第四章 线性二次型最优控制

线性二次型最优控制问题，一般也称做 LQ 或 LQR（Linear Quadratic Regulator）问题，在最优控制理论与方法体系中具有非常重要的地位。线性二次型最优控制问题的重要性在于其具有如下特点：

（1） 对于用线性微分方程或线性差分方程描述的动态系统，最优控制指标具有非常明确、实际的物理意义；

（2） 在系统设计技术上做到规范化，具有统一的解析解形式；

（3） 构成反馈控制形式，可以得到线性反馈控制的最优解；

（4） 在工程实现上使实时控制计算工作大为简化。

因此，LQR 方法是应用最为广泛的一种最优控制算法，本章将进行详细介绍。

4.1 线性二次型最优控制问题的提法

（1） 问题提法

给定线性时变系统的状态方程和输出方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{4-1-1}$$

$$y(t) = C(t)x(t) \tag{4-1-2}$$

其中，$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^l$，$A(t)$、$B(t)$、$C(t)$分别是 $n\times n$、$n\times m$ 和 $l\times n$ 维时变系统矩阵、增益矩阵和输出矩阵。

假定 $0\leqslant l\leqslant m\leqslant n$，且控制变量 $u(t)$不受限制。用 $y_r(t)$表示期望输出向量，$y_r(t) \in R^l$，有误差向量

$$e(t) = y_r(t) - y(t) \tag{4-1-3}$$

二次型最优控制要解决的问题是，选择最优控制 $u^*(t)$，使二次型性能指标

$$J(u) = \frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}(t_f)Fe(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[e^{\mathrm{T}}(t)Q(t)e(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]dt \tag{4-1-4}$$

最小。这就是 LQR 问题。

式(4-1-4）中，F 为 $l\times l$ 维非负定（半正定）常数矩阵，$Q(t)$为 $l\times l$ 维非负定（半正定）时变矩阵，$R(t)$为 $m\times m$ 维正定时变矩阵。

其中，矩阵正定与非负定（半正定）的定义由如下描述给出：

- 正定矩阵：如果对 $n\times n$ 维方阵 A，任意 $n\times 1$ 维列向量 x，均有二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$，则 A 为正定矩阵；
- 非负定（半正定）矩阵：如果对 $n\times n$ 维方阵 A，任意 $n\times 1$ 维列向量 x，均有二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax \geq 0$，则 A 为非负定（半正定）矩阵。

（2）　性能指标的物理意义

考虑将(4-1-4）式表示为

$$J(u) = \frac{1}{2} e^{\mathrm{T}}(t_f) F e(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [L_e + L_u] dt \tag{4-1-5}$$

其中积分号中被积第一项 $L_e = e^{\mathrm{T}}(t)Q(t)e(t)$ 为衡量系统控制误差大小的代价函数，当系统为单输出，即 $e(t)$为数量函数时，$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} e^2(t)dt$ 即为经典控制中的动态误差平方积分；被积第二项 $L_u = u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)$ 为衡量控制功率（积分后即为能量）大小的代价函数，因为若 $u(t)$表示电流或电压时，则 $u^2(t)$正比于电功率。而性能指标中最前面一项 $e^{\mathrm{T}}(t_f)Fe(t_f)$ 则是要使末值时刻误差最小。

综上所述，二次型性能指标的物理意义可以表述为：用尽可能小的控制能量，来保持尽量小的输出误差，以达到控制能量和输出误差综合最优的目的。

（3）　系数矩阵 F、Q、R 的选取

系数矩阵 F、Q、R 的选取对二次型性能指标的取值、特别是对各个误差分量和控制分量的影响至关重要，一般遵循下列原则：

- 一般取为对角线矩阵，其对角线元素的大小由各个分量的重要性决定。对重要性高的分量，其对应系数矩阵对角线元素的取值相对较大；反之，则取较小值。
- 若要减少各分量间的关联耦合作用，系数矩阵可不为对角线矩阵，只需将在系数矩阵中对应关联分量位置的元素取为非零的正数，其大小也依对消除各分量间关联的重视程度而定，即最优性能指标也可以用于解耦控制设计。
- 当 Q、R 取为时变矩阵 $Q(t)$和 $R(t)$时，可以反映不同时间阶段的系统控制要求。如当 $t = t_0$ 时 $e(t)$可能很大，但此时并不反映系统的控制性能，可以将 $Q(t)$取得较小；当 $t \to t_f$、$e(t)$减小时，为保证控制系统性能，可以将 $Q(t)$逐渐取大。

二次型性能指标中系数矩阵 F、Q、R 的选取在最优控制理论中是受人为因素影响最大的步骤，对同样的二次型最优控制问题，选取不同的 F、Q、R 所得到的最优控制规律也是完全不一样的。

（4）　线性二次型最优控制问题的三种类型

依照系统(4-1-1）~(4-1-3）的情况不同，线性二次型最优控制问题可以分为如下三类：

I.　状态调节器问题

此时有 $C(t) = I$ 为单位矩阵，$y_r(t) = 0$，即有 $y(t) = x(t) = -e(t)$

II.　输出调节器问题

此时有 $y_r(t) = 0$，即有 $y(t) = -e(t)$。

III. 跟踪问题

此时 $y_r(t) \neq 0$，$e(t) = y_r(t) - y(t)$。

这三种类型中，状态调节器问题是最基本的线性二次型最优控制问题，输出调节器和跟踪问题均可视为状态调节器问题的扩展。以下各节将依次对这三种类

型加以介绍。

4.2 状态调节器问题—黎卡提（Riccati）方程

（1）问题描述

设线性时变系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{4-2-1}$$

其中，$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$，$A(t)$和 $B(t)$分别是 $n\times n$ 和 $n\times m$ 维时变系统矩阵和增益矩阵，$x(t_0)= x_0$ 已知，且控制变量 $u(t)$不受约束。

状态调节器问题是要求最优控制 $u^*(t)$，使二次型性能指标

$$J(u) = \frac{1}{2}x^\top(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^\top(t)Q(t)x(t) + u^\top(t)R(t)u(t)]dt \tag{4-2-2}$$

最小。式(4-2-2）中，系数矩阵满足 F、$Q(t)$半正定，$R(t)$正定条件。

此时性能指标的含义为：以尽量小的能量代价，使状态保持在零值附近。

（2）应用极大值原理求解

首先列出该问题的 Hamilton 函数

$$H = \frac{1}{2}x^\top(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^\top(t)R(t)u(t) + \lambda^\top[A(t)x(t) + B(t)u(t)] \tag{4-2-3}$$

因 $u(t)$不受约束，所以沿最优轨线有

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = 0$$

即

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = R(t)u(t) + B^\top(t)\lambda(t) = 0$$

(4-2-4）

由此可得

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^\top(t)\lambda(t) \tag{4-2-5}$$

这里，因为 $R(t)$对所有 $t\in[t_0，t_f]$正定，所以 $R^{-1}(t)$对所有 $t\in[t_0，t_f]$存在。又由 $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2(t)} = R(t) > 0$，所以 $u(t) = -R^{-1}(t)B^\top(t)\lambda(t)$ 是 H 最小控制。

要将 $u(t)$ 表示为 $x(t)$的反馈控制形式，则需求出 $\lambda(t)$与 $x(t)$的关系式。

考虑规范方程组

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} = -Q(t)x(t) - A^\top(t)\lambda(t) \tag{4-2-6}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda(t)} = A(t)x(t) + B(t)u(t) = A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)\lambda(t) \tag{4-2-7}$$

定义矩阵

$$S(t)=B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t) \tag{4-2-8}$$

显然，$S(t)$为 $n\times n$ 维对称矩阵。

由(4-2-6）和(4-2-7）式并将 $S(t)$代入有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{\lambda}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(t) & -S(t)\\ -Q(t) & -A^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix} \tag{4-2-9}$$

上式为 $2n$ 个线性齐次微分方程，$x(t_0)=x_0$ 提供 n 个边界条件，另外 n 个则要由横截条件提供，即由 $\lambda(t)$的终值 $\lambda(t_f)$提供。由横截条件有

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial}{\partial x(t_f)}[\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f)]=Fx(t_f) \tag{4-2-10}$$

用Ω（t，t_0）表示方程组(4-2-9）的 $2n\times 2n$ 维转移矩阵，用 $\lambda(t_0)$表示待定的协态变量初值，则方程组(4-2-9）的解可以表示为

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix}=\Omega(t,t_0)\begin{bmatrix}x(t_0)\\ \lambda(t_0)\end{bmatrix} \tag{4-2-11}$$

在终端时刻有

$$\begin{bmatrix}x(t_f)\\ \lambda(t_f)\end{bmatrix}=\Omega(t_f,t)\begin{bmatrix}x(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix} \tag{4-2-12}$$

如将Ω（t_f，t）划分为 4 个 $n\times n$ 维子矩阵，即

$$\Omega(t_f,t)=\begin{bmatrix}\Omega_{11}(t_f,t) & \Omega_{12}(t_f,t)\\ \Omega_{21}(t_f,t) & \Omega_{22}(t_f,t)\end{bmatrix} \tag{4-2-13}$$

则(4-2-12）式可写为

$$x(t_f)=\Omega_{11}(t_f,t)x(t)+\Omega_{12}(t_f,t)\lambda(t) \tag{4-2-14}$$

$$\lambda(t_f)=\Omega_{21}(t_f,t)x(t)+\Omega_{22}(t_f,t)\lambda(t) \tag{4-2-15}$$

由以上两式及(4-2-10）式可得

$$\lambda(t)=[\Omega_{22}(t_f,t)-F\Omega_{12}(t_f,t)]^{-1}[F\Omega_{11}(t_f,t)-\Omega_{21}(t_f,t)]x(t) \tag{4-2-16}$$

此式表明 $\lambda(t)$与 $x(t)$之间存在线性关系。令

$$\lambda(t)=P(t)x(t) \tag{4-2-17}$$

考虑Ω（t_f，t_f）$=I_{2n\times 2n}$，

即

Ω_{11}（t_f，t_f）$=\Omega_{22}$（t_f，t_f）$=I_{n\times n}$

Ω_{12}（t_f，t_f）$=\Omega_{21}$（t_f，t_f）$=0$

可求得

$$P(t_f)=F \tag{4-2-18}$$

为了避免求逆运算，对(4-2-17）式求导，有

$$\dot{\lambda}(t)=\dot{P}(t)x(t)+P(t)\dot{x}(t) \tag{4-2-19}$$

将系统状态方程

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=A(t)x(t)+B(t)u(t)\\&=A(t)x(t)-S(t)\lambda(t)\\&=A(t)x(t)-S(t)P(t)x(t)\end{aligned} \tag{4-2-20}$$

代入(4-2-19）式，有

$$\dot{\lambda}(t)=[\dot{P}(t)+P(t)A(t)-P(t)S(t)P(t)]x(t) \tag{4-2-21}$$

而由协态方程(4-2-6）式及(4-2-17）式，又有

$$\dot{\lambda}(t)=[-Q(t)-A^{\top}(t)P(t)]x(t) \tag{4-2-22}$$

综合上两式，并考虑 $x(t)$任意，有

$$\dot{P}(t)+P(t)A(t)-P(t)S(t)P(t)+A^{\top}(t)P(t)+Q(t)=0 \tag{4-2-23}$$

将 $S(t)=B(t)R^{-1}(t)B^{\top}(t)$ 代入，整理得

$$\dot{P}(t)=-P(t)A(t)+P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)-A^{\top}(t)P(t)-Q(t) \tag{4-2-24}$$

(4-2-24）式即为解二次型最优控制问题著名的黎卡提（Riccati）型矩阵微分方程，一般简称为黎卡提（Riccati）方程。

结合(4-2-5）和(4-2-17）式即可得到最优控制的状态反馈形式

$$u(t)=-R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)x(t)=-K(t)x(t) \tag{4-2-25}$$

其中 $K(t)$为反馈增益矩阵。

可以证明(4-2-25）式是状态调节器问题最优控制的充分必要并且是唯一的条件。

※充分条件的证明：

考虑二次型 $x^{\top}(t)P(t)x(t)$，将其对 t 求导得

$$\frac{d}{dt}[x^{\top}(t)P(t)x(t)]=\dot{x}^{\top}(t)P(t)x(t)+x^{\top}(t)\dot{P}(t)x(t)+x^{\top}(t)P(t)\dot{x}(t) \tag{4-2-26}$$

将状态方程(4-2-1）式和黎卡提方程(4-2-24）式代入，经配方整理可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[x^{\top}(t)P(t)x(t)]=&-[x^{\top}(t)Q(t)x(t)+u^{\top}(t)R(t)u(t)]\\&+[u(t)+R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)x(t)]^{\top}R(t)[u(t)+R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)x(t)]\end{aligned} \tag{4-2-27}$$

对上式两边由 t_0 到 t_f 积分，经整理得

$$\begin{aligned}x^{\top}(t_f)Fx(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[x^{\top}(t)Q(t)x(t)+u^{\top}(t)R(t)u(t)]=x^{\top}(t_0)P(t_0)x(t_0)\\+\int_{t_0}^{t_f}\{[u(t)+R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)x(t)]^{\top}R(t)[u(t)+R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)x(t)]\}dt\end{aligned} \tag{4-2-28}$$

上式左边乘以 1/2 即为性能指标(4-2-2）式的右边，也即有

$$J(u)=\frac{1}{2}x^{\top}(t_0)P(t_0)x(t_0)$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{[u(t)+R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)x(t)]^{\top}R(t)[u(t)+R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)x(t)]\}dt$$
(4-2-29）

当 $u(t)=-R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)x(t)=-K(t)x(t)$ 时，$J(u)$取极小值

$$J^*(u)=\frac{1}{2}x^{\top}(t_0)P(t_0)x(t_0) \quad (4\text{-}2\text{-}30)$$

因而充分条件得证。※

由以上证明，可得状态调节器问题最优性能指标的一般结论，即：从任一 $x(t)$ 开始考虑最优控制问题，均有

$$J^*(u)=V[x,t]=\frac{1}{2}x^{\top}(t)P(t)x(t) \quad (4\text{-}2\text{-}31)$$

将式 (4-2-1）所示状态方程、式(4-2-5）所示控制规律以及式(4-2-17）所示协态变量与状态变量关系综合，可给出如图 4.1 所示状态调节器问题最优控制的闭环系统框图。

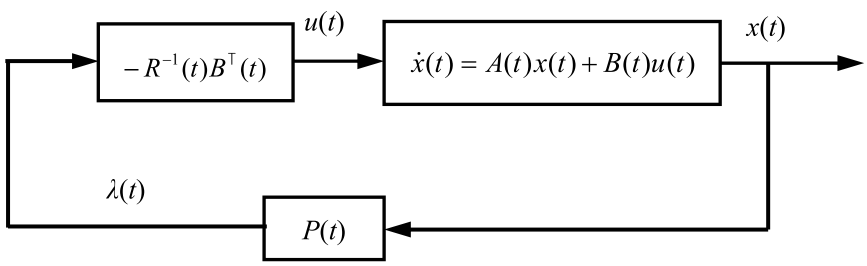


图 4.1 状态调节器最优控制闭环系统

更一般地表示状态调节器问题最优控制闭环系统的框图如图 4.2 所示，其中 $K(t)=R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)$ 为反馈增益矩阵。

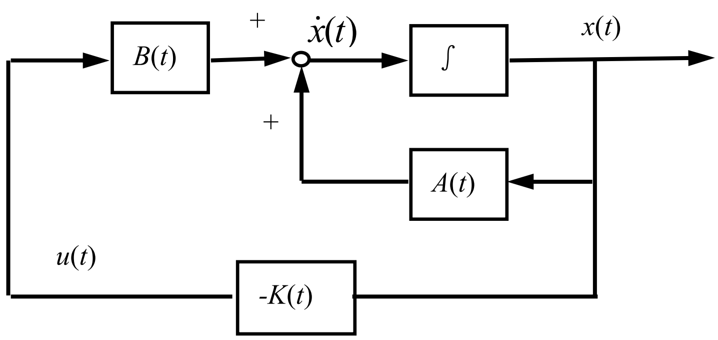


图 4.2 状态调节器最优控制系统一般表示

（3）有关求解黎卡提方程的若干问题

I. 所求解的黎卡提方程及边界条件分别为(4-2-24）式和(4-2-18)；

II. 有限时域二次型最优控制问题的黎卡提方程为非线性微分方程，一般难于得到解析解，多通过计算机数值迭代算法求近似解；

III.黎卡提方程的解 $P(t)$为 $n\times n$ 维对称正定矩阵，这是由于黎卡提方程本身的对称性决定的（前提为 $Q(t)$和 $R(t)$均为对称矩阵），所以只需求解 $n(n+1)/2$ 个独立微分方程；

IV. $P(t)$与状态 $x(t)$无关，可以离线计算；

V. 即使 A、B、Q、R 均为常数矩阵，黎卡提方程的解 $P(t)$也是时变的（当 t_f有限时）。

例 4.1.

已知双积分系统状态方程为

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=u(t)$$

要求最优控制 $u^*(t)$，使二次型性能指标

$$J=\frac{1}{2}[x_1^2(3)+2x_2^2(3)]+\frac{1}{2}\int_0^3[2x_1^2(t)+4x_2^2(t)+2x_1(t)x_2(t)+\frac{1}{2}u^2(t)]dt$$

达到极小值。

解：

此例中有

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad t_f=3$$

因 n=2，所以黎卡提方程的解 $P(t)$为 2╳2 维矩阵，有

$$P(t)=\begin{bmatrix}P_{11}(t)&P_{12}(t)\\P_{21}(t)&P_{22}(t)\end{bmatrix}$$

其中 $P_{21}(t)=P_{12}(t)$。则最优控制 $u^*(t)$由下式决定

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^{\top}(t)\lambda(t)=-2[0\quad 1]\begin{bmatrix}P_{11}(t)&P_{12}(t)\\P_{21}(t)&P_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$
$$=-2[P_{21}(t)x_1(t)+P_{22}(t)x_2(t)]$$

此时问题归结为求解如下黎卡提方程

$$\begin{bmatrix}\dot{P}_{11}(t)&\dot{P}_{12}(t)\\\dot{P}_{12}(t)&\dot{P}_{22}(t)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}P_{11}(t)&P_{12}(t)\\P_{12}(t)&P_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}(t)&P_{12}(t)\\P_{12}(t)&P_{22}(t)\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}P_{11}(t)&P_{12}(t)\\P_{12}(t)&P_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot 2\cdot\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}(t)&P_{12}(t)\\P_{12}(t)&P_{22}(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}$$

边界条件为

$$\begin{bmatrix}P_{11}(3)&P_{12}(3)\\P_{12}(3)&P_{22}(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$$

展开上两式后得微分方程组及边界条件

$$\dot{P}_{11}(t)=2P_{12}^2(t)-2 \qquad\qquad P_{11}(3)=1$$
$$\dot{P}_{12}(t)=-P_{11}(t)+2P_{12}(t)P_{22}(t)-1\,, \qquad\qquad P_{12}(3)=0$$
$$\dot{P}_{22}(t)=-2P_{12}(t)+2P_{22}(t)-4 \qquad\qquad P_{22}(3)=2$$

该方程组为非线性微分方程组，解析解很难求出，所以一般只能求出数值解。

4.3 无限时域线性定常系统状态调节器问题

上节给出的状态调节器问题考虑的是在有限时域、即 t_f有限时的黎卡提方程求解问题。从例 4.1 可以看出，即使是一个非常简单的二阶定常系统，所得到的黎卡提方程也是非线性微分方程，很难求得解析解。此外，在实际应用中，特别是定值过程控制场合，控制系统在连续运行时要将时域划分为有限区间再去确定最优控制参数也是十分困难的，时变的黎卡提方程解 $P(t)$在工程实现上也极不方便。

针对状态调节器在应用中所面临的上述问题，无限时域状态调节器是一种有效的解决方案。

（1） 无限时域线性定常系统状态调节器

给定线性定常系统状态方程

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\&x(t_0)=x_0\end{aligned} \tag{4-3-1}$$

其中， $x(t)\in R^n, u(t)\in R^m$， A 和 B 分别是 $n\times n$ 和 $n\times m$ 维常数系统矩阵和增益矩阵，控制变量 $u(t)$不受约束。考虑无限时域二次型性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^{\top}(t)Qx(t)+u^{\top}(t)Ru(t)]dt \tag{4-3-2}$$

其中系数矩阵满足 Q 半正定，R 正定条件，且均为常数矩阵。(4-3-2）式也可表示为有限时域性能指标取极限的形式，即

$$J=\lim_{t_f\to\infty}\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\top}(t)Qx(t)+u^{\top}(t)Ru(t)]dt=\lim_{t_f\to\infty}J_{t_f} \tag{4-3-3}$$

所以可以直接应用上一节介绍的有关有限时域性能指标状态调节器推导结果。

由于在(4-3-3）式 J_{t_f} 中 F=0，因此有使 J_{t_f} 取极小值的最优控制为

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\top}P(t)x(t) \tag{4-3-4}$$

其中 $P(t)$为黎卡提微分方程

$$\dot{P}(t)=-P(t)A+P(t)BR^{-1}B^{\top}P(t)-A^{\top}P(t)-Q \tag{4-3-5}$$

的正定对称解，且满足边界条件

$$P(t_f)=0 \tag{4-3-6}$$

可以证明，当系统(4-3-1）完全可控时，存在常数阵 $\overline{P}$，使

$$\lim_{t_f \to \infty} P(t) = \overline{P}, \quad 0 \le t << t_f \tag{4-3-7}$$

成立。而当 t<<∞时，$\dot{P}(t)=0$，即 $\dot{\overline{P}}(t)=0$ 。如图 4.3 所示。

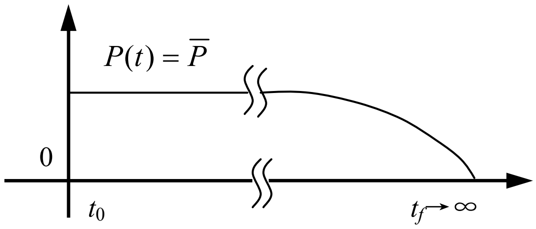


图 4.3

因此，当 $t_f \to \infty$ 时，黎卡提微分方程转化为黎卡提代数方程，即有

$$\overline{P}A - \overline{P}BR^{-1}B^{\top}\overline{P} + A^{\top}\overline{P} + Q = 0 \tag{4-3-8}$$

$\overline{P}$ 为上式的对称正定解。此时，最优控制存在且唯一，为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\top}\overline{P}x(t) \tag{4-3-9}$$

而最优状态 $x^*(t)$则为下列线性定常齐次方程的解

$$\dot{x}^*(t) = [A - BR^{-1}B^{\top}\overline{P}]x(t) = A_c x(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4-3-10}$$

（2） 无限时域线性定常系统状态调节器的有关讨论

与上一节有限时域一般线性系统状态调节器相比，无限时域线性定常系统状态调节器的区别在于：

I. 要求系统(4-3-1）完全可控，从而可以保证使每一个状态都趋于零，从而保证当 $t_f \to \infty$ 时性能指标有限；

II. 最优控制系统是稳定系统，亦即(4-3-10）式中矩阵 A_c 的所有特征根都必须具有负实部。否则，不具有负实部的特征根所对应的状态将不趋于零，因而性能指标将趋于无穷大；

III. 要求 F=0，因为所关心的只是在有限时域内的响应，对 $t_f \to \infty$ 的终端代价无实际意义。

例 4.2.

仍考虑双积分系统，状态方程为

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

要求最优控制 $u^*(t)$，使二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[x_1^2(t) + 2bx_1(t)x_2(t) + ax_2^2(t) + u^2(t)]dt$$

达到极小值。其中 a-b^2>0。

解：

此例中有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

因 a-b^2>0，所以 Q 正定。又由 $Rank\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$ 满秩，所以黎卡提方程存在常数解。此时有黎卡提代数方程为 $\overline{P}A - \overline{P}BR^{-1}B^{\top}\overline{P} + A^{\top}\overline{P} + Q = 0$，即有

$$\begin{bmatrix} \overline{P}_{11} & \overline{P}_{12} \\ \overline{P}_{21} & \overline{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{P}_{11} & \overline{P}_{12} \\ \overline{P}_{21} & \overline{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{P}_{11} & \overline{P}_{12} \\ \overline{P}_{21} & \overline{P}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{P}_{11} & \overline{P}_{12} \\ \overline{P}_{21} & \overline{P}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} = 0$$

将上式展开，并考虑 $\overline{P}_{21} = \overline{P}_{12}$，经整理可得代数方程组

$$\begin{aligned} &\overline{P}_{12}^2 - 1 = 0 \\ &-\overline{P}_{11} + \overline{P}_{12}\overline{P}_{22} - b = 0 \\ &-2\overline{P}_{12} + \overline{P}_{22}^2 - a = 0 \end{aligned}$$

解之可得

$$\begin{aligned} &\overline{P}_{12}^2 = \pm 1 \\ &\overline{P}_{11} = \overline{P}_{12}\overline{P}_{22} - b \\ &\overline{P}_{22} = \pm\sqrt{a + 2\overline{P}_{12}} \end{aligned}$$

由 $\overline{P}$ 的正定性，应有 $\overline{P}_{11}$ >0，$\overline{P}_{11}\overline{P}_{22} - \overline{P}_{12}^2$ >0。由此可推出 $\overline{P}_{22}$ >0，从而有 $\overline{P}_{22} = \sqrt{a + 2\overline{P}_{12}}$。

又，若考虑 $\overline{P}_{12} = -1$，则由 $\overline{P}_{22} = \sqrt{a-2}$，必有 a>2。而由 $\overline{P}_{11} = \overline{P}_{12}\overline{P}_{22} - b = -\sqrt{a-2} - b > 0$，得 $b < -\sqrt{a-2} < 0$。将 $\overline{P}_{12} = -1$、$\overline{P}_{11} = -\sqrt{a-2} - b$ 和 $\overline{P}_{22} = \sqrt{a-2}$ 代入不等式 $\overline{P}_{11}\overline{P}_{22} - \overline{P}_{12}^2$ >0，得 $-(a-2) - b\sqrt{a-2} > 1$，此式经整理可化为 $b^2 > \dfrac{(a-1)^2}{a-2} = a + \dfrac{1}{a-2} > a$，与 a-b^2>0 相矛盾。

所以，必有 $\overline{P}_{12} = +1$，从而有 $\overline{P}_{22} = \sqrt{a+2}$，$\overline{P}_{11} = \sqrt{a+2} - b$，因此有

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -R^{-1}B^{\top}\overline{P}x(t) = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{P}_{11} & \overline{P}_{12} \\ \overline{P}_{12} & \overline{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &= -\overline{P}_{12}x_1(t) - \overline{P}_{22}x_2(t) = -x_1(t) - \sqrt{a+2}\,x_2(t) \end{aligned}$$

例 4.2 与例 4.1 相比，可以看出无限时域时黎卡提方程的求解要相对容易得多，但要得到解析解也还是要费一番周折。实际工程问题中系统远比双积分系统复杂，因此得到解析解的难度更大。所以即使是无限时域线性定常系统状态调节器问题，其黎卡提代数方程的常数解一般也是通过数值计算方法求取。

4.4 输出调节器问题

讨论了状态调节器这一最基本的线性二次型最优控制问题之后，就可以以此为基础讨论其他类型的线性二次型最优控制问题。首先考虑输出调节器问题。

（1） 考虑线性定常系统的状态方程和输出方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4-4-1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{4-4-2}$$

及二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} y^{\mathrm{T}}(t_f)Fy(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [y^{\mathrm{T}}(t)Qy(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]dt \tag{4-4-3}$$

其中 $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^l$，$A$、$B$、$C$ 分别是 $n \times n$、$n \times m$ 和 $l \times n$ 维常数系统矩阵、增益矩阵和输出矩阵，控制变量 $u(t)$不受约束；F、Q 非负定（半正定），R 正定。

假定系统完全可观，要求最优控制 $u^*(t)$，使 J 最小。

将 $y(t) = Cx(t)$ 代入 J，有

$$J = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}}(t_f)C^{\mathrm{T}}FCx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}QCx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]dt \tag{4-4-4}$$

可以证明，若系统(4-4-1)、(4-4-2）可观，F、Q 都为半正定时，则 $C^{\mathrm{T}}FC$ 和 $C^{\mathrm{T}}QC$ 有也都为半正定。这样，输出调节器问题即可转化为等效的状态调节器问题，可以应用状态调节器问题的解法求解输出调节器问题。

（2） 有限时域输出调节器问题

此时，t_f有限，F、Q 半正定，R 正定。与有限时域状态调节器问题类似有

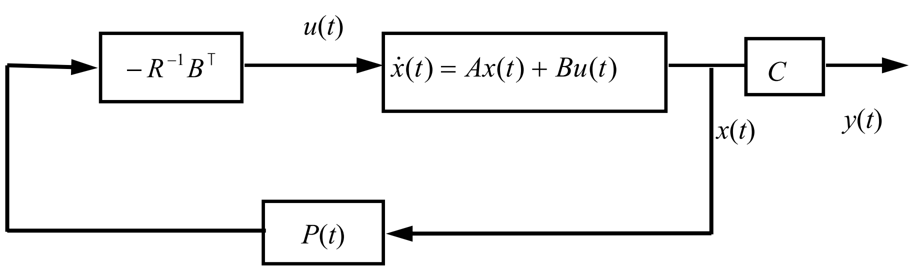
$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)x(t) \tag{4-4-5}$$

存在且唯一。其中 $n \times n$ 维矩阵 P(t)为下列黎卡提矩阵微分方程

$$\dot{P}(t) = -P(t)A + P(t)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t) - A^{\mathrm{T}}P(t) - C^{\mathrm{T}}QC \tag{4-4-6}$$

$$P(t_f) = C^{\mathrm{T}}FC \tag{4-4-7}$$

的对称正定解。



最

图 4.4 输出调节器最优控制闭环系统

优状态 $x^*(t)$是 $\dot{x}(t)=[A-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)]x(t)$ 的解。闭环控制系统如图 4.4 所示。由图可见，$u^*(t)$是 $x(t)$的函数而不是 $y(t)$的函数。$x(t)$的维数高于或等于 $y(t)$的维数，由 $y(t)$倒推 $x(t)$时，若系统不可观，则 $x(t)$不能全部得到，也就无法实现反馈最优控制。

（3） 无限时域输出调节器问题

此时 $t_f\to\infty$，且 F=0, 系统完全可控可观， Q 半正定，R 正定。类似于无限时域状态调节器，有

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}x(t)$$

存在且唯一。其中 $n\times n$ 维矩阵 $\overline{P}$ 为下列黎卡提矩阵代数方程

$$-\overline{P}A+\overline{P}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}-A^{\mathrm{T}}\overline{P}-C^{\mathrm{T}}QC=0 \tag{4-4-8}$$

的对称正定解。最优状态 $x^*(t)$是

$$\dot{x}^*(t)=[A-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}]x(t) \tag{4-4-9}$$

的解，且矩阵 $A-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}$ 的特征值均具有负实部，即系统稳定。

4.5 跟踪问题（伺服机问题）

（1）问题描述

考虑线性可观系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\qquad x(t_0)=x_0 \tag{4-5-1}$$

$$y(t)=Cx(t)\text{，}\quad y_r(t)\text{ 为预期输出} \tag{4-5-2}$$

及二次型性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{[y_r(t)-y(t)]^{\mathrm{T}}Q[y_r(t)-y(t)]+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\}dt \tag{4-5-3}$$

其中 $x(t)\in R^n, u(t)\in R^m, y(t)\in R^l$，$A$、$B$、$C$ 分别是 $n\times n$、$n\times m$ 和 $l\times n$ 维常数系统矩阵增益矩阵和输出矩阵，控制变量 $u(t)$不受约束； Q 非负定（半正定），R 正定；系统完全可观。要求 $u^*(t)$，使 J 达最小值

（2）问题求解

考虑 Hamilton 函数

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}\{[y_r(t)-y(t)]^{\mathrm{T}}Q[y_r(t)-y(t)]+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\}\\&+\lambda^{\mathrm{T}}(t)Ax(t)+\lambda^{\mathrm{T}}(t)Bu(t)\end{aligned} \tag{4-5-4}$$

由于 $u(t)$不受约束，有

$$\frac{\partial H}{\partial u}=Ru(t)+B^{\mathrm{T}}\lambda(t)=0 \tag{4-5-5}$$

则

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\lambda(t) \tag{4-5-6}$$

又由于$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=R>0$，所以 $u^*(t)$是使 H 和 J 达到最小值的最优控制。

由输出方程及 H，可得协态方程为

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-C^{\mathrm{T}}Q[Cx(t)-y_r(t)]-A^{\mathrm{T}}\lambda(t) \tag{4-5-7}$$

由于无终端性能指标及约束，即 $x(t_f)$自由，所以有

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)}=0 \tag{4-5-8}$$

将(4-5-6）式代入状态方程(4-5-1）式，并结合(4-5-7）和(4-5-8）式，则规范方程组可表示为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\lambda(t), \qquad x(t_0)=x_0 \tag{4-5-9}$$

$$\dot{\lambda}(t)=-C^{\mathrm{T}}QCx(t)-A\lambda(t)+C^{\mathrm{T}}Qy_r(t), \qquad \lambda(t_f)=0 \tag{4-5-10}$$

与状态调节器问题的规范方程组相比，(4-5-10）式中多了一项反映预期输出的$C^{\mathrm{T}}Qy_r(t)$而成为非齐次微分方程。假设其解为

$$\lambda(t)=P(t)x(t)-\zeta(t) \tag{4-5-11}$$

其中 P(t)为待定的 $n\times n$ 维矩阵、ζ(t)为待定的 n 维向量，对上式两边求导得

$$\dot{\lambda}(t)=\dot{P}(t)x(t)+P(t)\dot{x}(t)-\dot{\zeta}(t) \tag{4-5-12}$$

结合前面有关各式，消去 $\dot{\lambda}(t), \lambda(t), \dot{x}(t)$ 后整理得

$$\begin{aligned}&[-\dot{P}(t)-P(t)A-A^{\mathrm{T}}P(t)+P(t)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)-C^{\mathrm{T}}QC]x(t)\\&=-\dot{\zeta}(t)-A\zeta(t)+P(t)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\zeta(t)-C^{\mathrm{T}}Qy_r(t)\end{aligned} \tag{4-5-13}$$

上式左端为一时间函数与 $x(t)$的乘积，右端单纯为一时间函数，要使其对任意 $x(t)$ 成立，应满足，

$$-\dot{P}(t)-P(t)A-A^{\mathrm{T}}P(t)+P(t)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)-C^{\mathrm{T}}QC=0 \tag{4-5-14}$$

$$-\dot{\zeta}(t)-A\zeta(t)+P(t)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\zeta(t)-C^{\mathrm{T}}Qy_r(t)=0 \tag{4-5-15}$$

或

$$\dot{P}(t)=-P(t)A-A^{\mathrm{T}}P(t)+P(t)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)-C^{\mathrm{T}}QC \tag{4-5-16}$$

$$\dot{\zeta}(t)=-A\zeta(t)+P(t)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\zeta(t)-C^{\mathrm{T}}Qy_r(t) \tag{4-5-17}$$

由于 $\lambda(t_f)=P(t_f)x(t_f)-\zeta(t_f)=0$，且 $x(t_f)$任意，所以有

$$\begin{aligned}&P(t_f)=0\\&\zeta(t_f)=0\end{aligned} \tag{4-5-18}$$

求解方程组(4-5-16)、(4-5-17）满足边界条件(4-5-18）的解，即可得最优控制为

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\top}[P(t)x(t)-\zeta(t)]=-R^{-1}B^{\top}P(t)x(t)+R^{-1}B^{\top}\zeta(t) \tag{4-5-19}$$

即 $u^*(t)$包括两项，一项为 $x(t)$的线性函数，另一项为受控于 $y_r(t)$ 的 $\zeta(t)$ 的线性函数，代表由被跟踪变量 $y_r(t)$ 引起的驱动作用。

（3）无限时域跟踪问题

此时 $t_f\to\infty$，并假设系统(4-5-1)、(4-5-2）完全可控可观。与无限时域状态调节器问题相似，当 $t<<t_f$时，有

$$\dot{P}(t)=0,\quad P(t)=\overline{P}$$

其中 $\overline{P}$ 为常数矩阵。并有

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\top}\overline{P}x(t)+R^{-1}B^{\top}\zeta(t)$$

其中 $\overline{P}$ 和 $\zeta(t)$ 分别为方程

$$\overline{P}A+A^{\top}\overline{P}-\overline{P}BR^{-1}B^{\top}\overline{P}+C^{\top}QC=0 \tag{4-5-20}$$

$$\dot{\zeta}(t)=[\overline{P}BR^{-1}B^{\top}-A]\zeta(t)-C^{\top}Qy_r(t) \tag{4-5-21}$$

的解。

4.6 具有指定稳定度的最优调节器问题

（1）渐近稳定性概念

一个系统 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ 是渐近稳定的，是指微分方程

$$\dot{x}(t)=Ax(t),\quad x(t_0)=x_0,\quad t\ge t_0$$

的解 $x(t)$对于任意的 x_0 都有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

前面讨论的无限时间调节器都是渐近稳定的，但均未考虑 $x(t)\to 0$ 的速度，即衰减速度问题。衰减速度越快，则稳定性越好。

（2）具有指定稳定度的最优调节器

首先给出稳定度含义：对于一个渐近稳定系统，稳定度 $\alpha>0$，是表示 $x(t)\to 0$ 的衰减速度不低于 $e^{-\alpha t}$ 的数量级。

以下以无限时域状态调节器为例进行讨论。

考虑系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$x(t_0) = x_0 \tag{4-6-1}$$

其中 $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$，$A$、$B$ 分别是 $n\times n$ 和 $n\times m$ 维常数系统矩阵和增益矩阵，系统完全可控，且控制变量 $u(t)$不受约束。考虑指定的稳定度 α>0，性能指标为

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} e^{2\alpha t}[x^{\top}(t)Qx(t) + u^{\top}(t)Ru(t)]dt \tag{4-6-2}$$

其中 Q 半正定，R 正定。要求最优控制 $u^*(t)$，使 J 达最小值。此问题也称为改进的最优状态调节器问题。

令

$$\tilde{x}(t) = e^{\alpha t}x(t)$$
$$\tilde{u}(t) = e^{\alpha t}u(t) \tag{4-6-3}$$

则有

$$x(t) = e^{-\alpha t}\tilde{x}(t)$$
$$u(t) = e^{-\alpha t}\tilde{u}(t) \tag{4-6-4}$$

并有

$$\dot{x}(t) = -\alpha e^{-\alpha t}\tilde{x}(t) + e^{-\alpha t}\dot{\tilde{x}}(t) \tag{4-6-5}$$

将(4-6-5）式代入状态方程(4-6-1）式，可得

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A + \alpha I)\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \tag{4-6-6}$$

将(4-6-4）式代入性能指标，得

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[\tilde{x}^{\top}(t)Q\tilde{x}(t) + \tilde{u}^{\top}(t)R\tilde{u}(t)]dt \tag{4-6-7}$$

(4-6-6）和(4-6-7）为规范的最优状态调节器问题。

可以证明，如果（A，B）完全可控，则（$A+\alpha I$，B）完全可控。因此，对于系统(4-6-6)，使性能指标(4-6-7）达到最小值的最优控制作用为

$$\tilde{u}^*(t) = -R^{-1}B^{\top}\overline{P}_{\alpha}\tilde{x}(t) \tag{4-6-8}$$

其中 $\overline{P}_{\alpha}$ 为黎卡提代数方程

$$(A + \alpha I)^{\top}\overline{P}_{\alpha} + \overline{P}_{\alpha}(A + \alpha I) - \overline{P}_{\alpha}BR^{-1}B^{\top}\overline{P}_{\alpha} + Q = 0 \tag{4-6-9}$$

的对称正定解。由(4-6-3)、(4-6-4）式可知，对于原系统，最优控制为

$$u^*(t) = e^{-\alpha t}\tilde{u}^*(t) = -R^{-1}B^{\top}\overline{P}_{\alpha}e^{-\alpha t}\tilde{x}(t) = -R^{-1}B^{\top}\overline{P}_{\alpha}x(t) \tag{4-6-10}$$

最优轨线为

$$x^*(t) = e^{-\alpha t}\tilde{x}^*(t)$$

由于

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{x}^*(t)=0$$

而

$$\lim_{t\to\infty}x^*(t)=\lim_{t\to\infty}e^{-\alpha t}\tilde{x}^*(t)$$

所以 $x^*(t)$ 比 $\tilde{x}^*(t)$ 衰减更快，即在最优控制(4-6-10）的作用下，闭环控制系统

$$\dot{x}(t)=[A-R^{-1}B^{\top}\overline{P}_{\alpha}]x(t)$$

具有指定的稳定度 α >0。

例 4.3

给定单输入单输出系统

$$\ddot{y}(t)=au(t), \qquad a\neq 0$$

要求确定最优控制 $u^*(t)$，使性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}e^{2t}[y^2(t)+u^2(t)]dt$$

达到最小值。

解：

此问题为改进无限时域输出调节器问题。令

$$x_1(t)=y(t)$$
$$x_2(t)=\dot{y}(t)$$

则有状态方程

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=au(t)$$

和输出方程

$$y(t)=x_1(t)$$

即有 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ a\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$，且有 Q=1，R=1，α＝1。

由

$$Rank\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=Rank\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2$$
$$Rank\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=Rank\begin{bmatrix}0 & a\\ a & 0\end{bmatrix}=2$$

此系统完全可控可观。

将性能指标变换为

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}e^{2t}[x_1^{\ 2}(t)+u^2(t)]dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}e^{2t}\{[x_1(t)\ \ x_2(t)]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+u^2(t)]\}dt$$

则问题转换为无限时域状态调节器问题，且满足$Q'=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$半正定、$R$=1 正定条件。因此其最优控制为

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\top}\overline{P}_{\alpha}x(t)=-\begin{bmatrix}0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{P}_{\alpha 11} & \overline{P}_{\alpha 12}\\ \overline{P}_{\alpha 12} & \overline{P}_{\alpha 22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$
$$=-a[\overline{P}_{\alpha 12}x_1(t)+\overline{P}_{\alpha 22}x_2(t)]$$

其中$\overline{P}_{\alpha}$为黎卡提代数方程

$$(A+\alpha I)^{\top}\overline{P}_{\alpha}+\overline{P}_{\alpha}(A+\alpha I)-\overline{P}_{\alpha}BR^{-1}B^{\top}\overline{P}_{\alpha}+Q=0$$

的正定对称解。将$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\ a\end{bmatrix}$，$Q$=1，$R$=1，$\alpha$＝1 代入黎卡提方程，最后可解得最优控制为

$$u^*(t)=-\frac{1}{a}(1+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{2+2\sqrt{1+a^2}})x_1(t)-\frac{1}{a}(2+\sqrt{2+2\sqrt{1+a^2}})x_2(t)$$

将最优控制表示为输出反馈，则有

$$u^*(t)=-\frac{1}{a}(1+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{2+2\sqrt{1+a^2}})y(t)-\frac{1}{a}(2+\sqrt{2+2\sqrt{1+a^2}})\dot{y}(t)$$

4.7 在阶跃干扰作用下的状态调节器问题

本节考虑消除静差问题。

前面所讨论的最优控制均无法消除静差，而通过选择性能指标J的形式可以得到能克服干扰，消除静差的最优控制。

给定对象状态方程：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+B[u(t)+w(t)] \tag{4-7-1}$$

其中：状态变量$x(t)\in R^n$，控制变量$u(t)\in R^m$，$w(t)\in R^m$为阶跃干扰变量，(A,B)完全可控，B的秩为m。考虑性能指标为：

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left\{x^{\top}(t)Qx(t)+[u(t)+w(t)]^TS[u(t)+w(t)]+\dot{u}^T(t)R\dot{u}(t)\right\}dt \tag{4-7-2}$$

其中 Q 为$n\times n$维半正定对称阵，S、R 分别为$m\times m, m\times m$维正定对称阵。要求确定最优控制$u^*(t)$，使J最小。

性能指标中设置$\dot{u}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{u}(t)$项的含义是：控制作用的变化速度也不宜过大。

令

$$\overline{u}(t)=u(t)+w(t) \tag{4-7-3}$$

则有

$$\dot{\overline{u}}(t)=\dot{u}(t) \tag{4-7-4}$$

构造新状态变量

$$\overline{x}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ \overline{u}(t) \end{bmatrix}. \tag{4-7-5}$$

为$n+m$维列向量，称为增广向量。令

$$v(t)=\dot{u}(t)=\dot{\overline{u}}(t) \tag{4-7-6}$$

为新的控制向量，则得到增广系统状态方程为

$$\dot{\overline{x}}(t)=\overline{A}\overline{x}(t)+\overline{B}v(t) \tag{4-7-7}$$

其中：$\overline{A}=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$为$(n+m)\times(n+m)$维矩阵，$\overline{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$为$(n+m)\times m$维矩阵，相应的性能指标为

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[\overline{x}^{\mathrm{T}}(t)\overline{Q}\overline{x}(t)+v^{\mathrm{T}}(t)Rv(t)]dt \tag{4-7-8}$$

其中，$\overline{Q}=\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$，为$(n+m)\times(n+m)$半正定对称阵。

至此，问题转化为最优状态调节器问题。

可以证明，$(\overline{A},\overline{B})$完全可控的充要条件是$(A,B)$完全可控。则增广系统最优控制为

$$\begin{aligned} v^{*}(t)=\dot{u}^{*}(t)&=-R^{-1}\overline{B}^{T}\overline{P}\overline{x}(t) \\ &=-R^{-1}[0\quad I]\begin{bmatrix} \overline{P}_{11} & \overline{P}_{12} \\ \overline{P}_{21} & \overline{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \overline{u}(t) \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}7\text{-}9) \\ &=-R^{-1}\left[\overline{P}_{21}x(t)+\overline{P}_{22}(u^{*}(t)+w(t)\right] \end{aligned}$$

其中$\overline{P}$是黎卡提代数方程

$$\overline{PA}+\overline{A}^{T}P-\overline{PBP}^{-1}\overline{B}^{T}\overline{P}+\overline{Q}=0 \tag{4-7-10}$$

的对称正定解，从中可以解出$\overline{P}_{21}$，$\overline{P}_{22}$。

令$K_1=R^{-1}\overline{P}_{21}$，$K_2=R^{-1}\overline{P}_{22}$，则有

$$\dot{u}^*(t) = -[K_1 x(t) + K_2(u^*(t) + w(t))] \qquad (4\text{-}7\text{-}11)$$

在最优控制下，闭环系统渐近稳定，即 $\lim_{t\to\infty}\bar{x}(t) = 0$，或 $\lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix} x(t) \\ u^*(t) + w(t) \end{bmatrix} = 0$。所以有

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \\ &\lim_{t\to\infty} u^*(t) = -w(t) \end{aligned} \qquad (4\text{-}7\text{-}12)$$

这表明当 $t \to \infty$ 时，最优控制信号与扰动反号。

由系统方程有

$$u^*(t) + w(t) = (B^T B)^{-1} B^T [\dot{x}(t) - Ax(t)] \qquad (4\text{-}7\text{-}13)$$

将（4-7-13）代入（4-7-11），有

$$\dot{u}^*(t) = -\left[k_3 \dot{x}(t) + k_4 x(t)\right] \qquad (4\text{-}7\text{-}14)$$

其中，$k_3=k_2(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}$，$k_4=k_1-k_2(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}A$。（4-7-14）积分后得

$$u^*(t) = -[k_3 x(t) + \int_{t_0}^{t} k_4 x(\tau) d\tau - u^*(t_0) - k_3 x(t_0)]. \qquad (4\text{-}7\text{-}15)$$

即为在阶跃干扰作用下的最优控制，此时系统闭环稳定，无静差。

（(4-7-15）式是状态的比例一积分反馈形式，与经典控制用比例积分克服阶跃干扰一致。

4.8 最优鲁棒调节器设计

（1）鲁棒调节器定义

考虑系统方程

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + Fw(t) \\ e(t) &= y(t) - y_{\mathrm{r}}(t) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}8\text{-}1)$$

其中，$x(t)\in R^n$ 为状态向量，$u(t)\in R^m$ 为控制向量，y(t)$\in R^l$ 为输出向量，w(t)$\in R^p$ 为扰动向量。

扰动方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{Z}_w(t) &= A_w Z_w(t) \\ w(t) &= C_w Z_w(t) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}8\text{-}2)$$

其中，$Z_{\mathrm{w}}(t) \in R^{n_w}$，扰动状态向量（$C_w$，$A_w$）可观。

给定方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{Z}_r(t) &= A_r Z_r(t) \\ y_r(t) &= C_r Z_r(t) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}8\text{-}3)$$

其中，$Z_{\mathrm{r}}(t) \in R^{n_r}$，扰动状态向量（$C_r$，$A_r$）可观。

假定存在一调节器，使系统（4-8-1）闭环稳定，且输出渐近调节，即

$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ 。

当系统参数发生变化使系数矩阵产生摄动，由 $A \to A+\delta A$, $B \to B+\delta B$，$C \to C+\delta C$ 时，存在正常数 ε，满足 $\varepsilon > \delta > 0$ 只要系统保持闭环稳定就一定达到渐近调节，这样的调节器称为鲁棒调节器，这种性能称为鲁棒性。

（2）鲁棒调节器的一般结构

Robust 调节器由伺服补偿器和镇定补偿器两部分组成，一般形式为

$$u(t)=k_1\xi(t)+k_2\eta(t) \qquad （4-8-4）$$

如图 4.5 所示

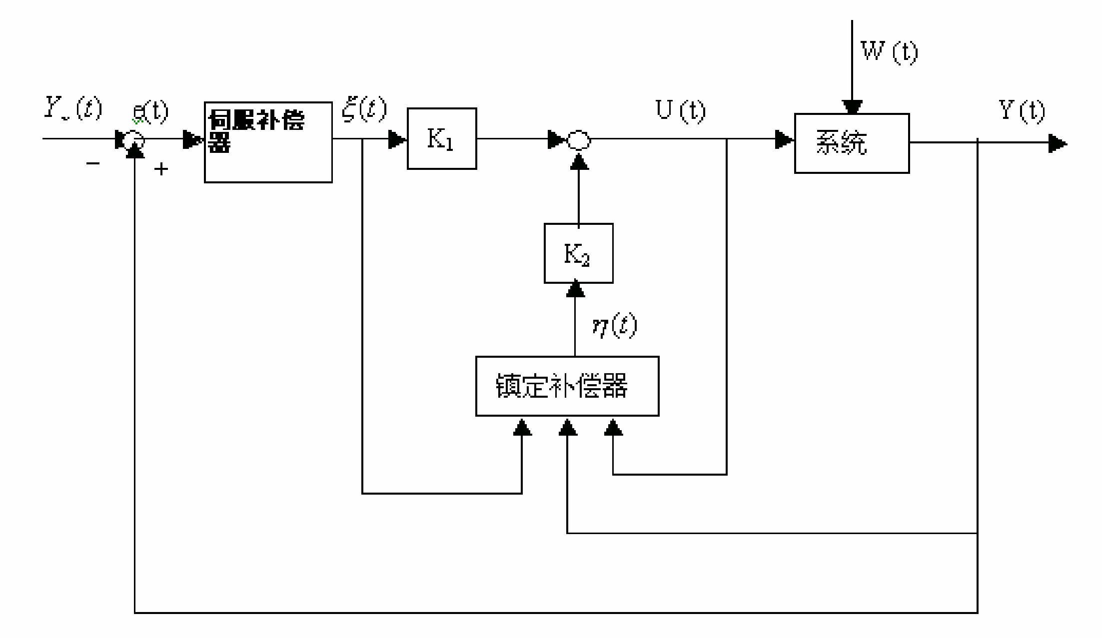


图 4.5 Robust 调节器结构框图

伺服补偿器的作用是保证系统鲁棒性，它以“内模原理”为理论基础，根据已知外界扰动 $w(t)$ 和给定扰动 $y_r(t)$ 的模型进行设计，一般形式为

$$\dot{\xi}(t) = \gamma\xi(t) + \beta e(t) \qquad （4-8-5）$$

镇定补偿器和 K_1、K_2 是要使增广系统闭环稳定，并有满意的动态响应。当系统所有状态均可测量时，镇定补偿器退化为 0 阶，鲁棒调节器简化为

$$u(t) = K_1\xi(t) + K_2x(t) \qquad （4-8-6）$$

(3) 最优鲁棒调节器设计

考虑增广系统

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{\xi}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \xi(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u(t)\\ \begin{bmatrix}y(t)\\ \xi(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \xi(t)\end{bmatrix}\end{cases} \tag{4-8-7}$$

上式可以表示为

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{A}\tilde{x}(t)+\tilde{B}u(t)\\ \tilde{y}(t)=\tilde{C}\tilde{x}(t)\end{cases} \tag{4-8-8}$$

在满足鲁棒调节器存在条件下，只要(A,B)可控，该增广系统也可控，因而存在最优控制

$$u^*(t)=-R^{-1}\tilde{B}^T\overline{P}\tilde{x}(t) \tag{4-8-9}$$

使目标函数

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[\tilde{x}^{\top}(t)Q\tilde{x}(t)+u^{\top}(t)Ru(t)\right]dt \tag{4-8-10}$$

最小。其中 Q、R 为正定阵，$\overline{P}$ 为黎卡提代数方程

$$\tilde{A}^T\overline{P}+\overline{P}\tilde{A}-\overline{P}\tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T\overline{P}+Q=0 \tag{4-8-11}$$

的对称性正定解。

考虑（4-8-6）式和（4-8-9）式，有

$$\begin{bmatrix}K_1\\ K_2\end{bmatrix}=-R^{-1}\tilde{B}^T\overline{P} \tag{4-8-11}$$

4.9 带有状态观测器的最优调节器问题

前述各种调节器都是利用状态变量进行反馈的。若系统状态不可全部被检测到（一般被检测到的仅仅是输出 $y(t)$），则需对状态进行估计。

状态估计一般采用两种方法，即 Kalman 滤波器估计和（渐近）状态观测器（状态重构）估计。本节介绍状态观测器状态估计。Kalman 滤波状态估计将在随机最优控制部分予以介绍。

（1） 状态观测器

设系统为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases} \tag{4-9-1}$$

其中（A，C）完全可观，可构造状态观测器为

$$\dot{z}(t)=(A+GC)z(t)+Bu(t)-GCy(t) \tag{4-9-2}$$

其中 G 为设计者所选的$n\times l$矩阵，它使系统（4-9-2）渐近稳定，即使（$A+GC$）的特征根均具有负实部。因此，由（4-9-1）减（4-9-2）有

$$\left[\dot{x}(t)-\dot{z}(t)\right]=A[x(t)-z(t)]+[Gy(t)-GCz(t)]$$
$$=(A+GC)[x(t)-z(t)] \qquad （4-9-3）$$

渐近稳定，即

$\lim\limits_{t\to\infty}[x(t)-z(t)]=0$，或 $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=x(t)$

（2） 具有状态观测器的最优调节器设计

根据分离定理，最优调节器中的状态 $x(t)$的反馈可用状态观测器的输出 $z(t)$代替，即

$$u^*(t)=-Kz(t) \qquad （4-9-4）$$

这时，由原系统（4-9-1）和状态观测器（4-9-2）有增广系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{z}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{A} & -BK\\ -GC & (A+GC-BK)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \mathrm{z}(t)\end{bmatrix} \qquad （4-9-5）$$

用误差 $\tilde{\mathrm{x}}(t)=x(t)-z(t)$ 代入，可求得

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{\tilde{x}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{A-BK} & BK\\ 0 & A+GC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \tilde{\mathrm{x}}(t)\end{bmatrix} \qquad （4-9-6）$$

即状态调节器的性能只由$A-BK$的极点所支配，而$A+GC$则决定观测器的性能。

习　题

习题 4.1：

已知一阶系统

$$\dot{x}(t)=-\frac{1}{2}x(t)+u(t),$$
$$x(0)=2$$

和二次型性能指标

$$J=5x^2(1)+\frac{1}{2}\int_0^1[2x^2(t)+u^2(t)]dt$$

求 $u^*(t)$和 $x^*(t)$，使性能指标 J 取最小值。

习题 4.2：

已知系统

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\qquad x_1(0)=x_{10}$$
$$\dot{x}_2(t)=u(t),\qquad x_2(0)=x_{20}$$
$$y(t)=x_1(t)$$

试确定 $u^*(t)$，使性能指标

$$J=\int_0^\infty[y^2(t)+ru^2(t)]dt$$

达到最小值，其中 $r>0$。

习题 4.3

设有一阶系统

$\dot{x}(t) = u(t)$， $x(0)=1$

试求，使性能指标 $J = \dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{2t}\left[x^2(t) + u^2(t)\right]dt$ 达最小值的最优控制函数。