数学思维（二）

will7101

2020.5

洛谷网校

数论进阶

裴蜀定理

对于任意整数 a, b，存在整数 x, y，满足方程

$$ax + by = \gcd(a, b)$$

裴蜀定理

对于任意整数 a, b，存在整数 x, y，满足方程

$$ax + by = \gcd(a, b)$$

当 $\gcd(a, b) = 1$ 时，得到

$$ax + by = 1$$

于是对于任意整数 n，

$$a(nx) + b(ny) = n$$

也就是说，如果 a 和 b 互素，任何整数都可以表示为 a 和 b 的线性组合。

扩展欧几里得算法

我们考虑如何计算出一组 x 和 y。最简单的情况是 $b = 0$，有

$$ax + 0 = a \Rightarrow x = 1$$

假如 $b \neq 0$，我们有 $\gcd(b, a\%b) = \gcd(a, b)$，假设我们已经找到了以下方程的一组解

$$bx' + (a\%b)y' = \gcd(b, a\%b)$$

能不能推出

$$ax + by = \gcd(a, b)$$

的一组解呢?

扩展欧几里得算法

根据

$$a = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b + a\%b$$

代入

$$ax + by = \gcd(a, b)$$

得到

$$b(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor x + y) + (a\%b)x = \gcd(b, a\%b)$$

于是我们有

$$\begin{cases} x = y' \\ y = x' - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor x \end{cases}$$

乘法逆元

在模意义下做了乘法之后，如何逆运算回去，得到结果呢?

$$5 \times 2 \equiv 3 \pmod 7$$

$$3 \div 2 \equiv ? \pmod 7$$

乘法逆元

在模意义下做了乘法之后，如何逆运算回去，得到结果呢？

$$5 \times 2 \equiv 3 \pmod 7$$

$$3 \div 2 \equiv ? \pmod 7$$

我们就可以尝试为每个数找到一个 “倒数”，称为乘法逆元，记作 a^{-1}，满足

$$a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod p$$

那么当我们需要做乘法的逆运算时，只要乘上这个逆元，就相当于抵消了一次乘法。

求逆元

求逆元实际上就是求如下方程的解：

$$ax \equiv 1 \pmod{p}$$

也就是

$$ax - kp = 1$$

求逆元

求逆元实际上就是求如下方程的解：

$$ax \equiv 1 \pmod p$$

也就是

$$ax - kp = 1$$

假如 $\gcd(a, p) = 1$，就可以用扩展欧几里得算法来计算 x 了。注意结果可能是负数，需要再加上 p。

逆元存在的条件

逆元一定存在吗?

$$4 \times ? \equiv 1 \pmod{10}$$

逆元存在的条件

逆元一定存在吗?

$$4 \times ? \equiv 1 \pmod{10}$$

结合之前的结论，逆元存在的充分必要条件是这个数与模数互素。那么假如我们取一个素数作为模数，就会很方便，所以 OI 中大部分题目的模数都是素数。

费马小定理

如果 p 是素数，a 不是 p 的倍数，那么

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

改写上式，我们可以得到

$$a \cdot a^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$$

即 $a^{p-2} \% p$ 就是 a 的乘法逆元，可以用快速幂来计算。

计数原理

加法原理

若 $A \cap B = \varnothing$，则

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

常用于分类计数，考虑不同情况。注意不重不漏。

例如：吃套餐，需要选一份披萨或意面，披萨有 n 种，意面有 m 种，则共有 $n + m$ 种方案。

乘法原理

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

常用于分步计数，考虑做一件事的不同阶段。需要各阶段相互独立，互不影响。

例如：吃套餐，主菜有 n 种，配菜有 m 种，任意搭配，则共有 nm 种方案。

减法原理

记 S 为全集，则

$$|A| = |S| - |S \setminus A|$$

常用于：当直接统计具有一种性质的事物个数较为困难时，考虑统计不具有这种性质的事物个数，再用总数减去这个值。

例如：班上一共有 n 个同学，老师点名，到了 m 个，则有 $n - m$ 个同学没来。

容斥原理

$$
\begin{aligned}
|A \cup B| =& |A| + |B| - |A \cap B| \\
|A \cup B \cup C| =& |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\
& + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}
$$

容斥原理

$$
\begin{aligned}
|A \cup B| =& |A| + |B| - |A \cap B| \\
|A \cup B \cup C| =& |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\
&+ |A \cap B \cap C|
\end{aligned}
$$

更一般的形式：

$$
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|+1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|
$$

证明：（考虑每个元素对等式两边的贡献）

容斥原理

等式两边对全集 S 取补集，记 $\bigcap\varnothing = S$，得到

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i\right| = |S| - \sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,\ldots,n\}}(-1)^{|J|+1}\left|\bigcap_{j\in J}A_j\right| = \sum_{J\subseteq\{1,\ldots,n\}}(-1)^{|J|}\left|\bigcap_{j\in J}A_j\right|$$

容斥原理

等式两边对全集 S 取补集，记 $\bigcap \varnothing = S$，得到

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right| = |S| - \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|+1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right| = \sum_{J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$$

或者

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|} \left|\bigcap_{j \in J} \bar{A}_j\right|$$

容斥原理

常用于：直接算并集大小较为困难，但是算交集大小相对容易(或者相反)，有时也可用摩根律转换为补集的交或并。

例如：求 $1 \sim 200$ 中能被 $2, 3, 5$ 中任意一个整除的数字个数。

容斥原理

常用于：直接算并集大小较为困难，但是算交集大小相对容易(或者相反)，有时也可用摩根律转换为补集的交或并。

例如：求 $1 \sim 200$ 中能被 $2, 3, 5$ 中任意一个整除的数字个数。

利用容斥原理，分别计算 $2, 3, 5, 2 \times 3, 2 \times 5, 3 \times 5, 2 \times 3 \times 5$ 的倍数个数，根据 $1 \sim n$ 中 k 的倍数个数为 $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$，得到答案

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{200}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{30} \right\rfloor \\ =&100 + 66 + 40 - 33 - 20 - 13 + 6 \\ =&146 \end{aligned}$$

组合数

全排列与排列

将 n 个物品排成一行，有多少种不同的顺序?

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = n!$$

全排列与排列

将 n 个物品排成一行，有多少种不同的顺序?

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = n!$$

从 n 个物品中选出 k 个排成一行，有多少种不同的顺序?

$$(n-k+1) \times (n-k+2) \times (n-k+3) \times \cdots \times n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

证明：(一个一个选，乘法原理)

组合数

从 n 个物品中选出 k 个，无视顺序，有多少种不同的选法?

组合数

从 n 个物品中选出 k 个，无视顺序，有多少种不同的选法？

假如按照刚才的排列数来算，那么每种方案都被重复算了 $k!$ 次，所以只要除以 $k!$，就得到答案：

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

一些性质

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$$

一些性质

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

一些性质

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

一些性质

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

当 $k > 0$ 时，

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

一些性质

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

当 $k > 0$ 时，

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

组合数的定义求法

```
int C(int n, int k) {
    int p = 1, q = 1;
    for (int i = n - k + 1; i <= n; ++i)
        p *= i;
    for (int i = 1; i <= k; ++i)
        q *= i;
    return p / q;
}
```

实际中，由于数字很大，一般需要取模。

如果需要计算一定范围内的多个组合数，也可以预先计算出 $1 \sim n$ 的阶乘，然后分别代入分式求出答案。

杨辉三角（帕斯卡三角）

	0	1	2	3	4	5	
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

组合数的递推求法

```
for (int i = 0; i < n; ++i) {
    C[i][0] = 1;
    for (int j = 1; j <= i; ++j) {
        C[i][j] = C[i - 1][j - 1] + C[i - 1][j];
    }
}
```

同上，一般需要取模。

二项式定理

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k
\end{aligned}
$$

代入 $x = 1, y = 1$，得到

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

代入 $x = 1, y = -1$，得到

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

数学题

$$\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \cdots + \binom{2n}{2n-1}$$

数学题

$$\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\cdots+\binom{2n}{2n-1}$$

$$\begin{aligned}
=&\binom{2n-1}{0}+\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-1}{2}+\binom{2n-1}{3}+\cdots\\
&+\binom{2n-1}{2n-2}+\binom{2n-1}{2n-1}\\
=&2^{2n-1}
\end{aligned}$$

数学题

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+m}{m}$$

数学题

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+m}{m}$$

$$\begin{aligned}
&=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+m}{n}\\
&=\binom{n+1}{n+1}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+m}{n}\\
&=\binom{n+2}{n+1}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+m}{n}\\
&=\binom{n+m+1}{n+1}=\binom{n+m+1}{m}
\end{aligned}$$

计数技巧

等价替代

当我们需要计算一些带特殊条件的方案数时，可以用一些等价替代的方法。具体来讲，我们构造一个双射（一一映射），将每一种原问题的方案映射为新问题的一种方案，并使答案更容易计算。

常用的有捆绑法、插空法、隔板法等。

捆绑法

也称整体法，在计数时，如果要求若干物品相邻，则可以将它们作为一个整体来进行计数。

捆绑法

也称整体法，在计数时，如果要求若干物品相邻，则可以将它们作为一个整体来进行计数。

例如：ABCDE 五个人要排队，A 和 B 要相邻，C 和 D 要相邻，求有多少种排列方法。

捆绑法

也称整体法，在计数时，如果要求若干物品相邻，则可以将它们作为一个整体来进行计数。

例如：ABCDE 五个人要排队，A 和 B 要相邻，C 和 D 要相邻，求有多少种排列方法。

首先将 AB、CD 分别看成一个整体，然后变成 3 个元素的排列问题，方案数为 $3! = 6$，然后考虑 AB、CD 内部的相对顺序，共有 4 种情况，最终答案为 $6 \times 4 = 24$。

插空法

如果要求若干物品两两不相邻，可以先将其他物品放好，然后将这些物品插入空当中，进行计数。

插空法

如果要求若干物品两两不相邻，可以先将其他物品放好，然后将这些物品插入空当中，进行计数。

例如：ABCDEFG 七个人要排队，ABC 三个人两两不相邻，求方案数。

插空法

如果要求若干物品两两不相邻，可以先将其他物品放好，然后将这些物品插入空当中，进行计数。

例如：ABCDEFG 七个人要排队，ABC 三个人两两不相邻，求方案数。

先将剩下四个人排好，有 $4! = 24$ 种方案；然后将 ABC 三个人插入 5 个空当中，有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 种方案，最终答案为 $24 \times 60 = 1440$。

隔板法

将不可区分物品分配问题/不定方程整数解问题转化为插板组合问题。

隔板法

将不可区分物品分配问题/不定方程整数解问题转化为插板组合问题。

例如：把 n 个相同的苹果分给 k 个人，要求每个人至少分到一个，求方案数。

隔板法

将不可区分物品分配问题/不定方程整数解问题转化为插板组合问题。

例如：把 n 个相同的苹果分给 k 个人，要求每个人至少分到一个，求方案数。

我们把这 n 个苹果摆成一排，从左往右依次插入 $k-1$ 块隔板，代表每个人分到的部分，而每种插板的方案和原来的每一种分配方案是一一对应的，$k-1$ 块隔板插入 $n-1$ 个空当中（不能插在最左和最右），所以最终答案为

$$\binom{n-1}{k-1}$$

隔板法

如果改一改原问题，允许有人分到 0 个，那么答案应该怎么改呢?

隔板法

如果改一改原问题，允许有人分到 0 个，那么答案应该怎么改呢?

刚才的问题可以抽象为数学模型：求方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

的整数解，满足 $x_i \geq 1$。

隔板法

如果改一改原问题，允许有人分到 0 个，那么答案应该怎么改呢？

刚才的问题可以抽象为数学模型：求方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

的整数解，满足 $x_i \geq 1$。

如果限制改成 $x_i \geq 0$，我们可以设 k 个新变量 $y_i = x_i + 1 \geq 1$，转化为求方程

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n + k$$

的整数解，结合刚才的结论，得到答案

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

改变计数目标

如果直接按照题意来计数比较困难，可以尝试通过减法、容斥原理等方法转换成容易求的目标。

改变枚举顺序

很多时候，计数题要做的基本上是：在某个范围内枚举元素，计算它们的和。直接按照题意来做显然只能拿到暴力分（x），我们往往需要安排一个合适的顺序来计算。

改变枚举顺序

很多时候，计数题要做的基本上是：在某个范围内枚举元素，计算它们的和。直接按照题意来做显然只能拿到暴力分（x），我们往往需要安排一个合适的顺序来计算。

例如：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max\{i,j\} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\max\{i,j\}=k] \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot (2k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (2n+1)k - 2k^2 \\ &= \frac{4n^3+3n^2-n}{6}\end{aligned}$$