Phương trình dạng $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C$

- **Kiến thức cần nhớ:** đây là dạng bài giải phương trình vô tỉ. Đối với loại phương trình này, ta cần xác định điều kiện có nghĩa của căn thức và biến đổi phương trình thành phương trình tương đương không chứa căn để giải. Việc này đa số được thực hiện bằng cách bình phương cả hai vế hoặc biến đổi biểu thức trong căn và sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$
- **Đối với phương trình có dạng $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C$:** dạng bài này thường được giải bằng cách biến đổi biểu thức trong căn thành một biểu thức bình phương và áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ để phá căn. Sau đó, ta giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối có dạng $|A| + |B| = C$ bằng cách chuyển hết tất cả về vế trái, sau đó xét dấu của vế trái ở từng khoảng giá trị xác định. Ngoài ra, một số bài cũng có thể được giải bằng cách đặt ẩn phụ nhưng nhìn chung hướng đi cho dạng này là tìm cách phá căn, quy về giá trị tuyệt đối.

  Ví dụ: giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 5$ (6)

  Dễ dàng ta thấy: $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2.3.x + 3^2 = (x-3)^2 \\ 4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2.2x.3 + 3^2 = (2x-3)^2 \end{cases}$

  $(6) \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(2x-3)^2} = 5$

  $\Leftrightarrow |x-3| + |2x-3| = 5$

  $\Leftrightarrow |x-3| + |2x-3| - 5 = 0$

  Nhận xét: $x - 3 \geq 0$ khi $x \geq 3$, $2x - 3 \geq 0$ khi $x \geq \frac{3}{2}$

  Vậy ta cần xét 3 khoảng giá trị: $-\infty < x < \frac{3}{2}$ (trường hợp cả hai đa thức đều âm), $\frac{3}{2} \leq x < 3$ (trường hợp 1 đa thức âm 1 đa thức dương) và $3 \leq x < +\infty$ (cả hai đa thức đều dương)

Tương ứng với đó, ta sẽ có 3 trường hợp như sau:

Với $-\infty < x < \frac{3}{2}$:

$(1) \Leftrightarrow -(x-3) - (2x-3) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow -3x + 3 + 3 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow -3x = -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (loại vì $-\infty < \boldsymbol{x} < \frac{3}{2}$)

Với $\frac{3}{2} \leq x < 3$:

$(1) \Leftrightarrow -(x-3) + (2x-3) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 - 3 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$ (loại vì $\frac{3}{2} \leq \boldsymbol{x} < 3$)

Với $3 \leq x < +\infty$:

$(\mathbf{1}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}-\mathbf{3})+(\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3})-\mathbf{5}=\mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{6} - \mathbf{5} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$ (nhận)

Vậy: $x = \frac{11}{3}$ là nghiệm của phương trình

Với các phương trình không thể biến đổi về dạng bình phương trong căn, ta có thể thực hiện bình phương 2 vế 2 lần

Ví dụ: giải phương trình $\sqrt{1-x}-\sqrt{2+x}=1$

Điều kiện: $\begin{cases}1-x \geq 0\\2+x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \leq 1\\x \geq -2\end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$

Phương trình $\sqrt{1-\mathrm{x}}-\sqrt{2+x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}=1+\sqrt{2+x}$

$\Leftrightarrow 1-x=1+2\sqrt{2+x}+2+x$

$\Leftrightarrow -2-2x=2\sqrt{2+x}$

$\Leftrightarrow -(x+1)=\sqrt{2+x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-(x+1) \geq 0\\(x+1)^2=2+x\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+1 \leq 0\\x^2+2x+1=2+x\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x \leq -1\\x^2+x-1=0\end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$