بازی های تولید DEA با قیمت های خروجی فازی

دانشجو: شایان رادی

استاد: دکتر محسن رستمی مال خلیفه

کد دانشجو: ۹۷۰۰۸۶۶۳۲

بازی های تولید DEA با قیمت های خروجی فازی

M. A. Hinojosa۱ · S. Lozano۲ · A. M. Mármol۳

چکیده

در مدل‌های تولید DEA فرض بر این است که این فناوری در داده‌های ورودی-خروجی داده شده توسط مجموعه ای از مشاهدات ثبت شده، ضمنی است. بازی‌های تولید DEA مزایای شرکت‌های مختلف را برای جمع آوری منابع خود و به اشتراک‌گذاری فن آوری آن‌ها ارزیابی می‌کنند. نسخه واضح این نوع از مسئله‌های در ادبیات مورد مطالعه قرار گرفته است و روش‌های دستیابی به راه حل‌های پایدار پیشنهاد شده است. با این وجود، با این حال، هنگامی که عدم قطعیت در قیمت های تولید واحد وجود دارد، هیچ رویکرد راه حلی وجود ندارد، وضعیتی که به وضوح می تواند در عمل رخ دهد.
این مقاله بازی‌های تولید DEA را به قیمت‌های خروجی واحد فازی گسترش می‌دهد. در آن سناریو کل درآمد نامشخص است و بنابراین تخصیص مربوط به بازیکنان نیز لزوماً نامشخص است. یک مفهوم راه حل اصلی برای این بازی‌های فازی معرفی شده است، اولویت حداقل هسته. بار محاسباتی به دست آوردن تخصیص سود کل فازی حاصل از همکاری که به حداقل هسته ترجیحی تعلق دارد زیاد است. با این حال، نتایج ارائه شده در مقاله به ما اجازه می دهد تا کل درآمد فازی بدست آمده توسط ائتلاف بزرگ و تخصیص فازی در حداقل هسته ترجیحی را با حل یک مدل برنامه نویسی خطی واحد محاسبه کنیم. کاربرد رویکرد پیشنهادی با تجزیه و تحلیل دو موقعیت تولید تعاونی که توسط مجموعه داده‌ها از ادبیات نشأت گرفته‌اند، نشان داده شده است.

واژگان کلیدی

بازی‌های تولید DEA · قیمت‌های خروجی واحد فازی · درآمد فازی · بازی‌های تعاونی فازی · تخصیص فازی

۱. مقدمه

Owen (۱۹۹۵) مسئله‌های برنامه‌نویسی تولید خطی را در نظر گرفت که در آن سازندگان چند برابر - منابع خود را در یک فرایند تولید مشترک جمع می‌کنند و با استفاده از تئوری بازی تعاونی، این موقعیت‌ها را تحلیل می‌کنند. به تازگیLozano (۲۰۱۳) این مدل را تحت یک چشم‌انداز جدید جستجو کرده است که در آن مجموعه‌ای از مشاهدات ثبت شده از فرآیند تولید برای برنامه نویسی فرایند تولید بر اساس فناوری تحلیل پوششی داده (DEA) الهام گرفته شده استفاده می‌شود تحلیل پوششی داده (DEA). مدل خطی جدید (در اصل) مدل تولید DEA و بازی مشارکتی مربوطه بازی تولید DEA نامیده می‌شود.

در مدل‌های تولید DEA, عملکرد هدف بیانگر کل درآمد حاصل از فروش انواع خاصی از محصولات است، و مسئله به عنوان مسئله برنامه‌نویسی خطی شکل گرفته است که در آن درآمد در مجموعه تولید ممکن ناشی از مجموعه مشاهدات ضبط شده به حداکثر می‌رسد. با این حال، اغلب اوقات، شرایط دنیای واقعی، فرض قطعیت با توجه به ماهیت پارامترهای درگیر در مدل غیر واقعی است و در بسیاری از برنامه ها، استفاده از منطق فازی (Zadeh ۱۹۶۵) برای مقابله با ماهیت نادقیق سودمند است. به ویژه، در تحلیل بهره وری با استفاده از مدل‌های DEA, عدم دقت در داده‌ها یک اشکال اصلی است و نمایندگی آن‌ها به عنوان اعداد فازی ارزیابی واقعی‌تر از کارآیی واحدهای تصمیم گیری را امکان پذیر می‌سازد [به عنوان مثال، .Lertworasirikul et al (۲۰۰۳); Hatami-Marbini et al. (۲۰۱۱) و Lozano(۲۰۱۴)].

در این مقاله به مدل تعاونی ناشی از مسئله‌های تولید DEA با پارامترهای نامشخص می‌پردازیم. به طور خاص، ما سناریوی قیمت‌های خروجی فازی را در نظر می‌گیریم. چنین بلاتکلیفی در زندگی روزمره ما وجود دارد. قیمت بنزین، غذای تازه، بلیط هواپیما، محل اقامت و غیره اغلب به سختی قابل پیش بینی است. همین اتفاق برای بسیاری از شرکت‌ها اتفاق می افتد، عمدتاً، اما نه تنها، کسانی که در بازارهای رقابتی فعالیت می‌کنند. یک مثال معمولی که به صورت عددی در این مقاله به تصویر کشیده شده است، موردی از ابزارهای برقی است که در قیمت عمده فروشی برقی که تولید می‌کنند با عدم قطعیت مواجه هستند.

از آنجا که این‌عدم قطعیت قیمت ممکن است برای شرکتهایی که مایل به توافق نامه‌های همکاری هستند، مانعی شود، توسعه ابزارها و روش شناسی کمک به شرکت‌ها برای ارزیابی مزایای همکاری حتی در صورت عدم قطعیت قیمت مهم است. معرفی عدم قطعیت قیمت در مدل تعاونی موضوعات جالب و جدیدی را ایجاد می‌کند، زیرا ائتلاف‌ها می‌توانند قبل از حل‌عدم قطعیت شکل بگیرند و باید با در نظر گرفتن ارزش‌های بالقوه آن‌ها که ممکن است نامشخص باشد، درباره تقسیم درآمد نامشخص بحث کنند. فرض می‌کنیم‌عدم دقت در پارامترهای مسئله تولید خطی از طریق منطق فازی مدل شده است، یعنی برخی از پارامترهای درگیر در عملکرد هدف و/یا در محدودیت‌های بازی تولید توسط اعداد فازی نشان داده شده است. روش پیشنهادی روش واضح و متناسب را گسترش می‌دهد (که در صورت حذف عدم قطعیت داده‌ها کاهش می‌یابد) به هزینه افزایش پیچیدگی تحلیل و اندازه مدل‌های بهینه‌سازی که باید حل شوند. یکی از ویژگی‌های جالب رویکرد پیشنهادی این است که می‌توان بیش از یک بار از آن استفاده کرد تا با گذشت زمان و کاهش عدم قطعیت، تخصیص فازی محاسبه شده با رویکرد پیشنهادی قابل تجدید نظر و تصفیه باشد.

چندین مدل تعاونی شامل فازی را می‌توان در ادبیات یافت. خط شروع شده در (۱۹۸۱) Aubin بازی‌هایی را با ائتلاف‌های فازی مطالعه می‌کند، که در آن عوامل ممکن است سطوح مختلف مشارکت را در همکاری در نظر بگیرند. کارهای اخیر در این زمینه، به عنوان مثال، Wu (۲۰۱۲) و Li و Zhang (۲۰۰۹) است. تحقیقات حاضر با مدلهایی که در آن ابهام مربوط به مقادیری است که ائتلاف‌ها می‌توانند از آن استفاده کنند.Nishizaki

و Sakawa (۲۰۰۱) در بررسی این بازی ها از ما پیشی می گیرند. برای بازی‌های مشارکتی فـازی ناشـی از مسـائل برنامه‌نویسـی تولیـد خطـی بـا پارامترهای فازی، آنها یک خانواده نامتناهی از هسته‌ها را پیشنهاد کردند که هر کدام از مجموعه‌ای از بردارهای بازده غیر فازی تشکیل شده‌اند. اخیراً در Hinojosa et al (۲۰۱۳) و Monroy et al (۲۰۱۳)، یک روش متفاوت برای تحلیل راه حل‌های بازی‌های تعاونی با بـازده فـازی ارائـه شـده است و در موارد بازی‌های تولید خطی فازی و بازی‌های تخصیص فازی اعمال شده است.

بازی ناشی از وضعیت تولید، هنگامی که مجموعه منابع توسط چندین عامل در زمینه فازی در نظر گرفته شده در این مقاله کنترل می‌شود، یـک بـازی با ارزش مجموعه است که در آن هر آن هر عنصر از مجموعه یک عدد فازی است. Lozano et al (۲۰۱۵) بازی‌های تولید DEA با ارزش برداری را ارزیابی کرده‌اند و نتایج آن‌ها به عنوان مبنایی برای تجزیه و تحلیل در یک محیط فازی است که در این مقاله توسعه داده شده است. هدف اصـلی در این موقعیت‌های تعاونی، تعیین تخصیص کل درآمدهای فازی است که نمایندگان مایل به پذیرش آن هستند. در این شرایط، از آنجایی که نظم کلی در میان پرداخت‌ها وجود ندارد، مقایسه بین بازده‌های فازی به‌دست‌آمده توسط بازیکنان و ائتلاف‌ها مانند بازی‌های اسکالر ساده نیست و بنـابراین، مفـاهیم راه‌حل کلاسیک قابل اجرا نیستند. ادبیات قبلی با ایجاد یک تابع مطلوبیت به منظور القای یک بازی اسکالر و بـه دسـت آوردن تخصـیص کـل درآمـد مرتبط بر اساس اصول عقلانیت مختلف، به این مسئله پرداخته است. با این حال، این رویکرد به ندرت به تجزیه و تحلیل دقیق وضعیت کمک می کند، زیرا تخصیص هایی متشکل از بازده های غیر فازی برای عوامل ایجاد می کند.

این مقاله تحلیل قبلی را از وضعیت تولید انجام می‌دهد و مفهوم راه حل برای بازی تولید DEA با قیمت‌های فازی، یعنی حداقل هسته ترجیحی، کـه قبل از برطرف شدن ابهام قابل اعمال است، پیشنهاد می‌شود. در این راه حل ماهیت فازی تخصیص‌ها حفظ می‌شود، بنابراین، مقدار نهایی کـه بـه هـر عامل اختصاص داده می‌شود، یک عدد فازی است. حداقل هسته ترجیحی اخیراً درLozano et al (۲۰۱۵) معرفی شده است. (۲۰۱۵) برای بازی‌هـای تولیـد DEA با ارزش مجموعه، و بر اساس همان ایده کمترین هسته در بازی‌های استاندارد TU است. پیشرفت اصلی مقاله حاضر با توجه به نتایج ارائه شده در Lozano et al. (۲۰۱۵) تنظیم یک چارچوب کلی است که واقـع بینانـه‌تر موقعیت‌هـایی را در خـود جـای می‌دهـد کـه در آن‌عـدم قطعیـت در پارامترهای مدل وجود دارد. اشکال اصلی آن، ناشی از پیچیدگی محیط فازی، دشواری در جمع‌بندی مؤثر تخصیص‌های فازی است. با این حـال، مقالـه نشان می‌دهد که چگونه از دیدگاه محاسباتی، فقط به ابزارهای برنامه‌نویسی خطی نیاز است.

ما دستورات فازی استاندارد را در مجموعه اعداد فازی اتخاذ می‌کنیم به González و Vila (۱۹۹۱)، González و Vila (۱۹۹۲) و Ramík و Římánek (۱۹۸۵) مراجعه کنید. و مازاد ائتلاف ها را بر این اساس، تعریف می‌کنیم. مشارکت های اصلی در این مقالـه، تعریـف حـداقل هسـته ترجیحی در این محیط فازی و پیشنهاد رویه ای برای محاسبه تخصیص ها در این مجموعه است. این روش نیاز به حل یک مدل برنامه‌نویسـی خطـی واحد دارد، که در عین حال درآمد فازی کارآمد حاصل از همکاری و تخصیص به عوامل این مقدار فازی را به دست می‌آورد.

ما همچنین نشان می‌دهیم که چگونه رویکرد ما در دو برنامه کاربردی است، برای آن‌ها تخصیص حداقل هسته ترجیحی به دست می‌آیـد، هـم بـرای مواردی که قیمت‌های نامشخص توسط اعداد فازی مثلثی و هم برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای نشان داده می‌شوند.

بقیه مقاله به شرح زیر است. در بخش ۲ ما مسئله‌های تولید DEA فازی را توصیف می‌کنیم. در بخش ۳، بـازی تولیـد DEA فـازی معرفـی شـده و مفاهیم هسته ترجیحی و حداقل هسته ترجیحی بازی فازی تعریف شده است. نتایج ارائه شده است که محاسبه تخصـیص درآمـدهای فـازی حاصـل از همکاری را امکان‌پذیر می‌کند. بخش ۴ شامل دو مثال مصور است، که در آن اثربخشی رویکرد پیشنهادی نشان داده شده است. نشان داده شـده اسـت که چگونه در هر دو مورد سطح ابهام اعداد فازی که نمایانگر سود واحد هستند، بر دقت مقادیر فازی که در نهایت به نمایندگان اختصاص می‌یابد، تـأثیر می‌گذارد.

۲ مسئله‌های تولید DEAفازی

مسئله تولید DEA به شرح زیر است: انواع P محصولات باید با استفاده از منابع مختلف M تولید شوند. در دسترس بودن هر منبع توسط یک بردار b $\in \mathbb{R}^m$ داده می‌شود و درآمد مثبت واحد، c_p، با فروش محصول p،$p = 1.2 \dots, P$، بدست می‌آید. در مدل های تولید DEA، فناوری فـرض می شود. به طور ضمنی در داده های ورودی-خروجی داده شده توسط مجموعه ای از مشاهدات ثبت شده D. ماتریسی که ستون های آن ورودی های مشاهده شده هستند را با $X \in R^{M\times D}$ و ماتریسی که ستون های آن خروجی های مشاهده شده هستند را با $Y \in R^{P\times D}$ نشـان دهیـد. هـدف برنامه نویسی سطوح ورودی و خروجی $x \in IR^M$ و $y \in R^P$ است که حداکثر درآمد را فـراهم مـی کنـد. یعنـی بـرای انتخـاب سـطح ورودی و خروجی امکان‌پذیر در مجموعه امکان تولید $\{(x, y)|X\lambda \le x, Y\lambda \le y, x \le b, \lambda\epsilon\Delta\}$ که توسط مشاهدات ثبت شده و با محدودیت منـابع القا می شود. اجزای $\lambda \in R^D$ پارامترهای مدل پوششی DEA هستند، و مجموعه دامنه این پارامترها است که به فرضیات مربوط به بازده به مقیاس مدل بستگی دارد. امکان تولید تعیین شده در DEA مجموعه‌ای از نقاط عملیاتی عملی را نشان می‌دهد که عامل می‌تواند یکی را انتخاب کنـد کـه بـه بهترین وجه متناسب با هدف خود باشد (یعنی به بیشینه کردن درآمد) این یک ویژگی اصلی DEA است، ویژگی‌ای که بـه آن ویژگـی غیـر پـارامتری می‌گویند، که مجموعه امکان تولید از داده‌های مشاهده شده استنباط می‌شود. این کار با برخی از مفروضات اساسی مانند دور ریختن آزادانه ورودی ها و خروجی ها انجام می شود (یعنی با توجه به یک نقطه عملیاتی امکان پذیر، مصرف ورودی بیشتر و تولید خروجی کمتر امکان پذیر اسـت)، تحـدب (بـه عنوان مثال اگر دو نقطه عملیات امکان پذیر باشد، هر ترکیب خطی محدب از آنها نیز امکان پذیر است) یا مقیاس پذیری (یعنی با توجه به یـک نقطـه عملیاتی امکان پذیر، هر نسخه مقیاس شده آن نیز امکان پذیر است). این نوع مفروضات دلیل این است که مجموعه امکان تولید با استفاده از ترکیبـات خطی داده های مشاهده شده، با متغیرهای λ که مشارکت هر مشاهده را در تعریف نقطه عملیات هدف تعیین می کند، تشکیل می شود. بسته بـه نـوع بدیهیات مقیاس پذیری (کامل، فقط رو به پایین یا هیچکدام) محدودیت های مختلفی بر روی متغیرهای λ اعمـال مـی شـود. بنـابراین، هنگـامی کـه

مقیاس پذیری کامل فرض می شود (که مربوط به فرض بازده ثابت به مقیاس، CRS است) پس تنها محدودیت ها منفی نبودن متغیرهای λ است اگر مقیاس پذیری فقط رو به پایین فرض شود (که مربوط به فرض بازده غیرافزاینده مقیاس، NIRS) است، مجموع متغیرهای λ باید کمتر از واحد باشد و

$$
\begin{array}{lll}
\max_{\succeq} & \tilde{c}^t y & \\
s.t. & X\lambda \leq x; & \\
 & Y\lambda \geq y; & [\tilde{P}_{\succeq}] \\
 & x \leq b; & \\
 & \lambda \in \Lambda, &
\end{array}
$$

در نهایت، اگر مقیاس پذیری در نظر گرفته نشده باشد (که مربوط به بازده متغیر به مقیاس است. ، VRS) سپس متغیرهای λ بایـد بـه وحـدت اضـافه شوند. این روش استاندارد استنباط فناوری DEA از داده های مشاهده شده است [بـه عنـوان مثـال. کـوپر و همکـاران (۲۰۰۰)]. بـا ایـن حـال، یـک محدودیت اضافی در مجموعه امکان تعریف شده در بالا وجود دارد و آن این است که مقدار منابع موجود داده شده اسـت. ایـن محـدودیت $x \leq b$ بـه طور خاص در این سناریوی برنامه نویسی تولید اعمال می شود تا امکان سنجی نقاط عملیاتی را به طور منطقی محدود کند.

به طور رسمی، مسئله برنامه نویسی خطی زیر باید حل شود.

$$
\begin{array}{ll}
\max & c^t y \\
s.t. & X\lambda \leq x; \\
 & Y\lambda \geq y; \\
 & x \leq b; \\
 & \lambda \in \Lambda,
\end{array}
$$

که در آن $c^t = (c_1, c_2, \dots, c_p)$

در سراسر این مقاله ما در نظر می گیریم که ایـن فنـاوری بـازده متغیـری را بـه مقیـاس نشـان مـی دهـد، و بنـابراین، $\Delta = \{\lambda \in R6D : \lambda \geq 0, \sum_{l=1}^{D} \lambda_l = 1\}$ یک استدلال مشابه می تواند برای بازده ثابت به مقیاس توسعه یابد. Jahanshahloo et al (۲۰۰۷) نشان می دهد که در هر راه حل بهینه مدل فوق، قیود نشان داده شده توسط $Y\lambda \geq y$، به عنوان برابری نگه دارید. از طرف دیگر، راه حل بهینه‌ای از این مدل‌ها وجود دارد که محدودیت‌هایی که ورودی‌های هدف را تعریف می‌کنند $X\lambda \leq x$، همچنین به عنـوان برابـری نگـه می‌دارنـد. در نتیجـه، مسـئله تولیـد DEA (۱) می‌تواند به صورت معادل شکل بگیرد:

$$
\begin{array}{ll}
\max & c^t Y\lambda \\
s.t. & X\lambda \leq b; \\
 & \lambda \in \Lambda.
\end{array}
$$

در یک مسئله تولید در دنیای واقعی، پارامترهای مدل فوق ممکن است فقط به طور نادرست شناخته شوند، و بنابراین این پارامترها نمایشی را به عنـوان اعداد فازی می پذیرند. به عنوان مثال، درآمدهای فازی منعکس کننده ابهام یا درک مبهم از ماهیت قیمت ها هستند. برای سـادگی، در ایـن مقالـه مـا فقط درآمدهای فازی را در نظر می گیریم، اگرچه مسئله‌های مربوط به مجموعه کاملی از پارامترهای فازی نیز می تواند مورد مطالعه قـرار گیـرد. مـدل

تولید DEA فازی در اینجا به عنوان مسئله ای با تابع هدف فازی با این فرض فرموله می شود که تصمیم گیرنده کل درآمد را در مجموعه امکان تولید ناشی از مجموعه مشاهدات ثبت شده، با فروش محصولات بدون محدودیت تقاضای آنها به حداکثر می رساند. . به طور رسمی،

که در آن حداکثر باید به عنوان جستجوی مجموعه راه حل‌های کارآمد با توجه به رابطه باینری درک شود، که نشان دهنده یک ترتیب جزئی تعریف شده در اعداد خاموش تنظیم شده$N\ (R)$ است، و بردار $c^{\sim}\ \in\ N\ (R)^P$ بردار درآمد فازی در واحد است.

مجموعه‌ای سطح خروجی کارآمد (با توجه به نظم جزئی در نظر گرفته شده) به عنوان راه حل برای این مسئله بیشینه سازی اتخاذ می شود. اگر Q مجموعه بردارهای تولید امکان پذیر را نشان دهد و قسمت نامتقارن نظم جزئی باشد، مجموعه بردارهای تولید کارآمد برای مسئله [˜P] برابر است با:

$$\mathcal{E}(\tilde{P}_{\succeq}) = \{y \in Q : \ \nexists\ y' \in Q,\ \tilde{c}^t y' \succ \tilde{c}^t y\}$$

بردارهای تولید کارآمد مختلف مقادیر فازی هدف متفاوتی را ارائه می دهند. در نتیجه، مجموعه ای از مقادیر فازی کارآمد، $Ef(\tilde{}P)$ وجود دارد، که هر کدام مربوط به یک بردار تولید کارآمد،{$Ef(\tilde{}P)\ =\{\tilde{}c^t\ y{:}\ y\ \in\ \varepsilon(\tilde{}P\ )$ است. توجه داشته باشید که $Ef(\tilde{}P)$به ترتیب جزئی در نظر گرفته شده در مجموعه اعداد فازی بستگی دارد.

به طور مشابه در مورد مسئله درآمد واضح، تحت فرضیات خفیف در مورد ترتیب جزئی در نظر گرفته شده ۲، مسئله تولید DEA فازی، [˜P]، به طور معادل می تواند به صورت زیر فرموله شود:

$$\begin{aligned} \max\nolimits_{\succeq}\ & \tilde{c}^t Y\lambda \\ s.t.\ & X\lambda \leq b; \\ & \lambda \in \Lambda. \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که برای هر مشاهده$l\in D, c^{\sim t}Y_l$ ارزیابی فازی از خروجی مکاتبات را نشان می‌دهد، و بنابراین تابع هدف فازی،$c^{\sim t}Y_l\lambda =$ $\sum_{l=1}^{D}\lambda_l c^{\sim t}Y_l$, نشان دهنده ارزیابی فازی کلی خروجی های مشاهده شده با وزن در . یعنی، مسئله را می توان به عنوان یافتن ترکیبات امکان پذیر از ارزیابی خروجی های مشاهده شده که حداکثر مقادیر را به دست می دهد، مشاهده کرد.

۳ بازی های تولید DEAفازی

جنبه های نظری بازی در مدل تولید زمانی به وجود می آید که مجموعه منابع توسط n عامل مختلف (بازیکن) کنترل شود. اجازه دهید N ={۱, ۲,... n} مجموعه بازیکنان باشد و فرض کنیم بازیکن i ∈ N دارای بردار منبعی است $\left(b_1^i, b_2^i, \dots, b_M^i\right)^t$ $bi\ =$ و$i = 1,2,\dots,n$.، اگر ائتلاف S تشکیل شود، مجموعه ای از منابع را کنترل می کند. $b(S)\ =\sum_{i\in S} b_i$. علاوه بر ادغام منابع، اعضای S بهترین شیوه های خود را به اشتراک می گذارند (مدل اشتراک فناوری) [به Lozano (۲۰۱۳) مراجعه کنید] با در نظر گرفتن، هنگام برنامه ریزی تولید هر یک از اعضای ائتلاف، کل مجموعه مشاهدات ثبت شده مربوط به تمام تولیدکنندگان در ائتلاف است. در این شرایط می توان یک بازی مشارکتی را در نظر گرفت تا مشخص شود که نتیجه کل چگونه باید بین بازیکنان تخصیص داده شود.

برای یک ائتلاف معین، S ⊆ N، مجموعه مشاهدات ثبت شده فرآیند تولید مربوط به همه اعضای ائتلاف را در نظر بگیرید. اگر تعداد مشاهدات ثبت شده عامل i، D(i) باشد، $D(S)\ =\ \sum_{i\in S} D(i)$ تعداد مشاهدات موجود برای ائتلاف S است. ماتریسی را در نظر بگیرید که ستون های آن ورودی های مشاهده شده هستند، $X(\,S) \in R^{M\times D(S)}$، و ماتریسی که ستون های آن خروجی های مشاهده شده هستند، $Y(S)\ \in$ $R^{P\times D(S)}$.

هنگامی که این داده ها با مدل ادغام می شوند، بردار منابع b(S) ائتلاف S را قادر می سازد تا کالاها را مطابق با مسئله زیر تولید کند:

$$\begin{aligned} \max\nolimits_{\succeq} \quad & \tilde{c}^t y(S) = \tilde{c}^t \textstyle\sum_{i\in S} y^i \\ s.t. \quad & X(S)\lambda(i) \le x^i, \ \forall i \in S; \\ & Y(S)\lambda(i) \ge y^i, \ \forall i \in S; \\ & \textstyle\sum_{i\in S} x^i \le b(S); \\ & \lambda(i) \in \Lambda^S, \ \forall i \in S, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\nolimits_{\succeq} \quad & \sum_{i\in S} \tilde{c}^t Y(S)\lambda(i) \\ s.t. \quad & \sum_{i\in S} X(S)\lambda(i) \le b(S); \qquad [\tilde{P}(S)] \\ & \lambda(i) \in \Lambda^S, \ \forall i \in S, \end{aligned}$$

که معادل مسئله بهینه سازی فازی است:

که در آن$\Lambda^S = \{\lambda \in R^{D(S)}: \lambda \ge 0, \sum_{l=1}^{D(S)} \lambda_l = 1\}$.

توجه داشته باشید که ائتلاف های $S \subseteq N$ ممکن است وجود داشته باشند که برای آنها x در بدنه محدب مجموعه ورودی های مشاهده شده وجود نداشته باشد، به طوری که $x \le b(S)$، و بنابراین$[\tilde{P}(S)]$ غیر ممکن است. ما توجه را به مسئله ات تولید فازی محدود می کنیم، به طوری که مسئله ائتلاف بزرگ،$[\tilde{P}(N)]$ ، امکان پذیر است، و بسته به اینکه $[\tilde{P}(S)]$ امکان پذیر است یا نه، بین ائتلاف های امکان پذیر و غیرقابل اجرا تمایز قائل می شویم. مجموعه ائتلاف های امکان پذیر با F و مجموعه ائتلاف های غیرقابل اجرا با

$\bar{F} = 2N\backslash F$ نشان داده می شود.

راه حل های کارآمد $[\tilde{P}(S)]$ مجموعه ای از مقادیر فازی را برای ائتلاف S، $Ef(\tilde{P}(S))$ فراهم می کند. نتیجه همکاری $Ef(\tilde{P}(N))$ همچنین توسط مجموعه ای از اعداد فازی نشان داده شده است. نگرانی ما طراحی رویه هایی برای تخصیص مزایای فازی از عوامل درگیر است. این رویه ها باید ماهیت مبهم ارزش ائتلاف را با از دست دادن حداقل ممکن، اطلاعات موجود در مدل اصلی در نظر بگیرند. توجه داشته باشید که حل مسئله$[\tilde{P}(S)]$ برای ائتلافهای مختلف $S \subseteq N$ شامل بار محاسباتی قابل توجهی را نشان می دهد. با این حال، در رویکرد ارائه شده در این مقاله, $[\tilde{P}(S)]$ لازم نیست برای تخصیص های میانی حل شود زیرا راه حل یک مسئله خطی منفرد مرتبط با ائتلاف بزرگ، تخصیص مزایای فازی را فراهم می کند.

در این چارچوب ما به طور طبیعی می توانیم بازی تولید DEA فازی را معرفی کنید. یک بازی تولید DEA فازی یک جفت است، $(N, \tilde{V})$، جایی که $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ مجموعه ای از بازیکنان است و $\tilde{V}$ نقشه‌ای است که زیر مجموعه‌ای از اعداد فازی، $\tilde{V}(S)$ را به هر ائتلاف اختصاص می‌دهد $S \subseteq N$. مجموعه‌های $\tilde{V}(S)$ مجموعه‌های مشخصه نامیده می‌شوند و توسط:

$$\begin{aligned} & \tilde{V}(\emptyset) = \tilde{0} \\ & \tilde{V}(S) = Ef(\tilde{P}(S)) \quad \forall S \subseteq N \end{aligned}$$

هر عدد فازی در $\tilde{V}(S)$ یک ارزش فازی را نشان می‌دهد که بازیکنان ائتلاف S می‌توانند توسط خودشان تضمین کنند.

۳.۱ تخصیص فازی

از آنجایی که مقادیر اختصاص داده شده به ائتلاف‌ها توسط $\tilde{V}$ مجموعه‌ای از اعداد فازی است، وضعیتی که ما مطالعه می‌کنیم، عدم دقت و مبهم بودن را با توجه به بازده نشان می‌دهند. ما در اینجا یک تحلیل پیشین ارائه می‌دهیم، یعنی، ما راه حلی را پیشنهاد می‌کنیم که قبل از رفع مسئله برطرف شود.

هدف اصلی در بازی تولید DEA فازی تعیین چگونگی پرداخت یک فازی قابل دستیابی در $\tilde{V}(N)$ بین بازیکنان تقسیم می‌شود. بسط ایده تخصیص در بازی های اسکالر به بازی های تولید فازی DEA شامل استفاده از تخصیص فازی $\tilde{Z} = (\tilde{z}(1),\ldots,\tilde{z}(n))$ است که در آن $\tilde{z}(i) \in N(R)$، $i = 1,\ldots,n$ ، مخفف پرداخت i امین بازیکن است. مجموع $\tilde{Z}(S) = \sum_{i\in S} \tilde{z}(i)$ بازده فازی کلی است که توسط ائتلاف S به دست آمده است. برای هر بازی تولید فازی DEA $(N,\tilde{V})$، یک تخصیص فازی بردار

$\tilde{Z} \in N(R)^n$ است. طوری که $\tilde{Z}(N) \in \tilde{V}(N)$. مجموعه تمام تخصیص‌های بازی تولید فازی $(N,\tilde{V})$ را با $I * (N,\tilde{V})$ نشان دهید.

۳.۲ هسته اصلی و اولویت‌های اصلی

در بازی‌های اسکالر، اگر ائتلاف اولی مقدار بیشتری نسبت به دومی به اعضای ائتلاف بدهد، تخصیص بر دیگری غالب است. در زمینه ما باید تخصیص های فازی را از طریق ائتلاف ها مقایسه کنیم. علاوه بر این، در کلاس بازی هایی که ما در حال تجزیه و تحلیل هستیم، مقدار فازی داده شده توسط تخصیص به ائتلاف باید با مجموعه مقادیر فازی ائتلاف مقایسه شود. روشی برای مقایسه مقدار فازی داده شده توسط تخصیص به ائتلاف با مجموعه مقادیر فازی ائتلاف این است که مشخص شود تخصیص $\tilde{Z}$ به همان اندازه مجموعه $\tilde{V}(S)$ ترجیح داده می شود هر زمان که بازده های انباشته فازی داده شود. با تخصیص $\tilde{Z}$ به ائتلاف S، $\tilde{Z}(S)$، کمترین ارجحیت را نسبت به هر یک از اعداد فازی در $\tilde{V}(S)$ دارد.

این رابطه ما را به هسته ترجیحی برای بازی‌های فازی مشارکتی با ارزش مجموعه هدایت می‌کند، همانطور که در Hinojosa et al تعریف شده است. (۲۰۱۳).

تعریف ۱ هسته ترجیحی بازی تولید DEA فازی $(N,\tilde{V})$ مجموعه ای از تخصیص ها، $\tilde{Z} \in I * (N,\tilde{V})$ است، به طوری که

$\tilde{Z}(S) \geq \tilde{\omega}V(S), \forall S \subset N$. این مجموعه را با $C(N,\tilde{V})$ نشان می دهیم.

با تخصیص در هسته ترجیحی، ائتلاف ها یک مقدار فازی به دست می آورند که حداقل به خوبی هر یک از مقادیر فازی در مجموعه مشخصه است.

در این مرحله باید مشخص کنیم که کدام ترتیب جزئی برای مقایسه اعداد فازی اتخاذ خواهد شد. اعداد فازی معمولاً با تعداد محدودی از α–کات نشان داده می شوند.

به طور کلی این نمایش به معنای از دست دادن اطلاعات است، با این حال، در بیشتر مواردی که در ادبیات در نظر گرفته شده است، این تقریب دقیق است. در واقع، اگر تابع عضویت توسط یک تابع خطی تکه‌ای داده شود، تنها تعداد محدودی از مجموعه‌های α–کات متفاوت برای توصیف دقیق عدد فازی مربوطه مورد نیاز است. بنابراین، اعداد فازی را می توان تنها با مقایسه تعداد محدودی از مجموعه های α–کات مقایسه کرد. علاوه بر این، از آنجایی که توابع خطی شبه مقعر تکه تکه در مجموعه توابع شبه مقعر متراکم هستند، این رویکرد می تواند برای تقریب اعداد فازی در هر دقت معین استفاده شود.

با توجه به یک مجموعه کلی از برش ها، $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{r-1} < \alpha_r = 1$، برای $j = 1,2, \tilde{z}^j_{\alpha k}$، به ترتیب نشان دهنده نقطه انتهایی پایین و بالایی بازه $\tilde{z}_{\alpha k}$ است. توجه داشته باشید برای هر $k = 1,\ldots,r, \tilde{z}^1_{\alpha k} \leq \tilde{z}^2_{\alpha k}$ و برای همه $k = 1,\ldots,r-1, \tilde{z}^1_{\alpha k+1} \geq \tilde{z}^1_{\alpha k}$ و $\tilde{z}^2_{\alpha k+1} \leq \tilde{z}^2_{\alpha k}$. همچنین توجه داشته باشید برای $\tilde{c} \in N(R)^P$ و $y \in R^P$،

$$(\tilde{c}^t y)^j_{\alpha_k} = (\tilde{c}_1)^j_{\alpha_k} y_1 + \cdots + (\tilde{c}_P)^j_{\alpha_k} y_P.$$

در این مقاله ما دستورات فازی استاندارد را در نظر می‌گیریم، که با در نظر گرفتن تعداد نامحدود α–کات ها تعریف می‌شوند. با توجه به مجموعه عمومی برش ها، دستورات فازی استاندارد مربوطه عبارت است از: برای $\tilde{z}$ ، $\tilde{w} \in N(R)$

$\tilde{z} \geq \tilde{w} \leftrightarrow \tilde{z}^j_{\alpha_k} \geq \tilde{w}^j_{\alpha_k}$ و برای همه $j = 1,2$, $k = 1,\ldots,r$.

اگر یک دستور فازی استاندارد در نظر گرفته شود، یک شرط لازم و کافی برای تعلق یک تخصیص به هسته ترجیحی بازی فازی را می توان بر حسب حداکثر مقادیر α–کات مربوط به ارزش ائتلاف ها ایجاد کرد. به طور رسمی، فرض کنید $w * (S) \in R^{r \times ۲}$ یک ماتریس $r \times 2$ باشد که اجزای آن، برای هر $j = 1,2$ و هر $k = 1,\ldots,r$ داریم $w * (S)^j_k = \max_{\tilde{w}\in\tilde{V}(S)}\{\tilde{w}^j_{\alpha_k}\}$.

با این نماد، تخصیص بازی تولید DEA فازی $(N,\tilde{V})$ متعلق به هسته ترجیحی، $\tilde{Z} \in C(N,\tilde{V})$ هست، اگر و فقط اگر برای همـه $S \subset N$, $\tilde{Z}(S)^j_{\alpha_k} \geq w*(S)^j_k$ برای همه $k = 1،...، r$ ، $j = 1، 2$.

با توجه به تخصیص $\tilde{Z} \in I*(N,\tilde{V})$ و ائتلاف S ⊂ N، ما ترجیح ائتلاف S را با توجه به تخصیص $\tilde{Z}$ تعریف می‌کنیم:

$$E(S,\tilde{Z}) = \max_{j=1,2;\, k=1,2,\ldots,r} \left\{ w^*(S)^j_k - \tilde{Z}(S)^j_{\alpha_k} \right\}$$

این بیش از حد نارضایتی ائتلاف را در هنگام تخصیص فازی $\tilde{Z}$ کم می‌کند. توجه داشته باشید که هسته اصلی بـازی تولیـد DEA فـازی $(N,\tilde{V})$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$C(N,\tilde{V}) = \{\tilde{Z} \in I^*(N,\tilde{V}) :\ E(S,\tilde{Z}) \leq 0,\ \ \forall S \subset N\}.$$

بسته به بازی، شرایط زیربنای این تعریف از هسته ترجیحی ممکن است مجموعه ای با تعداد بی نهایت تخصیص فازی، یک تخصیص منحصر به فرد، یا ممکن است یک مجموعه خالی ایجاد کند. به منظور حل واقع بینانه مسئله ، و ارائه یک تخصیص واحد (یا مجموعه ای از تخصیصات کاهش یافتـه) که مفهوم عقلانیت را در زیربنای هسته ترجیحی به تصویر می کشد، این ایده را می توان گسترش داد. با پیروی از همان ایده ای که با کمترین هسـته برای بازی های واضح با ارزش مجموعه ای انجام می شود، ما به چیزی علاقه مندیم که آن را تخصیص حداقل هسته ترجیحی می نـامیم (تخصـیص هایی به گونه ای که مازاد بر اولویت حداقل باشد)، یعنی آن تخصیص هایی، $\tilde{Z}$، که بیشترین ائتلاف های ناراضی نمی تواننـد وضـعیت بهتـری داشـته باشند. این تخصیص ها به هسته ترجیحی زمانی تعلق دارند که خالی نباشد. علاوه بر این، آنها را می توان بهترین انتخاب داخل این مجموعـه دانسـت. در حالتی که هسته ترجیحی خالی است، این تخصیص ها نزدیک ترین تخصیص به هسته ترجیحی هسـتند و از ایـن نظـر مـی تـوان آنهـا را بهتـرین انتخاب نیز در نظر گرفت. به طور رسمی، ما مفهوم اولویت حداقل هسته را برای بازی فازی به شرح زیر معرفی می کنیم:

تعریف ۲

حداقل هسته ترجیحی بازی تولید DEA فازی $(N,\tilde{V})$ برابر است با:

$$LC(N,\tilde{V}) = \{\tilde{Z} \in I^*(N,\tilde{V}) :\ E(S,\tilde{Z}) \leq \varepsilon^*,\ \ \forall S \subset N\},$$

$$\text{where } \varepsilon^* = \min_{\tilde{Z} \in I^*(N,\tilde{V})} \max_{S \subset N} E(S,\tilde{Z}).$$

تخصیص ها در حداقل هسته ترجیحی آنهایی هستند که حداکثر مازاد ترجیح ائتلاف ها را در مجموعه همه تخصیص بردارهـای تولیـد در $\tilde{V}(N)$ بـه حداقل می رساند. بنابراین، مجموعه فقط شامل تخصیص آن دسته از بردارهای تولید است که در آنها این حداقل به دست آمده است.

در ادامه، نتایجی را برای محاسبه تخصیص ها در حداقل هسته ترجیحی ارائه می دهیم.

برای $S \subset N$ و $\tilde{Z} \in I*(N,V)$ مشخص کنید $t^j_k(S,\tilde{Z}) = w*(S)^j_k - \tilde{Z}(S)^j_{\alpha_k}$ و برای $j = 1,2$ و $k = 1,\ldots,r$.

بنابراین $E(S,\tilde{Z}) = \max_{j=1,2;k=1,2,\ldots,r}\{t^j_k(S,\tilde{Z})\}$.

مشاهده می‌شود، جایی که $w*(S)^j_k = \max_{\tilde{w} \in \tilde{V}(S)}\{\tilde{w}^j_{\alpha_k}\}$ و انحراف $t^j_k(S,\tilde{Z}) = -\tilde{Z}(S)^j_{\alpha_k}$ اگر $S \in \bar{F}$ و $S \in F$ آنگاه انحراف را می توان با حل مسئله برنامه ریزی خطی به دست آورد.

$$t_k^j(S,\tilde{Z}) = max \sum_{i\in S} (\tilde{c}Y(S))^j_{\alpha_k}\,\lambda(i) - \tilde{Z}(S)^j_{\alpha_k};$$
$$s.t. \quad \sum_{i\in S} X(S)\lambda(i) \le b(S); \qquad [P_k^j(S,\tilde{Z})]$$
$$\lambda(i) \ge 0,\ \sum_{l=1}^{D(S)} \lambda_l(i) = 1,\ \forall i \in S.$$

که در آن متغیرها $\lambda(i) \in R_+^{D(S)}$ برای همه $i \in S$ برقرار است.

نتیجه زیر یک مدل برنامه‌ریزی خطی منفرد را برای محاسبه تخصیص فازی ارائه می‌کند که متعلق به حداقل هسته ترجیحی فازی بـازی تولیـد فـازی DEA و درآمد کل فازی مربوطه است که ائتلاف بزرگ می‌تواند با این تخصیص به دست آورد.

قضیه ۱ تخصیص در هسته اصلی ترجیح$LC(N,\tilde{V}$ می تواند با حل مسئله برنامه نویسی خطی زیر محاسبه شود:

$$min\ \varepsilon$$
$$s.t.\quad b^t(S)\mu_S(j,k) + \textstyle\sum_{i\in S}\xi_S(i;j,k) - \tilde{Z}(S)^j_{\alpha_k} \le \varepsilon,\ \forall j=1,2,\ k=1\ldots,r,\ \forall S\in F;$$
$$-\tilde{Z}(S)^j_{\alpha_k} \le \varepsilon,\ \forall j=1,2,\ k=1,\ldots,r,\ \forall S\in\bar{F};$$
$$\mu^t_S(j,k)X(S) - (\tilde{c}Y(S))^j_{\alpha_k} + \xi_S(i;j,k)\mathbf{e}^t_{D(S)} \ge 0,\ \forall j=1,2;\ \forall k=1,\ldots,r,\ \forall i\in S,\ \forall S\in F;$$
$$\mu_S(j,k)\ge 0,\ \forall j=1,2,\ \forall k=1,\ldots,r,\ \forall S\in F;$$
$$\sum_{i\in N} X(N)\lambda(i) \le b(N);$$
$$\sum_{i\in N}(\tilde{c}Y(N))^j_{\alpha_k}\lambda(i) = (\tilde{Z}(N))^j_{\alpha_k},\ \forall j=1,2;\ \forall k=1,\ldots,r;$$
$$(\tilde{z}(i))^1_{\alpha_k} \le (\tilde{z}(i))^1_{\alpha_{k+1}},\ \forall k=1,\ldots r-1,\ \forall i\in N;$$
$$(\tilde{z}(i))^2_{\alpha_k} \ge (\tilde{z}(i))^2_{\alpha_{k+1}},\ \forall k=1,\ldots r-1,\ \forall i\in N;$$
$$(\tilde{z}(i))^1_{\alpha_k} \le (\tilde{z}(i))^2_{\alpha_k},\ \forall k=1,\ldots r,\ \forall i\in N;$$
$$\lambda(i)\in\Lambda^N,\ \forall i\in N;$$
$$\mu_S\ge 0,\ \forall S\in F;$$

جایی که F و $\bar{F}$ به ترتیب مجموعه‌ای از ائتلاف‌های امکان‌پذیر و غیرممکن از مسئله تولید DEA هستند.

اثبات یادداشت را بخاطر بسپارید $\left(\tilde{Z}(S)\right)^j_{\alpha_k} = \sum_{i\in S}\left(\tilde{z}(\,i)\right)^j_{\alpha_k}$ برای $S \subseteq N$.

از تعریف ۲ آمده است که تخصیص در حداقل هسته ترجیحی برای بازی تولید فازی $(N,\tilde{V})$، راه حل هایی برای

$$\begin{aligned} &min\ \varepsilon \\ &s.t.\ \ t_k^j(S,\tilde{Z}) \le \varepsilon,\ \forall\, j = 1,2,\ k = 1\ldots,r,\ \ \forall\, S \in N; \qquad [PLC] \\ &\qquad \tilde{Z} \in I(N,\tilde{V}) \end{aligned}$$

به عنوان یک نتیجه از دوگانگی در مسئله بهینه‌سازی خطی، مقدار $t_k^j(S,\tilde{Z})$ با استفاده از یک مسئله بیشینه سازی خطـی در $[P_k^j(S,\tilde{Z})]$ نشـان داده می‌شود. می‌تواند به عنوان راه حل یک مسئله کمینه سازی خطی محاسبه شود. یعنی با توجـه بـه تخصـیص فـازی، $\tilde{Z} \in I*(N,V)$ و یـک ائتلاف امکام پذیر، $S \in F$، برای $j = 1,2$ ، $k = ۱,\ldots,r$ و $t_k^j(S,\tilde{Z})$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} t_k^j(S,\tilde{Z}) = min\ & b^t(S)\mu_S(j,k) + \textstyle\sum_{i\in S}\xi_S(i;\,j,k) - \tilde{Z}(S)_{\alpha_k}^j \\ s.t.\ \ & \mu_S^t(j,k)X(S) - \left(\tilde{c}^t Y(S)\right)_{\alpha_k}^j + \xi_S(i;\,j,k)\mathbf{e}_{D(S)}^t \ge 0,\ \forall i \in S; \\ & \mu_S(j,k) \ge 0, \end{aligned}$$

که در آن $e_{D(S)}$ یک بردار D(S) بعدی است با تمام اجزای برابر با یک.

توجه داشته باشید که برای هر $k = 1, \ldots, r$ و هر $j = 1,2$ و متغیرهای موجـود در ایـن نمـایش $t_k^j(S,\tilde{Z})$ عبارتنـد از $\mu S(j,k) \in R_+^M$ و $\xi S(i;j,k) \in R$ ، برای $i \in S$. برای یک S ثابت و یک $\tilde{Z}$ ثابت، این متغیرها بـه متغیرهـای موجـود در قیـودی کـه اطمینـان می‌دهنـد $\tilde{Z} \in I(N,\tilde{V}), (\tilde{z}(i))_{\alpha_k}^j$، که نقاط شدید فواصل مربوط به α-کات مقادیر فازی $\tilde{z}(i)$ اسـت. متغیرهـای دیگـر در ایـن مسـئله پارامترهـای DEA، $\lambda(i), i \in N$ هست. بنابراین، متغیرهای درگیر در مسئله به کمینه سازی برای به دست آوردن مقادیر $t_k^j(S,\tilde{Z})$ مستقل از متغیرهایی هسـتند کـه بردارهای تولید کارآمد را تولید می‌کنند. بنابراین، برای هر S و هر $\tilde{Z}$ ، بیان $t_k^j(S,\tilde{Z})$ به عنوان یک مسئله کمینه سازی می‌تواند در مسئله بـه کمینـه سازی $[PLC]$ ادغام شود و یک مسئله کمینه‌سازی خطی منفرد حاوی تمام محدودیت‌ها و متغیرها ایجاد کرد.

با حل این مسئله برنامه‌ریزی خطی، تخصیص‌های فازی به دست می‌آیند که نشان‌دهنده سود حاصل از یک بـردار تولیـد کارآمـد در هنگـام همکـاری عوامل است. علاوه بر این، این بردار تولید کارآمد، $\sum_{i\in N} Y(N)\lambda*(i)$، حداقل مازاد ترجیح ائتلاف ها را به دست می‌آورد. شایان ذکـر اسـت کـه نمایش مقادیر فازی ناشی از مدل خطی از نظر تعدادی از برشهای α-کات مطابق بـا ماهیـت مقـادیر فـازی اسـت کـه قیمت‌هـا را نشـان می‌دهـد از محصولات.

٤ نمونه‌های عددی

٤.١ مجموعه داده‌های Färe و Zelenyuk

داده‌ها برای مثال عددی زیر یک نسخه فازی از موارد موجود در Färe and Zelenyuk(۲۰۰۳) اسـت. چهـار بنگـاه بـا نام‌هـای ۱،۲،۳و۴ $N = \{1,2,3,4\}$ را در نظر بگیرید که دو محصول مختلف را تولید می‌کنند با استفاده از دو ورودی. پنج مشاهده ضبط شده بـرای هـر بنگـاه در دسـترس است. بردار منابع موجود و مشاهدات ثبت شده از فرآیند تولید مربوط به چهار تولیدکننده در جدول ۱ نشان داده شده است. شایان ذکر است کـه در ایـن حالت همه ائتلاف‌ها امکان‌پذیر هستند. یعنی برای همه $S \subseteq N$، x در بدنه محدب مجموعه ورودی‌های مشاهده شده وجود دارد به گونه‌ای که $x \le b(S)$.

Table 1 Available resources and recorded observations

Firm i	Available resources $\mathbf{b}^i$	Recorded observations $X(i)$	$Y(i)$
1	$\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 39 & 37 & 35 & 34 & 33 \\ 49 & 45 & 55 & 63.97 & 53 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 19 & 17.29 & 25 & 28 \\ 17.53 & 22 & 17 & 12.97 & 18.72 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 70 & 45 & 60 & 30 & 40 \\ 50 & 55.56 & 62.38 & 83.33 & 90 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 35 & 25 & 45 & 75 & 34 \\ 43 & 0 & 37.42 & 64.03 & 59.27 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 80 \\ 110 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 75 & 45 & 60 & 87 & 85 \\ 75 & 125 & 93.75 & 53.57 & 66.18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 82 & 78 & 35 & 75 & 85 \\ 75 & 101.7 & 93.54 & 120 & 111 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 100 \\ 140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 91 & 115.2 & 86.4 & 247 & 240 \\ 99 & 169 & 240 & 189 & 180 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 & 115 & 80 & 230 & 247 \\ 171 & 212 & 151 & 347 & 359 \end{pmatrix}$

Table 2 Fuzzy prices

α-level	Fuzzy prices $\tilde{c}_1$		$\tilde{c}_2$	
	Lower	Upper	Lower	Upper
1	1		0.1	
0	0.9	1.1	0	0.2

Table 3 A fuzzy triangular allocation

α-level	$\tilde{z}(1)$		$\tilde{z}(2)$		$\tilde{z}(3)$		$\tilde{z}(4)$		$\tilde{Z}(N) \in \tilde{V}(N)$	
	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
1	42.957		115.669		127.046		169.278		454.95	
0	38,5	51.46	90.873	134.312	104.357	151.911	134.179	204.308	367.909	541.991

برای محاسبه درآمد، ابتدا قیمت‌های فازی مثلثی را در نظر می‌گیریم. فقط دو قطعه α-کات برای نمایش این جوایز لازم بود. آن‌ها در جدول ۲ نشان داده شده اند.

با حل مسئله در قضیه ۱، $\varepsilon^* = -16.337$ بدست می‌آید. به عنوان یک نتیجه، هسته ترجیحی خالی نیست، یعنی، تخصیص‌های فازی وجود دارد که در آن همه نمایندگان و همه ائتلاف‌ها حداقل به اندازه هر یک از انتقامجویان می‌توانند درآمد فازی کسب کنند. تخصیص فازی در حداقل هسته اصلی ترجیحی بدست آمده است. برش‌های مربوط به α-کات در جدول ۳ آورده شده است، و عملکردهای عضویت در شکل ۱ نشان داده شده است.

این بدان معنی است که عدد فازی مثلثی $\tilde{z}(N)$ درآمد فازی مربوط به یک بردار تولید کارآمد است که حداقل مقدار اضافی از ائتلاف‌ها را فراهم می‌کند. تخصیص این درآمد فازی در اولویت حداقل هسته از یک مقدار مثلثی برای هر یک از عوامل تشکیل شده است.

ما می خواهیم تأثیر کاهش عدم قطعیت در قیمت ها را بر روی تخصیص هسته ترجیحی حداقل بررسی کنیم. برای این منظور، قیمت های فازی مثلثی با پشتوانه باریک تر را همانطور که در جدول ۴ نشان داده شده است، در نظر می گیریم.

حداقل مقدار ائتلاف در حال حاضر $\varepsilon^* = -18.3$ است. یک تخصیص فازی در حداقل هسته ترجیحی و برش های α مربوطـه در جـدول ۵ آورده شده است، و توابع عضویت در شکل ۲ نشان داده شده است.

کاهش عدم قطعیت در اعداد فازی نشان دهنده این است که قیمت خروجی بر نتایج، تأثیر گذاشته است. به رابطه بین مقدار کل فازی تخصیص یافته و کمیت های فازی تخصیص یافته به هر عامل در هر دو مورد توجه کنید. مقدار کل برای تخصیص در سطح α۱ با عدم قطعیت کمتـر در سـطح α۰ در حالت دوم بسیار مشابه است. همچنین عدم قطعیت کمتری در مقادیر تخصیص یافته به هر یک از عوامل وجود دارد. مقدار حداکثر مـازاد نیـز در حالـت دوم کاهش یافته است، یعنی میزان رضایت ائتلاف ها نسبت به تخصیص افزایش یافته است.

در حالت حدی که در آن قیمت ها واضح هستند، $c1 = 1$ و $c2 = 0.1$، مقدار حداقل مازاد، $\varepsilon^* = -20.365$ است. بنـابراین، هسـته بـازی اسکالر TU خالی نیست. این یک نتیجه کلی برای کلاس بازی‌های تولید DEA است [به (۲۰۱۳) Lozano مراجعه کنید].

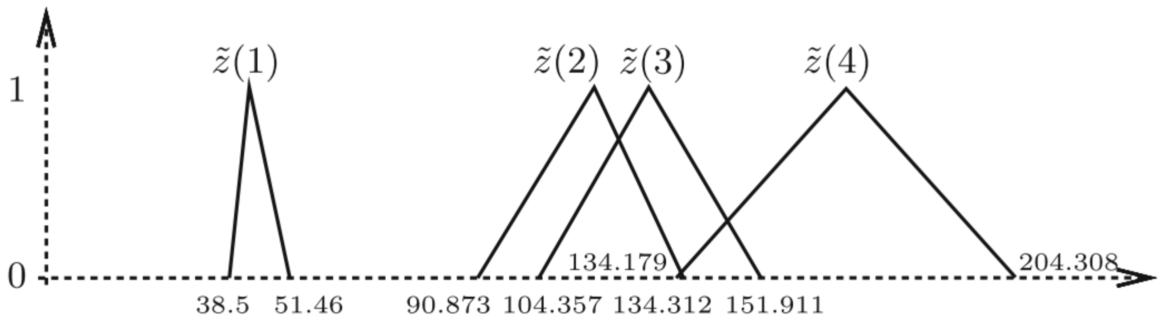

Fig. 1 An allocation in the preference least core

Table 4 More precise fuzzy prices

α-level	Fuzzy prices			
	$\tilde{c}_1$		$\tilde{c}_2$	
	Lower	Upper	Lower	Upper
1	1		0.1	
0	0.95	1.05	0.05	0.15

Table 5 A fuzzy triangular allocation

α-level	$\tilde{z}(1)$		$\tilde{z}(2)$		$\tilde{z}(3)$		$\tilde{z}(4)$		$\tilde{Z}(N) \in \tilde{V}(N)$	
	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
1	44.92		115.669		127.046		167.851		455.486	
0	42.691	47.149	102,07	126,372	116,868	140,12	149,966	185,736	411.595	499.376

یـک تخصـیص هسـته در کمتـرین هسـته شـامل $z(1) = 46.985$، $z(2) = 115.669$، $z(3) = 127.046$ و $z(4) = 165.786$ است و سطح رضایت ائتلاف ها با توجه به افزایش یافته است. به موارد عدم قطعیت در نهایـت، مـوردی را در نظـر می‌گیـریم کـه در آن قیمت‌ها با اعداد فازی ذوزنقه‌ای نشان داده می‌شوند که عدم قطعیت را در سطح α۰ و همچنین در سطح α۱ نشان می‌دهند، همانطور که در جـدول ۶ نشان داده شده است.

یک تخصیص فازی در حداقل هسته اصلی و برش‌های مربوط به α-کات در جدول ۷ نشان داده شده است و توابع عضویت در شکل ۳ نشان داده شده است.

در این حالت، مقدار کل فازی برای تخصیص شبیه به مورد اول در سطح α۰ است، اما باعدم قطعیت در سطح α۱. مقدار اختصاص یافته به هـر عامـل در بیشتر موارد نیزعدم قطعیت در سطح α۱ را نشان می‌دهد. حداکثر مازاد در این مورد با قیمت های فازی مثلثی منطبق است: $\varepsilon^* = -16.337$.

۴.۲ مجموعه داده‌های Welch و Barnum

این بخش کاربرد روش پیشنهادی را در زمینه تولید برق ارائه می‌دهد. به طور خاص، مجموعه داده از Welch و Barnum(۲۰۰۹) تهیه شده و بـه ۴۰ نیروگاه که دو ورودی مختلف مصرف می‌کنند، مربوط می‌شود، یعنی زغال سنگ و گاز [هر دو در میلیون هـا واحـد حرارتـی انگلـیس (MBTU)] اندازه گیری شده برای تولید یک خروجی واحد، برق [اندازه گیری شده Megawatts در ساعت (MWh)].

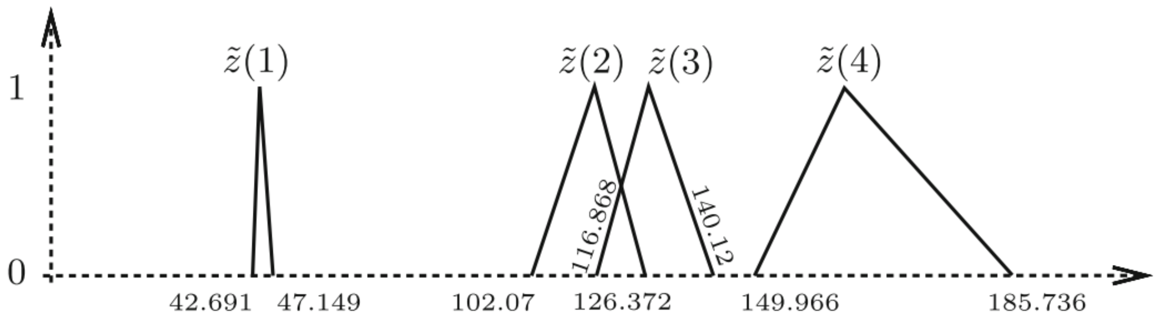

Fig. 2 An allocation in the preference least core

Table 6 Fuzzy prices

α-level	Fuzzy prices			
	$\tilde{c}_1$		$\tilde{c}_2$	
	Lower	Upper	Lower	Upper
1	0.95	1.05	0.05	0.15
0	0.9	1.1	0	0.2

Table 7 A fuzzy trapezoidal allocation

α-level	$\tilde{z}(1)$		$\tilde{z}(2)$		$\tilde{z}(3)$		$\tilde{z}(4)$		Total	
	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper
1	40.729	46.164	104.521	126.372	114.416	139.142	151.763	186.793	411.429	498.471
0	38.5	47.415	92.332	126.372	102.892	163.897	134.179	204.308	367.909	541.991

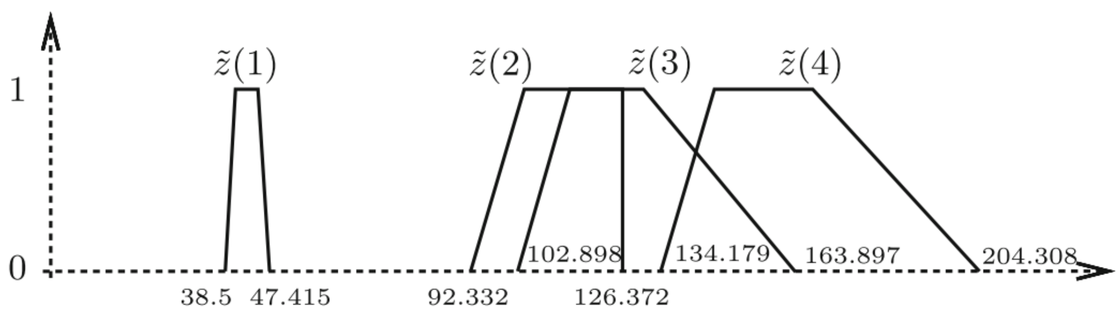

Fig. 3 An allocation in the preference least core

به خوبی شناخته شده است که قیمت عمده فروشی برق بسته به تقاضا، در تولید باد، تولید برق آبی و غیره بسیار متفاوت است. بنـابراین، در ایـن مـورد، مدل سازی این عدم قطعیت با در نظر گرفتن قیمت واحد فازی برای برق منطقی است. ما فرض مـی کنـیم کـه چهـار شـرکت وجـود دارد کـه قصـد همکاری دارند و هر شرکت دارای یک فناوری است که با ده بردار از چهل بردار ورودی/خروجی مشاهده شده تعریف می شود. مشاهدات ثبـت شـده در جدول ۸ نشان داده شده است. منابع موجود برای چهار شرکت یکسان فـرض شـده و مربـوط بـه ۲۵,۰۰۰,۰۰۰ MBTU زغـال سـنگ و ۲,۰۰۰,۰۰۰ MBTU گاز است.

جدول ۸ مشاهدات ثبت شده که تکنولوژی هر شرکت را تعریف می کند.

Firm	Observation	Coal (MBTU)	Gas (MBTU)	Electricity (MWh)
1	1	30, 294, 398	790, 320	3, 113, 275
	2	27, 926, 967	2, 550, 636	2, 867, 964
	3	21, 986, 752	1, 410, 674	2, 327, 664
	4	20, 974, 899	508, 244	2, 137, 471
	5	2, 502, 618	244, 302	187, 144
	6	15, 856, 662	3, 725, 422	1, 941, 594
	7	5, 325, 384	951, 687	452, 211
	8	3, 536, 185	163, 373	266, 080
	9	78, 253, 149	8, 748, 091	8, 819, 872
	10	33, 231, 640	2, 909, 784	3, 558, 851
2	1	13, 606, 948	2, 770, 980	1, 463, 766
	2	35, 122, 303	2, 509, 806	3, 793, 263
	3	3, 966, 695	93, 407	296, 085
	4	40, 586, 506	2, 569, 911	4, 189, 024
	5	6, 854, 478	4, 753, 060	1, 068, 182
	6	37, 629, 418	1, 666, 149	3, 953, 298
	7	12, 728, 829	987, 059	1, 206, 994
	8	20, 492, 696	14, 586, 950	3, 988, 193
	9	5, 487, 513	132, 764	472, 943
	10	10, 851, 116	1, 101, 141	1, 050, 721
3	1	105, 792, 226	2, 044, 087	10, 068, 396
	2	8, 194, 842	600, 839	755, 527
	3	68, 427, 176	23, 656, 034	9, 387, 075
	4	7, 672, 278	5, 699, 362	1, 268, 612
	5	8, 669, 126	272, 008	730, 010
	6	13, 640, 274	1, 885, 875	1, 518, 371
	7	9, 429, 930	218, 790	844, 955
	8	37, 642, 747	18, 584, 254	5, 438, 674
	9	21, 833, 538	540, 271	2, 148, 128
	10	25, 605, 350	749, 231	2, 687, 304

4	1	8, 354, 412	349, 435	690, 258
	2	33, 651, 611	8, 964, 868	3, 849, 802
	3	2, 498, 037	367, 034	197, 010
	4	3, 297, 863	150, 411	285, 503
	5	10, 158, 074	306, 901	854, 383
	6	39, 376, 529	1, 396, 389	4, 044, 295
	7	5, 719, 220	4, 435, 170	1, 130, 380
	8	45, 426, 084	6, 839, 605	5, 153, 723
	9	35, 898, 099	648, 762	3, 399, 125
	10	61, 873, 256	2, 203, 385	6, 076, 761

جدول ۹ تخصیص محاسبه شده با رویکرد پیشنهادی در هر سناریو (به میلیون دلار)

Firm	Output unit prices				
	Crisp	Triangular fuzzy number		Trapezoidal fuzzy number	
1	247.9415	$\alpha = 1.0$	248.2304	$\alpha = 1.0$	[221.0411, 276.8304]
		$\alpha = 0.0$	[220.3924, 275.3749]	$\alpha = 0.0$	[165.2943, 332.6197]
2	253.7036	$\alpha = 1.0$	249.9866	$\alpha = 1.0$	[221.8184, 276.744]
		$\alpha = 0.0$	[222.5119, 278.8452]	$\alpha = 0.0$	[166.7872, 331.6696]
3	254.7764	$\alpha = 1.0$	258.0145	$\alpha = 1.0$	[230.013, 285.664]
		$\alpha = 0.0$	[229.4704, 285.7237]	$\alpha = 0.0$	[172.1995, 342.3736]
4	248.0405	$\alpha = 1.0$	248.2304	$\alpha = 1.0$	[219.9826, 276.8304]
		$\alpha = 0.0$	[220.4804, 276.1251]	$\alpha = 0.0$	[165.3603, 332.6197]
Total revenue	1,004.462	$\alpha = 1.0$	1, 004.462	$\alpha = 1.0$	[892.8551, 1, 116.069]
		$\alpha = 0.0$	[892.8551, 1, 116.069]	$\alpha = 0.0$	[669.6413, 1, 339.283]

ما سه سناریو را با افزایش‌عدم قطعیت در نظر خواهیم گرفت. بنابراین، اجازه دهید ابتدا قیمت واحد واضح ۹۰ دلار در مگاوات ساعت را فرض کنیم. کل درآمدی که ائتلاف بزرگ در آن سناریو بدست آورد۱۰۰۷.۴۶۲ میلیون دلار است. در سناریوی دوم و سوم، قیمت واحد به ترتیب با یک عدد فازی مثلثی (۸۰، ۹۰، ۱۰۰) و با یک عدد فازی ذوزنقه ای شکل (۶۰، ۸۰، ۱۰۰، ۱۲۰) نشان داده می شود. بر این اساس، کل درآمد ائتلاف بزرگ با اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه ای نشان داده شده در ردیف آخر جدول ۹ نشان داده شده است.

در سه سناریو با استفاده از رویکرد پیشنهادی، یک تخصیص در حداقل هسته ترجیحی محاسبه شده است. مازادهای مرتبط به ترتیب برای قیمت واحد خروجی فازی ترد، مثلثی و ذوزنقه ای،$\varepsilon^* = -3.174049$ ، $\varepsilon^* = -2.821377$ و $\varepsilon^* = -2.116033$ (میلیون دلار) هستند. بنابراین، هسته بازی تولید DEA با قیمت های واحد واضح خالی است و هسته های ترجیحی بازی های تولید DEA با قیمت خروجی فازی نیز خالی هستند. علاوه بر این، تخصیص های به دست آمده متعلق به حداقل هسته های ترجیحی مربوطه است. یعنی با این تخصیص ها همه عوامل و همه ائتلاف ها حداقل به اندازه هر یک از درآمدهایی که خودشان می توانند تضمین کنند، درآمدهای فازی به دست می آورند. کاهش α-کات مربوطه در جدول ۹ آورده شده است. توجه داشته باشید که هر چه عدم قطعیت در قیمت واحد خروجی بزرگتر باشد، عدم قطعیت در درآمد کل و در تخصیص فازی محاسبه شده بیشتر است.

۵ نتیجه گیری اظهارات

در این مقاله موردی از بازی های تولید DEA با قیمت خروجی واحد فازی بررسی شده است. عدم قطعیت در قیمت خروجی به کل درآمدهای فازی برای ائتلاف بزرگ و بر این اساس به تخصیص فازی در بین بازیگران تبدیل می شود. برای مقابله با این وضعیت، از یک نظم فازی استاندارد مشتق شده از تعداد محدودی از برش‌های α-کات استفاده می‌شود تا بازی‌های تولید فازی DEA را به نسخه‌ای محدود از بازی‌های تولید DEA با ارزش تنظیم‌شده تبدیل کند، که برای آن می‌توان تخصیص حداقل هسته ترجیحی را محاسبه کرد. . محدودیت‌ها به این واقعیت اشاره دارند که

محدودیت‌های پایین‌تر و بالایی کاهش‌های α متفاوت (هم از کل درآمد و هم از سهمی که از آن به هر بازیکن اختصاص می‌یابد) باید به‌عنوان یک نتیجه از شخصیت تودرتوی برش‌های α-کات مرتب شوند.

بنابراین، راه‌حل پیشنهادی برای این نوع بازی‌های تولید DEA فازی از یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه درآمد کل فازی و تخصیص فازی متناظر استفاده می‌کند که تضمین می‌شود در حداقل هسته ترجیحی بازی تولید DEA با ارزش مجموعه قرار دارد. در نتیجه، این تخصیص فازی تا آنجا که می تواند پایدار است، به این معنا که هیچ تخصیص فازی امکان پذیر دیگری نمی تواند به مقدار کمتری از حداکثر مازاد (محاسبه شده برای همه ائتلاف ها) منجر شود. به عبارت دیگر، هیچ تخصیص فازی وجود ندارد که بتواند از راه حل به دست آمده از نظر رضایت کمترین ائتلاف بازیکنان، عملکرد بهتری داشته باشد. این معیار ثبات به طور گسترده در بازی‌های مشارکتی استفاده می‌شود، زیرا تضمین می‌کند که ائتلاف بزرگ شکسته نشود، زیرا هیچ سودی در انجام آن برای هیچ بازیکنی وجود ندارد.

رویکرد پیشنهادی با دو مجموعه داده متفاوت از ادبیات نشان داده شده است. هر یک از این مثال‌های گویا سناریوهای مختلفی را در نظر گرفته‌اند که مربوط به درجات مختلف عدم قطعیت در قیمت‌های تولید واحد است. همانطور که انتظار می رود، هر چه عدم قطعیت در قیمت های خروجی بیشتر باشد، عدم قطعیت در کل درآمد و تخصیص آن به بازیکنان نیز بیشتر خواهد بود. در هر مورد، نتایج کارایی و سودمندی رویکرد پیشنهادی را نشان می‌دهد.

به عنوان موضوعات چالش برانگیز برای تحقیقات بیشتر، اولین چیزی که به ذهن فرد می رسد، در نظر گرفتن سایر منابع عدم اطمینان علاوه بر قیمت های تولید واحد است. بنابراین، همانطور که بسیاری از رویکردهای DEA فازی وجود دارد که با داده های ورودی و خروجی فازی سروکار دارند، بازی های تولید DEA نیز می توانند با عدم قطعیت در ورودی ها و خروجی های مشاهدات ثبت شده در نظر گرفته شوند. این منجر به یک مجموعه امکان تولید فازی می شود که به وضوح مشکل را با توجه به مورد مورد مطالعه در این مقاله پیچیده می کند، که در آن مجموعه امکان تولید واضح است، و تنها درآمد مربوط به نقاط عملیاتی مختلف نامشخص است.

قدردانی این تحقیق با حمایت مالی وزارت اقتصاد و رقابت اسپانیا تحت پروژه (ECO۲۰۱۵-۶۸۸۵۶-P (MINECO/FEDER انجام شد.

منابع

Aubin, J. P. (1981). Cooperative fuzzy games. *Mathematics of Operations Research*, *6*(1), 1–13.

Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2000). *Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Färe, R., & Zelenyuk, V. (2003). On aggregate Farrell efficiencies. *European Journal of Operational Research*, *146*(3), 615–620.

González, A., & Vila, M. A. (1991). A discrete method for studying indifference and order relations between fuzzy numbers. *Information Sciences*, *56*, 245–258.

González, A., & Vila, M. A. (1992). Dominance relation on fuzzy numbers. *Information Sciences*, *64*, 1–16.

Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A., & Tavana, M. (2011). A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making. *European Journal of Operational Research*, *214*(3), 457–472.

Hinojosa, M. A., Mármol, A. M., Monroy, L., & Fernández, F. R. (2013). A multi-objective approach to fuzzy linear production games. *International Journal of Information Technology and Decision Making*, *12*(5), 927–943.

Jahanshahloo, G. R., Vieira Junior, H., Hosseinzadeh Lofti, F., & Akbarian, D. (2007). A new DEA ranking system based on changing the reference. *European Journal of Operational Research*, *181*(2007), 331–337.

Lertworasirikul, S., Fang, S. C., Nuttle, H. L., & Joines, J. A. (2003). Fuzzy BCC model for data envelopment analysis. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, *2*(4), 337–358.

Li, S., & Zhang, Q. (2009). A simplified expression of the Shapley function for fuzzy games. *European Journal of Operational Research*, *196*(1), 234–245.

Lozano, S. (2013). DEA production games. *European Journal of Operational Research*, *231*, 405–413.

Lozano, S., Hinojosa, M. A., & Mármol, A. M. (2015). *Vector-valued DEA production games. OMEGA*, *52*, 92–100.

Lozano, S. (2014). Computing fuzzy process efficiency in parallel systems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, *13*(1), 73–89.

Monroy, L., Hinojosa, M. A., Mármol, A. M., & Fernández, F. R. (2013). Set-valued cooperative games with fuzzy payoffs: The fuzzy assignment game. *European Journal of Operational Research*, *225*(1), 85–90.

Nishizaki, I., & Sakawa, M. (2001). *Fuzzy and multiobjective games for conflict resolution*. Heidelberg: Physica-Verlag.

Owen, G. (1995). *Game theory*. Cambridge: Academic Press.

Ramík, J., & Římánek, J. (1985). Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization. *Fuzzy Sets and Systems*, *16*(2), 123–138.

Welch, E., & Barnum, D. (2009). Joint environmental and cost efficiency analysis of electricity generation. *Ecological Economics*, *68*, 2336–2343.

Wu, H. C. (2012). Proper cores and dominance cores of fuzzy games. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, *11*(1), 47–72.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, *8*(3), 338–353.