

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова»

Механико-математический факультет

Кафедра вычислительной математики



**Численное моделирование нестационарного одномерного
течения газа с использованием неявной параллельной
разностной схемой с центральными разностями (ρ, u)**

Работу выполнил:

студент 4 курса Сибгатуллин Артур Петрович

Москва, 2021

Оглавление

1.	Введение	2
2.	Разностная схема	4
3.	Отладочный тест	7
Список литературы		20

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \rho f_0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \\ p = p(\rho) \end{cases} \quad (1)$$

Через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать известной положительной константой. Известными также будем считать функцию давления газа p (в данной работе будем рассматривать $p(\rho) = C\rho$, где C - положительная константа) и вектор внешних сил f . f - функция переменных Эйлера: $(t, x) \in Q = \Omega_t \times \Omega_x = [0; T] \times [0; X]$.

Неизвестные функции: плотность ρ и скорость u также являются функциями переменных Эйлера.

Перепишем систему (1) в эквивалентный вид, при условии того, что ρ и u гладкие:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \end{cases} \quad (2)$$

Система (1) дополнена граничными условиями:

$$\begin{aligned} (\rho, u)|_{t=0} &= (\rho_0, u_0), & x &\in [0; X] \\ u(t, 0) &= u(t, X) = 0, & t &\in [0; T] \end{aligned} \quad (3)$$

1.2. Основные обозначения

Введем на Ω_x и Ω_t сетки:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \{mh : m = 0, \dots, M\}, h = \frac{X}{M} \\ \omega_t &= \{n\tau : n = 0, \dots, N\}, \tau = \frac{T}{N}\end{aligned}\tag{4}$$

Для сокращения записи значение для произвольной функции f в узле (n, m) сетки $\omega_x \times \omega_t$ обозначим за f_m^n . Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\hat{f} &= f_m^{n+1} \\ f_t &= \frac{f_m^{n+1} - f_m^n}{\tau} \\ f_x &= \frac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} \\ f_{\bar{x}} &= \frac{f_m^n - f_{m-1}^n}{h} \\ f_{\dot{x}} &= \frac{f_{m+1}^n - f_{m-1}^n}{2h} \\ f_{x\bar{x}} &= \frac{f_{m-1}^n - 2f_m^n + f_{m+1}^n}{h^2}\end{aligned}\tag{5}$$

2. Разностная схема

2.1. Описание схемы

Для поиска численного решения задачи (1) можно использовать разностную схему, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой.

$$\begin{aligned}
H_t + 0.5(V\hat{H}_{\dot{x}} + (V\hat{H})_{\dot{x}} + HV_{\dot{x}}) &= 0, w \in \omega_h \\
H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + H_0V_{x,0}) - 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + \\
+ H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, x \in \gamma_h^- \\
H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_MV_{\bar{x},M}) + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + \\
+ H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, x \in \gamma_h^+ \\
V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\dot{x}} + (V\hat{V})_{\dot{x}}) + \frac{p(H)_{\dot{x}}}{H} &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H}\right)V_{x\bar{x}} + f, x \in \omega_h
\end{aligned} \tag{6}$$

2.2. Координатная запись

Распишем схему приведенных выше обозначениях, и выделим коэффициенты при H и V на $n+1$ временном слое: 1 уравнение:

$$H_t + 0.5(V\hat{H}_{\dot{x}} + (V\hat{H})_{\dot{x}} + HV_{\dot{x}}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{H_{m+1}^n - H_m^n}{\tau} + \frac{V(\hat{H}_{m+1}^n - \hat{H}_{m-1}^n)}{4h} + \frac{(V\hat{H})_{m+1}^n - (V\hat{H})_{m-1}^n}{4h} + \frac{H(V_{m+1}^n - V_{m-1}^n)}{4h} &= 0 \\
H_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{(V_m^n + V_{m-1}^n)}{4h} \right) + H_m^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} \right) + H_{m+1}^{n+1} \left(\frac{V_m^n + V_{m+1}^n}{4h} \right) &= H_m^n \left(\frac{1}{\tau} - \frac{(V_{m+1}^n - V_{m-1}^n)}{4h} \right)
\end{aligned}$$

2 уравнение:

$$H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + H_0V_{x,0}) - 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} +$$

$$+ H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{H_0^{n+1} - H_0^n}{\tau} + 0.5 \left(\frac{V_1^n H_1^{n+1} - V_0^n H_0^{n+1}}{h} + H_0^n \left(\frac{V_1^n - V_0^n}{h} \right) \right) - \\ & - \frac{h}{2} \left(\frac{H_0^n V_0^n - 2H_1^n V_1^n + H_2^n V_2^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_1^n V_1^n - 2H_2^n V_2^n + H_3^n V_3^n}{h^2} \right) \right) - \\ & - \frac{h}{2} \left(H_0 \left(\frac{V_0^n - 2V_1^n + V_2^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{V_1^n - 2V_2^n + V_3^n}{h^2} \right) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_0^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{V_0^n}{2h} \right) + H_1^{n+1} \left(\frac{V_1^n}{2h} \right) = \frac{H_0^n}{\tau} - \frac{H_0^n (V_1^n - V_0^n)}{2h} + \\ & + \frac{h}{2} \left(\frac{H_0^n V_0^n - 2H_1^n V_1^n + H_2^n V_2^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_1^n V_1^n - 2H_2^n V_2^n + H_3^n V_3^n}{h^2} \right) \right) + \\ & + \frac{h}{2} \left(H_0 \left(\frac{V_0^n - 2V_1^n + V_2^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{V_1^n - 2V_2^n + V_3^n}{h^2} \right) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

3 уравнение:

$$\begin{aligned} & H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + \\ & + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{H_M^{n+1} - H_M^n}{\tau} + 0.5 \left(\frac{V_M^n H_M^{n+1} - V_{M-1}^n H_{M-1}^{n+1}}{h} + H_M^n \left(\frac{V_M^n - V_{M-1}^n}{h} \right) \right) + \\ & + \frac{h}{2} \left(\frac{H_{M-2}^n V_{M-2}^n - 2H_{M-1}^n V_{M-1}^n + H_M^n V_M^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_{M-3}^n V_{M-3}^n - 2H_{M-2}^n V_{M-2}^n + H_{M-1}^n V_{M-1}^n}{h^2} \right) \right) + \\ & + \frac{h}{2} \left(H_M \left(\frac{V_{M-2}^n - 2V_{M-1}^n + V_M^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{V_{M-3}^n - 2V_{M-2}^n + V_{M-1}^n}{h^2} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_M^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{V_M^n}{2h} \right) + H_{M-1}^{n+1} \left(-\frac{V_{M-1}^n}{2h} \right) = \frac{H_M^n}{\tau} - \frac{H_M^n (V_M^n - V_{M-1}^n)}{2h} - \\ & - \frac{h}{2} \left(\frac{H_{M-2}^n V_{M-2}^n - 2H_{M-1}^n V_{M-1}^n + H_M^n V_M^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_{M-3}^n V_{M-3}^n - 2H_{M-2}^n V_{M-2}^n + H_{M-1}^n V_{M-1}^n}{h^2} \right) \right) - \\ & - \frac{h}{2} \left(H_M \left(\frac{V_{M-2}^n - 2V_{M-1}^n + V_M^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{V_{M-3}^n - 2V_{M-2}^n + V_{M-1}^n}{h^2} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

4 уравнение:

$$V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\hat{x}} + (V\hat{V})_{\hat{x}}) + \frac{p(H)_{\hat{x}}}{H} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H}\right)V_{x\bar{x}} + f$$

$$\begin{aligned} & \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} + \frac{1}{3} \left(V_m^n \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V_{m+1}^n V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^n V_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) + \\ & + \frac{p(H)_{m+1}^n - p(H)_{m-1}^n}{2hH_m^n} - \tilde{\mu} \frac{V_{m-1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H_m^n} \right) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} - f_m^n = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{V_m^n + V_{m-1}^n}{6h} - \frac{\tilde{\mu}}{h^2} \right) + V_m^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\tilde{\mu}}{h^2} \right) + V_{m+1}^{n-1} \left(\frac{V_m^n + V_{m+1}^n}{6h} - \frac{\tilde{\mu}}{h^2} \right) = \\
& \frac{V_m^n}{\tau} - \frac{p(H)_{m+1}^n - p(H)_{m-1}^n}{2hH_m^n} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H_m^n} \right) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n = 0
\end{aligned}$$

3. Отладочный тест

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим $Q = [0; 1] \times [0; 1]$

Зададим функции $\tilde{\rho}(t, x)$ и $\tilde{u}(t, x)$ так, чтобы они являлись гладким решением задачи (1).

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(t, x) &= e^t(\cos(3\pi x) + 1.5), \\ \tilde{u}(t, x) &= \cos(2\pi t)\sin(4\pi x)\end{aligned}\tag{7}$$

Теперь определим функции f_0 и f , так, чтобы они удовлетворяли уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial x} &= f_0, \\ \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + f\end{aligned}\tag{8}$$

3.2. Численные эксперименты

Table of times.

τ/h	1.000e-01	1.000e-02
1.000e-01	5.080e-04	8.140e-03
1.000e-02	1.117e-02	4.004e-02
1.000e-03	3.784e-02	1.777e-01

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.584e + 07$	$4.294e + 10$	$1.689e + 15$	$4.351e + 16$
	$1.042e + 07$	$6.986e + 09$	$1.246e + 14$	$5.594e + 15$
	$4.357e + 07$	$9.938e + 11$	$2.378e + 17$	$8.077e + 19$
1.000e-02	$6.821e + 35$	$9.897e + 89$	$3.820e+113$	$1.583e+183$
	$3.634e + 35$	$1.347e + 89$	$5.373e+112$	<i>inf inf</i>
	$7.863e + 36$	$2.183e + 91$	$6.665e+115$	
1.000e-03	$1.065e+236$	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>
	<i>inf inf</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-04	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$3.090e + 04$	$5.084e + 06$	$1.411e + 08$	$8.968e + 11$
	$1.439e + 04$	$6.602e + 05$	$3.608e + 07$	$5.488e + 10$
	$1.701e + 05$	$1.094e + 08$	$4.934e + 10$	$7.003e + 14$
1.000e-02	$3.100e + 39$	$4.683e + 59$	$1.080e + 99$	$2.012e+142$
	$1.131e + 39$	$1.051e + 59$	$8.138e + 97$	$6.477e+140$
	$5.512e + 39$	$2.281e + 61$	$1.285e+101$	$9.644e+144$
1.000e-03	$1.325e+156$	$3.595e+221$	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>
	<i>inf inf</i>	<i>inf inf</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-04	$6.715e+251$	$2.001e - 02$	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>
	<i>inf inf</i>	$2.598e - 03$	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
		$2.318e - 01$		

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	2.194e + 03 7.559e + 02 1.314e + 04	2.567e + 05 5.256e + 04 6.524e + 06	5.733e + 08 6.549e + 07 1.019e + 11	1.291e + 10 6.346e + 08 8.967e + 12
1.000e-02	1.165e + 12 3.177e + 11 5.886e + 12	1.128e + 36 1.306e + 35 2.488e + 37	1.685e + 71 8.550e + 69 1.461e + 73	1.222e+115 4.349e+113 5.586e+117
1.000e-03	1.443e + 12 3.323e + 11 7.625e + 12	3.696e - 01 7.799e - 02 9.401e + 00	nan -nan -nan 	nan -nan -nan
1.000e-04	7.930e + 49 1.785e + 49 2.725e + 50	3.933e - 02 8.747e - 03 1.206e + 00	1.288e - 02 2.307e - 03 2.971e - 01	nan -nan -nan

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
1.000e-02	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
1.000e-03	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
1.000e-04	nan -nan -nan	1.498e - 02 4.873e - 03 5.353e - 01	6.867e - 04 2.722e - 04 5.344e - 03	nan -nan -nan

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	1.989e + 10 8.497e + 09 1.238e + 11	2.114e + 14 4.989e + 13 7.172e + 15	9.311e + 16 2.483e + 16 3.521e + 19	1.145e + 20 7.159e + 19 1.013e + 24
1.000e-02	3.002e + 50 1.631e + 50 3.624e + 51	7.628e + 80 1.226e + 80 1.901e + 82	9.421e+132 7.884e+131 1.125e+135	1.178e+169 <i>inf inf</i>
1.000e-03	4.218e+263 <i>inf inf</i>	<i>nan -nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan -nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan -nan</i> <i>-nan</i>
1.000e-04	<i>nan -nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan -nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan -nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan -nan</i> <i>-nan</i>

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	7.870e + 04 2.214e + 04 3.880e + 05	9.771e + 08 1.978e + 08 2.729e + 10	3.380e + 08 2.259e + 07 2.587e + 10	6.840e + 11 1.266e + 10 1.788e + 14
1.000e-02	6.930e + 23 2.252e + 23 5.646e + 24	8.442e + 55 9.029e + 54 1.630e + 57	3.757e + 97 1.458e + 96 1.447e + 99	7.346e+134 2.795e+133 3.938e+137
1.000e-03	8.130e + 75 2.057e + 75 5.090e + 76	2.026e+178 <i>inf inf</i>	<i>nan -nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan -nan</i> <i>-nan</i>
1.000e-04	4.052e+127 9.276e+126 1.498e+128	3.101e - 03 1.748e - 03 2.052e - 02	<i>nan -nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan -nan</i> <i>-nan</i>

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	6.976e + 01 3.338e + 01 6.133e + 02	2.669e + 05 4.897e + 04 5.277e + 06	8.971e + 06 5.527e + 05 7.833e + 08	1.038e + 12 3.804e + 10 5.408e + 14
1.000e-02	2.971e + 05 7.642e + 04 1.904e + 06	1.138e + 36 1.241e + 35 2.314e + 37	6.381e + 69 3.800e + 68 6.624e + 71	nan -nan -nan
1.000e-03	3.947e + 08 9.196e + 07 2.146e + 09	6.048e - 02 1.407e - 02 8.331e - 01	nan -nan -nan 	nan -nan -nan
1.000e-04	8.764e + 08 2.025e + 08 4.668e + 09	1.676e - 02 3.944e - 03 1.796e - 01	nan -nan -nan 	nan -nan -nan

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
1.000e-02	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
1.000e-03	nan -nan -nan	5.963e - 03 3.227e - 03 4.939e - 02	nan -nan -nan 	nan -nan -nan
1.000e-04	nan -nan -nan	5.153e - 03 3.079e - 03 4.458e - 02	nan -nan -nan 	nan -nan -nan

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02
1.000e-01	$1.092e + 13$	$2.732e + 09$
	$7.623e + 12$	$7.216e + 08$
	$1.475e + 14$	$1.095e + 11$
1.000e-02	$1.066e + 42$	$1.149e + 75$
	$6.768e + 41$	$2.453e + 74$
	$1.415e + 43$	$4.384e + 76$
1.000e-03	$1.680e+182$	$nan \quad -nan$
	$inf \ inf$	$-nan$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$2.420e + 07$	$4.162e + 08$	$2.221e + 11$	$1.033e + 10$
	$8.931e + 06$	$1.015e + 08$	$5.545e + 10$	$2.173e + 08$
	$1.527e + 08$	$1.506e + 10$	$7.867e + 13$	$3.068e + 12$
1.000e-02	$5.714e + 16$	$1.120e + 61$	$5.008e + 90$	$nan \quad -nan$
	$2.842e + 16$	$1.687e + 60$	$2.444e + 89$	$-nan$
	$5.635e + 17$	$3.017e + 62$	$4.091e + 92$	
1.000e-03	$3.881e + 00$	$4.363e+237$	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$
	$1.149e + 00$	$inf \ inf$	$-nan$	$-nan$
	$1.627e + 01$			
1.000e-04	$2.368e + 00$	$4.524e - 03$	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$
	$8.436e - 01$	$2.327e - 03$	$-nan$	$-nan$
	$1.160e + 01$	$2.437e - 02$		

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$3.067e + 03$	$1.389e + 03$	$4.085e + 06$	$7.405e + 06$
	$1.629e + 03$	$3.821e + 02$	$1.976e + 05$	$1.222e + 06$
	$9.858e + 03$	$5.319e + 04$	$2.779e + 08$	$1.732e + 10$
1.000e-02	$1.747e + 07$	$2.420e + 38$	$8.977e + 68$	$4.359e+110$
	$4.378e + 06$	$2.541e + 37$	$1.280e + 68$	$2.220e+109$
	$7.831e + 07$	$3.981e + 39$	$1.862e + 71$	$3.112e+113$
1.000e-03	$4.465e + 09$	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>
	$1.031e + 09$	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
	$2.376e + 10$			
1.000e-04	$1.774e + 09$	$1.484e - 02$	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>
	$4.033e + 08$	$5.417e - 03$	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
	$6.395e + 09$	$1.140e - 01$		

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-02	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-03	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-04	<i>nan -nan</i>	$5.328e - 03$	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>
	<i>-nan</i>	$2.564e - 03$	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
		$4.033e - 02$		

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$8.432e + 01$	$5.324e + 02$	$1.777e + 07$	$6.521e + 07$
	$4.331e + 01$	$1.322e + 02$	$3.365e + 06$	$1.029e + 06$
	$6.501e + 02$	$1.830e + 04$	$5.984e + 09$	$1.502e + 10$
1.000e-02	$6.617e + 01$	$5.845e + 02$	$3.629e + 03$	$4.387e + 02$
	$3.743e + 01$	$1.259e + 02$	$2.689e + 02$	$1.104e + 02$
	$5.206e + 02$	$2.333e + 04$	$4.544e + 05$	$1.412e + 06$
1.000e-03	$3.510e + 02$	$nan \quad -nan$	$nan \quad nan$	$nan \quad nan$
	$2.474e + 02$	$-nan$	nan	nan
	$3.672e + 03$			
1.000e-04	$nan \quad -nan$	$nan \quad nan$	$nan \quad -nan$	$nan \quad nan$
	$-nan$	nan	$-nan$	nan

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.819e + 01$	$2.903e + 02$	$3.428e + 03$	$1.009e + 05$
	$9.487e + 00$	$4.585e + 01$	$4.193e + 02$	$2.288e + 03$
	$1.608e + 02$	$6.678e + 03$	$5.587e + 05$	$3.397e + 07$
1.000e-02	$6.097e + 01$	$4.016e + 01$	$9.547e + 03$	$8.527e + 04$
	$4.213e + 01$	$1.084e + 01$	$3.047e + 02$	$1.558e + 03$
	$6.238e + 02$	$1.486e + 03$	$4.485e + 05$	$2.240e + 07$
1.000e-03	$1.360e + 02$	$5.326e + 01$	$nan \quad nan$	$nan \quad nan$
	$9.542e + 01$	$3.245e + 01$	nan	nan
	$1.420e + 03$	$4.176e + 03$		
1.000e-04	$1.606e + 02$	$4.320e - 03$	$nan \quad nan$	$nan \quad -nan$
	$1.123e + 02$	$2.316e - 03$	nan	$-nan$
	$1.669e + 03$	$4.976e - 02$		

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$8.932e + 00$	$1.608e + 02$	$2.663e + 03$	$1.740e + 05$
	$5.407e + 00$	$1.700e + 01$	$3.647e + 02$	$5.597e + 03$
	$9.547e + 01$	$3.018e + 03$	$5.621e + 05$	$7.644e + 07$
1.000e-02	$1.088e + 01$	$3.517e + 01$	$4.930e + 02$	$1.211e + 05$
	$6.594e + 00$	$8.779e + 00$	$5.044e + 01$	$2.698e + 03$
	$1.082e + 02$	$1.286e + 03$	$6.934e + 04$	$4.195e + 07$
1.000e-03	$9.763e + 00$	$1.316e - 01$	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	$6.295e + 00$	$1.880e - 02$	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
	$7.680e + 01$	$2.607e + 00$		
1.000e-04	$9.356e + 01$	$1.041e - 02$	$2.286e - 03$	<i>nan</i> <i>nan</i>
	$4.787e + 01$	$2.809e - 03$	$6.048e - 04$	<i>nan</i>
	$8.203e + 02$	$2.416e - 01$	$7.014e - 02$	

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-02	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-03	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-04	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$7.771e - 03$	$2.133e - 04$	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>-nan</i>	$2.834e - 03$	$1.024e - 04$	<i>-nan</i>
		$2.030e - 01$	$1.966e - 03$	

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$2.359e + 02$	$7.350e + 03$	$2.247e + 05$	$8.423e + 06$
	$9.856e + 01$	$9.909e + 02$	$2.798e + 04$	$1.021e + 05$
	$1.597e + 03$	$1.700e + 05$	$3.957e + 07$	$1.443e + 09$
1.000e-02	$8.435e + 01$	$9.495e + 02$	$2.722e + 04$	$9.851e + 05$
	$4.727e + 01$	$1.490e + 02$	$1.253e + 03$	$1.079e + 05$
	$7.491e + 02$	$2.491e + 04$	$1.822e + 06$	$1.536e + 09$
1.000e-03	$3.524e + 02$	<i>nan nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan nan</i>
	$2.480e + 02$	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
	$3.690e + 03$			
1.000e-04	<i>nan -nan</i>	<i>nan nan</i>	<i>nan -nan</i>	<i>nan -nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$2.159e + 01$	$2.471e + 02$	$2.133e + 05$	$1.928e + 08$
	$9.587e + 00$	$3.984e + 01$	$8.967e + 03$	$3.463e + 06$
	$1.198e + 02$	$4.609e + 03$	$1.237e + 07$	$4.953e + 10$
1.000e-02	$3.757e + 01$	$7.268e + 03$	$1.227e + 05$	$3.534e + 04$
	$1.960e + 01$	$7.591e + 02$	$5.647e + 03$	$1.529e + 03$
	$2.769e + 02$	$1.296e + 05$	$6.299e + 06$	$2.238e + 07$
1.000e-03	$8.250e + 01$	$5.382e + 01$	<i>nan -nan</i>	<i>nan nan</i>
	$5.484e + 01$	$2.538e + 01$	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
	$9.331e + 02$	$3.733e + 03$		
1.000e-04	$6.557e + 01$	$4.257e - 03$	<i>nan -nan</i>	<i>nan nan</i>
	$4.134e + 01$	$2.137e - 03$	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
	$6.523e + 02$	$3.011e - 02$		

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	6.402e + 00 3.503e + 00 6.085e + 01	1.104e + 02 1.829e + 01 2.648e + 03	5.696e + 07 2.433e + 06 3.442e + 09	4.113e + 07 1.169e + 06 1.652e + 10
1.000e-02	1.294e + 01 6.238e + 00 1.109e + 02	3.998e + 01 7.511e + 00 1.111e + 03	1.491e + 03 9.452e + 01 1.439e + 05	nan -nan -nan nan nan
1.000e-03	1.213e + 01 7.867e + 00 1.109e + 02	1.218e - 02 4.318e - 03 1.627e - 01	nan nan nan nan	nan nan nan nan
1.000e-04	1.310e + 01 8.536e + 00 1.386e + 02	5.115e - 03 2.362e - 03 4.356e - 02	nan -nan -nan nan	nan nan nan nan

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
1.000e-02	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan	nan -nan -nan
1.000e-03	nan -nan -nan	5.471e - 03 2.580e - 03 3.763e - 02	nan -nan -nan	nan -nan -nan
1.000e-04	nan -nan -nan	4.051e - 03 2.245e - 03 3.294e - 02	nan -nan -nan	nan -nan -nan

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02
1.000e-01	$1.396e + 02$	$6.052e + 04$
	$7.026e + 01$	$1.539e + 04$
	$1.006e + 03$	$2.373e + 06$
1.000e-02	$7.060e + 01$	$1.619e + 03$
	$4.460e + 01$	$2.911e + 02$
	$6.486e + 02$	$4.415e + 04$
1.000e-03	$3.685e + 02$	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	$2.594e + 02$	<i>-nan</i>
	$3.850e + 03$	

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$3.027e + 01$	$8.695e + 02$	$1.603e + 03$	$2.361e + 08$
	$1.154e + 01$	$2.896e + 02$	$1.227e + 02$	$3.011e + 07$
	$1.596e + 02$	$4.336e + 04$	$1.727e + 05$	$4.259e + 11$
1.000e-02	$2.598e + 01$	$4.592e + 03$	$5.444e + 03$	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	$1.827e + 01$	$7.747e + 02$	$4.139e + 02$	<i>-nan</i>
	$3.042e + 02$	$1.012e + 05$	$3.659e + 05$	
1.000e-03	$2.346e + 00$	$6.357e + 01$	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	$1.013e + 00$	$3.150e + 01$	<i>nan</i>	<i>nan</i>
	$8.381e + 00$	$4.358e + 03$		
1.000e-04	$2.641e + 00$	$3.157e - 03$	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	$1.060e + 00$	$1.803e - 03$	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
	$9.490e + 00$	$2.536e - 02$		

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$9.659e + 00$	$5.237e + 02$	$1.452e + 05$	$6.751e + 10$
	$5.958e + 00$	$1.162e + 02$	$5.142e + 03$	$1.540e + 09$
	$5.483e + 01$	$1.816e + 04$	$6.937e + 06$	$2.178e + 13$
1.000e-02	$8.421e + 00$	$7.136e + 01$	$1.624e + 03$	$2.324e + 04$
	$4.339e + 00$	$1.029e + 01$	$1.496e + 02$	$8.096e + 02$
	$4.734e + 01$	$1.566e + 03$	$2.459e + 05$	$8.468e + 06$
1.000e-03	$1.806e + 01$	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$	$nan \quad nan$
	$8.472e + 00$	$-nan$	$-nan$	nan
	$1.203e + 02$			
1.000e-04	$1.071e + 01$	$4.479e - 03$	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$
	$5.001e + 00$	$2.160e - 03$	$-nan$	$-nan$
	$7.965e + 01$	$3.250e - 02$		

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$
	$-nan$	$-nan$	$-nan$	$-nan$
1.000e-02	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$
	$-nan$	$-nan$	$-nan$	$-nan$
1.000e-03	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$
	$-nan$	$-nan$	$-nan$	$-nan$
1.000e-04	$nan \quad -nan$	$3.641e - 03$	$nan \quad -nan$	$nan \quad -nan$
	$-nan$	$1.905e - 03$	$-nan$	$-nan$
		$2.689e - 02$		

3.3. Выводы

Список литературы

1. Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием неявных разностных схем, *Попов А.В., 2021*