

Autor: Jędrzej Chrostowski  
Nr. albumu: 313659  
Grupa: wtorek 16:15-18:00  
Prowadzący:  
dr inż. Mateusz Żbikowski

## Obliczenia inżynierskie w chmurze

Określanie kształtu dyszy o minimalnej  
długości przy użyciu metody charakterystyk

Data oddania sprawozdania: 19 stycznia 2026.

## **Spis rysunków**

1	Wyznaczanie położenia punktu wewnętrz przepływu [1] . . . . .	4
2	Kształt dyszy o minimalnej długości wyznaczonej za pomocą metody charakterystyk . . . . .	7

## **Spis tabel**

1	Wartości inicjalizujące program . . . . .	6
---	---	---

# 1 Opis zagadnienia

W tym rozdziale przedstawione zostaną podstawowe informacje na temat dysz zbieżno-rozbieżnych, ich zastosowania a także wyzwań pojawiających się podczas ich projektowania.

## 1.1 Dysza zbieżno-rozbieżna

Dysza zbieżno-rozbieżna jest specjalnym rodzajem kanału przepływowego, pozwalającym na przyspieszenie przepływającego przez nią płynu do prędkości naddźwiękowych, przy jego jednoczesnym rozprężeniu. W ogólności przepływ przez dyszę zbieżno-rozbieżną można podzielić na 3 etapy:

1. Przepływ poddźwiękowy, mający miejsce w części zbieżnej dyszy, prędkość produktów spalania rośnie, ale nie osiąga jeszcze takich wartości, aby liczba Macha w przepływie wynosiła 1.
2. Przepływ krytyczny, występujący w przekroju dyszy o najmniejszym polu, charakteryzuje się tym, liczba Macha osiąga tam wartość jedności oraz powstaje fala uderzeniowa.
3. Przepływ naddźwiękowy, w którym dochodzi do dalszego rozpędzania medium roboczego przy dalszym rozprężaniu.

Dysze zbieżno-rozbieżne stanowią podstawę technologii silników odrzutowych, przy czym najczęściej wykorzystywane są w silnikach rakietowych. W napędach działających przy względnie wysokich ciśnieniach zewnętrznych najczęściej spotykanym kształtem części rozbieżnej dyszy jest stożek. Wynika to z łatwości wykonania oraz tego, że w takich warunkach gaz w dyszy nie musi być rozprężony do bardzo niskich wartości. Wraz ze spadkiem ciśnienia otoczenia zwiększa się obliczeniowy rozpręż w dyszy, a co za tym idzie zwiększa się jej przekrój wylotowy. Oznacza to, że gdyby w dyszy zaprojektowanej do pracy w wysokiej atmosferze ziemskiej lub w warunkach próżni zastosować stożkową część rozbieżną rozmiary dyszy, a co za tym idzie jej masa sprawiłyby, że jej zastosowanie miałoby się z celem.

W celu zaradzenia temu problemowi w latach 50 i 60 XX w. rozpoczęto zintensyfikowane prace nad metodą umożliwiającą wyznaczenie kształtu dyszy w której dochodziłoby do całkowitego rozprężenia gazów wylotowych, przy jednoczesnym minimalizowaniu jej długości. Metodą przydatną w tych staraniach okazała się metoda charakterystyk. Jej podstawy zostaną przybliżone w rozdziale poniżej.

## 2 Metoda charakterystyk

Metoda charakterystyk jest metodą analityczno-geometryczną, pozwalającą na przedstawienie skomplikowanych układów równań różniczkowych cząstkowych w sposób analityczny. U swojej podstawy polega ona na znajdowaniu tak zwanych linii charakterystyk, czyli takich linii wzdłuż których wartości opisujące przepływ (na przykład ciśnienie) są stałe, ale wzdłuż których pochodne tych wartości po współrzędnych geometrycznych są nieokreślone lub nieciągłe. W rozwiązaniach wykorzystujących metodę charakterystyk definiuje się dwa ich rodzaje - prawe (oznaczane  $C_+$ ) oraz lewe (oznaczane  $C_-$ )[1].

Tak zdefiniowane linie charakterystyk nie umożliwiają jeszcze obliczenia przepływu - w celu ich dopełnienia stosowane są tzw. równania kompatybilności, które rozwiązywane są wzdłuż charakterystyk w celu obliczenia właściwości przepływu. Równania te przyjmują postaci: Wzdłuż lewej charakterystyki:

$$\theta + \nu(M) = const = K_- \quad (1)$$

Wzdłuż prawej charakterystyki:

$$\theta - \nu(M) = const = K_+ \quad (2)$$

Równania kompatybilności nie zawierają w sobie informacji na temat położenia geometrycznego linii charakterystyk, jednak mogą w prosty sposób zostać wykorzystane do wyznaczenia tych zależności. Proces ten zostanie przedstawiony poniżej[1].

## 2.1 Wyznaczanie położenia charakterystyk

Wyznaczanie charakterystyk sprowadza się do prostej geometrii analitycznej, uzależnionej od tego jaki punkt w przepływie analizujemy - tak zwanego procesu jednostkowego (ang. *unit process*).

### 2.1.1 Punkty wewnętrz przepływu

Jeśli znamy wartości  $K_-$  i  $K_+$  dla dwóch charakterystyk (oznaczonych odpowiednio 1 i 2), jesteśmy w stanie w prosty sposób określić wartości  $\theta$  i  $\nu$  leżącego na ich przecięciu. Umożliwiają to wzory:

$$\theta_3 + \nu_3 = K_{-3} = K_{-1} \quad (3)$$

$$\theta_3 - \nu_3 = K_{+3} = K_{-+2} \quad (4)$$

Po wykonaniu tego kroku znane są wszystkie niezbędne wartości  $\theta$  i  $\nu$  w 3 punktach, potrzebne do wyznaczenia położenia punktu 3. Znajduje się ono na przecięciu linii prostych, przybliżających z dużą dokładnością rzeczywisty kształt charakterystyk, których nachylenie zdefiniowane jest jako:

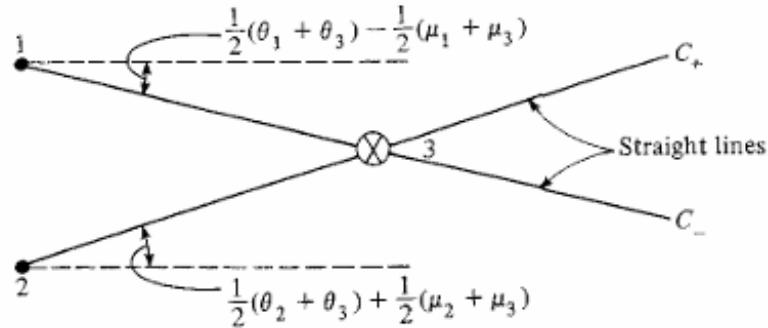
$$\alpha = [0.5(\theta_1 + \theta_3) - 0.5(\mu_1 + \mu_3)] \quad (5)$$

Dla lewej charakterystyki. Oraz:

$$\alpha = [0.5(\theta_1 + \theta_3) + 0.5(\mu_1 + \mu_3)] \quad (6)$$

Dla prawej charakterystyki.

W równaniach tych pojawia się niewymieniona dotąd wielkość  $\mu$ . Jest ona wynikową liczbą Macha, którą dla każdego punktu można otrzymać z wartości  $\nu$  poprzez zastosowanie odwrotnej funkcji Prantla-Meyera. Schemat prezentujący schematyczne wyznaczenie lokalizacji punktu wewnętrz przepływu zaprezentowany został na Rysunku 1.



Rysunek 1: Wyznaczanie położenia punktu wewnętrz przepływu [1]

### 2.1.2 Punkty leżące na ścianie

Proces ten jest tożsamy do wyznaczania położenia punktu wewnętrz przepływu, jednak uproszczony, ponieważ ściana jest ograniczeniem geometrycznym w którym *a priori* znane są wartości  $\theta$ . Oznacza to, że do wyznaczenia położenia geometrycznego punktu na ścianie potrzebujemy jedynie wartości na lewej charakterystyce. Wtedy (numeracja jak w poprzednim podrozdziale):

$$\theta_3 + \nu_3 = K_{-3} = K_{-1} \quad (7)$$

### 2.1.3 Punkty leżące na fali uderzeniowej

Schemat ten nie jest niezbędnym do wyznaczenia zarysu dyszy o minimalnej długości, jednak zostanie tu przytoczony w celu pełnego opisu *unit process*. Postępowanie to jest tożsame do wyznaczania położenia punktu leżącego na ścianie, z tym, że znane są wartości  $\theta$  i  $\nu$  na fali uderzeniowej (obliczone mogą być z relacji kąta fali ukośnej oraz liczby Macha w przepływie niezakłóconym).

## 2.2 Metoda charakterystyk w wyznaczaniu kształtu dyszy

Dysza o minimalnej długości to taka dysza w której dochodzi do pełnego rozprężenia gazów bez fal uderzeniowych występujących wewnętrz dyszy. Efekt ten uzyskuje się poprzez skondensowanie obszaru w którym dochodzi do rozprężenia za przekrojem krytycznym do punktu. W punkcie tym następuje ekspansja Prandtla-Meyera, którą opisać można za pomocą charakterystyk.

Przyjmując to założenie wyznaczenie dyszy o minimalnej długości można podzielić na następujące kroki:

1. Wyznaczenie początkowych charakterystyk ekspansji Prandtla-Meyera. Przyjmuje się, że charakterystyki te mają nachylenie od bardzo małej wartości ( $0^\circ$ ) do wartości obliczanej ze wzoru:

$$\theta_e = \frac{\nu_{Me}}{2} \quad (8)$$

2. Wyznaczenie wartości  $K_-$ ,  $K_+$ ,  $\theta$ ,  $\nu$  dla każdego punktu leżącego na przecięciu charakterystyk.

3. Wyznaczenie położenia geometrycznego punktów leżących na przecięciu charakterystyk.
4. Wyznaczenie położenia geometrycznego punktów leżących na ścianie dyszy. Odbywa się to przy założeniu, że punkty te leżą na przecięciu linii będących przedłużeniem prawych charakterystyk z prostymi o nachyleniu  $0.5(\theta_a + \theta_b)$ , gdzie punkty a i b to kolejne punkty leżące na ścianie dyszy, zaczynając od przekroju krytycznego.

### 3 Opis programu

W ramach programu zdefiniowano szereg funkcji, które zostaną opisane poniżej.

#### 3.1 Mach\_angle\_calculator

Funkcja ta jako argumenty przyjmuje liczbę Macha, a zwraca kąt Macha w radianach, zgodnie ze wzorem:

$$\mu = \arcsin(1/M) \quad (9)$$

#### 3.2 PM\_fun

Funkcja ta jako argumenty przyjmuje liczbę Macha oraz wykładnik adiabaty gazu, a zwraca kąt Prandtla-Meyera w radianach zgodnie ze wzorem:

$$\nu = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)}\right) - \arctan\left(\sqrt{M^2-1}\right) \quad (10)$$

#### 3.3 Hall\_IPM\_fun

Funkcja ta jako argumenty przyjmuje kąt Prandtla-Meyera i wykładnik adiabaty gazu, a zwraca liczbę Macha zgodnie ze wzorem przedstawionym w [2].

#### 3.4 node\_volume\_finder

Funkcja ta jako argumenty przyjmuje liczbę charakterystyk, a zwraca liczbę punktów przecięcia charakterystyk w siatce.

#### 3.5 kernel\_node\_value\_calculator

Funkcja ta jako argumenty przyjmuje ilość charakterystyk, wartość  $\theta$  dla pierwszej charakterystyki, wykładnik adiabaty gazu i projektową liczbę Macha na wylocie z dyszy, a zwraca parametry  $K_-, K_+, \theta, \nu, \mu$  i  $M$  dla każdego punktu w którym przecinają się charakterystyki.

### **3.6 flow\_point\_finder**

Funkcja jako argumenty przyjmuje wartości  $\theta$  oraz  $\mu$  punktów leżących w przepływie na lewej i prawej charakterystyce, a także położenie geometryczne tych punktów i zwraca położenie punktu leżącego wewnątrz przepływu.

### **3.7 centerline\_point\_finder**

Funkcja jako argumenty przyjmuje wartości  $\theta$  oraz  $\mu$  punktów leżących w przepływie na lewej charakterystyce oraz na osi symetrii, a także położenie geometryczne punktu w przepływie i zwraca położenie punktu leżącego na osi symetrii.

### **3.8 wall\_point\_finder**

Funkcja jako argumenty przyjmuje wartości  $\theta$  oraz  $\mu$  punktów leżących w przepływie na prawej charakterystyce oraz na ścianie dyszy, a także położenie geometryczne punktu w przepływie i na ścianie dyszy, a zwraca położenie kolejnego punktu leżącego na dyszy.

### **3.9 point\_location\_finder**

Funkcja jako argumenty przyjmuje liczbę charakterystyk, projektową liczbę Macha na wylocie z dyszy, wartości otrzymane z funkcji kernel\_node\_value\_calculator, a także wartości bool określające sposób tworzenia wykresu. Wewnątrz funkcji obliczane są współrzędne geometryczne wszystkich istotnych punktów w przepływie, a zwracany jest wykres prezentujący kształt dyszy oraz współrzędne punktów na jej obrysie.

## **3.10 Inicjalizacja programu**

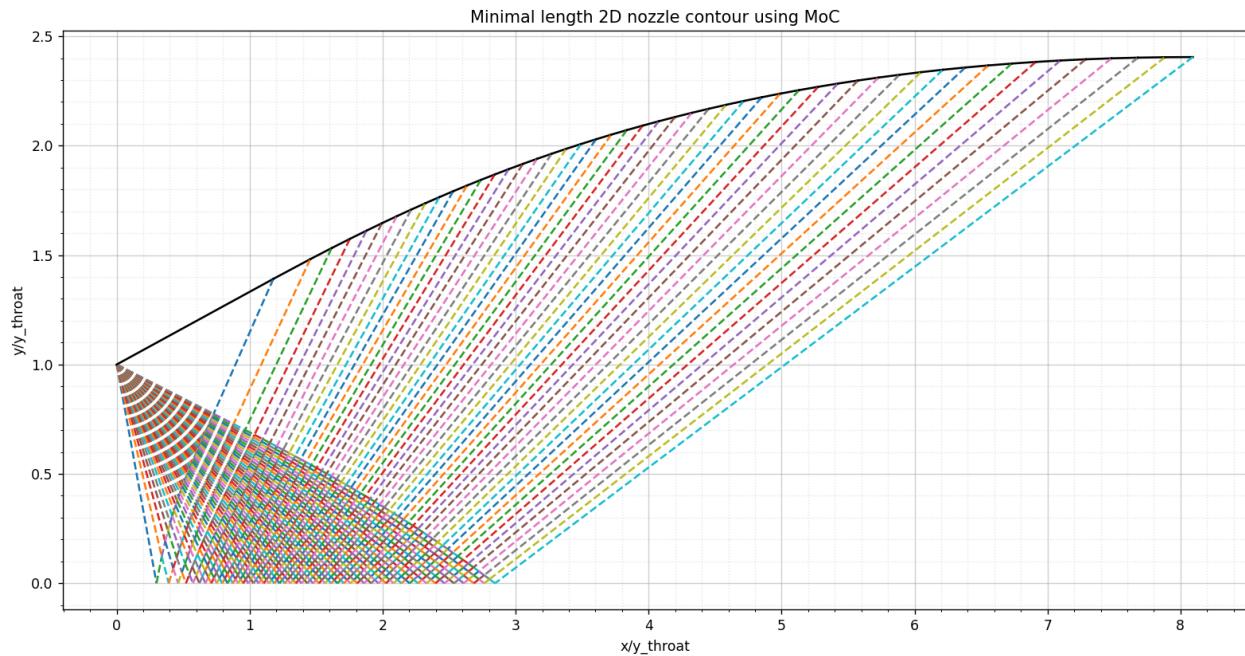
Program inicjalizowany jest liczbą charakterystyk, projektową liczbą Macha na wylocie z dyszy, współczynnikiem adiabaty gazu oraz początkowym kątem odchylenia pierwszej charakterystyki. Następnie wywoływana jest funkcja point\_location\_finder a jej output zapisywany jest do pliku csv.

## **4 Wyniki**

Obliczenia przeprowadzono dla wartości zaprezentowanych w Tabeli 1. Otrzymany wy-

Tabela 1: Wartości inicjalizujące program

Wartość	Wielkość	Jednostka
Liczba charakterystyk	50	-
$\gamma$	1.4	-
$M_e$	2.4	-
$\theta_{start}$	0.375	$^\circ$



Rysunek 2: Kształt dyszy o minimalnej długości wyznaczonej za pomocą metody charakterystyk

kres przedstawiający kształt dyszy o minimalnej długości przedstawiono na Rysunku 2. Obliczone wartości porównano z przykładem przedstawionym w [1]. Osiągnięto wysoki poziom zgodności wyników.

## 5 Podsumowanie

Zaprezentowano program pozwalający na wyznaczenie konturu dyszy o minimalnej długości wykorzystującego metodę charakterystyk. Program pozwala na wyznaczenie konturu dla dowolnej liczby Macha, wykładnika adiabaty i liczby charakterystyk. Opisywany program pozwala na wyznaczenie konturu dyszy płaskiej, co ogranicza jego zastosowanie jedynie do celów dydaktycznych oraz stanowi punkt wyjściowy do stworzenia programu wykorzystującego metodę charakterystyk dla 3 wymiarów.

## Literatura

- [1] Modern Compressible Flow With Historical Perspective, Third Edition, Anderson Jr, John D., McGraw-Hill Higher Education, 2003
- [2] Inversion of the Prandlt-Meyer relation, Hall, I.M, Aeronautical Journal, 1975