计算固体力学.

CH1.

1. 有限元的优点：任何场；形状；载荷；可变物性；不同结合；细化；结构接近
2. 问题分类：物理现象，时变，线性，结果形式，精度
3. 数学模型：微分方程+定解条件.

   假设：材料性质，集中力，刚性支撑，四角，平面问题，轴对称的压力容器.
4. 误差：建模，离散，数值，解释

CH2.

2.1. 引言

1. FEM的计算步骤：单刚 - 总刚 - 加载 - 约束 - 求解场 → 梯度

2.2. 杆单元

1. 单刚的物理意义：$\{k\}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\{r_e\}$. 每一列：主元位移为1，其余为0
2. 组装：列主元

2.3. 梁单元：

1. 两结点四自由度 (2)
2. 二维梁：平面放置：$\overset{(3)}{6\times6}$. 三维梁：$\overset{(6)}{12\times12}$；非圆：$\overset{(7)}{14\times14}$

2.4. 空间杆元

$\{d'\}=[T]\{d\}$

$\{r\}=[T]^T\{r'\}$

$\{k\}\{d\}=\{r\}$

$[k]=[T]^T[k'][T]$

$$T=\begin{bmatrix} c\beta & s\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\beta & s\beta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & & & \\ & & & l_1 & m_1 & n_1 \end{bmatrix}$$

空间梁元：$T_{12\times12}=\begin{bmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda\end{bmatrix}$ $\lambda=\begin{bmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{bmatrix}$

2.5. 单元的组装：

1. 理论依据：每个结点在每个方向都静力平衡

$$\Sigma\{r\}+\Sigma\{r_e\}+\{P\}=\{0\}$$

$$\{r\}=-\{k\}\{d\},\quad \{R\}=\Sigma\{r_e\}+\{P\}$$

$$[K]\{D\}=\{R\}.\quad [K]=\boxplus\{k\}.$$

2.6. 刚度矩阵的性质：

· 主元非负性 · 对称性 · 稀疏性 · 带状性 · 半正定性.

2.7. 边界条件的处理：

原则：不破坏对称性，不改变总自由度，不改变顺序

$$\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23}\\ K_{31} & K_{32} & K_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\\ D_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\\ R_3\end{bmatrix}\xrightarrow{D_2=\Delta_2}\begin{bmatrix}K_{11} & 0 & K_{13}\\ 0 & 1 & 0\\ K_{31} & 0 & K_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\\ D_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1-K_{12}\Delta_2\\ \Delta_2\\ R_3-K_{32}\Delta_2\end{bmatrix}$$

2.8. 结点编号与方程组求解.

1. 编号：矩阵 → 一维数组（一维贮存长度 = Σ半宽）

· 辅助数组(1×n)：b：半带宽；d：主元在一维贮存的位置

填充 · 消去个数：一维贮存 − 单元数 − 结点数

2. 求解：$[K]\{D\}=\{R\}$，$\{D\}=[K]^{-1}\{R\}$

直解：高斯消去.

迭代：

2.9. 载荷与应力、

1. 加在结点上的外力，产直接作为右端项

2. 作用在域或边界上，须等效为结点上

原则：静力、力矩等效；一致结点载荷、协调结点载荷。

3. 对于有约束的结点，总载荷是待求量，对求解没用，为Lost Load

2.10. 结构对称性：

1. 反射对称
   - 对称问题：结构、载荷均对称
   - 反对称问题：结构对称、载荷反对称

2. 斜对称
   - 斜对称 ：结构、载荷均斜对称
   - 斜反对称：结构斜对称、载荷反斜对称

CH3. 基本单元

3.1. 预备知识.

1. $\sigma = E\varepsilon$

2. $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$　　$\{\varepsilon\} = [\tilde{B}]\{u\}$

$$[\tilde{B}] = \frac{d}{dx} \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad \frac{d^2}{dx^2}$$

杆　　二维标量　　二维矢量　　梁：$\kappa = \frac{d^2v}{dx^2}$

3. $\sigma_{ij,j} + F_i = 0$

3.2. 插值与形函数

1. $\phi = \sum a_i x^i = [X]\{a\}$ ；　$\phi = [N]\{\phi_e\}$　　$\{\phi_e\} = [A]\{a\}$

$\therefore [N] = [X][A]^{-1} \Rightarrow N_i(x_j) = \delta_{ij}$

2. 连续性阶次：C^m；C^0：平面.块　　C^1：梁

3.3. 单刚.

3.3.1. 虚功原理 → 单刚, 等效载荷

$$\begin{cases} \{u\} = [N]\{d\} \\ \{\delta u\} = [N]\{\delta d\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{\delta\varepsilon\} = [\tilde{B}]\{\delta u\} = [\tilde{B}][N]\{\delta d\} \\ \{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta d\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} [k] = \int [B]^T E [B] dV \\ \{re\} = \int [N]^T \{F\} dV + \int [N]^T \{\Phi\} ds + \int [B]^T E \{\varepsilon_0\} dV - \int [B]^T \sigma_0 dV \end{cases}$$

$$\begin{cases} [k]\{d\} = \{re\} \\ [K][D] = [R] \end{cases}$$

3.4. 线性三角形单元：T3

1. $\begin{cases} u = a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v = a_4 + a_5 x + a_6 y \end{cases}$

2. 常应变

3. 剪切锁定：纯弯曲 → 产生横向剪力 → 过刚

4. 泊松比锁定：近不可压材料 → 整个网络不位移

3.5. 二次三角形单元：T6

1. $\begin{cases} u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \\ v = a_7 + a_8 x + a_9 y + a_{10} x^2 + a_{11} xy + a_{12} y^2 \end{cases}$

2. 线性一次完备应变场

3. 精度高.

3.6. 双线性矩形单元 - R4

3.6.1. 插值函数：$\begin{cases} u = a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_1 \\ v = a_6 x + a_7 y + a_8 xy + a_5 \end{cases}$

3.6.2. 单刚：

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}}_{N} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$[B] = [\partial][N]$

$[k] = \int [B]^T E [B] \, dV$

3.6.2. 缺点：纯弯曲剪切锁定

3.7. 二次矩形单元：R8. R9.

· 消除了寄生剪切导致的剪切锁定

3.8. 长方体单元：C8. C20. C27

3.9. 插值函数的选取.

3.9.1. 原则 1. 必须能反映刚体位移和常应变 → 收敛的必要条件

$\begin{cases} C_0: \text{完备线性项} \\ C_1: \text{能描述常曲率模式} \end{cases}$

2. 对各坐标平衡

3. 位移插值函数在单元的边界上由边结点确定

3.9.2 不同单元插值函数的选项及完备性.

· 完备：自动平衡.

3.10. 结点载荷：

3.10.1. 结点载荷计算的理论公式及物理意义

$\{R^e\} = \int [N]^T F dv + \int [N]^T \bar{T} ds$

$W \triangleq \{d\}^T \{R^e\} = \int \{u\}^T \{F\} dv + \int \{u\}^T \{\bar{T}\} ds$

1. 结点等效载荷是做功意义的等效 有相同的合力、矩

2. 一致结点载荷对分布力、体积力是静力等效的：等效前后关于任意点

3.11. 应力计算：

$\{D\} \Rightarrow \{d\} \Rightarrow \{\varepsilon\} \Rightarrow \{\sigma\}$

1. 应力应变是单元意义上的
2. ~~~~~~误差大
3. 应力在单元内部精确
4. 公共结点处应力取平均
5. 可计算等效应力. 局部应力

3.12：解的性质

1. 结点处位移协调
2. 边处位移可能不协调
3. 单元内位移协调
4. 结点处 力、力矩平衡
5. 边界上应力不平衡
6. 内部应力平衡为弱形式

CH6. 等参单元

6.1. 序言.

6.1.1. 概述:

1. 等参单元的特征:
   - 1. 形状
   - 2. 引入参考坐标系
   - 3. 将实际物体单元映射成标准参考单元
   - 4. 形函数用于位移场插值及产生几何映射
   - 5. 形函数是参考坐标的函数

2. 分类: $\{u, v, w\}^T = [N]\{d\}$ 形函数

   $\{x\ y\ z\}^T = [\tilde{N}]\{c\}$ 映射函数

   · $[N]=[\tilde{N}]$ 等参. $[N]<[\tilde{N}]$ 超参. $[N]>[\tilde{N}]$ 亚参.

6.1.3. 形函数的构造

1. 定义. 根据插值特征, 观察试凑法
2. Langrange 法: $N_i = \dfrac{\prod_{j\neq i}(\xi-\xi_j)}{\prod_{j\neq i}(\xi_i-\xi_j)}$. $\Sigma N_i = 1$

6.1.4. 应变矩阵. 单元刚度.

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}[N]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix} = [B]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}$$

又 $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{d\xi}{dx}\dfrac{d}{d\xi}$.

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}[N]\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}$$

$$\therefore\ [B] = \frac{1}{J}\frac{d}{d\xi}[N]$$

$$[k] = \int_0^L [B]^T E[B]A\,dx = \int_{-1}^{1}[B]^T AE[B]J\,d\xi \qquad (dx = J\,d\xi)$$

6.2. 双线性四边形单元：Q4

6.2.1. 二维问题参考坐标和参考单元的特征

在物理单元中的特征：

1. 边的参考坐标：$\xi=\pm1$，$\eta=\pm1$
2. 参考坐标轴不正交
3. 物理单元的边被参考坐标轴等分
4. $\xi=\eta=0$ 是名义中心，不一定是重心

参考单元本身的特征.

1. 坐标轴正交
2. 边长永远为 2.
3. 参考坐标可以为是一种参数

· 物理单元的直线在参考单元中不是直线；参考单元中平行于坐标轴 → 物理单元的直线

6.2.2. Q4 单元的形函数

$$u = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

1. 参考坐标的取向由形函数及编号确定
2. 结点编号必须逆时针
3. 物理单元的结点顺序在参考单元中必须不变

6.2.3. 二维等参元的坐标变换

$$\begin{Bmatrix} \phi_{,\xi} \\ \phi_{,\eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \end{Bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma N_{i,\xi}\, x_i & \Sigma N_{i,\xi}\, y_i \\ \Sigma N_{i,\eta}\, x_i & \Sigma N_{i,\eta}\, y_i \end{bmatrix}, \quad J = \det[J]$$

6.2.4. Q4 单元的应变矩阵和刚度矩阵.

$$[k]_{8\times8} = \iint [B]^T E\, [B]\, t\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T_{8\times3}[E]_{3\times3}[B]_{3\times8}\, t\, J\, d\xi\, d\eta, \quad t = \Sigma N_i t_i$$

厚度

1. 物理单元 A-B-C-D-A …，单元局部编号只能为 1-2-3-4
2. 形函数必须为这种顺序，且逆时针
3. 物理单元中顺序变化不影响总刚的位置、大小
4. 数值积分方便

6.2.5. 数值积分

· $I = \sum f(\xi_i) W_i$

n	精度	ξ	W
1	1	0	2
2	3	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	5	$-\sqrt{0.6}, 0, \sqrt{0.6}$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$

· $I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \approx \sum_i \sum_j W_i W_j \varphi(\xi_i, \eta_j)$

6.2.6. 刚度矩阵的计算. 略.

6.3. 二次四边形单元: Q8. Q9.

1. Q8 二次完备. 三次不完备(差 ξ^3. η^3)

2. $N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$ → 气泡函数

3. Q8 仅在矩形时能准确描述纯弯曲

Q9 在直边. 且中点时~~~~~~~~~

6.4. 六面体等参元 H8. H20. H27

1. H8: 三线性. $[k]_{24\times24} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T_{24\times6} [E]_{6\times6} [B]_{6\times24} \, d\xi\, d\eta\, d\zeta$

2. H20. 无缘. H27 Langrange 单元.

6.5. 静凝聚: ~ 6.8. 分片检验

1. 凝聚: P_{11}

2. 应力平滑: $\sigma_p = \sum N_i \sigma_i$. $N = N(r, s, t)$. r, s, t 由 Gauss 确定与 ξ, η, ζ

3. 完备性随单元形状变化

4. 有效性: 具有表示场量常梯度的能力

5. 分片检验: 收敛的充分条件

1). 内部结点 2) 不规则单元 3) 仅施加防止刚体运动的约束

4) 与常应力一致的载荷/与~~一致的位移 5) 结点应力