1.

(a)

Consider $x[n]$ is a bounded input sequence satisfying $|x[n]| \leq M_x < \infty$.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$\Rightarrow |y[n]| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]x[n-k]|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$$

$$\leq M_x \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|$$

For the system to be stable, $y[n] < \infty$.

This condition will be satisfied when $\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty$.

(b)

Our goal is to verify $\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}\right| < \infty$.

$$\because \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} \left|h[k]e^{-j\omega k}\right| < \infty$$

$$\therefore \left|H(e^{j\omega})\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left|h[k]e^{-j\omega k}\right| < \infty$$

(c)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

We assume $z = re^{j\omega}$.

$$H(re^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(re^{j\omega})\big|_{r=1} = H(z)|_{|z|=1}$$

$$\Rightarrow \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H(z)|_{|z|=1}\right| < \infty$$

(d)

$$\because \begin{cases} \text{ROC of a causal system is } |z| > |\lambda_{\max}| \\ \text{ROC of a causal BIBO stable system includes the unit circle} \end{cases}$$

$\therefore$ ROC of a causal BIBO stable system is $|z| > 1$

$\Rightarrow$ no pole in the $|z| > 1$

$\Rightarrow$ all poles strictly inside $|z| = 1$

2.

IIR 濾波器

(1)IIR 濾波器的優點在於，其設計可以直接利用類比濾波器設計的成果，因為類比濾波器本身就是無限長脈衝響應的。換句話說，若是有一個類比濾波器，可以很直接地設計出 IIR 濾波器。

(2)通常 IIR 濾波器設計的過程如下：首先根據濾波器參數要求設計對應的類比濾波器（如巴特沃斯濾波器、切比雪夫濾波器等等），然後通過映射（如脈衝響應不變法、雙線性映射等等）將類比濾波器變換為數位濾波器，從而決定 IIR 濾波器的參數。

(3)IIR 濾波器的重大缺點在於，由於存在回饋其穩定性不能得到保證。另外，回饋還使 IIR 濾波器的數位運算可能溢出，即 Z 轉換後極點有可能超出單位圓之外。

FIR 濾波器

(1)FIR 濾波器最重要的優點就是由於其脈衝響應之長度有限，輸入有限長度訊號輸出的也會是有限長度，Z 轉換後全部極點都在單位圓內，相較於 IIR 是一個穩定的系統。

(2)由於不需要回饋，在 FIR 濾波器中要做最佳化(optimize)也比 IIR 濾波器簡單。

(3)FIR 濾波器的缺點在於相較於可以直接取樣類比濾波器設計的 IIR 濾波器來說設計較為不易。

(4)此外它的性能不如同樣階數的 IIR 濾波器，不過由於數位計算硬體的飛速發展，這一點已經不成為問題。再加上引入計算機輔助設計，FIR 濾波器的設計也得到極大的簡化。基於上述原因，FIR 濾波器比 IIR 濾波器的應用更廣。

3.

(a)

1 pole at $z=\infty$ and 3 poles at $z=0$

(b)

Because $|h[n]|<\infty$ and sequence length N is finite,

$$\sum_{n=0}^{N-1}|h[n]|<\infty$$

(c)

Type 3 FIR filter satisfies

$$h[n]=-h[N-n], 0\leq n\leq N$$

e.g.

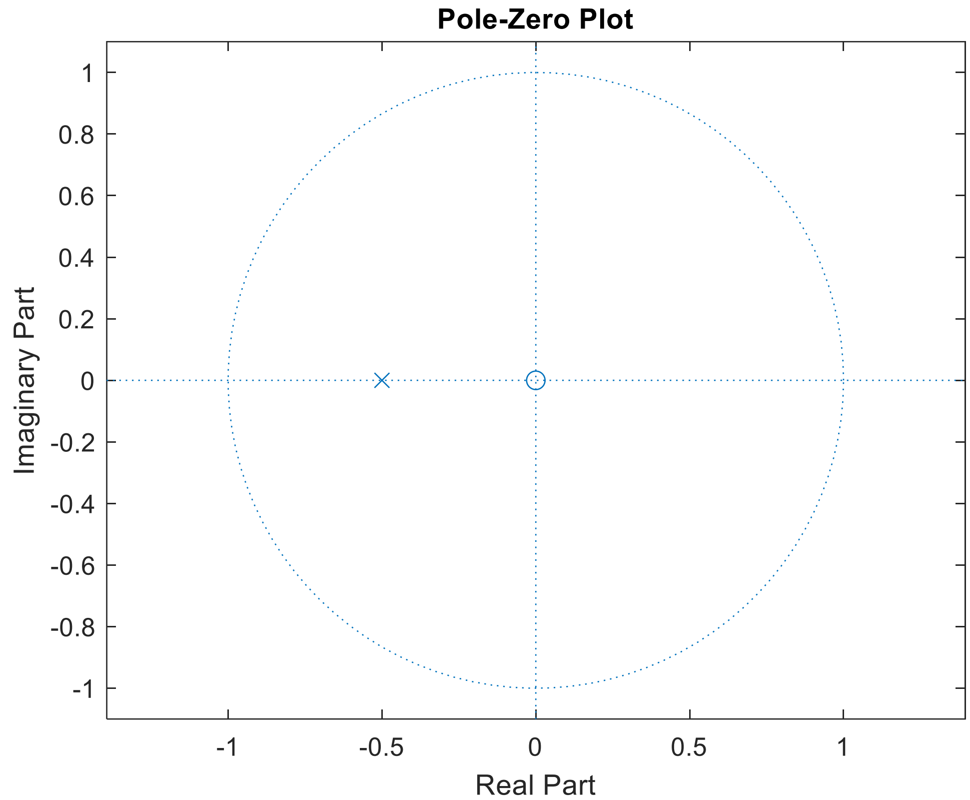
Assume $N=8$

$H(z)=z^{-4}\{h[0](z^4-z^{-4})+h[1](z^3-z^{-3})+h[2](z^2-z^{-2})+h[3](z-z^{-1})\}$

$H(-1)=H(1)=0$

(d)

1 pole at $z=-0.5$ and 1 zero at $z=0$



$$1 - 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2} - \cdots$$

$$1 + 0.5z^{-1} \,\overline{)\, 1 \qquad\qquad\qquad}$$

$$1 + 0.5z^{-1}$$

$$-0.5z^{-1}$$

$$-0.5z^{-1} - 0.25z^{-2}$$

$$0.25z^{-2}$$

$$0.25z^{-2} + 0.125z^{-3}$$

$$-0.125z^{-3}$$

$$\vdots$$

$$h[n] = (-0.5)^n u[n]$$