

第十周作业

高钰满, 3170105242

题目描述

热方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot (a^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial x}) & 0 < x < L, t > 0 \\ T(x, 0) = \Phi(x) \\ \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

1. 现已知 $a = 1$, 初始条件 $\Phi(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$, 将上述热方程展开前10项: $T(x, t) = \sum_0^{10} X_n(x)T_n(t)$;

并利用展开的10项画出 $T(x, t)$ 的三维图像(三轴分别为 T, t, x)

2. 用MATLAB函数 `pdepe` 求解热方程, 将结果与第一问对比

3. LQ无限时长跟踪问题: 将上述热方程展开前5项作为近似, 将温度作为输出量 $y(t) = T(L, t)$, 自选 $y_r(t)$ 作为跟踪目标, 设计反馈控制。

EX1

对温度函数 $T(x, t)$ 做分离变量:

$$T(x, t) = X(x)T(t)$$

代入热方程得:

$$\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \lambda$$

$$\ddot{X}(x) = \lambda X(x)$$

$$\dot{T}(t) = \lambda a^2 T(t)$$

首先求解 $X(x)$, 这是一个本征值问题:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) = \lambda X(x) \\ \dot{X}(0) = 0 \\ \dot{X}(L) = 0 \end{cases}$$

对 λ 做分类讨论, 当 $\lambda > 0$ 时, $X(x) = 0$;

当 $\lambda \leq 0$ 时,

$$\begin{aligned} X_n(x) &= A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) \\ \lambda_n &= -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \end{aligned}$$

再求解 $\dot{T}(t) = \lambda a^2 T(t)$:

$$T_n(t) = C_n \cdot \exp(-a^2 \cdot (\frac{n\pi}{L})^2 t)$$

代入得:

$$T(x, t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \exp(-a^2 \cdot (\frac{n\pi}{L})^2 t) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L}$$

现求解其中的系数 C_n :

由 $T(x, 0) = \Phi(x)$, 将 $t = 0$ 代入 $T(x, t)$, 得:

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \cos(\frac{n\pi x}{L})$$

将 $\{1, \cos(\frac{\pi x}{L}), \cos(\frac{2\pi x}{L}), \dots, \cos(\frac{n\pi x}{L})\}$ 看作基, 做如下内积:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x), \cos(\frac{n\pi x}{L}) \rangle &= C_n \cdot \langle \cos(\frac{n\pi x}{L}), \cos(\frac{n\pi x}{L}) \rangle \\ \int_0^L \Phi(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx &= C_n \cdot \int_0^L \cos^2(\frac{n\pi x}{L}) \end{aligned}$$

得到:

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_0^L \Phi(x) dx \\ C_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \Phi(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx, n > 0 \end{aligned}$$

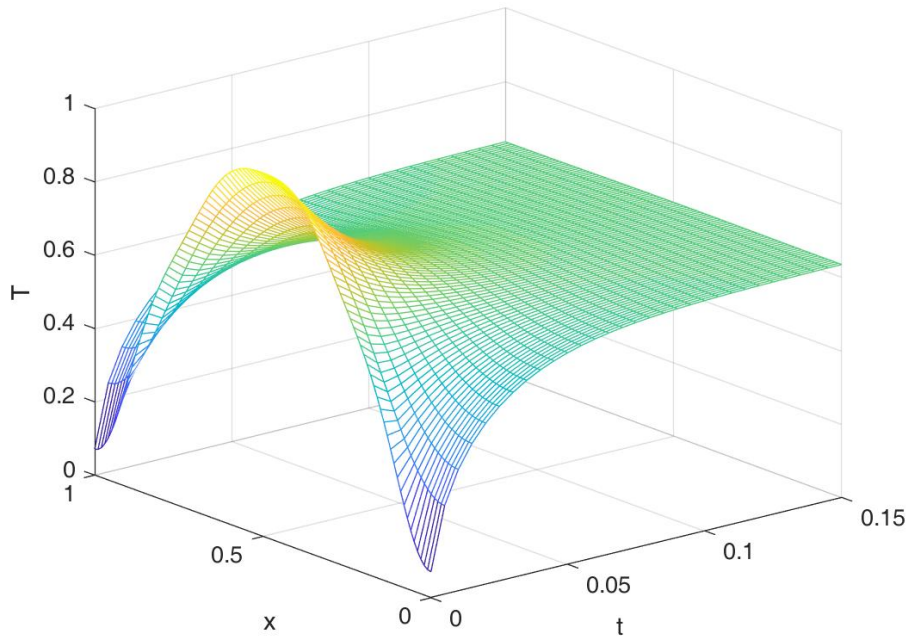
综上所述, 上述**热方程**的解为:

$$T(x, t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \exp(-a^2 \cdot (\frac{n\pi}{L})^2 t) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L}$$

其中, $C_0 = \int_0^L \Phi(x) dx$.

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \Phi(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx, n > 0$$

按照题目要求取 $T(x, t)$ 的前10项作为其近似, 画出 (T, x, t) 三维的温度分布:



EX2

利用MATLAB中的 `pdepe` 函数求解该热方程：

(完整代码见 `ex2.m`)

```

1 sol = pdepe(m, @pdex1pde, @pdex1ic, @pdex1bc, x, t);
2
3 function [c,f,s] = pdex1pde(x,t,T,DTDx) % PDE方程
4     c=1;
5     f=DTDx;
6     s=0;
7 end
8
9 function T0 = pdex1ic(x) % 初始条件
10     global L;
11     T0 = sin(pi*x/L);
12 end
13
14 function [p1,q1,pr,qr] = pdex1bc(xl,Tl,xr,Tr,t) % 边界条件
15     p1 = 0;
16     q1 = 1;
17     pr = 0;
18     qr = 1;
19 end

```

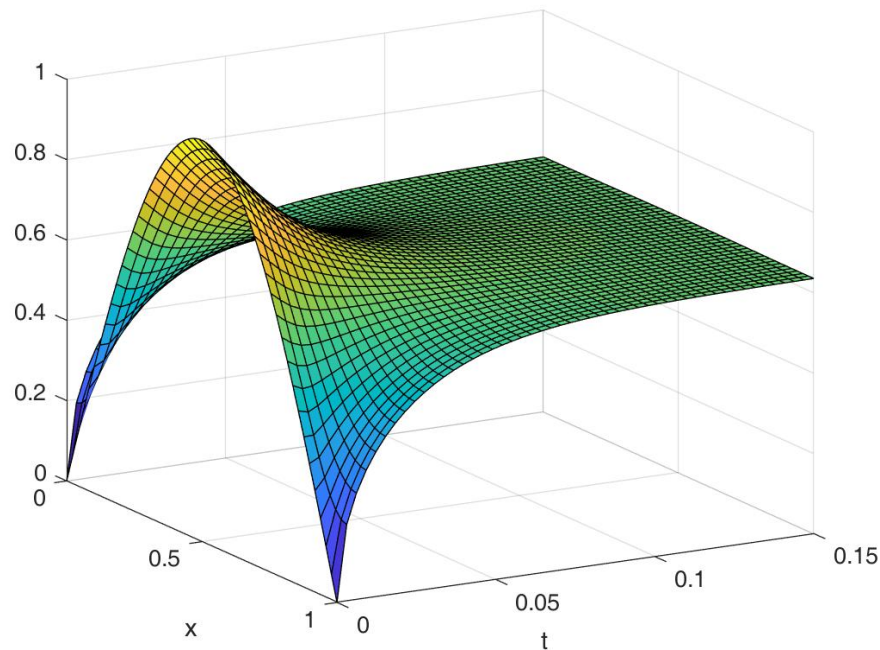
`pdepe` 函数 `@pdex1pde` 格式：

$$c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^mf\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)+s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

`@pdex1bc` 格式：

$$p(x,t,u)+q(x,t)f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

求解图像如下：



EX3

现考虑加入控制项：

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot (a^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial x}) + g(x)u(t) & 0 < x < L, t > 0 \\ T(x, 0) = \Phi(x) \\ \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

其中，选择 $g(x) = \delta(x - 0.8L)$ ，此处的冲激函数表示的意义是**点温度控制**，通过在 $0.8L$ 处的热源控制目标点温度。

期望控制 $L/2$ 处的温度为 $y_r(t) = \sin(x)$ 。

考虑将前5项作为 $T(x, t)$ 的近似：

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^4 X_n(x) T_n(t)$$

其中， $X_n = \{1, \cos(\frac{\pi x}{L}), \cos(\frac{2\pi x}{L}), \cos(\frac{3\pi x}{L}), \cos(\frac{4\pi x}{L})\}$; T_n 待求。

构造系统状态空间模型

取齐次解的基：

$$X_m = \{1, \cos(\frac{\pi x}{L}), \cos(\frac{2\pi x}{L}), \cos(\frac{3\pi x}{L}), \cos(\frac{4\pi x}{L})\}$$

将式子 $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot (a^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial x}) + g(x)u(t)$ 分别**对基的每一维** $x_m \in X_m$ **做内积**（即 x 在 $0-L$ 上积分）

$$\int_0^L \frac{\partial T}{\partial t} \cdot x_m(x) dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \cdot (a^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial x}) \cdot x_m(x) dx + \int_0^L g(x)u(t) \cdot x_m(x) dx$$

化简得：

$$\int_0^L \frac{\partial T}{\partial t} \cdot x_m(x) dx = -a^2 \int_0^L \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \dot{x}_m(x) dx + \int_0^L g(x) u(t) \cdot x_m(x) dx$$

代入 $T(x, t)$ 的5项近似，左式第一项为：

$$\int_0^L \frac{\partial T}{\partial t} \cdot x_m(x) dx = \sum_0^4 \int_0^L x_n(x) \cdot x_m(x) dx \cdot \dot{T}(t) \triangleq \sum_0^4 P_{mn} \cdot \dot{T}(t)$$

右式第一项为：

$$-a^2 \int_0^L \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \dot{x}_m(x) dx = -a^2 \sum_0^4 \int_0^L \dot{x}_n(x) \cdot \dot{x}_m(x) dx \cdot T(t) \triangleq -a^2 \sum_0^4 Q_{mn} \cdot T(t)$$

右边第二项定义为：

$$\int_0^L g(x) \cdot x_m(x) dx \cdot u(t) \triangleq R_m \cdot u(t)$$

式子整体化为：

$$\sum_0^4 P_{mn} \cdot \dot{T}(t) = -a^2 \sum_0^4 Q_{mn} \cdot T(t) + R_m \cdot u(t)$$

进一步化简有：

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= AT(t) + Bu(t) \\ y(t) = T(L/2, t) &= CT(t) = [x_0(L/2), \dots, x_4(L/2)] \cdot \begin{bmatrix} T_0(t) \\ \dots \\ T_4(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中， $A = -P^{-1}Q, B = P^{-1}R$

P 为 5×5 矩阵，各元素 $P_{mn} = \int_0^L x_n(x)x_m(x)dx$

Q 为 5×5 矩阵，各元素 $Q_{mn} = \int_0^L \dot{x}_n(x)\dot{x}_m(x)dx$

R 为 5×1 矩阵，各元素 $R_m = \int_0^L g(x)x_m(x)dx$

设计无限时长跟踪器

误差为 $e(t) = y(t) - y_r(t)$.

二阶性能指标为：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [qe^2(t) + ru^2(t)] dt$$

最优控制为：

$$u(t) = -R^{-1}B^T(PT(t) - g)$$

其中 P 满足代数Riccati方程：

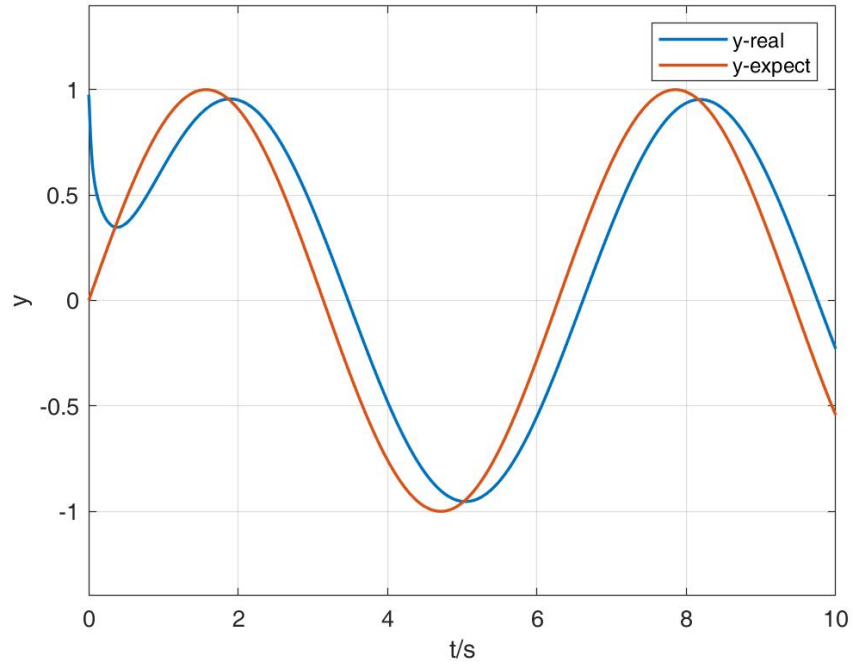
$$-PA - A^TP + PBR^{-1}B^TP - C^TQC = 0$$

$g(t)$ 关系式:

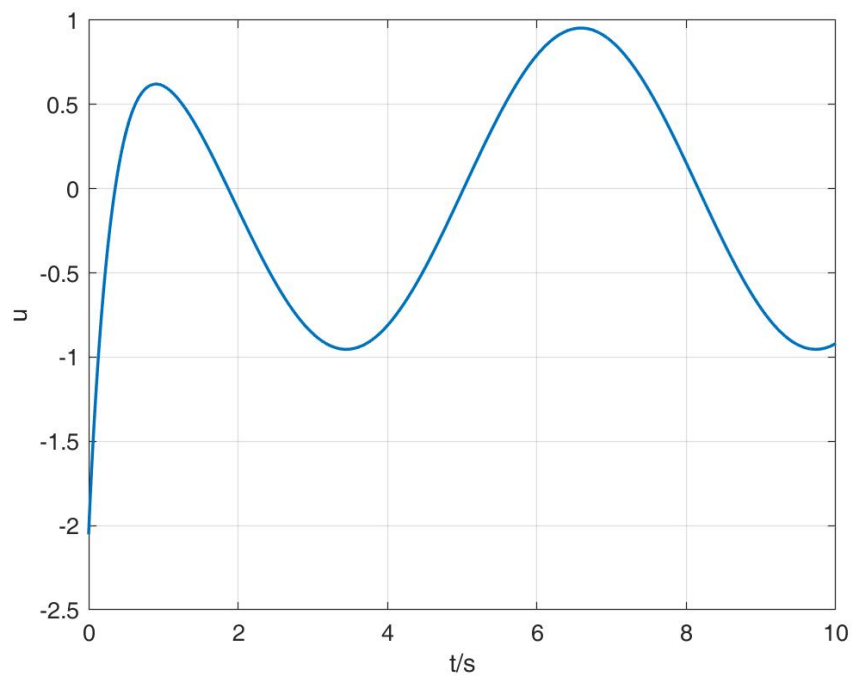
$$\mathbf{g} = [\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T - \mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{Q}y_r$$

跟踪 $L/2$ 处温度为 $y_r(t) = \sin(x)$ 的结果如下:

$L/2$ 处温度:



$0.8L$ 处的点温度控制:



至此, 实现了通过 $0.8L$ 处的点温度控制, 使 $L/2$ 处温度能够跟踪期望温度: $y_r(t) = \sin(x)$.