# 实验1-5仿真报告

高钰满, 3170105242

代码见 code/probot\_gazebo/src ,代码注释完整

仿真结果见 /vedio

节点运行方式见 ReadMe.pdf

# 实验一 机械臂正逆运动学

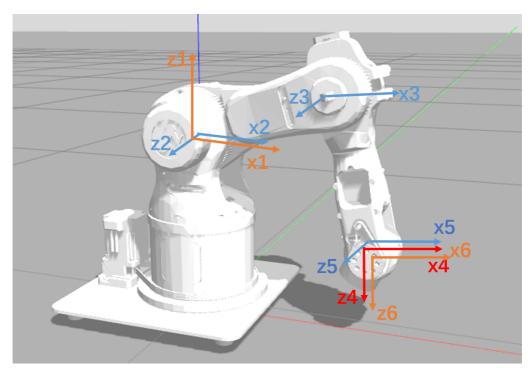
### 一、实验目的

1、巩固正逆运动学基础概念。 2、了解正逆运动学在机械臂控制中的实际用途。

# 二、实验内容及计算原理

1、机械臂模型DH参数的计算。 2、机械臂正运动学的计算。 3、机械臂逆运动学的计算。

### (1) 建立机械臂坐标系



### DH参数表

(单位: mm)

关节i	$lpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$ heta_i$
1	0	0	D1 (284)	Θ1
2	90°	0	0	Θ2
3	0	A3 (225)	0	Θ3
4	90°	0	D4 (228.9)	Θ4
5	-90°	0	0	Θ5
6	90°	0	0	Θ6
7	0	0	0 D7 (55)	
8	-90°	0	0	0

关节1-6为实际机械臂关节,对应实际的机械臂旋转;

关节7为最末端机械臂的长度平移;关节8为适应gazebo中末端坐标系的角度旋转;

根据机械臂的实际关节零点位置需要对关节2加偏置:  $\pi/2$ , 对关节5加偏置:  $-\pi/2$ .

### (2)建立机械臂正运动学方程

根据连杆连体坐标系的变换矩阵:

$$a_{i-1}T = egin{bmatrix} \cos heta_i & -\sin heta_i & 0 & a_{i-1} \ \sin heta_i \cos lpha_{i-1} & \cos heta_i \cos lpha_{i-1} & -\sin lpha_{i-1} \ \sin heta_i \sin lpha_{i-1} & \cos heta_i \sin lpha_{i-1} & \cos lpha_{i-1} \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将六个连杆坐标变换阵相乘:

得到 $^{0}T$ 齐次变换矩阵后,该矩阵 $[p_{x},p_{y},p_{z}]$ 部分即为末端位置。

#### 固定角表示

现已经得到 $_8^0 T$ 齐次变换矩阵,可由其中的旋转矩阵部分解得X-Y-Z固定角,进而表示姿态。 旋转矩阵与固定角间有如下关系:

$$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

任意一个正交旋转矩阵都能反解出 $\alpha/\beta/\gamma$ :

$$egin{aligned} & egin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \ r_{21} & r_{22} & r_{23} \ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = R_{Z'Y'X'}(lpha,eta,\gamma) \ & eta = \operatorname{Atan} 2\left(-r_{31},\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}
ight) \ & lpha = \operatorname{Atan} 2\left(r_{21}/\coseta,r_{11}/\coseta
ight) \ & \gamma = \operatorname{Atan} 2\left(r_{32}/\coseta,r_{33}/\coseta
ight) \end{aligned}$$

综上所述,在0坐标系下用 $[p_x,p_y,p_z]$ 和固定角X-Y-Z表示机械臂末端位姿,则从关节变量到机械臂末端的**运动学方程**为:

$$egin{aligned} p_x &= rac{1}{5} s_1 - rac{s_5 (s_1 s_4 - c_1 c_2 c_4)}{10} - rac{c_1 c_5 s_2}{10} - L_3 c_1 s_2 \ p_y &= rac{s_5 (c_1 s_4 + c_2 c_4 s_1)}{10} - rac{c_1}{5} - rac{c_5 s_1 s_2}{10} - L_3 s_1 s_2 \ p_z &= L_3 c_2 + rac{c_2 c_5}{10} + rac{c_4 s_2 s_5}{10} \ egin{aligned} eta &= \operatorname{Atan} 2 \left( -r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2} 
ight) \ lpha &= \operatorname{Atan} 2 \left( r_{21} / \cos eta, r_{11} / \cos eta 
ight) \ \gamma &= \operatorname{Atan} 2 \left( r_{32} / \cos eta, r_{33} / \cos eta 
ight) \end{aligned}$$

其中,  $r_{ij}$ 见第二部分推导.

### (3)求出机械臂的逆运动学解

现已知基坐标系下的机械臂末端位姿 $[p_x, p_y, p_z, roll, pitch, yaw]$ ,可以由公式计算齐次变换矩阵 $^0_sT$ :

$$R_8^0 = egin{bmatrix} Clpha Ceta & Clpha Seta S\gamma - Slpha C\gamma & Clpha Seta C\gamma + Slpha S\gamma \ Slpha Ceta & Slpha Seta S\gamma + Clpha C\gamma & Slpha Seta C\gamma - Clpha S\gamma \ -Seta & Ceta S\gamma & Ceta C\gamma \end{bmatrix} \ P_8^0 = [p_x, p_y, p_z] \ rac{0}{8}T = egin{bmatrix} R_8^0 & P_8^0 \ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

现需要解算各关节变量:

尝试使用PIREPER法进行逆运动学求解

由于PIREPER法要求机械臂的最后3个轴相交,故先将坐标系6的齐次变换矩阵算出:

$$_{6}^{0}T = _{8}^{0}T(_{8}^{7}T^{-1})(_{7}^{6}T^{-1})$$

以下将 $_{6}^{0}T$ 作为已知量,  $[x, y, z]^{T}$ 为 $_{6}^{0}T$ 中的位置矢量

### 前3关节角

满足如下关系:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0P_{4ORG} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T_2^1T_3^2T \begin{bmatrix} {}^3P_{4ORG} \\ 1 \end{bmatrix}$$

逐层计算:

$$\left[egin{array}{c} ^2P_{4ORG} \ 1 \end{array}
ight] = egin{array}{c} ^3P_{4ORG} \ 1 \end{array}
ight] = \left[egin{array}{c} f_1 \ f_2 \ f_3 \ 1 \end{array}
ight]$$

其中,

$$\left\{egin{aligned} f_1 &= d_4 S_3 + a_2 \ f_2 &= -d_4 C_3 \ f_3 &= 0 \end{aligned}
ight.$$

$$\left[egin{array}{c} ^1P_{4ORG} \ 1 \end{array}
ight] = egin{array}{c} ^1P_{4ORG} \ 1 \end{array}
ight] = \left[egin{array}{c} g_1 \ g_2 \ g_3 \ 1 \end{array}
ight]$$

其中,

$$\left\{egin{aligned} g_1 &= C_2 \left(d_4 S_3 + a_2
ight) + d_4 S_2 C_3 \ g_2 &= 0 \ g_3 &= S_2 \left(d_4 S_3 + a_3
ight) - d_4 C_2 C_3 \end{aligned}
ight.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0}P_{4ORG} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{0}_{1} T \begin{bmatrix} {}^{1}P_{40RG} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1}g_{1} - S_{1}g_{2} \\ S_{1}g_{1} + C_{1}g_{2} \\ g_{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$
(1)

由上式可得:

$$r = x^2 + y^2 + z^2 = d_4^2 + a_2^2 + 2d_4a_2S_3$$
 (2)

$$z = S_2(d_4S_3 + a_2) - d_4C_2C_3 (3)$$

解 $\theta_3$ :

由(2):

$$heta_3 = asin(rac{r-d_4^2-a_2^2}{2d_4a_2})$$

解 $\theta_2$ :

$$\left( d_{4}C_{3}-z 
ight) u^{2}+2 \left( d4S_{3}+a_{2} 
ight) u-\left( d_{4}C_{3}+z 
ight) =0$$
  $heta_{2}=2atan(u)$ 

解 $\theta_1$ :

由 (1) 可得:

$$egin{bmatrix} x \ y \end{bmatrix} = egin{bmatrix} c_1g_1 - s_1g_2 \ s_1g_1 + c_1g_2 \end{bmatrix} \ heta_1 = acos(x/g_1) \ heta_2 = acos(x/g_1) \ heta_1 = acos(x/g_1) \ heta_2 = acos(x/g_1)$$

 $\theta_1$  需满足:

$$y = sin\theta_1 g_1$$

### 后3关节角

进一步通过欧拉角求解最后三个关节角:

首先算出坐标4相对于基坐标的姿态:

$${}^{0}_{4}R|_{\theta_{4}=0} = {}^{0}_{3}R^{3}_{4}R|_{\theta_{4}=0}$$

则最后三个关节的旋转矩阵为:

$${}^4_6R|_{ heta_4=0}={}^0_4R^{-1}|_{ heta_4=0}\cdot {}^0_6R$$

由旋转矩阵求解Z - Y - Z欧拉角公式得:

$$eta = {
m Atan}\, 2 \left( \sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33} 
ight) \ lpha = {
m Atan}\, 2 \left( r_{23} / \sineta, r_{13} / \sineta 
ight) \ \gamma = {
m Atan}\, 2 \left( r_{32} / \sineta, -r_{31} / \sineta 
ight)$$

最终求解各关节变量.

# 三、实验步骤及结果

### (1) 正运动学验证

给出关节角, 计算末端位置:

### 第一组

关节角: [0.927, -0.687, -0.396, 0, 1.083, 0.927]

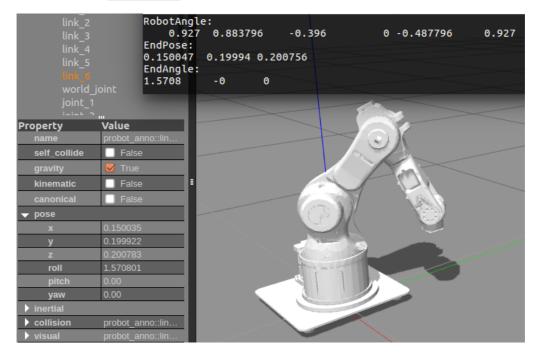
正运动学计算末端位姿: [0.150047, 0.19994, 0.200756, 1.5708, 0, 0]

Gazebo仿真种末端位姿: [0.150035, 0.199922, 0.200783, 1.570801, 0, 0]

位姿绝对误差: [0.000012, 0.000018, -0.000027, -0.000001, 0, 0]

误差极小,几乎可以忽略不计.

运行结果: (注: 图中 RobotAngle 关节角是根据前述DH参数增加偏置前的关节角)



#### 第二组

关节角: [0.322, -0.855, -0.021, 0, 0.877, 0.322]

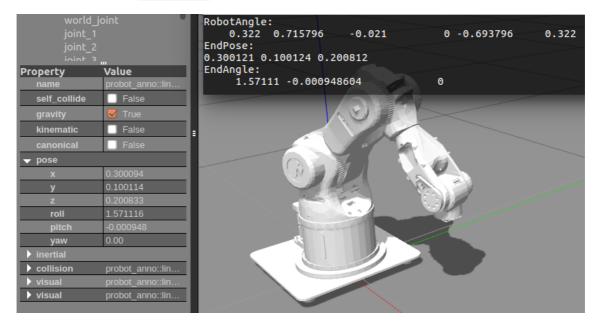
正运动学计算末端位姿: [0.300121, 0.100124, 0.200812, 1.571110, -0.000950, 0]

Gazebo仿真种末端位姿: [0.300094, 0.100114, 0.200833, 1.571116, -0.000948, 0]

位姿绝对误差: [0.000027, 0.00001, -0.000021, -0.000006, -0.000002, 0]

误差极小,几乎可以忽略不计.

运行结果: (注: 图中 RobotAngle 关节角是根据前述DH参数增加偏置前的关节角)



#### 第三组

关节角: [-0.322, -0.636, -0.011, 0, 0.647, -0.322]

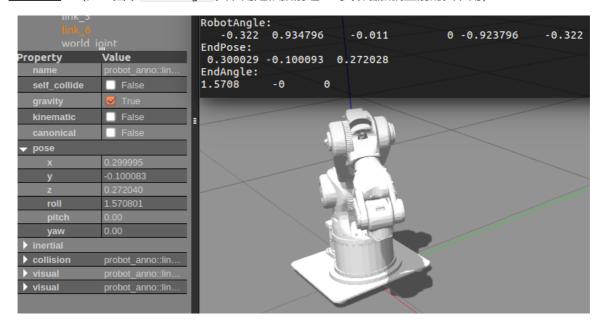
正运动学计算末端位姿: [0.300029, -0.100093, 0.272028, 1.5708, 0, 0]

Gazebo仿真种末端位姿: [0.299995, -0.100083, 0.272040, 1.57081, 0, 0]

位姿绝对误差: [0.000034, -0.00001, -0.000022, -0.000001, 0, 0]

误差极小,几乎可以忽略不计.

运行结果: (注: 图中 RobotAngle 关节角是根据前述DH参数增加偏置前的关节角)



### (2) 逆运动学验证

给出末端位置, 计算关节角:

若不考虑关节角转动范围限制,每个末端位置可解出8个解,解出所有解后再取符合关节范围的解,publish 验证.

### 第一组

末端位姿: [0.2, 0.2, 0.2007, 1.57, -1.57, 0]

逆运动学计算关节角:

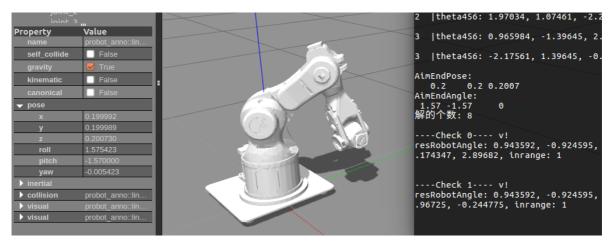
在范围内共有4组解:

```
----Check 0----
1
2
    resRobotAngle: 0.943488, -0.924743, -0.347274, -2.17673, 0.173647, 2.89722
3
4
    ----Check 1----
5
    resRobotAngle: 0.943488, -0.924743, -0.347274, 0.964865, 2.96795, -0.244375
6
 7
    ----Check 2----
8
    resRobotAngle: -2.1981, 0.924743, 3.48887, 0.964865, 0.173647, 2.89722
9
10
    ----Check 3----
    resRobotAngle: -2.1981, 0.924743, 3.48887, -2.17673, 2.96795, -0.244375
11
```

Gazebo中末端位姿与预设位姿误差: [-0.0054, -0.000011, 0.00003, 0, 0, 0]

#### 运行结果:

(4组解的gazebo执行结果见 vedio/逆运动学-第1组-4个解.mp4)



### 第二组

末端位姿: [0.15, 0.2, 0.2007, 0, 0, 0]

逆运动学计算关节角:

在范围内共有4组解:

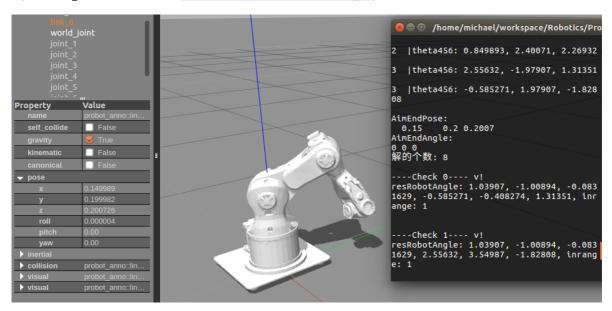
```
2
    resRobotAngle: 1.03907, -1.00894, -0.0831629, -0.585271, -0.408274, 1.31351
 3
 4
    ----Check 1----
 5
    resRobotAngle: 1.03907, -1.00894, -0.0831629, 2.55632, 3.54987, -1.82808
 6
 7
    ----Check 2----
    resRobotAngle: -2.10252, 1.00894, 3.22476, 2.55632, -0.408274, 1.31351
 8
 9
    ----Check 3----
10
11
    resRobotAngle: -2.10252, 1.00894, 3.22476, -0.585271, 3.54987, -1.82808
```

Gazebo中末端位姿与预设位姿误差: [-0.000011, -0.000018, 0.000026, 0.000004, 0, 0]

误差极小,几乎可以忽略不计.

### 运行结果:

(4组解的gazebo执行结果见 vedio/逆运动学-第2组-4个解.mp4)



### 第三组

末端位姿: [0.3,0,0.122,1.57,0,0]

逆运动学计算关节角:

在范围内共有3组解:

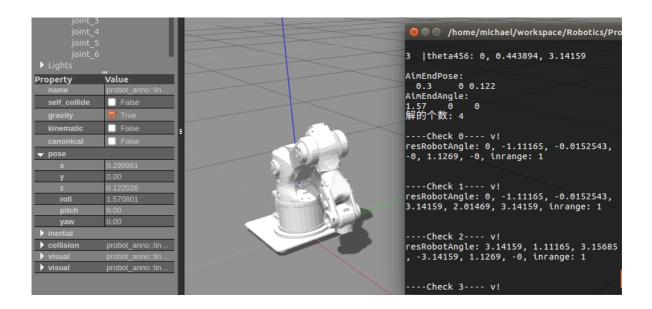
```
----Check 0----
 2
    resRobotAngle: 0, -1.11165, -0.0152543, -0, 1.1269, -0
 3
4
    ----Check 1----
    resRobotAngle: 0, -1.11165, -0.0152543, 3.14159, 2.01469, 3.14159
5
 6
 7
    resRobotAngle: 3.14159, 1.11165, 3.15685, -3.14159, 1.1269, -0
8
9
10
    ----Check 3----
    resRobotAngle: 3.14159, 1.11165, 3.15685, 0, 2.01469, 3.14159
11
```

Gazebo中末端位姿与预设位姿误差: [-0.000019, 0, 0.000026, 0.000801, 0, 0]

误差极小,几乎可以忽略不计.

#### 运行结果:

(4组解的gazebo执行结果见 vedio/逆运动学-第3组-4个解.mp4)



# 实验三 速度传递实验

# 一、实验目的

1、掌握雅可比矩阵的计算方法 2、掌握通过雅可比矩阵反解关节速度的方法 3、掌握实时刷新机械臂关节速度的方法

# 二、实验内容及计算原理

1、编写计算雅可比矩阵的代码 2、实现机械臂末端运动速度的控制

定义笛卡尔速度矢量: 
$$v_N = \begin{bmatrix} v_N \\ \omega_N \end{bmatrix}$$
 和关节角空间矢量  $\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_N \end{bmatrix}$ 

雅可比矩阵形式:

$$v_N = egin{bmatrix} \hat{Z}_1 imes (P_N-P_1) & \hat{Z}_2 imes (P_N-P_2) & \cdots & \hat{Z}_{N-1} imes (P_N-P_{N-1}) & 0 \ \hat{Z}_1 & \hat{Z}_2 & \cdots & \hat{Z}_{N-1} & \hat{Z}_N \end{bmatrix} \dot{\Theta}$$

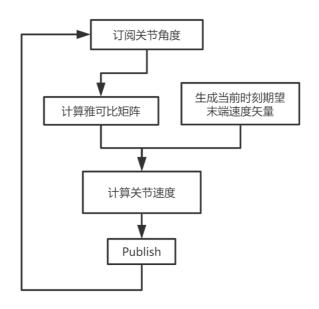
其中, $P_i$ 为齐次变换矩阵最右侧一列前三项 $[p_x,p_y,p_z]$ , $\hat{Z}_i$ 为旋转矩阵最右侧一列 $[r_{13},r_{23},r_{33}]$ :

$$T_i = egin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

齐次变换矩阵计算见实验一.

# 三、实验步骤及结果

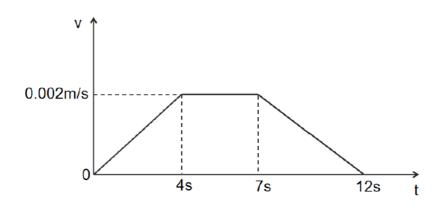
#### 程序流程图:



初始末端位置: [0.229, 0, 0.454]

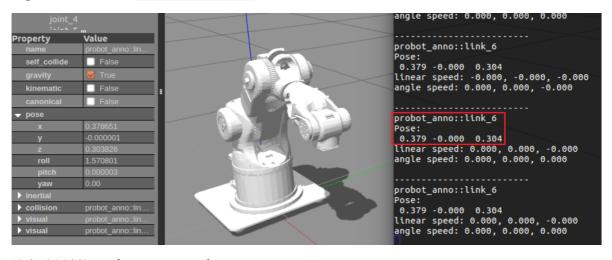
期望运动距离: [0.15, 0, -0.15]

速度曲线:



#### 运行结果:

(gazebo执行结果见 vedio/速度传递.mp4)



结束时末端位置: [0.379,0,0.304]

运动距离: [0.15, 0, -0.15]

# 实验四 轨迹生成实验

### 一、实验目的

1、巩固机械臂轨迹的五次多项式插值方法 2、掌握通过速度控制使机械臂按预期的轨迹去运动到指定 位置

# 二、实验内容及计算原理

### (1) 逆运动学求解

推导计算过程见实验一

### (2) Mini-jerk 五次多项式最优轨迹生成

轨迹采用5次多项式进行拟合、保证位置、速度、加速度均连续。

该机械臂的6个关节轨迹可以分别进行规划,以下对其中一个关节进行轨迹规划。

已知一个关节需要到达的M个角度,利用多项式拟合会有(M-1)段轨迹,表示如下:

$$f(t) = egin{cases} f_1(t) \doteq \sum_{i=0}^N p_{1,i} t^i & T_0 \leq t \leq T_1 \ f_2(t) \doteq \sum_{i=0}^N p_{2,i} t^i & T_1 \leq t \leq T_2 \ dots & dots \ f_M(t) \doteq \sum_{i=0}^N p_{M,i} t^i & T_{M-1} \leq t \leq T_M \end{cases}$$

每段轨迹都用多项式表示, 该轨迹集合需要满足以下约束条件:

#### a) 期望角度约束

每段轨迹的起点和终点固定为M个角度中的对应值:

$$\left\{egin{aligned} f_{j}^{(k)}\left(T_{j-1}
ight) = x_{0,j}^{(k)} \ f_{j}^{(k)}\left(T_{j}
ight) = x_{T,j}^{(k)} \end{aligned}
ight.$$

#### b) 连续性约束

相邻轨迹的速度和加速度连续:

$$f_{j}^{\left(k
ight)}\left(T_{j}
ight)=f_{j+1}^{\left(k
ight)}\left(T_{j}
ight)$$

选择代价函数为所有轨迹的jerk值,使其最小。

#### 代价函数表示如下:

$$J(T) = \int_{T_{j-1}}^{T_j} ig(f^3(t)ig)^2 dt = \sum_{i \geq 4, l \geq 4} rac{i(i-1)(i-2)j(l-1)(l-2)}{i+l-5} \Big(T_j^{i+l-5} - T_{j-1}^{i+l-5}\Big) \, p_i p_l$$

将上述等式写为矩阵形式:

$$egin{aligned} \min \left[egin{array}{ccc} \mathbf{p}_1 \ dots \ \mathbf{p}_M \end{array}
ight]^T \left[egin{array}{ccc} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_M \end{array}
ight] \left[egin{array}{c} \mathbf{p}_1 \ dots \ \mathbf{p}_M \end{array}
ight] \ & ext{s.t. } A_{ ext{eq}} \left[egin{array}{c} \mathbf{p}_1 \ dots \end{array}
ight] = \mathbf{d}_{eq} \end{aligned}$$

此问题是经典的凸优化问题: QP二次优化问题, 可以快速求解.

因此能够自动地选择最优的中间点速度和加速度,进而生成最优轨迹.

#### 机械臂关节的速度和加速度需要满足如下要求:

各关节加速度与速度限制	Joint1	Joint2	Joint3	Joint4	Joint5	Joint6
v_max (rad/s)	0.7854	0.6981	0.7854	0.9599	0.9599	0.9599
a_max (rad/s^2)	0.3491	0.2618	0.3491	0. 4363	0.4363	0. 4363

# 三、实验步骤及结果

### (1) 逆运动学求解路径点对应关节角

给定路径点如下:

```
1 第一个点: [0.2289, 0, 0.454, 1.57, 0, 0] (初始门位置)
2 第二个点: [0.3, 0.25, 0.322, 1.57, -1.57, 0]
3 第三个点: [0.3, 0.1, 0.172, 1.57, -1.57, 0]
4 第四个点: [0.3, -0.1, 0.122, 1.57, -1.57, 0]
```

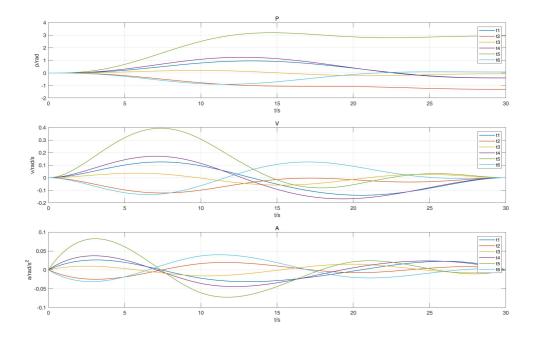
### 根据实验一求得四个路径点的关节角:

```
p1 = [0 0 0 0 0 0];
p2 = [0.795586 -0.772686  0.205056  1.08734  2.51046 -0.842853];
p3 = [0.387677 -1.07517 -0.199884  0.404374  2.86768 -0.114923];
p4 = [-0.387371 -1.29256 -0.0658126 -0.394643  2.94426  0.0811483];
```

### (2) 生成最优5次多项式轨迹

根据上述计算原理,生成轨迹,一共4个路径点,共生成3段轨迹,每段轨迹耗时10s走完.

P-V-A曲线如下:

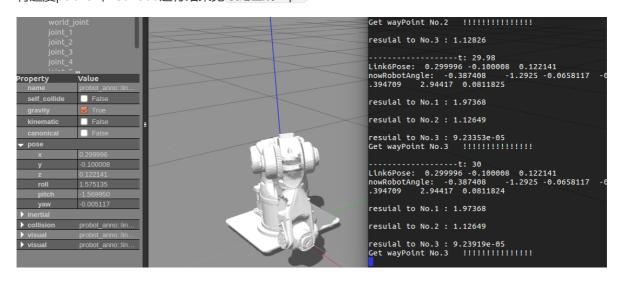


根据图像,关节的速度和加速度均满足要求.

### (3) 速度生成

利用ROS自带的 ros::time 计时器获取当前时刻,代入求解出的轨迹参数即可获得速度.

将速度publish, Gazebo运行结果见轨迹生成.mp4.



终点姿态误差: [-0.000004, -0.000008, 0.000141, -0.005, 0.0001, -0.005]

最大位姿相对误差 = 0.005/1.57 = 0.32%

由于代码订阅了机械臂末端位姿,故可通过末端位姿判断是否经过中间点:

#### 第二个路径点:

```
1 ------t: 10
2 Link6Pose: 0.300681 0.249464 0.323145
3 nowRobotAngle: 0.79511 -0.772247 0.205088 1.08685 2.50919 -0.842585
4
5 resuial to No.1: 0.00094727
6 Get wayPoint No.1 !!!!!!!!!!!
```

#### 第三个路径点:

```
1 -----t: 20.001

2 Link6Pose: 0.299868 0.100443 0.172244

3 nowRobotAngle: 0.388355 -1.07509 -0.199812 0.405073 2.86795 -0.115315

4 resuial to No.2: 0.000834903

6 Get wayPoint No.2 !!!!!!!!!!!!
```

其中 resuial 是所有位姿参数误差绝对值之和,可见经过了两个中间点.

# 实验五 定点转动实验

### 一、实验目的

1、掌握定点转动的计算与并实际运用

# 二、实验内容

1、定点转动指机械臂末端坐标始终保持不变,只改变姿态的运动 2、在仿真实验中,使机械臂末端保持初始门位置坐标[0.2289, 0, 0.454],在此处定点转动,在真实机器人实验中,可以自选位置.但定点转动的幅度不可 太小,转动角度须不小于40°.3、自选方法,生成机械臂末端定点转动的轨迹,并在机器人实现。

### 三、实验步骤及结果

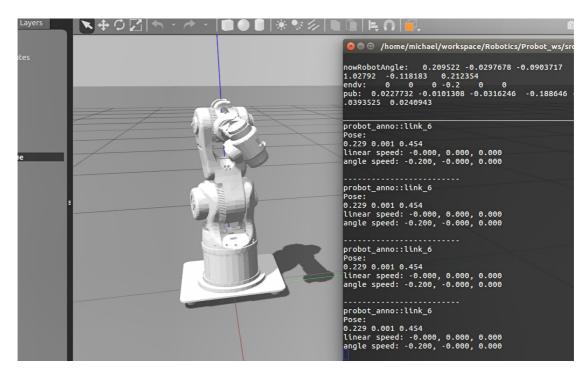
利用速度传递实验中的Jacobi矩阵,机械臂末端定点转动即为末端线速度为0,只有绕一个轴的角速度为一定值即可.

此实验中,设定期望的末端速度为:

 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 

则机械臂末端绕x轴匀速转动,第五关节转动角度为360°.

Gazebo仿真结果见: 定点转动.mp4



根据视频中机械臂运动状态和命令行中监听的机械臂末端位置,可以得到结论:

- 末端的坐标在整个运动过程中几乎没有改变,误差控制在毫米级别
- 定点转动十分连贯
- 定点转动幅度> 180°