دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی هوافضا

پایان‌نامه کارشناسی

عنوان

تحلیل مدارهای فضایی پیرامون جسم با هندسه‌ی نامنظم (سیارک)

نگارش

علی سیاه‌کمری

استاد راهنما

نیما اسدیان

خرداد ۹۴

قدردانی و تشکر

در ابتدای کلام جا دارد که از پدر و مادر خود قدردانی کنم که برای آسایش فرزندانشان، سختی‌های زندگی را بی‌هیچ چشم‌داشتی بسیار به جان خریده‌اند و افسوس که هیچ‌وقت نمیتوان گوشه‌ای از خودگذشتگی‌هایشان را هم جبران کرد.

از استاد خود، دکتر اسدیان بسیار متشکرم که در این مدت همواره با روی خوش، راهنما و مایه‌ی دلگرمی بنده در مسیر این پروژه بوده‌است و بی‌شک بدون ایشان این پروژه راه به‌جایی نمی‌برد.

تحلیل مدارهای فضایی پیرامون جسم با هندسه‌ی نامنظم (سیارک)

چکیده

روشی جدید برای بررسی تحلیلی اغتشاشات ناشی از جمله‌هایی از پتاسیل گرانشی[1] که وابسته به طول جغرافیایی هستند (مانند C_{22}) ، برای جسمی با چرخش یکنواخت حول یکی از محورهای اصلیش[2] معرفی شده‌است؛ این روش به طور خلاصه پنداشتن شتاب‌های کوریولیس[3] و مرکزگرا[4] وارده به فضاپیما در دستگاه مختصات چسبیده به جسم مرکزی، به عنوان اغتشاش است. بنابراین مدار مورد بحث، همان مداری است که فردی که روی جسم مرکزی ایستاده، مشاهده می‌کند. خانواده‌های منجمد[5] این نوع مدار بدست‌آمده و همچنین امکان وجود آنها پیرامون جسم مرکزی دلخواه بررسی شده‌است.

برمبنای مدل چندوجهی جسمی دلخواه با چگالی یکنواخت، روشی برای محاسبه‌ی ضرایب هارمونیک گرانشی و نیز روشی برای شبیه‌سازی دقیق مدار فضاپیما حول جسم ارائه شده‌است.

واژه‌های کلیدی:

اغتشاشات متوسط[6]، پتانسیل C_{22}، معادلات سکولار[7]، مدارهای یخ زده، طراحی مدار پیرامون سیارک، روش چندوجهی‌ها[8]، محاسبه ضرایب هارمونیک گرانشی.

[1] Gravitational Potential

[2] Perincipal Axes

[3] Coriolis

[4] Centripetal

[5] Frozen

[6] Averaged Perturbation

[7] Secular

[8] Polyhedron method

صفحه

فهرست مطالب

صفحه

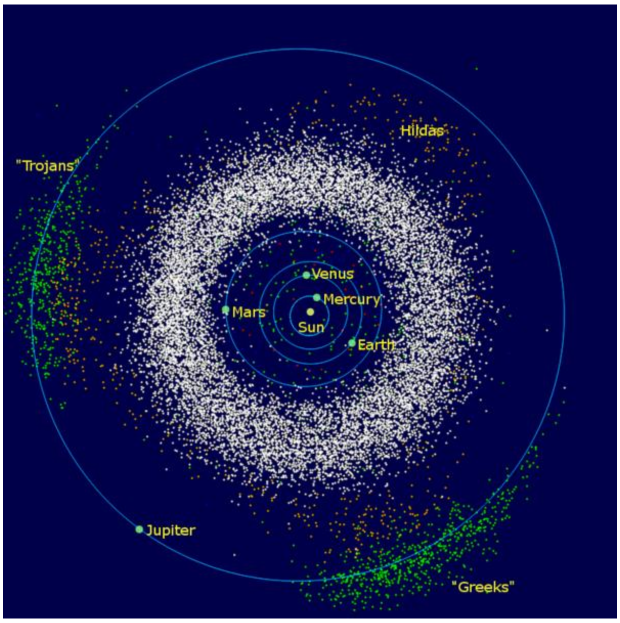
فهرست اشکال

۱ مقدمه

در این مقدمه ابتدا در مورد سیارک‌های فضایی و تاریخچه‌ی آنها، انگیزه‌های موجود برای اکتشافات در مورد سیارک‌ها و سپس در مورده مأموریت‌ها فضایی به این اجسام، ملزومات طراحی این مأموریت‌ها و نیز پیشینه‌ی تحقیقاتی مبحث سخن گفته میشود.

۱.۱ معرفی سیارک‌ها

سیارک‌ها اجسام کوچکی هستند که حول خورشید در حال گردش میباشند ولی به دلیل اندازه‌ی کوچک و نیز شکل بیقاعده‌ی آنها، جزء سیاره‌ها دسته‌بندی نمی‌شوند. میلیون‌ها سیارک در منظومه‌ی شمسی وجود دارد و مدار گروه اعظم آنها بین مدار مریخ و مشتری است (شکل۱). دلیل وجود آنها حدث زده می شود وجود سیاره‌ای بین مشتری و مریخ بوده که به دلیل اثرات گرانشی قوی مشتری از هم پاشیده شده است؛ هرچند مجموع جرم این سیارک‌ها بسیار کم و حدود ۰٫۱ درصد جرم زمین است. سایر اقسام سیارک‌ها شامل تروجان‌ها و سیارک‌های کم تعدادی که در میدان گرانشی سیاره‌ای به دام افتاده‌اند می‌شوند. تروجان‌ها سیارک‌هایی میباشند که در یکی از نقاط لاگرانژی مشتری-خورشید قرار دارند.



شکل۱: کمربند سیارکی به همراه سایر انواع سیارک‌ها

اولین سیارکی که شناسایی شد در سال ۱۸۰۱ میلادی و سیارک سِرِس[9] بود که تابه‌حال بزرگترین سیارک شناسایی شده میباشد. امروزه صدها هزار از آنها کشف شده است. اسامی آنها ابتدا با حروف یونانی نامگذاری شد ولی سپس مکتشفان آنها به دلخواه اسامی همسران، فرزندان و حیوانات خانه‌ای خود را برروی آنها گذاشتند و اکثرا اسم آنها زنانه است مگر آنهایی که مدارهایی بسیار غیر عادی دارند!

اندازه‌ی سیارک‌ها بسیار متفاوت است به طوری که برای بزگترین آنها (سِرس) قطر آن حدود ۹۷۵ کیلومتر و با شکلی تقریبا کروی و بسیاری از آنها با قطری حدود چند ده متر و شکلی بسیار بی‌قاعده هستند. مواد سازنده‌ی سیارک‌ها هم همچنین بسیار متفاوت با یکدیگرند و اکثرا اطلاعات زیادی در مورده آنها وجود ندارد. سِرِس به نظر میرسد از هسته‌ای سنگی همراه با گوشته‌ای یخی تشکیل شده باشد و چگالی آن ۲,۱۲ گرم بر سانتیترمکعب میباشد، در حالی که سیارک وستا[10] به نظر میرسد از هسته‌ای نیکل-کرومی، گوشته‌ای از آلیواین[11] و پوسته‌ای بازالتی تشکیل شده باشد و چگالی آن ۳,۴۴ گرم بر سانتیمترمکعب است. اکثر سیارک‌های کوچکتر به نظر میرسد که از گردهم آمدن مقداری سنگ ریز و کلوخ که توسط نیروی گرانشی ضعیفی کنارهم نگاه داشته شده‌اند تشکیل شده باشند و حدود نصف حجم این سیارک‌ها فضای خالی می‌باشد که همین میتواند توجیهی برای چگالی بسیار کم آنها (به کمی ۲ گرم بر سانتیمتر مکعب) باشد.

۲.۱ انگیزه‌های تحقیقات در مورد سیارک‌ها

سیارک‌ها ممکن است بتوانند غذا، آب و نیز مواد مورد نیز برای ساخت ایستگاه‌های فضایی را تأمین کنند. تاکنون مرکزهای تحقیقاتی برای بررسی این امکان ایجاد شده‌اند. اخیرا با اکتشاف آب بر روی سطح تیمیس۲۴، ایده‌هایی برای استخراج آب از سطح سیارک برای فراهم آوردن آب مورد نیاز فضانوردان و نیز تجزیه آب به هیدروژن و اکسیژن برای تامین اکسیژن مورد نیاز برای تنفس فضانوردان و نیز سوخت مورد نیاز فضاپیماها مطرح شدهاست. با امکان آمدن این ایده‌ها اگر مسیرهای مأموریت‌های فضایی آینده به‌گونه‌ای طراحی شوند که از سیارک‌ها عبور کنند میتوانند با صرف انرژی کمی در ایستگاه سوخت ساخته‌شده در سیارک انرژی پیشرانش فضاپیما را تأمین کنند.

---

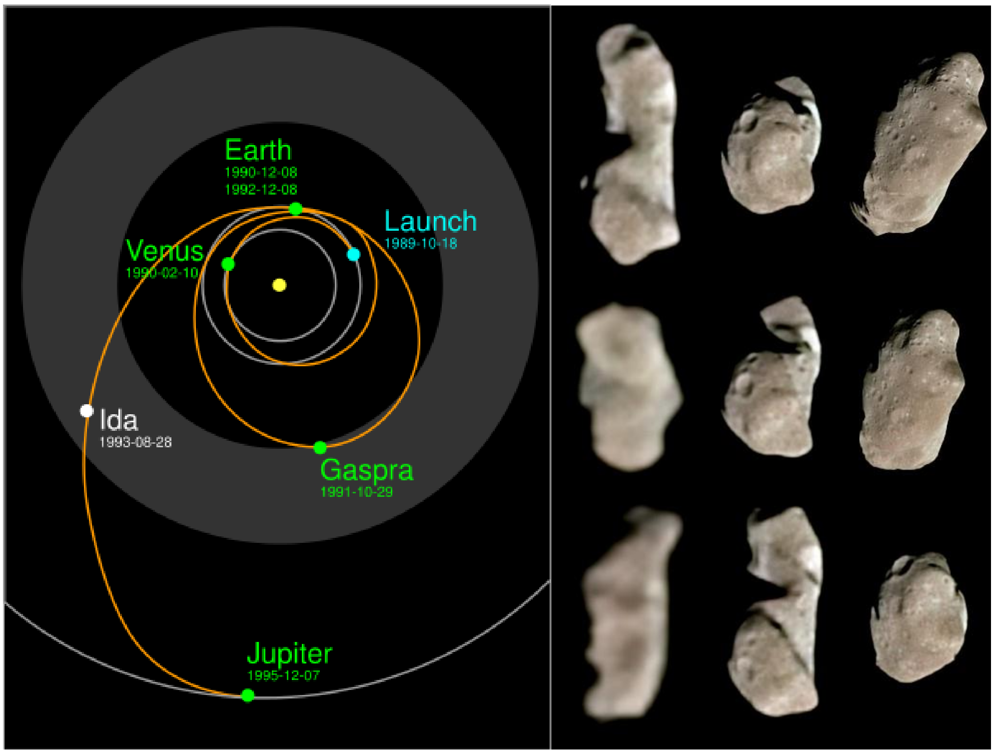
[9] Ceres

[10] Vesta

[11] Olivine

۳.۱ ماموریت‌های فضایی به سیارک‌ها

قبل از ۱۹۹۱ تنها را اندازه‌گیری خواص سیارک‌ها مشاهده به کمک رادیو تلسکوپ‌ها بوده بودها ست که راضـی‌کننده نبود. بعدها ماموریت‌های فضـایی به کمک محققان آمده و روش‌های دقیق‌تری را در اختیار آنان قرار دادند. در سال ۱۹۹۱ ایالات متحده‌ی آمریکا اولین مأموریت فضایی به سیارک‌ها را شروع کرد که توسـط فضـاپیمای گالیله[12] انجام گرفت (شـکل۲) که مأموریت اصـلی آن به مشـتری بود و باید از کمربند سیارکی عبور میکرد و به همین دلیل در راه ملاقاتی با سیارک‌های گاسپرا[13] و آیدا ۲۴۳[14] داشت و تصاویری از این سیارک‌ها ضبط کرد (شکل۳) . ناسا[15] بعدها مأموریت‌هایی به سیارک‌های نزدیک زمین هم داشـــت و روی ســـیارک إرُس فرود آمده و اطلاعاتی را در مورده طبیعت و منشـــأ آنها جمع‌آوری کرد.[26]



شکل۲: مأموریت فضاپیمای گالیله.

[12] Galileo

[13] Gaspra

[14] 243 Ida

[15] NASA

شکل۳: تصاویر گرفته شده از سیارک آیدا.

۴.۱ ملزومات طراحی مأموریت به سیارک‌ها

مأوریت‌های طراحی شده به سیارک‌ها به دلیل شرایط ویژه‌ی حاکم بر سیارک‌ها، مأموریت‌های ویژه‌ای هســتند. شــکل بی‌قاعده و نیز جرم بســیار کم ســیارک‌ها موجب به پیدایش رفتارهای غیرعادی مدارهای فضایی پیرامون این اجسام می‌شود و در صورت در نظر نگرفتن این ویژگی‌های خاص مدار طراحی شده میتواند به سرانجام برخورد با سطح سیارک، فرار از دام گرانشی آن یا سایر رفتارهایی که مدنظر مأموریت نیستند دچار شود. بنابرایین نیاز است که این رفتارهای ویژه که اکثرا مبتنی بر محیط بسیار مغشوش گرانشی پیرامون این سیارک‌ها است، به خوبی شناخته‌شوند. [3] ,[2]و[26]

اغتشاشات گرانشی مهم در محیط سیارات ناشی از شکل بی‌قاعده‌ی خود سیارک‌ها، فشار تشعشات خورشیدی و اثرات گرانشی اجسام نزدیک میبا شد. هرچند هنگامی که در فاصله‌ی زیادی از سیارک هستیم اثرات ناشی از بی‌قاعدگی جسم، بسیار کمرنگ شده و دو اثر دیگر اهمیت پیدا میکنند و باید تنها آن دو اثر را در نظر بگیریم و برعکس هنگامی که مدار فضاپیما نزدیک به سیارک است میتوان تنها اثرات مربوط به بی‌قاعدگی جسم مرکزی را وارده معادلات کرد [26] ,[1] ,[0].

سیارک‌ها براساس سرعت دورانی تنوع بسیاری دارند. سرعت دورانی بعضی به سرعت ۱۰۰۰ دور در روز میرسد و بعضی دیگر فقط ۰,۱ دور در روز است. از لحاظ حرکت محور دوران اکثر سیارک‌ها حول یکی از محورهای اصلی خود در حال دوران یکنواخت هستند[21]، بنابراین در این متن نیز همین فرض در نظر گرفته شده‌است و محور z در جهت محور دوران سیارک تعیین شده‌است.

۵.۱ پیشینه تحقیقاتی

اولین نوشتارهای در رابطه معادلات دینامیکی فضاپیما حول سیارک‌ها شامل[2] و [3] میباشد که البته با عنوان دینامیک پیرامون اجسام بیضی‌گون ۳ محوره میبا شد؛ در این نوشتار معادلات استفاده شده، گونه‌های معادله‌ی انرژی بوده و با استفاده از انتگرال جاکوبی، به موضوعاتی از قبیل برخورد یا عدم برخود فضاپیما با جسم و به طور کلی به پایداری و ناپایداری مدار با رویکردی تحلیلی پرداخته شده‌است.

در نوشتار [6] دینامیک فضاپیما در محیط اغتشاشی سیارک با در نظر گرفتن همزمان اثرات جسم مرکزی و جزر و مد و تشعشات خورشیدی به طور تحلیلی بررسی شده‌است و سپس به بررسی مدارهای منجمد با میانگین‌گیری از معادلات حرکت فضاپیما پرداخته شده است.

در [16] با استفاده از روش‌های عددی، به بررسی پایداری مدارهای فضایی در یک محیط گرانشی درجه و مرتبه۲ با سرعت دورانی یکنواخت پرداخته شده است. قیدی عددی برای پایداری یا عدم پایداری مدارهای تقریبا دایروی در استوا سیارک به دست آمده‌است. نواحی پایدار و ناپایدار به طوره صریح مشخص گشته و دیده شده که بسیار مرتبط به رزونانس‌بین حرکت متوسط فضاپیما[16] و سرعت دورانی جسم مرکزی میباشد.

در [13] به بررسی راه‌کاری برای بکارگیری اغتشاشات تشعشات خورشیدی برای انجام عملیات کنترلی مانند تغییر مدار و فرود روی سیارک پرداخته شده است. این راه‌کار استفاده از بادبان‌های خورشیدی میباشد که میتوانند تعداد زیادی فتون ساتع شده از خورشید را بازتاب کرده و نیروی نسبتا مناسبی برای اعمال کنترلی فراهم آورند.

در [14] اثرات همزمان تشعشات خورشیدی و نیز اغتشاش J_2 [17] به طور همزمان با دو روش میانگین گیری ۱مرتبه‌ای و ۲مرتبه‌ای با استفاده از معادلات سیاره‌ای لاگرانژ بررسی شده‌است. و نمونه‌ی جدیدی از مدارهای خورشید منجمد با متعادل کردن این دو اغتشاش به‌دست آمده که سه بعدی بوده و نیز قیودی برای پایداری چنین مدارهایی مستقل از مقدار هریک از دو اغتشاش به‌دست آمده است.

برای بدست‌آوردن معادلات میانگین حرکت پیرامون جسمی با پتانسیل گرانشی از مرتبه و درجه‌ی۲ با توجه به وابستگی تابع‌پتانسیل به طول‌جغرافیایی جسم مرکزی ، دو پارامتر سریع وابسته به زمان در تابع‌پتانسل ظاهر میشود(زاویه چرخش سیارک و نیز آنومالی حقیقی[18] مدار) و نمی‌توان نظیر تابع پتانسیل گرانشی J_2 با آن رفتار کرده و معادلات سکولار را استخراج کرد. تا به حال دو راه‌حل غیردقیق برای این موضوع ارائه شده‌است که به صورت زیر است:

الف: در [4]، [8] و [9] فرض شده‌است به ترتیب که سرعت دورانی سیارک نسبت به حرکت میانگین فضاپیما بسیار کند و یا صفر است، از اینرو در هر تناوب مداری فضاپیما، میزان چرخش سیارک ناچیز

[16] Mean motion

[17] J2 zonal harmoic

[18] True Anomaly

میبا شد و در هنگام میانگین گیری نسبت به آنومالی حقیقی از تابع پتانسیل سیارک میتوان از تغییرات زاویه‌ی چرخش سیارک نسبت به زمان صرف نظر کرده و روابط تحلیلی میانگین نرخ المان‌های مداری را بدست آورد. شکل نهایی این معادلات بسیار شبیه به معادلاتی خواهند بود که در این نوشتار در فصل ۶ بدست خواهد آمد ولی آنچه که این دود سته معادلات بیان میکنند و نیز فروض اضافی برای رسیدن به این معادلات بسیار متفاوت است. نیز در این مقالات با میانگین‌گیری از انرژی جاکوبی به شکلی از آن بدست‌آمده که فقط تابع زاویه شیب و زاویه گره صعودی میبا شد و بنابرایین ثابت می‌شود که در صورت برقراری فروض مسأله، زاویه‌شیب و زاویه‌گره صعودی با یکدیگر به طور هماهنگ تغییر میکنند و میتوانند مداری پایدار با این شرایط به وجود آورند. سپس به طراحی مدارهای شبه‌منجمد قطبی و غیر قطبی پرداخته‌شده‌است و پایداری آنان نیز بررسی شده است.

ب: در [18] و [19] مسأله‌ی میانگین‌گیری از تابع پتانسیل گرانشی که تابع دومتغیر سریع وابسته به زمان میباشد به گونه‌ای عددی حل شده است راه‌حل بدین گونه است که هنگام انتگرال‌گیری از معادلات لحظه‌ای المان‌های مداری برای بدست آمدن معادلات سکولار، قسمتی از انتگرال را برای دسته‌مدارهای مختلف به صورت عددی محاسبه‌میکند و در نهایت آنرا به صورتی پارامتری تابع المان‌های مداری ارائه‌میکند.

۶.۱ تعریف مسأله

همانطور که در پایان بخش پیش به آن اشاره شد، برای رفع مشکل پیش‌آمده هنگام میانگین‌گیری از معادلات لحظه‌ای المان‌های مداری فضاپیما، در یک محیط گرانشی درجه و مرتبه۲ با سرعت دورانی یکنواخت، دو راه حل ارائه شد ولی هردوی این روش‌ها دارای مشکلاتی میباشند. در روش اول که روشی تحلیلی بود، فرض چرخش آرام سیارک صورت گرفته است، در حالی که بسیاری از سیارک‌ها دارای سرعت دورانی بالا هستند و حتی در صورتی که مدار فضاپیما را بسیار نزدیک به سطح سیارک در نظر بگیریم بازهم فرض صورت گرفته معقول نمیباشد. در روش دوم، مشکل دیگری وجود دارد زیرا پارامترهایی که به صورت عددی به دست‌می‌آیند، خود تابع المان‌های مدار میباشد و این درحالی است که هنگام طراحی مدار خود این المان‌ها مجهول میباشند و بنابراین به‌سادگی نمیتوان از این معادلات بدست‌آمده استفاده کرد و بایستی روشی بازگشتی مدنظر قرار داده‌شود.

در اینجا برای رفع مشکل اخیر راه‌حلی جدید یافته شده‌است. راه‌حل به اینگونه خواهد بود که معادلات حرکت در دستگاه چسبیده به سیارک نوشته شده و برای رسیدن به شکل معادلاتی که بتوان از

آن در معادلات سیاره‌ای گاوس[19] استفاده کرد، جمله‌های شتاب‌های تولید شده در سمت چپ رابطه به دلیل چرخش دستگاه مختصات، به سمت راست رابطه انتقال داده شده و به عنوان شتاب اغتشاشی در نظر گرفته شده‌است. هرچند این روش هم دارای کاستی‌های خاص خود است، ولی برای حل تقریبی[20] و نیز طراحی مدارهایی که در دستگاه چسبیده به سیارک به مدار بیضوی بدون اغتشاش شبیه هستند، بسیار مناسب است.

مطالب بیان‌شده در فصول مختلف این نوشتار به صورت زیر است.

در فصل۲ به استخراج تابع پتانسیل گرانشی برای جسمی تقریبا دلخواه(فرضیات به دقت توضیح داده خواهد شد) تا درجه‌ی۴ بدست آمده‌است ولی با توجه به پیچیده بودن جمله‌های با درجه‌ی بیش از۲ تابع پتانسیل گرانشی، برای تحلیل مدار حول سیارک‌ها در فصول بعد، تابع پتانسیل تنها تا درجه‌ی۲ درنظر گرفته شده و سپس همانند اکثر مقالات به میانگین‌گیری و بدست آوردن معادلات سکولار روی آورده شده‌است [6]، [8]، [9]، [11] و [14] که البته بنابر[0] و [26] این میزان از دقت برای تحلیل‌های اولیه مدار پیرامون سیارک‌ها ونیز دردست‌داشتن مدلی تحلیلی برای استفاده در طراحی اولیه اینچنین مدارهایی کافیست و در مأموریت‌های واقعی برای افزایش دقت در ادامه‌ی روند طراحی از روش‌های عددی مبتنی بر روش چندوجهی‌ها [25] استفاده می‌شود. روش چندوجهی‌ها هم در فصل۴ به اختصار توضیح داده شده و مداری بااین روش شبیه‌سازی شده‌است.

در فصل۳ روشی برای محاسبه‌ی ضرایب بسط هارمونیک تابع‌پتانسیل گرانشی برمبنای مدل‌چندوجهی جسم توضیح شده‌است. و نیز الگوریتمی برای محاسبه‌ی این ضرایب نوشته شده و ضرایب برای دو سیارک معروف و نیز یک مکعب مستطیل بدست‌آمده است.

در فصل۵ ابتدا شتاب‌های اغتشاشی در نظر گرفته شده در مسئله تابع المان‌های مداری کلاسیک بدست آمده و سپس با استفاده از معادلات سیاره‌ای گاوس، معادلات لحظه‌ای المان‌های مداری استخراج شده است.

در فصل۶ ابتدا معادلات لحظه‌ای بدست‌امده در فصل قبل میانگین‌گیری شده و سپس با استفاده از این معادلات، به تحلیل و طراحی مدارهایی با ویژگی‌های خاص پرداخته شده‌است که برخی از این مدارها تا جایی که نویسنده مطالب مختلف را بررسی کرده، مشابه آن موجود نبوده است.

---

[19] Gauss Planetary equations

[20] Propagation

۲ استخراج تابع پتانسیل گرانشی با روش مک‌کولاف

در این قسمت ابتدا قانون جهانی گرانش نیوتن توضیح داده شده‌است، سپس با استفاده از روش مک‌کولاف[21]، رابطه‌ی تابع پتانسیل گرانشی جسمی با هندسه‌ی دلخواه تا درجه‌ی۴ بدست آمده‌است. فرضیات انجام شده‌ی مربوط جسم، در حین محاسبه‌ی درجات مختلف تابع پتانسیل آورده شده‌است.

۱.۲ قانون جهانی گرانش نیوتن

هر جسم نقطه‌ای، جسم نقطه‌ای دیگر را با نیرویی متناسب با حاصل‌ضرب جرم دو جسم و نیز معکوس مجذور فاصله‌ی دوجسم، به سمت خود جذب می‌کند. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان جسم دوم را جسمی با جرم واحد در نظر گرفت، که در این صورت رابطه‌ی قانون جهانی گرانش، نشان‌دهنده‌ی میدان گرانشی[22] جسم اول است. رابطه‌ی کمّی شده‌ی این قانون به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}] = \frac{Gm}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_m|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_m) \qquad (۱.۲)$$

که در آن $\boldsymbol{F}$ نشان‌دهنده‌ی تابع برداری میدان گرانشی جسم به جرم m در مکان $\boldsymbol{r}$ و $\boldsymbol{r}_m$ نشان‌دهنده‌ی بردارمکان جسم است.

از آنجایی که رابطه‌ی (۱.۲) نسبت به جرم جسم خطی است و نیز هر جسمی به صورت مستقل میدان گرانشی خود را اعمال می‌کند، می‌توان ترکیب میدان گرانشی چند جسم را به صورت جمع میدان گرانشی آنها نوشت:

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}] = G\sum_{m_i\in S}\frac{m_i}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{m_i}\right|^3}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{m_i}\right) \qquad (۲.۲)$$

که S در آن مجموعه‌ی اجرام نقطه‌ای است. یک جسم واقعی را میتوان با تعداد نامتناهی از اجرام نقطه‌ای مدل کرد، که در این صورت میدان گرانشی این جسم به صورت زیر قابل نوشتن است:

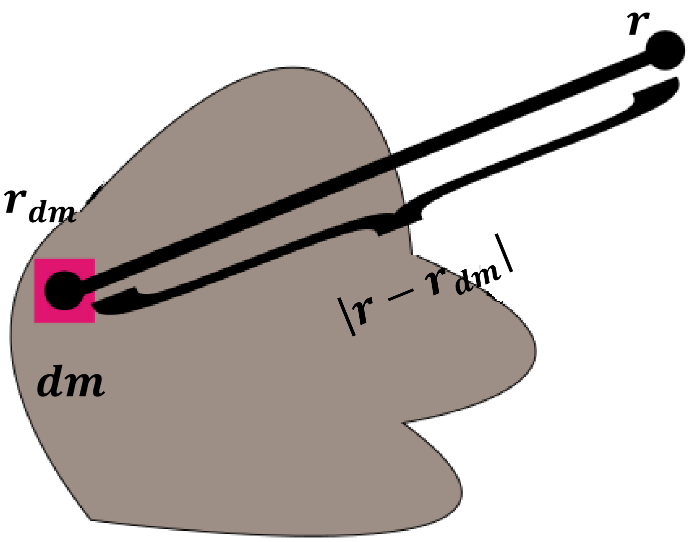
---

[21] MacCullagh

[22] Gravitational Field

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}] = G\int \frac{dm}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{dm}|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{dm}) \tag{۳.۲}$$

که در آن $\boldsymbol{r}_{dm}$ بردار مکان یک نقطه‌ی مادی از جسم است (شکل ۴) .



شکل۴: بردارهای مختلف مرتبط با میدان گرانشی جسم

دســتگاه مختصــات لخت[23] دلخواهی را به صــورت $(\hat{\boldsymbol{i}},\hat{\boldsymbol{j}},\hat{\boldsymbol{k}})$ در نظر می‌گیریم و بردارهای مکان $\boldsymbol{r}$ و $\boldsymbol{r}_m$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\boldsymbol{r}_{dm} = \xi\hat{\boldsymbol{i}} + \eta\hat{\boldsymbol{j}} + \zeta\hat{\boldsymbol{k}} \tag{۴.۲}$$

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}} \tag{۵.۲}$$

۲.۲ تابع پتانسیل گرانشی

برای معرفی تابع پتانسـیل گرانشـی، از توصـیف‌های فیزیکی و معناداری اسـتفاده شـده‌اسـت [۰] . برای اختصار، تابع پتانسیل گرانشی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U[\boldsymbol{r}] = G\int \frac{dm}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{dm}|} \tag{۶.۲}$$

---

[23] Inertial Frame of Refference

در این تعریف تابع پتانسـیل گرانشـی U، تابعی اسـکالر[۲۴] از متغیر برداری $\boldsymbol{r}$ اسـت. با اعمال عملگر گرادیان[۲۵] بر روی تابع پتانسیل گرانشی به تابع میدان گرانشی جسم می‌رسیم:

$$\nabla U[\boldsymbol{r}] = \frac{\partial}{\partial x} U[\boldsymbol{r}]\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} U[\boldsymbol{r}]\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} U[\boldsymbol{r}]k =$$

و با توجه به اینکه حدود انتگرال ثابت اسـت می‌توان عملگرهای مشـتقات جزئی را به داخل انتگرال منتقل کرد و پس از مشتقگیری عبارت بالا، برابر خواهد بود با:

$$-\int G \frac{(x-\xi)\hat{i} + (y-\eta)\hat{j} + (z-\zeta)\hat{k}}{\sqrt{(x-\xi)^3 + (y-\eta)^3 + (z-\zeta)^3}} dm = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}]$$

بنابراین:

$$\nabla U[\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}] \tag{۷.۲}$$

با توجه‌ به رابطه‌ی تحلیلی موجود بین تابع پتانسیل گرانشی و تابع میدان گرانشی، برای سهولت در ادامه‌ی این نوشتار از تابع پتانسیل گرانشی که تابعی اسکالر است استفاده می‌کنیم.

۳.۲ بسط تیلور تابع پتانسیل گرانشی

مخرج کسر درون انتگرال رابطه‌ی (۶.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{dm}|^2 = r^2 + {r_{dm}}^2 - 2rr_{dm}\cos\theta \tag{۸.۲}$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{r}.\boldsymbol{r}_{dm}}{rr_{dm}} \tag{۹.۲}$$

بنابراین رابطه‌ی (۶.۲) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

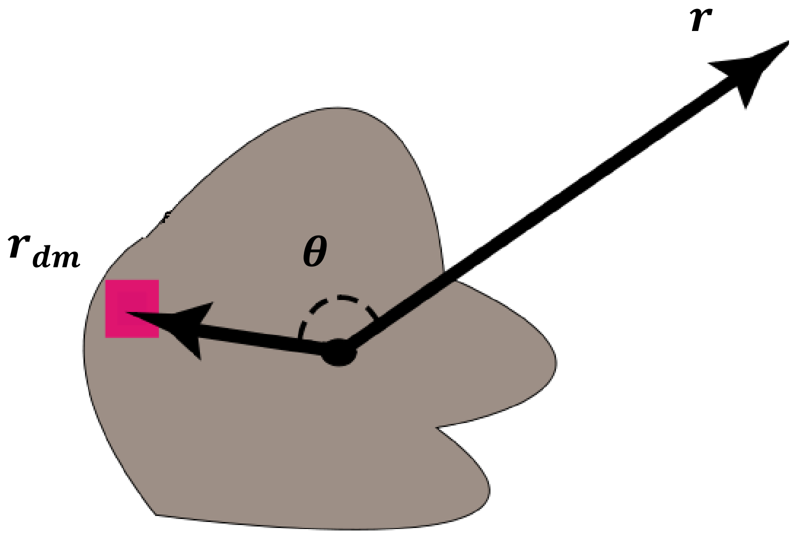
$$U[\boldsymbol{r}] = \frac{G}{r}\int \frac{dm}{\sqrt{1+(\frac{r_{dm}}{r})^2 - 2\frac{r_{dm}}{r}\cos\theta}} \tag{۱۰.۲}$$

---

[24] Scalar

[25] Gradient

که در آن θ زاویه‌ی بین دو بردار $\boldsymbol{r}$ و $\boldsymbol{r}_{dm}$ است (شکل۵) .



شکل۵: زاویه‌ی بین بردار مکان المان جرم جسم و نقطه‌ای دلخواه در فضا.

عبارت داخل انتگرال رابطه‌ی (۱۰.۲) را می‌توان به عنوان تابعی از $\frac{r_{dm}}{r}$ در نظر گرفت و با توجه اینکه این تابع تا زمانی که $\frac{r_{dm}}{r} < 1$، تابعی تحلیلی حول صفر است میتوان اسن تابع را حول صفر بسط‌داد. در [0] بسط تیلور این تابع محاسبه شده و به صورت زیر است:

$$U[\boldsymbol{r}] = \sum_{i=0}^{\infty} U_i[\boldsymbol{r}] \quad (۱۱.۲)$$

$$U_i[\boldsymbol{r}] = \frac{G}{r} \int \left(\frac{r_{dm}}{r}\right)^i P_i[\cos\theta] dm \quad (۱۲.۲)$$

$$P_i[t] = \frac{1}{2^i i!} \frac{d\left(t^2-1\right)^i}{dt^i} \quad (۱۳.۲)$$

رابطه‌ی (۱۳.۲) به چند جمله‌ای لژاندر معروف است. چند درجه‌ی اول چندجمله‌ای لژاندر که برای بدست آمدن بسط تابع پتانسیل تا درجه‌ی۴ مورد نیاز است به صورت زیر است:

$$P_0[t] = 1 \quad (۱۴.۲)$$

$$P_1[t] = t \quad (۱۵.۲)$$

$$P_2[t] = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \quad (۱۶.۲)$$

$$P_3[t] = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \quad (۱۷.۲)$$

$$P_4[t] = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \quad (۱۸.۲)$$

حال به محاسبه‌ی جمله‌های مختلف تابع پتانسیل گرانشی می‌پردازیم.

۱.۳.۲ جمله‌ی درجه صفر

$$U_0[\boldsymbol{r}] = \frac{G}{r}\int dm = \frac{\mu}{r} \qquad (۱۹.۲)$$

که مشاهده می‌شود مشابه با تابع پتانسیل گرانشی برای یک جسم نقطه‌ای با جرمی معادل جرم جسم مورد بحث است.

۲.۳.۲ جمله‌ی درجه اول

$$U_1[\boldsymbol{r}] = \frac{G}{r}\int \left(\frac{r_{dm}}{r}\right)\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{rr_{dm}}dm = \frac{G}{r^3}\int (x\xi + y\eta + z\zeta)dm$$

مبدأ مختصات را مرکز جرم جسم تعریف کنیم، بنابراین نتیجه‌ی انتگرال بالا برابر با صفر خواهد شد.

$$U_1[\boldsymbol{r}] = 0 \qquad (۲۰.۲)$$

۳.۳.۲ جمله‌ی درجه دوم

$$U_2[\boldsymbol{r}] \qquad (۲۱.۲)$$

$$= \frac{G}{r}\int \left(\frac{r_{dm}}{r}\right)^2 \frac{1}{2}\left(3\left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{rr_{dm}}\right)^2 - 1\right)dm =$$

$$\frac{G}{2r^5}(3x^2\int \xi^2 dm + 3y^2\int \eta^2 dm + 3z^2\int \zeta^2 dm + 6xy\int \xi\eta\, dm +$$

$$6xz\int \xi\zeta\, dm + 6yz\int \eta\zeta\, dm + r^2\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dm$$

برای ساده سازی عبارت بالا ممان‌های اینرسی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} = \frac{1}{m}\int \xi^\alpha \eta^\beta \zeta^\gamma dm \qquad (۲۲.۲)$$

راستاهای مختصات را راستاهای اصلی جسم تعریف می‌کنیم بنابراین داریم:

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0 \qquad (۲۳.۲)$$

همچنین دو متعیر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{J}_x = I_{x^2} - I_{z^2} \tag{۲۴.۲}$$

$$\mathcal{J}_y = I_{y^2} - I_{z^2} \tag{۲۵.۲}$$

با قرار دادن چهار رابطه‌ی اخیر در رابطه‌ی

۴.۳.۲ جمله‌ی درجه دوم

(۲۱.۲) خواهیم داشت:

$$U_2[\boldsymbol{r}] = \frac{-1}{2}\frac{\mu}{r^3}\left(\mathcal{J}_x + \mathcal{J}_y\right) + \frac{3}{2}\frac{\mu}{r^5}\left(x^2\mathcal{J}_x + y^2\mathcal{J}_y\right) \tag{۲۶.۲}$$

۵.۳.۲ برای جمله‌های با درجه‌ی فرد:

بسط تابع پتانسیل با زیاد شدن درجه به شدت پیچده خواهد شد و در اینجا برای جلوگیری از پیچیده شـدن بیش‌از حد روابط و مناسـب بودن روابط جهت اسـتفاده در کار تحلیلی فرض می‌کنیم هندسـه‌ی جسم و نیز چگالی آن حول محورهای اصلی جسم، متقارن است. بنابراین رابطه‌ی زیر به وضوح برقرار است:

$$I_{x^{2k+1}y^{\beta}z^{\gamma}} = \int \xi^{2k+1}\eta^{\beta}\zeta^{\gamma}\,dm = 0 \tag{۲۷.۲}$$

از آنجایی که جمله‌های چندجمله‌ای لژاندر با درجات فرد، همگی از درجات فرد هسـتند، توابع پتانسیل درجات فرد فقط شامل عباراتی با ضرایبی مانند (۲۷.۲) هستند و بنابراپین همگی صفرند.

$$U_{2k+1}[\boldsymbol{r}] = 0 \tag{۲۸.۲}$$

۶.۳.۲ جمله‌ی درجه چهارم

با مقداری ساده سازی و نیز استفاده از (۲۸.۲) ، برای تابع پتانسیل درجه چهار داریم:

$$U_4[\boldsymbol{r}] = \tag{۲۹.۲}$$

$$\frac{\mu}{8r^9}\left(3r^4\left(I_{x^4} + I_{y^4} + I_{z^4} + 2I_{x^2}I_{y^2} + 2I_{x^2}I_{z^2} + 2I_{y^2}I_{z^2}\right)\right.$$
$$-30r^2\left(x^2\left(I_{x^4} + I_{x^2y^2} + I_{x^2z^2}\right) + y^2\left(I_{y^4} + I_{x^2y^2} + I_{y^2z^2}\right) +\right.$$
$$z^2\left(I_{z^4} + I_{x^2z^2} + I_{y^2z^2}\right)\right) + 210x^2y^2I_{x^2y^2} + 210x^2z^2I_{x^2z^2} +$$

$$210y^2z^2I_{y^2z^2} + 35x^4I_{x^4} + 35y^4I_{y^4} + 35z^4I_{z^4})$$

در اینجا برای محاسبه‌ی ممان‌های مرتبه‌ی۴ برحسب ممان‌های مرتبه۲ مجبور خواهیم بود حالت کلی مسأله را کنار گزاشته و حالت خاص‌تری را در نظر بگیریم، فرض می‌کنیم که جسم یک بیضی‌گون با چگالی یکنواخت است. رابطه‌ی مرز جسم به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 1 \tag{۳۰.۲}$$

جرم جسم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$m = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\beta\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\alpha^2}}}^{\beta\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\alpha^2}}} \int_{-\gamma\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}}}^{\gamma\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}}} \rho \, d\zeta \, d\eta \, d\xi = \frac{4}{3}\pi\rho\alpha\beta\gamma \tag{۳۱.۲}$$

برای ممان‌های اینرسی به طور مشابه از انتگرال‌گیری روی جسم نتیجه می‌شود:

$$I_{x^2} = \frac{4}{15m}\pi\rho\alpha^3\beta\gamma = \frac{\alpha^2}{5} \tag{۳۲.۲}$$

$$I_{x^4} = \frac{4}{35m}\pi\rho\alpha^5\beta\gamma = \frac{3}{35}\alpha^4 \tag{۳۳.۲}$$

$$I_{x^2y^2} = \frac{4\pi\rho\alpha^3\beta^3\gamma}{105m} = \frac{1}{35}\alpha^2\beta^2 \tag{۳۴.۲}$$

با توجه به رابطه‌های بالا برای ممان‌های اینرسی خواهیم داشت:

$$I_{x^4} = \frac{15}{7}{I_{x^2}}^2 \tag{۳۵.۲}$$

$$I_{x^2y^2} = \frac{5}{7}I_{x^2}I_{y^2} \tag{۳۶.۲}$$

روابط برای سایر ممان‌های درجه۴ مشابه (۳۵.۲) و (۳۶.۲) است و از تقارن نتیجه می‌شود.

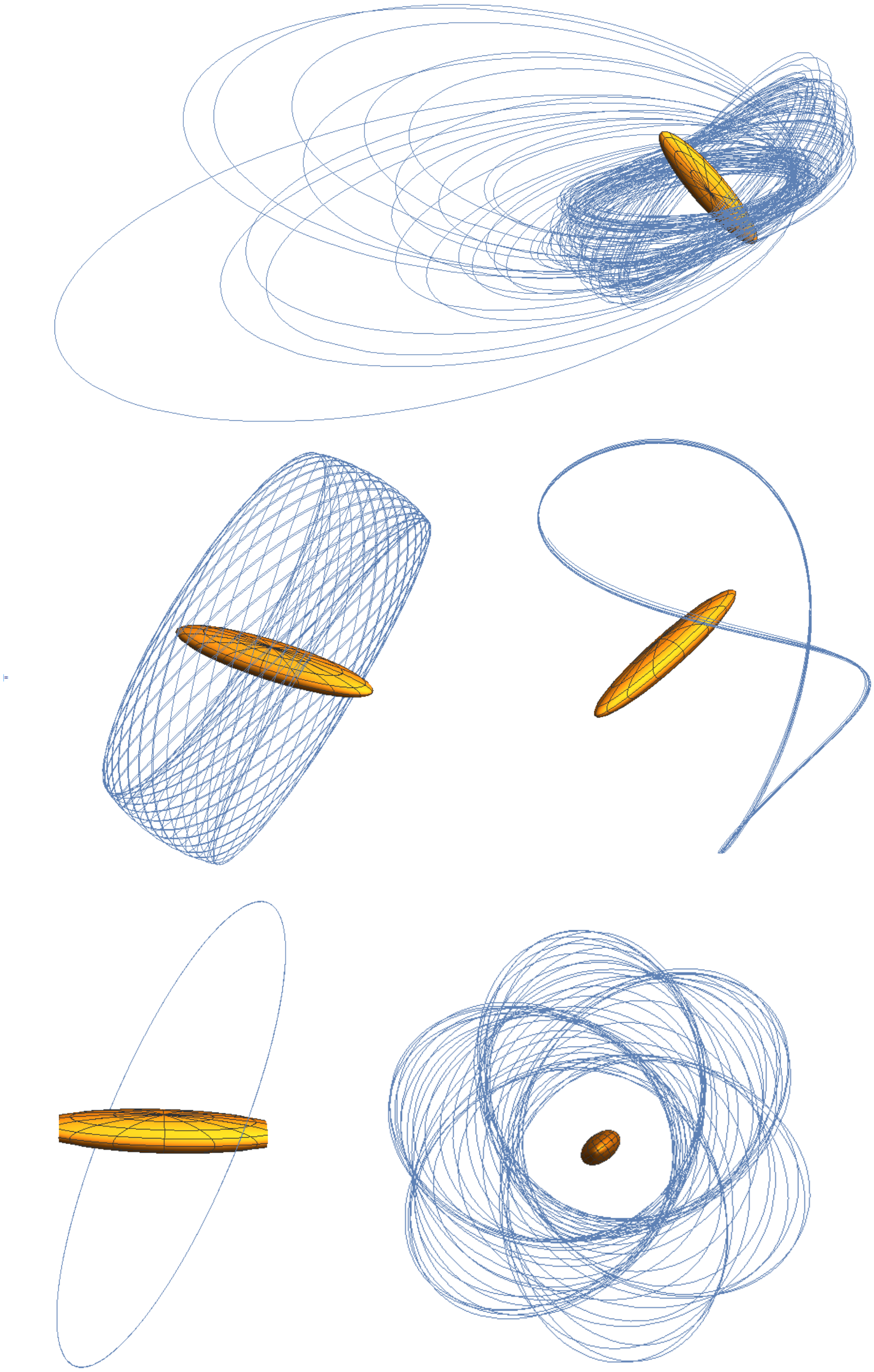
با جایگزاری (۳۵.۲) و(۳۶.۲) و همچنین (۲۴.۲) و (۲۵.۲) در (۲۹.۲) داریم:

$$U_4[\boldsymbol{r}] = \frac{45}{56}\frac{\mu}{r^5}\left({\mathcal{J}_x}^2 + {\mathcal{J}_y}^2 + \frac{2}{3}\mathcal{J}_x\mathcal{J}_y\right) + \tag{۳۷.۲}$$

$$\frac{-450}{56}\frac{\mu}{r^7}\left(x^2\left({\mathcal{J}_x}^2 + \frac{1}{3}\mathcal{J}_x\mathcal{J}_y\right) + y^2\left({\mathcal{J}_y}^2 + \frac{1}{3}\mathcal{J}_x\mathcal{J}_y\right)\right)$$

$$+\frac{525}{56}\frac{\mu}{r^9}\left(x^4{\mathcal{J}_x}^2 + y^4{\mathcal{J}_y}^2 + 2x^2y^2\mathcal{J}_x\mathcal{J}_y\right)$$

با شبیه سازی این روابط برای ج سم‌های مختلف و شرایط اولیه‌ی مختلف، تعدادی از این مدارهای زیبا در ادامه آورده می‌شود. فایل شبیه‌سازی در پیوست۱ آمده‌است.



شکل۶: شبیه‌سازی مدار حول جسمی با اغتشاش زیاد و سرعت زاویه‌ای های مختلف

۳ محاسبه‌ی ضرایب بسط هارمونیک تابع پتانسیل گرانشی

همانطور که در فصل پیش به آن اشاره شد معادلات تابع پتانسیل گرانشی وقتی که براساس روش مک‌کولاف نوشته میشوند به افزایش درجه به سرعت بسیار پیچیده میشوند به همین دلیل اکثر اوقات از روش دیگری برای نمایش تابع پتانسیل استفاده میشود که به روش هارمونیک کروی معروف است. اثبات معادلات هارمونیک کروری در اینجا نخواهد آمد و میتوانید آن‌ها را در [0] پیدا کنید. این معادلات به شکل زیر است:

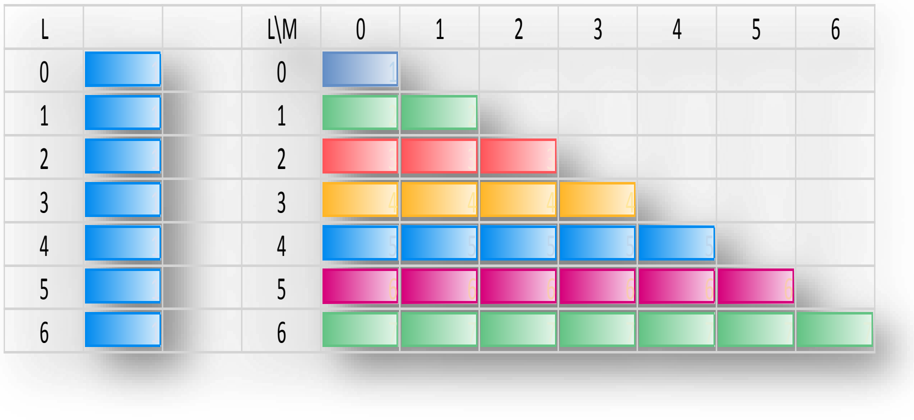
$$U[\boldsymbol{r}] = \frac{\mu}{r}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^{l} P_{nm}[\sin\phi](C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)\right] \quad (۱.۳)$$

که در آن r فاصله‌ی فضاپیما از مرکز مختصات است، $R_{\oplus}$ شعاع متعادل کننده‌ی معادلات میباشد که معمولا برابر با ماکسیمم شعاع جسم مرکزی در نظر گرفته میشود، ϕ و λ به ترتیب عرض جغرافیایی و طول جغرافیایی محل فضاپیما میباشند. C_{nm} و S_{nm} ضرایبی ثابتی میباشند که بر حسب خواص جسم مرکزی به دست می‌آیند.

بین بیان تابع پتانسیل با روش مک‌کولاف و هارمونیک کروی رابطه‌ای به صورت شکل۷ وجود دارد. این رابطه به این صورت است که مثلا جمله‌ی درجه‌ی n بسط مک‌کولاف برابر با جمع همه‌ی جملات درجه n بسط هارمونیک کروی میباشند که خود n جمله است.

یکی از روش‌هایی که برای محاسبه‌ی C_{nm} و S_{nm} استفاده میشود، فرستادن ماهواره حول جسم و اندازه‌گیری شتاب‌های اغتشاشی بر حسب موقعیت و سپس برازش این شتاب ها بر معادله‌ی (۱.۳) است ولی این روش در مورد سیارک‌ها خیلی عملی نمی‌باشد زیرا درصورت عدم اطلاع از این ضرایب برای سیارک، مأموریت فضاپیما به سیارک، ممکن است با شکست مواجه شود. از این رو ابتدا با تصویر برداری‌های رادیویی مدلی حجمی از جسم ارائه میکنند و سپس بر حسب این مدل که عموما به صورت برازش یک چندوجهی با وجه‌های مثلثی است، به محاسبه‌ی ضرایب می‌پردازند[26]. در این فصل هدف

ما هم محا سبه‌ی این ضرایب با دا شتن مدل چندوجهی ج سم ا ست. بخ شی از معادلات این ق سمت از [22] و [23] گرفته‌شده است.



شکل۷: رابطه‌ی بسط هارمونیک کروی با بسط مک‌کولاف

۱.۳ روابط بازگشتی ضرایب بسط هارمونیک کروی

ضرایب بسط هارمونیک را میتوان با محاسبه‌ی انتگرال زیر محاسبه کرد:

$$\begin{bmatrix} c_{n,m} \\ s_{n,m} \end{bmatrix} = \frac{1}{M}\left(2-\delta_{0,m}\right)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left(\frac{\mathrm{rm}}{R_{\oplus}}\right)P_{nm}[\sin\phi]\begin{bmatrix} \cos m\,\lambda \\ \sin m\,\lambda \end{bmatrix}\mathrm{dm} \qquad (۲.۳)$$

$$\begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} c_{n,m} \\ s_{n,m} \end{bmatrix} dm \qquad (۳.۳)$$

واضح است که محاسبه‌ی چنین انتگرالی آن هم در دستگاه مختصات کروی بسیار دشوار است. به همین دلیل از شکل دیگر از معادله‌ی (۲.۳) ا ستفاده می شود که اول در د ستگاه مخت صات کارتزین بیان شده است و ثانیا برحسب درجه و مرتبه‌ی ضرایب، بازگشتی میباشد. این روابط به شکل زیر میباشد:

$$n=0:\quad \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ s_{0,0} \end{bmatrix} = \frac{1}{M}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۴.۳)$$

$$n=1:\quad \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ s_{1,1} \end{bmatrix} = \frac{1}{MR_{\oplus}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (۵.۳)$$

قطری: (۶.۳)

$$\begin{bmatrix} c_{n,n} \\ s_{n,n} \end{bmatrix} = \frac{1}{2nR_{\oplus}}\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{n-1,n-1} \\ s_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

زیر قطری: (۷.۳)

$$\begin{bmatrix} c_{n,n} \\ s_{n,n} \end{bmatrix} = \frac{z}{R_{\oplus}}\begin{bmatrix} c_{n-1,n-1} \\ s_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

عمودی: (۸.۳)
$$\begin{bmatrix} c_{n,m} \\ s_{n,m} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} c_{n-1,m} \\ s_{n-1,m} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} c_{n-2,m} \\ s_{n-2,m} \end{bmatrix}$$

(۹.۳)
$$\alpha = \frac{z}{R_{\oplus}} \frac{2n-1}{n+m}$$

(۱۰.۳)
$$\beta = \frac{x^2+y^2}{R_{\oplus}^2} \frac{m-n+1}{n+m}$$

اســتفاده از این روابط برای بدســت‌آوردن توابع زیر انتگرال $\begin{bmatrix} c_{n,m} \\ s_{n,m} \end{bmatrix}$ (بعد از بدســت‌امدن این توابع که در مختصات کارتزین میبا شند بایستی در حجم جسم از آنها انتگرال‌گیری شود تا ضرایب بسط هامونیک بد ست‌آید.) به این ترتیب ا ست که ابتدا باید با معادله‌ی (۶.۳) تا درجه‌ی مورد نیاز، توابع قطری حساب شوند (قطری : درجه و مرتبه برابر) و سپس با معادله‌ی (۷.۳) توابع زیرقطری حساب شوند (زیرقطری: درجه – مرتبه = ۱) و سـپس با معادله‌ی (۸.۳) توابع عمودی(به ازای یک مرتبه‌ی ثابت همه‌ی درجاتی که تا حال حساب نشده‌اند) حساب شوند. شکل شماتیک مرحله به مرحله‌ی این محاسبات در شکل۸ آمده است.

L\M	0	1	2	3	4
0	0				
1	2	0			
2	3	2	1		
3	3	4	2	1	
4	3	4	5	2	1

شکل۸: روند استفاده از روابط بازگشتی محاسبه‌ی بسط هارمونیک (از سبز به قرمز)

۲.۳ نحوه نمایش توابع چندجمله‌ای با درجه یکنواخت در رایانه

در قسـمت قبل به روند محاسـبه‌ی توابع زیر انتگرال برای محاسـبه‌ی ضـرایب بسـط هارمونیک کروی پرداختیم حال مسأله این است که برای استفاده از این روابط بازگشتی نیاز به محاسبه‌ی ضرب توابع داریم. باید تأیین کنیم که اولا چگونه این توابع را در رایانه نمایش دهیم و ثانیا چگونه عمل ضرب را برای دو چندجمله‌ای انجام دهیم.

مشاهده میشود که $\begin{bmatrix} c_{n,m} \\ s_{n,m} \end{bmatrix}$ چندجمله‌ای‌هایی با درجه‌ی یکنواخت n است (یعنی در چندجمله‌ای، فقط جملات با درجه‌ی n وجود دارد. چون در جمله‌ای متغیر های x ، y و z وجود دارد، منظور از

درجه‌ی هرجمله، مجموع توان‌های این ۳ متغیر در آن جمله است) زیرا در صورتی که از روابط بازگشتی بخش پیش برای محاسبه‌ی آن استفاده شود، توابع درجه صفر و ۱ این خاصیت را دارند، و در هر مرحله از روابط بازگشتی درجه‌ی هریک از درجات چندجمله‌ای دقیقا ۱ واحد افزوده میشود.

برای نشـــان دادن هر کدام از $c_{n,m}$ یا $s_{n,m}$ ها میتوان از یک تانســـور ۳بعدی اســـتفاده کرد و درآن درایه‌ی a_{ijk} را برابر با ضـــریب جمله‌ی $x^i y^j z^k$ در آن چند جمله‌ای قرار داد؛ ولی از آنجایی که همواره $i+j+k=n$ همواره تنها یک صفحه از این تانسور استفاده میشود و بقیه درایه‌های تانسور مطمینا صفر خواهند بود. بنابرایین میتوان از بجای تانسور ۳ بعدی از یک تانسور ۲ بعدی استفاده کرد و در آن درایه‌ی a_{ij} را برابر با ضـریب جمله‌ی $x^i y^j z^{n-i-j}$ قرار داد. به طور مثال برای چند چندجمله‌ای درجه یکنواخت که در شکل۹ نشان داده شده‌اند، تانسور متناظر شان به صورتی که در مقابل آنها نمایش داده شده، میتوان آن‌ها را در رایانه در یک آرایه ذخیره‌کرد.

$n=0$:

$p[x,y,z]=10$

10

$n=1$:

$p[x,y,z]=2z-x$

2	0
-1	

$n=2$:

$c_{20}=p[x,y,z]=\frac{1}{2MR_\oplus}(x^2+y^2)$

0	0	0.5/MR
0	0	
0.5/MR		

شکل۹: نحوه‌ذخیره چندجمله‌ای‌های درجه یکنواخت در رایانه

۳.۳ محاسبات ماتریسی چندجمله‌ای‌های درجه یکنواخت

حال با داشتن نحوه نمایشی برای نشان دادن و ذخیره سازی چندجمله‌ای‌های درجه یکنواخت میتوانیم نحوه‌ی انجام عمل ضرب و جمع چندجمله‌ای هارا با این نمایش توضیح دهیم.

۱.۳.۳ عمل جمع

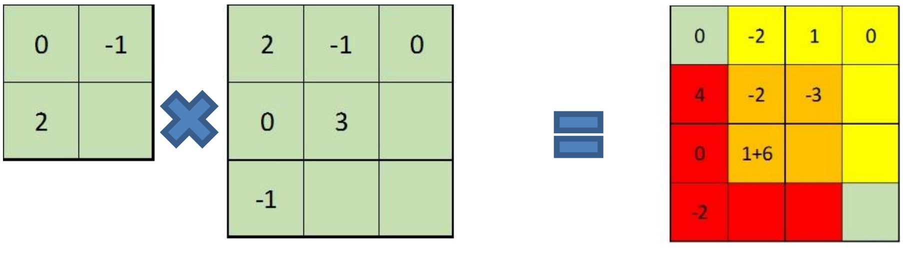
عمل را جمع را تنها میتوان برای چندجمله‌ای هایی درجه یکنواخت با درجه‌ی مساوی با نحوه‌ی ذخیره سازی ما انجام داد، زیرا در صورتی که درجه یکسان نباشد حاصل جمع درجه یکنواخت نخواهد بود و بنابراین نمیتوان آن را با یک تانسور مرتبه ۲ نمایش داد. واضح است که برای چندجمله‌ای درجه یکنواخت با درجه‌ی یکسان برای اعمال عمل جمع بین آن دو میتوان تانسور متناظرشان را درایه به درایه جمع کرد.

۲.۳.۳ عمل ضرب

برخلاف عمل جمع عمل ضرب را میتوان بین هر دو چندجمله‌ای با درجه یکنواخت انجام داد زیرا در این صورت حاصل برابر با چندجمله‌ای درجه‌یکنواخت با درجه‌ای برابر با جمع درجه آنان خواهد بود. الگوریتم این ضرب به این صورت است که ابتدا تانسوری ۲بعدی با اندازه‌ی یکی کمتر از جمع درجه‌ی دو تانسور قبلی ایجاد کرده و سپس درایه‌های آن با رابطه‌ی زیر محاسبه میشوند:

$$a_{ij} = \sum_{c,d} b_{cd}\, c_{i-c,j-d} \qquad (۱۱.۳)$$

که در آن b_{ij} و c_{ij} درایه‌های تانسور ۲بعدی متناظر با آن دو چندجمله‌ای که در هم ضرب میشوند هستند. برای تصور این ضرب کمی پیچیده میتوان شکل ۱۰ را مشاهده کرد که توضیح میدهد که برای ضرب این دو تانسور کافیست هربار یک درایه از تانسور اول را در همه‌ی درایه‌های تانسور دوم ضرب کرده و حاصل را که تانسوری هم‌اندازه با تانسور دوم است را درجای مناسبی در تانسور حاصل ضرب قرار داد.



شکل ۱۰: نحوه‌ی ضرب دوچندجمله‌ای درجه یکنواخت

۴.۳ انتگرال گیری از توابع چندجمله‌ای ضرایب بسط هارمونیک کروی

حال طبق بخش ۱.۳و ۲.۳ توابع زیر انتگرال ضـــرایب بســـط هارمونیک را هرکدام در تانســـوری ۲بعدی ذخیره کرده‌ایم؛ حال باید از هرکدام از این توابع در کل حجم جسم نسبت به جرم جسم انتگرال گیری کنیم که البته با فرض چگالی یکنواخت میتوانیم انتگرال گیری را روی حجم انجام بدهیم و چگالی به بیرون از انتگرال خواهد آمد. ار آنجای که ما از مدل چند وجهی مثلی جسم استفاده میکنیم، کافی است که انتگرال روی هرکدام از هرم‌های تشکیل شده توسط یکی از وجه‌ها و مرکز جسم جداگانه حساب شود و حاصـــل همه باهم جمع شـــود. بنابرایین در این بخش تنها به انتگرال‌گیری از یک چندجمله‌ای درجه یکنواخت روی هرمی دلخواه که راسی از آن مرکز مختصات است تمرکز میکنیم.

۱.۴.۳ انتگرال‌گیری از چندجمله‌ای درجه یکنواخت روی هرم استاندارد

در صـــورتی که هرم بحث شـــده در بخش پیش، به صـــورت هرم اســـتاندارد باشـــد، یعنی راس‌های آن به ترتیب، $(0,0,0)$، $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ باشـــد، انتگرال‌گیری هر تک جمله درجه n روی آن بسیار ساده و با رابطه‌ی زیر خواهد بود:

$$\oint x^i y^j z^{n-i-j}\,\mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} x^i y^j z^k \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{i!\,j!\,(n-i-j)!}{(n+3)!} \qquad (۱۲.۳)$$

بنابرایین برای راحتی کار بایســـتی هریک از هرم‌هایی را که در بخش پیش به وجود می‌آید را با تبدیل مختصاتی به هرم استاندارد تبدیل کنیم. به سادگی میتوان فهمید در صورتی که رئوس هرم ما رئوس $v1$ تا $v4$ باشند که در طرف راست شکل۱۱ نشان داده‌شده‌اند میتوان با معکوس تبدیل خطی T که رابطه‌ی آن در همان شکل۱۱ نشان داده شده‌است، آن را به هرم استاندارد تبدیل کرد.

$$\begin{array}{lcl} v_0 = (0,0,0) & & v_0 = (0,0,0) \\ v_1 = (x_1, y_1, z_1) & \Longrightarrow & v_1 = (1,0,0) \\ v_2 = (x_2, y_2, z_2) & & v_2 = (0,1,0) \\ v_3 = (x_3, y_3, z_3) & & v_3 = (0,0,1) \end{array}$$

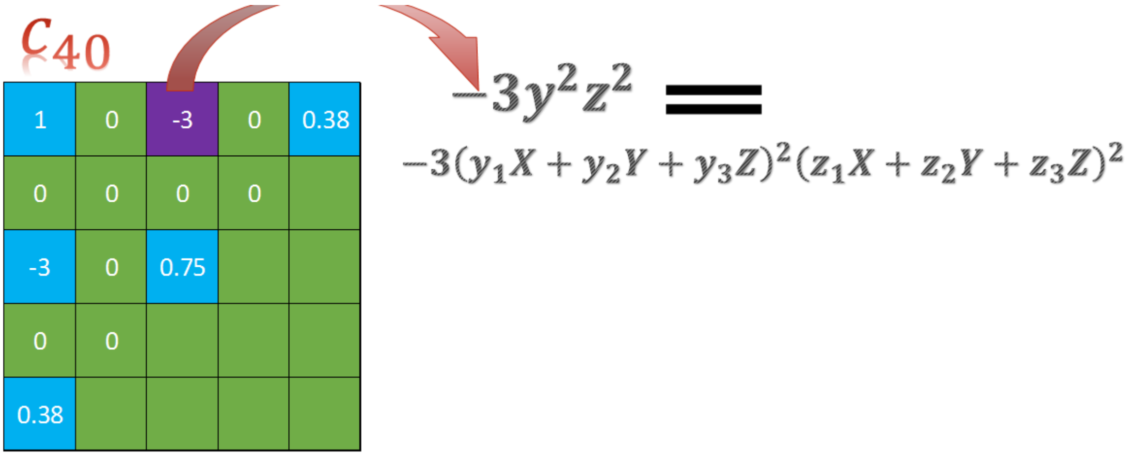
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{T} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

شکل۱۱: تبدیل هرم دلخواه به هرم استاندارد

حال مسـأله این اسـت که بعد از اعمال این تغییر مختصـات برای هر کدام از هرم ها، چند جمله‌ای های بدست آمده در بخش قبل را نیز بایستی براساس متغیرهای تبدیل یافته‌ی جدید بیان کرد. در بخش بعد به این مبحث پرداخته میشود.

۲.۴.۳ تغییر مختصات چندجمله‌ای‌های درجه یکنواخت به مختصات دیگر

این فرایند برای سادگی با یک مثال شرح داده می‌شود. فرض کنید چند جمله‌ای زیر انتگرال را برای c_{40} محاسبه کرده‌ایم و آن را در تانسوری مطابق با شکل۱۲ ذخیره کرده‌ایم.

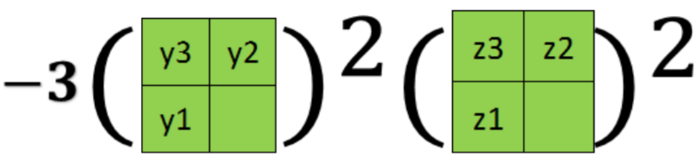


شکل۱۲: تبدیل نمایش چندجمله‌ای زیر انتگرال c۴۰ به مختصات دیگر

حال بیایید به یکی از درایه‌های این تانسور نگاه کنیم به طور مثال درایه‌ی سطر اول و ستون سوم. این درایه نشان دهنده‌ی $-3y^2z^2$ میباشند که y و z متغییرهای هستند که که در دستگاه مختصات اولیه باید مقدارهی شوند ولی آنهارا بر اساس دستگاه مختصات جدید میتوان به صورت زیر بیان کرد:

$$-3y^2z^2 = -3(y_1X + y_2Y + y_3Z)^2(z_1X + z_2Y + z_3Z)^2$$

که در آن y_iها و z_iها مختصات رئوس چندوجهی میباشند و X، Y و Z متغیرهای جدید میباشند. برای محاسـبه‌ی این عبارت بار هم میتوان از ضـرب تانسـوری چندجمله‌ای‌های یکنواخت بهره جسـت و این عبارت را به صورت شکل۱۳ محاسبه کرد.

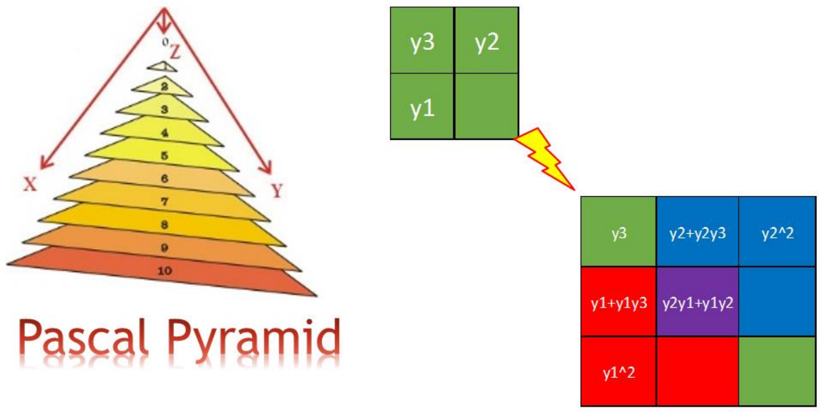


شکل۱۳: محاسبه یک درایه از تانسور قدیمی در دستگاه جدید

حا صل محا سبه‌ی شکل۱۳ یک تانسور با اندازه‌ی ۴ خواهد شد که هم‌اندازه با تانسور اولیه ا ست. برای تک‌تک درایه‌های تانسور قدیمی بایستی این فرایند را تکرار کرد و در نهایت همه‌ی تانسورهای بد ست آمده را با هم جمع کرد؛ در این صورت تانسور مربوط به چند جمله‌ای زیر انتگرال c_{40} را برای یک هرم خاص، محاسبه کرده‌ایم و حال با رابطه‌ی (۱۲.۳) میتوانیم انتگرال آن را برای تک تک درایه‌هایش حساب کرده و حاصل را با هم جمع کنیم و نیز به خاطر تغییر مختصات حاصل نهایی را در دترمینان تبدیل T ضرب کنیم، در این صورت سهم یک هرم خاص را از C_{40} حساب کرده‌ایم!

۵.۳ نکاتی برای افزایش سرعت الگوریتم

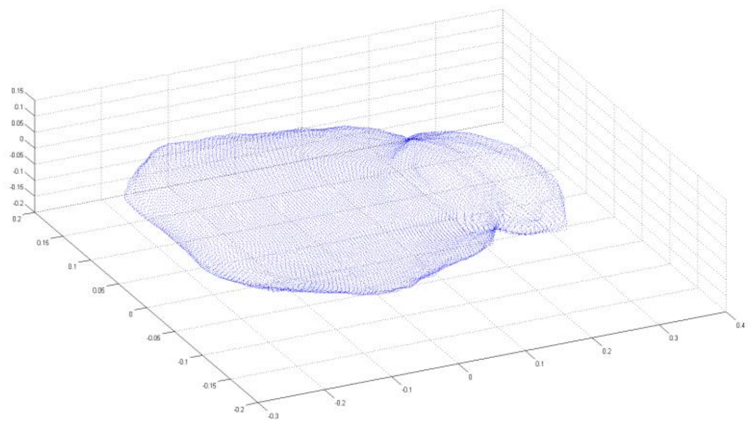
- از آنجایی که توابع زیر انتگرال ضرایب چندجمله‌ای به صورت بازگشتی محا سبه می شوند، در صورتی که ضرایب بسط هارمونیک را تا درجه‌ی n بخواهیم بهتر است که آن‌ها را همگی یکباره تولید کرده و در تانسورهای مربوطه ذخیره کنیم.
- بهتر است هنگامی که روی یک هرم خاص انتگرال گرفته میشود، یکباره سهم آن هرم را از تمام ضرایب بسط هارمونک حساب کنیم و سپس سراغ هرم دیگری برویم زیرا تبدیل‌های مختصات هر هرم بطور جداگانه مشخص میشود و وقتی که تبدیل‌ها را حساب کردیم بهتر است که برای همه‌ی ضرایب از آن استفاده کنیم.
- در هنگام تبدیل چندجمله‌ای‌ها در یک هرم به مختصات جدید جملات،$(x_1X + x_2Y + x_3Z)$ ،$(y_1X + y_2Y + y_3Z)$ و $(z_1X + z_2Y + z_3Z)$ هر یک با توان‌های ۱تا n ظاهر خواهند شد و برای محاسبه‌ی درایه‌های مختلف بکار گرفته خواهندشد، از آنجایی توان‌های ۱ تا n هریک از آنها را میتوان هربار با ضرب در خودش به دست آورد، الگوریتمی بازگشتی برای این محاسبه وجود دارد (که به هرم پاسکال هم معروف است. شکل۱۴)، بنابراین بهتر است است در ابتدای محاسبات هر هرم این چند جمله‌ای‌ها را حساب کنیم که کار تکراری نکرده باشیم.



شکل۱۴: هرم پاسکال

۶.۳ پیاده‌سازی الگوریتم

مدل چندوجهی برخی از سیارک‌های مهم را میتوان در [24] به صورت رایگان دانلود کرد. الگوریتم بدست‌آمده در قسمت‌های قبل در نرم‌افزار متلب پیاده‌سازی شده و در پیوست۲ موجود است. توسط این الگوریتم و مدل چندوجهی بد ست آمده از [24] برای سیارک‌های إرس و ایتوکاوا[26] محا سبه شده و در جداول صفحه‌های بعد آمده است. نتایج برای دو مورد اول با [17] و [20] مطابقت داشته است. مدل چندوجهی سیارک ایتوکاوا هم در شکل۱۵ آمده است.



شکل۱۵: مدل چندوجهی مثلثی سیارک ایتوکاوا

[26] Itokawa

Itokawa	$R_{\oplus} = 1$		
n	m	C_{nm}	S_{nm}
0	0	1	0
1	0	-0.000107	0
1	1	0.000358	0.000035
2	0	-0.008620	0
2	1	0.000025	0.000013
2	2	0.003746	-0.000368

ضرایب بسط هارمونیک محاسبه شد برای سیارک ایتوکاوا

Eros					$R_{\oplus} = 6$			
n	m	C_{nm}	S_{nm}		n	m	C_{nm}	S_{nm}
0	0	1	0		3	2	0.001783	-0.000727
1	0	0.000042	0		3	3	-0.010410	-0.012266
1	1	-0.000011	0.000001		4	0	0.013040	**0**
2	0	-0.052810	0		4	1	-0.000152	0.000142
2	1	0.000055	-0.000009		4	2	-0.017583	0.004661
2	2	0.082957	-0.028343		4	3	-0.000271	-0.000135
3	0	-0.001432	0		4	4	0.017555	-0.009195
3	1	0.003988	0.003421					

ضرایب بسط هارمونیک محاسبه شد برای سیارک إرس

۴ استخراج تابع پتانسیل و میدان گرانشی با روش چندوجهی‌ها

در این قسمت همه‌ی مطالب از [25] گرفته‌شده‌است. و نیز این روش به خصوص برای چندوجهی با وجه‌های مثلثی در زیر خواهد آمد.

۱.۴ روابط تحلیلی برای محاسبه‌ی میدان نیرویی به روش چندوجهی‌ها

رابطه‌ی تابع پتانسیل گرانشی و نیز میدان گرانشی برای جسمی چندوجهی، با تابع پتانسیل یکنواخت، به صورت دقیق به شکل تحلیلی زیر بدست‌می‌آیند:

$$U[\boldsymbol{r}] = \frac{1}{2} G\rho \sum_{e \in edges} \boldsymbol{r}_e \cdot \boldsymbol{E}_e \cdot \boldsymbol{r}_e \; L_e - \frac{1}{2} G\rho \sum_{f \in faces} \boldsymbol{r}_f \cdot \boldsymbol{F}_f \cdot \boldsymbol{r}_f \; \omega_f \quad (۱.۴)$$

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}] = -G\rho \sum_{e \in edges} \boldsymbol{r}_e \cdot \boldsymbol{E}_e \; L_e + G\rho \sum_{f \in faces} \boldsymbol{r}_f \cdot \boldsymbol{F}_f \; \omega_f \quad (۲.۴)$$

که G و ρ در آن ثابت جهانی گرانشی و چگالی جسم هستند. زیرنویس‌های e و f به ترتیب یال و وجه را نشان می‌دهند. به هر وجه یک بردار برون‌گرای عمود برخود به نام $\widehat{\boldsymbol{n}}_f$ نسبت می‌دهیم و نیز دایاد[27] مربوط به هر وجه به صورت $\boldsymbol{F}_f = \widehat{\boldsymbol{n}}_f \, \widehat{\boldsymbol{n}}_f$ تعریف می‌شود (شکل۱۶ **Error! Reference source not found.**). نیز به هر یال یک بردار برون‌گرای $\widehat{\boldsymbol{n}}_e^f$ نسبت می‌دهیم که بردو بردار $\widehat{\boldsymbol{n}}_f$ و خود آن یال عمود باشد. برای یال متصل کننده‌ی رئوس ۱ و ۲ که مشترک بین صفحات A و B است، دایاد مربوط به یال به صورت $\boldsymbol{E}_{12} = \widehat{\boldsymbol{n}}_A \, \widehat{\boldsymbol{n}}_{12}^A + \widehat{\boldsymbol{n}}_B \, \widehat{\boldsymbol{n}}_{21}^B$ تعریف می‌شود(شکل۱۶).

r_i را بردار وصل‌کننده‌ی نقطه‌ای دلخواه از میدان گرانشی به راس $\boldsymbol{P_i}$ از چندوجهی در نظر بگیرید، طول بدون بعد مربوط به یال e به طول $\boldsymbol{e_{ij}}$ گزرنده از دو رأس $\boldsymbol{P_i}$ و $\boldsymbol{P_j}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

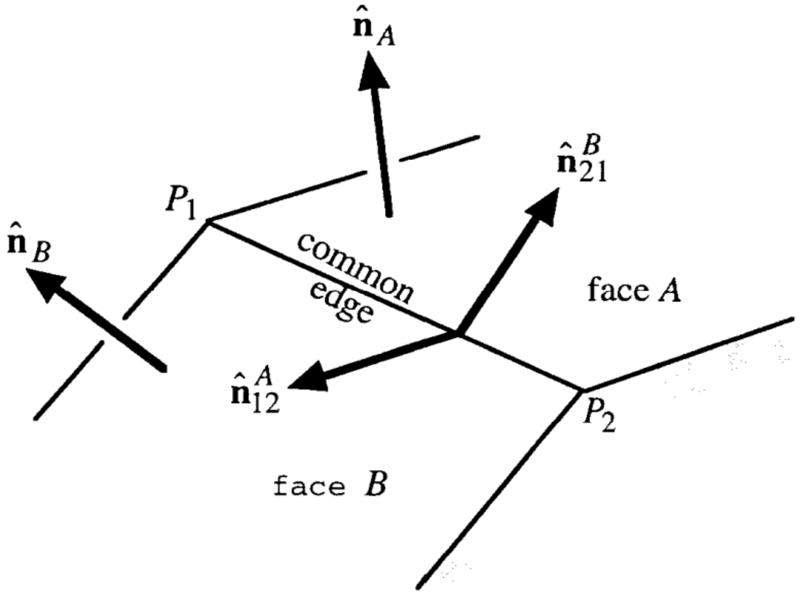
$$L_e = ln \frac{r_i + r_j + e_{ij}}{r_i + r_j + e_{ij}} \quad (۳.۴)$$

برای وجه f مثلثی که با سه رأس $\boldsymbol{P_i}$ ، $\boldsymbol{P_j}$ و $\boldsymbol{P_k}$ محدود شده‌است، عدد بدون بعد $\boldsymbol{\omega_f}$ با تعریف زیر نسبت داده‌می‌شود:

---

[27] Dyad

$$\omega_f = 2\ tan^{-1} \frac{r_i \cdot r_j \times r_k}{r_i r_j r_k + r_i(r_j \cdot r_k) + r_j(r_i \cdot r_k) + r_k(r_j \cdot r_i)} \tag{۴.۴}$$

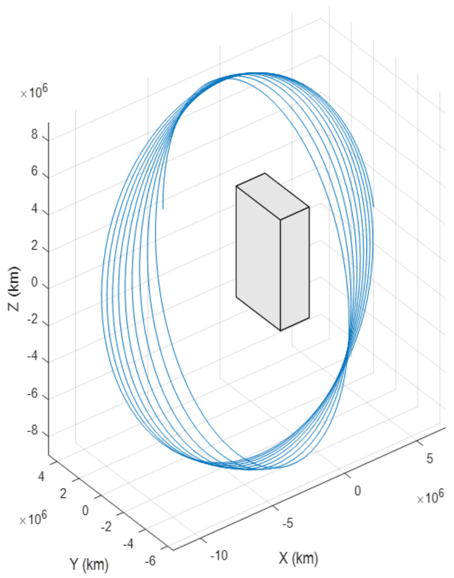


شکل۱۶: بردارهای تعریف شده در مورد چندوجهی

۲.۴ شبیه سازی با استفاده از روش چندوجهی‌ها

هرچند که معادلات (۱.۴) و (۲.۴) تحلیلی هستند ولی این معادلات به قدری پیچیده‌اند که نمیتوان در کارهای تحلیلی از آنها استفاده کرد اما برای شبیه سازی مدار بهترین روش، استفاده از همین معادلات است که در کاربردهای عملی هم برای شبیه‌سازی مدار حول سیارک‌ها از همین روش استفاده می‌شود.

برای استفاده از معادلات (۱.۴) و (۲.۴) بایستی مدل چندوجهی شده‌ی جسم را در دست داشته باشیم که در [24] این مدل برای بسیاری از سیارک‌ها و اجسام معروف داده شده و به صورت رایگان قابل دانلود است. هرچند برای شبیه سازی این معادلات هم به رایانه‌های قوی و پردازش موازی نیازمندیم. در زیر شبیه سازی یک مدار حول یک جسم مکعب مستطیل با این روش انجام گرفته است. فایل شبیه‌سازی مربوطه در پیوست۳ آمده‌است.



شکل۱۷: شبیه سازی مداری حول جسمی مکعب مستطیل شکل و با چگالی برابر با زمین

۵ معادلات سیاره‌ای گاوس

در این فصل درآمدی بسیار کوتاه بر معادلات سیاره‌ای گاوس آمده‌است که استفاده‌ی آن را در قسمت‌های بعدی این نوشـتار مجاز کند. تمام روابط و مطالب این فصـل از فصـل ۹ از [۰] و فصـل ۱۲ از [1] آورده شده‌است.

۱.۵ معادلات سیاره‌ای گاوس

حل مدار فضایی در میدان گرانش یک جسم دلخواه و با حضور عوامل نیرویی دیگری همچون نیروی پسا، تشعشعات خورشیدی، اثر سایر اجسام آسمانی و غیره از حل رابطه دیفرانسیل زیر بدست می‌آید:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{|r^3|}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{P} \tag{۱.۵}$$

که در آن $\boldsymbol{P}$ نمایشگر همه‌ی نیروهای وارده بر جسم (همه‌ی اغتشاشات) ، به جز نیروی ناشی از تابع پتانسیل‌گرانشی درجه صفرم جسم مرکزی است (تابع پتانسیل مسأله‌ی دوجسم[۲۸]) .

به وضـوع رابطه‌ی (۱.۵) دسـتگاه معادلات دیفرانسـیل، با سـه رابطه‌ی درجه۲ اسـت و بنابراین طبیعیست که بتوان آن را به صورت ۶ رابطه دیفرانسیل درجه۱ نوشت که در آنها نرخ‌های بردار سرعت و مکان، بر حسب بردار مکان و سرعت جسم، و نیز $\boldsymbol{P}$ بیان می‌شوند. با استفاده از تکنیک VOP [۲۹] می‌توان برای حل این دستگاه درجه۱ از تغییرمتغیر بهره جست [27] و دستگاه را برحسب توابعی از متغیرهای خروجی معادلات دیفرانسـیل نوشـت (توابعی از بردار سـرعت و بردار مکان) که البته تعداد این توابع بایسـتی به اندازه‌ی تعداد معادلات موجود در دسـتگاه درجه۱ بوده و نیز این توابع مسـتقل از یکدیگر باشند. طبیعیست که اولین توابعی که برای بازنویسی رابطه‌ی (۱.۵) به ذهن خطور می‌کنند، المان‌های مداری کلاسیک هستند[۳۰] که در کل این نوشتار از همین المان‌ها استفاده می‌شود. استفاده از المان‌های

[28] 2-Body problem

[29] Variation of parameters

[30] Classical orbital elements

کلاسیک بسیار سودمند به نظر می‌رسد زیرا از آنجایی که در حل مسأله‌ی دو جسم، این المان‌ها ثابتند، بایســـتی نرخ این المان‌ها تابعی از $\boldsymbol{P}$ بوده و با نبود $\boldsymbol{P}$، نرخ این المان‌ها هم صـــفر شـــوند(البته به جز آنومالی حقیقی).

معادلات جدید با استفاده از تغییر متغیری مناسب به صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(e\sin\theta\, a_r+\frac{a\left(1-e^2\right)}{r}a_s\right) \quad (۲.۵)$$

$$\frac{de}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left(\sin\theta\, a_r+\left(\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}+\cos\theta\right)a_s\right) \quad (۳.۵)$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{r\cos(\omega+\theta)}{na^2\sqrt{1-e^2}}a_w \quad (۴.۵)$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r\sin(\omega+\theta)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}a_w \quad (۵.۵)$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{nea}\left(-\cos\theta\, a_r+\left(1+\frac{r}{a(1-e^2)}\right)\sin\theta\, a_s\right)-\frac{r\sin(\omega+\theta)\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}a_w \quad (۶.۵)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}+\frac{1}{eh}\left(a(1-e^2)\cos\theta\, a_r-(r+a(1-e^2))\sin\theta\, a_s\right) \quad (۷.۵)$$

که در آن a، e، i، Ω، ω و M المان‌های کلاســـیک مداری و به ترتیب، نیم‌محور اصـــلی[۳۱]، خروج از مرکز[۳۲]، زاویه‌ی شیب[۳۳]، زاویه‌ی گره صعودی[۳۴]، زاویه‌ی حضیض[۳۵] و آنومالی حقیقی هستند، n سرعت زاویه‌ای متوسط مدار و a_r، a_w و a_s نشان‌دهندی شتاب‌های اغتشاشی در راستاهای به ترتیب، شعاعی، عمود بر صفحه‌ی مدار و جهت سوم کامل کننده‌ی این دوجهت برای تشکیل یک دستگاه راستگرد است. و h هم نشان‌دهنده‌ی اندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای[۳۶] است.

[31] Semimajor axis

[32] Eccentrisity

[33] Inclination

[34] Right ascention

[35] Argument of perapsis

[36] Angular Momentum

۲.۵ استخراج شتاب‌های اغتشاشی

در این قسمت هدف بدست‌آوردن شتاب‌های اغتشاشی مورد استفاده برای معادلات سیاره‌ای گاوس است. ابتدا رویکرد ما به مسأله و دلایل آن آورده شده و سپس به استخراج معادلات خواهیم پرداخت.

۱.۲.۵ رویکرد بررسی مدار در دستگاه چسبیده به جسم مرکزی

در اینجا برای بد ست آوردن حرکت فرض شده‌ا ست که ج سم مرکزی حول یکی از محورهای ا صلیش، چرخش یکنواخت انجام می‌دهد، که ما آن را محور **z**ها در نظر می‌گیریم. و نیز تنها اغت شا شات نا شی از عدم کرویت جسم مرکزی در نظر گرفته می‌شود. بنابرایین معادلات حرکت فضاپیما به شکل زیر نو شته می‌شود:

$$\begin{gathered}
\qquad\quad (A) \qquad (B) \qquad (C) \\
\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x} + 2\omega_T \dot{y} + {\omega_T}^2 x \\
\ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y} - 2\omega_T \dot{x} + {\omega_T}^2 y \\
\ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z}
\end{gathered} \tag{۸.۵}$$

که در آن ω_T سرعت زاویه‌ای ج سم مرکزی و R تابع پتان سیل گران شی اغت شا شات نا شی از عدم کرویت جسم مرکزی است. در اینجا $(x[t], y[t], z[t])$ که از حل معادلات (۸.۵) بدست می‌آید، مسیر پیموده شده تو سط فضاپیما در د ستگاه چ سبیده به ج سم مرکزی ا ست؛ به طور معمول این م سیر به عنوان مدار معرفی نمی‌شـود و به جای آن مسـیر حرکت فضـاپیما در دسـتگاه لخت که با رابطه‌ی (۹.۵) بدست می‌آید، مدار نامیده می‌شود، که ما آن را از این پس مدار لخت می‌نامیم.

$$\begin{pmatrix} x[t] \\ y[t] \\ z[t] \end{pmatrix}_{Orbit\ Definer} = \begin{pmatrix} cos\ \omega_T t & -sin\ \omega_T t & 0 \\ sin\ \omega_T t & cos\ \omega_T t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[t] \\ y[t] \\ z[t] \end{pmatrix} \tag{۹.۵}$$

در این نو شتار هدف ما برر سی مدار در د ستگاه چسبیده یعنی همان $(x[t], y[t], z[t])$ که از حل معادلات (۸.۵) بد ست می‌آید ا ست و این م سیر مدار تعبیر می شود. طرف چپ معادلات (۸.۵)، همچون رابطه‌ی حرکت مسأله‌ی دوجسم برای جسم‌مرکزی ثابت نو شته شده‌ا ست و هرآنچه که در طرف را ست این رابطه وجود دارد، اغتشاش تعبیر می‌شود. از اینرو مسأله مشابه این است که جسم مرکزی چرخشی

ندارد و فقط ۲جمله‌ی اغتشاشی جدید به معادلات اضافه شده‌اند. دلایل این انتخاب به صورت زیر بیان می‌شوند:

۱. در صورتی که مدار لخت را در نظر بگیریم، تابع پتانسیل گرانشی اغتشاشی R نه تنها تابع بردار مکان سیارک بلکه تابع زاویه‌چرخش سیارک ϕ نیز است که برابر است با $\omega_T(t-t_0)$ که در آن t_0 زمانی است که محور x هر دو دستگاه برهم منطبق شده اند. از آنجایی که هدف ما میانگین‌گیری از معادلات المان‌های کلاسیک مداری لحظه‌ای و بدست آوردن معادلات سکولار این المان‌ها است، اگر R که در این معادلات ظاهر می‌شود تابع دو متغیر سریع θ (آنومالی حقیقی) و ϕ باشد، میانگین‌گیری تحلیلی از المان‌های کلاسیک مداری لحظه‌ای غیرممکن خواهد بود[۳۷] مگر اینکه مسأله را از حالت کلی خارج کرده و فرض کنیم که دوره تناوب این دو متغیر اختلاف زیادی دارد به گونه‌ای که بعد از اینکه یکی از آنها یک تناوب خود را کامل می‌کند، متغیر دیگر تغییر ناچیزی کرده باشد که این روش توسط شیرز[۳۸] و هو[۳۹] در [4] به عنوان راه‌حلی برای سیارک‌هایی که سرعت چرخش آنها کند است و نیز در (*) برای سیارک‌هایی که سرعت چرخش آنها بسیار زیاد است[۴۰]، معرفی شده‌است. این در حالی است که بسیار از سیارک‌ها دارای سرعت چرخشی متوسط و در نزدیکی سرعت زاویه‌ای مدارهای نزدیک به آنها دارند[21]. یک راه‌حل دیگر روش میانگین‌گیری نیمه عددی است که در [18] و[20] آمده‌است و هرچند برای کار تحلیلی خیلی مناسب نیست.

۲. در اینجا به بررسی و طراحی مدارهایی خواهیم پرداخت که در دستگاه چسبیده، منجمد هستند و در واقع جمله‌های اغتشاشی رابطه‌ی (۸.۵) که همگی جملات سمت راست این رابطه هستند، یکدیگر را خنثی کرده و نزدیک به صفر هستند که این خود فرض کوچک بودن اغتشاشات در هنگام میانگین‌گیری از معادلات المان‌های کلاسیک مداری لحظه‌ای را ارضا می‌کند.

۳.در بسیاری از مأموریت‌های فضایی به سیارک‌ها، هدف بررسی خود سیارک با تصویر برداری از آن یا اندازه‌گیری میدان گرانشی آن است، بنابراین مدار مورد نظر بایستی در دستگاه چسبیده به جسم مرکزی طراحی شود و نه در دستگاه لخت. بنابرایین رویکرد ما به مسأله در این موارد کارا واقع خواهد شد.

[۳۷] زیرا در میانگین‌گیری، در یک دوره تناوب مدار نسبت به زمان انتگرال‌گیری می‌شود ولی دوره تناوب ϕ و θ با یکدیگر متفاوت است و نتیجه‌ی این انتگرال وابسته به دوره تناوب مدار خواهد شد.

[38] Scheeres

[39] W. Hu

[۴۰] در واقع برای سیارک‌هایی که سرعت چرخش آنها بسیار زیاد است، به نحوی اثرات وابسته به طول جغرافیایی از بین رفته و تنها اثرات اغتشاشات زونال باقی میماند.

۲.۲.۵ مدل اغتشاشی

با مشاهده‌ی رابطه‌ی (۸.۵) سه جمله‌ی اغتشاشی را در آن به تفکیک جدا می‌کنیم و از آنجایی که معادلات سیاره‌ای گاوس نسبت به شتاب‌های اغتشاشی خطی هستند، این معادلات را برای هرکدام از این اغتشاش‌ها به صورت جداگانه نوشته و در آخر اثرات همه‌ی آنهارا با هم جمع خواهیم کرد.

باید در نظر داشت که معادلات سیاره‌ای گاوس برحسب شتاب‌های اغتشاشی در دستگاه rsw است و نیز این شتاب‌ها بایستی برحسب المان‌های مداری مورد استفاده، که در اینجا همان المان‌های کلاسیک هستند، نوشته شوند. بنابراین فرایند تبدیل شتاب‌های اغتشاشی طی دو مرحله انجام می‌شود:

- نوشتن شتاب اغتشاش برحسب المان‌های کلاسیک مداری
- تصویر کردن شتاب اغتشاشی بر راستاهای دستگاه rsw

تمام محاسبات تحلیلی این قسمت توسط نرم‌افزار Mathematica انجام شده‌است و فایل آن در پیوست۱ آمده‌است.

A پتانسیل گرانشی اغتشاشی جسم مرکزی

در ابتدا جمله‌ی اول سمت راست رابطه‌ی (۸.۵) که با A نشان داده شده‌است. برای استفاده در معادلات سیاره‌ای گاوس فرمول بندی می شود. برای یکسان بودن نمادهای مورد استفاده با نمادهای که به طور عموم در این شاخه مورد استفاده می شوند از شکلی از تابع پتانسیل اغتشاشی درجه و مرتبه ۲ استفاده می‌شود که با روش هماهنگ‌های کروی[41] در [0] آمده‌است (۱۰.۵). استفاده از تابع پتانسیل بدست آمده در فصل۲ نیز به همین نتایج منجر می‌شود که توسط نویسنده بررسی شده‌است.

$$R_{20+22} = \frac{\mu}{r^3}\left(C_{20}\left(1-\frac{3}{2}cos^2\delta\right) + 3C_{22}cos^2\delta\,(cos^2\lambda - sin^2\lambda)\right) \quad (۱۰.۵)$$

که در آن δ و λ به ترتیب برابر با عرض و طول جغرافیایی هستند. δ و λ را می‌توان با معادلات بر حسب المان‌های کلاسیک مداری نوشت[0]:

$$sin\,\delta = sin\,i\,sin\,u \quad (۱۱.۵)$$

$$tan\,\lambda = \frac{sin\,\Omega_R\,cos\,u + cos\,\Omega_R\,sin\,u\,cos\,i}{cos\,\Omega_R\,cos\,u - sin\,\Omega_R\,sin\,u\,cos\,i} \quad (۱۲.۵)$$

[41] Spherica harmonics

که در آن $u = \omega + \theta$ و Ω_R طول جغرافیایی گره صعودی است و چون در اینجا به دلیل رویکرد ما جسم مرکزی چرخشی ندارد، برابر با همان Ω است. ما برای نشان دادن تابع پتانسیل گرانشی از نمادهای [4] استفاده می‌کنیم و ضرایب بسط هارمونیک را برحسب ممان‌های لختی جسم مرکزی محاسبه می‌کنیم:

$$C_{20} = \frac{-1}{2}(2I_{zz} - I_{xx} - I_{yy}) \qquad (۱۳.۵)$$

$$C_{22} = \frac{1}{4}(I_{yy} - I_{xx}) \qquad (۱۴.۵)$$

که در آنها I_{xx}، I_{yy} و I_{zz} مقادیر روی قطر ماتریس لختی جسم مرکزی هستند[۴۲]. دو متغیر کمکی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma = \frac{I_{yy}-I_{xx}}{I_{zz}-I_{xx}} \qquad (۱۵.۵)$$

$$B = \frac{3n}{2p^2}(I_{zz} - I_{xx}) \qquad (۱۶.۵)$$

که در آنها $p = a(1 - e^2)$ است. با جایگزاری معادلات (۱۱.۵) تا (۱۶.۵) در (۱۰.۵) به شکل زیر برای تابع پتانسیل گرانشی اغتشاشی می‌رسیم:

$$R = \frac{1}{6r^3}a^3Bnp^2(2(-2+\sigma) + 3\, cos\, u^2(2 - \sigma + \sigma\, cos\, 2\Omega) \qquad (۱۷.۵)$$
$$-3\, cos\, i^2\,(-2 + \sigma + \sigma\, cos\, 2\Omega)\, sin\, u^2 - 3\sigma\, cos\, i\, sin\, 2u\, sin\, 2\Omega)$$

برای بدست آوردن شتاب‌های اغتشاشی با توجه به [0] از روابط زیر استفاده کرده و عبارات شتاب‌هاب اغتشاشی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$a_r = \partial_r R \qquad (۱۸.۵)$$

$$= \frac{a^3Bnp^2}{8r^4}\,(-(1 + 3cos2u)(2 - \sigma + 3\sigma cos\, 2\Omega) + 6cos\, 2i(-2 + \sigma + \sigma cos\, 2\Omega)sin^2\, u + 12\sigma cos\, i\, sin\, 2u\, sin\, 2\Omega)$$

$$a_s = \frac{1}{r}\partial_u R \qquad (۱۹.۵)$$

$$-\frac{a^3Bnp^2}{r^4}(\sin 2u + co\, s\, u \sin u\,(cos^2 i(-2 + \sigma + \sigma \cos 2\Omega)$$
$$-2\sigma\, sin^2\,\ \Omega) + \sigma\, cos\, i\, cos\, 2u\, sin\, 2\Omega)$$

---

[۴۲] در واقع ماتریس لختی جسم به دلیل اینکه محورهای مختصات، منطبق بر محورهای اصلی جسم مرکزی انتخاب شده‌اند، ماتریسی قطری است.

$$a_w = \frac{1}{r\, sin\, u}\partial_i R \tag{۲۰.۵}$$

$$= \frac{a^3 Bnp^2}{r^4} \sin i\, sin\, u(cos\, i(-2+\sigma+\sigma\cos 2\Omega\,) + \sigma \cot u\, \sin 2\Omega\,)$$

B شتاب اغتشاشی کوریولیس

دومین جمله‌ی معادلات (۸.۵) که با B نشان داده شده‌است، جمله‌ی ناشی از شتاب کوریولیس است که به دلیل نوشتن معادلات در دستگاه نالخت تولید شده‌است. همانطور که در قسمت ۲.۲.۵ گفته شد، برای نوشتن این شتاب اغتشاشی به‌گونه‌ای که برای استفاده در معادلات سیاره‌ای گاوس مناسب باشد، ابتدا بایستی $2\omega_T\dot{y}$ و $-2\omega_T\dot{x}$ که شتاب در راستاهای x و y هستند (a_x و a_y) را ، برحسب المان‌های مداری کلاسیک نوشته و سپس طی دورانی a_x و a_y را به شتاب در دستگاه rsw تبدیل کنیم (a_r، a_w و a_s).

از دو ماتریس دوران زیر که به ترتیب دوران از دستگاه pqw[۴۳] به xyz و دوران از دستگاه xyz به rsw هستند در این قسمت و قسمت بعدی استفاده می‌شود.

$$R_{pqw2xyz} = \tag{۲۱.۵}$$

$$\begin{pmatrix} cos\,\Omega & -sin\,\Omega & 0\\ sin\,\Omega & cos\,\Omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\,i & -sin\,i\\ 0 & sin\,i & cos\,i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\,\omega & -sin\,\omega & 0\\ sin\,\omega & cos\,\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$R_{xyz2rsw} = \tag{۲۲.۵}$$

$$\begin{pmatrix} cos\,u & sin\,u & 0\\ -sin\,u & cos\,u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\,i & sin\,i\\ 0 & -sin\,i & cos\,i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\,\Omega & sin\,\Omega & 0\\ -sin\,\Omega & cos\,\Omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

برای شروع از بردار سرعت مدار در دستگاه pqw که در [1] آمده شروع میکنیم.

$$V_{pqw} = \frac{\mu}{h}\begin{pmatrix} -sin\,\theta\\ e+cos\,\theta\\ 0\end{pmatrix} \tag{۲۳.۵}$$

برای محاسبه‌ی $\dot{y}$ و $\dot{x}$ ، $R_{pqw2xyz}$ را باید در V_{pqw} اثر بدهیم:

---

[43] Perifocal frame

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = R_{pqw2xyz} . V_{pqw} \tag{۲۴.۵}$$

سپس بایستی $R_{xyz2rsw}$ را در a_x و a_y اثر بدهیم:

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_s \\ a_w \end{pmatrix} = R_{xyz2rsw} \begin{pmatrix} 2\omega_T \dot{y} \\ -2\omega_T \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۲۵.۵}$$

حاصل محاسبات بالا به شکل زیر است:

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_s \\ a_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\, a\, n\, \omega_T \cos i (1 + e \cos \theta)}{\sqrt{1-e^2}} \\ -\frac{2\, a\, e\, n\, \omega_T \cos i \sin \theta}{\sqrt{1-e^2}} \\ -\frac{2\, a\, n\, \omega_T \sin i (e \sin \omega + \sin u)}{\sqrt{1-e^2}} \end{pmatrix} \tag{۲۶.۵}$$

B شتاب اغتشاشی مرکزگرا

سومین جمله‌ی معادلات (۸.۵) که با C نشان داده شده‌است، جمله‌ی ناشی از شتاب مرکزگرا است که به دلیل نوشتن معادلات در دستگاه نالخت تولید شده‌است. روند محاسبات همانند قسمت قبل است با این تفاوت که در این جا $a_x = {\omega_T}^2 x$ و $a_y = {\omega_T}^2 y$ اســت و بایســتی از بردار مکان در دســتگاه pqw استفاده کنیم:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {R_{rsw2xyz}}^{-1} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۲۷.۵}$$

سپس بایستی $R_{xyz2rsw}$ را در a_x و a_y اثر بدهیم:

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_s \\ a_w \end{pmatrix} = R_{xyz2rsw} \begin{pmatrix} \omega_T^2 x \\ \omega_T^2 y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۲۸.۵}$$

حاصل محاسبات بالا به شکل زیر است:

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_s \\ a_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r{\omega_T}^2 (\cos u^2 + \cos^2 i \sin^2 u) \\ -\frac{1}{2} r{\omega_T}^2 \sin^2 i \sin 2u \\ -\frac{1}{2} r{\omega_T}^2 \sin 2i \sin u \end{pmatrix} \tag{۲۹.۵}$$

۶ طراحی مدار با معادلات سکولار

بعد از جایگزاری شـتاب‌های اغتشـاشـی بدسـت آمده در قسـمت‌های قبلی ((۱۸.۵)، (۱۹.۵)، (۲۰.۵)، (۲۶.۵) و (۲۹.۵)) در معادلات سـیاره‌ای گاوس (۲.۵) تا (۷.۵)، از معادلات نرخ‌های لحظه‌ای المان‌های مداری، نسبت به زمان در یک تناوب مداری، با رابطه‌ی زیر میانگین‌گیری می‌شود:

$$\dot{S} = \frac{1}{2T}\int_0^{2\pi} \dot{S}_{osculating}\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{n(1+e\cos\theta)^2}d\theta \qquad (۱.۶)$$

که در آن T دوره تناوب مغشـوش نشـده‌ی جسـم اسـت و $\dot{S}_{osculating}$ نمایشـگر نرخ لحظه‌ای یک المان مداری و $\dot{S}$ نرخ میانگین یا سکولار این نرخ‌لحظه‌ای است.

همانطور که قبلا هم به آن اشاره شد، برای این میانگین‌گیری نیازی نیست که فرض کنیم که سرعت زاویه‌ای جسم مرکزی بسیار کمتر از سرعت زاویه‌ای مدار است، اگرچه همیشه هنگام میانگین‌گیری از المان‌های مداری نیاز است که فرض کنیم که همه‌ی المان‌های مداری به جز آنومالی‌حقیقی در طول یک تناوب مدار تغییر چندانی نمیکنند. این فرض معادل این شرط است که اغتشاشات مداری باید کوچک باشند. از آنجایی که شتاب‌های اغتشاشی ما با سرعت زاویه‌ای جسم مرکزی رابطه مستقیم دارند، شرط بالا به ما تحمیل می‌کند که سرعت زاویه‌ای جسم مرکزی کوچک باشد. پس از میانگین‌گیری معادلات به شکل زیر درمی‌آیند:

$$\dot{a} = 0 \qquad (۲.۶)$$

$$\dot{e} = 0 \qquad (۳.۶)$$

$$\dot{i} = \frac{B}{2}\sigma\sin i\sin 2\Omega \qquad (۴.۶)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{8}B(6-3\sigma+\sigma\cos 2\Omega-5\cos 2i(-2+\sigma+\sigma\cos 2\Omega)) \qquad (۵.۶)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{2}B\cos i(-2+\sigma+\sigma\cos 2\Omega)-\omega_T \qquad (۶.۶)$$

$$\dot{\theta} = n+\frac{1}{8}B(-2+\sigma+3(-2+\sigma)\cos 2i-6\sigma\cos 2\Omega\sin^2 i)-\omega_T\cos i \qquad (۷.۶)$$

با مشاهده‌ی روابط بالا متوجه میشویم که جمله‌های ناشی از شتاب‌های اغتشاشی (جمله‌های شامل ω_T) تنها به صورت $-\omega_T$ در رابطه‌ی نرخ زاویه‌ی گره صعودی و $-\omega_T\ cos\ i$ در رابطه‌ی نرخ آنومالی حقیقی مشاهده می‌شود که خیلی متقاعد کننده و مطلوب به نظر میرسد زیرا:

- بدیهی است که در صورت عدم وجود اغتشاشات ناشی از جسم مرکزی، شتاب‌های اغتشاشی ناشی از نوشته شدن معادلات حرکت در دستگاه چسبیده به سیارک، تنها میتوانند تغییرات تناوبی در المان‌های مداری به وجود آورند، مگر در آنومالی حقیقی و زاویه‌ی گره صعودی. زیرا مدار لخت حل مسأله‌ی دوجسم است و تمام المان‌های مداری آن به جز آنومالی حقیقی ثابت است؛ هنگامی یک دور از مدار پیموده می‌شود و به محل قبلیش باز می‌گردد، تنها چیزی که عوض شده، زاویه‌ی چرخش سیارک است که هیچ کدام از المان‌های مداری، مدارچسبیده به جسم نیز به دلیل کروی بودن جسم، این تغییر را احساس نمیکنند مگر آنومالی حقیقی و زاویه‌ی گره صعودی. بنابرایین نرخ المان‌های مداری جز این دو، نباید دارای جمله‌ای سکولار باشد.
- باز با درنظر گرفتن یک جسم کروی؛ هنگامی که فضاپیما از از خط استوای سیارک برای بار دوم رد می شود، زاویه‌ی گره شمالی به اندازه‌ی $\omega_T\ T$ چرخیده است، بنابراین نرخ آن برابر با ω_T خواهد بود که با رابطه‌ی (۶.۶) همخوانی دارد.
- برای تصور اثر جمله‌ی $\omega_T\ cos\ i$ برروی آنومالی حقیقی بیایید فرض کنیم که جسم مرکزی کروی، مدار استوایی و سرعت زاویه‌ای متوسط مداری برابر با $2\omega_T$ است است. بنابراین وقتی که مدار لخت دو تناوب را کامل می‌کند، مدار چسبیده یک تناوب را کامل می‌کند و بنابرایین میانگین نرخ سکولار آنومالی حقیق آن (سرعت زاویه‌ای متوسط مداری) بایستی نصف مدار لخت باشد که این نتیجه توسط رابطه‌ی (۷.۶) هم پیشبینی می‌شود. حال تمام فرضیات قبل را در نظر بگیرید با این تفاوت که مدار قطبی باشد؛ واضح است که سرعت متوسط مداری مدار لخت و مدار چسبیده نباید فرقی داشته باشند که این نتیجه هم با رابطه‌ی (۷.۶) تطابق دارد.

۱.۶ حل تقریبی مدار

یک مدار چسبیده به جسم مرکزی که تقریبا یخ زده است را حول یک جسم مرکزی با چرخش کند در نظر گرفته‌ایم. شرایط اولیه این مدار و ثوابت مربوط به جسم مرکزی در جدول [3] آمده‌است. این مدار به سه طریق شبیه سازی شده. فایل‌های شبیه‌سازی در پیوست۴ آمده است.

۱. روش کاول[۴۴] که دقیق است.
۲. روشـــی مبتنی بر [4] که فروض آن در ۱.۲.۵ توضـــیح داده شـــد. با این روش معادلات ســـکولار حرکت در دستگاه لخت حل می‌شوند که ما این روش را روش سیارک‌های کندچرخ می‌نامیم
۳. معادلات ســـکولار (۲.۶) تا (۷.۶) که در این روش حل در دســـتگاه چســـبیده به جســـم صـــورت می‌گیرد.

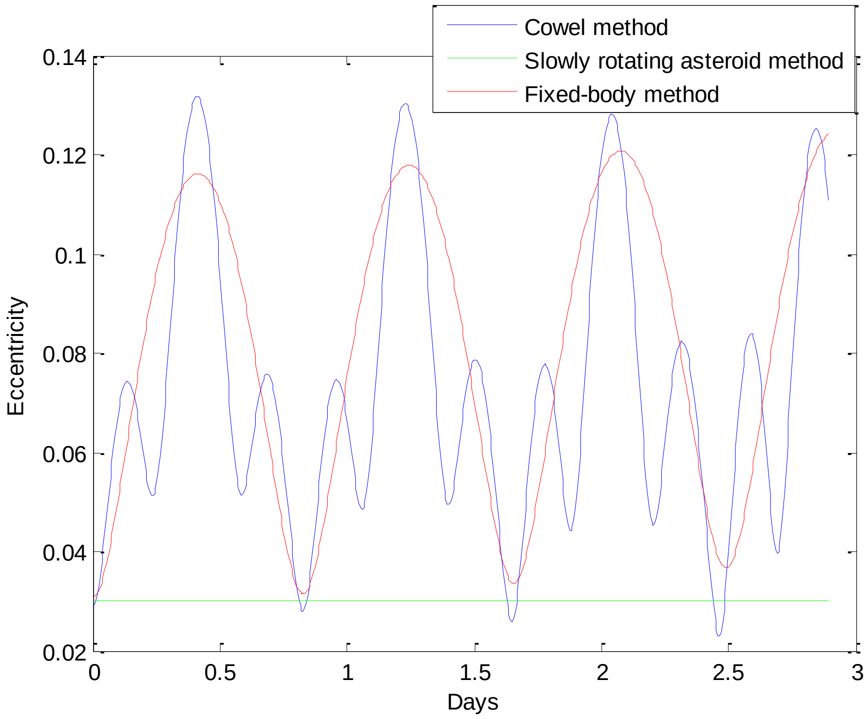
ســـپس بردارهای مکان و ســـرعت روش۳ هم به دســـتگاه لخت انتقال داده شـــده و المان‌های مداری پیشبینی شده توسط هرکدام از این ۳ روش در (رسم توضیحی ۷ و ۸ و ۹) کشیده شده‌است. به خوبی مشاهده می شود که هر دو روش ۲و۳ رفتار سکولار روش دقیق۱ را به خوبی دنبال می‌کنند ولی روش۳ رفتار تناوب کوتاه روش۱ را هم دنبال می‌کند که بسیار جالب بوده و به این دلیل است که مدار چسبیده تقریبا مشـابه حلی از مسـأله‌ی دوجســم اســت و هنگامی که برای شـبیه سـازی مدار چسـبیده از روابط سکولار استفاده شده، اطلاعاتی از مدار هدر نرفته است، در صورتی که روش۲ مدار را در دستگاه لخت با روابط سکولار شبیه سازی می‌کند، که به دلیل وجود نوسانات تناوب کوتاه در المان‌های مدار لخت، این روش، ناچار به حذف این نوسانات خواهد بود.

روش۳ هم خود مشـــکلاتی دارد و از مهمترین آن این اســـت که در واقع این روش تنها برای اینچنین مدارهایی که در دســـتگاه چســـبیده تقریبا ثابتند تقریب خوبی ارائه می‌دهد و نیز در صـــورتی که ســـرعت جسم مرکزی زیاد باشد، چون این روش این سرعت را به مدار نسبت می‌دهد، امکان دارد که خروج از مرکز مدار بیش از ۱ شـــده و در اینصـــورت معادلات ســـیاره‌ای گاوس تکین می‌شـــوند و روابط ســـکولار استخراج شده اشتباه خواهند بود.

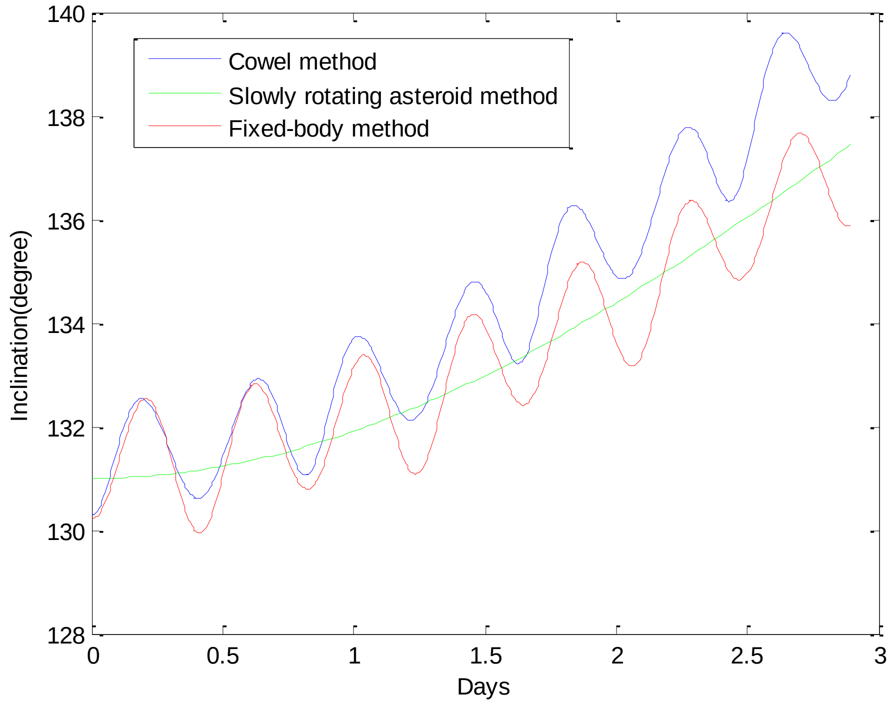
[44] Cowel

Orbit1 initial conditions and body properties

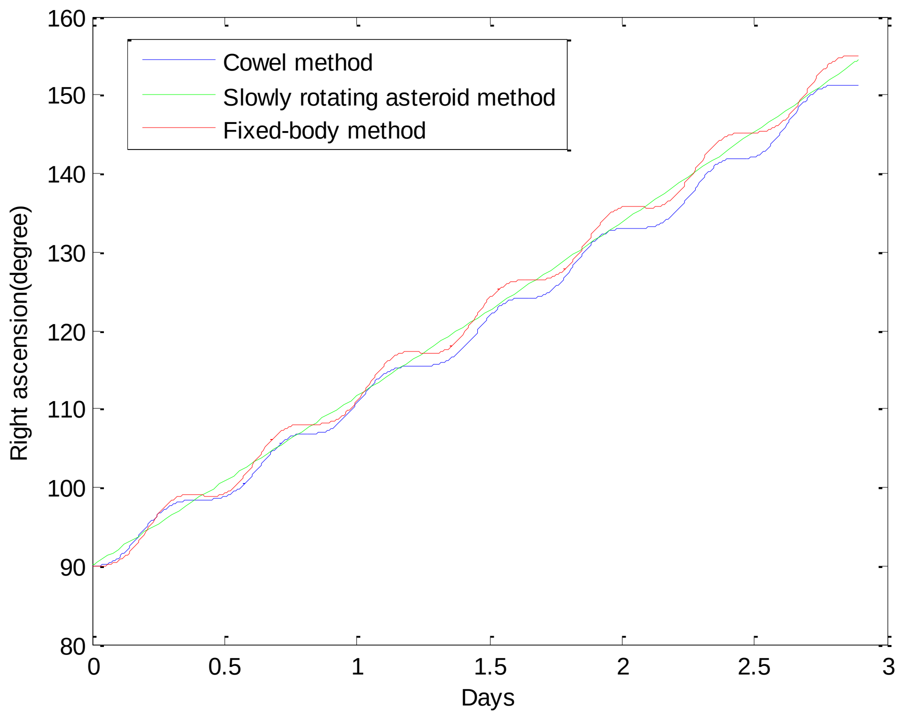
Parameters	Value	Parameters	Value
m_{body}	$5 \times 10^{12} kg$	a	$3434\ m$
ω_T	$5 \times 10^{-6} \frac{rad}{s}$	e	0.04
C_{20}	$-2 \times 10^5\ m^2$	i	$132.5\ d$
C_{22}	$2 \times 10^5\ m^2$	Ω	$90\ deg$
		ω	0



شکل۱۸: خروج از مرکز مدار لخت



شکل۱۹: زاویه‌ی شیب مدار لخت



شکل۲۰: زاویه‌ی گره صعودی مدار لخت

۲.۶ طراحی مدار منجمد چسبیده به جسم

در اینجا هدف پیدا کردن مدارهای منجمد در دستگاه چسبیده به جسم، و بررسی شرایط امکان اینچنین مدارهایی با استفاده از معادلات سکولار حرکت که در فصل قبل به دست‌آمد است. طراحی مدارهای نیمه‌منجمد (همه چیز به جز زاویه‌ی حضیض ثابت است) پیرامون جسم با میدان گرانشی درجه و مرتبه۲ در [4] با استفاده از روش سیارک‌های کند چرخ انجام شده‌است ولی این طراحی برای مدارهایی که خروج از مرکز دارند به شدت ناپایدار است و در این گونه موارد بایستی زاویه‌ی حضیض را هم ثابت کرد که در اینجا به آن پرداخته می‌شود.

بایستی معادلات (۴.۶)، (۵.۶) و (۶.۶) را برابر با صفر قرار دهیم. دو متغیر کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$X = \frac{I_{xx}}{I_{zz}} \quad , \quad Y = \frac{I_{yy}}{I_{zz}} \tag{۸.۶}$$

تثبیت زاویه‌ی شیب

با قرار دادن رابطه‌ی (۴.۶) برابر با صفر یا بایستی $i = 0$ که مربوط به مدارهای استوایی است که مورد بحث ما نیست و یا اینکه $\Omega = 0, \pi$ یا $\Omega = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. همچنین از آنجایی که فرضی در مورد محورهای x و y جسم مرکزی صورت نگرفته‌است بررسی $\Omega = 0, \pi$ بدون کاسته شدن از کلیت مسأله معادل با $\Omega = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ نیز است. بنابراین:

$$\Omega = 0 \ \text{یا}\ \pi \tag{۹.۶}$$

تثبیت زاویه‌ی حضیض و زاویه‌ی گره صعودی

با قرار دادن رابطه‌ی (۵.۶) و (۶.۶) برابر با صفر و جایگزاری شرط (۹.۶) زاویه‌ی شیب و نیم محور اصلی با روابط زیر مقید می‌شوند:

$$i = cos^{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{\sigma+1}{5}}\right) \tag{۱۰.۶}$$

$$a = \left(-\frac{3(X-1)^2\sqrt{\mu}\, I_{zz}}{(1-e^2)^2(X-Y)\omega_T}\right)^{\frac{2}{7}} \tag{۱۱.۶}$$

رابطه‌ی (۱۰.۶) نشان می‌دهد برای وجود مدار منجمدی چسبیده به جسم، بایستی جسم مرکزی خاصیت زیر را داشته باشد:

$$-1 < \sigma < 4 \tag{۱۲.۶}$$

از آنجایی که در تعویض محور x و y آزادی عمل داریم، شـــرط بالا معادل برقراری تنها یکی از دوشرط پایین است:

$$Y < \frac{5}{2}|X-1| - \frac{1}{2}X + \frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad X < \frac{5}{2}|Y-1| - \frac{1}{2}Y + \frac{3}{2} \tag{۱۳.۶}$$

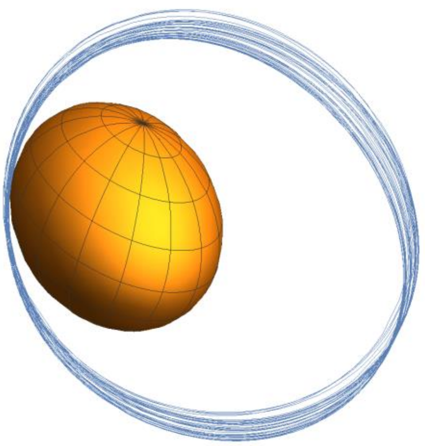
اگر که برای جسمی یکی از این شرایط برقرار با شد این جسم دو مدار چسبیده منجمد و اگر هردو شرط برقرار باشد چهار مدار چسبیده منجمد خواهد داشت.

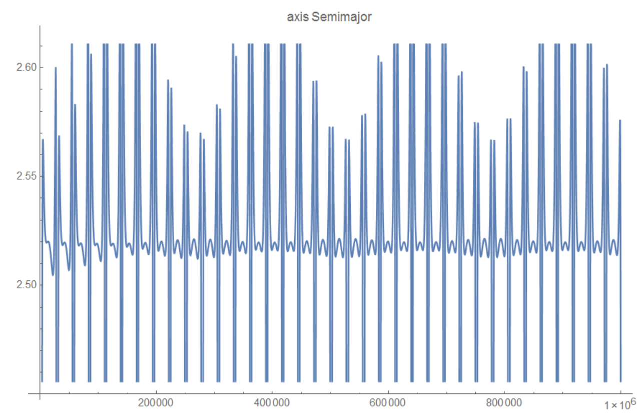
بسیاری اوقات سیارک قادر به ارضای شرط (۱۳.۶) خواهد بود ولی نیم محور اصلی تعیین شده با رابطه‌ی (۱۱.۶) باعث برخورد مدار بدست‌آمده با سطح سیارک می‌شود. به همین دلیل برای بررسی این شرط به طور تقریبی، سیارک را بیضی‌گونی با محورهای R در جهت z و محورهای αR و βR در جهات x و y در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که α و β میتوانند هرمقداری به خود بگیرند و بنابرایین چیزی از کلیت مسأله کاسته نمی‌شود. شرط اینکه نیم محور اصلی مدار از محور z بیضی‌گون بزرگتر باشد با توجه به رابطه‌ی (۱۱.۶) به صورت زیر بدست می‌آید:

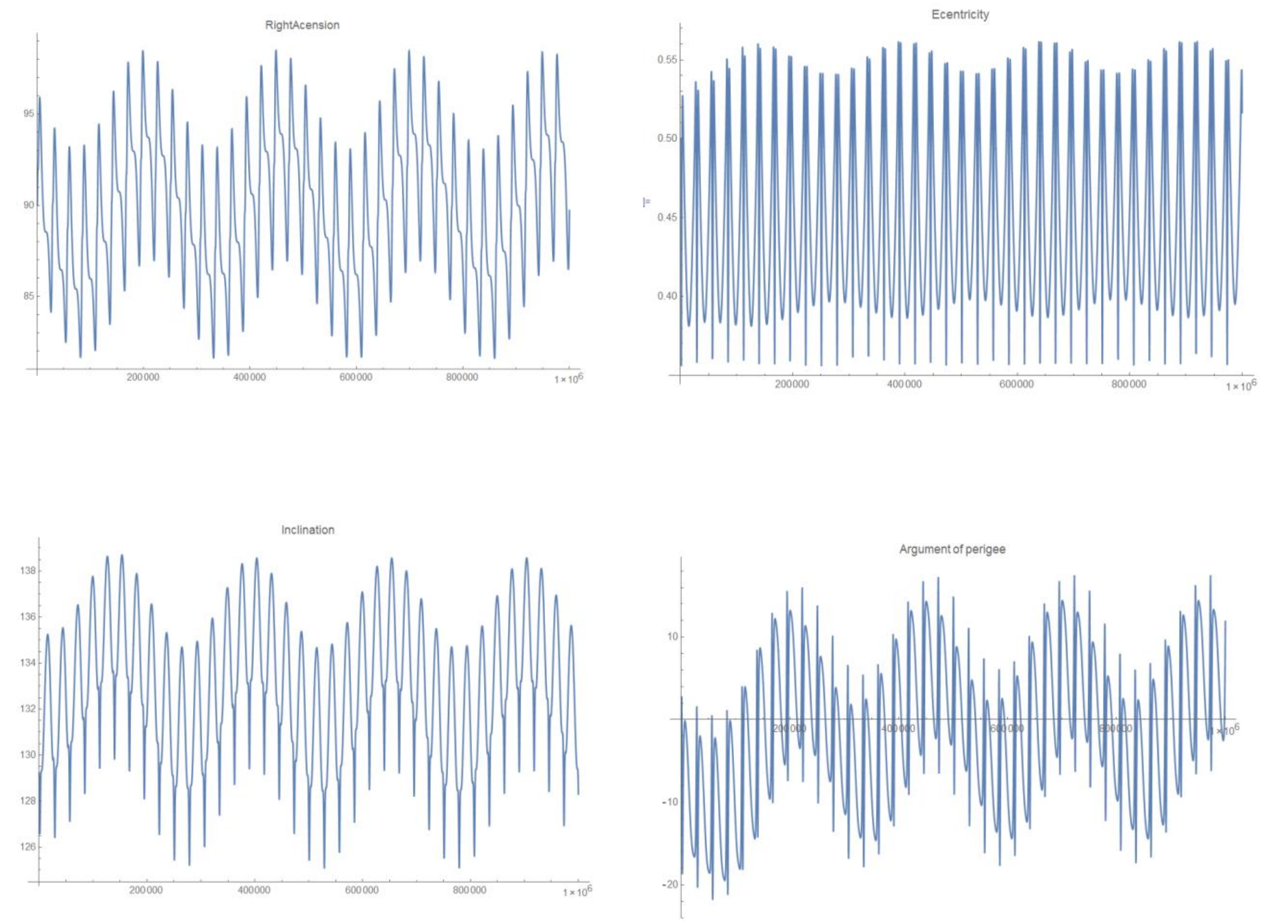
$$\frac{a}{R} = \left(\sqrt{\frac{3\pi G\alpha\beta\rho}{125}(1+\sigma)}\ \frac{(1-\alpha^2)}{\omega_T}\right)^{\frac{2}{7}} (1-e^2)^{\frac{-4}{7}} > 1 \tag{۱۴.۶}$$

بدیهی است که این شرط لازم و نه کافی است.

در آخر، مسیر و المان‌های کلاسیک مداری یک مدار چسبیده منجمد با خروج از مرکز بالا (حدود ۰,۵) که با روش بالا طراحی شده در ادامه آمده‌است.







شکل۲۱: بالا چپ: مسیر مدار در دستگاه چسبیده. بالا راست: نیم محور اصلی مدار. وسط چپ: زاویه‌ی گره صعودی. وسط راست: خروج از مرکز مدار. پایین چپ زاویه‌ی شیب مدار. پایین راست: زاویه‌ی حضیض مدار

۷ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

ازدستاوردهای این پروژه میتوان به الگوریتم‌های برای محاسبه‌ی ضرایب بسط هارمونیک به کمک مدل چندوجهی جسم، الگوریتم حل مدار به کمک روش چندوجهی‌ها، بدست‌آوردن روشی جدید برای میانگین‌گیری معادلات نرخ‌های لحظه‌ای المان‌های مداری در یک محیط گرانشی مرتبه و درجه۲ با سرعت زاویه‌ای یکنواخت، و طراحی مدارهای منجمد جدید با روش جدید نام برد.

نکته‌ی قابل ذکری که وجود دارد و میتواند زمینه‌ی تحقیقات بعدی در این باره شود، تحقیق در مورده المان‌های مداری میباشد که نه تنها تابع بردار سرعت و بردار مکان میباشند بلکه به نوعی به زمان هم وابسته‌اند. این المان‌ها میتوانند در بسیاری از موارد سبب سادگی معادلات نرخ‌المان‌های مداری شوند همانطوری که در مسأله‌ای که در فصل۵ به آن برخوردیم و مدار را در دستگاه چسبیده مشاهده کردیم، در واقع نوعی جدید از المان‌های مداری تعریف کرده که وابستگی آنها به زمان به گونه‌ای است که زاویه‌ی چرخش سیارک از معادلات نرخ المان‌های مداری حذف میشود. بنابرایین جا دارد که تئوری کلی‌تری در باب المان‌های مداری وابسته به زمان ارائه شود.

پایان

علی سیاه‌کمری

تیر ۱۳۹۴

منابع و مراجع

[۰] Vallado, David A., and Wayne D. McClain. *Fundamentals of astrodynamics and applications*. Vol. 12. Springer Science & Business Media, 2001.

[۱] Curtis, Howard. *Orbital mechanics for engineering students*. Butterworth-Heinemann, 2013.

[۲] Scheeres, Daniel Jay. "Dynamics about uniformly rotating triaxial ellipsoids: applications to asteroids." *Icarus* 110.2 (1994): 225-238.

[۳] Scheeres, D. J. "Satellite dynamics about asteroids." *Advances in the Astronautical Sciences.* 292 (1994).

[۴] Hu, Weiduo. *Orbital motion in uniformly rotating second degree and order gravity fields*. 2002.

[۵] Takahashi, Yu. "Gravity Field Characterization around Small Bodies." (2013).

[۶] Scheeres, D. J. "Orbit mechanics about small asteroids." *20th International Symposium on Space Flight Dynamics*. 2007.

[۷] Scheeres, D. J. "Orbital mechanics about small bodies." *Acta Astronautica* 72 (2012): 1-14.

[۸] Hu, Weiduo, and Daniel J. Scheeres. "Spacecraft motion about slowly rotating asteroids." *Journal of guidance, control, and dynamics* 25.4 (2002): 765-775.

[۹] Scheeres, Daniel J., and W. Hu. "Secular motion in a 2nd degree and order-gravity field with no rotation." *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*79.3 (2001): 183-200.

[۱۰] Rossi, A., F. Marzari, and P. Farinella. "Orbital evolution around irregular bodies." *Earth, planets and space* 51.11 (1999): 1173-1180.

[۱۱] Mission design through averaging of perturbed Keplerian systems the paradigm of an Enceladus orbiter

[۱۲] Scheeres, D. J. "Satellite Dynamics about small bodies: Averaged Solar Radiation Pressure Effects1." *Ann Arbor* 1001 (1999): 48109-2140.

[۱۳] Morrow, Esther, D. J. Scheeres, and Dan Lubin. "Solar sail orbit operations at asteroids." *Journal of Spacecraft and Rockets* 38.2 (2001): 279-286.

[۱۴] Lantukh, Demyan, Ryan P. Russell, and Stephen Broschart. "Heliotropic orbits at oblate asteroids: balancing solar radiation pressure and J2 perturbations."*Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 121.2 (2015): 171-190.

[۱۵] Scheeres, Daniel J., et al. "Orbits close to asteroid 4769 Castalia." *Icarus*121.1 (1996): 67-87.

[۱۶] Hu, W., and Daniel Jay Scheeres. "Numerical determination of stability regions for orbital motion in uniformly rotating second degree and order gravity fields."*Planetary and Space Science* 52.8 (2004): 685-692.

[۱۷] Scheeres, D. J., et al. "The actual dynamical environment about Itokawa."*AIAA paper* 6661 (2006).

[۱۸] Scheeres, D. J., J. K. Miller, and D. K. Yeomans. "The orbital dynamics environment of 433 Eros: A case study for future asteroid missions."*InterPlanetary Network Progress Report* 42.152 (2003): 1-26.

[۱۹] Scheeres, D. J., B. G. Williams, and J. K. Miller. "Evaluation of the dynamic environment of an asteroid: Applications to 433 Eros." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 23.3 (2000): 466-475.

[۲۰] Scheeres, D. J., et al. "The dynamical environment about Asteroid 25143 Itokawa: target of the Hayabusa Mission." *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*. 2004.

[۲۱] Pravec, Petr, and Alan W. Harris. "Fast and slow rotation of asteroids." *Icarus*148.1 (2000): 12-20.

[۲۲] Werner, Robert A. "Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron." *Computers & Geosciences* 23.10 (1997): 1071-1077.

[۲۳] Lien, Sheue-ling, and James T. Kajiya. "A symbolic method for calculating the integral properties of arbitrary nonconvex polyhedra." *Computer Graphics and Applications, IEEE* 4.10 (1984): 35-42.

[۲۴] http://sbn.psi.edu/pds/resource/nearbrowse.html

[۲۵] Werner, Robert A., and Daniel J. Scheeres. "Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia." *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 65.3 (1996): 313-344.

[۲۶] Scheeres, Daniel J. "Orbital Motion in Strongly Perturbed Environments."*Orbital Motion in Strongly Perturbed Environments, by Scheeres, Daniel J. ISBN: 978-3-642-03255-4. Berlin: Springer, 2012* 1 (2012).

[۲۷] Boyce, William E., Richard C. DiPrima, and Charles W. Haines. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Vol. 9. New York: Wiley, 1992.