

Giải phương trình bậc 2 chứa tham số

Đối với bài toán có chứa tham số m:

- Khi hệ số a chứa tham số m :
 - a) Xác định các hệ số a; b; c .
 - b) Giải phương trình theo m:
 - Với giá trị của m mà $a = 0$, giải phương trình bậc nhất.
 - Với giá trị của m mà $a \neq 0$, giải phương trình bậc hai: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$, xét các trường hợp của Δ chứa tham số và tìm nghiệm theo tham số.

c) Kết luận.

- Biện luận phương trình:

- Phương trình có nghiệm khi:

+) Với giá trị của m mà $a = 0$, phương trình bậc nhất có nghiệm.

+) Với giá trị của m mà $a \neq 0$, phương trình bậc hai có nghiệm.

- Phương trình có một nghiệm khi:

+) Với giá trị của m mà $a = 0$, phương trình bậc nhất có nghiệm.

+) Với giá trị của m mà $a \neq 0$, phương trình bậc hai có nghiệm kép.

- Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi: Giá trị của m mà $a \neq 0$, phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ: Cho phương trình: $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 2 = 0$ (1) . Phương trình có nghiệm khi nào.

Hướng dẫn giải:

Ta có : $a=m$, $b=-2(m-1)$, $c=m+2$

Với $a=0$ (hay $m=0$)

Phương trình (1) là phương trình bậc nhất:

$$-2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

Với $a \neq 0$ (hay $m \neq 0$)

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= [-2(m-1)]^2 - 4.m.(m+2) \\ &= 4 > 0\end{aligned}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2(m-1) + \sqrt{4}}{2m} = \frac{m+2}{m}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2(m-1) - \sqrt{4}}{2m} = 1$$

Vậy với $m=0$ thì phương trình có 1 nghiệm $x=1$

$m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt
 $x = \frac{m+2}{m}$ và $x = 1$

*Khi hệ số a không chứa tham số :

- Ta chỉ tính Δ và biện luận như các bước trên (bỏ qua bước xét a)
- Giải nghiệm theo tham số
- Kết luận

Ví dụ: Cho phương trình $x^2 + (m+1)x + m = 0$ với m là tham số. Phương trình có nghiệm kép khi nào.

Hướng dẫn giải

Ta có : $a=1$, $b=m+1$, $c=m$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (m+1)^2 - 4.1.m\end{aligned}$$

$$=(m-1)^2$$

Phương trình có nghiệm kép khi : $\Delta = 0$ hay $(m-1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow m=1$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(m+1)}{2.1} = \frac{-(1+1)}{2.1} = -1$$

Vậy với $m=0$ thì phương trình có nghiệm kép $x=-1$

- **Đối với dạng bài yêu cầu chứng minh phương trình có nghiệm với mọi tham số m** , ta cần nhớ về điều kiện để phương trình bậc 2 có nghiệm: phương trình bậc 2 có nghiệm khi và chỉ khi biệt thức Δ không âm. Nếu ta tìm được cách chứng minh biệt thức Δ không âm thì khi đó ta có thể kết luận phương trình có nghiệm với mọi m .
- **Để thực hiện điều đó, ta làm các bước sau:**
 - Tính Δ
 - Chứng minh biệt thức Δ luôn dương bằng cách biến đổi biệt thức trở thành tổng của một đa thức bình phương (chứa tham số m) và một số hạng
 - Kết luận

Ví dụ: chứng minh phương trình $x^2 - (2m-1)x - m = 0$ luôn có nghiệm với mọi m

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có: } \Delta = (2m-1)^2 - 4m = 4m^2 - 4m + 1 - 4m = 4m^2 + 1 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

Vậy: phương trình có nghiệm với mọi giá trị m