实验1-5仿真报告

Michael Gao

代码见`code/probot_gazebo/src`，代码注释完整

仿真结果见`/vedio`

节点运行方式见`ReadMe.pdf`

实验一 机械臂正逆运动学

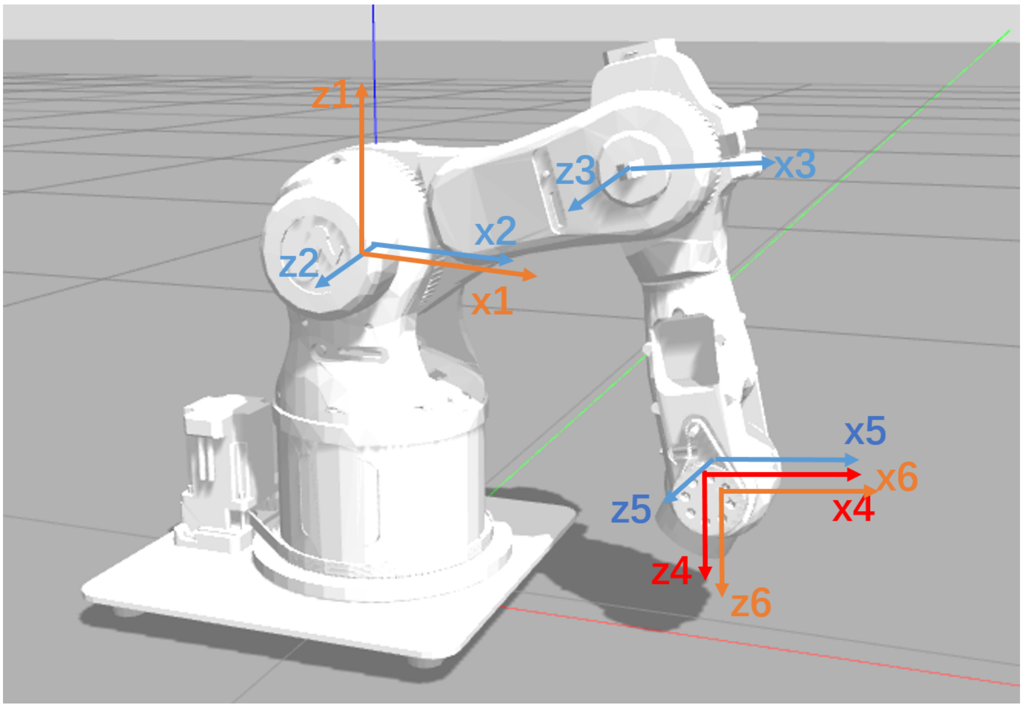
一、实验目的

1、巩固正逆运动学基础概念。 2、了解正逆运动学在机械臂控制中的实际用途。

二、实验内容及计算原理

1、机械臂模型DH 参数的计算。 2、机械臂正运动学的计算。 3、机械臂逆运动学的计算。

(1) 建立机械臂坐标系



DH参数表

（单位：mm）

关节i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	D1（284）	Θ1
2	90°	0	0	Θ2
3	0	A3（225）	0	Θ3
4	90°	0	D4（228.9）	Θ4
5	-90°	0	0	Θ5
6	90°	0	0	Θ6
7	0	0	D7（55）	0
8	-90°	0	0	0

关节1-6为实际机械臂关节，对应实际的机械臂旋转；

关节7为最末端机械臂的长度平移；关节8为适应gazebo中末端坐标系的角度旋转；

根据机械臂的实际关节零点位置需要对关节2加偏置：$\pi/2$, 对关节5加偏置：$-\pi/2$.

(2)建立机械臂正运动学方程

根据连杆连体坐标系的变换矩阵：

$$ {}^{i-1}_{i}T=\begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1}d_i \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

将六个连杆坐标变换阵相乘：

$$ {}^{0}_{8}T=\prod_{i=1}^{8}{}^{i-1}_{i}T $$

$$ {}^{0}_{8}T=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

得到${}^{0}_{8}T$齐次变换矩阵后，该矩阵$[p_x, p_y, p_z]$部分即为末端位置。

固定角表示

现已经得到${}^{0}_{8}T$齐次变换矩阵，可由其中的旋转矩阵部分解得$X-Y-Z$固定角，进而表示姿态。

旋转矩阵与固定角间有如下关系：

$$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma\\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}$$

任意一个正交旋转矩阵都能反解出$\alpha/\beta/\gamma$:

$$\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix}=R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$\begin{aligned}\beta &= \operatorname{Atan2}\left(-r_{31},\sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2}\right)\\ \alpha &= \operatorname{Atan2}\left(r_{21}/\cos\beta, r_{11}/\cos\beta\right)\\ \gamma &= \operatorname{Atan2}\left(r_{32}/\cos\beta, r_{33}/\cos\beta\right)\end{aligned}$$

综上所述，在0坐标系下用$[p_x,p_y,p_z]$和固定角$X-Y-Z$表示机械臂末端位姿，则从关节变量到机械臂末端的**运动学方程**为:

$$p_x=\frac{1}{5}s_1-\frac{s_5(s_1s_4-c_1c_2c_4)}{10}-\frac{c_1c_5s_2}{10}-L_3c_1s_2$$

$$p_y=\frac{s_5(c_1s_4+c_2c_4s_1)}{10}-\frac{c_1}{5}-\frac{c_5s_1s_2}{10}-L_3s_1s_2$$

$$p_z=L_3c_2+\frac{c_2c_5}{10}+\frac{c_4s_2s_5}{10}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \operatorname{Atan2}\left(-r_{31},\sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2}\right)\\ \alpha &= \operatorname{Atan2}\left(r_{21}/\cos\beta, r_{11}/\cos\beta\right)\\ \gamma &= \operatorname{Atan2}\left(r_{32}/\cos\beta, r_{33}/\cos\beta\right)\end{aligned}$$

其中，r_{ij}见第二部分推导.

(3)求出机械臂的逆运动学解

现已知基坐标系下的机械臂末端位姿$[p_x,p_y,p_z,roll,pitch,yaw]$，可以由公式计算齐次变换矩阵${}_8^0T$:

$$R_8^0=\begin{bmatrix}C\alpha C\beta & C\alpha S\beta S\gamma-S\alpha C\gamma & C\alpha S\beta C\gamma+S\alpha S\gamma\\ S\alpha C\beta & S\alpha S\beta S\gamma+C\alpha C\gamma & S\alpha S\beta C\gamma-C\alpha S\gamma\\ -S\beta & C\beta S\gamma & C\beta C\gamma\end{bmatrix}$$

$$P_8^0=[p_x,p_y,p_z]$$

$${}_8^0T=\begin{bmatrix}R_8^0 & P_8^0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

现需要解算各关节变量:

尝试使用PIREPER法进行逆运动学求解

由于PIREPER法要求机械臂的最后3个轴相交，故先将坐标系6的齐次变换矩阵算出:

$${}_6^0T={}_8^0T({}_8^7T^{-1})({}_7^6T^{-1})$$

以下将${}_6^0T$作为已知量，$[x,y,z]^T$为${}_6^0T$中的位置矢量

前3关节角

满足如下关系：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0P_{4ORG} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T{}^1_2T{}^2_3T \begin{bmatrix} {}^3P_{4ORG} \\ 1 \end{bmatrix}$$

逐层计算：

$$\begin{bmatrix} {}^2P_{4ORG} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^2_3T \begin{bmatrix} {}^3P_{4ORG} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中，

$$\begin{cases} f_1 = d_4S_3 + a_2 \\ f_2 = -d_4C_3 \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} {}^1P_{4ORG} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^1_2T \begin{bmatrix} {}^2P_{4ORG} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中，

$$\begin{cases} g_1 = C_2\left(d_4S_3 + a_2\right) + d_4S_2C_3 \\ g_2 = 0 \\ g_3 = S_2\left(d_4S_3 + a_3\right) - d_4C_2C_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0P_{4ORG} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T \begin{bmatrix} {}^1P_{40RG} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1g_1 - S_1g_2 \\ S_1g_1 + C_1g_2 \\ g_3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

由上式可得：

$$r = x^2 + y^2 + z^2 = d_4^2 + a_2^2 + 2d_4a_2S_3 \tag{2}$$

$$z = S_2(d_4S_3 + a_2) - d_4C_2C_3 \tag{3}$$

解θ_3：

由（2）：

$$\theta_3 = asin(\frac{r - d_4^2 - a_2^2}{2d_4a_2})$$

解θ_2：

由（3），令$u=tan(\theta_2/2)$:

$$(d_4C_3-z)\,u^2+2\,(d4S_3+a_2)\,u-(d_4C_3+z)=0$$

$$\theta_2=2atan(u)$$

解θ_1:

由（1）可得:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1g_1-s_1g_2 \\ s_1g_1+c_1g_2 \end{bmatrix}$$

$$\theta_1=acos(x/g_1)$$

θ_1需满足:

$$y=sin\theta_1g_1$$

后3关节角

进一步通过欧拉角求解最后三个关节角:

首先算出坐标4相对于基坐标的姿态:

$${}^0_4R\big|_{\theta_4=0}={}^0_3R^3_4R\big|_{\theta_4=0}$$

则最后三个关节的旋转矩阵为:

$${}^4_6R\big|_{\theta_4=0}={}^0_4R^{-1}\big|_{\theta_4=0}\cdot{}^0_6R$$

由旋转矩阵求解$Z-Y-Z$欧拉角公式得:

$$\begin{aligned}
&\beta=\operatorname{Atan}2\left(\sqrt{r_{31}^2+r_{32}^2},r_{33}\right)\\
&\alpha=\operatorname{Atan}2\left(r_{23}/\sin\beta,r_{13}/\sin\beta\right)\\
&\gamma=\operatorname{Atan}2\left(r_{32}/\sin\beta,-r_{31}/\sin\beta\right)
\end{aligned}$$

最终求解各关节变量.

三、实验步骤及结果

（1）正运动学验证

给出关节角，计算末端位置:

第一组

关节角：$[0.927,-0.687,-0.396,0,1.083,0.927]$

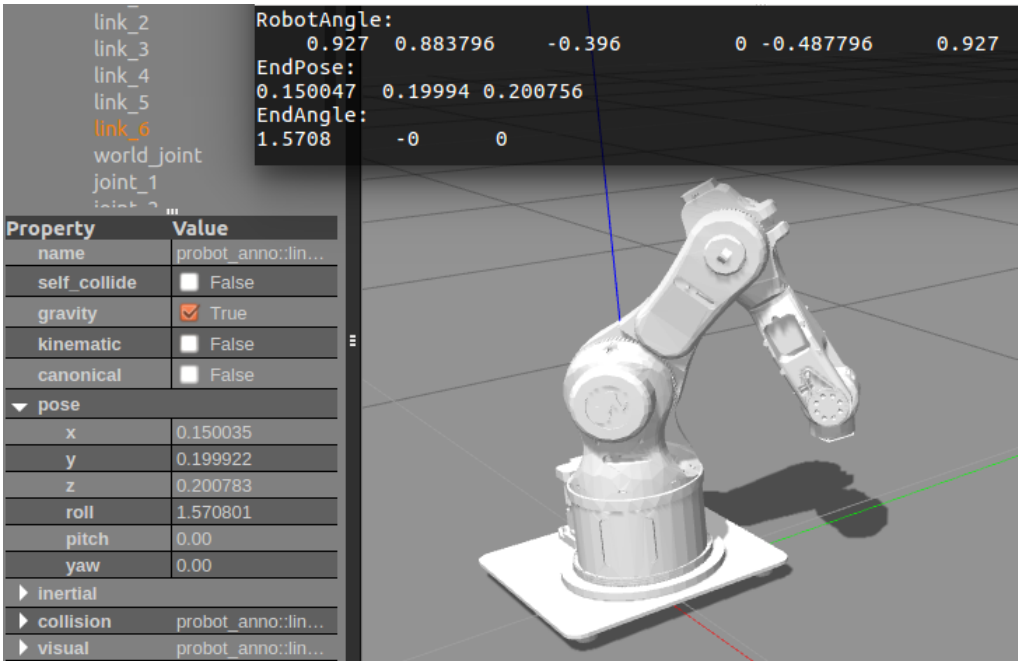
正运动学计算末端位姿：$[0.150047,0.19994,0.200756,1.5708,0,0]$

Gazebo仿真种末端位姿：$[0.150035,0.199922,0.200783,1.570801,0,0]$

位姿绝对误差：$[0.000012, 0.000018, -0.000027, -0.000001, 0, 0]$

误差极小，几乎可以忽略不计.

运行结果：（注：图中`RobotAngle`关节角是根据前述DH参数增加偏置前的关节角）



第二组

关节角：$[0.322, -0.855, -0.021, 0, 0.877, 0.322]$

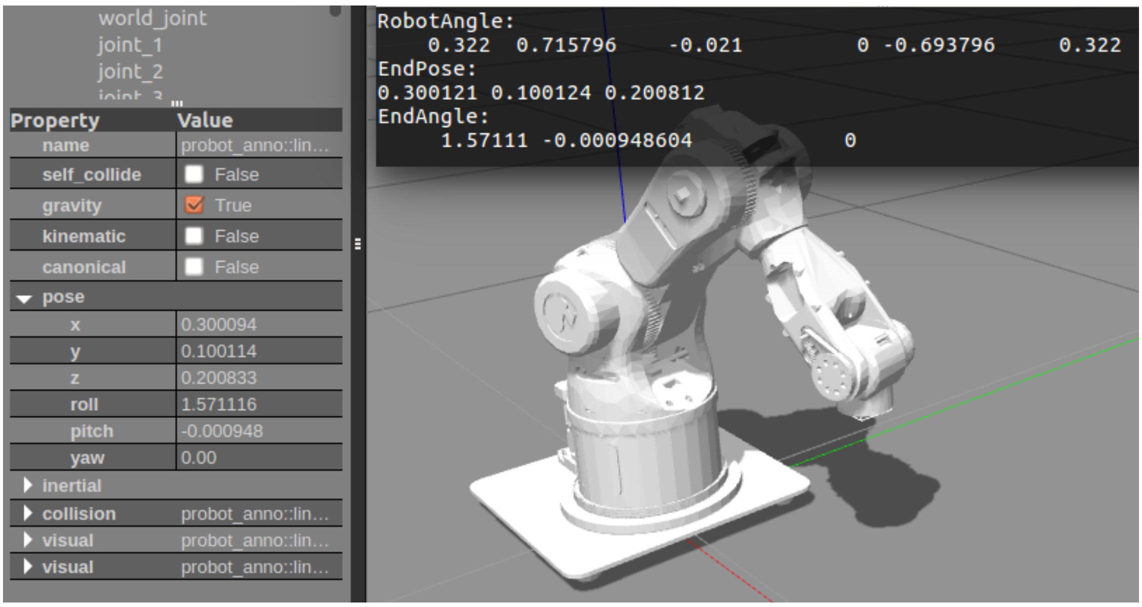
正运动学计算末端位姿：$[0.300121, 0.100124, 0.200812, 1.571110, -0.000950, 0]$

Gazebo仿真种末端位姿：$[0.300094, 0.100114, 0.200833, 1.571116, -0.000948, 0]$

位姿绝对误差：$[0.000027, 0.00001, -0.000021, -0.000006, -0.000002, 0]$

误差极小，几乎可以忽略不计.

运行结果：（注：图中`RobotAngle`关节角是根据前述DH参数增加偏置前的关节角）



第三组

关节角：$[-0.322, -0.636, -0.011, 0, 0.647, -0.322]$

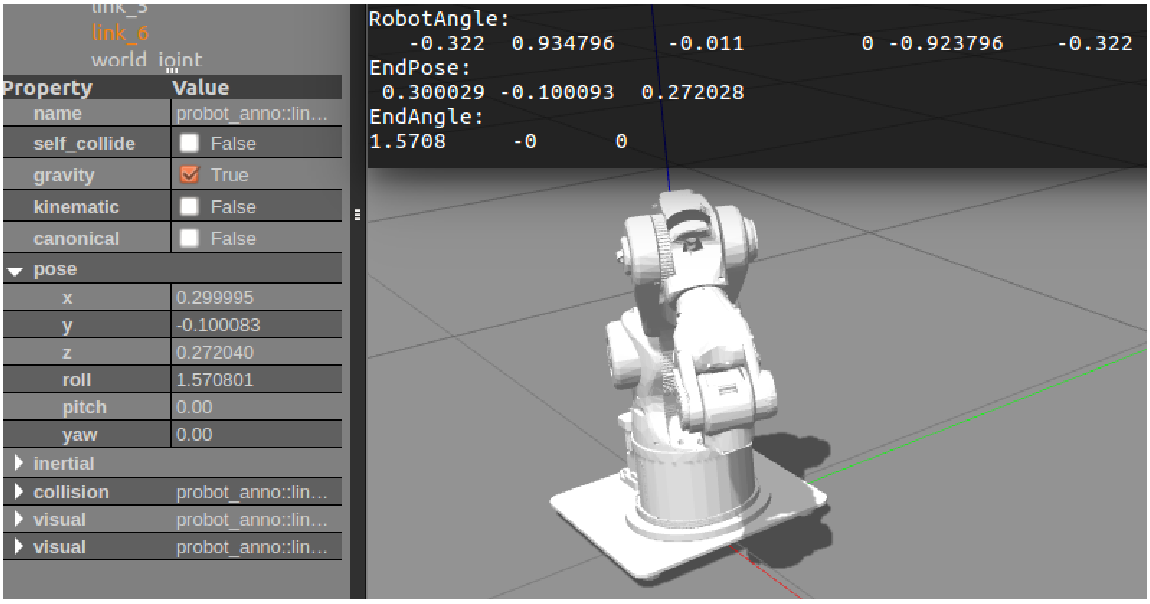
正运动学计算末端位姿： $[0.300029, -0.100093, 0.272028, 1.5708, 0, 0]$

Gazebo仿真种末端位姿：$[0.299995, -0.100083, 0.272040, 1.57081, 0, 0]$

位姿绝对误差：$[0.000034, -0.00001, -0.000022, -0.000001, 0, 0]$

误差极小，几乎可以忽略不计.

<u>运行结果</u>：（注：图中`RobotAngle`关节角是根据前述DH参数增加偏置前的关节角）



（2）逆运动学验证

给出末端位置，计算关节角：

若不考虑关节角转动范围限制，<u>**每个末端位置可解出8个解**</u>，解出所有解后再取符合关节范围的解，publish 验证.

第一组

末端位姿：$[0.2, 0.2, 0.2007, 1.57, -1.57, 0]$

逆运动学计算关节角：

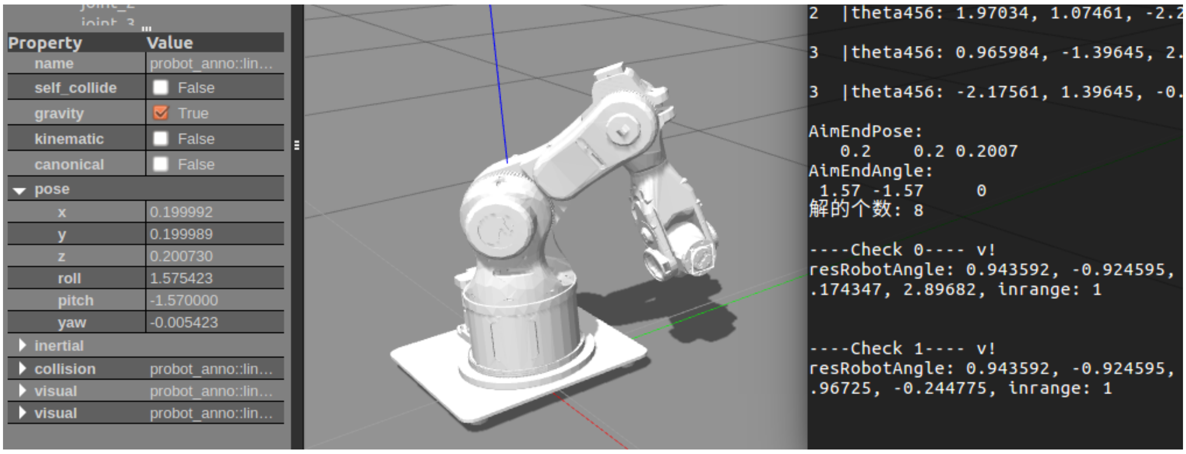
在范围内共有4组解：

```
----Check 0----
resRobotAngle: 0.943488, -0.924743, -0.347274, -2.17673, 0.173647, 2.89722

----Check 1----
resRobotAngle: 0.943488, -0.924743, -0.347274, 0.964865, 2.96795, -0.244375

----Check 2----
resRobotAngle: -2.1981, 0.924743, 3.48887, 0.964865, 0.173647, 2.89722

----Check 3----
resRobotAngle: -2.1981, 0.924743, 3.48887, -2.17673, 2.96795, -0.244375
```

Gazebo中末端位姿与预设位姿误差：$[-0.0054, -0.000011, 0.00003, 0, 0, 0]$

运行结果：

（4组解的gazebo执行结果见`vedio/逆运动学-第1组-4个解.mp4`）



第二组

末端位姿：$[0.15, 0.2, 0.2007, 0, 0, 0]$

逆运动学计算关节角：

在范围内共有4组解：

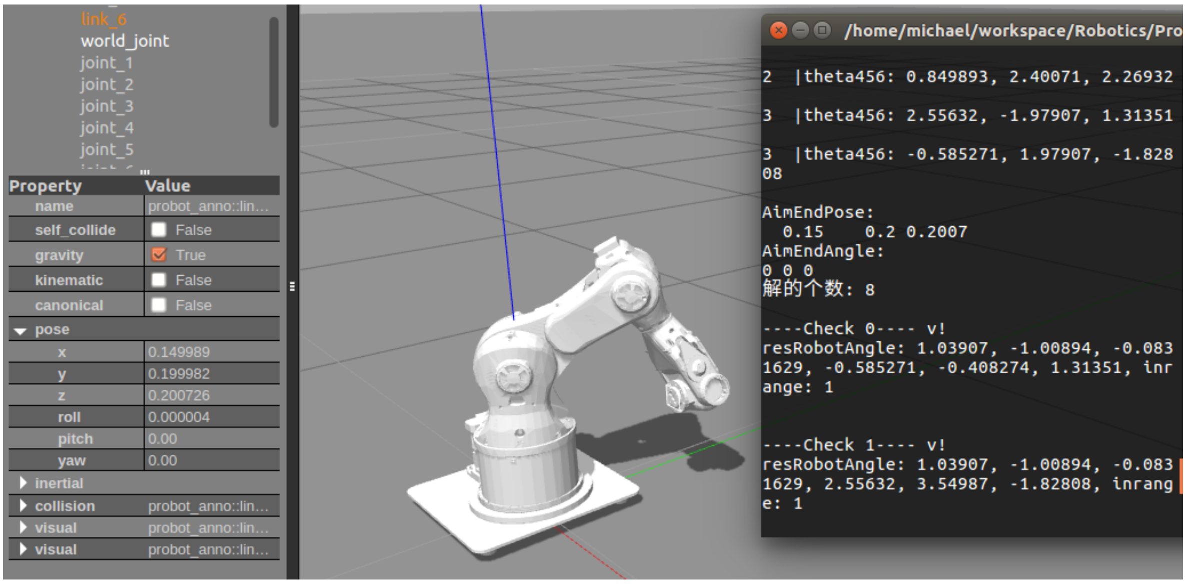
```
----Check 0----
resRobotAngle: 1.03907, -1.00894, -0.0831629, -0.585271, -0.408274, 1.31351

----Check 1----
resRobotAngle: 1.03907, -1.00894, -0.0831629, 2.55632, 3.54987, -1.82808

----Check 2----
resRobotAngle: -2.10252, 1.00894, 3.22476, 2.55632, -0.408274, 1.31351

----Check 3----
resRobotAngle: -2.10252, 1.00894, 3.22476, -0.585271, 3.54987, -1.82808
```

Gazebo中末端位姿与预设位姿误差：$[-0.000011, -0.000018, 0.000026, 0.000004, 0, 0]$

误差极小，几乎可以忽略不计.

运行结果：

（4组解的gazebo执行结果见`vedio/逆运动学-第2组-4个解.mp4`）



第三组

末端位姿：$[0.3, 0, 0.122, 1.57, 0, 0]$

逆运动学计算关节角：

在范围内共有3组解：

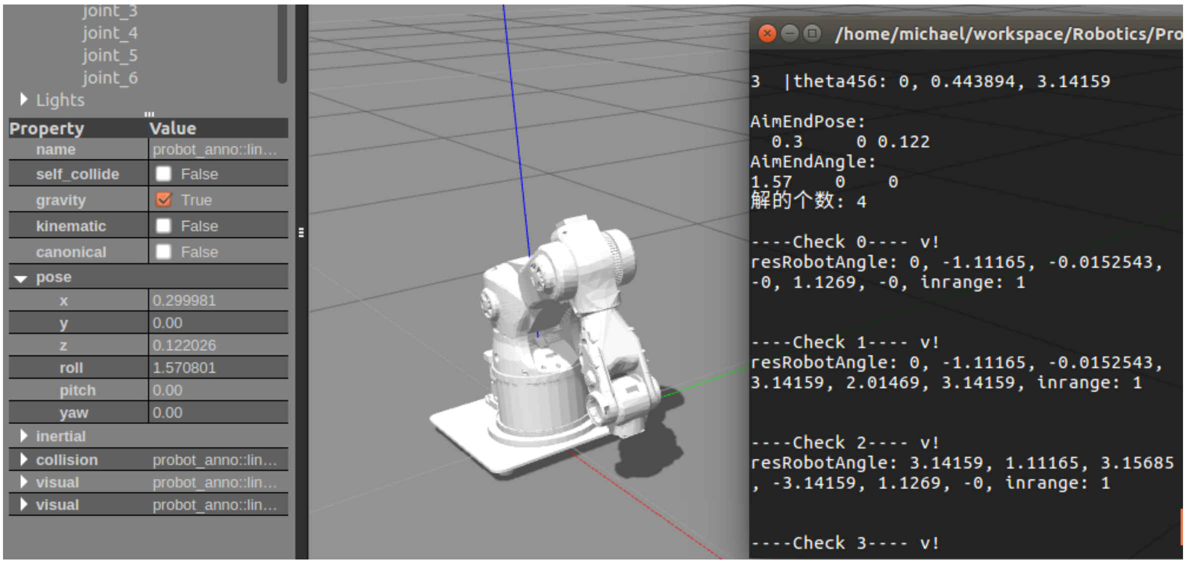
```
----Check 0----
resRobotAngle: 0, -1.11165, -0.0152543, -0, 1.1269, -0

----Check 1----
resRobotAngle: 0, -1.11165, -0.0152543, 3.14159, 2.01469, 3.14159

----Check 2----
resRobotAngle: 3.14159, 1.11165, 3.15685, -3.14159, 1.1269, -0

----Check 3----
resRobotAngle: 3.14159, 1.11165, 3.15685, 0, 2.01469, 3.14159
```

Gazebo中末端位姿与预设位姿误差：$[-0.000019, 0, 0.000026, 0.000801, 0, 0]$

误差极小，几乎可以忽略不计.

运行结果：

（4组解的gazebo执行结果见`vedio/逆运动学-第3组-4个解.mp4`）



实验三 速度传递实验

一、实验目的

1、掌握雅可比矩阵的计算方法 2、掌握通过雅可比矩阵反解关节速度的方法 3、掌握实时刷新机械臂关节速度的方法

二、实验内容及计算原理

1、编写计算雅可比矩阵的代码 2、实现机械臂末端运动速度的控制

定义笛卡尔速度矢量：$v_N = \begin{bmatrix} v_N \\ \omega_N \end{bmatrix}$ 和关节角空间矢量 $\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_N \end{bmatrix}$

雅可比矩阵形式：

$$v_N = \begin{bmatrix} \hat{Z}_1 \times (P_N - P_1) & \hat{Z}_2 \times (P_N - P_2) & \cdots & \hat{Z}_{N-1} \times (P_N - P_{N-1}) & 0 \\ \hat{Z}_1 & \hat{Z}_2 & \cdots & \hat{Z}_{N-1} & \hat{Z}_N \end{bmatrix} \dot{\Theta}$$

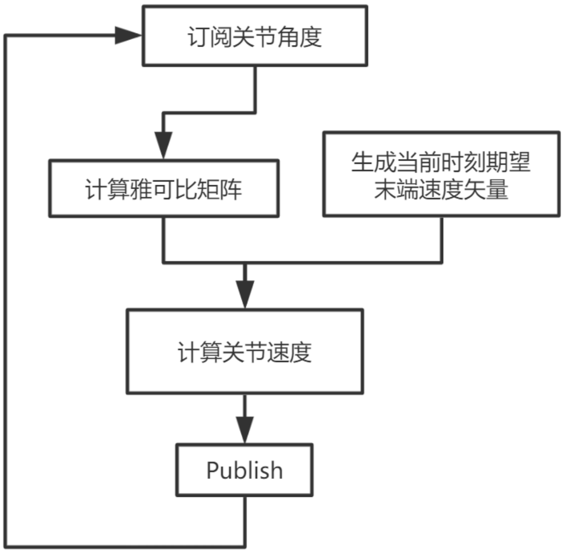
其中，P_i为齐次变换矩阵最右侧一列前三项$[p_x, p_y, p_z]$，$\hat{Z}_i$为旋转矩阵最右侧一列$[r_{13}, r_{23}, r_{33}]$：

$$T_i = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

齐次变换矩阵计算见实验一.

三、实验步骤及结果

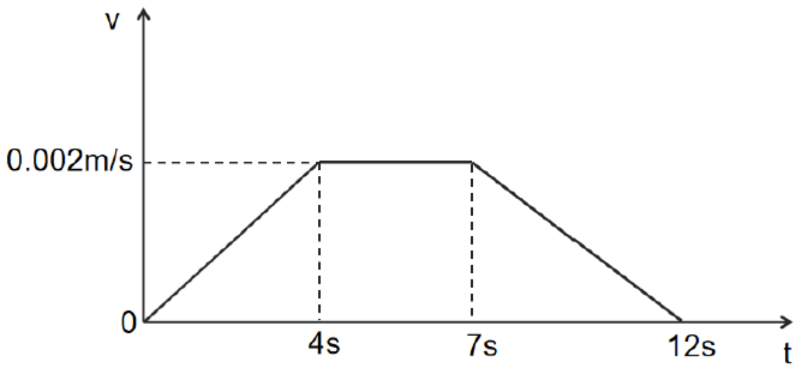
程序流程图：



初始末端位置：$[0.229, 0, 0.454]$

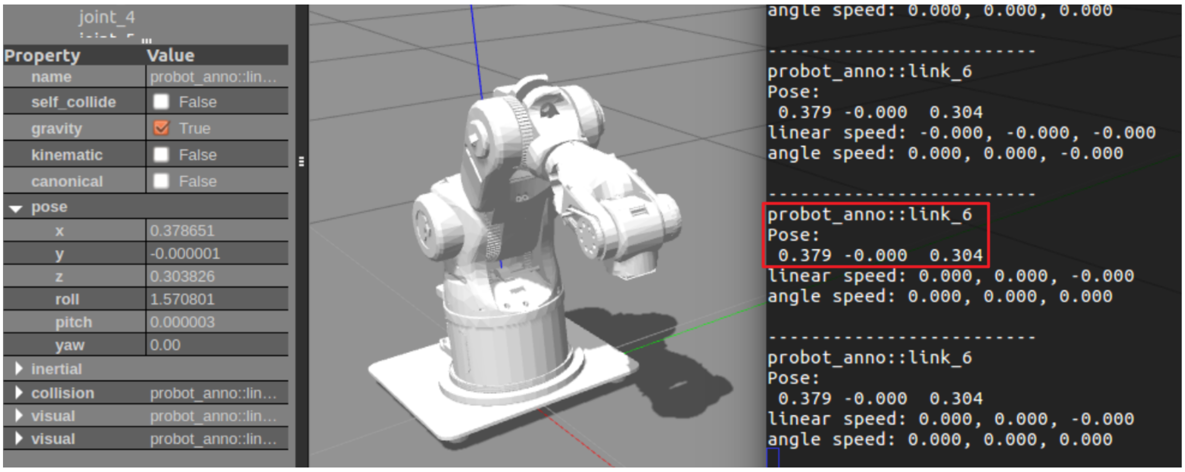
期望运动距离：$[0.15, 0, -0.15]$

速度曲线：



运行结果：

（gazebo执行结果见`vedio/速度传递.mp4`）



结束时末端位置：$[0.379, 0, 0.304]$

运动距离：$[0.15, 0, -0.15]$

无误差.

实验四 轨迹生成实验

一、实验目的

1、巩固机械臂轨迹的五次多项式插值方法 2、掌握通过速度控制使机械臂按预期的轨迹去运动到指定位置

二、实验内容及计算原理

(1) 逆运动学求解

推导计算过程见实验一

(2) Mini-jerk 五次多项式最优轨迹生成

轨迹采用5次多项式进行拟合，保证位置、速度、加速度均连续。

该机械臂的6个关节轨迹可以分别进行规划，以下对其中一个关节进行轨迹规划。

已知一个关节需要到达的M个角度，利用多项式拟合会有 (M-1)段轨迹，表示如下：

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t)\doteq\sum_{i=0}^{N}p_{1,i}t^i & T_0\leq t\leq T_1\\ f_2(t)\doteq\sum_{i=0}^{N}p_{2,i}t^i & T_1\leq t\leq T_2\\ \vdots & \vdots\\ f_M(t)\doteq\sum_{i=0}^{N}p_{M,i}t^i & T_{M-1}\leq t\leq T_M\end{cases}$$

每段轨迹都用多项式表示，该轨迹集合需要满足以下约束条件：

a) 期望角度约束

每段轨迹的起点和终点固定为M个角度中的对应值：

$$\begin{cases} f_j^{(k)}\left(T_{j-1}\right)=x_{0,j}^{(k)}\\ f_j^{(k)}\left(T_j\right)=x_{T,j}^{(k)}\end{cases}$$

b) 连续性约束

相邻轨迹的速度和加速度连续：

$$f_j^{(k)}\left(T_j\right)=f_{j+1}^{(k)}\left(T_j\right)$$

选择代价函数为所有轨迹的jerk值，使其最小。

代价函数表示如下：

$$J(T)=\int_{T_{j-1}}^{T_j}\left(f^3(t)\right)^2dt=\sum_{i\geq 4,l\geq 4}\frac{i(i-1)(i-2)j(l-1)(l-2)}{i+l-5}\left(T_j^{i+l-5}-T_{j-1}^{i+l-5}\right)p_ip_l$$

将上述等式写为矩阵形式：

$$\min \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_M \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_M \end{bmatrix}$$

$$\text{s.t. } A_{\text{eq}} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_M \end{bmatrix} = \mathbf{d}_{eq}$$

此问题是经典的凸优化问题：QP二次优化问题，可以快速求解.

因此能够自动地选择最优的中间点速度和加速度，进而生成最优轨迹.

机械臂关节的速度和加速度需要满足如下要求：

各关节加速度与速度限制	Joint1	Joint2	Joint3	Joint4	Joint5	Joint6
v_max (rad/s)	0.7854	0.6981	0.7854	0.9599	0.9599	0.9599
a_max (rad/s^2)	0.3491	0.2618	0.3491	0.4363	0.4363	0.4363

三、实验步骤及结果

(1) 逆运动学求解路径点对应关节角

给定路径点如下：

```
第一个点：[0.2289, 0, 0.454, 1.57, 0, 0]（初始门位置）
第二个点：[0.3, 0.25, 0.322, 1.57, -1.57, 0]
第三个点：[0.3, 0.1, 0.172, 1.57, -1.57, 0]
第四个点：[0.3, -0.1, 0.122, 1.57, -1.57, 0]
```

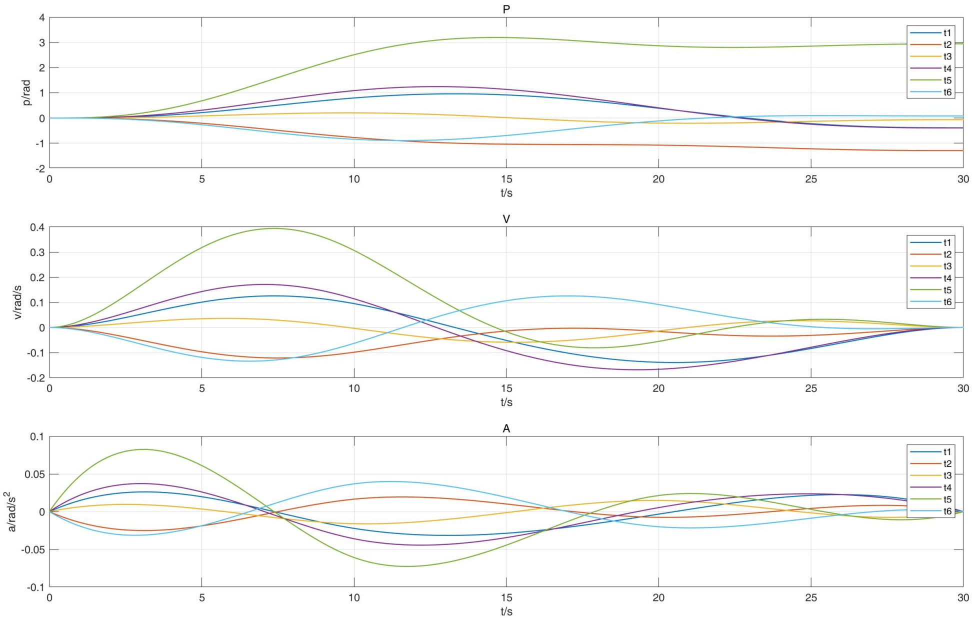
根据实验一求得四个路径点的关节角：

```
p1 = [0 0 0 0 0 0];
p2 = [0.795586 -0.772686  0.205056   1.08734   2.51046 -0.842853];
p3 = [0.387677  -1.07517 -0.199884  0.404374   2.86768 -0.114923];
p4 = [-0.387371   -1.29256 -0.0658126  -0.394643    2.94426  0.0811483];
```

(2) 生成最优5次多项式轨迹

根据上述计算原理，生成轨迹，一共4个路径点，共生成3段轨迹，每段轨迹耗时10s走完.

$P-V-A$曲线如下：

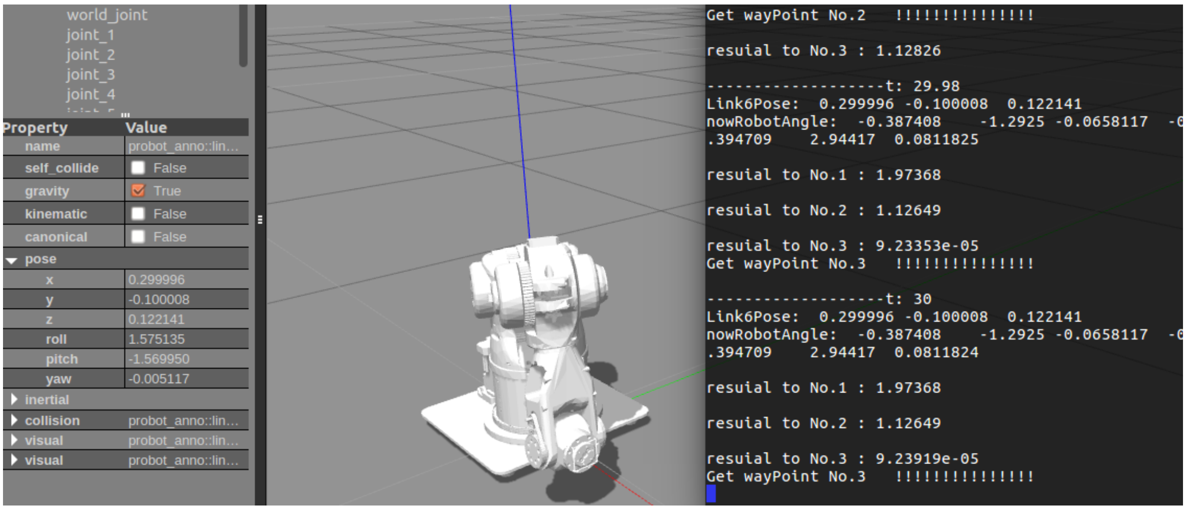


根据图像，关节的速度和加速度均满足要求.

(3) 速度生成

利用ROS自带的`ros::time`计时器获取当前时刻，代入求解出的轨迹参数即可获得速度.

将速度publish，Gazebo运行结果见`轨迹生成.mp4`.



终点姿态误差：$[-0.000004, -0.000008, 0.000141, -0.005, 0.0001, -0.005]$

最大位姿相对误差 $= 0.005/1.57 = 0.32\%$

由于代码订阅了机械臂末端位姿，故可通过末端位姿判断是否经过中间点：

第二个路径点：

```
-------------------t: 10
Link6Pose: 0.300681 0.249464 0.323145
nowRobotAngle:   0.79511 -0.772247  0.205088   1.08685   2.50919 -0.842585

resual to No.1 : 0.00094727
Get wayPoint No.1   !!!!!!!!!!!!!!!
```

第三个路径点：

```
-------------------t: 20.001
Link6Pose: 0.299868 0.100443 0.172244
nowRobotAngle:  0.388355  -1.07509 -0.199812  0.405073   2.86795 -0.115315

resuial to No.2 : 0.000834903
Get wayPoint No.2   !!!!!!!!!!!!!!!
```

其中`resuial`是所有位姿参数误差绝对值之和，可见经过了两个中间点.

实验五 定点转动实验

一、实验目的

1、掌握定点转动的计算与并实际运用

二、实验内容

1、定点转动指机械臂末端坐标始终保持不变，只改变姿态的运动 2、在仿真实验中，使机械臂末端保持初始门位置坐标[0.2289, 0, 0.454]， 在此处定点转动，在真实机器人实验中，可以自选位置.但定点转动的幅度不可 太小，转动角度须不小于40°. 3、自选方法，生成机械臂末端定点转动的轨迹，并在机器人实现。

三、实验步骤及结果

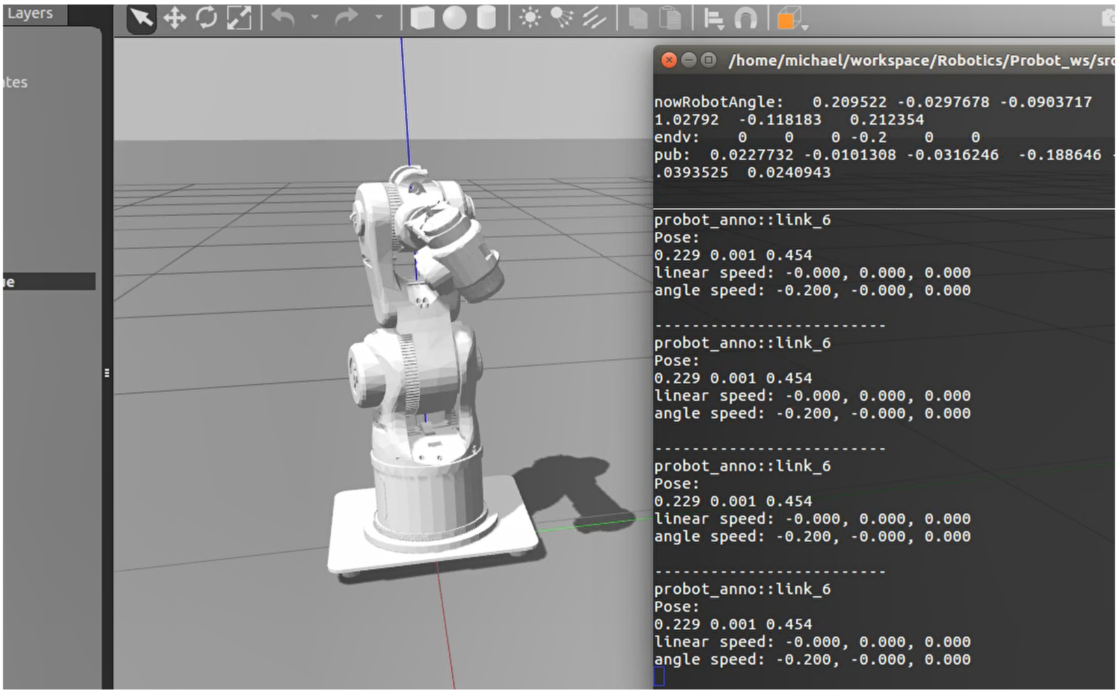
利用速度传递实验中的Jacobi矩阵，机械臂末端定点转动即为末端线速度为0，只有绕一个轴的角速度为一定值即可.

此实验中，设定期望的末端速度为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则机械臂末端绕x轴匀速转动，第五关节转动角度为360°.

Gazebo仿真结果见：`定点转动.mp4`



根据视频中机械臂运动状态和命令行中监听的机械臂末端位置，可以得到结论：

- 末端的坐标在整个运动过程中几乎没有改变，误差控制在毫米级别
- 定点转动十分连贯
- 定点转动幅度$> 180^\circ$