# کاربردهای تبدیل سـومودوی فازی برای حل معادلات دیفرانسـیل فازی مرتبه اول

دانشجو: شایان رادی
استاد: محسن رستمی مال خلیفه

کد دانشجویی ۹۷۰۰۸۶۶۳۲

مقاله

# کاربردهای تبدیل سومودوی فازی برای حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول

Norazrizal Aswad Abdul Rahman , Muhammad Zaini Ahmad

موسسه ریاضیات مهندسی، دانشگاه مالزی پرلیس، پردیس اصلی Pauh Putra، ۰۲۶۰۰ Arau ، Perlis، Malaysia؛

ایمیل:

mzaini@unimap.edu.my

نویسنده ای که مسئول است باید ذکر شود؛

ایمیل:

norazrizalaswad@gmail.com;

تلفن:

+۶۰-۱۳-۵۹۴۸۹۰۴

مصحح علمی :

Carlo cafaro

*Received: ۲۰ April ۲۰۱۵ / Accepted: ۳ June ۲۰۱۵ / Published: ۱ July ۲۰۱۵*

**چکیده:** در این مقاله، تبدیل کلاسیک سومودو را در محیط فازی که به آن تبدیل سومودوی فازی (FST) می‌گویند، مطالعه می‌کنیم. ما همچنین برخی از نتایج در مورد خواص FST، مانند خطی بودن، حفظ، مشتق فازی، شیفت و قضیه کانولوشن پیشنهاد می‌کنیم. به منظور نشان دادن قابلیت FST، ما یک روش دقیق برای حل معادلات دیفرانسیل فازی (FDEs) ارائه می دهیم. یک مثال عددی برای نشان دادن استفاده از FST ارائه شده است.

**کلمات کلیدی**

عدد فازی؛ تبدیل سومودوی فازی؛ تمایز تعمیم یافته؛ معادله دیفرانسیل فازی; تبدیل سومودو تبدیل انتگرال

## ۱ مقدمه

تبدیل های انتگرال ابزارهای اساسی در حساب عملیاتی را تشکیل می دهند. آنها عملگرهای ریاضی هستند که به طور گسترده در حل بسیاری از مسائل عملی در ریاضیات کاربردی، فیزیک و مهندسی استفاده شده اند [۱-۴]. پیش ساز تبدیل های انتگرال تبدیل فوریه است که برای بیان توابع در یک بازه محدود استفاده می شود. از آن به بعد، تعدادی کار در مورد تئوری ها و کاربردهای تبدیل های انتگرال وجود دارد که برخی از آنها تبدیلات لاپلاس، Mellin و Hankel هستند [۵-۷]. پس از آن، مفهوم تبدیل های انتگرال برای حذف ضرورت فواصل محدود گسترش یافت. Watugala [۸،۹] تبدیل انتگرال جدیدی به نام تبدیل سومودو را پیشنهاد کرده است. تبدیل سومودو برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی در مسائل مهندسی کنترل استفاده شده است. Weerakon [۱۰،۱۱] تبدیل سومودو را بر روی معادلات دیفرانسیل جزئی گسترش داده است. سپس کار توسط Asiru [۱۲] ادامه یافت، که قضیه کانولوشن تبدیل سومودو را مطالعه کرد، که می‌توان آن را بر حسب سری‌های بی‌نهایت چند جمله‌ای و همگرا بیان کرد. در ادامه، Belgacem et al. [۱۳] بر دوگانگی لاپلاس-سومودو تأکید کرده اند، که گامی حیاتی در ایجاد نتایج جدید در تبدیل سومودو است. برای مثال، ویژگی دوگانگی برای فراخوانی معکوس پیچیده تبدیل سومودو، به عنوان فرمول انتگرال کانتور Bromwich [۱۴] استفاده شده است. علاوه بر این، در [۱۵]، کاربردهای تبدیل

سومودو بر روی توابع و معادلات بسل بررسی شده است. نظریه ها و کاربردهای تبدیل سومودو توسط بسیاری از نویسندگان مورد بررسی و کاوش قرار گرفته است (به [۱۶–۲۱] مراجعه کنید).

به طور کلی، تبدیل سومودو یک تبدیل انتگرالی محبوب برای حل معادلات دیفرانسیل در نظر گرفته می شود. این به دلیل خاصیت وحدت آن است که روند یافتن راه حل را آسان می کند. همچنین در مقایسه با سایر تبدیل‌های انتگرال قدرتمندتر است، زیرا تابع تبدیل شده شبیه تابع حاصل است.

بسیاری از مسائل دنیای واقعی با معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی می‌شوند. با این حال، ما نمی توانیم مطمئن باشیم که مدل ها کامل هستند. به عنوان مثال، مقدار اولیه مدل ها ممکن است به طور دقیق مشخص نباشد. مقدار اولیه ممکن است حاوی مقادیری عدم قطعیت باشد، مانند "کمتر از $x_0$"، "حدود $x_0$" یا "بیش از $x_0$". اگر چنین باشد، نمی توان از معادلات دیفرانسیل کلاسیک برای مدیریت این وضعیت استفاده کرد. بنابراین بررسی نظریه های دیگر برای غلبه بر این مشکل ضروری است. یکی از محبوب ترین نظریه ها برای توصیف این وضعیت، نظریه مجموعه های فازی [۲۲] است. با گنجاندن فازی در ریاضیات کلاسیک، بسیاری از نویسندگان مشتقات فازی [۲۳–۲۸]، معادلات دیفرانسیل فازی ( FDEs) [۲۹–۳۱] و معادلات دیفرانسیل کسری فازی (FFDEs) [۳۲–۳۴] را مطالعه کردند.

اخیراً Allahviranloo وAhmadi [۳۵] تبدیل لاپلاس فازی (FLT) را پیشنهاد کرده اند و کاربردهای آن را برای حل FDE ها نشان داده اند. سپس FLT برای حل FDE های خطی مرتبه دوم و توصیف فضای حالت سیستم های زمان پیوسته خطی فازی استفاده می شود [۳۶]. این کار بسیاری از نویسندگان را برانگیخت تا نظریه‌ها و کاربردهای FLT را در زمینه‌های ریاضی و مهندسی گسترش دهند [۳۷–۴۱]. این کار همچنین تعدادی از محققین را برانگیخت تا تبدیل کلاسیک سومودو را در محیط فازی مطالعه کنند. اولین تلاش توسط Ahmadi و Abdolrahman [۴۲] آغاز شد و توسط Alam Khan et al مورد مطالعه قرار گرفت. [۴۳]. در این مقاله، ما برخی از نتایج جدید را در مورد تبدیل سومودو در تنظیمات فازی، به ویژه در مورد خطی بودن و خواص حفظ اضافه می‌کنیم. برخی از نتایج دیگر ممکن است به موازات نتایج پیشنهادی در [۴۳] باشد. با این حال، تعریف ما از تبدیل سومودو در تنظیمات فازی کاملاً کلی است و نتایج به روش‌های مختلفی ارائه می‌شوند.

این مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲، چندین تعریف و مفهوم اساسی از اعداد فازی را یادآوری می کنیم. در بخش ۳، ما یک تعریف کلی از تبدیل سومودوی فازی (FST) ارائه می کنیم و ویژگی دوگانگی بین FST و FLT را بررسی می کنیم. ما همچنین برخی از قضایا و ویژگی‌های مربوط به FST را ارائه می‌کنیم. در بخش ۴، ما رویه های دقیقی برای حل FDE ها ایجاد می کنیم. بعداً در بخش ۶ نتیجه گیری می کنیم.

## ۲ مقدمات

در این بخش، برخی از تعاریف و قضایای مورد نیاز برای درک سهم در این مقاله را یادآوری می کنیم. تعریف عدد فازی به شرح زیر است.

**تعریف ۱.** [۴۴] با R مجموعه تمام اعداد حقیقی را نشان می دهیم. یک عدد فازی یک نگاشت U است: $R \to [0,1]$ با ویژگی های زیر:

(۱) U نیمه پیوسته بالایی است،

(۲) U محدب فازی است ، یعنی $U(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq min\{U(x),U(y)\}$ برای همه x ها، $y \in R$، $\lambda \in [0,1]$،

(۳) U نرمال است، یعنی $\exists x_0 \in R$ که برای آن$U(x_0)=1$ ،

(۴) $supp\ U=\{x \in R | U(x)>0\}$ تکیه گاه U است و بسته شدن آن، یعنی $cl(supp\ U)$ فشرده است.

تعریف زیر مجموعه اعداد فازی در سطح α است.

**تعریف ۲.** [۴۴] فرض کنید $F(R)$ مجموعه ای از تمام اعداد فازی در R باشد. مجموعه سطح α از یک عدد فازی

$U \in F(R)$، $\alpha \in [0,1]$ که با $U_\alpha$ نشان داده می شود، تعریف می شود. مانند:

$$U_\alpha = \begin{cases} \{x \in R | U(x) \geq \alpha, & 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ اگر} \\ cl(supp\ U), & \alpha = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

واضح است که مجموعه سطح α یک عدد فازی یک بازه بسته و محدود است، یعنی $[\underline{u_\alpha}, \overline{u_\alpha}]$، که در آن $\overline{u_\alpha}$ و $\underline{u_\alpha}$ به ترتیب کران بالا و کران پایینی U را نشان می دهند. از آنجایی که هر $y \in R$ را می توان به عنوان یک عدد فازی$\tilde{y}$ تعریف کرد:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} 1 \ , & t = y \text{ اگر} \\ 0 \ , & t \neq y \text{ اگر} \end{cases}$$

R را می توان در $F(R)$ جاسازی کرد.

**تذکر** [۴۵] فرض کنید X حاصلضرب دکارتی جهان های $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ باشد و $A_1, \ldots, A_n$ عدد فازی در $X_1, \ldots, X_n$ به ترتیب باشد. یک تابع فازی f از X به یک جهان Y، $y = f(x1, \ldots, xn)$ نگاشت دارد. سپس، اصل گسترش به ما اجازه می دهد تا یک مجموعه فازی B را در Y تعریف کنیم:

$$B = \{(y, U_B(y)) | y = f(x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \in X\}$$

بطوری که:

$$U_B(y) = \begin{cases} sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in f^{-1}(y)} \\ \min\{U_{A_1}(x_1), \ldots, U_{A_n}(x_n)\} & f^{-1} \neq 0 \text{ اگر} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

جایی که $f^{-1}$ معکوس $f$ است.

برای n=۱، اصل بسط به صورت زیر کاهش داده می‌شود:

$$B = \{(y, U_B(y)) | y = f(x), x \in X\}$$

بطوری که:

$$U_B(y) = \begin{cases} sup_{x\in f^{-1}(y)} U_A(x), & f^{-1} \neq 0 \text{ اگر} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با مراجعه به اصل بسط، جمع در $F(R)$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$(U \oplus V)(x) = sup_{y\in R}\ \min\{U(y), V(x-y)\}, x \in R$$

و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می شود:

$$(k\odot U)(x)=\begin{cases}U(x/k) & k>0\,,\\ \tilde{0}, & k<0,\end{cases}$$

جایی که$\tilde{0}\in F(R)$

علاوه بر این برای همه سطوح $\alpha$ داریم:

$$[U_\alpha \oplus V\alpha]=U_\alpha+V\alpha$$

و

$$[k\odot U]_\alpha=kU_\alpha$$

صادق است.

در این مقاله، علامت $U_\alpha$ نشان دهنده مجموعه سطح $\alpha$ از یک عدد فازی است.

ممکن است نتیجه بگیریم که عدد فازی توسط نقاط انتهایی فواصل $U_\alpha$ تعیین می شود. این منجر به نمایش دیگری از یک عدد فازی می شود که توسط دو تابع نقطه پایانی $\underline{u_\alpha}$ و $\overline{u_\alpha}$ تعریف می شود$Friedman\ et\ al$ [۴۶] و $Ma\ et\ al$. [۴۷] بازنمایی را اینگونه تعریف کرد:

**تعریف ۳.** یک عدد فازی U به شکل پارامتریک یک جفت $[\underline{u_\alpha},\overline{u_\alpha}]$ از توابع $\underline{u_\alpha}$ و $\overline{u_\alpha}$ ، $\alpha\in[0,1]$ است که شرایط زیر را برآورده می کند:

(۱) $\underline{u_\alpha}$ یک تابع پیوسته چپ محدود بدون کاهش در $[0،1]$ و راست پیوسته در صفر است،

(۲) $\overline{u_\alpha}$ یک تابع پیوسته چپ محدود بدون افزایش در $[0،1]$ و راست پیوسته در صفر است،

(۳) $\underline{u_\alpha}\ \le\ \overline{u_\alpha}$

یک عدد فازی را می توان به عنوان تابع عضویت فازی نشان داد. یکی از متداول‌ترین توابع عضویت فازی که در ادبیات استفاده می‌شود، تابع عضویت مثلثی فازی است. به صورت زیر تعریف می شود.

**تعریف ٤.** اجازه دهید $U\in\ F(R)$. U یک عدد فازی مثلثی نامیده می شود که تابع عضویت آن به شکل زیر باشد:

$$U(x)=\begin{cases}0, & \text{اگر}\quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{اگر}\ a\le x<b\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & \text{اگر}\ b\le x<c\\ 0, & \text{اگر}\quad x>c\end{cases}$$

و سطح α آن به سادگی $U_\alpha=[a+(b-c)\alpha,c-(c-b)\alpha]$ است، برای هر$\alpha\in[0,1]$ .

**تعریف ۵.** [۴۶] برای $U_\alpha = [\underline{u_\alpha}، \overline{u_\alpha}]$ دلخواه، $V_\alpha = [\underline{v_\alpha}، \overline{v_\alpha}]$ و k>۰ ، ما جمع، تفریق و ضرب در k را برای $U_\alpha$ و $V_\alpha$ تعریف می کنیم:

۱ جمع

$$U_\alpha \oplus V_\alpha = \left[\, \underline{u_\alpha} + \underline{v\alpha}\,, \overline{u_\alpha} + \overline{v_\alpha} \right]$$

۲ تفریق

$$U_\alpha \ominus V_\alpha = \left[\, \underline{u_\alpha} - \underline{v_\alpha}\,, \overline{u_\alpha} - \overline{v_\alpha} \right]$$

۳ ضرب عددی

$$k \odot U_\alpha = \begin{cases} \left[\, k\underline{u_\alpha}, k\overline{u_\alpha} \right], & k \geq 0 \\ \left[ k\overline{u_\alpha}, k\underline{u_\alpha} \right], & k < 0 \end{cases}$$

اگر k=-۱، آنگاه $k \odot U_\alpha = -U_\alpha$.

**تعریف ٦.** [۴۸] فاصله $D(U, V)$ بین دو بازه فازی U و V به صورت زیر تعریف می شود:

$$D(U, V) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H(U_\alpha, V_\alpha),$$

بطوری که:

$$d_H(U_\alpha, V_\alpha) = \max\{|\, \underline{u_\alpha} - \underline{v_\alpha}\,|, |\overline{u_\alpha} - \overline{v_\alpha}|\}$$

فاصله Hausdorff بین $U_\alpha$ و $V_\alpha$ است.

بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که D یک فضای متریک است و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱ $D(U \oplus W, V \oplus W) = D(U, V), \forall U, V, W \in F(R)$

۲ $D(k \odot U, k \odot V) = |k| D(U, V), \forall k \in R, U, V \in F(R),$

۳ $D(U \oplus V, W \oplus E) \leq D(U, W) + D(V, E), \forall U, V, W, E \in F(R)$

۴ $(D, F(R))$ یک فضای کامل متریک است.

**تعریف ۷.** [۴۹] فرض کنید $f : R \to F(R)$. تابع f پیوسته نامیده می شود اگر برای هر $x_0 \in R$ و هر ε > ۰، δ > ۰ وجود داشته باشد، به طوری که اگر $|x - x_0| < \delta$ ، سپس $D(f(x)، f(x_0)) < \varepsilon$.

**قضـــیه ۱.** [۵۰] فرض کنید $f: R \to F(R)$، و آن را با $[\underline{f_\alpha}(x),\bar{f_\alpha}(x)]$ نشـــان می دهیم. برای هر $\alpha \in [0,1]$ ثابت، فرض کنید که $\underline{f_\alpha}(x)$ و $\bar{f_\alpha}(x)$ برای هر $b \geq a$ با Reimann قابل انتگرال پذیری در [a,b] هســـتند، و فرض کنید که دو $\underline{M_\alpha}$ و $\overline{M_\alpha}$ مثبت وجود دارد، مانند **** برای هر $b \geq a$. سپس، $f(x)$ نامناسب Reimann–انتگرال پذیر فازی در $[a,\infty)$، و نامناسب Reimann–انتگرال پذیر فازی یک عدد فازی است. علاوه بر این، ما داریم:

$$\int_a^\infty f(x)dx = [\int_a^\infty \underline{f_\alpha}(x)dx\,, \int_a^\infty \bar{f_\alpha}(x)dx]$$

**گزاره ۱.** [۵۱] اگر هر یک از $f(x)$ و $g(x)$ یک تابع با مقدار فازی و قابل ادغام Reimann–انتگرال پذیر فازی در $[a,\infty)$ باشـــد، آنگاه $f(x) \oplus g(x)$ Reimann– انتگرال پذیر فازی قابل ادغام در $[a,\infty)$. علاوه بر این، ما داریم:

$$\int_I \big(f(x) \oplus g(x)\big)dx = \int_I f(x)dx \oplus \int_I g(x)dx$$

تعریف بعدی تمایز پذیری Hukuhara است که به عنوان مشتقات H نیز شناخته می شود. تعریف مربوط به تفاوت H مجموعه ها است و به شرح زیر معرفی شده است.

**تعریف ۸.** [۲۷] اجازه دهید x، $y \in F(R)$ . اگر $z \in F(R)$ وجود داشته باشد، به طوری که $x = y \oplus z$ ، آنگاه z را تفاضلH x و y می نامند و با $x -^H y$ نشان داده می شود.

**تعریف ۹.** [۵۲،۵۳] فرض کنید $f: (a,b) \to F(R)$ و $x_0 \in (a,b)$ . ما می گوییم که $f$ در $x_0$ به شـــدت قابل تعمیم اســـت، اگر یک عنصـــر $f'(x_0) \in F(R)$ وجود داشته باشد، به طوری که:

۱ برای همه h> ۰ به اندازه کافی کوچک، $f(x_0+h) -^H f(x_0)$، $f(x_0) -^H f(x_0-h)$ و حدود (در متریک D) وجود دارد:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) -^H f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0) -^H f(x_0-h)}{h} = f'(x_0)$$

یا

۲ برای همه h> ۰ به اندازه کافی کوچک، $f(x_0) -^H f(x_0+h)$، $f(x_0-h) -^H f(x_0)$ و حدود (در متریک D) وجود دارد:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0) -^H f(x_0+h)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h) -^H f(x_0)}{-h} = f'(x_0)$$

( $h$ و $-h$ در مخرج ها به ترتیب به معنای $\frac{1}{h}$ و $-\frac{1}{h}$ هستند.)

توجه داشته باشید. در این مقاله، ما فقط موارد (۱) و (۲) را در تمایز پذیری به شدت تعمیم یافته ارائه شده توسط Bede و Gal [52] در نظر می گیریم. Chalco-Cano و Roman-Flores [۵۴] بیان کردند که موارد (۱) و (۲) مهم‌تر هســـتند، زیرا موارد (۳) و (۴) تنها در مجموعه‌ای از نقاط مجزا رخ می‌دهند.

**قضیه ۲.** [۵۴] فرض کنید $f : R \to F(R)$ یک تابع با مقدار فازی پیوسته باشد و نشانگر $f(x) = [\underline{f_\alpha}(x), \overline{f_\alpha}(x)]$، برای هر $\alpha \in [0,1]$ . سپس:

۱ اگر f، (۱)–متمایز باشد، آنگاه $\underline{f_\alpha}(x)$ و $\overline{f_\alpha}(x)$ توابع قابل تمایز هستند و $f'(x) = [\underline{f'_\alpha}(x), \overline{f'_\alpha}(x)]$،

۲ اگر f، (۲)-متمایز باشد، آنگاه $\underline{f_\alpha}(x)$ و $\overline{f_\alpha}(x)$ توابع قابل تمایز هستند و $f'(x) = [\,\overline{f_\alpha'}\,(x), \underline{f_\alpha'}\,(x)]$.

## ۳ تبدیل سومودوی فازی

به منظور ایجاد نتایج، برخی از تعاریف مورد نیاز است. $G(u)$ و $S[f(x)]$ به عنوان نمادهای تبدیل سومودوی فازی در سراسر این مقاله استفاده خواهند شد.

**تعریف ۱۰.** فرض کنید $f: R \to F(R)$ یک تابع با مقدار فازی پیوسته باشد. فرض کنید که $f(ux) \odot e^{-x}$ Riemann-انتگرال پذیر فازی در $[0, \infty)$ باشد، سپس $\int_0^\infty f(ux) \odot e^{-x} dx$تبدیل سومودوی فازی نامیده می شود و با نشان داده می شود:

۱

$$G(u) = S[f(x)] = \int_0^\infty f(ux) \odot e^{-x} dx, \qquad (u \in [-\tau_1, \tau_2])$$

که در آن از متغیر u برای فاکتور کردن متغیر x در آرگومان تابع با مقدار فازی استفاده می شود.

با توجه به قضیه۱ داریم:

$$\int_0^\infty f(ux) \odot e^{-x} dx = \left[\int_0^\infty \underline{f_\alpha}(ux) e^{-x} dx\,, \int_0^\infty \overline{f_\alpha}(ux) e^{-x} dx\right]$$

از تبدیل کلاسیک سومودو، داریم:

$$s\left[\underline{f_\alpha}(x)\right] = \int_0^\infty \underline{f_\alpha}(ux) e^{-x} dx$$

و:

$$s\left[\overline{f_\alpha}(x)\right] = \int_0^\infty \overline{f_\alpha}(ux) e^{-x} dx$$

در نهایت داریم:

$$S[f(x)] = \left[s\left[\underline{f_\alpha}(x)\right], s\left[\overline{f_\alpha}(x)\right]\right]$$

### ۳.۱. ویژگی های دوگانه تبدیل لاپلاس فازی و تبدیل سومودوی فازی

FLT رابطه نزدیکی با FST دارد. برای اثبات قضـایای و خصـوصـیات FST لازم اسـت که بتوانیم بین این دو تبدیل ارتباط برقرار کنیم. تعریف FLT به شرح زیر است.

**تعریف ۱۱.** [۳۵] فرض کنید $f\ (x)$ یک تابع با مقدار فازی پیوسته باشد. فرض کنید که $e^{-px}\odot f(x)$ Reimann -انتگرال پذیر فازی روی $[0,\infty)$ انتگرال پذیر است، سپس $\int_0^\infty f\ (x)\odot e^{-px}\ dx$ تبدیل لاپلاس فازی نامیده می شود و بصورت زیر نشان داده می شود:

۲

$$F(p)=L|f(x)|\int_0^\infty f(x)\odot e^{-px}dx,\qquad (p>0)$$

**قضیه ۳.** فرض کنید $f(x)$ یک تابع با مقدار فازی پیوسته باشد. اگر F تبدیل لاپلاس فازی $f(x)$ و G تبدیل سومودوی فازی $f(x)$ باشد، آنگاه:

۳

$$G(u)=\frac{F(1/u)}{u}$$

**اثبات** فرض کنید $f(x)\in F(R)$، آنگاه برای $-\tau_1<u<\tau_2$،

$$G(u)=\left[\int_0^\infty \underline{f_\alpha}(ux)e^{-x}dx\,,\int_0^\infty \overline{f_\alpha}(ux)e^{-x}dx\right]$$

با جایگزینی $w=ux$ یا $x=\frac{w}{u}$، خواهیم داشت:

$$G(u)=\left[\int_0^\infty \underline{f_\alpha}(w)e^{-\frac{q}{u}}\frac{dw}{u},\int_0^\infty \overline{f_\alpha}(w)e^{-\frac{w}{u}}\frac{dw}{u}\right]$$

$$=\frac{1}{u}\left[\int_0^\infty \underline{f_\alpha}(w)e^{-\frac{q}{u}}dw\,,\int_0^\infty \overline{f_\alpha}(w)e^{-\frac{w}{u}}\,dw\right]$$

$$=\frac{1}{u}\int_0^\infty f(w)\odot e^{-w/u}dw$$

واضح است که $\frac{1}{u}\int_0^\infty f(w)\odot e^{-w/u}\ dw$ برابر است با $\frac{F(1/u)}{u}$.

در نتیجه زیر نشان می‌دهیم که نقش‌های F و G در معادله (۳) قابل تعویض هستند.

نتیجه ۱. فرض کنید $f(x)\ \in\ F(R)$ که به ترتیب دارای F و G برای تبدیل لاپلاس فازی و تبدیل سومودوی فازی هستند. سپس:

۴

$$F(p)=\frac{G(1/p)}{p}$$

**اثبات** اثبات رابطه (۴) را می توان با تغییر u به $\frac{۱}{p}$ در رابطه (۳) به دست آورد.

معادلات (۳) و (۴) دوگانگی لاپلاس-سومودو فازی را تشکیل می دهند و به عنوان وسیله ای برای تغییر بین آن دو تبدیل در صورت نیاز عمل می کنند.

## ۳.۲. قضایای اساسی و خواص تبدیل سومودوی فازی

در این بخش، برخی از قضایا و ویژگی های مرتبط با FST را ارائه می کنیم. لطفاً توجه داشته باشید که قضایا و خصوصیات پیشنهادی در این بخش، بسط تبدیل کلاسیک سومودویی هستند که در [۱۳،۱۴] مطالعه شده است.

**قضیه ٤.** فرض کنید $f, g : R \rightarrow F(R)$ دو تابع با مقدار فازی پیوسته باشند. فرض کنید که $c_1$ و $c_2$ ثابت دلخواه هستند، پس:

$$\mathcal{S}[(c_1 \odot f(x)) \oplus (c_2 \odot g(x))] = (c_1 \odot \mathcal{S}[f(x)]) \oplus (c_2 \odot \mathcal{S}[g(x)])$$

**اثبات** فرض کنید که $f(x) = [\underline{f_\alpha}(x), \overline{f_\alpha}(x)]$ و $g(x) = [\underline{g_\alpha}(x), \overline{g_\alpha}(x)]$. ابتدا، کران پایینی $f(x)$ و $g(x)$ را اثبات می کنیم.

$$\begin{aligned} s[(c_1\underline{f}_\alpha(x)) + (c_2\underline{g}_\alpha(x))] &= \int_0^\infty ((c_1\underline{f}_\alpha(ux)) + (c_2\underline{g}_\alpha(ux)))e^{-x}dx, \\ &= \int_0^\infty (c_1\underline{f}_\alpha(ux))e^{-x}dx + \int_0^\infty (c_2\underline{g}_\alpha(ux))e^{-x}dx, \\ &= c_1\int_0^\infty \underline{f}_\alpha(ux)e^{-x}dx + c_2\int_0^\infty \underline{g}_\alpha(ux)e^{-x}dx, \\ &= c_1 s[\underline{f}_\alpha(x)] + c_2 s[\underline{g}_\alpha(x)]. \end{aligned}$$

ثانیاً، ما برای کران بالای $f(x)$ و $g(x)$ اثبات می کنیم.

$$\begin{aligned} s[(c_1\overline{f}_\alpha(x)) + (c_2\overline{g}_\alpha(x))] &= \int_0^\infty ((c_1\overline{f}_\alpha(ux)) + (c_2\overline{g}_\alpha(ux)))e^{-x}dx, \\ &= \int_0^\infty (c_1\overline{f}_\alpha(ux))e^{-x}dx + \int_0^\infty (c_2\overline{g}_\alpha(ux))e^{-x}dx, \\ &= c_1\int_0^\infty \overline{f}_\alpha(ux)e^{-x}dx + c_2\int_0^\infty \overline{g}_\alpha(ux)e^{-x}dx, \\ &= c_1 s[\overline{f}_\alpha(x)] + c_2 s[\overline{g}_\alpha(x)]. \end{aligned}$$

و در نهایت ما نتیجه می گیریم که:

$$\mathcal{S}[(c_1 \odot f(x)) \oplus (c_2 \odot g(x))] = (c_1 \odot \mathcal{S}[f(x)]) \oplus (c_2 \odot \mathcal{S}[g(x)])$$

اثبات کامل است.

در قضیه زیر اولین قضیه حفظ را ارائه می کنیم.

**قضیه ۵.** فرض کنید $f: R \rightarrow F(R)$ یک تابع با مقدار فازی پیوسته و یک ثابت دلخواه باشد، سپس:

$$S[f(ax)] = G(au)$$

**اثبات** از تعریف ۱۰ داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}[f(ax)] &= [s[\underline{f}_\alpha(ax)], s[\overline{f}_\alpha(ax)]],\\ &= \left[\int_0^\infty \underline{f}_\alpha(aux)e^{-x}dx, \int_0^\infty \overline{f}_\alpha(aux)e^{-x}dx\right]\\ &= G(au).\end{aligned}$$

قضیه به صورت درست اثبات شده است.

در گام بعدی، ما قضیه حفظ دوم را ارائه می دهیم.

**قضیه ٦.** فرض کنید $f: R \to F(R)$ یک تابع با مقدار فازی پیوسته باشد، سپس:

$$S\left[x\odot\frac{df(x)}{dx}\right] = u\frac{dG(u)}{du}$$

**اثبات** از تعریف FST، $G(u) = \int_0^\infty f(ux)\odot e^{-x}dx$. سپس، برای مورد ۱ در قضیه ۲،

$$\begin{aligned}\frac{dG(u)}{du} &= \frac{d}{du}\left[\int_0^\infty \underline{f}_\alpha(ux)e^{-x}dx, \int_0^\infty \overline{f}_\alpha(ux)e^{-x}dx\right],\\ &= \left[\int_0^\infty \frac{d}{du}\underline{f}_\alpha(ux)e^{-x}dx, \int_0^\infty \frac{d}{du}\overline{f}_\alpha(ux)e^{-x}dx\right],\\ &= \left[\int_0^\infty xe^{-x}\frac{d\underline{f}_\alpha(ux)}{dx}dx, \int_0^\infty xe^{-x}\frac{d\overline{f}_\alpha(ux)}{dx}dx\right].\end{aligned}$$

از این رو،

$$\begin{aligned}\frac{dG(u)}{du} &= \frac{1}{u}\left[\int_0^\infty (ux)\underline{f}'_\alpha(ux)e^{-x}dx, \int_0^\infty (ux)\overline{f}'_\alpha(ux)e^{-x}dx\right],\\ &= \frac{1}{u}\mathcal{S}\left[x\odot\frac{df(x)}{dx}\right].\end{aligned}$$

هر دو طرف را در یک u ضرب می کنیم، ما داریم:

$$S\left[x\odot\frac{df(x)}{dx}\right] = u\frac{dG(u)}{du}$$

برای مورد ۲ از قضیه ۲ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{dG(u)}{du} &= \frac{d}{du}\left[\int_0^\infty \overline{f}_\alpha(ux)e^{-x}dx, \int_0^\infty \underline{f}_\alpha(ux)e^{-x}dx\right], \\ &= \left[\int_0^\infty \frac{d}{du}\overline{f}_\alpha(ux)e^{-x}dx, \int_0^\infty \frac{d}{du}\underline{f}_\alpha(ux)e^{-x}dx\right], \\ &= \left[\int_0^\infty xe^{-x}\frac{d\overline{f}_\alpha(ux)}{dx}dx, \int_0^\infty xe^{-x}\frac{d\underline{f}_\alpha(ux)}{dx}dx\right].\end{aligned}$$

از این رو:

$$\begin{aligned}\frac{dG(u)}{du} &= \frac{1}{u}\left[\int_0^\infty (ux)\overline{f}'_\alpha(ux)e^{-x}dx, \int_0^\infty (ux)\underline{f}'_\alpha(ux)e^{-x}dx\right], \\ &= \frac{1}{u}\mathcal{S}\left[x \odot \frac{df(x)}{dx}\right].\end{aligned}$$

هر دو طرف را در یک u ضرب می کنیم، ما داریم:

$$S\left[x\odot\frac{df(x)}{dx}\right] = u\frac{dG(u)}{du}$$

از این رو می توانیم نتیجه بگیریم که:

$$S\left[x\odot\frac{df(x)}{dx}\right] = u\frac{dG(u)}{du}$$

برای هر دو مورد از قضیه ۲ داریم.

در مرحله بعد، قضیه مشتق درجه اول را ارائه می کنیم.

**قضیه ۷.** فرض کنید $f : R \rightarrow F(R)$ یک تابع با مقدار فازی پیوسته و $f$ ابتدایی $f'$ روی $[0,\infty)$ باشد. سپس:

$$S[f'(x)] = \frac{G(u)-^H f(0)}{u}$$

جایی که (۱)-متمایزپذیر

یا:

$$S[f'(x)] = \frac{(-f(0))-^H G(0)}{u}$$

جایی که (۲)-متمایزپذیر

**اثبات** ابتدا، f را (۱)-متمایزپذیر فرض می کنیم. از این رو،

$$\frac{G(u) -^H f(0)}{u} = \left[\frac{s[\underline{f}_\alpha(x)] - \underline{f}_\alpha(0)}{u}, \frac{s[\overline{f}_\alpha(x)] - \overline{f}_\alpha(0)}{u}\right]$$

از آنجایی که:

$$s[\underline{f}'_\alpha(x)] = \frac{s[\underline{f}_\alpha(x)] - \underline{f}_\alpha(0)}{u}$$

و

$$s[\overline{f}'_\alpha(x)] = \frac{s[\overline{f}_\alpha(x)] - \overline{f}_\alpha(0)}{u}$$

آنگاه:

$$\frac{G(u) -^H f(0)}{u} = [s[\underline{f}'_\alpha(x)], s[\overline{f}'_\alpha(x)]]$$

از آنجایی که $f$، (۱)-متمایزپذیر است، آنگاه:

$$\frac{G(u) -^H f(0)}{u} = \mathcal{S}[f'(x)].$$

حال، ما فرض می کنیم f (۲)-متمایزپذیر است. بنابراین،

$$\frac{(-f(0)) -^H (-G(u))}{u} = \left[\frac{-(\overline{f}_\alpha(0)) - (-s[\overline{f}_\alpha(x)])}{u}, \frac{-(\underline{f}_\alpha(0)) - (-s[\underline{f}_\alpha(x)])}{u}\right]$$

معادل:

$$\frac{(-f(0)) -^H (-G(u))}{u} = \left[\frac{s[\overline{f}_\alpha(x)] - \overline{f}_\alpha(0)}{u}, \frac{s[\underline{f}_\alpha(x)] - \underline{f}_\alpha(0)}{u}\right]$$

از آنجایی که:

$$s\left[\bar{f}_\alpha'(x)\right] = \frac{s[\bar{f}_\alpha(x)] - \bar{f}_\alpha(x)}{u}$$

و

$$s\left[\underline{f}_\alpha'(x)\right] = \frac{s[\underline{f}_\alpha(x)] - \underline{f}_\alpha(x)}{u}$$

آنگاه:

$$\frac{\big(-f(0)\big) -^{H} (-G(u))}{u} = \left[s\left[\bar{f}_\alpha'(x)\right], s\left[\underline{f}_\alpha'(x)\right]\right]$$

از آنجایی که f (۲)-متمایز پذیر است، نتیجه می شود که:

$$\frac{\big(-f(0)\big) -^{H} (-G(u))}{u} = S[f'(x)]$$

حال اثبات کامل شده است.

در قضیه بعدی اولین قضیه جابجایی را ارائه می کنیم.

**قضیه ۸.** فرض کنید $f: R \to F(R)$ یک تابع با مقدار فازی پیوسته و یک ثابت دلخواه باشد، سپس:

$$S[e^{ax} \odot f(x)] = \frac{1}{1-au} G(\frac{u}{1-au})$$

**اثبات** با استفاده از تعریف ۱۰ داریم:

$$S[e^{ax} \odot f(x)] = [\int_0^\infty \underline{f}_\alpha(ux) e^{-(1-au)x} dx \,, \int_0^\infty \overline{f}_\alpha(ux) e^{-(1-au)x} dx]$$

با استفاده از جایگزینی $w = (1-au)x$، سپس به دست می آوریم:

$$S[e^{ax} \odot f(x)] = \left[\frac{1}{۱-au}\int_0^\infty \underline{f}_\alpha\left(\frac{uw}{1-au}\right) e^{-w} dw \,, \frac{1}{1-au}\int_0^\infty \overline{f}_\alpha\left(\frac{uw}{1-au}\right) e^{-w} dw\right]$$

$$= \frac{1}{1-au}\int_0^\infty \underline{f}_\alpha\left(\frac{uw}{1-au}\right) e^{-w} dw$$

$$= \frac{1}{1-au} G(\frac{u}{1-au})$$

قضیه کانولوشن در زیر ارائه شده است.

**قضیه ۹.** فرض کنید $f, g: R \to F(R)$ دو تابع با مقدار فازی پیوسته باشند. فرض کنید $F(p)$ و $G(p)$ تبدیل های لاپلاس فازی باشند و $M(u)$ و $N(u)$ به ترتیب تبدیل های سومودوی فازی برای $f$ و $g$ باشند. سپس، تبدیل سومودو پیچش $f$ و $g$،

$$(f * g)(x) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

به صورت زیر داده شده باشد:

$$S[(f * g)] = uM(u)N(u)$$

اثبات FLT برای $(f * g)$ همانطور که در [۵۵] نشان داده می شود:

$$L\left[\left(\underline{f}_\alpha * \underline{g}_\alpha\right)(x), \left(\bar{f}_\alpha * \bar{g}_\alpha\right)(x)\right] = F(p)G(p)$$

توسط رابطه دوگانه لاپلاس–سومودو فازی،

$$S\left[\left(\underline{f}_\alpha * \underline{g}_\alpha\right)(x), \left(\bar{f}_\alpha * \bar{g}_\alpha\right)(x)\right] = \frac{1}{u} L[\left(\underline{f}_\alpha * \underline{g}_\alpha\right)(x), \left(\bar{f}_\alpha * \bar{g}_\alpha\right)(x)]$$

و از آنجایی که:

$$M(u) = \frac{F(1/u)}{u}, \qquad N(u) = \frac{G(1/u)}{u}$$

FST برای $(f * g)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} S\left[\left(\underline{f}_\alpha * \underline{g}_\alpha\right)(x), \left(\bar{f}_\alpha * \bar{g}_\alpha\right)(x)\right] &= \frac{F(1/u)G(1/u)}{u}, \\ &= u \frac{F(1/u)}{u} \frac{G(1/u)}{u}, \\ &= uM(u)N(u). \end{aligned}$$

## ٤ روش حل معادلات دیفرانسیل فازی

ما یک معادله دیفرانسیل واضح را در نظر می گیریم که توسط:

۵

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \quad y(t_0) = y_0,$$

جایی که $f:[t_0,T]\times R\to R$. فرض کنید که مقدار اولیه در معادله (۵) دقیقاً شناخته نشده و با یک عدد فازی مدل‌سازی نشده است، مشکل مقدار اولیه فازی زیر را داریم [۵۶]:

۶

$$\begin{cases} Y'(t)=f\big(t,Y(t)\big), & 0\le t\le T,\\ Y(t_0)=\big[\underline{y}_\alpha(0),\bar{y}_\alpha(0)\big], & 0<\alpha\le 1, \end{cases}$$

که در آن $f:[t_0,T]\times F(R)\to F(R)$ یک نگاشت فازی پیوسته است. با مراجعه به Kaleva [۵۷]، مشاهده می کنیم که قضیه ۲ روشی را برای حل معادله (۶) ارائه می دهد. در واقع،

$Y_\alpha(t)=[\underline{y_\alpha}(t)،\overline{y_\alpha}(t)]$.

با استفاده از FST در معادله (۶)، معادله زیر را داریم.

۷

$$S[Y'(t)]=S[f\big(t,Y(t)\big)]$$

مورد ۱: اگر $Y\,'(t)$ را با استفاده از یک تابع متمایز (۱) در نظر بگیریم، از قضیه ۲، $Y'(t)=[\underline{y'_\alpha}(t)،\overline{y'_\alpha}(t)]$ بدست می آوریم. اکنون، FDE زیر را برای حل به دست می آوریم.

۸

$$\begin{cases} \underline{y'_\alpha}(t)=\underline{f_\alpha}\big(t,Y(t)\big), & \underline{y_\alpha}(t_0)=\underline{y_\alpha}(0)\\ \overline{y'_\alpha}(t)=\ \overline{f_\alpha}\big(t,Y(t)\big), & \overline{y_\alpha}(t_0)=\overline{y_\alpha}(0) \end{cases}$$

از قضیه ۷، برای مورد ۱،

$$S[Y'(t)]=\frac{S[Y(t)]-^{H}Y(t_0)}{u}$$

بنابراین:

۹

$$\begin{cases} S\Big[\underline{f_\alpha}\big(t,Y(t)\big)\Big]=\dfrac{s\Big[\underline{y_\alpha}(t)\Big]-\underline{y_\alpha}(0)}{u}\\ S\big[\overline{f_\alpha}\big(t,Y(t)\big)\big]=\dfrac{s[\overline{y_\alpha}(t)]-\overline{y_\alpha}(0)}{u} \end{cases}$$

برای حل معادله (۹) ابتدا فرض می کنیم که:

$$s\Big[\underline{y_\alpha}(t)\Big]=L_\alpha^1(u),$$

$$s[\overline{y_\alpha}(t)]=U_\alpha^1(u),$$

که در آن $L_\alpha^1(u)$ و $U_\alpha^1(u)$ راه حل های معادله (۹) هستند. با استفاده از معکوس FST، $\overline{y_\alpha}(t)$ و $\underline{y_\alpha}(t)$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\underline{y_\alpha}(t) = s^{-1}[L_\alpha^1(u)],$$

$$\overline{y_\alpha}(t) = s^{-1}[U_\alpha^1(u)],$$

حالت ۲: اگر $Y'(t)$ را با استفاده از یک تابع (۲)-متمایز در نظر بگیریم، از قضیه ۲، $Y'(t) = [y'\alpha(t)، y'\alpha(t)]$ بدست می آوریم. اکنون، FDE زیر را برای حل به دست می آوریم.

۱۰

$$\begin{cases} \underline{y'_\alpha}(t) = \overline{f_\alpha}(t, Y(T)), & \underline{y_\alpha}(t_0) = \underline{y_\alpha}(0) \\ \overline{y'_\alpha}(t) = \underline{f_\alpha}(t, Y(t)), & \overline{y_\alpha}(t_0) = \overline{y_\alpha}(0) \end{cases}$$

از قضیه ۷، برای مورد ۲،

$$S[Y'(t)] = \frac{-Y(t_0) -^H (-S[Y(t)])}{u},$$

بنابراین

۱۱

$$\begin{cases} S\left[\underline{f_\alpha}(t, Y(t))\right] = \dfrac{s\left[\underline{y_\alpha}(t)\right] - \underline{y_\alpha}(0)}{u} \\ S\left[\overline{f_\alpha}(t, Y(t))\right] = \dfrac{s[\overline{y_\alpha}(t)] - \overline{y_\alpha}(0)}{u} \end{cases}$$

برای حل معادله (۱۱) ابتدا فرض می کنیم:

$$s\left[\underline{y_\alpha}(t)\right] = L_\alpha^2(u),$$

$$s[\overline{y_\alpha}(t)] = U_\alpha^2(u),$$

که در آن $L_\alpha^2(u)$ و $U_\alpha^2(u)$ راه حل های معادله (۱۱) هستند. با استفاده از معکوس FST، $\overline{y_\alpha}(t)$ و $\underline{y_\alpha}(t)$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\underline{y_\alpha}(t) = s^{-1}[L_\alpha^2(u)],$$

$$\overline{y_\alpha}(t) = s^{-1}[U_\alpha^2(u)],$$

## ۵ یک مثال عددی

در این بخش، ما یک مثال عددی از حل یک FDE با استفاده از FST ارائه می کنیم.

**مثال ۱** مشکل مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

۱۲

$$\begin{cases} Y'(t) = -Y(t), & 0 \leq t \leq T, \\ Y(t_0) = \left[\underline{y}_\alpha(0), \bar{y}_\alpha(0)\right], & 0 < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

با استفاده از FST، داریم:

$$S[Y'(t)] = S[-Y(t)]$$

و

$$S[Y'(t)] = \int_0^\infty Y'(ut) \odot e^{-t} dt.$$

ابتدا شرطی را در نظر می گیریم که در آن $Y'(t)$ (۱)-متمایزپذیر باشد. بنابراین، از قضیه ۲،

$$\begin{cases} \underline{y_\alpha'}(t) = -\underline{y_\alpha}(t), & \underline{y_\alpha}(t_0) = \underline{y_\alpha}(0) \\ \overline{y_\alpha'}(t) = -\overline{y_\alpha}(t), & \overline{y_\alpha}(t_0) = \overline{y_\alpha}(0) \end{cases}$$

با توجه به قضیه ۷ داریم،

$$S[Y'(t)] = \frac{S[Y(t)] -^H Y(t_0)}{u}$$

بنابراین:

$$S[-Y(t)] = \frac{S[Y(t)] -^H Y(t_0)}{u},$$

$$-S[Y(t)] = \frac{S[Y(t)] -^H Y(t_0)}{u}.$$

با استفاده از معادله ۹، داریم:

$$-s[\overline{y_\alpha}(t)] = \frac{s\left[\underline{y_\alpha}(t)\right] - \underline{y_\alpha}(0)}{u},$$

و

$$-s\left[\underline{y_\alpha}(t)\right]=\frac{s[\overline{y_\alpha}(t)]-\overline{y_\alpha}(0)}{u}.$$

بنابراین ما به دست می آوریم:

$$s\left[\underline{y_\alpha}(t)\right]=\underline{y_\alpha}(0)\left(\frac{1}{1-u^2}\right)-\overline{y_\alpha}(0)\left(\frac{u}{1-u^2}\right),$$

و

$$s[\overline{y_\alpha}(t)]=\overline{y_\alpha}(0)\left(\frac{1}{1-u^2}\right)-\underline{y_\alpha}(0)\left(\frac{u}{1-u^2}\right),$$

بنابراین:

$$\underline{y_\alpha}(t)=\underline{y_\alpha}(0)s^{-1}\left(\frac{1}{1-u^2}\right)-\overline{y_\alpha}(0)s^{-1}\left(\frac{u}{1-u^2}\right),$$

و

$$\overline{y_\alpha}(t)=\overline{y_\alpha}(0)s^{-1}\left(\frac{1}{1-u^2}\right)-\underline{y_\alpha}(0)s^{-1}\left(\frac{u}{1-u^2}\right),$$

در نتیجه:

$$\underline{y_\alpha}(t)=e^t\left(\frac{\underline{\underline{y_\alpha}}(0)-\overline{y_\alpha}(0)}{2}\right)+e^{-t}\left(\frac{\underline{\underline{y_\alpha}}(0)+\overline{y_\alpha}(0)}{2}\right),$$

و

$$\overline{y_\alpha}(t)=e^t\left(\frac{\overline{y_\alpha}(0)-\underline{y_\alpha}(0)}{2}\right)+e^{-t}\left(\frac{\overline{y_\alpha}(0)+\underline{y_\alpha}(0)}{2}\right)$$

در مرحله بعد، شرایطی را در نظر می گیریم که در آن $Y'(t)$ (۲)-متمایزپذیر است. بنابراین، از قضیه ۲،

$$\begin{cases}\underline{y_\alpha'}(t)=-\underline{y_\alpha}(t), & \underline{y_\alpha}(t_0)=\underline{y_\alpha}(0)\\ \overline{y_\alpha'}(t)=-\overline{y_\alpha}(t), & \overline{y_\alpha}(t_0)=\overline{y_\alpha}(0)\end{cases}$$

با توجه به قضیه ۷ داریم:

$$S[Y'(t)]=\frac{-Y(t_0)-^{H}(-S[Y(t)])}{u},$$

بنابراین:

$$S[-Y(t)] = \frac{-Y(t_0)-^{H}(-S[Y(t)])}{u},,$$

$$-S[Y(t)] = \frac{-Y(t_0)-^{H}(-S[Y(t)])}{u},.$$

از معادله ۱۱، ما به دست می‌آوریم:

$$-s\left[\underline{y_\alpha}(t)\right] = \frac{s\left[\underline{y_\alpha}(t)\right] - \underline{y_\alpha}(0)}{u},$$

و

$$-s[\overline{y_\alpha}(t)] = \frac{s[\overline{y_\alpha}(t)] - \overline{y_\alpha}(0)}{u}.$$

بنابراین ما داریم:

$$s\left[\underline{y_\alpha}(t)\right] = \underline{y_\alpha}(0)(\frac{1}{1+u}),$$

و

$$s[\overline{y_\alpha}(t)] = \overline{y_\alpha}(0)(\frac{1}{1+u}).$$

در نتیجه:

$$\underline{y_\alpha}(t) = \underline{y_\alpha}(0)e^{-t},$$

و

$$\overline{y_\alpha}(t) = \overline{y_\alpha}(0)e^{-t}.$$

فرض کنید که $[\underline{y_\alpha}(t_0)،\overline{y_\alpha}(t_0)] = [\alpha - a، a - \alpha]$. سپس جواب های معادله (۱۲) برای مورد (۱) و مورد (۲) به شرح زیر است.

مورد اول:

$$\underline{y_\alpha}(t) = (\alpha - a)e^{t},$$

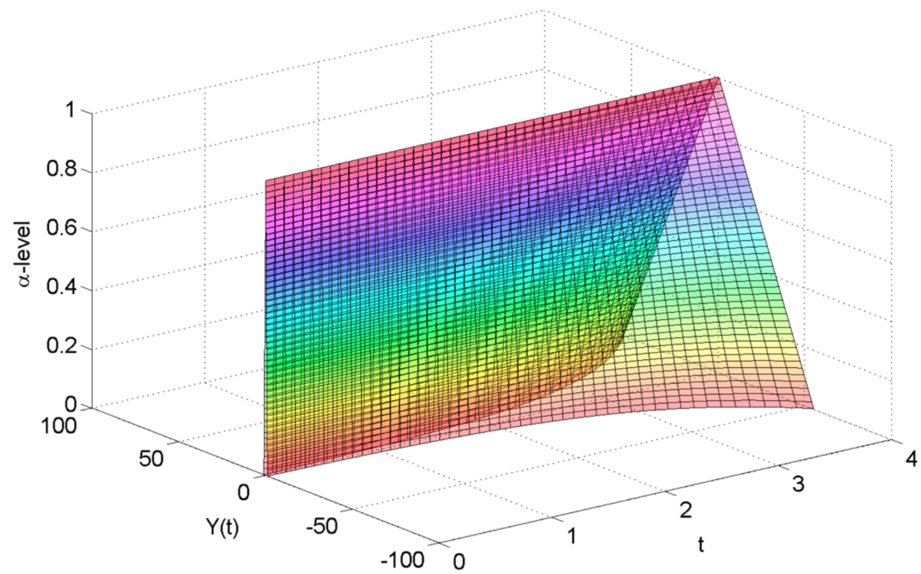
$$\overline{y_\alpha}(t) = (a - \alpha)e^{t}.$$

مورد دوم:

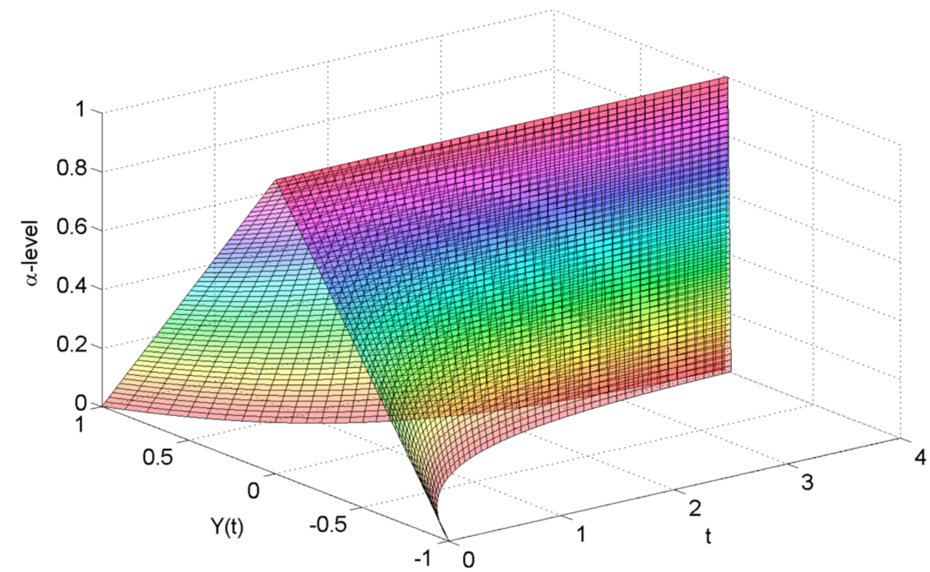
$$\underline{y_\alpha}(t) = (\alpha - a)e^{-t},$$

$$\overline{y_\alpha}(t) = (a - \alpha)e^{-t}.$$

نتایج به دست آمده با استفاده از FST برای هر دو مورد پیشنهاد شده در این مقاله به ترتیب در شکل ۱ و ۲ نشان داده شده است. می‌توانیم ببینیم که برای مورد ۱، نتیجه با افزایش t متفاوت است. در حالی که برای مورد ۲، نتیجه نشان می دهد که با افزایشt ، راه حل همگرا می شود.




شکل ۱ حل معادله (۱۲) برای مورد ۱ زمانی که $Y(t_0) = (-1,0,1)$.




شکل ۲. حل معادله (۱۲) برای مورد ۲ زمانی که $Y(t_0) = (-1،0،1)$.

**تذکر** از مثال، متوجه می‌شـــویم که راه‌حل‌ها به معادله دیفرانســـیلی که انتخاب کرده‌ایم بســـتگی دارد. برای مورد ۱، راه حل این ویژگی قطر را دارد، یعنی $diam(supp\ y(t)) = 2ae^t$، که با نزدیک شـــدن t به بی نهایت نامحدود اســـت. در مقایســـه با مورد ۲، $diam(supp\ y(t)) = 2ae^{-t} \to 0$ با نزدیک شدن t به بی نهایت، که منجر به نتایج بصری تری می شود.

## ٦ نتیجه گیری

در این مقاله، تبدیل کلاسیک سومودو در محیط فازی را بررسی کرده‌ایم. ما همچنین روش های دقیقی را برای حل FDE ها پیشنهاد کرده ایم. در بخش آخر، یک مثال عددی از حل FDE خطی مرتبه اول با استفاده از FST انجام داده ایم.

قدردانی ها

این تحقیق توسط طرح کمک هزینه تحقیقات بنیادی وزارت علوم، فناوری و نوآوری، مالزی، تحت کد پروژه ۹۰۰۳-۰۰۴۱۷ پشتیبانی شده است.

مشارکت های نویسنده

هر دو نویسنده این مقاله را خوانده و با آن موافقت کرده اند. علاوه بر این، هر دو نویسنده در هر بخش از این مقاله مشارکت داشته اند. هر دو نویسنده نسخه نهایی را خوانده و تایید کرده اند.

تضاد علاقه

نویسندگان هیچ تضاد منافع را اعلام نمی‌کنند.

منابع


۱. Davis, J.A.; McNamara, D.E.; Cottrell, D.M.; Campos, J. Image processing with the radial Hilbert transform: Theory and experiments. *Opt. Lett.* ۲۰۰۰, *۲۵*, ۹۹–۱۰۱.
۲. Namias, V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA J. Appl. Math.* ۱۹۸۰, *۲۵*, ۲۴۱–۲۶۵.
۳. Saitoh, S. The Weierstrass transform and an isometry in the heat equation. *Appl. Anal.* ۱۹۸۳, *۱۶*, ۱–۶.
۴. Ghaemi, F.; Yunus, R.; Ahmadian, A.; Salahshour, S.; Suleiman, M.; Saleh, S.F. Application of Fuzzy Fractional Kinetic Equations to Modelling of the Acid Hydrolysis Reaction. *Abstr. Appl. Anal.* ۲۰۱۳, *۲۰۱۳*, ۶۱۰۳۱۴.
۵. Spinelli, R. Numerical inversion of a Laplace transform. *SIAM J. Numer. Anal.* ۱۹۶۶, *۳*, ۶۳۶–۶۴۹.
۶. Layman, J.W. The Hankel transform and some of its properties. *J. Integer Seq.* ۲۰۰۱, *۴*, ۱–۱۱.
۷. Tranter, C. The use of the Mellin transform in finding the stress distribution in an infinite wedge. *Q. J. Mech. Appl. Math.* ۱۹۴۸, *۱*, ۱۲۵–۱۳۰.
۸. Watugala, G.K. Sumudu transforms—A new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* ۱۹۹۳, *۲۴*, ۳۵–۴۳.
۹. Watugala, G.K. Sumudu transforms–a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. *Math. Eng. Ind.* ۱۹۹۸, *۶*, ۳۱۹–۳۲۹.
۱۰. Weerakoon, S. Application of Sumudu transform to partial differential equations. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* ۱۹۹۴, *۲۵*, ۲۷۷–۲۸۳.
۱۱. Weerakoon, S. Complex inversion formula for Sumudu transform. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* ۱۹۹۸, *۲۹*, ۶۱۸–۶۲۱.
۱۲. Asiru, M.A. Sumudu transform and the solution of integral equations of convolution type. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* ۲۰۰۱, *۳۲*, ۹۰۶–۹۱۰.
۱۳. Belgacem, F.B.M.; Karaballi, A.A.; Kalla, S.L. Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations. *Math. Probl. Eng.* ۲۰۰۳, *۲۰۰۳*, ۱۰۳–۱۱۸.
۱۴. Belgacem, F.B.M.; Karaballi, A.A. Sumudu transform fundamental properties investigations and applications. *Int. J. Stoch. Anal.* ۲۰۰۶, *۲۰۰۶*, doi:۱۰.۱۱۵۵/JAMSA/۲۰۰۶/۹۱۰۸۳.
۱۵. Belgacem, F.B.M. Sumudu transform applications to Bessel functions and equations. *Appl. Math. Sci.* ۲۰۱۰, *۴*, ۳۶۶۵–۳۶۸۶.
۱۶. Agwa, H.A.; Ali, F.M.; Kılıçman, A. A new integral transform on time scales and its application. *Adv. Differ. Equ.* ۲۰۱۲, *۲۰۱۲*, doi:۱۰.۱۱۸۶/۱۶۸۷-۱۸۴۷-۲۰۱۲-۶۰.
۱۷. Kılıçman, A.; Eltayeb, H.; Ismail, M.R. A note on integral transforms and differential equations. *Malays. J. Math. Sci.* ۲۰۱۲, *۶*, ۱–۱۸.
۱۸. Asiru, M.A. Further properties of the Sumudu transform and its application. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* ۲۰۰۲, *۳۳*, ۴۴۱–۴۴۹.
۱۹. Eltayeb, H.; Kılıçman, A. A note on the Sumudu transforms and differential equations. *Appl. Math. Sci.* ۲۰۱۰, *۴*, ۱۰۸۹–۱۰۹۸.
۲۰. Belgacem, F.B.M. Introducing and analyzing deeper Sumudu properties. *Nonlinear Stud.* ۲۰۰۶, *۱۳*, ۲۳–۴۱.
۲۱. Rathore, S.; Kumar, D.; Singh, J.; Gupta, S. Homotopy analysis Sumudu transform method for nonlinear equations. *Int. J. Ind. Math.* ۲۰۱۲, *۴*, ۳۰۱–۳۱۴.
۲۲. Zadeh, L.A. Fuzzy sets. *Inf. Control* ۱۹۶۵, *۸*, ۳۳۸–۳۵۳.
۲۳. Chang, S.S.L.; Zadeh, L.A. On fuzzy mapping and control. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.* ۱۹۷۲, *SMC-۲*, ۳۰–۳۴.

۲۴. Dubois, D.; Prade, H. Towards fuzzy differential calculus part ۱: Integration of fuzzy mappings. *Fuzzy Sets Syst.* ۱۹۸۲, *۸*, ۱–۱۷.
۲۵. Dubois, D.; Prade, H. Towards fuzzy differential calculus part ۲: Integration on fuzzy intervals. *Fuzzy Sets Syst.* ۱۹۸۲, *۸*, ۱۰۵–۱۱۶.
۲۶. Dubois, D.; Prade, H. Towards fuzzy differential calculus part ۳: Differentiation. *Fuzzy Sets Syst.* ۱۹۸۲, *۸*, ۲۲۵–۲۳۳.
۲۷. Puri, M.L.; Ralescu, D.A. Differentials of fuzzy functions. *J. Math. Anal. Appl.* ۱۹۸۳, *۹۱*, ۵۵۲–۵۵۸.
۲۸. Goetschel, R., Jr.; Voxman, W. Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy Sets Syst.* ۱۹۸۶, *۱۸*, ۳۱–۴۳.
۲۹. Kaleva, O. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.* ۱۹۸۷, *۲۴*, ۳۰۱–۳۱۷.
۳۰. Ding, Z.; Ma, M.; Kandel, A. Existence of the solutions of fuzzy differential equations with parameters. *Inf. Sci.* ۱۹۹۷, *۹۹*, ۲۰۵–۲۱۷.
۳۱. Salahshour, S. Nth-order fuzzy differential equations under generalized differentiability. *J. Fuzzy Set Valued Anal.* ۲۰۱۱, *۲۰۱۱*, doi:۱۰.۵۸۹۹/۲۰۱۱/jfsva-۰۰۰۴۳.
۳۲. Shahriyar, M.; Ismail, F.; Aghabeigi, S.; Ahmadian, A.; Salahshour, S. An eigenvalue-eigenvector method for solving a system of fractional differential equations with uncertainty. *Math. Probl. Eng.* ۲۰۱۳, *۲۰۱۳*, ۵۷۹۷۶۱.
۳۳. Arshad, S.; Lupulescu, V. On the fractional differential equations with uncertainty. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* ۲۰۱۱, *۷۴*, ۳۶۸۵–۳۶۹۳.
۳۴. Allahviranloo, T.; Salahshour, S.; Abbasbandy, S. Explicit solutions of fractional differential equations with uncertainty. *Soft Comput.* ۲۰۱۲, *۱۶*, ۲۹۷–۳۰۲.
۳۵. Allahviranloo, T.; Ahmadi, M.B. Fuzzy Laplace transforms. *Soft Comput.* ۲۰۱۰, *۱۴*, ۲۳۵–۲۴۳.
۳۶. Salahshour, S.; Allahviranloo, T. Applications of fuzzy Laplace transforms. *Soft Comput.* ۲۰۱۳, *۱۷*, ۱۴۵–۱۵۸.
۳۷. Jafarian, A.; Golmankhaneh, A.K.; Baleanu, D. On fuzzy fractional Laplace transformation. *Adv. Math. Phys.* ۲۰۱۴, *۲۰۱۴*, doi:۱۰.۱۱۵۵/۲۰۱۴/۲۹۵۴۳۲.
۳۸. Salahshour, S.; Allahviranloo, T.; Abbasbandy, S. Solving fuzzy fractional differential equations by fuzzy Laplace transforms. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* ۲۰۱۲, *۱۷*, ۱۳۷۲–۱۳۸۱.
۳۹. Salahshour, S.; Khezerloo, M.; Hajighasemi, S.; Khorasany, M. Solving fuzzy integral equations of the second kind by fuzzy Laplace transform method. *Int. J. Ind. Math.* ۲۰۱۲, *۴*, ۲۱–۲۹.
۴۰. Muhammad Ali, H.F.; Haydar, A.K. On fuzzy Laplace transforms for fuzzy differential equations of the third order. *J. Kerbala Univ.* ۲۰۱۳, *۱۱*, ۲۵۱–۲۵۶.
۴۱. Salahshour, S.; Haghi, E. Solving fuzzy heat equation by fuzzy Laplace transforms. In *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, ۲۰۱۰; pp. ۵۱۲–۵۲۱.
۴۲. Ahmad, M.Z.; Abdul Rahman, N.A. Explicit solution of fuzzy differential equations by mean of fuzzy Sumudu transform. *Int. J. Appl. Phys. Math.* ۲۰۱۵, *۵*, ۸۶–۹۳.
۴۳. Alam Khan, N.; Abdul Razzaq, O; Ayyaz, M. On the solution of fuzzy differential equations by fuzzy Sumudu transform. *Nonlinear Eng.* ۲۰۱۵, *۴*, ۴۹–۶۰.
۴۴. Xu, J.; Liao, Z.; Hu, Z. A class of linear differential dynamical systems with fuzzy initial condition. *Fuzzy Sets Syst.* ۲۰۰۷, *۱۵۸*, ۲۳۳۹–۲۳۵۸.
۴۵. Zimmerman, H.J. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*; Kluwer Academic Publisher and Dordrecht: Dordrecht, The Netherlands, ۱۹۹۱.
۴۶. Friedman, M.; Ma, M.; Kandel, A. Numerical solutions of fuzzy differential and integral equations. *Fuzzy Sets Syst.* ۱۹۹۹, *۱۰۶*, ۳۵–۴۸.

۴۷. Ma, M.; Friedman, M.; Kandel, A. Numerical solutions of fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.* ۱۹۹۹, ۱۰۵, ۱۳۳–۱۳۸.
۴۸. Ahmad, M.Z.; de Baets, B. A Predator–Prey Model with Fuzzy Initial Populations. In Proceedings of the Joint ۲۰۰۹ International Fuzzy Systems Association World Congress and ۲۰۰۹ European Society of Fuzzy Logic and Technology Conference, Lisbon, Portugal, ۲۰–۲۴ July ۲۰۰۹; pp. ۱۳۱۱–۱۳۱۴.
۴۹. Dubois, D.J. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*; Academic Press: Waltham, MA, USA, ۱۹۸۰.
۵۰. Wu, H.C. The improper fuzzy Riemann integral and its numerical integration. *Inf. Sci.* ۱۹۹۸, ۱۱۱, ۱۰۹–۱۳۷.
۵۱. Wu, H.C. The fuzzy Riemann integral and its numerical integration. *Fuzzy Sets Syst.* ۲۰۰۰, ۱۱۰, ۱–۲۵.
۵۲. Bede, B.; Gal, S.G. Generalizations of the differentiability of fuzzy–number–valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.* ۲۰۰۵, ۱۵۱, ۵۸۱–۵۹۹.
۵۳. Bede, B.; Rudas, I.J.; Bencsik, A.L. First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Inf. Sci.* ۲۰۰۷, ۱۷۷, ۱۶۴۸–۱۶۶۲.
۵۴. Chalco–Cano, Y.; Román–Flores, H. On new solutions of fuzzy differential equations. *Chaos Solitons Fractals* ۲۰۰۸, ۳۸, ۱۱۲–۱۱۹.
۵۵. Das, M.; Talukdar, D. Method For Solving Fuzzy Integro–Differential Equation By Using Fuzzy Laplace Transformation. *Int. J. Sci. Technol. Res.* ۲۰۱۴, ۳, ۲۹۱–۲۹۵.
۵۶. Chalco–Cano, Y.; Román–Flores, H. Comparation between some approaches to solve fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.* ۲۰۰۹, ۱۶۰, ۱۵۱۷–۱۵۲۷.
۵۷. Kaleva, O. A note on fuzzy differential equations. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* ۲۰۰۶, ۶۴, ۸۹۵–۹۰۰.