细杆点温度最优控制 - LQ无限时长跟踪问题

问题描述

现有一长L的细杆，热方程如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot (a^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial x}) \qquad 0 < x < L, t > 0 \\ T(x,0) = \Phi(x) \\ \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

希望通过$0.8L$处的点温度控制，使$L/2$处温度能够跟踪期望温度：$y_r(t) = sin(t)$.

即在热方程上加入控制项：

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot (a^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial x}) + g(x)u(t) \quad 0 < x < L, t > 0 \\ T(x,0) = \Phi(x) \\ \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

$g(x) = \delta(x - 0.8L)$，求最优的$u(t)$使$L/2$处温度温度$= y_r(t) = sin(t)$.

题目要求

首先求解不加控制项的**齐次热方程**：

1. 现已知$a = 1$，初始条件$\Phi(x) = sin\frac{\pi x}{L}$，将上述热方程展开前10项：$T(x,t) = \sum_0^{10} X_n(x)T_n(t)$;

   并利用展开的10项画出$T(x,t)$的三维图像(三轴分别为T, t, x)

2. 用MATLAB函数`pdepe`求解热方程

再求解**加入控制项后的热方程的最优控制**：

3. **LQ无限时长跟踪问题**：

   将上述热方程展开前5项作为近似，将$L/2$处温度温度作为输出量$y(t) = T(L/2,t)$，希望通过$0.8L$处的点温度控制，使$y(t) = y_r(t) = sin(t)$.

EX1

对温度函数$T(x,t)$做分离变量：

$$T(x,t) = X(x)T(t)$$

代入热方程得：

$$\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \lambda$$

$$\ddot{X}(x) = \lambda X(x)$$
$$\dot{T}(t) = \lambda a^2 T(t)$$

首先求解$X(x)$，这是一个本征值问题：

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) = \lambda X(x) \\ \dot{X}(0) = 0 \\ \dot{X}(L) = 0 \end{cases}$$

对λ做分类讨论，当$\lambda > 0$时，$X(x) = 0$；

当$\lambda \leq 0$时，

$$X_n(x) = A_n cos(\frac{n\pi}{L})$$
$$\lambda_n = -(\frac{n\pi}{L})^2$$

再求解 $\dot{T}(t) = \lambda a^2 T(t)$：

$$T_n(t) = C_n \cdot exp(-a^2 \cdot (\frac{n\pi}{L})^2 t)$$

代入得：

$$T(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot exp(-a^2 \cdot (\frac{n\pi}{L})^2 t) \cdot cos\frac{n\pi x}{L}$$

现求解其中的系数C_n：

由$T(x,0) = \Phi(x)$，将$t = 0$代入$T(x,t)$，得：

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot cos(\frac{n\pi x}{L})$$

将$\{1, cos(\frac{\pi x}{L}), cos(\frac{2\pi x}{L}), \ldots, cos(\frac{n\pi x}{L})\}$看作基，做如下内积：

$$< \Phi(x), cos(\frac{n\pi x}{L}) >= C_n \cdot < cos(\frac{n\pi x}{L}), cos(\frac{n\pi x}{L}) >$$
$$\int_0^L \Phi(x) cos(\frac{n\pi x}{L}) dx = C_n \cdot \int_0^L \cos^2(\frac{n\pi x}{L})$$

得到：

$$C_0 = \int_0^L \Phi(x) dx$$
$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \Phi(x) cos(\frac{n\pi x}{L}) dx, n > 0$$

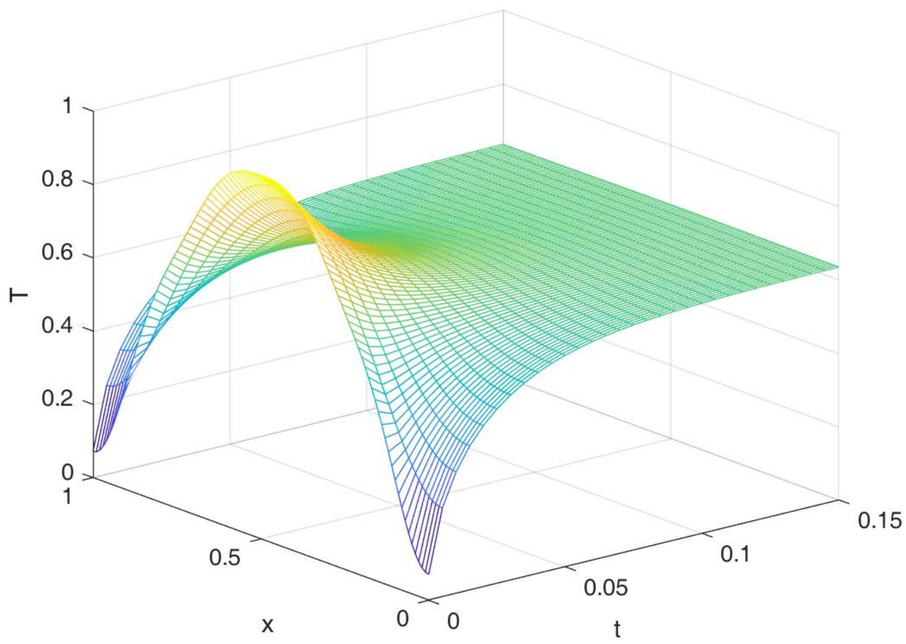
综上所述，上述**热方程的解**为：

$$T(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot exp(-a^2 \cdot (\frac{n\pi}{L})^2 t) \cdot cos\frac{n\pi x}{L}$$

其中，$C_0 = \int_0^L \Phi(x)dx$.

$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L \Phi(x)cos(\frac{n\pi x}{L})dx, n > 0$

按照题目要求取$T(x,t)$的前10项作为其近似，画出(T,x,t)三维的温度分布：



EX2

利用MATLAB中的`pdepe`函数求解该热方程：

（完整代码见`ex2.m`）

```
sol = pdepe(m, @pdex1pde, @pdex1ic, @pdex1bc, x, t);

function [c,f,s] = pdex1pde(x,t,T,DTDx) % PDE方程
    c=1;
    f=DTDx;
    s=0;
end

function T0 = pdex1ic(x) % 初始条件
    global L;
    T0 = sin(pi*x/L);
end

function [pl,ql,pr,qr] = pdex1bc(xl,Tl,xr,Tr,t) % 边界条件
    pl = 0;
    ql = 1;
    pr = 0;
    qr = 1;
end
```

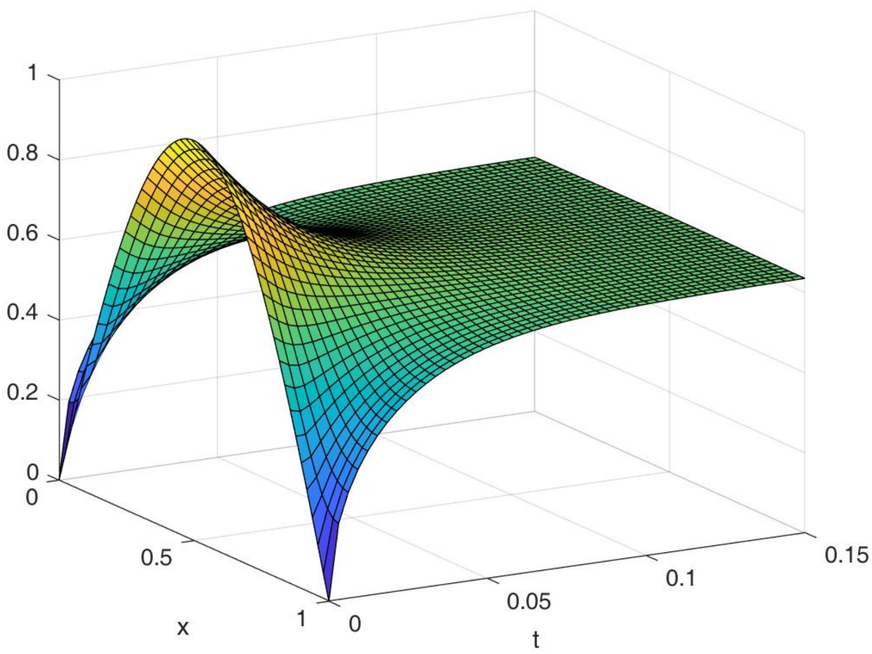
`pdepe`函数`@pdex1pde`格式：

$$c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)+s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

`@pdex1bc`格式：

$$p(x,t,u)+q(x,t)f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

求解图像如下：



EX3

现考虑加入控制项：

$$\begin{cases}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot(a^2\cdot\frac{\partial T}{\partial x})+g(x)u(t) & 0<x<L,t>0\\ T(x,0)=\Phi(x)\\ \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0}=\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L}=0\end{cases}$$

其中，选择$g(x)=\delta(x-0.8L)$，此处的冲激函数表示的意义是**点温度控制**，通过在$0.8L$处的热源控制目标点温度.

期望控制$L/2$处的温度为$y_r(t)=sin(t)$.

考虑将前5项作为$T(x,t)$的近似：

$$T(x,t)=\sum_{n=0}^{4}X_n(x)T_n(t)$$

其中，$X_n=\{1,cos(\frac{\pi x}{L}),cos(\frac{2\pi x}{L}),cos(\frac{3\pi x}{L}),cos(\frac{4\pi x}{L})\};T_n$待求.

构造系统状态空间模型

取齐次解的基：

$$X_m = \{1, cos(\frac{\pi x}{L}), cos(\frac{2\pi x}{L}), cos(\frac{3\pi x}{L}), cos(\frac{4\pi x}{L})\}$$

将式子$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot (a^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial x}) + g(x)u(t)$分别**对基的每一维**$x_m \in X_m$**做内积**（即x在0-L上积分）

$$\int_0^L \frac{\partial T}{\partial t} \cdot x_m(x)dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \cdot (a^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial x}) \cdot x_m(x)dx + \int_0^L g(x)u(t) \cdot x_m(x)dx$$

化简得：

$$\int_0^L \frac{\partial T}{\partial t} \cdot x_m(x)dx = -a^2 \int_0^L \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \dot{x}_m(x)dx + \int_0^L g(x)u(t) \cdot x_m(x)dx$$

代入$T(x,t)$的5项近似，左式第一项为：

$$\int_0^L \frac{\partial T}{\partial t} \cdot x_m(x)dx = \sum_0^4 \int_0^L x_n(x) \cdot x_m(x)dx \cdot \dot{T}(t) \triangleq \sum_0^4 P_{mn} \cdot \dot{T}(t)$$

右式第一项为：

$$-a^2 \int_0^L \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \dot{x}_m(x)dx = -a^2 \sum_0^4 \int_0^L \dot{x_n}(x) \cdot \dot{x_m}(x)dx \cdot T(t) \triangleq -a^2 \sum_0^4 Q_{mn} \cdot T(t)$$

右边第二项定义为：

$$\int_0^L g(x) \cdot x_m(x)dx \cdot u(t) \triangleq R_m \cdot u(t)$$

式子整体化为：

$$\sum_0^4 P_{mn} \cdot \dot{T}(t) = -a^2 \sum_0^4 Q_{mn} \cdot T(t) + R_m \cdot u(t)$$

进一步化简有：

$$\dot{T}(t) = AT(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = T(L/2,t) = CT(t) = [\, x_0(L/2), \dots, x_4(L/2) \,] \cdot \begin{bmatrix} T_0(t) \\ \dots \\ T_4(t) \end{bmatrix}$$

其中，$A = -P^{-1}Q, B = P^{-1}R$

P为5×5矩阵，各元素$P_{mn} = \int_0^L x_n(x)x_m(x)dx$

Q为5×5矩阵，各元素$Q_{mn} = \int_0^L \dot{x}_n(x)\dot{x}_m(x)dx$

R为5×1矩阵，各元素$R_m = \int_0^L g(x)x_m(x)dx$

设计无限时长跟踪器

误差为$e(t) = y(t) - y_r(t)$.

二阶性能指标为：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[qe^2(t) + ru^2(t)\right] \mathrm{d}t$$

最优控制为：

$$u(t) = -R^{-1}B^T(PT(t) - g)$$

其中P满足代数$Riccati$方程：

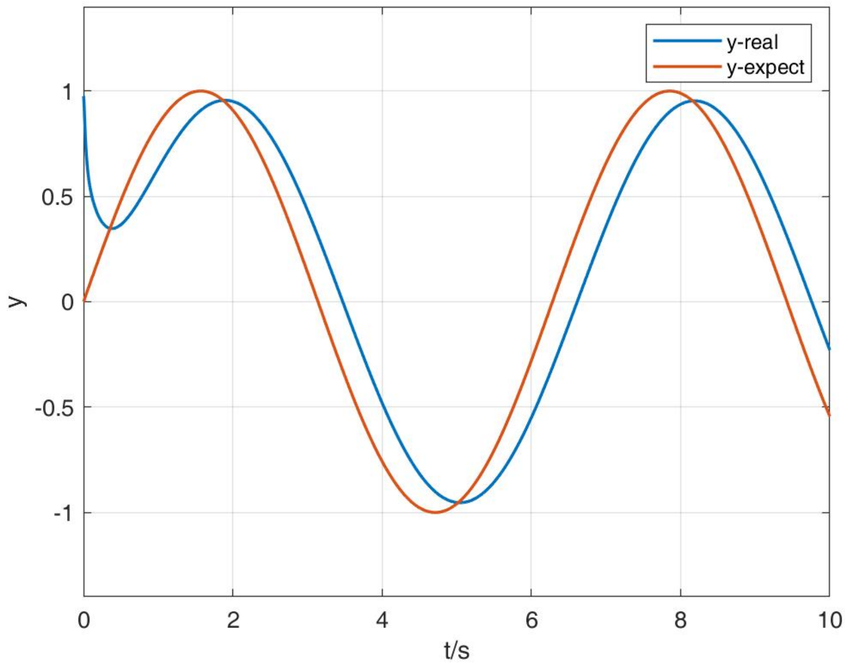
$$-PA - A^TP + PBR^{-1}B^TP - C^TQC = 0$$

$g(t)$关系式：

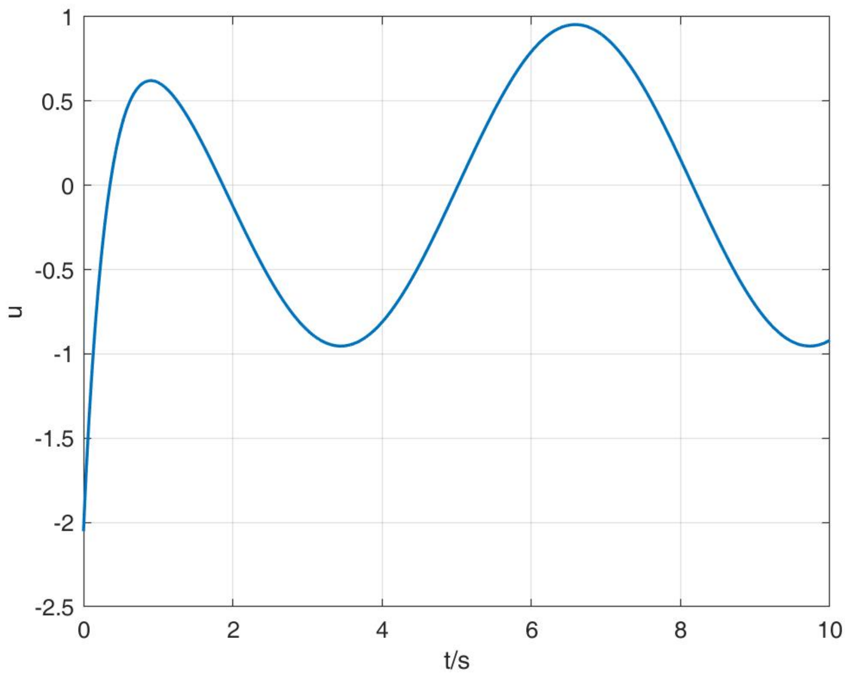
$$\boldsymbol{g} = \left[PB\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T - \boldsymbol{A}^T\right]^{-1}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}y_r$$

跟踪$L/2$处温度为$y_r(t) = sin(x)$的结果如下：

$L/2$处温度：



$0.8L$处的点温度控制：



至此，实现了通过$0.8L$处的点温度控制，使$L/2$处温度能够跟踪期望温度：$y_r(t) = sin(t)$.