Лабораторна робота №1

Завдання №1 (Варіант 6)

Маємо рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = y^2 + y + x$.

In[217]:=

```
f[x_, y_] := y^2 + y + x
```

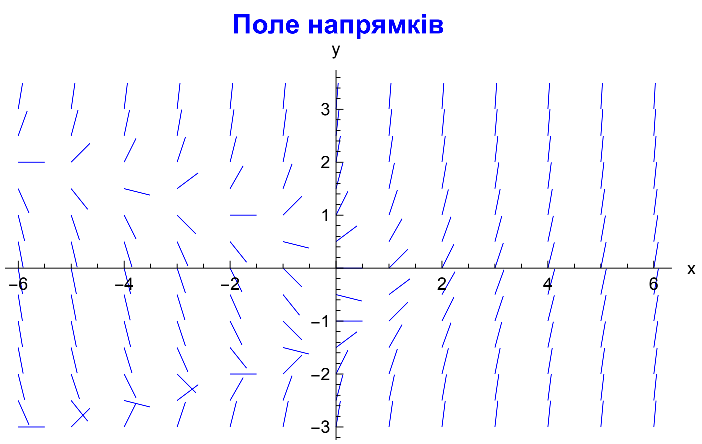
1)

In[219]:=

```
Graphics[{Blue, Arrowheads[0], Table[Module[{f = y^2 + y + x, dt = 0.5},
    With[{dir = {1, f} / Sqrt[1 + f^2]}, Arrow[{{x, y}, {x, y} + dt * dir}]]],
   {x, -6, 6, 1}, {y, -3, 3, 0.5}]}, Axes → True, AxesLabel → {"x", "y"},
 PlotLabel → Style["Поле напрямків", 14, Bold, Blue]]
```

графіка · синій · наконечники · табл··· · програмний модуль · використовуючи · квадратний корінь · стрілка · осі · істина · позначення на осях · позначка граф··· · стиль · жирн··· · синій

Out[219]=



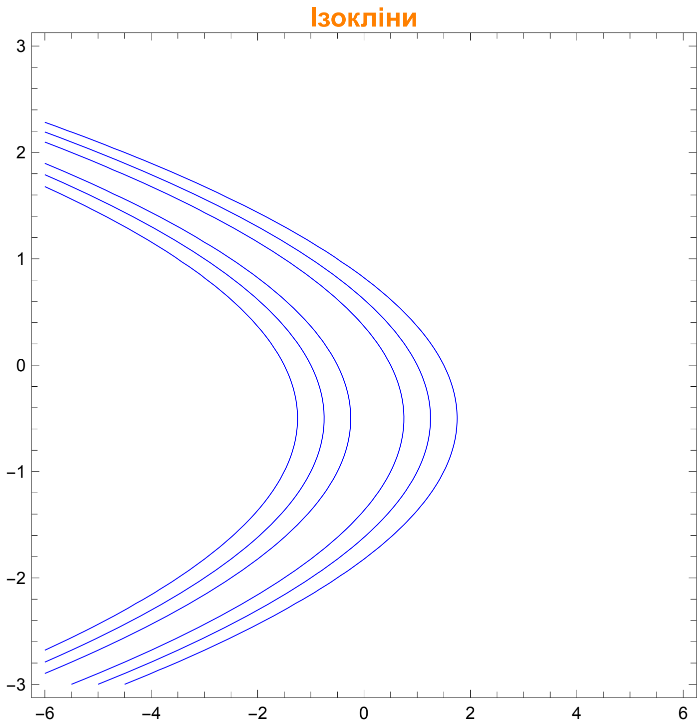
2)

In[220]:=

```
ContourPlot[y^2 + y + x, {x, -6, 6}, {y, -3, 3},
  Contours → {-1 / 2, 1 / 2, 1, -1, -3 / 2, 3 / 2},
  ContourStyle → {Blue}, ContourShading → None,
  PlotLabel → Style["Ізокліни", 14, Bold, Orange], AxesLabel → {"x", "y"}]
```

контурний графік; контури; контурний стиль; синій; зафарбовування кон···; жодного / відсутній; позначка гра···; стиль; жирн···; помаран···; позначення на осях

Out[220]=

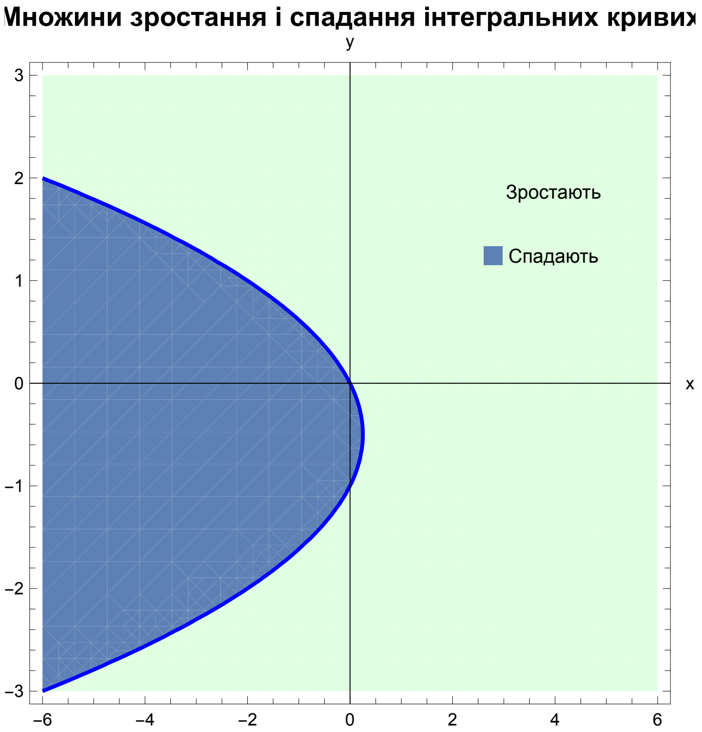


3)

In[221]:=

```
Show[RegionPlot[f[x, y] > 0, {x, -6, 6}, {y, -3, 3}, PlotStyle → LightGreen,
  BoundaryStyle → None, PlotLegends → Placed[{"Зростають"}, {0.8, 0.8}]],
 RegionPlot[f[x, y] < 0, {x, -6, 6}, {y, -3, 3}, PlotStyle → LightCoral,
  BoundaryStyle → None, PlotLegends → Placed[{"Спадають"}, {0.8, 0.7}]],
 ContourPlot[f[x, y], {x, -6, 6}, {y, -3, 3}, Contours → {0},
  ContourStyle → {Thick, Blue}, ContourShading → None, Frame → False,
  Axes → False], Axes → True, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotLabel →
  Style["Множини зростання і спадання інтегральних кривих", 14, Bold]]
```

Out[221]=



4)

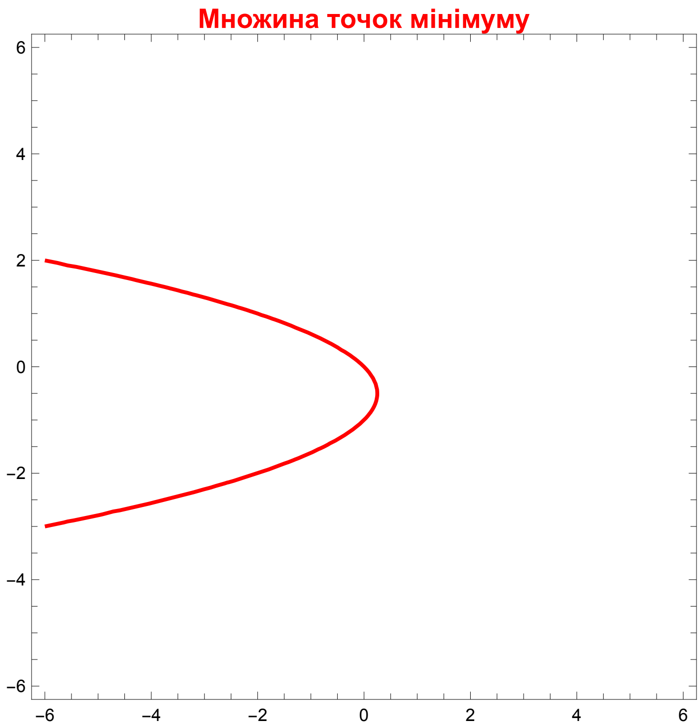
Аби знайти точки максимуму, необхідно знайти другу похідну функції y:

$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)\, y'(x)$. Маємо умови: $y' = 0$; $y'' < 0$. $x = -y^2 - y$; $1 < 0$ — хиба, отже стаціонарні можуть бути лише точками <u>**мінімуму.**</u>

In[222]:=

```
Show[ContourPlot[f[x, y], {x, -6, 6}, {y, -6, 6}, Contours → {0},
 ⌊пок⋯ ⌊контурний графік                                   ⌊контури
   ContourStyle → {Thick, Red}, ContourShading → None, AxesLabel → {"x", "y"},
   ⌊контурний стиль   ⌊жирни⋯⌊черв⋯ ⌊зафарбовування кон⋯ ⌊жодн⋯ ⌊позначення на осях
   PlotLabel → Style["Множина точок мінімуму", 14, Bold, Red]],
   ⌊позначка гра⋯ ⌊стиль                                ⌊жирн⋯ ⌊червоний
  RegionPlot[f_x[x, y] < 0, {x, -6, 6}, {y, -6, 6},
  ⌊візуалізація геометричної фігури на площині
   PlotStyle → LightRed, BoundaryStyle → None]]
   ⌊стиль графіка  ⌊світло-чер⋯ ⌊крайовий стиль  ⌊жодного / відсутній
```

Out[222]=



5, 6)

Аби знайти, де інтегральні криві опуклі вгору, опуклі вниз, та точки перегину, треба порівняти другу похідну з нулем. $f'_x(x, y) + f'_y(x, y) * f(x, y) \vee 0$.

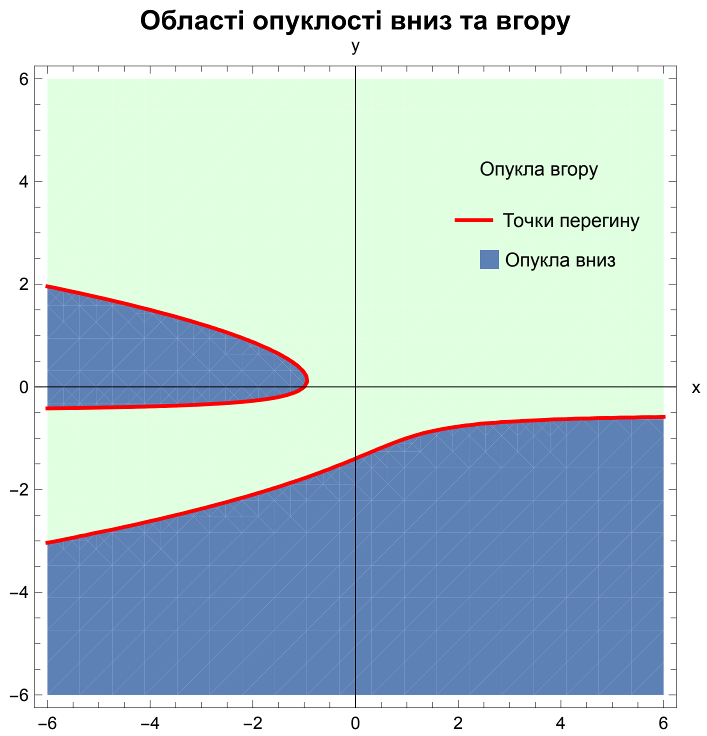
$y''(x) = (2y + 1)\left(y^2 + y + x\right)$.

$$x \vee -\frac{2y^3 + 3y^2 + y + 1}{2y + 1}$$

In[223]:=

```
secondDeriv[x_, y_] := (2 y + 1) (y^2 + y + x) + 1

inflectionPlot = ContourPlot[secondDeriv[x, y] == 0, {x, -6, 6},
                 контурний графік
    {y, -6, 6}, ContourStyle → {Thick, Red}, ContourShading → None,
                контурний стиль   жирни⋯ черв⋯ зафарбовування кон⋯ жодного / відсутній
    Epilog → {Text[Style["Точки перегину", 14, Bold, Red], {-4, 2}]},
    епілог    текст стиль                          жир⋯  червоний
    AxesLabel → {"x", "y"}, PlotLegends → Placed[{"Точки перегину"}, {0.8, 0.8}]];
    позначення на осях      легенди графіка  розташований

(*Regions of convexity*)
regionUp = RegionPlot[secondDeriv[x, y] > 0, {x, -6, 6},
           візуалізація геометричної фігури на площині
    {y, -6, 6}, PlotStyle → LightGreen, BoundaryStyle → None,
                стиль графіка  світло-зелений крайовий стиль  жодного / відсутній
    AspectRatio → 1, PlotLegends → Placed[{"Опукла вгору"}, {0.8, 0.8}]];
    аспектне відношення легенди графіка розташований

regionDown = RegionPlot[secondDeriv[x, y] < 0, {x, -6, 6},
             візуалізація геометричної фігури на площині
    {y, -6, 6}, PlotStyle → LightCoral, BoundaryStyle → None,
                стиль графіка           крайовий стиль  жодного / відсутній
    AspectRatio → 1, PlotLegends → Placed[{"Опукла вниз"}, {0.8, 0.7}]];
    аспектне відношення легенди графіка розташований

Show[regionUp, regionDown, inflectionPlot, Axes → True, AxesLabel → {"x", "y"},
показати                                   осі    істина позначення на осях
 PlotLabel → Style["Області опуклості вниз та вгору", 14, Bold]]
 позначка гра⋯ стиль                                    жирний шрифт
```

Out[227]=

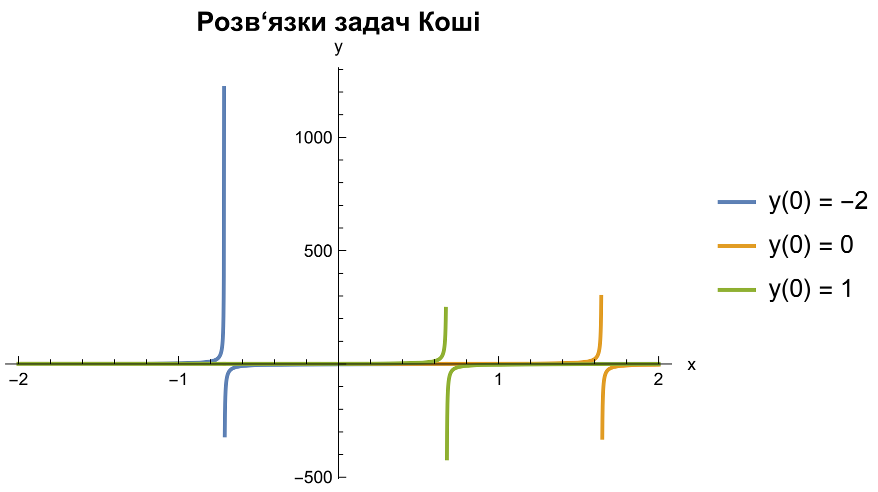

Області опуклості вниз та вгору
y
x
6
4
2
0
−2
−4
−6
Опукла вгору
Точки перегину
Опукла вниз

7)

In[237]:=

```
sol1 = f[x] /. DSolve[{f'[x] == f[x]^2 + f[x] + x, f[0] == -2}, f[x], x][[1]];
               вирішити диференційні рівняння
sol2 = f[x] /. DSolve[{f'[x] == f[x]^2 + f[x] + x, f[0] == 0}, f[x], x][[1]];
               вирішити диференційні рівняння
sol3 = f[x] /. DSolve[{f'[x] == f[x]^2 + f[x] + x, f[0] == 1}, f[x], x][[1]];
               вирішити диференційні рівняння

Plot[{sol1, sol2, sol3}, {x, -2, 2},
графік функції
 PlotLegends → {"y(0) = -2", "y(0) = 0", "y(0) = 1"}, AxesLabel → {"x", "y"},
 легенди графіка                                     позначення на осях
 PlotRange → All, PlotLabel → Style["Розв‘язки задач Коші", 14, Bold, Black]]
 діапазон зна··· все  позначка гра··· стиль                    жирн··· чорний
```

Out[240]=



Завдання №2 (Варіант 6)

Маємо рівняння: $\frac{dy}{dx} = g(y) = 2y - y^2 + 3$

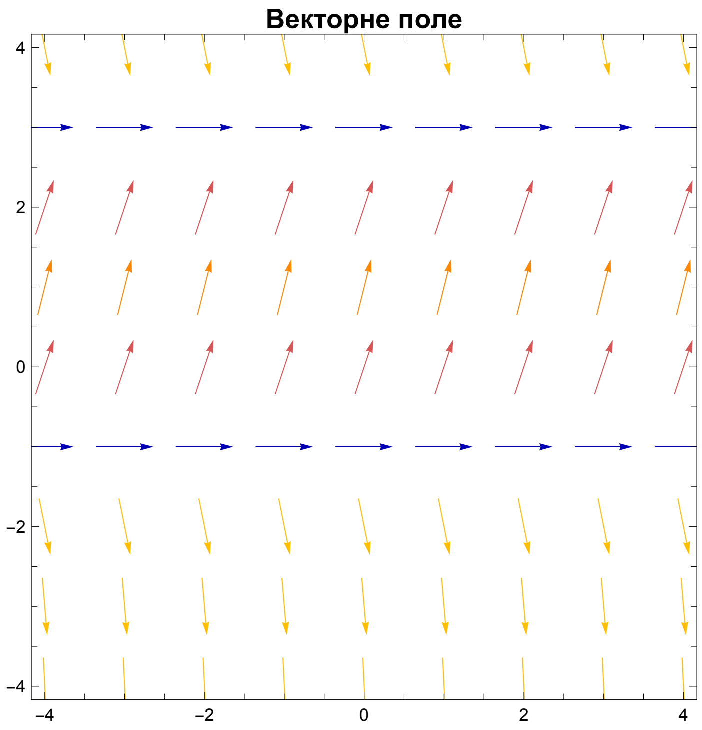
In[252]:=

```
g[y_] := 2 y - y^2 + 3
```

1)

```
VectorPlot[{1, 2 y - y^2 + 3}, {x, -4, 4}, {y, -4, 4},
векторна діаграма
 VectorPoints → Flatten[Table[{x, y}, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}], 1],
 число векторів   сплюстити таблиця значень
 VectorStyle → {Black, Arrowheads[0.02]}, AxesLabel → {"x", "y"},
 стиль векторів   чорний  наконечники          позначення на осях
 PlotLabel → Style["Векторне поле", 14, Bold, Black]]
 позначка граф··· стиль                         жирн··· чорний
```

Out[249]=

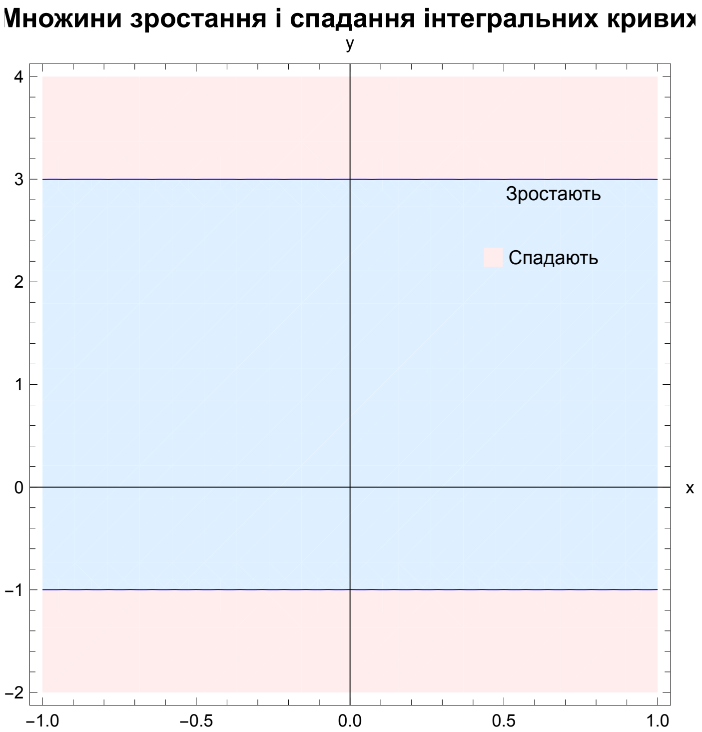


2)

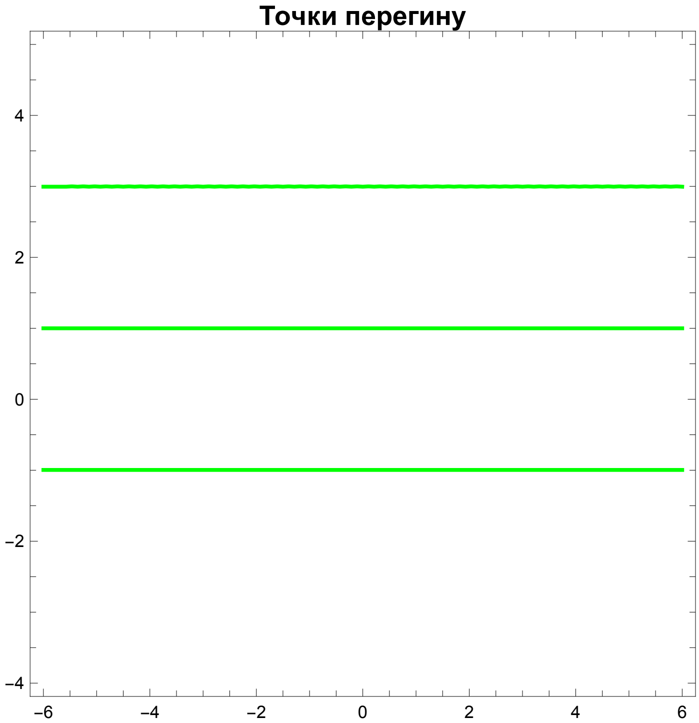
```
Show[RegionPlot[g[y] > 0, {x, -1, 1}, {y, -2, 4}, PlotStyle → LightBlue,
  BoundaryStyle → None, PlotLegends → Placed[{"Зростають"}, {0.8, 0.8}]],
 RegionPlot[g[y] < 0, {x, -1, 1}, {y, -2, 4}, PlotStyle → LightPink,
  BoundaryStyle → None, PlotLegends → Placed[{"Спадають"}, {0.8, 0.7}]],
 ContourPlot[g[y], {x, -1, 1}, {y, -2, 4}, Contours → {0},
  ContourStyle → {Blue}, ContourShading → None, Frame → False, Axes → False],
 Axes → True, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotLabel →
  Style["Множини зростання і спадання інтегральних кривих", 14, Bold]]
```

```
ContourPlot[(2 - 2 y) (2 y - y^2 + 3) == 0, {x, -6, 6},
 {y, -4, 5}, ContourStyle → {Thick, Green}, ContourShading → None,
 AxesLabel → {"x", "y"}, PlotLabel → Style["Точки перегину", 14, Bold]]
```

Out[262]=



Out[263]=



3)

$$\frac{dy}{dx} = 2y - y^2 + 3$$
$$\frac{dy}{dx} = -(y+1)(y-3)$$
$$\int \frac{dy}{-(y+1)(y-3)} = \int dx$$
$$\frac{1}{4}(\ln(y+1) - \ln(y-3)) = x + C$$
$$e^{\frac{1}{4}(\ln(y+1)-\ln(y-3))} = C e^x$$
$$\frac{(y+1)^{\frac{1}{4}}}{(y-3)^{\frac{1}{4}}} = C e^x \qquad |\text{^}4$$
$$\frac{y+1}{y-3} = C e^{4x}$$
$$y + 1 = C e^{4x} y - 3 C e^{4x}$$
$$y\left(1 - C e^{4x}\right) = -3 C e^{4x} - 1$$
$$y = \frac{3 C e^{4x} + 1}{C e^{4x} - 1},\ y = -1,\ y = 3$$

Тепер розв‘яжемо задачу Коші $y(0) = y_0$

A) $y_0 = -1 \quad y_0 = 3 \quad I_{-1} = \mathrm{R} \quad I_3 = \mathrm{R}$

B) $\frac{3C + 1}{C - 1} = y_0$

$$C = -\frac{1 + y_0}{3 - y_0}$$

Після підстановки ми знайдемо інтервали:

Для $y_0 > 3$ є асимптота $x = \frac{1}{4}\ln\frac{y_0 - 3}{y_0 + 1}$. $I_{y_0} = \left(\frac{1}{4}\ln\frac{y_0 - 3}{y_0 + 1}, +\infty\right)$

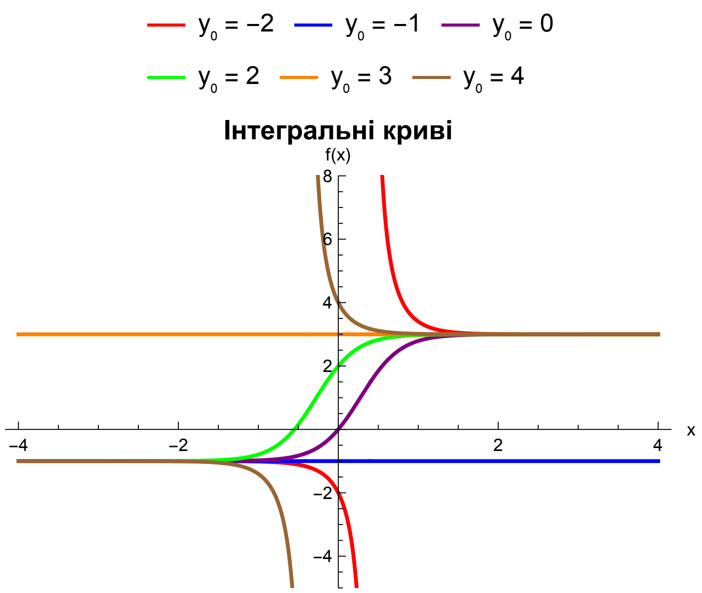
Для $y_0 < -1$ є асимптота $x = \frac{1}{4}\ln\frac{3 - y_0}{-1 - y_0}$. $I_{y_0} = \left(-\infty, \frac{1}{4}\ln\frac{3 - y_0}{-1 - y_0}\right)$

Для $-1 < y_0 < 3$. $I_{y_0} = R$

4)

```
ClearAll[f, x, y0];
solution = DSolve[{f'[x] == 2 f[x] - f[x]^2 + 3, f[0] == y0}, f[x], x]
fSol[x_, y0_] = f[x] /. First[solution]
{y1, y2} = {-1, 3};
initialConditions = {-2, -1, 0, 2, 3, 4};
Plot[Evaluate@Table[fSol[x, y0], {y0, initialConditions}], {x, -4, 4},
 PlotRange → {-5, 8}, PlotStyle → {Red, Blue, Purple, Green, Orange, Brown},
 PlotLegends → Placed[LineLegend[{Red, Blue, Purple, Green, Orange, Brown},
    "y₀ = " <> ToString[#] & /@ initialConditions], Above],
 AxesLabel → {"x", "f(x)"}, PlotLabel → Style["Інтегральні криві", Bold, 14]]
```

Out[294]=

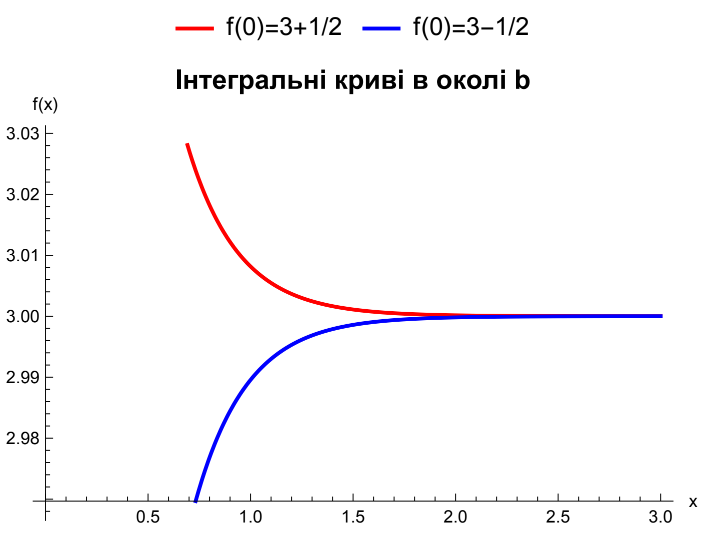


5)

In[329]:=

```
ClearAll[f, x, b];
очистити все

eq = f'[x] == 2 f[x] - f[x]^2 + 3;

b = 3; (*інтервал J від 3 до +нескінченності*)

solUp = DSolve[{eq, f[0] == b + 1/2}, f[x], x];
          вирішити диференційні рівняння
solDown = DSolve[{eq, f[0] == b - 1/2}, f[x], x];
          вирішити диференційні рівняння

fUp[x_] = f[x] /. solUp[[1]];
fDown[x_] = f[x] /. solDown[[1]];

Plot[{fUp[x], fDown[x]}, {x, 0, 3},
графік функції
 PlotStyle → {Red, Blue}, AxesLabel → {"x", "f(x)"},
 стиль графіка чер⋯ синій позначення на осях
 PlotLegends → Placed[{"f(0)=3+1/2", "f(0)=3-1/2"}, Above],
 легенди графіка розташований зверху
 PlotLabel → Style["Інтегральні криві в околі b", 14, Bold]]
 позначка гра⋯ стиль жирний ш

FindRoot[Abs[fUp[x] - fDown[x]] == 10^-3, {x, 1, 0, 3}]
знайти ко⋯ абсолютне значення
```

Out[336]=



Out[337]=

{x → 1.73087}