downs 1983a](#)) 中的推导过于简略，而存在误导性，推荐读者参考 [Anholm et al. \(2009\)](#) 中的推导。

截止到本论文写完之时，对背景引力波最好的限制是来自 [Shannon et al. \(2015\)](#) 的 $h_c(1 \text{ yr}^{-1}) < 1.0 \times 10^{-15}$ (95% 置信度)，这个结果是用 PPTA 的数据得到的。2016 年 *NANOGrav* 也发表了他们的结果： $h_c(1 \text{ yr}^{-1}) < 1.5 \times 10^{-15}$ ([Arzoumanian et al. 2016](#))。

1.5.3 脉冲星计时阵列

正如上面提到，利用多颗脉冲星的TOA数据做相关分析，就可以区分多种计时噪音，从而精确地找出引力波信号。所以世界上一些大型的射电天文台开始有计划地定期观测一批高稳定性的射电脉冲星，并把数据编入所谓“脉冲星计时阵列”的数据库中。这里的“阵列”指的就是被监控的脉冲星名单。不同的天文台集体有各自不同的名单，比如欧洲5国（荷兰，法国，德国，英国，意大利）共享的由5台望远镜（Westerbork Synthesis Radio Telescope, the Effelsberg Radio Telescope, the Lovell Telescope, the Nançay Radio Telescope, the Sardinia Radio Telescope）提供的EPTA (European Pulsar Timing Array) ([Kramer & Champion 2013](#)) 数据；澳大利亚Parkes天文台的PPTA (Parkes Pulsar Timing Array) ([Manchester et al. 2013a](#)) 和美国的Green Bank望远镜与Arecibo望远镜共享的NANOgrav (The North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves) ([McLaughlin 2013](#)) 数据。这些数据库将被放在一起联合分析，而组成了更大的IPTA (International Pulsar Timing Array) ([Manchester & IPTA 2013](#)) 数据库。未来，随着新一代望远镜的加入（比如SKA和FAST），更多的脉冲星将会被发现而加入IPTA的名单。同时现有望远镜硬件的提高，后期算法的精进，数据的积累，会使我们越来越接近探测到引力波被探测到的那一天。图1.27是[McLaughlin \(2013\)](#)对于未来探测到引力波的预测。每幅图分别代表脉冲星数据中的红噪音（5 yr）强度分别为0 ns, 5 ns 和 10 ns时，得到90%显著性探测的概率。红线，绿线，蓝线分别对应随机引力波背景强度(A_{gw})为 5.6×10^{-6} , 1×10^{-15} , 2×10^{-15} 。

下面的一章将会介绍与硬件及观测数据处理相关的内容。

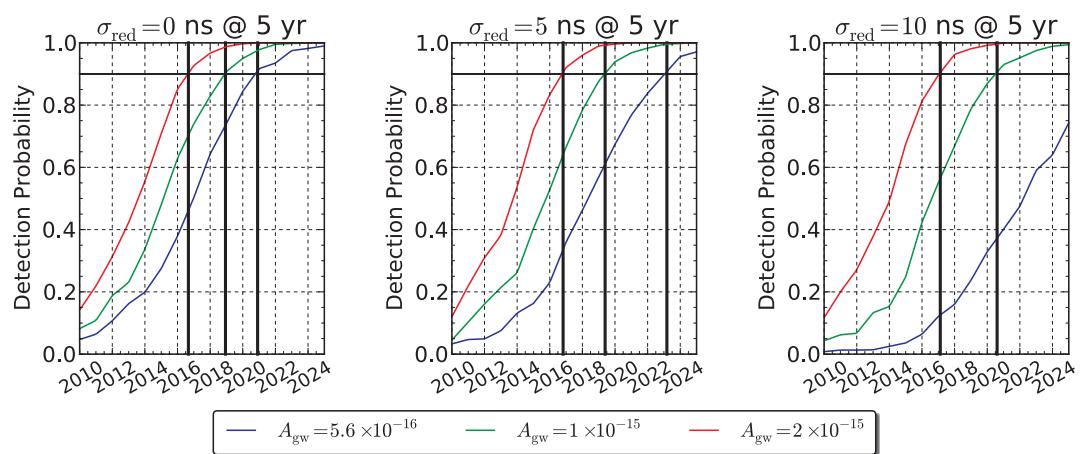


图 1.27: 假设三种不同的随机引力波背景幅度, 和三种不同强度的红噪音, 本图给出显著性为 90% 的探测发生的概率随时间的变化。详细情况见正文, 本图来自 [McLaughlin \(2013\)](#)。

第二章 脉冲星计时的观测系统与数据处理

2.1 观测系统

来自脉冲星的射电信号在穿越茫茫星际空间之后，被射电望远镜的抛物面形天线收集，聚焦后被位于焦点处的接收机转换为电压信号。为了避免接收器的黑体辐射产生热噪音，接收器被置于液氦冷却系统之中。电信号经过放大器，被第一次放大。放大器同样也是被置于低温冷却系统中的。接下来电信号将通过电缆传输到地面控制室中。

电信号在电缆中传输时，高频信号（1 GHz 左右）在电缆中损失较大，因此在信号传输之前需要降低频率¹。具体的做法是用一个本地的信号发生器产生一个与输入信号频率接近的信号（本振，Local Oscillator），然后本振与输入信号混合。数学上说，信号的混合过程相当于两个正弦波的相乘，

$$\cos \nu_{\text{obs}} t \times \cos \nu_{\text{LO}} t = 0.5(\cos(\nu_{\text{obs}} - \nu_{\text{LO}})t + \cos(\nu_{\text{obs}} + \nu_{\text{LO}})t), \quad (2.1)$$

其中 ν_{obs} 是观测到脉冲星的射电频率， ν_{LO} 是本振频率。混合的结果是产生了两个信号之和，其中一个信号频率是两个混合成分的频率之和，另一个信号则是差频。由于 $\nu_{\text{obs}} \approx \nu_{\text{LO}}$ ，因此差频 $\nu_{\text{obs}} - \nu_{\text{LO}}$ 会远远小于原来的频率。这个差频信号通过低通滤波器被分离出来，称为“中频信号（intermediate frequency，简称 IF）”。中频信号被再一次放大之后，将进入后端（backend）。

不同的望远镜，根据其科学目标的不同而后端各异。脉冲星计时所用的常见后端有：模拟滤波器系统（Analogue Filter），自相关频谱仪（Autocorrelation Spectrometer）和一致性消色散系统（Coherent Dedisplacement System）。这三种后端代表了脉冲星计时后端技术发展的数字化趋势。

脉冲星计时所需要的原始数据产品是多维脉冲轮廓数据，即有时间分辨率和频率分辨率的脉冲星轮廓。如何从这些标准化的数据出发得到有用的科学结果将在下一节介绍。接下来我们将逐个介绍这些后端。本节内容主要参考了 Verbiest (2009)。

¹ 李柯伽教授指出：在目前，1 GHz 左右的信号每 30 米损失 30%，因此电缆损失不是主要原因。降低频率是历史习惯噪声的，因为早期的人希望用一套中频设备就解决所有问题。

2.1.1 模拟滤波器系统

脉冲星计时需要的数据是具有一定频率分辨率和时间分辨率的脉冲轮廓。时间分辨率必须低于脉冲星的周期，这样才能研究脉冲轮廓的形状等科学问题。在修正色散以及散射效应时要求频率分辨率，即能区分不同频率下的脉冲轮廓。为了获得频率分辨率，一个最直接的办法就是让信号通过几个并联的带通滤波器，每一个滤波器只允许某一个中心频率附近一定带宽的信号通过。每一个滤波器就是一个频道，每个频道输出的信号再被以某个时间分辨率采样，然后数字化，分别记录。最后，根据色散公式（1.15）把不同频道之间的信号做一个时间移动，以消除色散的影响，提高信噪比。但是每一个频道内的色散是无法消除的。

模拟滤波器系统是较早的后端设备，与新一代的后端相比，它有很多劣势。首先它的带通滤波器的中心频率、带宽、频道数都是固定的，不容易更换。而对于不同的脉冲星，研究它们的最优频道参数组合是不一样的，比如，对于大DM的脉冲星，我们就需要每个频道的带宽更窄，以便尽可能地减少频道内色散。第二点，高时间分辨率和高频率分辨率不可兼得，这是由于带通滤波器的上升时间和带宽成反比。第三，不同的带通滤波器之间的响应会存在差异，造成系统误差。

2.1.2 自相关频谱仪

我们知道，一个时间序列的自相关函数和它的功率谱互为傅立叶变换（Fourier transformation）。自相关频谱仪²正是利用这一点来避开了繁复的带通滤波器组而实现频率分辨。

第一步，要利用本地信号发生器进行二次混频，把中频信号降低到低频，以便在后续的模拟 / 数字转换过程中可以使用更低的时间采样率。接下来对模拟信号 $S(t)$ 按照时间间隔 t_{samp} 采样，这样最终的频率带宽由 Nyquist 频率决定： $B = 1/2t_{\text{samp}}$ 。

第二步，依次对长度为 $2N \times t_{\text{samp}}$ 的一段数字信号求自相关函数。信号的长度 $2N \times t_{\text{samp}}$ ，决定了傅立叶变换的频率分辨率：

$$\Delta\nu = 0.5Nt_{\text{samp}} = B/N, \quad (2.2)$$

所以也称为频道数。

第三步，根据已知的脉冲星周期对数据进行折叠，对相同脉冲相位所对应的自相关函数进行平均。

²在早期脉冲星计时的确用过子相关谱仪，但现在都用傅里叶谱仪或数字滤波谱仪。

第四步，对每一段自相关函数进行傅立叶变换，得到每一个脉冲相位所对应的功率谱。这样即获得了具有频率分辨率 B/N ，时间分辨率 t_{samp} 的脉冲相位。

第五步，同模拟滤波系统一样，最后需要对不同频道内的脉冲相位进行移动，以消除色散的影响。但频道内部的色散依然无法消除。

跟模拟滤波系统相比，自相关频谱仪只需要修改采样率和自相关序列的长度就可以更改频道参数，因此在时间分辨率和频率分辨率上灵活性要高得多。不过高频率分辨率和高时间分辨率依然不可兼得。

2.1.3 相干消色散系统

以上两种方法的共同不足是对频道内的色散束手无策。由于色散过程相当于在时域上的卷积，因此在傅立叶空间上色散过程就相当于乘积，而消色散过程就变成了简单的除法。

相干消色散的第一步依然是通过混频把中频信号降为低频，然后进行模拟/数字转换。第二步进行傅立叶变换，然后除以响应函数：

$$H(f_0 + \Delta f) = \exp\left(\frac{i2\pi D\Delta f^2}{f_0^2(f_0 + \Delta f)}\right), \quad (2.3)$$

其中， f_0 是中心频率， Δf 是于 f_0 的偏离， D 是色散常数，定义为：

$$D = \frac{e^2}{2\pi m_e c} \approx 4.15 \times 10^3 \text{ MHz}^2 \text{ pc}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}. \quad (2.4)$$

最后，信号被反傅立叶变换（inverse-Fourier transform）回时域，消色散完成。这种消色散解决了频道内的色散问题，因此不再需要取很精细的频率分辨率，从而提高脉冲轮廓的时间分辨率，看到脉冲轮廓的更多细节。

图 2.1 展示了脉冲星信号的收集和转换过程。

2.2 从原始数据到 TOA

脉冲星计时分析里面最常用到的信息是每个脉冲到达的时间 TOA，知道了 TOA 我们就可以拟合出脉冲星的自转减慢率、双星轨道参数、磁场强度、引力波等多种多样的信息。本节将介绍如何从望远镜给出的原始数据—多维脉冲轮廓—出发，得到 TOA。而接下来一节将介绍如何利用 TOA 实现各种科学目标。

脉冲轮廓是一维数组，它的指标代表脉冲星的自转相位，元素是相应的脉冲星射电辐射亮温度。在上节的介绍中我们看到，消色散的步骤可以在后端完成。但

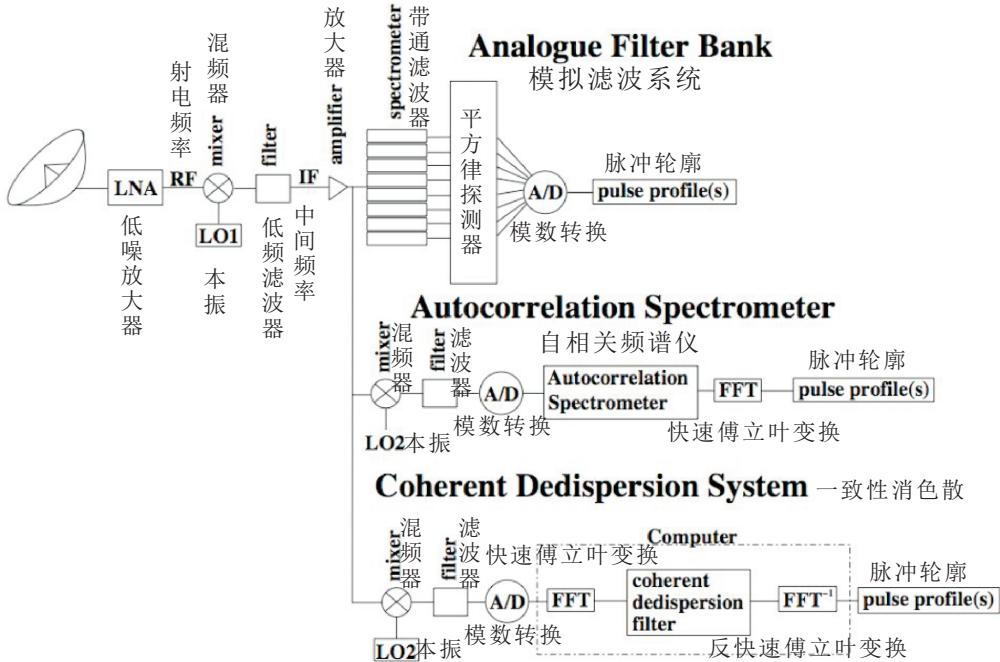


图 2.1: 脉冲星信号传输链。本图引自 Verbiest (2009)。

是有时 DM 随时间变化很快，或者为了达到更高的消色散的精度，每个频道里的脉冲轮廓都要被单独纪录下来。此外，为了保留脉冲轮廓形状随时间的变化信息，每个周期的脉冲轮廓也要被单独纪录下来。这样，数据就是一个二维数组，指标分别为频道和时间，而元素为相应的一维脉冲轮廓。此外，四个表征偏振的斯托克斯参量（Stokes parameters）也被单独纪录下来。因此，整个数据是一个四维数组，四个维度分别是脉冲相位、时间、频率、偏振，元素是脉冲星亮温度，在现在通用的脉冲星数据格式 PSRFITS 的框架下，这被称为一个档案（Archive）。

从档案数据得到 TOA 的过程，简而言之，先获得一个标准的脉冲轮廓模板，然后用这个模版和不同时刻的脉冲轮廓做交叉相关，得到该轮廓的到达时间。这一系列的操作都可以用软件包 PSRCHIVE 实现。关于 PSRCHIVE 的介绍可以见网站³或 van Straten et al. (2012a)，本节只介绍本文所用到的处理流程。

- 1) 为了获得稳定的脉冲轮廓模板，我们需要去掉观测中的坏点，比如射电频率干扰（Radio Frequency Interference），为此，我们希望可以把档案按照不同方式积分（Scrunch）然后可视化，我们可以用程序 pav，具体命令如下：

```
pav -G archive.ft
```

³<http://psrchive.sourceforge.net/manuals/>

此命令把一个名为“archive.ft”的档案数据沿着时间维积分，并且显示出亮温度随相位和频率的变化。

```
pav -Y archive.ft
```

把频率维积分掉，显示亮温度随相位和时间的变化，通过这个命令，用户可以直观地看出哪些天的观测质量很差，应该被剔除。也可以观察到脉冲轮廓随日期的变化。在命令中如果加上-d，比如pav -dY就是在积分掉频率的时候自动用档案文件头中记录的DM来修正不同频道之间的相位延迟。发现某些需要剔除的频道或者时间道(sub-integration)之后，可以用交互式工具psrzap，可视化地来剪裁档案，留下有效的数据。

- 2) 下一步，我们要对原始数据在时间维和频率维做积分，以提高信噪比。命令如下：

```
pam -FTp -e FTp archive.ft
```

把档案“archive.ft”沿时间和频率积分，把新文件的扩展名改成.FTp，这个p的意思就是偏振也积分掉了。如果不完全积分掉所有频率带宽，而是把频率带宽分成N份，则用

```
pam -e Tp -Tp *.ft --setcchn N archive.ft
```

如此一来，后面获得的TOA文件(.tim)就会包括不同频道的TOA了，这对后续的工作可能会很有用。如果想用新的DM来消色散，则

```
pam -e XX -u . -d DM archive.ft
```

其中XX可以是Y，代表频率维积分，也可以是G，代表时间维积分。

- 3) 利用psradd命令，可以把不同档案文件合成一个档案，例如：

```
psradd -f add.ar 20120[1-3]*.FTp
```

这个命令把文件名以201201开头到201203开头的，扩展名为FTp的所有脉冲轮廓合成一个档案，然后命名为“add.ar”，当然这个文件名的命名也是随意的。在通常的命名习惯中，这就代表了2012年1月份到3月份的观测。接下来这一步，

```
pam -e FTp -T add.ar
```

就是把不同日期的脉冲轮廓相加，相当于再对“add.ar”这个档案文件做一个时间维积分，新的脉冲轮廓文件扩展名为FTp，代表已经不包含频率、时间、偏振等信息。

- 4) 下一步是利用交互式脉冲相位拟合程序paas，用“add.FTp”制作一个解析的脉冲轮廓模版。命令是：

```
paas -Di add.FTp
```

然后进入交互式拟合界面，在这里你可以用鼠标点选脉冲轮廓的峰值位置，高度和宽度，然后把拟合好的解析脉冲轮廓保存到一个文件，比如命名为x.std。

- 5) 有了脉冲轮廓模板后，我们可以用模版与每一个脉冲轮廓进行交叉相关，得到真实的脉冲轮廓相对于模版轮廓上某一个选定参考点的时间延迟。这样就可以定义每一个脉冲轮廓的到达时间。这一步可以用程序pat完成。命令是：

```
pat -s x.std -f tempo2 档案名
```

其中-s x.std代表以上一步生成的文件”x.std“为标准脉冲轮廓模版，-f tempo2表示产生的TOA是按tempo2格式输出的，tempo2是处理TOA数据最常用的软件，在下一节会介绍。具体来说，比如你的每个档案文件都是一次观测，并且已经对频道、时间、偏振进行过积分了，扩展名全部为”日期.FTp”的形式，那么你可以用

```
pat -s x.std -f tempo2 *.FTp > data.tim
```

其中*是通配符，*.FTp代表了所有扩展名为FTp的文件，>data.tim表示把计算出的TOA导出成一个文件，名为“data.tim”。

关于PSRCHIVE和PSRFITS格式更多的信息，可参考[Hotan et al. \(2004a\)](#)。

至此，TOA已经生成，下一节将介绍如何进一步挖掘它的科学价值。

2.3 从 TOA 到科学模型

上一节我们从多维脉冲轮廓得到了TOA数据。下面我们将从这组数据出发，得到科学信息。这些科学信息分为两部分，一是脉冲信号传播途中，星际介质与太阳系内的信息；二是脉冲星自身轨道、磁层、转动的信息。为了完成信息还原的工作，我们需要进行两步工作：首先是把TOA回溯到脉冲发射的时间（TOE），然后再把TOE代入特定的脉冲星自转模型，拟合其脉冲相位。本节内容参考了[Hobbs et al. \(2006b\)](#)。

2.3.1 回溯脉冲发射时间 TOE

下面的公式可以概括整个回溯过程：

$$\Delta t = \Delta_C + \Delta_A + \Delta_{E_\odot} + \Delta_{R_\odot} + \Delta_{S_\odot} D/f^2 + \Delta_{vp} + \Delta_B. \quad (2.5)$$

公式里， Δt 代表了 TOA 和 TOE 之间的差别，这差别分别概括为公式右面的八项： Δ_C 为时钟修正； Δ_A 为大气修正； Δ_{E_\odot} 为太阳系爱因斯坦延迟（Einstein Delay）； Δ_{R_\odot} 为太阳系 Roemer 延迟； Δ_{S_\odot} 为太阳系 Shapiro 延迟； $-D/f^2$ 为星际介质的色散； Δ_{vp} 为脉冲星长期运动（secular motion）带来的额外几何传播项； Δ_B 为脉冲星双星轨道项。

天文台提供的脉冲到达时间，是依照其本地的计时工具记录的。一般而言，每一个做脉冲星计时的天文台里会有一个氢原子钟。这个本地计时器在短时间内的准确度和稳定性很好，但在数个月的长时标内稳定性不佳。天文台本地的原子钟时间要被归算到一个全球的统一时间：Terrestrial Time (TT)，这个过程即时钟修正。在 TEMPO2 软件中，这个过程是内置的，需要在 TOA 文件 (.tim) 中提供天文台编号，并且在 clock 文件夹下提供时钟相应的转换文件。时钟修正的过程通常不是一步完成，而是先转换到某个中间时钟，比如全球卫星定位系统 (GPS) 提供的时间，最后再转换到 TT。

大气修正考虑了由于大气折射带来的 TOA 延迟。TEMPO2 可以利用当时当地的大气数据来做修正，也可以用一个标准大气模型进行修正。

太阳系的爱因斯坦延迟，就是指由于广义相对论效应，地球处引力势与太阳处引力势的差异带来的时间延迟。

太阳系 Roemer 延迟，即脉冲信号传播到地球质心的时间与传播到太阳系质心之间的几何光程差。Roemer 延迟的修正量与地球的周年运动以及脉冲星的位置有关，因此，如果脉冲星的位置数据有误，则错误的 Roemer 延迟修正会使 TOE 中出现一个以一年为周期的正弦函数。计时残差里的这一特征，即标志了错误的脉冲星位置。

太阳系 Shapiro 延迟，是由于太阳系内天体（太阳及行星）的引力造成的光线偏折引起的额外光程。

色散与“脉冲星长期运动带来的额外几何传播项”可顾名思义。

如果脉冲星处于双星系统中，或携有行星或小行星。此时，必须加入其绕系统质心运动所造成的时间延迟的影响。然而这其中的参数是完全未知的，只能通过拟合来得到。因此这一步与其说是用脉冲星伴星的信息来回溯 TOE，不如说是通过拟合 TOE 的残差来的到脉冲星的伴星信息。

至于从脉冲星系统质心到太阳系质心的距离造成的几何时间延迟，则只贡献一个常数。

表 2.1 中列出了 TEMPO2 里面考虑的修正项，以及其典型的大小。

表 2.1: TEMPO2 修正项与其典型值。

| 修正项 | 典型值 |
|-------------------------|-------------------------|
| 天文台时钟到 TT | $1 \mu\text{s}$ |
| 流层的流体静力学修正 | 10 ns |
| 流层湿成分修正 (wet component) | 1.5 ns |
| 地球进动/章动 | ~ 5 ns |
| 极移 | 60 ns |
| 爱因斯坦延迟 | 1.6 ms |
| Roemer 延迟 | 500 s |
| 太阳 Shapiro 延迟 | 112μ |
| 金星 Shapiro 延迟 | 0.5 ns |
| 木星 Shapiro 延迟 | 180 ns |
| 土星 Shapiro 延迟 | 58 ns |
| 天王星 Shapiro 延迟 | 10 ns |
| 海王星 Shapiro 延迟 | 12 ns |
| 太阳二阶 Shapiro 延迟 | 9 ns |
| 行星际介质的色散 | 100 ns ^a |
| 星际介质色散 | ~ 1 s ^a |

^a 此值依赖观测频率以及具体的脉冲星，列出频率为 1400 MHz 时对应的典型值。

2.3.2 模型拟合

脉冲星转动模型是用来预测自转相位如何演化的，可以用以下公式表示：

$$\Phi(t_i) = \nu t_i + \frac{1}{2} \dot{\nu} t_i^2 + \text{Others} + \Phi_0. \quad (2.6)$$

其中，Others 代表其他影响脉冲星自转的贡献， Φ_0 代表一个常数相位。把上面得到的 TOE 序列带入 t_i 中，就可以得到 $\Phi(t_i)$ 的模型预测值。理论上，两个脉冲发出时刻的自转相位必然相差一个整数。然而得到的 $\Phi(t_i)$ 却总会有小数部分。这个小数部分就是计时残差 (timing residuals)。为了让计时残差具有时间的量纲，再除以自转频率，因此计时残差定义为：

$$R(t_i) = \frac{\Phi(t_i) - N}{\nu}, \quad (2.7)$$

其中, N 为距离 $\Phi(t_i)$ 最近的一个整数, ν 是脉冲星自转周期。定义:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{R_i}{\sigma_i} \right)^2. \quad (2.8)$$

模型拟合的过程就是调整 $R(t_i)$ 中参数, 令 χ^2 最小的优化过程。通过这一过程, 我们从 TOE 中得到了脉冲星模型的信息。然而整个拟合过程不单要优化 $R(t_i)$ 的参数, 在从 TOA 回溯 TOE 的过程中, 也有模型中的参数需要参与优化过程。涉及其中的参数多达上百个, 详细内容见 [Edwards et al. \(2006\)](#)。

2.4 TOA 中的红噪音对脉冲星自转模型的影响与 TOA 白化

如前节所述, 人们通过权重最小二乘法拟合 (Weighted Least Square, WLS) 得到脉冲星计时模型的最优参数估计和参数的协方差矩阵 (矩阵的对角元即该参数的误差)。当计时残差中不包含时间相关的成分时, 即计时残差中没有红噪音时, WLS 方法给出的参数估计也是最大似然估计 (maximum likelihood solution)。但是正如前章所说, 计时残差中红噪音很常见。红噪音出现的情况下, WLS 方法给出的参数估计不再是最大似然值, 协方差的估计也是有偏的。一个例子是对脉冲星 PSR J0437-4715 视差的估计。[Verbiest et al. \(2008\)](#) 用脉冲星计时的方法估计了 PSR J0437-4715 的视差值: 6.65 ± 0.07 mas, 这与同年 Deller 等人 ([Deller et al. 2008](#)) 用甚长基线干涉 (Very Long Baseline Interferometric, VLBI) 观测得到的值 6.396 ± 0.054 不一致。Verbiest 等人在文章中也指出其值是用 WLS 给出的, 因此对误差估计持怀疑态度。他们随后用蒙特卡洛模拟 (Monte Carlo Simulation) 的方法重新估计了误差: 0.51 mas.

红噪音的另一个显著影响是在功率谱计算方面。由于计时数据的长度是有限的, 这就相当于在无限长的数据上乘以一个窗口函数 (Window function), 其结果是在功率谱上卷积一个窗口函数的傅立叶变换的模平方:

$$|W(f)|^2 = \left| \frac{\pi f T}{\pi f T} \right|^2. \quad (2.9)$$

其中 T 是数据长度。

当理论功率谱为白噪音时, 观测功率谱依然为白噪音, 这是由于常数卷积 $|W(f)|^2$ 依然为常数。对于红噪音存在的情况则不然。因为 $|W(f)|^2$ 的旁瓣 (sidelobe) 是以 f^{-2} 的速率衰减的, 因此如果理论功率谱比 f^{-2} 更陡则无法在实际功率谱上被显示出来。如果观测功率谱的斜率为 -2, 原功率谱可能远远比 -2 陡,

只是因为窗口函数的存在使观测功率谱的斜率饱和。这种情况下观测功率谱就无法真实地反应数据的性质了。

白化（Whitening）是去除计时残差中红噪音的统称，因为没有红噪音的计时残差只包含白噪音成分。白化的目的时消除上面所述的红噪音带来的各种问题。白化的常见做法有以下几种：

1. 在计时模型中加入新的成分把红噪音结构吸收掉。例如加入自转频率的更高阶导数(Thorsett et al. 1999)，或者加入正弦谐波(Hobbs et al. 2005)，再或者引入磁场衰减震荡模型。这些做法计算量小，方便快捷，利于重复性的脚本处理。适用于计时噪音的功率分布范围并不很宽的情况。
2. Cholesky 方法(Coles et al. 2011a)。这是广义最小二乘法(Generalized Least Square, GLS)在脉冲星计时上的应用。当参数在某值附近微扰时，拟合后计时残差(Post-fitting timing residuals)可以表示为如下线性关系：

$$\mathbf{E} = \mathbf{R} - \mathbf{M}\Delta\mathbf{P}, \quad (2.10)$$

其中 \mathbf{E} 是拟合后计时残差， \mathbf{R} 是拟合前计时残差(Pre-fitting timing residuals)，二者都是向量，维数等于TOA数据点的个数 n . $\Delta\mathbf{P}$ 是参数列的改变值，是维数为 m 的向量。 \mathbf{M} 是 $m \times n$ 维矩阵，代表了计时模型。普通最小二乘法(Ordinary Least Square, OLS)是使 $\mathbf{E}^T\mathbf{E}$ 最小化。而当 \mathbf{E} 不满足同方差高斯分布(Homoscedastic Gaussian distribution)时，OLS的解就不是最大似然解。这也是上面说过的。定义矩阵： $\mathbf{C} \equiv \langle \mathbf{E}\mathbf{E}^T \rangle$ ，再找到一种分解方法，使得： $\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T$ ；然后重新定义新的“白化”计时模型： $\mathbf{M}_W = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}$ ，“白化”计时残差： $\mathbf{E}_W = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{E}$, $\mathbf{R}_W = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}$ ；这样做之后，再按照OLS找到的参数就是最大似然解了。当脉冲星的计时残差功率谱是很陡峭的连续谱时，Cholesky方法是目前唯一可以解决红噪音问题的方法。Cholesky方法现在有TEMPO2的插件，详细的使用说明见⁴。

上述两种方法除了适用范围不同外，背后也蕴含了的对红噪音的不同处理思想。前者试图在计时模型中加入新的参数，化红噪音为已知结构，这是试图预测红噪音并除掉红噪音的方法。当我们寻找计时残差中隐藏的信息时，我们希望提高信噪比，此时我们需要的是这种方法。而 Cholesky 方法的目的是给出最大似然的

⁴<http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/tempo2/index.php?n=Main.T2psrparms>

参数值、无偏的参数误差估计以及真实的功率谱。它并没有试图去掉红噪声，虽然包含白化的过程，其实是一种“预白化（pre-whitening）”之后经过拟合处理“再红化（post-darkening）”的过程。

第三章 利用对脉冲星 PSR B1937+21的密集观测限制引力波单源的强度

本章内容的英文版发表于*MNRAS* 445, 1245-1252 (2014)

3.1 背景介绍

很久以前，人们就提出可以利用毫秒脉冲星的高精度计时观测来直接探测引力波 (Detweiler 1979; Hellings & Downs 1983a; Jenet et al. 2005; Sazhin 1978)。脉冲星计时可探测的引力波频率范围大约是 T_{obs}^{-1} 到 $N(2T_{\text{obs}})^{-1}$ ，其中 T_{obs} 是总的观测时间跨度， N 是测量次数。一般地，引力波频率上限在 10^{-7} Hz，对应平均每两周观测一次；下限约为 10^{-9} Hz，对应于数年的数据积累 (Manchester et al. 2013a; van Haasteren et al. 2011b)。在此频率范围内的引力波源中，最引人注意的是正在并合的超大质量双黑洞，它们位于并合星系的中心。通常认为，宇宙中存在许多这样的系统，因此它们各自发出的引力波信号叠加而形成随机背景引力波辐射（见 1.5.2 节）。前人有很多利用单一脉冲星或者脉冲星阵列来限制，或者试图探测随机背景引力波辐射的努力 (Demorest et al. 2013b; Jenet et al. 2006; Kaspi et al. 1994; Lommen 2002; McHugh et al. 1996; Shannon et al. 2013c; van Haasteren et al. 2011b)，这些工作给出对引力波强度越来越强的限制。而最近 Sesana 等人 2013 年的文章 (Sesana 2013) 指出，最新的对引力波随机背景的限制已经接近了理论的预言值。这意味着很快就会探测到引力波背景，或者将排除一些模型。Sesana et al. (2009) 指出，足够近或者质量足够大的超大质量双黑洞的引力波信号会从随机引力波背景中脱颖而出，变成可分辨的信号。在限制引力波单源强度方面的工作，近些年也越来越

表 3.1: 本章中所用数据总结。

| 数据组 | WSRT350 | WSRT1380 | WSRT2273 | LT | 42FT |
|---------------|--------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 望远镜 | Westerbork Synthesis Radio Telescope | | | Lovell | 42-foot @ Jodrell Bank |
| 后端 | PuMaII | | | ROACH | COBRA2 |
| 中心频率 (MHz) | 350 | 1380 | 2273 | 1532 | 610 |
| 带宽 (MHz) | 80 | 160 | 160 | 400 | 5 or 10 |
| 日期范围 | 5/2011 - 5/2013 | 5/2011 - 4/2013 | 5/2011 - 4/2013 | 11/2011 - 4/2013 | 6/2011 - 5/2013 |
| 观测数 | 26 | 31 | 21 | 450 | 509 |
| TOA不确定度平均值(s) | 3.37×10^{-7} | 4.91×10^{-8} | 2.95×10^{-7} | 8.23×10^{-8} | 1.86×10^{-6} |

多。在人马座 A* 中曾观测到周期为 106 天的射电流强变化 (Zhao et al. 2001)，因此人们猜测那里有一个超大质量双黑洞，即银河系的中心黑洞。为此，Lommen & Backer (2001) 检查了 PSR B1937+21 与 J1713+0747 的计时残差，发现在 150 ns 的精度内，没有发现任何对应于周期 53 天的计时残差结构。因此结论是，人马座 A* 即使有超大质量黑洞，其引力波辐射强度在 2.18×10^{-7} Hz 也小于 1.37×10^{-13} ，前提是假设其引力波极化方向为最优。Jenet et al. (2004b) 推导出了缓慢演化的超大质量双黑洞所辐射引力波的一般表达式。他们在 PSR J1857+0943 的计时残差中没有发现预期的波动，因此以 95% 的置信概率排除了 3C 66B 中存在超大质量双黑洞的可能 (Sudou et al. 2003)。Yardley et al. (2010) 则利用 18 颗 PPTA 脉冲星的计时数据 (Verbiest et al. 2009)，对引力波单源的强度在 10^{-9} 至 4×10^{-7} Hz 范围内进行了限制。他们的数据对 9×10^{-9} Hz 的引力波最为敏感，在此频率处的引力波强度低于 9×10^{-14} 。

探测到来自单源的引力波信号将会给我们提供很多有用的天文信息，例如，超大质量黑洞的 Chirp 质量与天球位置组合 (Sesana & Vecchio 2010)，或者限制附近超大质量双黑洞的并合率 (Wen et al. 2011)。不仅如此，通过对脉冲星计时视差 (pulsar timing parallax) 的研究我们还可以获得超大质量黑洞的更多参数，比如引力波源的距离、Chirp 质量、黑洞自旋 (Corbin & Cornish 2010; Mingarelli et al. 2012)；还可以提高脉冲星自身的距离测量精度 (Lee et al. 2011)。

Sesana et al. (2008) 指出，在频率高于 10^{-8} Hz 时，由于随机引力波背景强度的快速下降，有可能看到引力波单源。这让我们感觉到对脉冲星进行密集计时观测的重要性。这里我们将介绍对 PSR B1937+21 进行的密集计时观测。之所以选择这颗脉冲星，是因为它明亮而孤立并且流强稳定。它的缺点是存在长期的计时噪音和随时间变化的色散 (Cordes et al. 1990; Kaspi et al. 1994; Ramachandran et al. 2006)，不过色散这一点是可以修正的。我们利用的数据时间跨度为 650 天，共 528 个 TOA，两个观测之间的平均间隔为 1.23 天。在大部分观测时间里，每天观测一次或者两次。在此如此高密集的观测之下，我们将脉冲星计时对引力波的可探测频率区间上限扩展到了 4.98×10^{-6} Hz，而在此之前，研究这个频率范围的引力波只能依靠观测紧密双星系统 (Hui et al. 2013)。

本章的结构如下：观测方面的细节将在 3.2 节中描述，在 3.3 节介绍如何修正星际介质的色散及随时间变化的散射，并且拟合得到脉冲星转动模型。第 3.4 节利用得到的计时残差来限制引力波单源的强度。最后一节总结工作的结果，并且对计时残差中的一个不明结构的来源进行讨论。

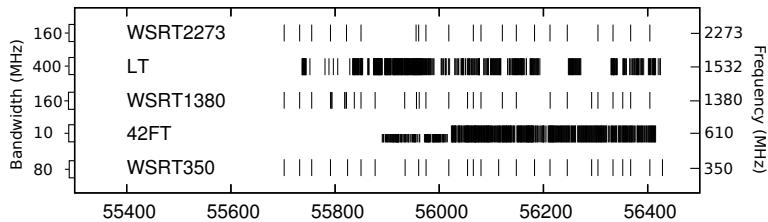


图 3.1: 数据的观测日期示意图。见正文描述。

3.2 观测

观测的细节汇总在表 3.1。我们用了来自三台望远镜的五组数据。前两组数据来自 Jodrell Bank 天文台的 76m Lovell 望远镜（后面简称 LT）和 42 英尺（13m 直径）望远镜（以下简称 42 FT）。它们的后端分别是 ROACH 和 COBRA2，均利用 DSPPSR 进行在线相干消色散(van Straten & Bailes 2011)。LT 的后端 ROACH 工作在 L 波段，带宽约为 400 MHz，中心频率为 1532 MHz (Karuppusamy et al. in prep.)。42 FT 的后端 COBRA2 工作的中心频率为 610 MHz，起初带宽为 5 MHz，从 2012 年开始 4 月开始带宽倍增到 10 MHz。LT 的数据从 2011 年 6 月到 2013 年 5 月，共有 450 次观测。42 FT 的数据从 2011 年 11 月到 2013 年 4 月，共有 509 次观测。为了提高信噪比，我们利用 TEMPO2 的并道工具把每八个 TOA 合并为一个组，得到了 42 FT 的 63 个 TOA。剩下的三组数据来自 Westerbork 综合射电望远镜 (Westerbork Synthesis Radio Telescope, WSRT)，后端是 PuMaII (Karuppusamy et al. 2008)。WSRT 的数据有三个频率，中心频率分别是 350, 1380, 2273 MHz，约每周一次观测。这三个波段的带宽为 80 或 160 MHz，数据时间范围是从 2011 年 5 月到 2013 年 5 月。观测数据被储存到线下，用 DSPPSR 进行相干消色散并折叠，后续的操作用第二章第 2.1 节介绍过的 PSRCHIVE。对于每一个频段，我们利用 PSRCHIVE 产生脉冲轮廓模板，然后将此模板与积分过的脉冲轮廓进行交叉相关，以此获得 TOA（见 2.2 节）。时钟的修正过程按照第二章 2.2 节所描述。数据的观测日期的示意图见图 3.1，在这个工作里，我们没有利用偏振信息，而只是用了接收机两个馈源的总强度。

3.3 数据处理

3.3.1 修正随时间变化的色散与散射脉冲轮廓展宽

PSR B1937+21 有明显的随时间变化的 DM。在一两年的时间跨度内，1000 MHz 的射电频率附近，这是微秒量级计时噪音的主要来源。为了除去这个噪音，我们要

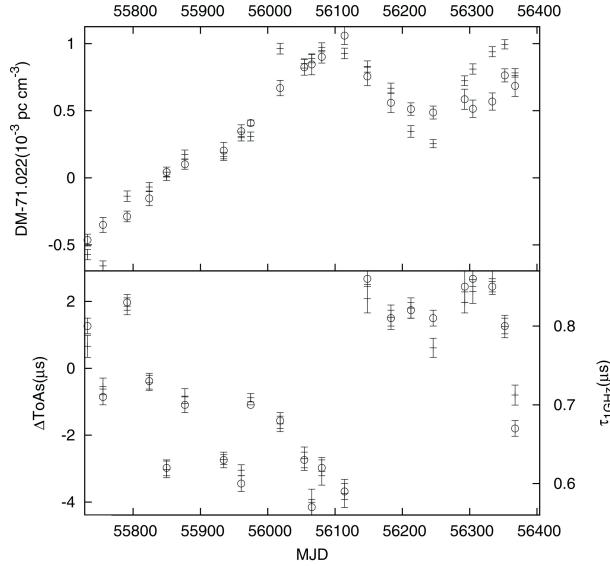


图 3.2: 上图: DM 随 MJD 的变化; 为了画图方便, 统一减去一个常数 71.022。符号“+”的曲线是通过拟合 WSRT 350 数据的 512 个频道数据得到的 DM, 圆圈代表用频率最低的三组数据 (WSRT 350, 42 FT, WSRT 1380) 拟合 DMOFF 后的 DM (见正文)。下图: 用脉冲轮廓常数模板得到的 TOA 与修正过星际介质散射得到的 TOA 之差 (符号“+”)。 $\tau_{1\text{GHz}}$ 随日期的变化 (圆圈)。

计算不同时刻的 DM 值。我们选择用 WSRT 350 的数据进行 DM 的计算, 因为这组数据的信噪比和频率范围最合适。我们的步骤如下: 首先, 我们使用 WSRT 350 中的所有 512 个频道的数据。我们把这 512 个频道的脉冲轮廓积分成一个脉冲轮廓模版, 然后用它和每一个频道的脉冲轮廓进行交叉相关, 这样, 每一次观测我们得到了 512 个 TOA. 我们用 TEMPO2 拟合这 512 TOA 得到每一次观测的 DM 值 $DM(t_i)$. $DM(t_i)$ 随日期变化的方式画在图 3.2。

这些 $DM(t_i)$ 的数值被用来重新给 WSRT 350 消色散, 然后再重新把所有频道叠加获得每一次观测的总脉冲轮廓。用改进过的脉冲轮廓, 我们得到了一个新的脉冲轮廓模版, 然后用这个新模版与每一次观测的总脉冲轮廓进行交叉相关, 得到一组新 TOA. 用这些新 TOA 来进行计时模型拟合, 并用 $DM(t_i)$ 修正了色散之后, 计时残差中依然存在一些明显的结构, 见图 3.3, 这说明仅仅用 WSRT 350 的数据不足以去掉星际介质的影响。所以有必要做进一步的处理。

星际介质中的散射会使脉冲轮廓展宽, 这个效应在低频更加明显。如果散射程度不随时间变化的话, 那么尽管会影响脉冲轮廓, 但脉冲轮廓模板也被同等程度的影响, 因此不会对 TOA 产生影响。但是, 如果散射随着时间改变的话, 则会引起计时噪音。为了确定散射对 DM 和 TOA 的干扰, 我们进行了以下步骤: 首

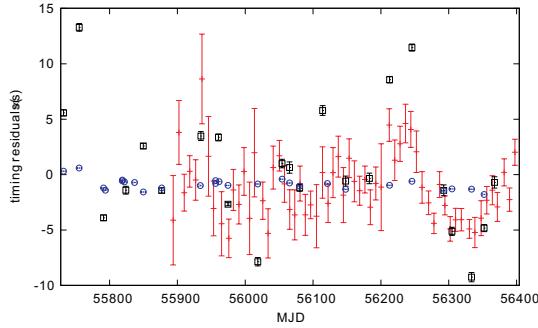


图 3.3: 计时残差: 数据组 WSRT 1380 (蓝色圆圈), 42 FT (红色点) 和 WRST 350 (黑色方块), 经过初步的 DM 修正。其 DM 是用 WSRT 350 数据得到的。可以看到计时残差里有频率依赖的结构, 此结构来自 DMOFF(t_i) (见正文)。

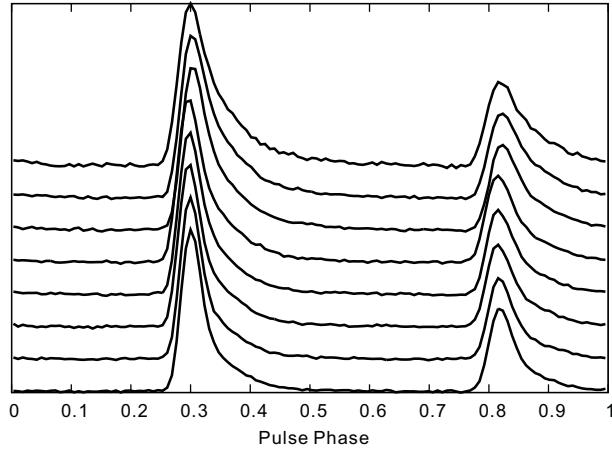


图 3.4: MJD=56428 的八个频道内的脉冲轮廓, 上升变对齐。从下至上, 中心频率分别是 (MHz): 376.287, 367.500, 358.749, 349.998, 341.250, 332.498, 323.748, 314.960。随着频率的降低, 脉冲轮廓的尾巴逐渐增宽。

先, 我们把 WSRT 350 的 512 个频道的脉冲轮廓合并积分成了 8 个频道。之所以选择 8 个频道, 是权衡每个频道的脉冲轮廓信噪比与频道数目的结果。图 3.4 是 8 个频道的脉冲轮廓样示例。然后我们建立了一个频率依赖的脉冲轮廓模版。做法是把一个参考轮廓与一个截断指数 ($\exp(-\phi P/\tau_\nu)$) 卷积, 其中 ϕ 是脉冲星自转相位, P 是脉冲星周期, τ 是在频率为 ν 时的散射展宽时标. 不同频率处的展宽时标与频率的关系是:

$$\frac{\tau_\nu}{\tau_{1 \text{ GHz}}} = \left(\frac{\nu}{1 \text{ GHz}} \right)^{-4}, \quad (3.1)$$

其中, $\tau_{1 \text{ GHz}}$ 是 $\nu = 1 \text{ GHz}$ 时的 τ_ν 。对于 Kolmogorov 薄星际介质幕模型, 散射时标正比于 $\nu^{-4.4}$ 。但是测量到的指数更接近 -4 而非 -4.4 (见 *Handbook of Pulsar Astronomy* Lorimer & Kramer (2012) 第4.2.1节和文献 Ramachandran et al. (2006))。我

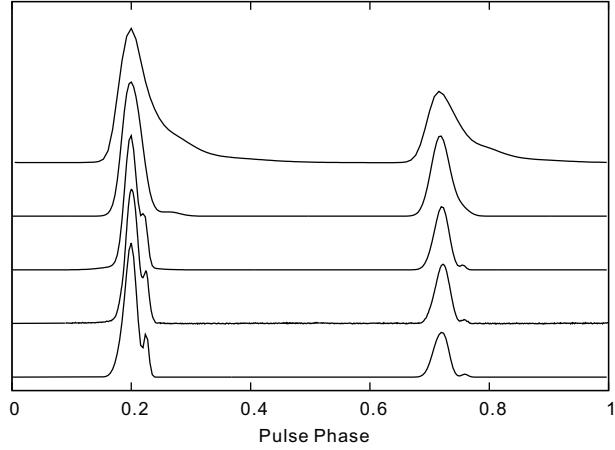


图 3.5: 不同数据组用的脉冲轮廓模版，从下至上分别为：WSRT 2273, LT, WSRT 1380, 42 FT, WSRT 350。脉冲轮廓被乘以一个归一化因子使主峰的高度相等。

们用的参考轮廓来自 42 FT 望远镜，中心频率为 610 MHz。不使用更高频率的脉冲轮廓的原因是脉冲轮廓里的主脉冲和中间脉冲的高度比存在随频率的演化，见图 3.5。因此，使用 610 MHz 处的脉冲轮廓是去除散射效应和脉冲轮廓频率演化之间的最好权衡。接下来我们找到一个最优的 $\tau_{1\text{GHz}}$ ，使得卷积后的脉冲轮廓最佳地符合观测。对于每一次观测我们都重复这一过程，这样得到了不同时刻的 $\tau_{1\text{GHz}}$ 值，见图 3.2 的下图。用标准脉冲轮廓和截断指数函数 $\exp(-\phi P/\tau_{\nu_c})$ 的卷积作为模板，我们得到每次观测的 TOA，其中 τ_{ν_c} 是该频道的中心频率所对应的展宽时标。在考虑散射效应前后 TOA 的差别 (ΔTOA) 见图 3.2 的下图。从图中我们能够看到一个非常清晰的 ΔTOA 与 $\tau_{1\text{GHz}}$ 的相关。它的物理起源十分明确：当用一个固定的脉冲轮廓模板去和一个有着散射展宽尾巴的脉冲轮廓进行交叉相关时，TOA 会被高估，反之同理。TOA 的差异可以高达 $4\mu\text{s}$ ，这证明修正散射是十分必要的。

越到高频，散射作用越不重要，这是因为 $\tau_\nu \propto f^{-4}$ 。因此对于高射电频率的那些组数据并没有采用上述修正散射的做法。那些数据组各自的脉冲轮廓模板，是通过拟合所有观测日期的脉冲轮廓之和得到的解析模型，拟合的工具是 PAAS。每一组数据所用的模版见图 3.5。

在修正过 DM 之后，我们把频率最低的三组数据的计时残差画在图 3.3 中。计时残差中显示出明显的结构，而且这个结构随着频率的下降而增加。这说明，我们所用的 $\text{DM}(t_i)$ 值存在一些误差 ($\text{DMOFF}(t_i)$)。因此，我们对 $\Delta\text{DM}(t_i)$ 进行了拟合，以使这三组数据的计时残差最小 (Keith et al. 2013)。

我们没有用 WSRT 350 的数据同时测量 $\text{DM}(t_i)$ 和散射时标，这是因为这组数据的频率范围不够大，无法把二者的效应区分开，这样测得的 DM 值的精度不够

表 3.2: PSR B1937+21 的最佳拟合参数。

| 参数 | 值 |
|---|---------------------|
| 参考历元 | 55965 |
| α (J2000)(hms) | 19:39:38.561336(1) |
| δ (J2000)(dms) | 21:34:59.12596(1) |
| ν (s^{-1}) | 641.928220971573(2) |
| $\dot{\nu}$ ($10^{-14} \times \text{s}^{-2}$) | -4.33103(2) |
| μ_α (mas yr^{-1}) | -0.15(3) |
| μ_δ (mas yr^{-1}) | -0.18(5) |

高。修正过的 $\text{DM}(t_i)$ 画在图 3.2 的上图中，以圆圈表示。 $\text{DMOFF}(t_i)$ 也许源于星际介质的散射，不过我们没能找到这个量和 τ_{IGHz} 之间明显的相关来支持这个设想。当 DM 修正完成后，来自数据组 WSRT 2273, LT, WSRT 1380 和 WSRT 350 的计时残差画在图 3.6 的上图中。所有数据组的计时残差的趋势都一致，这表明没有显著的未修正的 DM 残留了。

3.3.2 计时模型

在修正完含时 DM 和轮廓展宽后，我们用除去数据组 42 FT 的所有数据来拟合以下参数：脉冲星坐标 (RAJ, DECJ)，自转频率 (F0)，其一阶变化率 (F1) 和自行 (PMRA, PMDEC)，拟合过程中固定其他参数。排除 42 FT 数据的原因是，这组数据的信噪比最差，TOA 的不确定度比其他数据要高一个量级。最优拟合参数列在表 3.2 中，表中的参数和 Verbiest et al. (2009) 的结果大体吻合。但由于我们的数据时间跨度只有两年，自行参数和脉冲星位置以及自转频率、自转减慢率之间有很强的相关性。因此，这些参数的误差都被低估了。拟合后计时残差画在图 3.6 的中部。

拟合后的均方根 (root-mean-square, rms) 是 $0.346 \mu\text{s}$ 。计时残差里显示出一个没有被模型计入的准周期性信号，幅度约为 150 ns 。这个信号在功率谱中贡献了低频端的一些孤立峰 (见图 3.7 的上部)。Lomb-Scargle 功率谱算法中的低频功率溢出现象使这个效果更加严重。最高的峰出现在频率为 3.4 yr^{-1} ($1.078 \times 10^{-7} \text{ Hz}$) 处。计时残差的功率谱是用 Lomb-Scargle periodogram 算法得到的 (Press & Rybicki 1989)，这个算法是专门为处理非等间隔时间序列的。用拟合谐波 (FITWAVES) (Hobbs et al. 2004) 到三次的方法可以去掉功率谱低频端的显著的峰，谐波的基频是 3.4 yr^{-1} ($1.078 \times 10^{-7} \text{ Hz}$)。我们把正弦波的起点设在 MJD=55965。谐波拟合的结果列在表 3.3，拟合过后的计时残差画在图 3.6 的底图，其功率谱画在图 3.7 的底

表 3.3: 谐波参数。

| | WAVE1 | WAVE2 | WAVE3 |
|-------------------------|----------|--------|---------|
| 频率 (yr^{-1}) | 3.4 | 6.8 | 10.2 |
| 幅度 (ns) | 150(20) | 58(29) | 105(27) |
| 初始相位 (rad) | 0.19(12) | 1.2(3) | 0.0(1) |

正弦起点设为 MJD=55965。

部。

3.4 限制引力波单源强度

本节里我们将从 TOA 中给引力波单源强度一个上限。我们假设在我们现在的计时残差里没有引力波，或者完全可以忽略引力波的成分。在白化处理之后，这个假设更被强化了。我们用这个计时残差给脉冲星创建了一个噪音模版。引力波上限是这样得到的：人工地在数据中放入模拟的单色引力波信号，然后运行一个探测程序。模拟的引力波信号不断增加，直到被探测出来。能否探测出信号由噪音模版以及探测阈值决定，而后者又根据我们预先定下的误报率 (false-alarm probability) 确定。

3.4.1 噪音模型和探测阈值

我们遵循与 [Yardley et al. \(2010\)](#) 相同的步骤，这里我们将其简要叙述如下：首先，我们取计时残差功率谱功率的对数；然后，我们把对数功率谱用跑动平均法 (moving average) 做平滑。接下来对平滑过的对数功率谱进行四阶多项式拟合，拟合的结果就代表了计时残差噪音的平均走势。用这个方法，我们保证功率谱中的连续成分不会被误认为是信号。

接下来我们在噪音模版上乘以一个系数 α ，作为探测阈值，探测阈值下面的任何峰都被认为是噪音。 α 是用模拟确定的，模拟的过程描述如下：我们生成 10^4 组模拟的 TOA，每组具有 100 ns 的白噪音，并且模拟 TOA 的采样与真实数据相同。然后我们计算每组 TOA 对应的功率谱，并且计算每一个功率谱的平均功率。我们把第 i 个功率的平均功率计为 m_i 。然后从 $\alpha = 1$ 开始我们逐步增加 α 的值；对于每个 α 值，我们统计在某处功率超过 αm_i 的功率谱的数量。我们不断调整 α 的值，直到满足条件的功率谱数目的比例达到预设的误报率。 $\beta = \ln \alpha$ 被加到对数噪音模版上，这样做出一个全频率范围的功率谱。我们令误报率为 1%，即每探测到一次引力波信号，有 1% 的概率为误报，此时 $\alpha = 10.8$ 。

3.4.2 引力波单源上限曲线

创建引力波上限曲线的过程如下：我们在 TOA 中注入引力波信号，然后重新拟合获得计时残差。接下来我们把计时残差的功率谱与探测阈值进行比较，然后我们逐渐增加注入的引力波强度来重复上述过程，直到引力波被探测出来。接下来我们将描述整个过程的细节：

我们把 $1/T_{\text{obs}}$ 到 $N(2T_{\text{obs}})^{-1}$ 之间的频率在对数空间等份为 50 份。然后对每个频率段内重复以下过程。

首先，我们向 TOA 中加入一个正弦，幅度值为：

$$A = \frac{h_s}{\omega} (1 + \cos \theta) \sin(2\phi) \sin\left[\frac{\omega D_p (1 - \cos \theta)}{2c}\right], \quad (3.2)$$

其中 h_s 是引力波的强度， θ 是引力波源方向和脉冲星方向的夹角， ϕ 是引力波偏振角， $\omega 2\pi f$ 是引力波的圆频率， D_p 是脉冲星到地球的距离。起始的引力波强度值为 10^{-15} ，每次增加 $\Delta \log h_s = 0.1$ ，直到被探测出来。每一步 θ, ϕ 随机在天球上等概率地指派。 D_p 的典型值通常在若干 kpc，而 ω 通常为 yr^{-1} 。因此根据方程 (3.2)，幅度值 A 随着 θ 值变化会剧烈地震荡。因此，能让 A 取到最大值的引力波源位置应该非常接近 $\theta = 0, \phi = \pi/4$ 。我们所使用的 $D_p = 3.55 \text{ kpc}$ ，这个值是用平均的 DM 通过下面公式估计出来的：

$$DM = \int_0^{D_p} n_e ds, \quad (3.3)$$

其中， n_e 由 NE2001 模型得出 (Cordes & Lazio 2002)¹。

随后，我们用 TEMPO2 得到注入引力波之后的 TOA 的计时残差。在拟合过程中，我们让 RA, Dec, F0 和 F1 作为自由参数，把其他所有的参数固定。因为模拟的引力波带来的影响是不随频率变化的，因此我们不用重新拟合 DM。接下来我们用 Lomb-Scargle periodogram 算法得到残差的功率谱。如果在当前频率道附近的功率超过了探测极限，我们就记录为一次探测事件。上述过程重复 400 次。如果探测事件的比例超过 95% 我们就把此时的 f_i 和 h_s 记录下来，做为上限曲线上的一点，然后我们移动到下一个频率道去，否则我们继续增加 h_s 。

引力波单源的强度上限画在图 3.8。图中上面两条线对应于引力波源在天上的位置 θ 以及偏振角 ϕ 随机取值的情况，细虚线对应于进行了谐波拟合白化的结果，细实线则对应没有白化的结果。底下两条线是 θ, ϕ 取最优值的情况，同样也分了

¹ 在线计算地址：

<http://www.nrl.navy.mil/rsd/RORF/ne2001/#los>

是否白化两种情况（粗虚线白化，粗实线未白化）。 θ 和 ϕ 的随机带来的效果是上限比最优位置时变大了 2.5 倍。谐波拟合过程则贡献了曲线上 10^{-7} Hz 附近的凹陷。应用谐波拟合来去掉计时残差中 10^{-7} Hz 附近结构同时也会影响到附近的频率，这是因为频率溢出。不过，可以在图 3.8 中看到这个影响并不很大。这是因为我们的数据中有红噪音，因此探测阈值在低频端上升了，这使得谐波拟合对周围频率的干扰被抹平了。不管怎样，谐波拟合造成的频率溢出问题不会影响到我们感兴趣的引力波高频区域。每一个曲线都在频率为 1 yr^{-1} (3.17×10^{-8} Hz) 的地方有一个尖峰，这是来自脉冲星位置的拟合过程（见 2.3.1 节）。更低频率处的敏感度损失是来自对脉冲星自转减慢率的拟合。在高频率端，上限随着频率而增加，斜率为 1。这符合公式 (3.2) 的描述：当频率增加时，引力波幅值要按正比增加，这样才可以保证注入 TOA 的正弦的幅值不变。

3.5 讨论

对比 [Yardley et al. \(2010\)](#) 中 PSR J1713+0747 和 PSR J1857+0943 (B1855+09) 对引力波单源的限制，我们的曲线延伸到了更高的频率范围： 4×10^{-7} 到 5×10^{-6} Hz。另外，因为我们不用拟合双星参数和不同数据组之间的跃变，我们的曲线在除 1 yr^{-1} 以外没有其他尖峰。本工作给出的对引力波单源强度的限制仍然比 [Sesana et al. \(2009\)](#) 中预言的要若干几个量级。若想进一步加强限制，需要更精确的 TOA 测量和更好的 DM 修正。

接下来我们要讨论一下计时残差里面不明结构的几种可能来源。正如图 3.6 中图所示，WSRT 和 Jodrell Bank 的数据都有相同的结构。这证明此结构不可能来自各天文台的时钟错误。这个结构也没有表现出明显的频率依赖，因此说明星际介质的色散和散射效应也不是原因。

这个噪音结构可以用一个幅度约为 150 ns，频率为 3.4 yr^{-1} (1.078×10^{-7} Hz) 的正弦，加上幅度为 100 ns 的三次谐波来拟合。

并且，这个准周期性的结构直到 MJD=56000 之后才出现。为了证实这一点，我们把数据分成前后两部分，分别计算功率谱。结果前一部分数据的功率谱中没有出现任何低频峰结构。因此这个结构不大可能被归咎于引力波，因为那样的话整个数据长度中都应该有这个结构。同理这个噪音结构也不可能来自小行星伴星。

之前的报道表明在更长时标上这颗脉冲星有显著的红噪音。因此我们认为这个结构来自脉冲星自身的转动不稳定性。我们在 [1.3.1](#) 节中介绍过脉冲星转动不稳定的许多可能的起源。

3.6 总结

我们展示了脉冲星 PSR B1937+21 从 2011 年 5 月到 2013 年 5 月的计时数据。数据分别来自 Jodrell Bank 天文台的 Lovell 望远镜和 42 英尺望远镜以及 Westerbork 综合射电望远镜。两次观测的平均时间间隔是 1.26 天，这使我们把引力波单源上限延伸到了 4.98×10^{-6} Hz. 我们修正了随时间变化的 DM 和散射脉冲轮廓展宽效应。拟合后的计时残差均方根降低到了 $0.346 \mu\text{s}$.

我们在计时残差里看到一个幅度为 150 ns 的结构，在功率谱里对应若干个低频处的尖峰。研究发现，时钟错误和剩余的星际介质效应都不是这个结构的起源。由于这个结构并非在整个时间跨度内都有，因此这个结构不太可能来自引力波单源或者小行星。最可能的解释是脉冲星自身的转动不稳定性。

利用我们从计时残差功率谱中得到的噪音模版，分别假设随机以及最优的引力波单源位置与引力波极化方向，我们计算了引力波上限曲线。我们上限的频率范围是 1.78×10^{-8} 到 4.98×10^{-6} Hz，这填补了之前的频率空白。

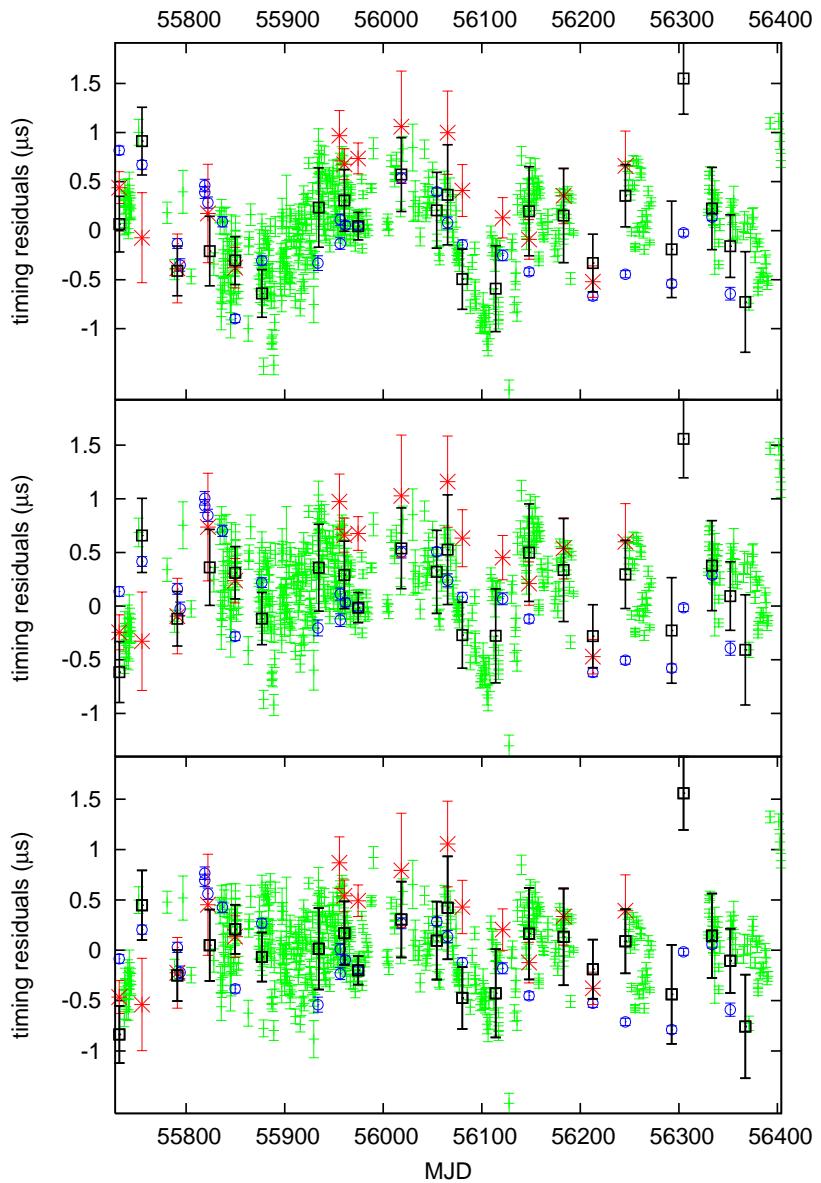


图 3.6: 上图: DMOFF 修正后 WSRT 2273 (红星标), LT (绿十字), WSRT 1380 (蓝圆圈)与 WSRT 350 (黑色方块) 的计时残差。中图: 用表 3.2 拟合后的计时残差。下图: 除掉谐波成分后的计时残差。谐波的参数列在表 3.3。

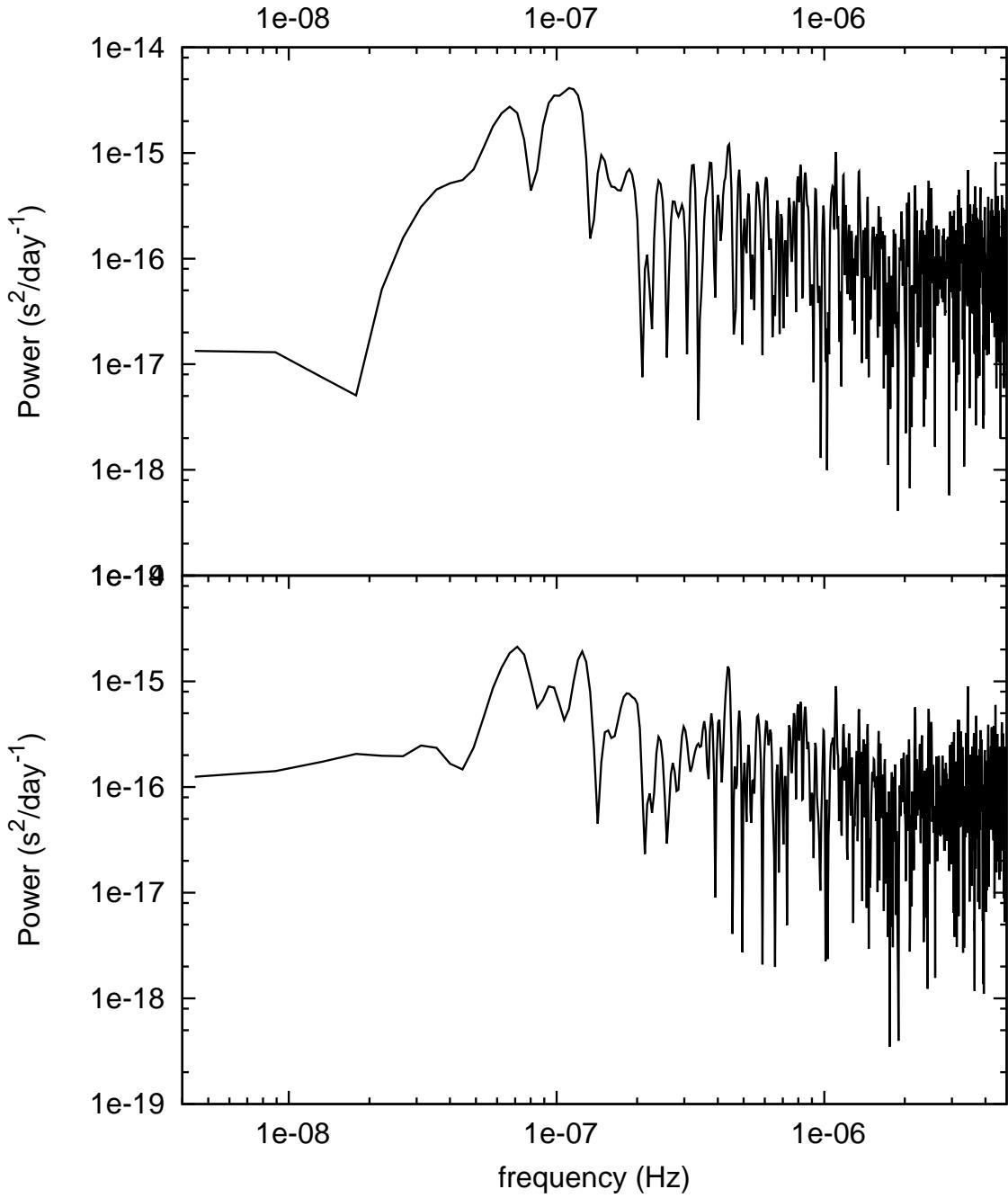


图 3.7: 拟合后计时残差的功率谱。纵坐标归一化,使得总功率等于计时噪音的方差。上图:除去谐波之前的功率谱,对应于图 3.6 的中图。下图:除去谐波之后的功率谱,对应于图 3.6 的下图。在上图曲线中最高峰位于 3.4 yr^{-1} ($1.078 \times 10^{-7} \text{ Hz}$)。

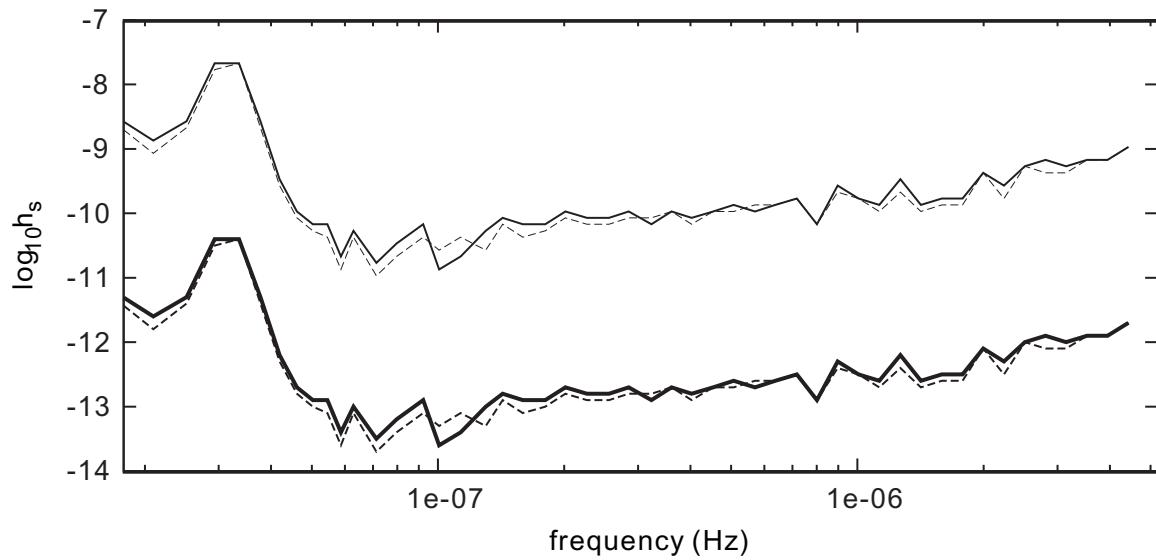


图 3.8: PSR B1937+21 对引力波单源强度的限制。上面两条线对应于引力波源在天上的位置 θ 以及偏振角 ϕ 随机的情况，细虚线对应于进行了谐波拟合白化的结果，细实线则对应没有白化的结果。底下两条线是当引力波源在天上最优位置的情况下，同样也分了是否白化两种情况（粗虚线白化过，粗实线没有）在频率 1 yr^{-1} 处上限并没有变成无限是由于我们曲线的频率分辨率的局限。

第四章 寻找脉冲星长期计时红噪声的起源 —磁倾角演化作为一种可能性

本章内容的英文版已发表于 *MNRAS* 454, 3674 (2015)

4.1 背景介绍

在脉冲星到达时间(TOA)中，具有时间相关性的残差十分常见（见 1.3.1 节）。这里的残差指的是扣除了标准的脉冲星自转减慢模型、太阳系内的各种修正、星际介质的各种效应，以及有可能存在的双星运动以后，依然存在的观测 TOA 与预言 TOA 之间的差异。这种与理论预言的系统性差异被称为红噪声，是因为残差中的低傅立叶频率处有更多的功率。为了找到隐藏在计时数据中的引力波信号，我们需要尽可能地把这些红噪声纳入模型之中。这就需要我们给这些红噪声的起源以合理的解释。

大部分业已提出的试图解释红噪声来源的机制大致可划入两个子集：a) 角动量的随机转移，要么是在中子星内部与其壳层之间(Jones 1990)，或者是在中子星和回落的星周物质之间(Boynton et al. 1972)；b) 变化的制动力矩(Kramer et al. 2006; Lyne et al. 2010)。Shannon et al. (2013a)做了一个新的尝试，把脉冲星 PSR B1937+21 的计时残差中的红噪声归因于一个未知的小行星带。正如我们在前面相关章节介绍过的那样，一群围绕着脉冲星旋转的物体在数学上等价于计时残差中的无数个正弦成分。我们认为，在 Shannon et al. (2013a) 研究的时间范围里，这颗脉冲星的计时残差可以更自然地用一个三次多项式去拟合，而非用一系列的正弦波(Lyne et al. 2015)。

在 Hobbs et al. (2010) 的样本中，在把脉冲星到达相位拟合到频率一阶导数($\dot{\nu}$)后，相当一部分脉冲星的计时残差展现出三次多项式的形状，还有一部分脉冲星展现出四次多项式的形状。这两类脉冲星是全部脉冲星的绝大多数。之所以计时模型只包含到 $\dot{\nu}$ 项，是因为按照广泛假设地，脉冲星的制动主要来自常数磁场的磁偶极辐射。不过，既然计时残差里出现了上述假设意料之外的三阶和更高阶的成分，这就迫使我们重新考虑以上假设了。

假设脉冲星的制动可以表述成以下形式：

$$I\nu\dot{\nu} = -\frac{2\pi^2 B_*^2 \nu^4 R^6}{3c^3}, \quad (4.1)$$

其中， I 与 R 分别是脉冲星的转动惯量与半径， B_* 是等效磁场强度。

在此我们并不预先假设 B_* 是常数，不过只要等效磁场的相对改变量 \dot{B}_*/B_* 是个小量，我们总可以做以下展开：

$$B_* = B_{*0} (1 + b(t)), \quad (4.2)$$

在此 $b(t)$ 是无量纲化的 B_* 的时变部分。

对方程 (4.1) 做两次积分，我们就可以得到脉冲到达的相位：

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \nu_0 t - AB_{*0}^2 \nu_0^3 \frac{t^2}{2} + \frac{3A^2 B_{*0}^4}{\nu_0} \frac{t^3}{3!} - 2AB_{*0}^2 \nu_0^3 \iint b(t) dt^2, \quad (4.3)$$

这里 ν_0 是 ν 在观测开始时刻的值 ($t = 0$)， Φ_0 是一个常数相位差， $A \equiv 2R^6/(3c^3 I)$ 。

从方程 (4.3) 我们可以看到， $b(t)$ 中的线性项会导致计时残差中的一个额外的三次项，而 $b(t)$ 中的 n 次多项式会产生计时残差中的 $n+2$ 阶项。换言之，

$$b(t) = -\frac{\nu_0}{2\nu_0} \frac{d^2 R(t)}{dt^2}, \quad (4.4)$$

在上面方程里， $R(t)$ 即计时残差，它被定义为：

$$R(t) = \left(\Phi(t) - \left(\Phi_0 + \nu_0 t + \dot{\nu}_0 \frac{t^2}{2} + 3\frac{\dot{\nu}^2 t^3}{\nu_0 3!} \right) \right) / \nu_0, \quad (4.5)$$

且 $\dot{\nu}_0 \equiv -AB_{*0}^2 \nu_0^3$ 。

至于 B_* 的演化，一个被提出的机制是通过欧姆耗散 (Ohmic dissipation) (Haensel et al. 1990) 的磁场衰减。单调减小的 B_* 只能解释观测中 $\dot{\nu}$ 是正数的那些脉冲星，而实际观测中，正值 $\dot{\nu}$ 的脉冲星与负值 $\dot{\nu}$ 的数目几乎是一样多的。为了解决这个问题，Zhang & Xie (2012a) 提出： B 的长期衰减被短期的震荡所调制。因此，在一个小于震荡周期的时间跨度中， B 的值机可以增加也可以减小， $\dot{\nu}$ 的符号也即可以是正的又可以是负的。

Lyne et al. (2013) 提出了另一种可能性，即磁倾角 χ 的漂移，他们在文章中说，由于磁倾角的漂移而造成的等效磁场的改变可以解释 45 年间蟹状星云 (Crab) 脉冲星的计时残差。在本章中，我们将详细研究这种可能性。在第二节和第三节中，我们推导出 χ 的演化将如何影响计时残差，这里我们假设制动力矩来自磁偶极辐射

和电流损失。并且在这一节中，我们还将用模型去解释观测现象。在第四节中，我们讨论 χ 演化的原因，并且讨论了表观制动指数 (apparent braking index) 和磁倾角的演化有何关系。在第五节，我们讨论如何用观测去区分我们这个模型和其他的模型，以及观测中尚不能被我们的模型解释的部分。我们也将讨论如何利用我们的模型来提高引力波测量的信噪比。最后我们给这个工作一个总结。

4.2 当存在电流损失制动时的等效磁场

磁偶极辐射的制动机制预言，脉冲星的 χ 会趋向 0 或 180°。而假如电流损失是主导制动的因素，则 χ 会趋向 90° (Barsukov et al. 2009)。许多研究者已经指出 (Beskin et al. 1993; Beskin & Nokhrina 2007; Mestel et al. 1999)，当脉冲星周围被等离子体覆盖时（事实正是如此，脉冲星周围被磁层覆盖，见第 1.2.1 节），磁偶极辐射效率很低。并且，观测到的蟹状星云脉冲星的脉冲轮廓演化也暗示， χ 正在向 90° 方向漂移 (Lyne et al. 2013)，这正是电流损失机制所预测的。基于以上原因，我们认为脉冲星的总制动力矩是上述两种机制的组合，这种做法的有效性被 Jones (1976) 所证明。

$$\mathbf{K} = \alpha \mathbf{K}_{\text{dip}} + \mathbf{K}_{\text{cur}}, \quad (4.6)$$

在上面的方程里， $0 < \alpha < 1$ ，这是为了把磁偶极辐射的低效性计入。

\mathbf{K}_{dip} 的方向与自旋方向平行，并其数值为：

$$K_{\text{dip}} = -2\pi\nu^3 B_0^2 A \sin^2 \chi; \quad (4.7)$$

\mathbf{K}_{cur} 指向磁偶极的方向，其在自旋方向上的投影贡献了脉冲星的制动：

$$K_{\text{cur}\parallel} = -2\pi\beta\nu^3 B_0^2 A \cos^2 \chi, \quad (4.8)$$

这里， β 是一个因子，它等于脉冲星管 (pulsar tube) 中电流密度与 Goldreich-Julian 电流密度之比 (Barsukov et al. 2009，见其方程 (12))。

这样组合的结果是，方程 (4.1) 中的等效磁场就变成了：

$$B_*^2 = B_0^2 (\alpha \sin^2 \chi + \beta \cos^2 \chi). \quad (4.9)$$

方程 (4.9) 也可以写做：

$$B_*^2 = B_{*0}^2 \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \cos(2\chi)\right), \quad (4.10)$$

这上式中 $B_{*0}^2 \equiv [(\alpha + \beta)/2] B_0^2$ 。

4.3 磁倾角演化与计时残差

鉴于对一颗脉冲星的观测持续时间不过数十年，我们有理由认为，在这段时间内 χ 的变化率可视为常数 $\dot{\chi}_0$ ，这样一来：

$$\chi(t) = \chi_0 + \dot{\chi}_0 t. \quad (4.11)$$

方程(4.10)就变成了：

$$B_*^2 = B_{*0}^2 \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \cos(2\chi_0 + 2\dot{\chi}_0 t) \right). \quad (4.12)$$

我们进一步假设 χ 的变化很小，则方程(4.12)就可以展开为：

$$B_*^2 = B_{*0}^2 \left(1 - 2\gamma\dot{\chi}_0 t \sin(2\chi_0) - 2\gamma\dot{\chi}_0^2 t^2 \cos(2\chi_0) \right). \quad (4.13)$$

在方程(4.13)中， B_{*0}^2 被重新定义，以便可以把因子 $1 + (\beta - \alpha)/(\beta + \alpha) \cos(2\chi_0)$ 吸收到其中，并且

$$\gamma \equiv \frac{(\beta - \alpha)/(\beta + \alpha)}{1 + (\beta - \alpha)/(\beta + \alpha) \cos(2\chi_0)}, \quad (4.14)$$

这是一个不随时间变化的常量。与方程(4.2)比较后，我们发现：

$$b(t) = -\gamma\dot{\chi}_0 t \sin(2\chi_0) - \gamma\dot{\chi}_0^2 t^2 \cos(2\chi_0). \quad (4.15)$$

因此，根据方程(4.3)我们得出结论：脉冲到达相位中会出现四阶多项式：

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \nu_0 t + \ddot{\nu}_0 \frac{t^2}{2} + \dddot{\nu}_0 \frac{t^3}{3!} + \ddot{\ddot{\nu}}_0 \frac{t^4}{4!}, \quad (4.16)$$

其中，

$$\begin{aligned} \ddot{\nu}_0 &= 3 \frac{\dot{\nu}_0^2}{\nu_0} - 2\dot{\nu}_0\gamma\dot{\chi}_0 \sin(2\chi_0), \\ \dddot{\nu}_0 &= -4\dot{\nu}_0\gamma\dot{\chi}_0^2 \cos(2\chi_0). \end{aligned} \quad (4.17)$$

若我们利用特征年龄(characteristic age)的概念， $\tau \equiv -\nu_0/2\dot{\nu}_0$ ，那么方程(4.17)里的第一个方程可以改写为：

$$\ddot{\nu}_0 = -\dot{\nu}_0 \left(\frac{3}{2\tau} + 2\gamma\dot{\chi}_0 \sin(2\chi_0) \right). \quad (4.18)$$

从这个方程(4.18)中我们可以得到许多结论：1、对于年轻脉冲星而言， τ 很小，方程(4.18)括号里的第一项主导，因此 $\ddot{\nu}_0 > 0$ ；2、对于年老脉冲星而言，方程

(4.18) 括号里的第二项主导。由于 $\dot{\chi}_0 \sin(2\chi_0)$ 可正可负，因此 $\ddot{\nu}_0$ 亦可正可负；3、如果所有脉冲星的 $\gamma \dot{\chi}_0 \sin(2\chi_0)$ 很窄，那么从统计的意义上说， $\ddot{\nu}_0$ 的绝对值正比于 $\dot{\nu}_0$ 。上述三个预言都被观测所证实 (Zhang & Xie 2012a, 见图 1)。

(表观) 制动指数定义为 $n = \ddot{\nu}/\dot{\nu}^2$ ，从方程 (4.17) 中我们可知：

$$n - 3 = -\frac{2\nu_0}{\dot{\nu}_0} \gamma \dot{\chi}_0 \sin(2\chi_0). \quad (4.19)$$

由于 n 的分布跨越了八个量级 (Zhang & Xie 2012a, 见图 10)，我们可以得到结论，对于大多数脉冲星而言， $\dot{\chi}_0 \neq 0$ 。

方程 (4.19) 可以用特征年龄重新表示：

$$n = 3 + 4\tau \gamma \dot{\chi}_0 \sin(2\chi_0). \quad (4.20)$$

方程 (4.20) 可以解释如下观测现象： n 的绝对值与 τ 成正比 (Zhang & Xie 2012b, 见图 2)。

我们利用方程 (4.16) 与方程 (4.17) 模拟了 TOA，并且对其进行了二次多项式拟合。拟合的残差画在图 4.1 中，不同的子图对应不同的模拟参数（详见图题）。图 4.1 中四个字图概括了大部分脉冲星计时残差的形状 (Hobbs et al. 2010)。计时残差的不同形状来自不同演化阶段的 χ_0 和 $\dot{\chi}_0$ 的差异。

4.4 χ 的起源以及其对表观制动指数的影响

χ 的演化可以产生于源自中子星内部变化造成的磁场本身的演化，也可以来自和中子星转动有关的运动学过程（进动）。正如前面所提到的，磁偶极辐射机制与电流损失制动都预言了 χ 会因进动而产生变化，二者的结合使进动变化变成 (Barsukov et al. 2009)：

$$\dot{\chi} = \frac{AB_0}{2} \nu^2 (\beta - \alpha) \sin(2\chi). \quad (4.21)$$

因此，

$$\dot{\chi}_0 = \frac{AB_0}{2} \nu_0^2 (\beta - \alpha) \sin(2\chi_0). \quad (4.22)$$

从方程 (4.22) 我们看到，如果 $\beta > \alpha$ ，那么磁偶极会移向脉冲星的赤道；如果 $\beta < \alpha$ ，则磁偶极会移向与自转轴平行（两极）。

在方程 (4.20) 中，如果 $\dot{\chi}_0$ 由方程 (4.22) 决定，则

$$\gamma \dot{\chi}_0 \sin(2\chi_0) = \frac{AB_0}{2} \frac{(\beta - \alpha)^2 / (\beta + \alpha)}{1 + (\beta - \alpha) / (\beta + \alpha) \cos(2\chi_0)} \sin^2 2\chi_0. \quad (4.23)$$

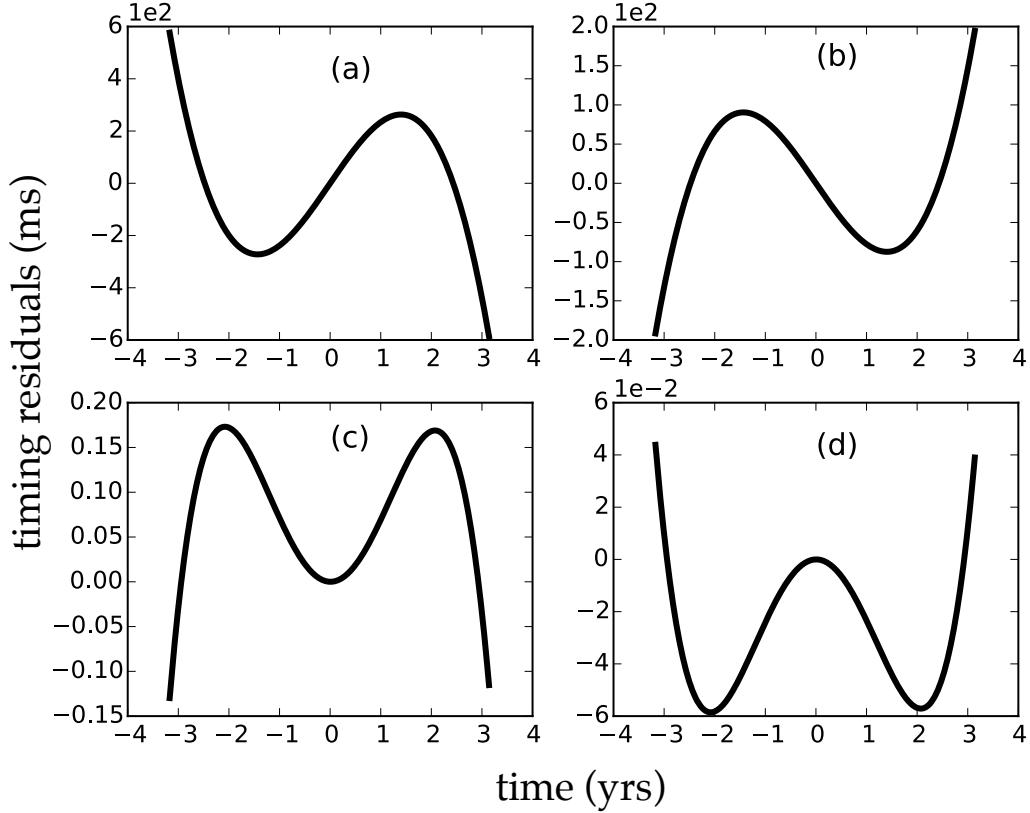


图 4.1: 对模拟的 TOA 进行二次多项式拟合后的计时残差: 在所有的模拟里, $\nu_0 = 30.0 \text{ Hz}$, $\dot{\nu}_0 = -3 \times 10^{-11} \text{ s}^{-2}$, 并且 $\gamma = 1$. (a): $\chi_0 = 0.75$, $\dot{\chi}_0 = 3 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$; (b): $\chi_0 = 0.75$, $\dot{\chi}_0 = -3 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$; (c): $\chi_0 = 0.1$, $\dot{\chi}_0 = -7.55 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$; (d): $\chi_0 = 1.4$, $\dot{\chi}_0 = -4.47 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$.

这样, 只要 β 是正的 (普遍认为如此), 则 $\gamma\dot{\chi}_0 \sin(2\chi_0) > 0$ 并且 n 总大于 3. 这是符合直观的, 因为进动永远会自发的调整脉冲星的倾角, 使得制动力矩减小。因此, 如果脉冲星的 $n < 3$, 那么它的内禀的磁场一定在演化。如果我们不假设 $\beta > 0$, 那么 $n < 3$ 则要求 (见方程 (4.23)):

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} < \cos(2\chi_0). \quad (4.24)$$

4.5 一些讨论

4.5.1 磁倾角的不同定义

在我们这章中，磁倾角 χ 定义为自旋矢量和磁偶极北极方向的夹角。而通过拟合旋转矢量模型（见 1.2.2 节）而得到的 χ_{ob} (Radhakrishnan & Cooke 1969; Rookyard et al. 2015) 则定义为自旋矢量与磁偶极中我们正在观测的那一端的夹角。因此， χ 即可以等于 χ_{ob} 也可以等于 $180^\circ - \chi_{\text{ob}}$ 。

这种歧义也出现在 $\dot{\chi}$ 上。观测只能告诉我们磁极在移向赤道或者两级，但无法告诉我们 χ 在增加还是在减小。

从方程 (4.17) 出发，我们有：

$$\frac{\ddot{\nu}_0}{\ddot{\nu}_0 - 3\dot{\nu}_0^2/\nu_0} = \xi \equiv 2\dot{\chi}_0 \cot(2\chi_0). \quad (4.25)$$

我们用 ξ_{break} 来表示用方程 (4.25) 的左边计算出的 χ ；用 ξ_χ 来表示方程 (4.25) 右侧定义的 ξ 。我们用方程 (4.25) 和 ATNF 脉冲星列表中的参数计算了 ξ_{break} 的值，并列在表 4.1 中。那些没有列在表中的 ATNF 脉冲星没有测到明显的 $\ddot{\nu}$ 。如果假设所有脉冲星的磁倾角是各向同性均匀随机分布，那么 $\chi_0=1 \text{ rad}$ 是一个典型值。我们有 $\cot(2\chi_0) \sim -0.46$ 且 $|\dot{\chi}_0| \sim |\xi|$ 。当然，观测中对 χ 分布的估计十分依赖于对射电辐射区形状的假设。按照表 4.1 中所列出的值推断出的 $\dot{\chi}_0$ 值， χ 到达 0° 或 90° 的时标大约是年到千年量级。这个时标比脉冲星的年龄要小好几个量级。并且，根据我们前面的推理，大部分的脉冲星都有 $\dot{\chi}_0 \neq 0$ 。这就说明大部分的脉冲星磁倾角的演化还在进行而没有停止。因此，我们得到结论：在脉冲星的一生中， χ 必然多次改变符号，这意味着磁倾角的演化发生震荡。这也解释了为何在表 4.1 中 ξ 的值正负参半。 χ 的震荡一定会引起脉冲星的有效磁场的震荡，这或许就是 Zhang & Xie (2012a,b) 提出的磁场震荡衰减模型背后的机制。

4.5.2 蟹状星云脉冲星的计时残差

Lyne et al. (2013) 用 χ 的漂移来解释蟹状星云脉冲星 (PSR J0534+2200) 的制动指数等于 2.5。从表 4.1 中我们看到，蟹状星云脉冲星有 $\xi_{\text{break}} = 2.70 \times 10^{-10} \text{ rad s}^{-1}$ 。而观测倾向于认为 $\dot{\chi}_0 = \pm 3 \times 10^{-12} \text{ rad s}^{-1}$ 移向赤道方向，并且 $45^\circ < \chi_0 < 70^\circ$ 或 $110^\circ < \chi_0 < 135^\circ$ (Du et al. 2012; Dyks & Rudak 2003; Harding et al. 2008; Watters et al. 2009)。所以， $-7 \times 10^{-12} < \xi_\chi < 0 \text{ rad s}^{-1}$ 。 ξ_{break} 与 ξ_χ 的不一致表明，对于蟹状星云脉冲星来说，仅仅是磁倾角的演化不足以解释其转动的行为。因此它的磁场强度有可能和磁倾角一起演化。因此，磁场强度演化的模型 (Chen & Li

| name | ξ (rad s ⁻¹) |
|-------------|------------------------------|
| J0007+7303 | 1.89×10^{-7} |
| J0534+2200 | 2.70×10^{-10} |
| J1023-5746 | -1.61×10^{-8} |
| J1418-6058 | -1.39×10^{-7} |
| J1513-5908 | 8.0×10^{-10} |
| J1623-2631 | 3.31×10^{-10} |
| J1824-2452A | -9.92×10^{-8} |
| J1833-0831 | -6.92×10^{-8} |
| J2337+6151 | -2.73×10^{-8} |

表 4.1: ATNF 脉冲星的 ξ_{break} .

2006; Espinoza 2013; Lin & Zhang 2004; Zhang & Xie 2012a,b) 并不能完全又磁倾角演化替代。另外一个有可能的解释蟹状星云脉冲星转动行为的机制是脉冲星风制动 (Contopoulos & Spitkovsky 2006; Wu et al. 2003; Xu & Qiao 2001)，这个可能性被 Kou & Tong (2015) 详细地做了研究。

4.5.3 对脉冲星计时红噪声的修正

χ 的演化给计时残差中带来额外的三次项和四次项，所以对计时残差进行一个四次多项式拟合可以去除这个成分。不过，如果自由地拟合多项式也同时会去掉有用的信号，比如隐藏在计时残差中的引力波信号。虽然 χ 与 $\dot{\chi}$ 都可以从观测上给出限制，但我们依然不能对 $\ddot{\nu}_0$ 和 $\ddot{\nu}_0$ 做出预判，这是因为方程 (4.17) 中的 γ 并不知道。但是， $\ddot{\nu}_0$ 和 $\ddot{\nu}_0$ 之间通过方程 (4.25) 互相耦合。因此，如果 χ 与 $\dot{\chi}$ 为独立的观测所确定，则 ξ_χ 亦可知晓。这样多项式拟合时的自由参数的数目就会被减小：

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \nu_0 t + \dot{\nu}_0 \frac{t^2}{2} + \ddot{\nu}_0 \frac{t^3}{3!} + \xi_\chi (\ddot{\nu}_0 - 3 \frac{\dot{\nu}_0^2}{\nu_0}) \frac{t^4}{4!}, \quad (4.26)$$

如此一来就会减小因为拟合多项式而对有用信号的吸收。

4.6 总结与结论

在本章中，我们认为脉冲星的制动机制是磁偶极辐射和电流损失制动的组合，并计算了在这种情形下，由磁倾角演化所造成的脉冲星计时残差。利用这个模型，

我们重复出了实际观测中占绝大多数的计时残差的形状 (Hobbs et al. 2010)。通过可观测数据的比较，我们计算了 ATNF 列表中九颗脉冲星的量 $2\dot{\chi} \cot(2\chi)$.

本章的结论如下：

1. 如果我们认为脉冲星的制动机制是磁偶极辐射和电流损失的组合，那么计时残差中的三次和四次多项式项可以被解释为脉冲星磁倾角演化的结果（见方程 (4.17))。通过改变不同的 χ 和 $\dot{\chi}$ 值，我们可以重现出大部分观测到的脉冲星计时残差的形状（见图 4.1）。
2. 磁倾角的演化可以解释一下的观测统计现象：1、年轻的脉冲星（特征年龄 τ 小）的 $\ddot{\nu}_0 > 0$; 2、年老的脉冲星即可以有 $\ddot{\nu}_0 < 0$ ，也可以有 $\ddot{\nu}_0 > 0$; 3、 $|\ddot{\nu}_0|$ 正比于 $-\dot{\nu}_0$; 4、 $|n|$ 正比于 τ .
3. 单纯因为进动引起的 χ 的演化无法解释制动指数小于 3 的脉冲星。对于这种脉冲星，需要有磁场内禀地演化，或者磁场强度的变化。
4. 在脉冲星的一生中， $\dot{\chi}$ 的符号会有多次改变。这也许是 Zhang & Xie (2012a,b) 提出的中子星有效磁场震荡的幕后机制。
5. χ 的演化不足以解释蟹状星云脉冲星的转动行为。

第五章 用 PTA 测量超过 Nyquist 频率的引力波

本章内容的英文版已发表于 *Science China, Physics, Mechanics & Astronomy, July 2016, Vol. 59, No. 7*

5.1 背景介绍

在第三章我们已经谈到过，用脉冲星计时的方法测量引力波，要求引力波的频率不能大过一个上限，这个频率上限被称为 Nyquist 频率。对于等间隔观测的数据而言，Nyquist 频率即等于 $\sim N(2T_{\text{obs}})^{-1}$ ，这里 N 是总观测点数， T_{obs} 是总观测实践长度，也就是平均采样频率；而当观测为不等间隔时，Nyquist 频率大致对应于 $(2\delta t)^{-1}$ ，其中 δt 为最小的观测时间间隔。由于脉冲星计时观测需要叠加长时间的脉冲轮廓，所以能达到的最短的观测时间大致就是一天左右。尽管，原则上讲，人们可以用贝叶斯方法（Bayesian Method）去寻找任意频率的引力波。但一旦欲搜索的引力波频率超过 Nyquist 频率时，其引力波的幅度就与白噪声幅度参数完全耦合在一起。当一列频率远大于 Nyquist 频率的引力波经过地球—脉冲星时，脉冲星 TOA 中被引入的扰动将和白噪声不可区分（见示意图 5.1）。对于这样的引力波，我们简称其为“超 Nyquist 引力波”。虽然超 Nyquist 引力波无法在 TOA 中引入时间相关的结构，其依然能够增加脉冲星 TOA 中白噪声的总功率。由引力波带来的额外白噪声的幅度和脉冲星于引力波源的相对位置有关。本章中我们提出一种方法，通过寻找这种独特的脉冲星 TOA 中白噪声幅度和其位置之间的相关性来搜寻超 Nyquist 引力波。本文的目的是展示这个方法，并且用可利用的公开数据来展示本方法的可行性。本章内容组织如下：第二节中我们将描述本方法的理论；第三节中我们利用模拟的数据来验证方法的可行性；第四节中，我们从 *Parkes pulsar timing array data released 1 (PPTA DR1)* ([Manchester et al. 2013a](#))¹ 和 *the North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves data publicly available data sets (NANOGrav dfg+12)* ([Demorest et al. 2013a](#)) 的公开数据中挑选出一部分合适的脉冲星，我们将用这些脉冲星来寻找超 Nyquist 引力波；第五章中我们给出本方法在

¹<http://dx.doi.org/10.4225/08/534CC21379C12>

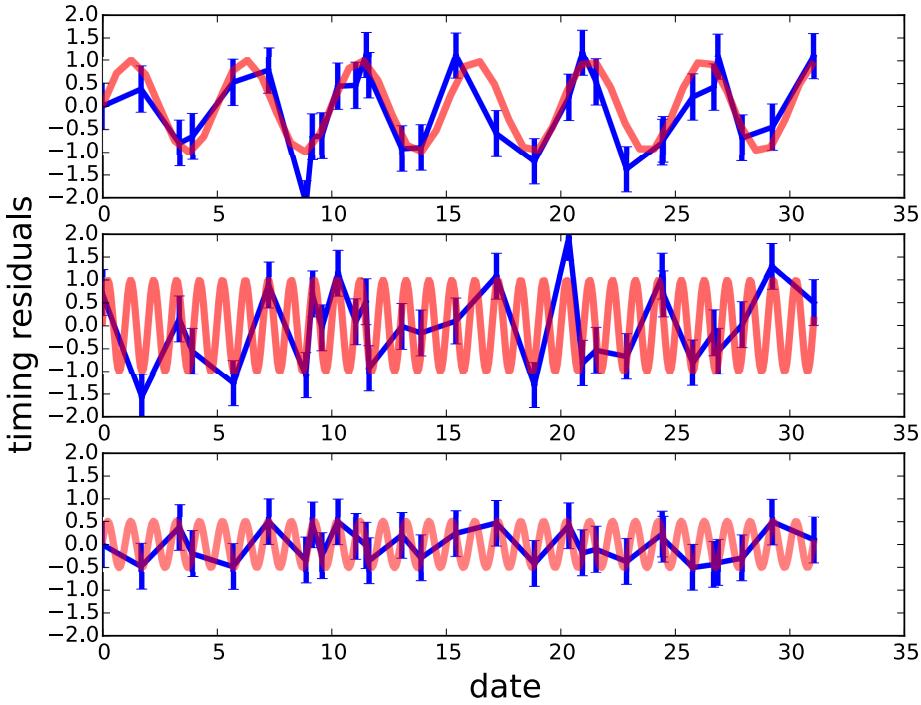


图 5.1: 上图: 当一列单色引力波 (红线) 的频率低于 Nyquist 频率时, 计时残差 (蓝线) 显示出时间相关的结构, 直接勾勒出引力波的波形。中图: 当引力波的频率高于 Nyquist 频率时, 计时残差是白噪声。下图: 当引力波强度降低时, 其引起的计时残差中的白噪声也相应地减小。

利用上述脉冲星阵列时对单一超 Nyquist 引力波的全天灵敏度。在讨论部分, 我们总结结论, 并且讨论本方法的不足之处和可能的改进方向。

5.2 脉冲星的位置于超 Nyquist 引力波引起的白噪声幅度的关系

脉冲星的白计时噪声包含三个部分: 由脉冲星内秉性质引起的白噪声, 比如脉冲轮廓于轮廓之间的变化引起的所谓 jitter 噪声 (Shannon et al. 2014), 这部分白噪声我们记作 $\sigma_{\text{intrinsic}}$, TOA 的测量误差, 记作 σ_{TOA} ; 由超 Nyquist 引力波所引起的白噪声, 记作: σ_{GW} 。

下面我们将看看 σ_{GW} 是如何被超 Nyquist 引力波决定的。假设脉冲星的赤经和赤纬分别是 λ 和 β , 引力波源的赤经和赤纬分别是 λ_s 和 β_s 。引力波引起的计时残差为:

$$r(t) = F_+ A_+(t) + F_\times A_\times(t), \quad (5.1)$$

其中 $F_{+,\times}$ 是几何因子 (Lee et al. 2011):

$$\begin{aligned} F_+ &= \frac{1}{4(1-\cos\theta)} [(1+\sin^2\beta_s)\cos^2\beta\cos 2(\lambda_s-\lambda) \\ &\quad - \sin 2\beta_s \sin 2\beta \cos(\lambda_s-\lambda) + \cos^2\beta_s(2-3\cos^2\beta)] \\ F_\times &= \frac{1}{2(1-\cos\theta)} [\cos\beta_s \sin 2\beta \sin(\lambda_s-\lambda) \\ &\quad - \sin\beta_s \cos^2\beta \sin 2(\lambda_s-\lambda)], \end{aligned} \quad (5.2)$$

其中 θ 是脉冲星于引力波源之间的夹角, $A_{+,\times}$ 由以下表达式决定:

$$\begin{aligned} A_+ &= h/\omega [(1+\cos^2\iota)\cos 2\phi \sin \omega t + 2\cos\iota \sin 2\phi \cos \omega t] \\ A_\times &= h/\omega [(1+\cos^2\iota)\sin 2\phi \sin \omega t - 2\cos\iota \cos 2\phi \cos \omega t]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

在方程 (5.3) 里, h 和 ω 分别是引力波的强度和圆频率, ϕ 是引力波的偏振角, ι 是引力波源的轨道倾角。在方程 (5.3) 中引力波的初始相位被设为零, 并且脉冲星项 (见第 1.5 节) 被当作额外的噪声而被忽略。

方程 (5.3) 可做如下化简: 我们引入变量 $K = h/\omega$, $\mu^2 = F_+^2 + F_\times^2$, $\gamma = \arctan(F_+/F_\times) + 2\phi$; 这样一来, 方程 (5.1) 可以写成:

$$r(t) = \mu K [(1+\cos^2\iota) \sin(\omega t) \sin \gamma - 2\cos\iota \cos \omega t \cos \gamma]. \quad (5.4)$$

进一步地, 我们记:

$$\xi^2 = ((1+\cos^2\iota) \sin \gamma)^2 + (2\cos\iota \cos \gamma)^2, \quad (5.5)$$

并且

$$\psi = \arctan((1+\cos^2\iota)/2\cos\iota \tan \gamma), \quad (5.6)$$

这样, 方程 (5.4) 变成了:

$$r(t) = \mu K \xi \sin(\omega t + \psi). \quad (5.7)$$

由于 TOA 的采样频率低于方程 (5.7) 中的正弦频率, 并且 TOA 的取值对应的正弦的相位是随机的, 由此导致的计时噪声中的额外成分为:

$$\sigma_{\text{GW}}^2 = \frac{1}{2}\mu^2 K^2 \xi^2. \quad (5.8)$$

在总白噪声的三个成分中, $\sigma_{\text{intrinsic}}^2$ 和 σ_{TOA}^2 与脉冲星的位置, 也就是参数 μ^2 没有任何相关。但是 σ_{GW}^2 却正比于 μ^2 。因此, 只要引力波足够强, 能让 σ_{GW}^2 主导白噪

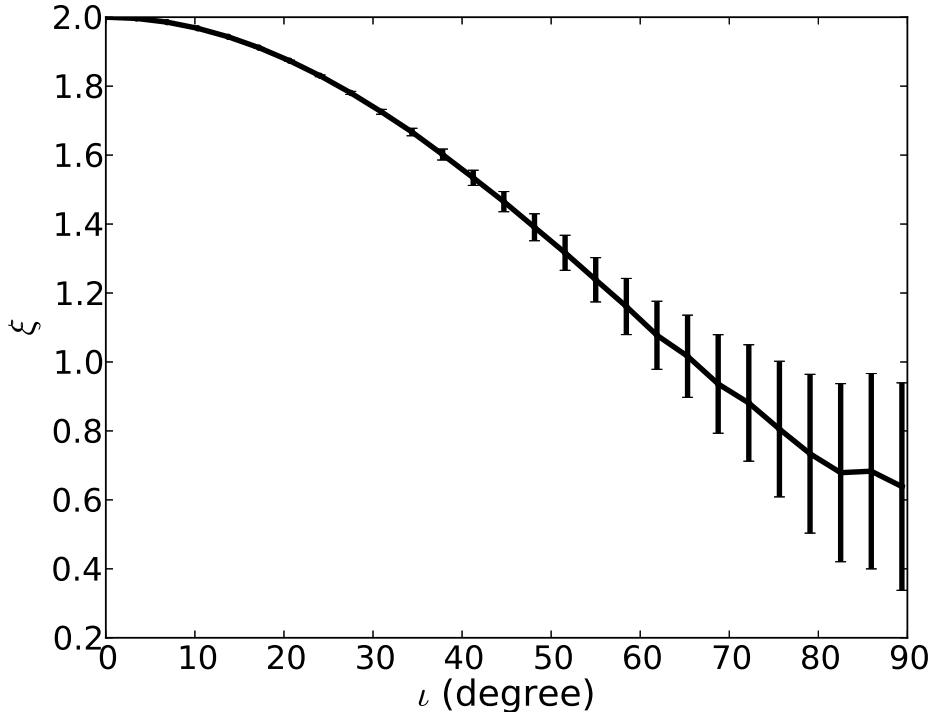


图 5.2: 横坐标为 ι , 纵坐标是 1000 颗随机分布的脉冲星的 ξ 的平均值, 误差棒是 ξ 的标准差。

声, 我们就有: $\sigma_{\text{remain}}^2 \propto \mu^2$, 其中 σ_{remain} 是计时残差的系统 (非测量) 误差 rms。值得注意的是, ξ 也是脉冲星位置的函数, 因此 σ_{GW} 与 μ^2 之间的相关会偏离严格的正比关系。图 5.2 中画出了 ξ 如何随 ι 变化: 我们在天球上随机生成 1000 个脉冲星, ϕ 的取值是从 0 到 360° 均匀随机分布。对应的 ξ 值是用方程 (5.5) 计算得到。在图 5.2 中, 纵轴表示 ξ 的平均值, 误差棒代表 ξ 的标准差。

当倾角 ι 远离 90° 时, ξ 可以看作是 ι 的单值函数; 但当 ι 接近 90° 时, ξ 的弥散就越来越显著了。

5.3 用模拟数据来检验本方法

为了检验上面提到的方法的可行性, 我们生成了 1000 组模拟的脉冲星残差。这些脉冲星均匀随机地分布在天球面上。模拟数据的时间跨度, 总观测次数, 内秉白噪声水平以及 TOA 的不确定度都比照 PPTA DRI 中的 PSR 0437-4751 来给定, 因为这颗脉冲星是已知的计时性质最好的脉冲星。引力波源的坐标被设定为 $\lambda_s = 0$, $\beta_s = 0$. 由于脉冲星阵列的分布是均匀随机的, 所以引力波源的位置并不会引起任

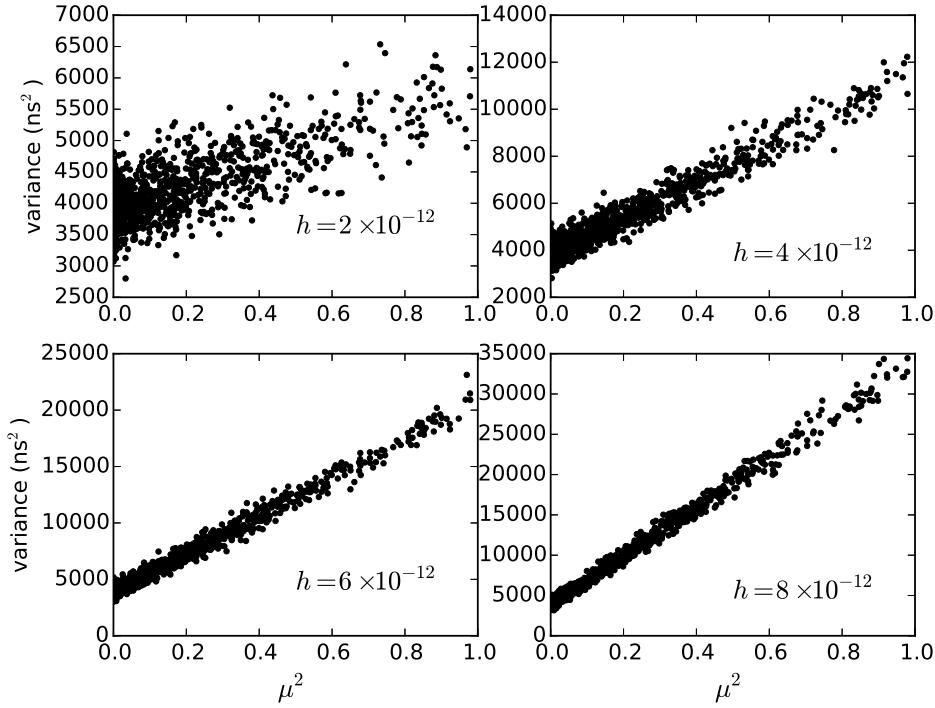


图 5.3: 不同的引力波强度 h 下, 模拟的脉冲星的计时残差方程与 μ^2 的关系。每一幅图上都标出了引力波强度 h 的值。

何区别。引力波源的双星轨道倾角设为 $\iota = 0.3$, 偏振角设为 $\phi = 0.1$; 引力波的频率为 $f = 1 \times 10^{-5}$ Hz. 模拟数据的平均 Nyquist 频率为 1.58×10^{-6} Hz. 我们所模拟的引力波频率比 Nyquist 频率高一个量级, 因此引力波源是超 Nyquist 的。每一时刻脉冲星残差的取值为:

$$r(t_i) = G(0, \alpha) + G(0, E(t_i)) + \mu K \xi \sin(2\pi f t_i), \quad (5.9)$$

其中 $G(a, b)$ 是以 a 为平均值, 以 b 为标准差的高斯函数 (Gaussian); α 是内秉白噪声水平, 我们一律设为 $\alpha = 50$ ns, $E(t_i)$ 是 TOA 在 t_i 时刻的不确定度。图 5.3 显示了模拟的脉冲星的计时残差方程与 μ^2 的关系。随着引力波强度的增加, 这个相关关系越来越强了。

上面提到的 μ^2 -方差关系的斜率等于 $\bar{\xi}h/\omega$, 后者是描述引力波属性的参数。其中 $\bar{\xi}$ 是考虑到对于不同脉冲星而言有不同的 ξ 所产生的平均效果。我们向计时残差中注入不同强度的引力波, 然后对得到的 μ^2 与方差做线性拟合。然后我们画出拟合得到的斜率, 也就是估计所得到的 $\bar{\xi}h/\omega$ 。在图 5.4 中我们画出了 $\bar{\xi}h/\omega$ 与所注入

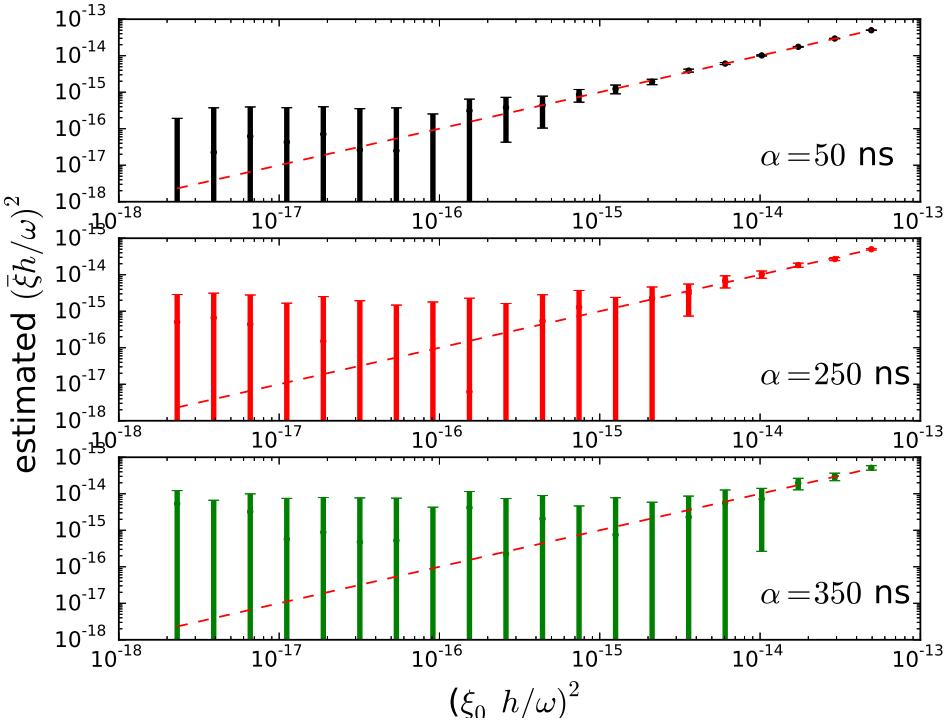


图 5.4: 通过拟合 μ^2 -方差关系得到的 $(\bar{\xi}h/\omega)^2$ 与注入引力波的 $(\xi_0 h/\omega)^2$ 之间的关系。不同的内秉白噪声 α 被标注在每幅图上。

引力波的 $(\xi_0 h/\omega)^2$ 之间的关系。其中， ξ_0 是当方程 (5.4) 中的 $\gamma = 2\phi$ 时的 ξ 。斜率的误差由直线拟合给出。当注入的引力波强度很小时，拟合得到的斜率有很大的不确定度，并且其平均值偏离输入的值；当输入的引力波强度足够强时，拟合出的斜率落在了红色虚线上，那是 $(\bar{\xi}h/\omega)^2(\xi_0 h/\omega)^2$ 的地方。我们也尝试了不同的 α ，结果发现脉冲星的内秉白噪声越大，PTA 对引力波的敏感度就越差。这个结论和传统的 PTA 探测引力波方法是一致的。

5.4 利用从 *PPTA DRI* 和 *NANOGrav dfg+I2* 中选出的 PTA 探测超 Nyquist 频率的引力波

现在我们把模拟的数据换成 *PPTA DRI* 和 *NANOGrav dfg+I2* 里的真实脉冲星数据。脉冲星的计时残差是用 TEMPO2 拟合 TOA 所得到的（见第 2.3 节），然后计时残差的方差被计算出来。脉冲星 PSR J1939+2134 和 J1824-2452A 的计时残差被多项式白化（见第 2.4 节），其他脉冲星则用其原有的星表拟合。偏差参数 EQUAD 与误差放大因子 EFAC 都被设为 0. 拟合后的 *PPTA DRI* 和 *NANOGrav dfg+I2* 的脉

| name | σ_{total} (ns) | σ_{remain} (ns) | Ave. ΔTOA (ns) |
|-------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| J0437-4715 | 69 | 42 | 41 |
| J0613-0200 | 1301 | 19 | 1042 |
| J0711-6830 | 4405 | 3 | 3357 |
| J1022+1001 | 2315 | 625 | 1327 |
| J1024-0719 | 2981 | 7 | 2279 |
| J1045-4509 | 3230 | 15 | 2596 |
| J1600-3053 | 758 | 9 | 540 |
| J1603-7202 | 2207 | 24 | 1283 |
| J1643-1224 | 2722 | 3 | 2022 |
| J1713+0747 | 424 | 9 | 269 |
| J1730-2304 | 2296 | 4 | 1677 |
| J1732-5049 | 3224 | 2 | 2585 |
| J1744-1134 | 920 | 6 | 573 |
| J1824-2452A | 2337 | 13 | 1687 |
| J1857+0943 | 1384 | 8 | 1292 |
| J1909-3744 | 255 | 8 | 232 |
| J1939+2134 | 402 | 295 | 142 |
| J2124-3358 | 3641 | 8 | 2602 |
| J2129-5721 | 3703 | 5 | 3017 |
| J2145-0750 | 3532 | 3 | 2175 |

表 5.1: *PPTA DR1* 脉冲星的 σ_{total} , σ_{remain} 及平均 TOA 不确定度 (Ave. ΔTOA); 单位为 ns.

冲星残差分别画在图 5.5 和 5.6. 正如上文所提到的, σ_{TOA} , $\sigma_{\text{intrinsic}}$ 和 σ_{GW} 都对总的计时残差有贡献。我们把源自后两项的计时残差 RMS 记作 σ_{remain} . 我们用以下方法, 把 σ_{remain} 从总的脉冲星白噪声中分离出来。

我们用以下方法为每颗脉冲星重新生成一列新的计时残差:

$$r_{\text{sim}}(t_i) = G(0, \sigma_{\text{remain}}) + G(0, E(t_i)), \quad (5.10)$$

我们逐渐增加 σ_{system} 并不断地重新生成新的计时残差, 直到生成的计时残差的方差 (Var_{sim}) 与真实的计时残差的方差 (Var_{real}) 相等。在实际操作中, 只要 $(|\text{Var}_{\text{sim}} - \text{Var}_{\text{real}}| / \text{Var}_{\text{real}}) < 10\%$ 我们即认为二者相等。我们把脉冲星的总 RMS (σ_{total}), σ_{remain} 和平均 TOA 不确定度列在表 5.1 和 5.2 中。

我们从表 5.1 和 5.2 中挑选出那些 $\sigma_{\text{remain}} < 100$ ns 的脉冲星; 对于那些同时出现在两个表里的脉冲星, 我们选取较小的 σ_{system} . 我们选取的脉冲星列在表 5.3:

现在, 对于第 i 颗脉冲星 (i 从 1 到 N_{psr} , 其中 N_{psr} 是 PTA 中脉冲星的个数), $\sigma_{\text{system},i}$ 已知。下一步我们将利用方程 (5.2) 来得到 μ_i^2 , 以便检验方程 (5.8) 中的相关关系。由于引力波源的位置是未知的, 我们把天球面等面积地分成 100×100 个格子。对于每个格子, 我们假设引力波源位于其中, 然后我们计算其对应的 μ^2

| name | σ_{total} (ns) | σ_{remain} (ns) | Ave. ΔTOA (ns) |
|------------|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| J1857+0943 | 3492 | 11 | 2050 |
| J0613-0200 | 2884 | 3 | 2058 |
| J1600-3053 | 1549 | 87 | 1303 |
| J1713+0747 | 1842 | 143 | 817 |
| J1909-3744 | 1654 | 317 | 811 |
| J2145-0750 | 7173 | 8 | 4836 |
| J1955+2908 | 6104 | 5001 | 7107 |
| J1012+5307 | 7493 | 11 | 4457 |
| J1640+2224 | 6353 | 10 | 2753 |
| J1744-1134 | 4530 | 2 | 2341 |
| J1910+1256 | 3308 | 17 | 2233 |
| J2317+1439 | 1031 | 31 | 629 |
| J0030+0451 | 2646 | 3 | 2080 |
| J1455-3330 | 12747 | 5001 | 13868 |
| J1643-1224 | 3571 | 2039 | 2243 |
| J1853+1308 | 4208 | 2 | 3431 |
| J1918-0642 | 7172 | 9 | 5180 |

表 5.2: NANOGrav dfg+12 脉冲星的 σ_{total} , σ_{remain} 及平均 TOA 不确定度 (Ave. ΔTOA); 单位为 ns.

值。我们接下来要检验 μ_i^2 与 $\sigma_{\text{system},i}^2$ 的相关性，但通常个别具有很大 σ_{system} 的脉冲星会主导 μ_i^2 - $\sigma_{\text{system},i}^2$ Pearson 相关系数。而且，在线性空间下 σ_{system} 的分布很不均匀，因此我们不计算 Pearson 相关系数，而计算 $\log \mu_i^2$ 与 $\log \sigma_{\text{system},i}^2$ 的加权相关系数 (Weighted Correlation Coefficient; WCC)。两列数 X_i 与 Y_i 的加权相关系数为:

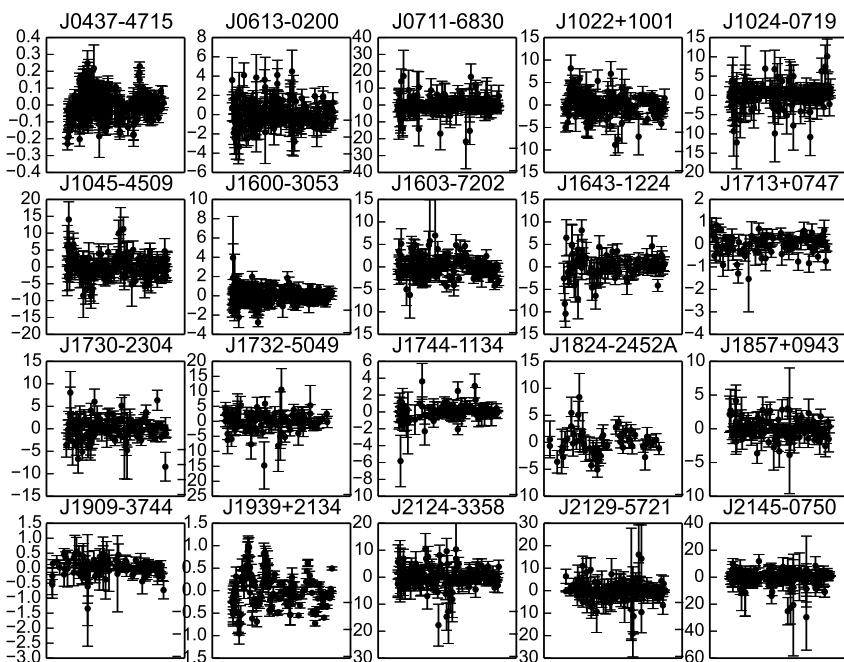
$$r_w = \frac{\sum w_i X_i Y_i - \sum w_i X_i \sum w_i Y_i}{\sqrt{\sum w_i X_i^2 - (\sum w_i X_i)^2} \sqrt{\sum w_i Y_i^2 - (\sum w_i Y_i)^2}}, \text{ 其中 } w_i \text{ 是归一化权重因子。}$$

我们把所有格子所对应的 $\log \mu_i^2$ - $\log \sigma_{\text{system},i}^2$ -WCC 都计算出来，这样就得到了一个天图 (图 5.7)。在图 5.7 中，色阶代表 $\log \mu_i^2$ - $\log \sigma_{\text{system},i}^2$ -WCC，其最大取值的天球格点用绿色圆圈标出。这一点的坐标为: $\lambda_s = 1.95$, $\beta_s = 0.48$ (rad), 对应的 log-log-WCC= 0.31.

我们还需要知道，以上看到的相关性是否单纯产生于脉冲星的内秉白噪声？换言之，我们想计算出，单纯由于脉冲星的内秉白噪声和脉冲星相对位置产生的巧合产生的 WCC 不大于观测到的值的概率。为此，我们交换 $\sigma_{\text{system},i}$ 1000 次，每次都计算出最大的 log-log-WCC。于是我们得到了最大的 log-log-WCC 的概率分布 (图 5.8)。我们发现，在 65.5% 的次数中，最大的 log-log-WCC > 0.31，因此观察到的 $\log \mu^2$ - $\log \sigma_{\text{system}}^2$ 相关完全出于巧合的概率是 65.5%，也就是说没有找到引力波存在的证据。

| name | $\sigma_{\text{remain}} (\text{ns})$ | name | $\sigma_{\text{remain}} (\text{ns})$ |
|-------------|--------------------------------------|------------|--------------------------------------|
| J0437-4715 | 42 | J1857+0943 | 8 |
| J0613-0200 | 19 | J1909-3744 | 8 |
| J0711-6830 | 3 | J2124-3358 | 8 |
| J1024-0719 | 7 | J2129-5721 | 5 |
| J1045-4509 | 15 | J2145-0750 | 3 |
| J1600-3053 | 9 | J1012+5307 | 11 |
| J1603-7202 | 24 | J1640+2224 | 10 |
| J1643-1224 | 3 | J1910+1256 | 17 |
| J1713+0747 | 9 | J2317+1439 | 31 |
| J1730-2304 | 4 | J0030+0451 | 3 |
| J1732-5049 | 2 | J1853+1308 | 2 |
| J1744-1134 | 6 | J1918-0642 | 9 |
| J1824-2452A | 13 | | |

表 5.3: 本工作挑选的 25 颗脉冲星。

图 5.5: *PPTA DR1* 脉冲星的计时残差。脉冲星的名称标在每个图上面。为便于观看, 隐去横轴。

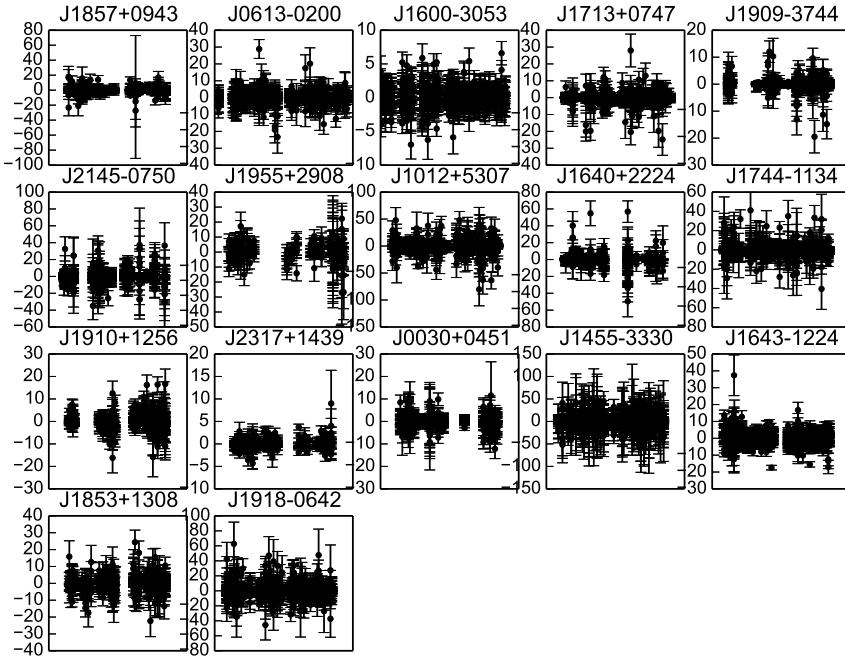


图 5.6: *NANOGrav dfg+12* 脉冲星的计时残差。脉冲星的名称标在每个图上面。

5.5 对单个超 Nyquist 频率引力波的探测敏感度

在上节中，我们没有在现有的脉冲星计时数据中发现超 Nyquist 频率引力波。本节中我们将研究这种方法，以及现在的数据对单一超 Nyquist 频率引力波的敏感度。所谓敏感度，就是指当单一超 Nyquist 频率引力波的强度大于什么值时，我们可以从现有的数据上发现它。我们的步骤如下：

- 1) 将天球均匀地分成 100×100 个等面积的格子。在一步中，依次在一个格子中放入一个超 Nyquist 频率引力波源。轨道倾角被设为最优值 $\iota = 0$ ，引力波的频率设为 $f = 1 \times 10^{-5} \text{ Hz}$.
- 2) 从一个小的引力波强度 h 出发，并且指定一个随机的偏振角 ϕ ，生成按照方程 (5.9) 生成一列计时残差。
- 3) 按照上一节描述过的方法探测引力波。回到上一步并不断地增加 h ，直到探测的显著性大于 99%.

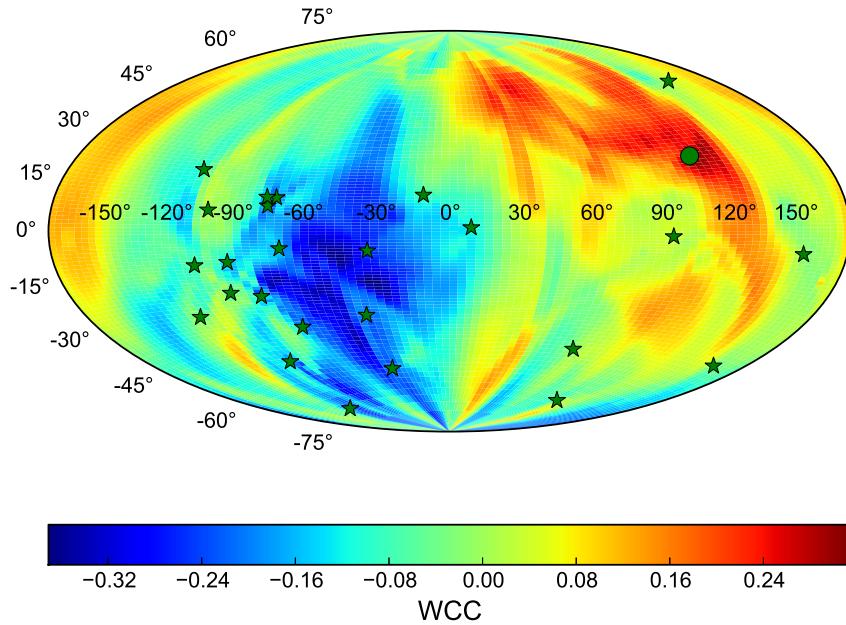


图 5.7: $\log \mu^2$ 与 $\log \sigma_{\text{system}}^2$ 之间加权相关系数的天图。绿色星号是我们所使用的脉冲星的位置，绿色圆圈代表了 WCC 取最大值是的格点坐标。

4) 记录下当前的 h 值作为本数据能够探测的最小引力波强度。在下一个格点重复上述全部过程。

图 5.9 展示了由上述步骤所得到的敏感度天图。从图中我们可以看到，如果引力波源位于图中绿色圆圈所标出的区域： $\lambda_s = -0.82$, $\beta_s = -1.03$ (rad)，则我们所用的数据会对这个引力波源最敏感。如果引力波源位于该区域，则当它的强度在 $f = 1 \times 10^{-5}$ Hz 的地方大于 $h = 6.31 \times 10^{-11}$ 就可以被探测到。根据方程 (5.3)，最小敏感强度 h 与引力波频率成正比。我们把我们的结果同其他 PTA 以及其他引力波探测器的敏感度画在图 5.10 中。

5.6 讨论

5.6.1 目标引力波源

我们研究的目标是超 Nyquist 频率的引力波，它的源是并合中的超大质量双黑洞 (Supermassive Black Hole Binaries; SMBHB)，并且其频率要高于传统的 PTA 方

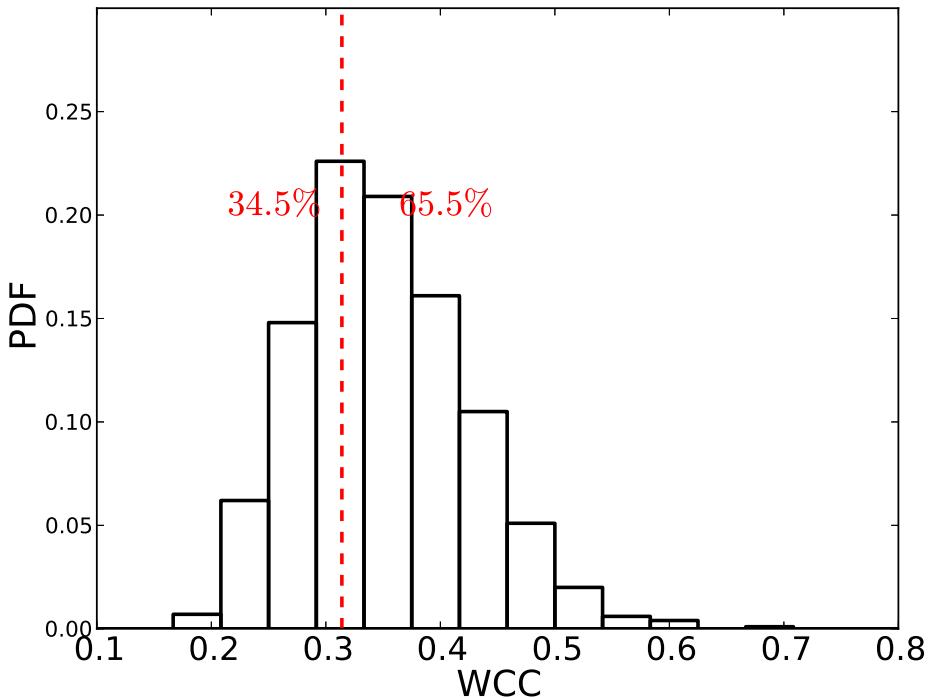


图 5.8: 1000 次交换脉冲星的 σ_{system} 后所得到的, $\log \mu^2$ - $\log \sigma_{\text{system}}^2$ 之间的最大 WCC 的归一化概率密度分布 (probability density distribution; PDF)。垂直的虚线标识了观测到的 $\text{WCC} = 0.31$ 。

法的最高探测频率, $\sim 10^{-7}$ Hz. 因此我们可以先使用滤波来把脉冲星计时噪声中的红噪声去掉。我们假设引力波的强度和频率在脉冲星的观测时间范围内保持不变 (稳定性假设); 但是事实上频率和幅度都在随着双黑洞的靠近而在变化。对稳定性的要求给本方法设置了一个频率的上限:

引力波的强度和频率的关系为 (Lee et al. 2011)

$$h = C\omega^{2/3}, \quad (5.11)$$

其中 C 是一个常数因子, 由 Chirp 质量 (M_{chirp}) 和到引力波源的距离决定。引力波到达观测者的频率, 与其距离并合的时, t_m 的关系是 (Hughes 2009):

$$\omega = 2 \left(\frac{5}{256} \right)^{3/8} \frac{1}{M_{\text{chirp}}^{5/8} t_m^{3/8} (1+z)^{5/8}}, \quad (5.12)$$

其中 z 是引力波源的红移, 并且在上式中 ($G = c = 1$)。

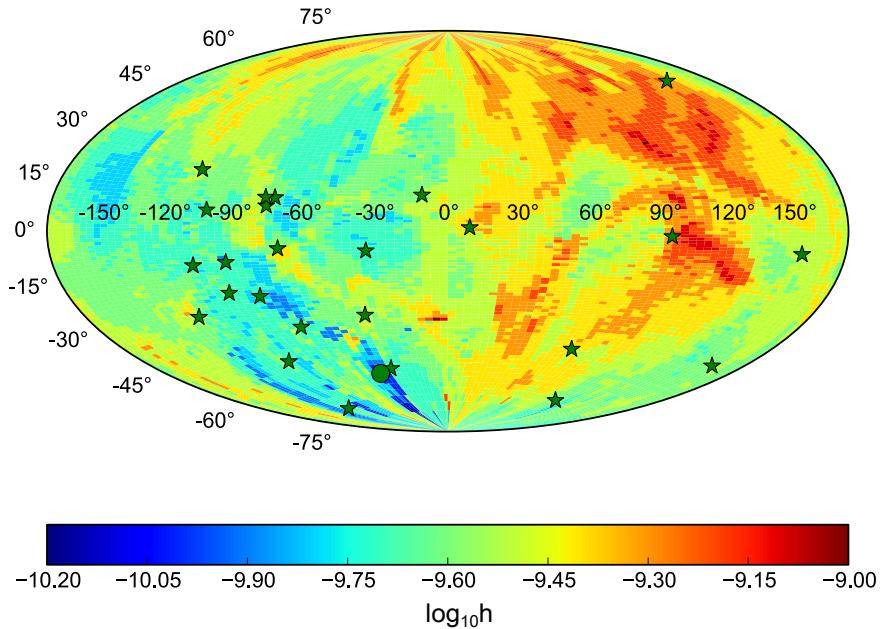


图 5.9: 我们所使用的数据对单一超 Nyquist 频率引力波源的敏感度天图。绿色的星号代表了所使用的脉冲星的位置，绿色圆圈标出了这个脉冲星阵列对引力波最敏感的位置。

我们要求方程 (5.7) 中的 K 在时间范围 δt 内的相对改变量小于 %10 (因此由 GW 引入的计时残差的方差的相对改变小于 %)。由方程 (5.11) 和 (5.12) 我们知道：

$$1 - \frac{\Delta K}{K} = \left(\frac{t_m - \Delta t}{t_m} \right)^{1/8}. \quad (5.13)$$

因此，

$$\frac{1}{8} \frac{\Delta t}{t_m} = \frac{\Delta K}{K} < 10\%. \quad (5.14)$$

从方程 (5.12) 我们得到了引力波的频率上限为：

$$\omega < 2 \times \left(\frac{5}{256} \right)^{3/8} (80\%)^{3/8} \Delta t^{-3/8} M_{\text{chirp}}^{-5/8} (1 + z)^{-5/8}. \quad (5.15)$$

我们将 $M_{\text{chirp}} = 1 \times 10^8 M_\odot$, $\Delta t = 1 \text{ yr}$ 和 $z < 1$ 带入方程 (5.15) 得到频率上限为： $f_{\text{up}} = \omega / 2\pi \sim 2 \times 10^{-6} \text{ Hz}$. 所以，我们的方法把引力波的频率上限提高了近一个量

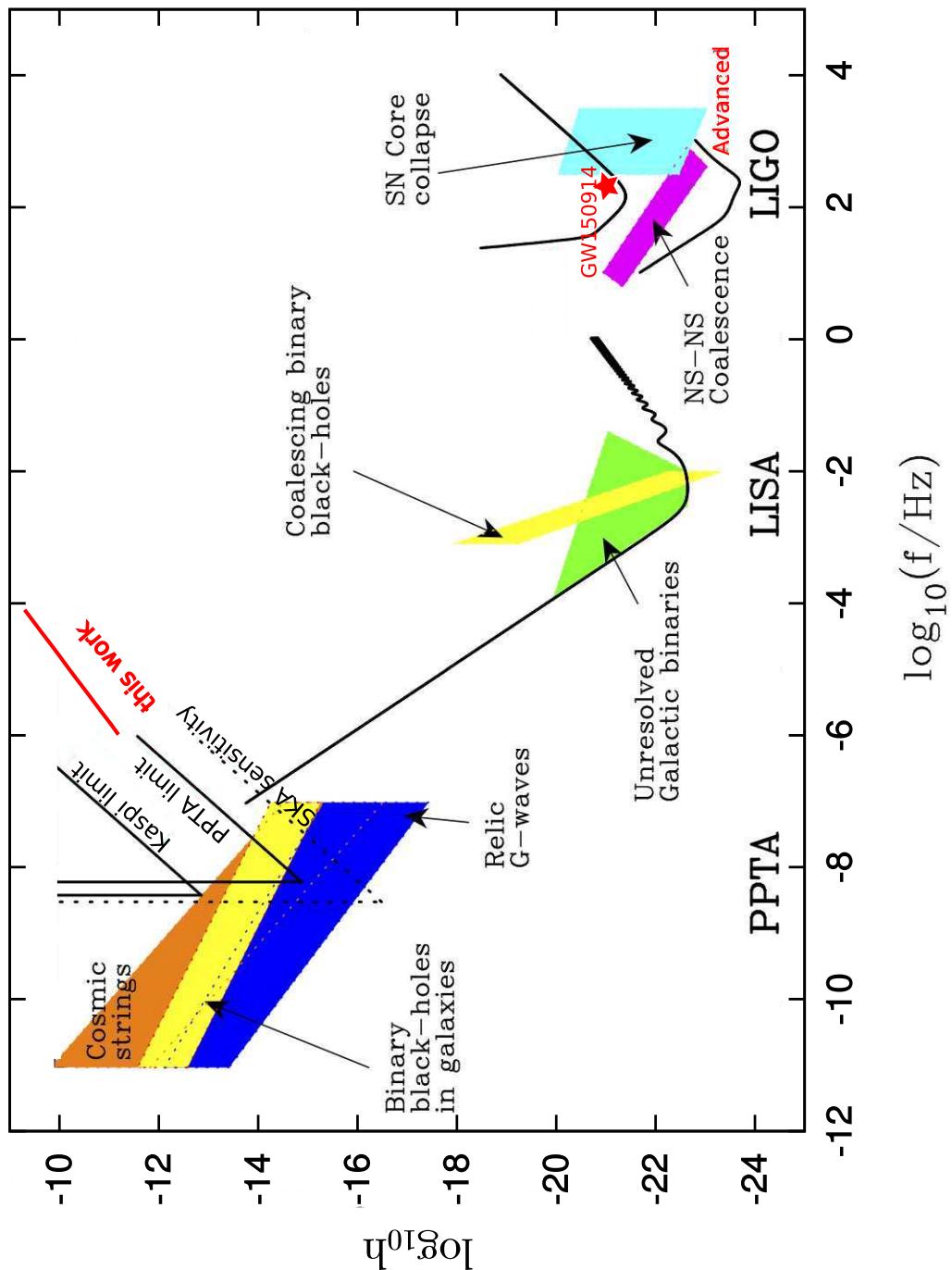


图 5.10: 本文描述的方法对引力波的敏感度，以及其与其他方法的比较。最新发现的引力波源 GW150914 (Abbott et al. 2016) 用红色星号表示。本图改自 Thrane & Romano (2013)。

级，而没有增加观测的频次。如果黑洞双星的 $M_{\text{chirp}} = 1 \times 10^9 M_{\odot}$ ，则引力波的上限是： $f \sim 5 \times 10^{-7} \text{ Hz}$ ，这比传统的脉冲星计时方法提高了一小部分。

5.6.2 脉冲星项

当一列引力波经过地球时，会在脉冲星的TOA中留下方程(5.1, 5.3)所描述的正弦结构，这被称为地球项；同样地当引力波经过脉冲星时，在它的TOA中也会留下类似于方程(5.1, 5.3)的正弦结构，这被称为脉冲星项。我们把脉冲星项和地球项的频率分别记为 ν_p 和 ν_E . ν_p 与 ν_E 的关系为：

$$\nu_p = \nu_E \left(\frac{d(1 - \cos \theta)}{ct_m} + 1 \right)^{-8/3}, \quad (5.16)$$

这里 d 是脉冲星的距离， t_m 是黑洞双星距离并和的时间， θ 是脉冲星和引力波源的夹角。当 $\nu_p < f_{\text{Ny}}$ 时，我们可以使用高通滤波来去掉脉冲星项的贡献，然后像上文描述过的那样来处理。当 $\nu_p > f_{\text{Ny}}$ 时，由脉冲星项带来的功率与地球项不可区分。我们把脉冲星项和地球项的幅度分别记为 A_p 和 A_E ，它们的关系如下：

$$\eta \equiv \frac{A_p}{A_E} = \left(\frac{\nu_p}{\nu_E} \right)^{-2/3}. \quad (5.17)$$

脉冲星项和地球项贡献的总 rms 依然可以被写成如下关系式：

$$\sigma_{\text{GW}}^2 = \frac{1}{2} \mu^2 K^2 \xi^2. \quad (5.18)$$

但上面方程中的 μ 却和先前不同：

$$\mu^2 = (1 + \eta)(F_x^2 + F_+^2). \quad (5.19)$$

当我们想探测来自某个已知的天体物理源时，我们通常会有预期的 $\nu_E, z, M_{\text{Chirp}}$ ，我们可以据此通过方程(5.12)计算出 t_m ，进而得到 ν_p . 如果 $\nu_p < f_{\text{Ny}}$ ，我们就用高通滤波来去掉脉冲星项的贡献；否则我们就按照方程(5.19)重新定义 μ^2 ，然后用前面介绍过的方法搜索相关关系。在第二种情况中，脉冲星的距离的不确定性会影响 μ^2 的确定，从而扭曲欲观察的相关关系。

因为我们只需要白噪声的方差，我们使用白化的计时残差。在传统的脉冲星计时方法中，许多脉冲星由于其计时残差中存在红噪声因此不能被使用。但这些脉冲星，甚至普通脉冲星都可以白化后被我们的方法使用。有了更多的脉冲星，我们可以覆盖更大的天区，因此我们就可以有更多的 μ_i^2 覆盖更大的范围，由此获得对引力波更高的敏感度。但更多的脉冲星有着不同的内秉白噪声，这会降低本方法对引力波信号的敏感度。

第六章 博士期间进行的其他研究工作:关于Birkhoff定理的常见误解以及光线偏折计算: 推广的Shapiro延迟以及其实验室检验

本节内容的英文版发表在*IJMPD*, Vol. 12 (2012) 419 -430

6.1 背景介绍

在广义相对论中著名的 Birkhoff 定理通常被表述为: 球对称分布的质量在真空中某处产生的度规等价于该点半径内所包围的全部质量集中于一点时对应的 Schwarzschild 度规; 这里的真空区域既可以在质量分布之外, 也可以在质量分布之内。例如, 一个球对称质量分布的空腔内的时空总被认为是平直的 Minkowski 时空; 类似于牛顿力学中的结论, 即球壳的质量不会对内产生引力。在这种类比之下, 人们会认为任何球对称质量分布中的某一点, 其度规都是该点半径内所包围的全部质量对应的 Schwarzschild 度规。我们的工作指出, 上述表述是错误的, 从这种认识出发, 人们常常陷入对 Birkhoff 定理一种误用 (Coles 2002; Ferraro 2007; Grupen 2005; Harwit 2006; Mukhanov 2005; Ohanian 1976; Peacock 2002, 1998; Peebles 1971, 1993; Weinberg 1977) (文献中的相关内容我们直接引用在本节的附录A中。), 这种误用广泛存在于广义相对论的计算中, 比如计算光线经过星系或星系团的引力透镜效应时 (Weinberg 1977)。

从著名的 Oppenheimer-Snyder 解 (Oppenheimer & Snyder 1939) 出发, 刘元和张双南已经给出了尘埃壳层自由下落, 在 Schwarzschild 坐标系 (对应外部观测者) 的精确解 (Liu & Zhang 2009)。我们发现, 壳层内部的度规不仅受到内部质量的影响, 同时也受到壳层的影响; 如果按照普遍的错误理解那样, 那么壳层内时间坐标, 或者时钟, 在壳层的边界处就会不连续。要求时间坐标的连续性, 则我们给出了一个与普遍的误解不一样的解。我们的新结果与著名的 Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) 解 (Liu & Zhang 2009; Oppenheimer & Snyder 1939) 并不矛盾, 因为 LTB 解是在共动坐标系下的解。

在这个工作里, 我们首先推导了围绕中心质量的静态球对称薄壳层内部时空的解, 然后我们把这个结果应用到计算光线的偏折和延迟, 为了简单起见, 在

计算光线偏折和延迟时我们令中心质量为零，即一个空球壳。我们的结果证明，对 Birkhoff 的错误理解会在我们设定的这种条件下造成荒谬的错误结果。只有当内部度规同时受内外质量的影响时，得到的结果才是合理的。这与牛顿引力的情况不同。我们把这种光线传播的延迟称作推广的 Shapiro 延迟。在这个工作里，全部使用几何单位制，即 $G = c = 1$ 。

6.1.1 围绕中心物体的薄壳层产生的度规

首先我们使用 Oppenheimer & Snyder (1939) 的方法，得到了围绕中心物体 m_{in} 的静态厚壳层产生的度规。假设厚壳层的质量密度为 $\rho(r)$ ，压强分布为 $P(r)$ ，内外半径分别为 a' 和 a 。在通常的 Schwarzschild 坐标下，线元可以写作：

$$ds^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (6.1)$$

能量动量张量的分量为：

$$T_{tt} = \rho B, T_{rr} = 0, T_{\theta\theta} = r^2 P, \text{ and } T_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta P,$$

把线元和能动张量带入爱因斯坦场方程中，我们得到：

$$\begin{aligned} -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} &= R_{tt} = -8\pi B(r) \left(\frac{1}{2}\rho + P \right), \\ \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} &= R_{rr} = 8\pi A(r) \left(P - \frac{1}{2}\rho \right), \\ -1 + \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} &= R_{\theta\theta} = -4\pi r^2 \rho, \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta R_{\varphi\varphi}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

经过整理后，方程变为：

$$\begin{aligned} \frac{R_{tt}}{2B} + \frac{R_{rr}}{2A} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} &= -8\pi\rho, \\ -\frac{A'}{rA^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{Ar^2} &= -8\pi\rho. \end{aligned} \quad (6.3)$$

很明显地：

$$\left(\frac{r}{A} \right)' = 1 - 8\pi\rho r^2. \quad (6.4)$$

在壳层与中心物体之间，对上式积分可以得到：

$$A(r) = \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{-1}, \quad (6.5)$$

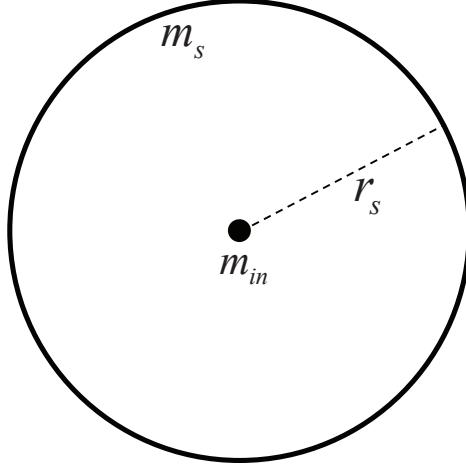


图 6.1: 中心物体周围的薄壳层示意图。

其中 $M(r)$ 是半径 r 内所包围的质量。把上面式子带入含 $R_{\theta\theta}$ 的方程中, 我们得到

$$\frac{B'}{B} = \frac{\rho r^2 + \frac{M(r)}{r} - 4\pi r^2 \rho}{\frac{r}{2} \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)} \equiv f(r). \quad (6.6)$$

由于, $M(r) = m_{in} + 4\pi (r^3 - a'^3) \bar{\rho}$, 其中 $\bar{\rho}$ 是壳层内的平均密度, 我们得到:

$$f(r) = \frac{\bar{\rho} \left(r^2 - \frac{4\pi a'^3}{r}\right) + \frac{m_{in}}{r}}{1 - \frac{2m_{in}}{r} - \frac{8\pi}{r} \bar{\rho} (r^3 - a'^3)}. \quad (6.7)$$

明显地, 对于任何 $\bar{\rho}$, $f(r)$ 都是有限的, 甚至当 $\bar{\rho} \rightarrow \infty$ 时。

因此当 $a \rightarrow a'$ 时, 我们有 $\ln B_a - \ln B_{a'} = \int_{a'}^a f(r) dr \rightarrow 0$ 。即 $B(r)$ 在密度为无穷大的薄壳层两边是连续的。另一方面, 由于薄壳层两边的 $M(r)$ 必须是不连续的, 因此 $A(r)$ 在跨过薄壳层时也必然不连续。换言之, 度规的时间分量总是连续的, 不过空间分量则不然。接下来的部分, 我们为了简化, 把注意力集中在薄壳层的情况。如图6.1所示, 对于质量为 m_s , 半径为 r_s 的, 围绕着中心质量 m_{in} 的薄壳层, Schwarzschild 坐标下两个真空区域 (内外) 的度规可以统一地表示为:

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.8)$$

其中 $g_{rr} = -(1 - R/r)^{-1}$, $g_{tt} = -h(t)g_{rr}^{-1}$, $R = r_0 = 2m_{in}$ ($r < r_s$) 或 $R = 2(m_s + m_{in})$ ($r > r_s$)。通常的做法是, 重新定义时间坐标 t' 来把因子吸收掉, 即, 令新坐标

下 $h(t)dt^2 = dt^2$ 。这样可以使 $g_{ttt} = -g_{rr}^{-1}$ ，这样一来，所有的真空区域度规都可以表示成统一的Schwarzchild 形式了。然而人们常常混淆了内外两个区域的时间坐标，这样 g_{tt} 就变得在壳层边界处不连续了。这种混淆的恶果在计算光线传播等问题时就显现了出来。

当 $r < r_s$ 时，对度规连续性的要求使得：

$$h = \frac{r_s - 2(m_s + m_{in})}{r_s - 2m_{in}}. \quad (6.9)$$

很明显，这里 $h < 1$ ，并且这个因子依赖于壳层的位置和质量，也就是说，外部质量的分布确实会影响到内部的度规（时钟）。具体到我们这个情况，由于外部壳层的影响，壳层内的时钟速率会比没有壳层时慢。

如果令 $m_{in} = 0$ ，即一个空腔，我们就有 $m_{in} = 0$ ，不过依旧有 $h(r < r_s) < 1$ ，也就是内部的时钟依旧比没有壳层时要走得慢，尽管此时内部的时空的确是平直的。我们再次强调，如果令 $h(r < r_s) = 1$ ，并混淆了新旧时间坐标的话，那么度规的时间分量会在壳层边界变得不连续。

6.1.2 空心薄壳层情况下的光线偏折与延迟

为了展示强行令 $h(r < r_s) = 1$ 带来的荒谬结果，我们考虑这样一个理想的情况，即光线经过空心薄壳层的偏折和延迟，并对比 $h(r < r_s) = 1$ 与 $h(r < r_s) < 1$ （方程. (6.9)）的结果。特别地，我们计算了相对真空，质量分布所造成的光线延迟时间 (Δt) 以及偏折量 (ξ)。光子的运动方程如下：

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{Jh}{g_{rr}r^2}, \quad (6.10)$$

和

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{g_{rr}}{h} + \frac{J^2}{r^2}\right) \frac{h^2}{g_{rr}^3}, \quad (6.11)$$

其中 J 是一个积分常数，即光子的角动量，它与瞄准距离 L 有关，见示意图 6.2。对上面两个方程积分，我们可以分别对 $h(r < r_s) < 1$ （方程. 6.9）与 $h(r < r_s) = 1$ 计算出光线穿过壳层后的 $\xi(L)$ 和 $\Delta t(L)$ 。图 6.3 展示了 $\xi(L)$ ，偏折量随瞄准距离的变化。对于 $h(r < r_s) < 1$ （方程 6.9），光线偏折量一开始随着 L 的减小而增加。当 $\xi + L = r_s$ 时，即光线穿过壳层后，偏折量开始减小，因为壳层内部的时空是平直的，因此光线在壳层内沿直线传播。在整个过程中， ξ 的变化是连续的。然而，如果强行令 $h(r < r_s) = 1$ ，则 ξ 的变化会在光线穿过壳层的临界 L 处不连续。甚

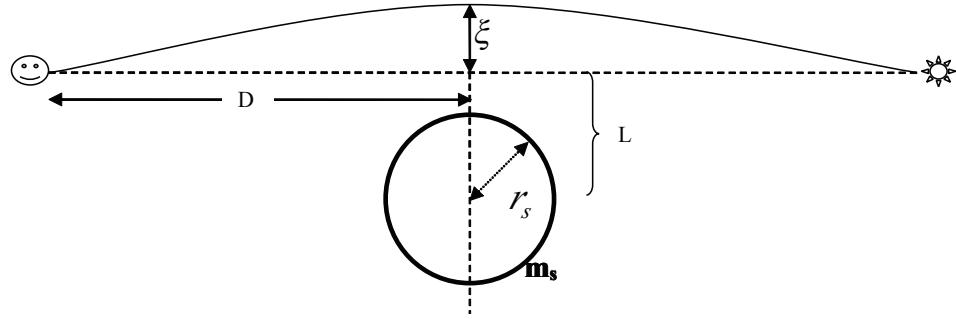


图 6.2: 光线在经过或者穿过薄壳层时的偏折示意图。

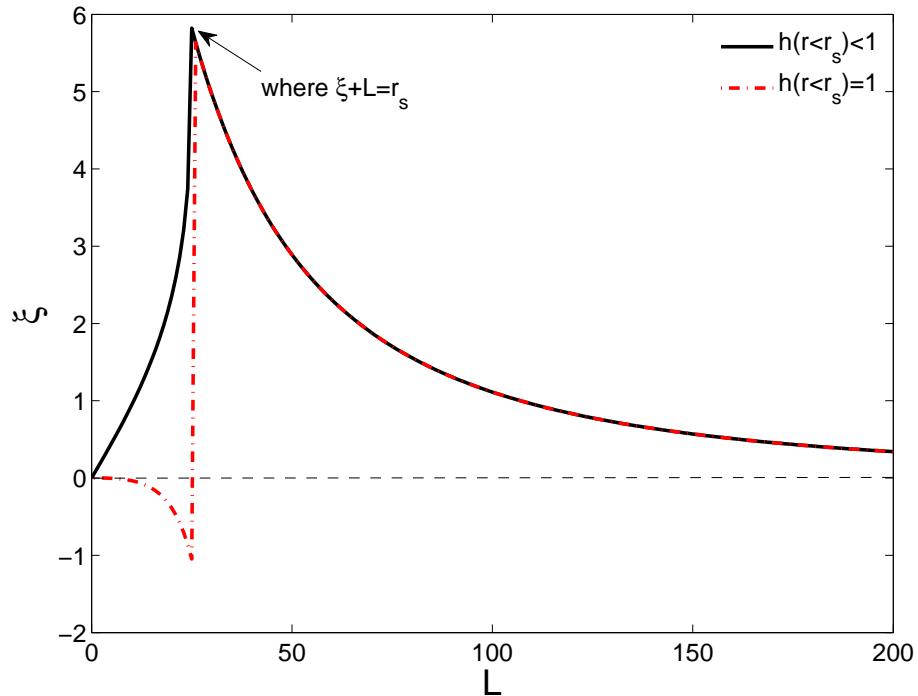


图 6.3: 光线偏折距离 ξ (单位为 m_s) 随 L (单位为 m_s) 的变化。这两个几何量定义请见图6.2。当 $\xi + L = r_s$ 时, 曲线发生了尖锐的拐折。在计算中, 我们假设了 $r = 30m_s$ 和 $D = 100m_s$ 。

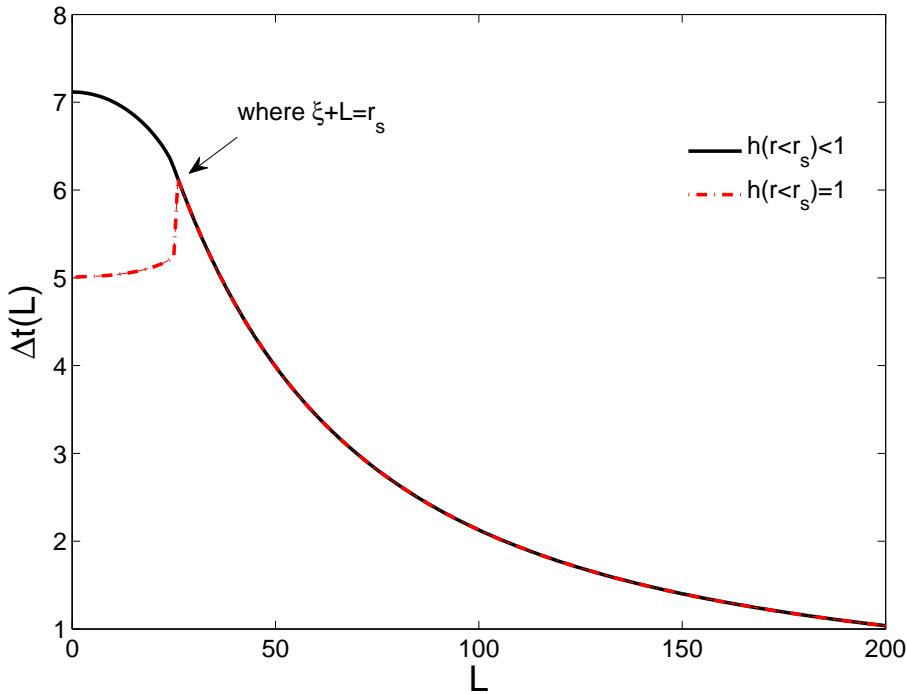


图 6.4: 光线延迟时间 Δt (以 m_s 为单位) 随 L (单位为 m_s) 的变化。与图6.3中相同, 我们在计算中假设了 $r = 30m_s$ 和 $D = 100m_s$

至 ξ 的符号都发生了转变。这意味着物体的引力透镜像一下子从一边跳到了另一边, 这显然是不可能的。

图6.4展示了延迟时间 $\Delta t(L)$ 随 L 的变化。对于 $h(r < r_s) < 1$ (方程. (6.9)) 的情况, 延迟时间 $\Delta t(L)$ 随着 L 的上升连续减小。这不难理解, 因为 $h(r < r_s) < 1$ 意味壳层内部时钟变慢, 这样对于外部观测者而言, 光速变慢了。而错误的情况, 即 $h(r < r_s) = 1$ 则会导致 $\Delta t(L)$ 在 $\xi + L = r_s$ 时发生一个不连续的变化。这依然是荒谬的。

以上荒谬非物理的结果的起源就是度规中时间分量的不连续, 这是由于令 $h(r < r_s) = 1$ 却混淆了新的时间坐标与壳层外的时间坐标所致。

6.2 总结与讨论

我们把这个工作的主要结论总结如下:

- 1) 在 Schwarzschild 坐标系下, 球对称分布质量内部的度规不是标准的 Schwarzschild 度规, 而与普遍的对 Birkhoff 理解 (误解) 不同。

- 2) 重新定义壳层内部度规的时间坐标可以让度规变成 Schwarzschild 的形式, 不过如果混淆了新旧时间坐标的话, 就会造成度规的时间分量或者时钟走时率在边界处不连续, 进而当计算光线偏折和延迟时出现非物理的结论。
- 3) 度规的时间分量由该点半径内包围的质量以及壳层的质量共同决定的, 时间分量以及时钟的走时率在壳层的边界处是连续变化的。外部的质量分布导致内部的时钟变慢。

以下是我们对于上述结论的进一步讨论:

Shapiro 延迟是指由于引力对光线的作用而使光线的传播时间比没有引力源时更长。在通常情况下, Shapiro 延迟是指光线经过某一个物体因其引力造成偏折而发生的时间延迟。而正如我们在上面展示的, 由于外部质量的分布导致的内部时钟走时率的变化也会造成额外的光线传播时间的变化, 我们把总的时间延迟称为广义的 Shapiro 延迟。

对于光线穿过星系或者星系团的情况, 即使考虑最优化的情形, $1 - \sqrt{h} \approx 10^{-6} - 10^{-3}$ 。因此从天文观测上很难看到这个效应。所以令 $h = 1$ 虽然不正确, 但是在计算星系或星系团的引力透镜效应时不失为一个很好的近似。

不过在地球的实验室借助超高精度的实验探测到这个效应是有可能的。举例来说, 对于质量为 10^3 kg , 半径为 1 m 的壳层对应的 $1 - \sqrt{h} \approx 10^{-24}$ 。这样总的额外时间延迟为每穿过壳层一次 $\Delta t \approx 4r_s(1 - \sqrt{h}) \approx 10^{-15}$ 秒; 令光线数千次反射不断穿过壳层可以把时间延迟累积到皮秒量级, 这样就达到了目前或者不远的将来能够探测到的实验精度。不过当然需要把地球的引力效应扣除干净。另外一个方式就是, 把两个精确同步的时钟一个放在质量壳层内, 一个放于壳层外, 在经过足够长时间后相比较。这是另一个可以在实验室内做的验证广义相对论的实验。

第七章 总结与展望

本论文的主题为脉冲星计时，前两章介绍了理论与观测的背景知识。其中涵盖了中子星与脉冲星的基本事实、脉冲星的辐射机制、脉冲星自转不稳定性、星际介质对脉冲信号的影响、引力波对脉冲到达时间的影响、脉冲星计时观测系统、脉冲星数据处理等内容。第三章和第五章展示了脉冲星计时在搜索引力波信号中的应用。第四章研究了脉冲星计时噪音中的红噪声的可能起源。

7.1 引力波探测

我们从脉冲星 PSR B1937+21 的脉冲轮廓出发，消除了星际介质散射及色散的影响，得到了 TOA。然后利用 TOA 得到了引力波单源强度的上限。我们给出上限的方法是常用的基于功率谱的方法，即探测功率谱上是否有显著的准周期峰来认证信号。我们在观测 TOA 中人为地加入引力波信号，并不断地增大引力波信号直至其在功率谱上可以被探测出。这反映出在目前这组数据的计时精度下，任何引力波单源信号如果要被探测出来至少应有的强度。在观测到的计时残差中，我们看到一个准周期的结构，但我们不认为它是引力波单源信号，原因是它在整个数据长度内不持续存在。我们认为这个结构来自红随机噪声。

我们需要不断地降低计时残差来提高信噪比。为了达到这个目标，硬件方面我们需要更大的天线有效面积，更好的冷却系统和更高效的后端。国内正在建造的五百米口径球面射电望远镜（Five hundred meter Aperture Spherical Telescope, FAST）将成为世界上最大的射电望远镜，计划建造的新疆奇台110米射电望远镜（Xingjiang Qitai 110m Radio Telescope, QTT）将成为世界上最大的全天可动射电望远镜。国际上还计划着下一代巨型射电望远镜阵列：平方千米阵（Square Kilometre Array, SKA），其有效面积可达一平方千米。这些新设备的加入将使脉冲星计时方法如虎添翼。

在新的设备建成之前，我们也可以利用新的算法来减小脉冲星的计时噪音。如1.3节所描述，人们在某些脉冲星中发现了脉冲轮廓的形状改变和自转减慢模式之间存在相关。这种相关可能普遍存在，因此我们通过检测脉冲轮廓的变化，就可以推测出脉冲星自转减慢率如何变化，进而扣除相应的计时噪音。这种做法会显著地降低脉冲星的红噪音。对于 PSR B1937+21 这样的脉冲星而言，在短时间内

其计时精度可以达到很高，而长时间内其计时噪音被红噪音主导，因此它在探测低频端引力波（ $\sim 0.1\text{year}^{-1}$ ）方面的价值就大打折扣了。如果我们证明用上述方法能够有效地消除红噪音，那么更多的像 PSR B1937+21 这样的脉冲星就可以被用来探测低频引力波，从而提高引力波被探测到的概率。

我们提出了一种方法，在不提高脉冲星观测次数的前提下，可以观测超过 Nyquist 频率的引力波。这个方法利用了脉冲星阵列中脉冲星的位置与其白噪音幅度的特定的函数关系。由于其指利用了白噪音的幅度信息，而不涉及相位，因此我们可以将脉冲星的计时残差进行白化后再使用。因此，传统上一些因含有红噪音而不能用来搜索引力波的脉冲星就有希望被纳入脉冲星计时阵列中。在计时阵列中纳入更多的脉冲星会有助于提高引力波探测的灵敏度与定位精度。

本文中仅仅对上述方法进行了原理性的展示。有些实际应用上的问题还亟需解决，例如：在文章中我们假设各个脉冲星之间由观测误差带来的白噪音幅度是互不相干的。可事实上，由于观测系统（前段和后端）的复杂因素，TOA 的标示不确定度往往不能真实地反映 TOA 的测量误差。这会导致仪器引起的测量误差无法被正确地扣除，从而使脉冲星的白噪音之间产生相关。这种相关对于探测引力波而言是一种污染。另外，我们目前只研究了对单一引力波源的测量，把同样的方法应用到引力波背景上也是一个未来会进行的研究。

上述两个工作都在试图提高脉冲星计时方法对引力波的测量频率。另外一种没有提到的方法就是对单个脉冲轮廓进行计时。我们在第二章曾经介绍过，由于单个脉冲轮廓信噪比太低，因此需要叠加许多脉冲轮廓，得到一个平均的、高信噪比的轮廓进行计时。这样做的弊端是，减少了 TOA 的数量，也就降低了 Nyquist 频率。如果我们可以通过增大望远镜接收器的面积、改进后端的方法提高单一脉冲轮廓的信噪比，我们就可以减少需要叠加的脉冲轮廓个数，从而提高 Nyquist 频率。甚至，我们可以用单个脉冲轮廓做计时，使可探测的引力波频率到达数百 Hz。这样，脉冲星计时对引力波的可探测范围就进入了 aLIGO 的范围。未来，将有希望让 aLIGO 探测的引力波事例不再像 GW150914 一样是孤证。

7.2 脉冲星计时噪声

我们研究了以下可能性，即脉冲星的长时标的红噪音起源于其磁倾角 χ 的演化。在这个工作中，我们考虑的脉冲星的减速力矩是磁偶极辐射与电流损失的叠加。我们发现， χ 的演化可以在计时残差中贡献一个额外的三次项和四次项。这两项由磁偶极辐射的制动效率、脉冲星磁层管中相对电流强度以及磁倾角决定。这个模型可以解释以下观测事实：a，年轻的脉冲星总是有正的 $\ddot{\nu}$, b，年老的脉冲

星的 $\ddot{\nu}$ 正负皆可; c, $\ddot{\nu}$ 的绝对值正比于 $-\dot{\nu}$; d, 制动指数的绝对值与脉冲星的特征年龄成正比。如果 χ 的演化单纯出自于转动轴的动力学改变, 则无法解释制动指数小于 3 的脉冲星, 因此在这种情况下, 磁倾角的演化应该被归因于磁场本身的改变。对比模型与观测, 我们得到结论, χ 的漂移方向应该在脉冲星的一生中震荡许多次。 χ 的演化不足以解释观察到的 Crab 脉冲星的转动行为, 因为观测到的 χ 于 χ 变化率与用我们的模型从计时残差中算出来的不同。

未来, 我们可以改进我们的模型, 在磁倾角的演化基础上再加上磁能的演化, 来解释更多的脉冲星计时残差形状。除此之外, 我们希望找到磁倾角演化背后的物理机制, 建立一个自洽的物理模型来解释红计时噪声。

附录 A 第六节中提到对Birkhoff定理让人引起误解的相关文献段落

- 1) H.C. Ohanian, Gravitation and Spacetime, New York & London: W.W. NORTON & COMPANY (1976), pp. 301:“It is a corollary of Birkhoff’s theorem that a spherically symmetric mass distribution produces no gravitational field inside an empty spherical cavity centered on the mass distribution. This result is of course well known in the Newtonian case... In the geometro-dynamic case, the Birkhoff theorem guarantees that the solution inside the cavity must be of the form given by ... Since an empty cavity cannot contain any singularities, ... hence the spacetime is flat inside the cavity.”
- 2) M. Harwit, Astrophysical Concepts, Fourth Edition, New York: Springer Science+Business Media, LLC, (2006), pp.443:“For any spherically symmetric distribution of matter in spherically symmetric motion, the dynamics within a central sphere always remain unaffected by the distribution outside. This result, which is also valid in general relativity and has the most wide-ranging consequences, is attributed to George Birkhoff, who first showed its generality in what has come to be known as Birkhoff’s theorem.”, and pp.573:“This metric defines the trajectories of particles and the paths along which light beams propagate in an empty Universe surrounding a point mass. The significance of this metric, however, is far greater, as demonstrated in a powerful theorem derived by the mathematician George D. Birkhoff in 1923. Birkhoff showed that a metric of precisely the Schwarzschild form must hold in empty space surrounding any spherically symmetric mass distribution M , even when this empty space itself is embedded in a larger, spherically symmetric distribution of matter. Moreover, he showed that this metric must be static, invariant in time.
- 3) S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, New York: Basic Books (1977), pp.37:“According to Birkhoff’s theorem, in any system that is spherically symmetric around some point, the metric in an empty ball centered on this point must be that of flat space. This holds whatever is happening outside the empty ball, as long as it is spherically symmetric.”, and p-

p.421:“According to the Birkhoff theorem, the metric and the equations of motion of a freely falling test particle inside the sphere are independent of what is happening outside the sphere, and are therefore the same as in a homogeneous isotropic universe, described by a Robertson-Walker metric, with a density..., and a curvature constant that is not in general equal to the cosmological curvature constant K ”.

- 4) V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, Sao Paulo: Cambridge University Press (2005), p-p.9:“We assume the net effect on a particle within the sphere due to the matter outside the sphere is zero, a premise that is ultimately justified by Birkhoff’s theorem in General Relativity.”
- 5) J.A. Peacock, *An Introduction to the Physics of Cosmology*, in *Modern Cosmology*, S. Bonometto, V. Gorini & U Moschella (eds), Bristol & Philadelphia: Institute of Physics Publishing (2002), pp.22:“The Newtonian result that the gravitational field inside a uniformshell is zero does still hold in general relativity, and is known as Birkhoff’s theorem., and pp.30:“Now look at the same situation in a completely different way. If the particle is nearby compared with the cosmological horizon, a Newtonian analysis should be valid: in an isotropic universe, Birkhoff’s theorem assures us that we can neglect the effect of all matter at distances greater than that of the test particle, and all that counts is the mass between the particle and us.”
- 6) P. Coles, F. Lucchin, *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, Second Edition, West Sussex, England: John Wiley & Sons, Ltd, (2002), pp.24:“Birkhoff’s theorem can also be applied to the field inside an empty spherical cavity at the centre of a homogeneous spherical distribution of mass-energy, even if the distribution is not static. In this case the metric inside the cavity is the Minkowski (flat-space) metric:... This corollary of Birkhoff’s theorem also has a Newtonian analogue: the gravitational field inside a homogeneous spherical shell of matter is always zero. This corollary can also be applied if the space outside the cavity is infinite: the only condition that must be obeyed is that the distribution of mass-energy must be spherically symmetric.”
- 7) C. Grupen, *Astroparticle Physics*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer (2005), p-p.178:“Another non-trivial consequence of the $1/r^2$ force is that the galaxies outside the sphere do not matter. Their total gravitational force on the test galaxy is zero. In

Newtonian gravity these properties of isotropically distributed matter inside and outside a sphere follow from Gauss's law for a $1/r^2$ force. The corresponding law holds in general relativity as well, where it is known as Birkhoff's theorem."

- 8) R. Ferraro, Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity, New York: Springer Science+Business Media, LLC, (2007), pp.244: "In 1923, Birkhoff proved that Schwarzschild solution is the only spherically symmetric vacuum solution. Therefore the interval can also be applied inside a spherically symmetric hollow shell. But in such a case there is no reason for the existence of a geometric singularity at the center of symmetry, what forces to choose the integration constant M equal to zero. The space-time inside the shell has Minkowski geometry."
- 9) J.A. Peacock, Cosmological Physics, Cambridge: Cambridge University Press (1998), pp.58: "How exactly does a black hole form once a body has become unable to support itself against its own gravity? The main features of the problem may be understood by studying the simplest possible situation: the collapse of a star that is taken to be a uniform pressureless sphere. The symmetry of the situation simplifies things considerably, as does Birkhoff's theorem, which tells us that any vacuum solution of the field equations for a spherically symmetric mass distribution is just the Schwarzschild solution, so that the field inside a spherical cavity vanishes. The metric outside the surface of the collapsing star is thus the Schwarzschild form.", and pp.73: "In fact, the result that the gravitational field inside a uniform shell is zero does hold in relativity, and is known as Birkhoff's theorem."
- 10) P.J.E. Peebles, Physical Cosmology, Princeton: Princeton University Press (1971), p-p.11: "Now imagine that at some place there is drawn a spherical volume, radius P, and that all the matter within the sphere is temporarily removed and set to one side. What will be the curvature of space within the evacuated sphere? The answer is a generalization of Newton's theorem that within a hollow iron sphere the gravitational field due to the sphere vanishes. The analogous statement in general relativity is that within a hollow centrally symmetric system space is flat. This is a trivial application of Birkhoff's theorem."
- 11) P.J.E. Peebles, Principles of Physical Cosmology, Princeton: Princeton University Press

(1993), pp.63:“Birkhoff’s theorem says that for a spherically symmetric distribution of matter, Einstein’s field equations have a unique solution (apart from the usual freedom of coordinate transformations). If space is empty in some region that includes the point of symmetry, the solution in this empty hole is the flat spacetime of special relativity.”, and pp.75:“The acceleration of the radius of the sphere is given by the Newtonian equation (D.24), because Birkhoff’s theorem says the material outside the sphere cannot have any gravitational effect on the behavior of what is inside.”

参考文献

- Abbott, B. P., Abbott, R., Adhikari, R., et al. 2009, Reports on Progress in Physics, 72, 076901
- Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., et al. 2016, Physical Review Letters, 116, 061102
- Abdo A. A. et al., 2013, ApJS, 208, 17
- Alpar M. A., Chau H. F., Cheng K. S., Pines D., 1993, , 409, 345
- Anholm M., Ballmer S., Creighton J. D. E., Price L. R., Siemens X., 2009, Phys. Rev. D, 79, 084030
- Archibald R. F. et al., 2013, Nature, 497, 591
- Arons J., Barnard J. J., 1986, ApJ, 302, 120
- Arons J., Scharlemann E. T., 1979, ApJ, 231, 854
- Asseo E., 1993, MNRAS, 264, 940
- Arzoumanian, Z., Brazier, A., Burke-Spolaor, S., et al. 2014, Apj, 794, 141
- Arzoumanian, Z., Brazier, A., Burke-Spolaor, S., et al. 2016, , 821, 13
- Baade, W., & Zwicky, F. 1934, Physical Review, 46, 76
- Babak S., Sesana A., 2012, Phys. Rev. D, 85, 044034
- Backer D. C., Kulkarni S. R., Heiles C., Davis M. M., Goss W. M., 1982a, Nature, 300, 615
- Backer D. C., Kulkarni S. R., Heiles C., Davis M. M., Goss W. M., 1982b, Nature, 300, 615
- Barsukov, D. P., Polyakova, P. I., & Tsygan, A. I. 2009, Astronomy Reports, 53, 1146
- Baym G., Pethick C., Pines D., 1969, Nature, 224, 673
- Begelman M. C., Blandford R. D., Rees M. J., 1980, Nature, 287, 307
- Beloborodov A. M., 2009, ApJ, 703, 1044
- Beskin V. S., Gurevich A. V., Istomin Y. N., 1993, Physics of the pulsar magnetosphere. Cambridge University Press
- Beskin, V. S., & Nokhrina, E. E. 2007, Astrophysics and Space Science, 308, 569
- Bethe H. A., 1990, Reviews of Modern Physics, 62, 801
- Bhattacharya D., van den Heuvel E. P. J., 1991, Physics Reports, 203, 1
- Bhattacharya D., Wijers R. A. M. J., Hartman J. W., Verbunt F., 1992, A&A, 254, 198
- Bisnovatyi-Kogan G. S., Komberg B. V., 1974, Soviet Ast., 18, 217
- Bisnovatyi-Kogan G. S., Seidov Z. F., 1970, Soviet Ast., 14, 113
- Boynton P. E., Groth E. J., Hutchinson D. P., Nanos, Jr. G. P., Partridge R. B., Wilkinson D. T., 1972, ApJ, 175, 217
- Caballero I., Wilms J., 2012, Mem. S.A.It., 83, 230
- Chen K., Ruderman M., 1993, ApJ, 402, 264
- Chen, W. C., & Li, X. D. 2006, A&A, 450, L1
- Cheng K. S., Ho C., Ruderman M., 1986, ApJ, 300, 500
- Cocke W. J., Disney M. J., Taylor D. J., 1969, Nature, 221, 525
- Cognard I., Bourgois G., Lestrade J.-F., Biraud F., Aubry D., Darchy B., Drouhin J.-P., 1995, A&A, 296, 169

- Coles W., Hobbs G., Champion D. J., Manchester R. N., Verbiest J. P. W., 2011a, MNRAS, 418, 561
- Coles W., Hobbs G., Champion D. J., Manchester R. N., Verbiest J. P. W., 2011b, MNRAS, 418, 561
- Coles P, Lucchin F, Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure, Second Edition, West Sussex, England: John Wiley & Sons, Ltd, (2002), pp.24
- Contopoulos, I., & Spitkovsky, A. 2006, ApJ, 643, 1139
- Corbin V., Cornish N. J., 2010, preprint (arXiv: 1008.1782)
- Cordes J. M., 1978, ApJ, 222, 1006
- Cordes J. M., Lazio T. J. W., 2002, ArXiv Astrophysics e-prints
- Cordes J. M., Wolszczan A., Dewey R. J., Blaskiewicz M., Stinebring D. R., 1990, ApJ, 349, 245
- Danilenko A., Kirichenko A., Mennickent R., Pavlov G., Shibanov Y., Zharikov S., Zyuzin D., 2012, A&A, 540, A28
- Deller A. T., Verbiest J. P. W., Tingay S. J., Bailes M., 2008, ApJL, 685, L67
- Detweiler, S. 1979, ApJ, 234, 1100
- Demorest P. B. et al., 2013a, ApJ, 762, 94
- Demorest P. B. et al., 2013b, ApJ, 762, 94
- Deng X., Finn L. S., 2011, MNRAS, 414, 50
- Detweiler S., 1979, ApJ, 234, 1100
- Deutsch A. J., 1955, Annales d'Astrophysique, 18, 1
- Du, Y. J., Qiao, G. J., & Wang, W. 2012, ApJ, 748, 84
- Dyks, J., & Rudak, B. 2003, ApJ, 598, 1201
- Edwards R. T., Hobbs G. B., Manchester R. N., 2006, , 372, 1549
- Ellis J. A., Siemens X., Creighton J. D. E., 2012, ApJ, 756, 175
- Erber T., 1966, Reviews of Modern Physics, 38, 626
- Espinoza C. M., Lyne A. G., Stappers B. W., Kramer M., 2011, MNRAS, 414, 1679
- Espinoza, C. M. 2013, IAU Symposium, 291, 195
- Ferraro R, Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity, New York: Springer Science+Business Media, LLC, (2007), pp.244
- Fichtel C. E., Hartman R. C., Kniffen D. A., Thompson D. J., Ogelman H., Ozel M. E., Turner T., Bignami G. F., 1975, ApJ, 198, 163
- Foster R. S., Cordes J. M., 1990, ApJ, 364, 123
- Fruchter A. S. et al., 1990, ApJ, 351, 642
- Giacconi R., Gursky H., Kellogg E., Schreier E., Tananbaum H., 1971, ApJL, 167, L67
- Gil J., Gronkowski P., Rudnicki W., 1984, A&A, 132, 312
- Gold T., 1968, Nature, 218, 731
- Goldreich P., Julian W. H., 1969, ApJ, 157, 869
- Goldreich P., Reisenegger A., 1992, ApJ, 395, 250

- Groth, III E. J., 1971, PhD thesis, PRINCETON UNIVERSITY.
- Grupen C, Astroparticle Physics, Berlin, Heidelberg, New York: Springer (2005), pp.178
- Guillemot L. et al., 2013, ApJ, 768, 169
- Gunn J., Ostriker J., 1970, ApJ, 160, 979
- Haensel, P., Urpin, V. A., & Iakovlev, D. G. 1990, A&A, 229, 133
- Haensel P., Potekhin A., Yakovlev D., 2006, Neutron Stars 1: Equation of State and Structure, Astrophysics and Space Science Library. Springer
- Han J., 1997, A&A, 318, 485
- Harding A. K., Contopoulos I., Kazanas D., 1999, ApJL, 525, L125
- Harding A. K., Muslimov A. G., 1998, in Neutron Stars and Pulsars: Thirty Years after the Discovery, Shibasaki N., ed., p. 311
- Harding, A. K., Stern, J. V., Dyks, J., & Frackowiak, M. 2008, ApJ, 680, 1378
- Harwit M, Astrophysical Concepts, Fourth Edition, New York: Springer Science+Business Media, LLC, (2006), pp.443, pp.573
- Haensel, P., Urpin, V. A., & Iakovlev, D. G. 1990, A&A, 229, 133
- Hellings R. W., Downs G. S., 1983a, ApJL, 265, L39
- Hewish A., Bell S. J., Pilkington J. D. H., Scott P. F., Collins R. A., 1968, Nature, 217, 709
- Heyl J. S., Kulkarni S. R., 1998, ApJL, 506, L61
- Hirotani K., 2015, ApJL, 798, L40
- Hobbs G., Edwards R., Manchester R., 2006a, Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics Supplement, 6, 020000
- Hobbs G., Lorimer D. R., Lyne A. G., Kramer M., 2005, MNRAS, 360, 974
- Hobbs G., Lyne A. G., Kramer M., 2010, MNRAS, 402, 1027
- Hobbs G., Lyne A. G., Kramer M., Martin C. E., Jordan C., 2004, MNRAS, 353, 1311
- Hobbs G. B., Edwards R. T., Manchester R. N., 2006b, , 369, 655
- Hollow N. J., 1973, Nature Physical Science, 246, 6
- Holt S., Ramaty R., 1970, Nature, 228, 351
- Hotan A. W., van Straten W., Manchester R. N., 2004a, , 21, 302
- Hotan A. W., van Straten W., Manchester R. N., 2004b, PASA, 21, 302
- Hou X. et al., 2014, A&A, 570, A44
- Hoyle F., Narlikar J. V., Wheeler J. A., 1964, Nature, 203, 914
- Hughes, S. A. 2009, ARA&A, 47, 107
- Hui L., McWilliams S. T., Yang I.-S., 2013, Phys. Rev. D, 87, 084009
- Hulse R. A., Taylor J. H., 1975, ApJL, 195, L51
- Jaffe A. H., Backer D., 2003a, in IAU Joint Discussion, Vol. 1, IAU Joint Discussion
- Jaffe A. H., Backer D. C., 2003b, ApJ, 583, 616
- Janssen G. H., Stappers B. W., Kramer M., Purver M., Jessner A., Cognard I., 2008, in American Institute of Physics Conference Series, Vol. 983, 40 Years of Pulsars: Millisecond Pulsars,

- Magnetars and More, Bassa C., Wang Z., Cumming A., Kaspi V. M., eds., pp. 633–635
- Jenet F. A., Hobbs G. B., Lee K. J., Manchester R. N., 2005, ApJL, 625, L123
- Jenet F. A. et al., 2006, ApJ, 653, 1571
- Jenet F. A., Lommen A., Larson S. L., Wen L., 2004a, ApJ, 606, 799
- Jenet F. A., Lommen A., Larson S. L., Wen L., 2004b, ApJ, 606, 799
- Jones, P. B. 1976, ApJ, 209, 602
- Jones, P. B. 1990, MNRAS, 246, 364
- Karuppusamy R., Stappers B., van Straten W., 2008, PASP, 120, 191
- Karuppusamy et al. R., in prep.
- Kaspi V. M., 2010, Proceedings of the National Academy of Science, 107, 7147
- Kaspi V. M., Taylor J. H., Ryba M. F., 1994, ApJ, 428, 713
- Keith M. J. et al., 2013, MNRAS, 429, 2161
- Keith M. J. et al., 2012, MNRAS, 424
- Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P., 1983, 220, 671
- Kolmogorov A., 1941, Akademiia Nauk SSSR Doklady, 30, 301
- Komesaroff M. M., 1970, Nature, 225, 612
- Kou, F. F., & Tong, H. 2015, MNRAS, 450, 1990
- Kramer, M., Lyne, A. G., O’Brien, J. T., Jordan, C. A., & Lorimer, D. R. 2006, Science, 312, 549
- Kramer M., Champion D. J., 2013, Classical and Quantum Gravity, 30, 224009
- Laffon H., Smith D. A., Guillemot L., for the Fermi-LAT Collaboration, 2015, ArXiv e-prints
- Landau L., 1932, Phys. Z. Sowjetunion, 1, 285
- Lee, K. J., Jenet, F. A., & Price, R. H. 2008, , 685, 1304-1319
- Lentati, L., Taylor, S. R., Mingarelli, C. M. F., et al. 2015, arXiv:1504.03692
- Lattimer J. M., Prakash M., 2007, Physics Reports, 442, 109
- Lee K. J., Wex N., Kramer M., Stappers B. W., Bassa C. G., Janssen G. H., Karuppusamy R., Smits R., 2011, MNRAS, 414, 3251
- Lin, J. R., & Zhang, S. N. 2004, ApJL, 615, L133
- Liu Y, Zhang S. N, Phys. Let. B. 679 (2009) 88
- Lommen A. N., 2002, in Neutron Stars, Pulsars, and Supernova Remnants, Becker W., Lesch H., Trümper J., eds., p. 114
- Lommen A. N., Backer D. C., 2001, ApJ, 562, 297
- Lorimer D. R., Kramer M., 2012, Handbook of Pulsar Astronomy. Cambridge University Press
- Lyne A., Hobbs G., Kramer M., Stairs I., Stappers B., 2010a, Science, 329, 408
- Lyne A. G., Manchester R. N., 1988, MNRAS, 234, 477
- Lyne, A., Graham-Smith, F., Weltevrede, P., et al. 2013, Science, 342, 598
- Lyne, A. G., Jordan, C. A., Graham-Smith, F., et al. 2015, MNRAS, 446, 857
- Maggiore M., 2007a, Gravitational Waves No. v. 1. Oxford University Press
- Manchester R. N., Hobbs G. B., Teoh A., Hobbs M., 2005, AJ, 129, 1993

- Maggiore M., 2007b, Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments, Gravitational Waves. OUP Oxford
- Manchester R. N., 2008, in American Institute of Physics Conference Series, Vol. 983, 40 Years of Pulsars: Millisecond Pulsars, Magnetars and More, Bassa C., Wang Z., Cumming A., Kaspi V. M., eds., pp. 584–592
- Manchester R. N. et al., 2013a, PASA, 30, 17
- Manchester R. N., IPTA, 2013, Classical and Quantum Gravity, 30, 224010
- Margon B., Mason K. O., Hawkins F. J., Sanford P. W., 1975, ApJL, 196, L51
- McHugh M. P., Zalamansky G., Vernotte F., Lantz E., 1996, Phys. Rev. D, 54, 5993
- McLaughlin M. A., 2013, Classical and Quantum Gravity, 30, 224008
- Melrose D. B., 1981, in IAU Symposium, Vol. 95, Pulsars: 13 Years of Research on Neutron Stars, Sieber W., Wielebinski R., eds., pp. 133–139
- Melrose D. B., 1992, Royal Society of London Philosophical Transactions Series A, 341, 105
- Merritt D., Ferrarese L., 2001, MNRAS, 320, L30
- Mestel L., 1971, Nature Physical Science, 233, 149
- Mestel L., Pryce M. H. L., 1992, MNRAS, 254, 355
- Mestel, L., Panagi, P., & Shibata, S. 1999, MNRAS, 309, 388
- Michel, F. C. 1982, Reviews of Modern Physics, 54, 1
- Michel F. C., Li H., 1999, Physics Reports, 318, 227
- Mignani R. P., 2011, Advances in Space Research, 47, 1281
- Mingarelli C. M. F., Grover K., Sidery T., Smith R. J. E., Vecchio A., 2012, Phys. Rev. Lett., 109, 081104
- Mingarelli C. M. F., Sidery T., Mandel I., Vecchio A., 2013, Phys. Rev. D, 88, 062005
- Mitra D., Wielebinski R., Kramer M., Jessner A., 2003, A&A, 398, 993
- Mukhanov V, Physical Foundations of Cosmology, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, Sao Paulo: Cambridge University Press (2005), pp.9
- Nolan P. L. et al., 2012, ApJS, 199, 31
- Ohanian H. C, Gravitation and Spacetime, New York & London: W.W. NORTON & COMPANY (1976), pp. 301
- Oppenheimer J. R, Snyder H, Phys. Rev. 56 (1939) 455
- Oster L., Sieber W., 1976, ApJ, 203, 233
- Özel F., Psaltis D., Narayan R., Santos Villarreal A., 2012, ApJ, 757, 55
- Pacini F., 1967, Nature, 216, 567
- Pacini F., 1968, Nature, 219, 145
- Pandharipande V. R., Pines D., Smith R. A., 1976, ApJ, 208, 550
- Papalios C., Carleton N. P., 1970, Nature, 228, 445
- Peacock J. A, An Introduction to the Physics of Cosmology, in Modern Cosmology, S. Bonometto, V. Gorini & U Moschella (eds), Bristol & Philadelphia: Institute of Physics Publishing (2002),

pp.22, pp.30

- Peacock J. A, Cosmological Physics, Cambridge: Cambridge University Press (1998), pp.58, pp.73
- Pethick C. J., Ravenhall D. G., Lorenz C. P., 1995, Nuclear Physics A, 584, 675
- Peebles P. J. E, Physical Cosmology, Princeton: Princeton University Press (1971), pp.11
- Peebles P. J. E, Principles of Physical Cosmology, Princeton: Princeton University Press (1993), pp.63, pp.75
- Phinney E. S., 2001a, ArXiv Astrophysics e-prints
- Phinney E. S., 2001b, preprint (arXiv:astro-ph/0108028)
- Phinney E. S., Blandford R. D., 1981, MNRAS, 194, 137
- Pletsch H. J. et al., 2012, , 744, 105
- Press W. H., Rybicki G. B., 1989, ApJ, 338, 277
- Radhakrishnan V., Cooke D. J., 1969, Astrophys. Lett., 3, 225
- Ramachandran R., Demorest P., Backer D. C., Cognard I., Lommen A., 2006, ApJ, 645, 303
- Rankin J. M., 1993, ApJ, 405, 285
- Romani R. W., 1996, , 470, 469
- Rookyard S. C., Weltevrede P., Johnston S., 2014, ArXiv e-prints
- Rookyard, S. C., Weltevrede, P., & Johnston, S. 2015, MNRAS, 446, 3367
- Rowe E. T., 1995, A&A, 296, 275
- Ruderman M. A., Sutherland P. G., 1975, ApJ, 196, 51
- Sang Y., Chanmugam G., 1987, ApJL, 323, L61
- Sazhin M. V., 1978, Soviet Ast., 22, 36
- Schutz K., & Ma C.-P. 2016, MNRAS, 459, 1737
- Segretain L., Chabrier G., 1993, A&A, 271, L13
- Seidelmann P. K., 1992, Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac. University Science Books, pp. 604–606
- Sesana A., 2012, ArXiv e-prints:1211.5375
- Sesana A., 2013, MNRAS, 433, L1
- Sesana A., Vecchio A., 2010, Phys. Rev. D, 81, 104008
- Sesana A., Vecchio A., Colacino C. N., 2008, MNRAS, 390, 192
- Sesana A., Vecchio A., Volonteri M., 2009, MNRAS, 394, 2255
- Shaddock, D. A. 2009, PASA, 26, 128
- Shannon, R. M., Ravi, V., Lentati, L. T., et al. 2015, Science, 349, 1522
- Shannon R. M. et al., 2013a, ApJ, 766, 5
- Shannon R. M. et al., 2013b, ApJ, 766, 5
- Shannon R. M. et al., 2013c, Science, 342, 334
- Shannon, R. M., Osłowski, S., Dai, S., et al. 2014, MNRAS, 443, 1463
- Sieber W., Oster L., 1977, A&A, 61, 445
- Smith D. A. et al., 2008, A&A, 492, 923

- Soglasnov V. A., Popov M. V., Bartel N., Cannon W., Novikov A. Y., Kondratiev V. I., Altunin V. I., 2004, ApJ, 616, 439
- Spitkovsky A., 2004, in IAU Symposium, Vol. 218, Young Neutron Stars and Their Environments, Camilo F., Gaensler B. M., eds., p. 357
- Sreekantan, B. V. 1984, Journal of Astrophysics and Astronomy, 5, 251
- Stigler S. M., 1989, Statist. Sci., 4, 73
- Stinebring D. R., Ryba M. F., Taylor J. H., Romani R. W., 1990, Phys. Rev. Lett., 65, 285
- Sturrock P. A., 1971, ApJ, 164, 529
- Sudou H., Iguchi S., Murata Y., Taniguchi Y., 2003, Science, 300, 1263
- Taylor J. H., Manchester R. N., 1977, ApJ, 215, 885
- Thrane, E., & Romano, J. D. 2013, Phys. Rev. D., 88, 124032
- Thompson C., Blaes O., 1998, Phys. Rev. D, 57, 3219
- Thompson C., Duncan R. C., Woods P. M., Kouveliotou C., Finger M. H., van Paradijs J., 2000, ApJ, 543, 340
- Thompson D. J., 2008, Reports on Progress in Physics, 71, 116901
- Thorsett S. E., Arzoumanian Z., Camilo F., Lyne A. G., 1999, ApJ, 523, 763
- van Haasteren R. et al., 2011a, , 414, 3117
- van Haasteren R. et al., 2011b, MNRAS, 414, 3117
- van Haasteren R. et al., 2012, MNRAS, 425, 1597
- van Straten W., Bailes M., 2011, PASA, 28, 1
- van Straten W., Demorest P., Oslowski S., 2012a, Astronomical Research and Technology, 9, 237
- van Straten W., Demorest P., Oslowski S., 2012b, Astronomical Research and Technology, 9, 237
- Venter C., Harding A. K., Guillemot L., 2009, , 707, 800
- Verbiest J. P. W., 2009, ArXiv e-prints
- Verbiest J. P. W. et al., 2009, MNRAS, 400, 951
- Verbiest J. P. W. et al., 2008, ApJ, 679, 675
- Viganò D., Torres D. F., Hirotani K., Pessah M. E., 2015, MNRAS, 447, 2631
- Watters, K. P., Romani, R. W., Weltevrede, P., & Johnston, S. 2009, ApJ, 695, 1289
- Weber, J. 1977, Nature, 266, 243
- Wen Z. L., Jenet F. A., Yardley D., Hobbs G. B., Manchester R. N., 2011, ApJ, 730, 29
- Wen Z. L., Liu F. S., Han J. L., 2009, ApJ, 692, 511
- Weinberg S, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, New York: Basic Books (1977), pp.37, pp.421
- Whelan, J., & Iben, I., Jr. 1973, , 186, 1007
- Wu, F., Xu, R. X., & Gil, J. 2003, A&A, 409, 641
- Wyithe J. S. B., Loeb A., 2003, ApJ, 590, 691
- Xie Y., Zhang S.-N., 2013, ArXiv e-prints
- Xu, R. X., & Qiao, G. J. 2001, ApJL, 561, L85

- Yardley D. R. B. et al., 2010, MNRAS, 407, 669
Yi S., Stappers B. W., Sanidas S. A., Bassa C. G., Janssen G. H., Lyne A. G., Kramer M., Zhang S.-N., 2014, MNRAS, 445, 1245
Zavlin V. E., 2007, ApJL, 665, L143
Zhang L., Cheng K. S., 1997, ApJ, 487, 370
Zhang L., Cheng K. S., 2003, A&A, 398, 639
Zhang B., Harding A. K., 2000, , 535, L51
Zhang, C. M., & Kojima, Y. 2006, , 366, 137
Zhang S., Xie Y., 2011, in Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 451, Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Qain S., Leung K., Zhu L., Kwok S., eds., p. 231
Zhang S.-N., Xie Y., 2012a, ApJ, 757, 153
Zhang S.-N., Xie Y., 2012b, ApJ, 761, 102
Zhao J.-H., Bower G. C., Goss W. M., 2001, ApJL, 547, L29
Zhu W., Kaspi V., Gonzalez M., Lyne A., 2009, ApJ, 704, 1321
Zhu X.-J. et al., 2014, MNRAS, 444, 3709
Zhu, X.-J., Wen, L., Hobbs, G., et al. 2015, MNRAS, 449, 1650

在学期间学术成果情况

期刊

- 1、“How to identify the gravitational wave events from merging stellar mass black binaries like GW150914?”: Shuang-Nan, Zhang; Yuan, Liu; **Shu-Xu, Yi**; Zigao, Dai; Chaoguang, Huang 2016, submitted to *A&A*.
- 2、“Detecting super-Nyquist frequency gravitational waves using pulsar timing array”: **Shu-Xu, Yi** & Shuang-Nan, Zhang 2016, *Science China, Physics, Mechanics & Astronomy*, July 2016, Vol. 59, No. 7.
- 3、“Understanding the residual patterns of timing solutions of radio pulsars with a model of magnetic field oscillation”: Xu-dong, Gao; Shuang-Nan, Zhang; **Shu-Xu, Yi** 2016, *MNRAS* 459, 402
- 4、“The evolution of the magnetic inclination angle as an explanation of the long term red timing-noise of pulsars”: **Shu-Xu, Yi** & Shuang-Nan, Zhang 2015, *MNRAS* 454, 3674.
- 5、“Radial Alignment of Elliptical Galaxies by the Tidal Force of the Galaxy Cluster Abell 2744”: Yu, Rong; **Shu-Xu Yi**; Shuang-Nan, Zhang 2015, *MNRAS* 451, 2536.
- 6、“X-ray softening during the 2008 outburst of XTE J1810-189”: Shan-Shan Weng; Shuang-Nan Zhang; **Shu-Xu Yi**; Yu, Rong; Xu-Dong, Gao 2015, *MNRAS*, 450, 2915.
- 7、“Limits on the Strength of Individual Gravitational Wave sources using High-cadence Observations of PSR B1937+21”: **Shuxu, Yi**; Ben, Stappers; Sotirios, Sanidas; Cees, Bassa; Gemma, Jassen; Andrew, Lyne et al. 2014, *MNRAS*, 445, 1245.

会议文集

- 8、“Correlation between the Gamma-Ray Luminosity and the Light Cylinder Magnetic Field Strength of Fermi-LAT Pulsars”: Shuang-Nan Zhang, **Shuxu, Yi**, Xian Hou, Jian Li 2015, *IAU General Assembly, Meeting #29, id.2257013*
- 9、“Improving the sensitivity of gravitational wave detection by applying a magnetic field evolution model to high cadence observational data of millisecond radio pulsars”: Shuang-Nan Zhang & **Shuxu, Yi** 2014, *40th COSPAR Scientific Assembly. Held 2-10 August 2014, in Moscow, Russia, Abstract E1.20-4-14.*
- 10、“Magnetic field evolution of Fermi gamma-ray millisecond pulsars”: Shuang-

Nan Zhang, Yi, Xie, **Shuxu, Yi** 2014, *40th COSPAR Scientific Assembly. Held 2-10 August 2014, in Moscow, Russia, Abstract E1.20-4-14.*

11、“On a Common Misunderstanding of the Birkhoff Theorem and Light Deflection Calculation: Generalized Shapiro Delay and its Possible Laboratory Test”: Shuang-Nan Zhang & **Shuxu, Yi** 2012, *International Journal of Modern Physics Conference Series*, 12, 419.

简 历

基本情况

易疏序，1988年8月出生于北京。



教育状况

- 2010年9月至2016年6月，中国科学院高能物理研究所，硕博连读研究生
专业：粒子物理与原子核物理。
方向：高能天体物理。
- 2006年8月至2010年7月，清华大学理学院物理系，理学学士
专业：数理基础科学。

研究兴趣

中子星，引力波，宇宙学

联系方式

- 通讯地址：北京市石景山区 19 号乙，
中国科学院高能物理研究所，计算中心 122 室
- 邮编：100049
- E-mail：yisx@ihep.ac.cn

致 谢

一两年以后，也许我的某位师弟或者师妹在科研上遇到了困难和挫折。当他/她翻出了这本博士论文时，除去专业的知识以外可能还会得到一丝鼓励和慰藉；几十年后，当夕阳从阳台洒进来时，我翻出这本博士论文，回想科研生涯刚刚起航的岁月，一个个课题背后的酸甜苦辣；一百年以后，当未来的某个人从国家图书馆冰冷的数据库中调出这篇博士论文，他会在这看到在那些已经过时的古董研究背后的喜怒哀乐，和一个个对此付出帮助的有血有肉的人。以上，就是我写下这一章的意义。

和张双南老师结缘，是在大学三年级。我去找张双南老师要一个本科生的科研课题。我对张老师说，我对广义相对论感兴趣，于是他给了我刘元的一篇文章的初稿，就是未来发表在 Physics Letter B 上的那篇尘埃壳层自由落向黑洞精确解的文章。张老师叫我把刘元文章的工作重复一遍。在学期结束时，我完成了这个工作。张老师于是很高兴，让我把这篇文章关于 Schwarzschild 黑洞的结果推广到 Kerr 黑洞上。这回，我可碰了钉子。在文献和草稿纸的苦海中挣扎了一个学期后，我交了白卷。但张双南老师也没有显得失望，还欣然同意指导我，在刘元的工作基础上做一些计算，完成了我的本科毕业设计。

在向高能所推荐我做硕博连读研究生的时候，我从张老师给我写的推荐信里见到了我上清华大学以来最好的评语。我十分吃惊，又备感振奋。我就暗下决心，不要让张老师失望。张双南老师作为我的博士导师，对我的帮助难以胜数，但对我影响最为深刻的是他对我的鼓励，和我由此建立起的信心。

来到高能所后，张老师和我希望在之前本科毕业设计的基础上再进行一些计算，写一篇文章发表。为此，我和张老师，刘元，还有当时张老师的博士后 Neda 进行了许多的讨论。那时刘元刚刚博士毕业，已经在高能所工作了。在广义相对论的概念和计算上，他对我提供了很大的帮助。完成那篇文章后，刘元有一天问我：“易疏序，你接下来想做什么课题？是理论，还是观测，还是数值计算？”虽然上了一年的基础课，组会也听了那么多，但那时我还是对天文研究一无所知，所以对刘元的问话不知如何回答。不知是出于惯性，还是物理系学生的“理论物理癖”，我回答说我还要做广义相对论的理论研究。刘元听后说，那太难了。而且我们组在这方面是没有什么经验的，包括他自己。因此他建议我去

找一个更加天文一点的课题。

我找到张双南老师，问他能不能给我一个新的课题做。张老师就很快召开了一次组会，在组会上他打开了一个 word 文档，里面列了十几个课题，为下面的学生们一一讲解这些课题的意义，希望我们想做新课题的从里面选。那时我开始意识到，张双南组的文化标签是：新奇课题、多元方向和自由开放的研究过程。我看中了一个星系团中星系受潮汐力作用是否能产生径向分布的课题。我大约用了三个月的时间完成了理论部分的计算和模拟，上海天文台的涂红老师作为这篇文章的合作作者，为我们提供 HST 对星系团的观测数据。对我提出的问题她都通过邮件耐心的解答，对我和张老师提出的新的数据处理方面的要求，她也很快完成了。在涂红老师的帮助下文章很快就写好了。但随后受到的审稿意见却让我如凉水浇头。接下来的一年中，我们为了完成审稿人的要求，反复地修改文章。越是修改，就越是觉得这个课题超出了我们的能力，原来那种信心满满的感觉渐渐被忧虑取代。那段时间我的心情也非常糟糕，几乎每天都在焦虑和抱怨不能发表文章。若不是我每周都能回家见到父母感受家庭的温暖，我真怕会得了抑郁症。

后来我得到通知，国家留学基金委员会资助我们出国去做联合培养博士。我就想，这也许是一个好机会，让我放弃这个做不下去的课题，重新开始一个新的课题。那时候，我恰好听了许多关于引力波的讲座。因为我之前对广义相对论的兴趣，我决定要做引力波方面的研究。于是我鼓起勇气找到张老师，说我想做引力波的研究，想出国做联合培养。没想到张老师一下子就答应了，还为我指明了道路：脉冲星计时测量引力波。这是一条把引力波研究和张老师擅长的中子星研究结合起来的好方法。接下来，张老师帮我联系了曼彻斯特大学的 Ben Stappers，并且在我愚蠢地错过申请国家留学基金后，依然在经济上资助我，最终让我实现了出国联合培养的愿望。

在英国这一年让我眼界大开，也奠定了我博士论文的基础。曼彻斯特大学的脉冲星组在脉冲星方面经验极其丰富。这个组的领导人 Ben Stappers 在我刚刚到英国的时候和我谈了谈我想做的事情，然后说刚好 Lovell 望远镜刚刚完成了一些新的观测，希望我来处理这些数据，并且用这些新的观测来给引力波一个新频率范围的上限。我很感谢他帮我找到这样一个课题。尽管 Ben 总是很忙，但每当我执着地把他堵在办公室里后，与他的讨论总让我受益匪浅。他还让我把工作的成果做成海报去泰国参加 IPTA 的会议，让我认识了世界上做脉冲星最好的那些人。

脉冲星组里的博士生和博士后们都是良师益友。Gemma Jassen, Cess Bassa 教会了我使用 PSRCHIVE 和 TEMPO2; 在 linux 方面, Dan Thornton 对我的问题是求必应。特别是 Sotiris Sanidas 博士, 他作为脉冲星组里的理论担当, 对我文章里的理论部分进行了把关, 并且和我反复地一丝不苟地辩论。以至于有几次坐在一旁的 Monika 以为我们要打起来了。Monika 每周二无偿地开车带我去很远很远的 Jodrell Bank 开组会, 为我每周都节省十几磅的火车票。

Michael Kramer 教授作为这篇文章的合作者也对这篇文章的修改提出了许多宝贵意见, 特别是如何回复审稿人的问题上。在那段岁月里, 我还特别感谢室友薛宇, 他的南北大菜让我忘记了身在异国他乡。

一年后, 我回到了高能所。那时谢祎正在做中子星磁层的演化课题, 在张老师的建议下, 我们开始了合作, 希望给中子星的计时噪声找到一个磁场演化方面的起源。谢祎师兄温文尔雅, 而且颇有耐心并且特别能够聆听别人的意见。于此同时, 星系团这个课题由容昱师兄接手了, 我又在这个课题上和容昱开始了合作。如果和谢祎的讨论是如沐春风, 那么每次和容昱的讨论都像经历疾风骤雨。容昱讨论科学问题非常直接, 而且刨根问底, 有时甚至显得暴躁, 我常常讨论得提心吊胆, 生怕被他揍一顿。不过在这种高强度的“质询下”, 我们发现了之前文章版本中的一些错误, 并且在星系团的问题上最终取得了突破, 成功地发表了文章。随后, 容昱凭借着他对天文活跃的思维又把星系团指向分布这个课题发扬光大, 最终变成一本博士论文, 使由我开始的那个课题没有半途而废, 这一点上, 我也很感谢他。

在张双南组, 廖进元是统计学专家。因为我没有上过数理统计的课程, 所以文章中所有的涉及到数理统计的内容都是跟廖师兄讨论学会的。从他的博士论文里, 我学会了极大似然和 Bayes 方法的区别; 在平时聊天时, 我知道了 p 值的真正意义。隔壁张澍组的纪龙同学是我编程、尤其是 python 方面的老师。那时我擅长的语言是 C, 我们曾独立地写了两个石头剪子布的 AI, 我用 C, 他用 python 然后对战, 结果是我的算法更胜一筹, 不过那也是我第一次近距离地接触 python 的代码。从那以后, 每当我遇到 python 的问题的时候, 我就打电话给他请教。虽然我们不在一个办公室, 但有时我们会一起去吃饭, 在路上讨论些 X 射线中子星的有趣问题。

我们组的尹倩青师弟是个很有趣的人。他时常在办公室聊些有关历史的话题, 说其实他一开始想学考古。和他一起聊天, 我们时常谈一些天文以外的事情, 比如社会上的各行各业, 比如中国的大好山河等等。贺健健同学是我们组唯一

的女生，她经常提醒我们不要做书呆子和宅男，我认为她的这些努力的确使本组的宅男倾向得到了一定的缓解。

2015 年我在澳大利亚开会的时候，我遇到李珂伽。那时他已经是教授了，但由于他长得非常的年轻，我始终不习惯叫他李老师，而是冒失地叫他“珂伽”。他是一个天才，与他每一次讨论都让我感觉非常愉快。于是我在 2016 年初到他的组里进行了一个月的访问。他希望我能和他一起，把一个新的快速傅里叶变换的算法应用到脉冲星的搜索上面。在工作了一个月以后，我们取得了一些进展。但这个事情被后来我去新疆访问以及随之而来的另一个课题中断了。

在新疆天文台的访问也是一段非常难忘的经历。记得刚到那里的时候，袁建平老师拿出了一张纸，上面画着十几颗脉冲星的计时残差，他让我从中选一颗来合作研究。我看中了 J0953+0755，因为它的 15 年计时残差看起来非常特别，像一个不断增大的正弦。我发现可以用 face on 的黑洞-中子星双星系统解释这个残差，于是我和袁老师与张老师兴冲冲地写了一篇文章，投到了 Nature. 结果 Nature 找的匿名专家告诉我们，Jodrell Bank 对这颗脉冲星有 40 多年的观测，这些更长时间的观测并不支持我们的模型。从极度兴奋到郁闷，真像过山车一般。

感谢为本论文提出宝贵修改意见的韩金林教授，张承民教授和李珂伽教授。他们指出了本文初稿中的一些错误，并让本文的内容更加充实。

最后感谢我的王晓鸣，她的出现结束了 137 亿年的黑暗。我爱她，直到质子衰变([Sreekantan 1984](#))！

宇宙是深邃、寒冷、黑暗的，然而有了上面这些人们的帮助和陪伴，我对它的探索之路并不孤独。