

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова»

Механико-математический факультет

Кафедра вычислительной математики



**Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа
с использованием разностной схемы с центральными разностями (ρ, u)
(параллельная)**

Работу выполнил:

студент 4 курса Сибгатуллин Артур Петрович

Москва, 2021

Оглавление

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \rho f_0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \\ p = p(\rho) \end{cases} \quad (1)$$

Через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать известной положительной константой. Известными также будем считать функцию давления газа p (в данной работе будем рассматривать $p(\rho) = C\rho$, где C - положительная константа) и вектор внешних сил f . f - функция переменных Эйлера: $(t, x) \in Q = \Omega_t \times \Omega_x = [0; T] \times [0; X]$.

Неизвестные функции: плотность ρ и скорость u также являются функциями переменных Эйлера.

Перепишем систему (1) в эквивалентный вид, при условии того, что ρ и u гладкие:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \end{cases} \quad (2)$$

Система (1) дополнена граничными условиями:

$$\begin{aligned} (\rho, u)|_{t=0} &= (\rho_0, u_0), & x \in [0; X] \\ u(t, 0) &= u(t, X) = 0, & t \in [0; T] \end{aligned} \quad (3)$$

1.2. Основные обозначения

Введем на Ω_x и Ω_t сетки:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \{mh : m = 0, \dots, M\}, h = \frac{X}{M} \\ \omega_t &= \{n\tau : n = 0, \dots, N\}, \tau = \frac{T}{N} \end{aligned} \quad (4)$$

Для сокращения записи значение для произвольной функции f в узле (n, m) сетки $\omega_x x \omega_t$ обозначим за f_m^n . Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \hat{f} &= f_m^{n+1} \\
 f_t &= \frac{f_m^{n+1} - f_m^n}{\tau} \\
 f_x &= \frac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} \\
 f_{\bar{x}} &= \frac{f_m^n - f_{m-1}^n}{h} \\
 f_{\dot{x}} &= \frac{f_{m+1}^n - f_{m-1}^n}{2h} \\
 f_{x\bar{x}} &= \frac{f_{m-1}^n - 2f_m^n + f_{m+1}^n}{h^2}
 \end{aligned} \tag{5}$$

2. Разностная схема

2.1. Описание схемы

Для поиска численного решения задачи (1) можно использовать разностную схему, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой.

$$\begin{aligned}
 H_t + 0.5(V\hat{H}_{\dot{x}} + (V\hat{H})_{\dot{x}} + HV_{\dot{x}}) &= 0, w \in \omega_h \\
 H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + H_0 V_{x,0}) - 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + \\
 + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, x \in \gamma_h^- \\
 H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + \\
 + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, x \in \gamma_h^+ \\
 V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\dot{x}} + (V\hat{V})_{\dot{x}}) + \frac{p(H)_{\dot{x}}}{H} &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H}\right)V_{x\bar{x}} + f, x \in \omega_h
 \end{aligned} \tag{6}$$

2.2. Координатная запись

Распишем схему приведенных выше обозначениях, и выделим коэффициенты при H и V на $n + 1$ временном слое: 1 уравнение:

$$H_t + 0.5(V\hat{H}_{\dot{x}} + (V\hat{H})_{\dot{x}} + HV_{\dot{x}}) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{H_m^{n+1} - H_m^n}{\tau} + \frac{V(\hat{H}_{m+1}^n - \hat{H}_{m-1}^n)}{4h} + \frac{(V\hat{H})_{m+1}^n - (V\hat{H})_{m-1}^n}{4h} + \frac{H(V_{m+1}^n - V_{m-1}^n)}{4h} = 0 \\ H_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{(V_m^n + V_{m-1}^n)}{4h} \right) + H_m^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} \right) + H_{m+1}^{n+1} \left(\frac{V_m^n + V_{m+1}^n}{4h} \right) = H_m^n \left(\frac{1}{\tau} - \frac{(V_{m+1}^n - V_{m-1}^n)}{4h} \right) \end{aligned}$$

2 уравнение:

$$\begin{aligned} H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + H_0 V_{x,0}) - 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + \\ + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{H_0^{n+1} - H_0^n}{\tau} + 0.5 \left(\frac{V_1^n H_1^{n+1} - V_0^n H_0^{n+1}}{h} + H_0^n \left(\frac{V_1^n - V_0^n}{h} \right) \right) - \\ - \frac{h}{2} \left(\frac{H_0^n V_0^n - 2H_1^n V_1^n + H_2^n V_2^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_1^n V_1^n - 2H_2^n V_2^n + H_3^n V_3^n}{h^2} \right) \right) - \\ - \frac{h}{2} \left(H_0 \left(\frac{V_0^n - 2V_1^n + V_2^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{V_1^n - 2V_2^n + V_3^n}{h^2} \right) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{V_0^n}{2h} \right) + H_1^{n+1} \left(\frac{V_1^n}{2h} \right) = \frac{H_0^n}{\tau} - \frac{H_0^n (V_1^n - V_0^n)}{2h} + \\ + \frac{h}{2} \left(\frac{H_0^n V_0^n - 2H_1^n V_1^n + H_2^n V_2^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_1^n V_1^n - 2H_2^n V_2^n + H_3^n V_3^n}{h^2} \right) \right) + \\ + \frac{h}{2} \left(H_0 \left(\frac{V_0^n - 2V_1^n + V_2^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{V_1^n - 2V_2^n + V_3^n}{h^2} \right) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

3 уравнение:

$$\begin{aligned} H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + \\ + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{H_M^{n+1} - H_M^n}{\tau} + 0.5 \left(\frac{V_M^n H_M^{n+1} - V_{M-1}^n H_{M-1}^{n+1}}{h} + H_M^n \left(\frac{V_M^n - V_{M-1}^n}{h} \right) \right) + \\ + \frac{h}{2} \left(\frac{H_{M-2}^n V_{M-2}^n - 2H_{M-1}^n V_{M-1}^n + H_M^n V_M^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_{M-3}^n V_{M-3}^n - 2H_{M-2}^n V_{M-2}^n + H_{M-1}^n V_{M-1}^n}{h^2} \right) \right) + \\ + \frac{h}{2} \left(H_M \left(\frac{V_{M-2}^n - 2V_{M-1}^n + V_M^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{V_{M-3}^n - 2V_{M-2}^n + V_{M-1}^n}{h^2} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_M^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{V_M^n}{2h} \right) + H_{M-1}^{n+1} \left(-\frac{V_{M-1}^n}{2h} \right) = \frac{H_M^n}{\tau} - \frac{H_M^n (V_M^n - V_{M-1}^n)}{2h} - \\ - \frac{h}{2} \left(\frac{H_{M-2}^n V_{M-2}^n - 2H_{M-1}^n V_{M-1}^n + H_M^n V_M^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_{M-3}^n V_{M-3}^n - 2H_{M-2}^n V_{M-2}^n + H_{M-1}^n V_{M-1}^n}{h^2} \right) \right) - \\ - \frac{h}{2} \left(H_M \left(\frac{V_{M-2}^n - 2V_{M-1}^n + V_M^n}{h^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{V_{M-3}^n - 2V_{M-2}^n + V_{M-1}^n}{h^2} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

4 уравнение:

$$V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\dot{x}} + (V\hat{V})_{\dot{x}}) + \frac{p(H)_{\dot{x}}}{H} = \tilde{\mu} \hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H} \right) V_{x\bar{x}} + f$$

$$\begin{aligned} & \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\tau} + \frac{1}{3} \left(V_m^n \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V_{m+1}^n V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^n V_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) + \\ & + \frac{p(H)_{m+1}^n - p(H)_{m-1}^n}{2hH_m^n} - \tilde{\mu} \frac{V_{m-1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H_m^n} \right) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} - f_m^n = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & V_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{V_m^n + V_{m-1}^n}{6h} - \frac{\tilde{\mu}}{h^2} \right) + V_m^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\tilde{\mu}}{h^2} \right) + V_{m+1}^{n-1} \left(\frac{V_m^n + V_{m+1}^n}{6h} - \frac{\tilde{\mu}}{h^2} \right) = \\ & \frac{V_m^n}{\tau} - \frac{p(H)_{m+1}^n - p(H)_{m-1}^n}{2hH_m^n} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H_m^n} \right) \frac{V_{m-1}^n - 2V_m^n + V_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n = 0 \end{aligned}$$

Домножим все уравнения на τh , для того чтобы уменьшить погрешность вычислений. Сделаем это при реализации программы.

3. Отладочный тест

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим $Q = [0; 1] \times [0; 1]$

Зададим функции $\tilde{\rho}(t, x)$ и $\tilde{u}(t, x)$ так, чтобы они являлись гладким решением задачи (1).

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(t, x) &= e^t(\cos(3\pi x) + 1.5), \\ \tilde{u}(t, x) &= \cos(2\pi t)\sin(4\pi x)\end{aligned}\tag{7}$$

Теперь определим функции f_0 и f , так, чтобы они удовлетворяли уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial x} &= f_0, \\ \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{\rho} f\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} &= e^t(\cos(3\pi x) + 1.5), \\ \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial t} &= \pi e^t \cos(2\pi t) * (4(\cos(3\pi x) + 1.5)\cos(4\pi x) - 3\sin(3\pi x)\sin(4\pi x)), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= -2\pi \sin(2\pi t)\sin(4\pi x), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= 4\pi \cos(2\pi t)\cos(4\pi x), \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} &= -16\pi^2 \cos(2\pi t)\sin(4\pi x), \\ \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial x} &= \pi e^t \cos(2\pi t)(4(\cos(3\pi x) + 1.5)\cos(4\pi x) - 3\sin(3\pi x)\sin(4\pi x)), \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} &= C\gamma \rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial x}\end{aligned}\tag{9}$$

3.2. Численные эксперименты

Обычная сетка

Table of times.

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	1.450e-04	9.040e-04	7.301e-03	6.713e-02
1.000e-02	7.340e-04	7.709e-03	6.970e-02	7.287e-01
1.000e-03	8.084e-03	8.401e-02	7.561e-01	8.639e+00
1.000e-04	9.792e-02	1.018e+00	9.668e+00	9.706e+01

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$2.459e + 09$	$2.617e + 14$	$5.237e + 09$	$7.150e + 11$
	$1.271e + 09$	$1.726e + 14$	$1.051e + 09$	$1.012e + 10$
	$1.787e + 10$	$2.442e + 16$	$1.478e + 12$	$1.384e + 14$
1.000e-02	$2.295e + 47$	$1.077e + 85$	$7.085e + 109$	$5.124e + 153$
	$9.846e + 46$	$1.464e + 84$	$4.059e + 108$	$inf\ inf$
	$2.914e + 47$	$2.737e + 86$	$5.337e + 111$	
1.000e-03	$4.877e + 259$	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	<i>inf</i> <i>inf</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
1.000e-04	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>

Table of norms for V. $\mu = 0.0010$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.034e + 02$	$3.769e + 03$	$5.239e + 02$	$8.690e + 06$
	$5.728e + 01$	$1.164e + 03$	$4.015e + 01$	$1.426e + 05$
	$8.862e + 02$	$1.644e + 05$	$5.220e + 04$	$2.058e + 09$
1.000e-02	$8.735e + 01$	$1.665e + 03$	$2.863e + 03$	$6.911e + 05$
	$5.994e + 01$	$2.332e + 02$	$3.341e + 02$	$1.399e + 04$
	$8.859e + 02$	$3.895e + 04$	$4.517e + 05$	$2.129e + 08$
1.000e-03	$4.651e + 02$	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	$3.278e + 02$	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
	$4.869e + 03$			
1.000e-04	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$7.614e + 04$	$1.220e + 07$	$1.325e + 05$	$3.945e + 06$
	$3.000e + 04$	$2.399e + 06$	$9.791e + 03$	$1.348e + 05$
	$1.997e + 05$	$4.530e + 08$	$1.795e + 07$	$2.365e + 09$
1.000e-02	$1.639e + 21$	$9.181e + 60$	$3.063e + 82$	$2.983e + 83$
	$8.067e + 20$	$1.911e + 60$	$6.889e + 80$	$1.149e + 82$
	$1.702e + 22$	$2.248e + 62$	$1.415e + 84$	$1.896e + 86$
1.000e-03	$2.388e + 85$	$2.102e + 226$	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	$5.801e + 84$	<i>inf inf</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
	$1.407e + 86$			
1.000e-04	$7.823e + 181$	$1.095e - 02$	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>inf inf</i>	$2.280e - 03$	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
		$1.428e - 01$		

Table of norms for V. $\mu = 0.0010$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.346e + 01$	$1.000e + 04$	$5.955e + 01$	$1.499e + 02$
	$6.953e + 00$	$1.373e + 03$	$6.702e + 00$	$2.574e + 01$
	$9.841e + 01$	$2.189e + 05$	$8.298e + 03$	$1.312e + 04$
1.000e-02	$3.654e + 01$	$8.572e + 01$	$2.353e + 03$	$2.872e + 05$
	$2.468e + 01$	$2.103e + 01$	$2.703e + 02$	$7.995e + 03$
	$3.697e + 02$	$3.297e + 03$	$3.648e + 05$	$1.321e + 08$
1.000e-03	$5.806e + 01$	$4.999e + 01$	<i>nan</i> $-nan$	<i>nan</i> <i>nan</i>
	$3.838e + 01$	$2.608e + 01$	$-nan$	<i>nan</i>
	$5.856e + 02$	$3.236e + 03$		
1.000e-04	$1.267e + 02$	$4.506e - 03$	<i>nan</i> $-nan$	<i>nan</i> $-nan$
	$8.832e + 01$	$2.344e - 03$	$-nan$	$-nan$
	$1.312e + 03$	$6.926e - 02$		

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.140e + 02$	$2.303e + 03$	$1.457e + 02$	$8.860e + 00$
	$4.643e + 01$	$4.776e + 02$	$9.078e + 00$	$4.289e + 00$
	$6.830e + 02$	$9.043e + 04$	$1.202e + 04$	$8.506e + 02$
1.000e-02	$3.773e + 04$	$5.843e + 22$	$3.539e + 44$	$4.170e + 40$
	$8.832e + 03$	$8.892e + 21$	$3.419e + 43$	$2.865e + 39$
	$2.074e + 05$	$1.684e + 24$	$6.304e + 46$	$4.240e + 43$
1.000e-03	$8.363e + 43$	$1.958e + 00$	$8.384e + 194$	<i>nan</i> $-nan$
	$1.969e + 43$	$1.584e - 01$	<i>inf</i> <i>inf</i>	$-nan$
	$4.653e + 44$	$2.211e + 01$		
1.000e-04	$5.700e + 49$	$3.963e - 02$	$1.290e - 02$	$1.253e - 02$
	$1.284e + 49$	$8.792e - 03$	$2.311e - 03$	$2.319e - 03$
	$1.965e + 50$	$1.213e + 00$	$2.981e - 01$	$2.996e - 01$

Table of norms for V. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$6.763e + 00$	$1.806e + 02$	$4.581e + 00$	$6.133e + 00$
	$3.636e + 00$	$2.261e + 01$	$1.432e + 00$	$3.709e + 00$
	$4.417e + 01$	$2.501e + 03$	$5.801e + 01$	$3.239e + 01$
1.000e-02	$9.705e + 00$	$9.693e + 01$	$1.537e + 03$	$1.731e + 03$
	$4.596e + 00$	$1.074e + 01$	$8.712e + 01$	$3.155e + 01$
	$6.103e + 01$	$1.588e + 03$	$1.470e + 05$	$4.365e + 05$
1.000e-03	$2.396e + 01$	$3.431e - 02$	$1.712e + 02$	$nan -nan$
	$1.489e + 01$	$1.313e - 02$	$7.741e + 00$	$-nan$
	$2.089e + 02$	$1.777e + 00$	$1.111e + 04$	
1.000e-04	$7.905e + 01$	$1.048e - 02$	$2.261e - 03$	$2.311e - 03$
	$4.418e + 01$	$2.817e - 03$	$6.061e - 04$	$6.073e - 04$
	$7.942e + 02$	$2.426e - 01$	$7.027e - 02$	$7.104e - 02$

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$nan nan$	$nan -nan$	$nan -nan$	$nan -nan$
	nan	$-nan$	$-nan$	$-nan$
1.000e-02	$nan nan$	$nan -nan$	$nan nan$	$nan nan$
	nan	$-nan$	nan	nan
1.000e-03	$nan nan$	$nan -nan$	$nan -nan$	$nan -nan$
	nan	$-nan$	$-nan$	$-nan$
1.000e-04	$nan -nan$	$1.478e - 02$	$6.906e - 04$	$nan nan$
	$-nan$	$4.869e - 03$	$2.724e - 04$	nan
		$5.349e - 01$	$5.368e - 03$	

Table of norms for V. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-02	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
1.000e-03	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-04	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$7.856e - 03$	$2.161e - 04$	<i>nan</i> <i>nan</i>
	<i>-nan</i>	$2.837e - 03$	$1.035e - 04$	<i>nan</i>
		$2.038e - 01$	$1.978e - 03$	

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$6.013e + 14$	$1.607e + 10$	$4.220e + 09$	$2.457e + 09$
	$2.706e + 14$	$1.666e + 09$	$1.903e + 08$	$1.073e + 08$
	$3.824e + 15$	$2.356e + 11$	$2.664e + 11$	$1.257e + 12$
1.000e-02	$2.665e + 45$	$3.218e + 84$	$2.730e+125$	$7.290e+178$
	$1.748e + 45$	$3.457e + 83$	$3.154e+124$	<i>inf</i> <i>inf</i>
	$3.661e + 46$	$5.351e + 85$	$5.210e+127$	
1.000e-03	$5.090e+239$	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	<i>inf</i> <i>inf</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
1.000e-04	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$7.861e + 02$	$5.704e + 02$	$2.101e + 04$	$3.236e + 04$
	$2.878e + 02$	$1.111e + 02$	$1.848e + 03$	$1.020e + 03$
	$4.036e + 03$	$1.640e + 04$	$2.993e + 06$	$1.647e + 06$
1.000e-02	$9.696e + 01$	$4.751e + 02$	$9.407e + 03$	$9.397e + 13$
	$6.559e + 01$	$1.454e + 02$	$6.358e + 02$	$1.572e + 12$
	$9.539e + 02$	$1.269e + 04$	$9.201e + 05$	$2.314e + 16$
1.000e-03	$3.646e + 02$	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	$2.570e + 02$	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>
	$3.815e + 03$			
1.000e-04	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$2.542e + 05$	$1.920e + 03$	$1.463e + 03$	$2.656e + 02$
	$1.075e + 05$	$3.960e + 02$	$4.806e + 01$	$1.048e + 01$
	$2.196e + 06$	$7.949e + 04$	$8.785e + 04$	$1.907e + 05$
1.000e-02	$2.070e + 21$	$2.468e + 43$	$3.365e + 61$	$3.314e + 40$
	$1.228e + 21$	$4.313e + 42$	$4.572e + 60$	$6.373e + 38$
	$2.673e + 22$	$7.281e + 44$	$6.993e + 63$	$1.014e + 43$
1.000e-03	$3.535e + 73$	$7.022e + 162$	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	$8.893e + 72$	<i>inf inf</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
	$1.600e + 74$			
1.000e-04	$2.105e + 242$	$3.099e - 03$	$4.080e - 04$	$4.225e - 04$
	<i>inf inf</i>	$1.747e - 03$	$1.875e - 04$	$1.939e - 04$
		$2.052e - 02$	$1.195e - 03$	$1.259e - 03$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$3.427e + 01$	$5.251e + 02$	$4.618e + 01$	$2.060e + 01$
	$1.789e + 01$	$9.267e + 01$	$1.580e + 01$	$1.419e + 01$
	$3.061e + 02$	$6.304e + 03$	$2.530e + 02$	$8.302e + 01$
1.000e-02	$5.253e + 01$	$5.969e + 01$	$1.140e + 04$	$5.407e + 03$
	$3.615e + 01$	$1.605e + 01$	$9.038e + 02$	$5.289e + 02$
	$5.333e + 02$	$2.552e + 03$	$1.428e + 06$	$6.864e + 06$
1.000e-03	$7.549e + 01$	$4.119e + 01$	<i>nan</i> $-nan$	<i>nan</i> $-nan$
	$5.210e + 01$	$2.328e + 01$	$-nan$	$-nan$
	$7.720e + 02$	$3.225e + 03$		
1.000e-04	$1.668e + 02$	$4.256e - 03$	$3.347e - 04$	$3.547e - 04$
	$1.170e + 02$	$2.137e - 03$	$1.346e - 04$	$1.384e - 04$
	$1.739e + 03$	$3.014e - 02$	$1.084e - 03$	$1.166e - 03$

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$6.341e + 02$	$1.603e + 02$	$2.713e + 02$	$2.776e + 02$
	$2.059e + 02$	$1.229e + 01$	$1.446e + 01$	$8.667e + 00$
	$4.781e + 03$	$1.775e + 03$	$4.703e + 03$	$6.197e + 04$
1.000e-02	$1.638e + 18$	$3.845e + 08$	$6.599e + 16$	$5.604e + 17$
	$5.223e + 17$	$4.626e + 07$	$2.728e + 15$	$1.285e + 16$
	$1.025e + 19$	$7.748e + 09$	$1.066e + 18$	$2.576e + 19$
1.000e-03	$1.376e + 13$	$6.759e - 02$	$5.158e - 02$	$5.143e - 02$
	$3.205e + 12$	$1.503e - 02$	$1.439e - 02$	$1.439e - 02$
	$7.492e + 13$	$8.962e - 01$	$7.982e - 01$	$7.974e - 01$
1.000e-04	$1.664e + 06$	$1.717e - 02$	$4.578e - 03$	$4.464e - 03$
	$3.859e + 05$	$4.093e - 03$	$1.367e - 03$	$1.371e - 03$
	$8.943e + 06$	$1.890e - 01$	$6.947e - 02$	$6.916e - 02$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$4.935e + 00$	$4.379e + 00$	$3.269e + 00$	$2.983e + 00$
	$2.183e + 00$	$2.428e + 00$	$1.889e + 00$	$1.802e + 00$
	$2.996e + 01$	$4.956e + 01$	$1.620e + 01$	$2.170e + 01$
1.000e-02	$1.829e + 01$	$4.542e + 02$	$1.772e + 01$	$1.511e + 01$
	$1.215e + 01$	$4.972e + 01$	$5.358e + 00$	$4.302e + 00$
	$1.798e + 02$	$4.838e + 03$	$8.343e + 02$	$1.873e + 02$
1.000e-03	$1.342e + 01$	$1.390e - 02$	$1.133e - 02$	$1.130e - 02$
	$6.587e + 00$	$4.674e - 03$	$3.297e - 03$	$3.288e - 03$
	$9.271e + 01$	$1.792e - 01$	$1.662e - 01$	$1.662e - 01$
1.000e-04	$9.423e + 00$	$5.386e - 03$	$1.085e - 03$	$1.056e - 03$
	$4.861e + 00$	$2.400e - 03$	$3.234e - 04$	$3.145e - 04$
	$6.833e + 01$	$4.538e - 02$	$1.475e - 02$	$1.475e - 02$

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
1.000e-02	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-03	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$5.800e - 03$	$7.351e - 03$	$8.906e - 03$
	<i>-nan</i>	$3.199e - 03$	$2.605e - 03$	$2.689e - 03$
		$5.127e - 02$	$5.011e - 02$	$5.102e - 01$
1.000e-04	<i>nan</i> <i>nan</i>	$5.154e - 03$	$6.410e - 04$	$6.856e - 04$
	<i>nan</i>	$3.071e - 03$	$2.412e - 04$	$2.526e - 04$
		$4.441e - 02$	$3.784e - 03$	$3.957e - 03$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
1.000e-02	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-03	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$5.621e - 03$	$2.122e - 03$	$2.094e - 03$
	<i>-nan</i>	$2.678e - 03$	$8.342e - 04$	$8.282e - 04$
		$3.853e - 02$	$1.695e - 02$	$5.153e - 02$
1.000e-04	<i>nan</i> <i>nan</i>	$4.061e - 03$	$2.287e - 04$	$2.008e - 04$
	<i>nan</i>	$2.251e - 03$	$8.859e - 05$	$7.835e - 05$
		$3.296e - 02$	$1.602e - 03$	$1.549e - 03$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.091e + 08$	$1.747e + 05$	$8.058e + 04$	$1.405e + 04$
	$3.948e + 07$	$4.836e + 04$	$5.224e + 03$	$2.173e + 02$
	$7.057e + 08$	$7.969e + 06$	$7.998e + 06$	$3.843e + 06$
1.000e-02	$7.055e + 31$	$2.536e + 65$	$1.794e + 101$	$2.163e + 69$
	$3.830e + 31$	$4.161e + 64$	$6.181e + 99$	$1.008e + 68$
	$8.213e + 32$	$3.924e + 66$	$8.807e + 102$	$1.526e + 72$
1.000e-03	$7.174e + 166$	$4.785e + 300$	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	<i>inf inf</i>	<i>inf inf</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
1.000e-04	$1.348e + 232$	$3.819e - 03$	$1.866e - 04$	$2.248e - 04$
	<i>inf inf</i>	$2.353e - 03$	$1.346e - 04$	$1.428e - 04$
		$2.399e - 02$	$4.009e - 04$	$5.979e - 04$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$3.339e + 01$	$4.504e + 02$	$1.053e + 04$	$9.656e + 01$
	$2.025e + 01$	$7.770e + 01$	$9.202e + 02$	$4.862e + 01$
	$2.383e + 02$	$1.146e + 04$	$5.058e + 05$	$2.510e + 02$
1.000e-02	$8.518e + 01$	$9.089e + 02$	$2.430e + 04$	$8.055e + 02$
	$5.685e + 01$	$1.851e + 02$	$1.369e + 03$	$7.233e + 01$
	$1.005e + 03$	$2.096e + 04$	$1.909e + 06$	$1.088e + 06$
1.000e-03	$3.047e + 02$	$1.795e + 02$	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	$2.147e + 02$	$5.524e + 01$	<i>nan</i>	<i>nan</i>
	$3.185e + 03$	$7.146e + 03$		
1.000e-04	$4.118e + 02$	$3.323e - 03$	$1.131e - 04$	$1.273e - 04$
	$2.897e + 02$	$1.909e - 03$	$5.174e - 05$	$5.836e - 05$
	$4.310e + 03$	$2.599e - 02$	$2.932e - 04$	$4.152e - 04$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.098e + 06$	$1.187e + 02$	$3.174e + 02$	$1.523e + 03$
	$2.630e + 05$	$2.230e + 01$	$1.371e + 01$	$1.572e + 01$
	$3.775e + 06$	$3.618e + 03$	$2.301e + 04$	$1.755e + 05$
1.000e-02	$1.221e + 20$	$1.780e + 07$	$7.748e + 03$	$2.314e + 03$
	$3.421e + 19$	$2.985e + 06$	$3.353e + 02$	$2.044e + 01$
	$8.649e + 20$	$5.849e + 08$	$1.794e + 05$	$4.329e + 05$
1.000e-03	$2.897e + 00$	$3.349e - 03$	$4.464e - 03$	$4.502e - 03$
	$1.424e + 00$	$2.116e - 03$	$2.043e - 03$	$2.056e - 03$
	$2.041e + 01$	$1.913e - 02$	$1.222e - 02$	$1.237e - 02$
1.000e-04	$1.560e + 00$	$4.435e - 03$	$4.035e - 04$	$4.412e - 04$
	$7.376e - 01$	$2.304e - 03$	$1.904e - 04$	$2.025e - 04$
	$1.059e + 01$	$2.423e - 02$	$1.065e - 03$	$1.212e - 03$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$2.738e + 01$	$1.947e + 01$	$2.007e + 01$	$3.650e + 00$
	$1.215e + 01$	$7.508e + 00$	$1.102e + 01$	$2.328e + 00$
	$1.757e + 02$	$1.838e + 02$	$1.134e + 02$	$2.934e + 01$
1.000e-02	$2.981e + 01$	$2.039e + 01$	$1.125e + 01$	$2.546e + 00$
	$2.047e + 01$	$7.961e + 00$	$5.232e + 00$	$1.008e + 00$
	$3.420e + 02$	$1.048e + 03$	$6.819e + 01$	$2.122e + 01$
1.000e-03	$5.927e + 00$	$4.360e - 03$	$3.065e - 03$	$3.059e - 03$
	$2.487e + 00$	$2.429e - 03$	$1.361e - 03$	$1.358e - 03$
	$2.139e + 01$	$2.671e - 02$	$9.235e - 03$	$9.250e - 03$
1.000e-04	$2.395e + 00$	$3.182e - 03$	$3.125e - 04$	$3.066e - 04$
	$1.058e + 00$	$1.827e - 03$	$1.387e - 04$	$1.347e - 04$
	$8.296e + 00$	$2.550e - 02$	$9.413e - 04$	$9.258e - 04$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$6.007e + 02$	$1.180e + 02$	$2.192e + 02$	$1.965e + 01$
	$3.064e + 02$	$1.591e + 01$	$1.018e + 01$	$6.812e + 00$
	$7.033e + 03$	$1.615e + 03$	$5.567e + 03$	$1.556e + 02$
1.000e-02	$7.943e + 08$	$1.568e + 00$	$2.048e + 00$	$2.145e + 00$
	$2.044e + 08$	$4.277e - 01$	$4.579e - 01$	$4.703e - 01$
	$5.075e + 09$	$2.557e + 01$	$3.309e + 01$	$3.455e + 01$
1.000e-03	$3.214e + 21$	$8.436e - 02$	$7.259e - 02$	$7.248e - 02$
	$7.368e + 20$	$2.351e - 02$	$1.972e - 02$	$1.969e - 02$
	$1.193e + 22$	$5.540e - 01$	$4.754e - 01$	$4.749e - 01$
1.000e-04	$5.058e + 63$	$1.968e - 02$	$7.045e - 03$	$6.945e - 03$
	$1.158e + 63$	$6.671e - 03$	$1.939e - 03$	$1.909e - 03$
	$1.871e + 64$	$1.406e - 01$	$4.484e - 02$	$4.449e - 02$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$5.855e + 00$	$2.239e + 00$	$1.067e + 01$	$1.850e + 00$
	$3.789e + 00$	$1.058e + 00$	$5.882e + 00$	$9.454e - 01$
	$6.347e + 01$	$3.760e + 01$	$2.601e + 01$	$1.013e + 01$
1.000e-02	$9.409e + 00$	$2.318e - 01$	$2.597e - 01$	$2.676e - 01$
	$5.648e + 00$	$7.808e - 02$	$8.324e - 02$	$8.564e - 02$
	$8.658e + 01$	$1.927e + 00$	$2.107e + 00$	$2.166e + 00$
1.000e-03	$2.178e + 01$	$1.818e - 02$	$1.392e - 02$	$1.388e - 02$
	$1.149e + 01$	$6.728e - 03$	$5.080e - 03$	$5.066e - 03$
	$1.968e + 02$	$1.157e - 01$	$9.453e - 02$	$9.436e - 02$
1.000e-04	$4.808e + 01$	$5.519e - 03$	$1.376e - 03$	$1.337e - 03$
	$3.105e + 01$	$2.421e - 03$	$5.080e - 04$	$4.946e - 04$
	$4.787e + 02$	$3.727e - 02$	$9.219e - 03$	$9.061e - 03$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-02	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$1.685e + 00$	$9.675e - 01$	$1.351e + 00$
	<i>-nan</i>	$2.629e - 01$	$1.687e - 01$	$1.848e - 01$
		$1.310e + 01$	$1.871e + 01$	$2.235e + 01$
1.000e-03	<i>nan</i> <i>nan</i>	$8.272e - 03$	$1.074e - 02$	$1.077e - 02$
	<i>nan</i>	$4.593e - 03$	$4.336e - 03$	$4.342e - 03$
		$4.257e - 02$	$5.749e - 02$	$5.779e - 02$
1.000e-04	<i>nan</i> <i>nan</i>	$5.740e - 03$	$1.004e - 03$	$1.031e - 03$
	<i>nan</i>	$2.601e - 03$	$4.176e - 04$	$4.221e - 04$
		$3.858e - 02$	$5.325e - 03$	$5.625e - 03$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e-02	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$1.079e - 01$	$8.880e - 02$	$8.242e - 02$
	<i>-nan</i>	$4.405e - 02$	$2.896e - 02$	$2.863e - 02$
		$1.733e + 00$	$1.526e + 00$	$1.415e + 00$
1.000e-03	<i>nan</i> <i>nan</i>	$6.253e - 03$	$3.227e - 03$	$3.228e - 03$
	<i>nan</i>	$3.009e - 03$	$1.517e - 03$	$1.507e - 03$
		$3.736e - 02$	$2.056e - 02$	$2.050e - 02$
1.000e-04	<i>nan</i> <i>nan</i>	$3.758e - 03$	$3.241e - 04$	$3.202e - 04$
	<i>nan</i>	$1.963e - 03$	$1.593e - 04$	$1.480e - 04$
		$2.731e - 02$	$2.093e - 03$	$2.016e - 03$

3.3. Выводы

По результатам численного эксперимента можно сделать вывод, что схема является условно сходящейся. Также, обратим внимание на то, что сходимость сильно зависит от C , γ , μ . Худшая сходимость при больших и маленьких μ . Обратим внимание на то, что при $\tau < h$ невязки наименьшие. Сходимость схемы порядка $\tau + h^2$

Вложенная сетка

Table of times.

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	1.170e-04	7.358e-03	7.271e-01
1.000e+00	3.480e-04	3.176e-02	3.102e+00
2.000e+00	1.396e-03	1.282e-01	1.494e+01
3.000e+00	6.399e-03	6.178e-01	6.190e+01
4.000e+00	2.539e-02	2.453e+00	2.421e+02

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03		
0.000e+00	$2.459e + 09$	$1.077e + 85$	nan	$-nan$	
	$1.271e + 09$	$1.464e + 84$		$-nan$	
	$1.787e + 10$	$2.737e + 86$			
1.000e+00	$1.373e + 23$	$1.439e + 167$	nan	nan	
	$5.575e + 22$	$inf\ inf$		nan	
	$6.685e + 23$				
2.000e+00	$4.964e + 33$	nan	nan	nan	$-nan$
	$2.843e + 33$	nan			$-nan$
	$6.125e + 33$				
3.000e+00	$8.597e + 81$	nan	nan	nan	$-nan$
	$1.947e + 81$	nan			$-nan$
	$3.947e + 82$				
4.000e+00	$2.149e + 137$	nan	$-nan$	nan	$-nan$
	$4.816e + 136$	$-nan$			$-nan$
	$9.794e + 137$				

Table of norms for V. $\mu = 0.0010$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$1.034e + 02$	$1.665e + 03$	$nan -nan$
	$5.728e + 01$	$2.332e + 02$	$-nan$
	$8.862e + 02$	$3.895e + 04$	
1.000e+00	$6.518e + 02$	$4.797e + 02$	$nan nan$
	$2.303e + 02$	$9.971e + 01$	nan
	$3.227e + 03$	$8.254e + 03$	
2.000e+00	$9.973e + 00$	$nan nan$	$nan -nan$
	$5.783e + 00$	nan	$-nan$
	$5.284e + 01$		
3.000e+00	$2.704e + 02$	$nan nan$	$nan -nan$
	$9.169e + 01$	nan	$-nan$
	$1.259e + 03$		
4.000e+00	$1.256e + 02$	$nan -nan$	$nan -nan$
	$7.116e + 01$	$-nan$	$-nan$
	$8.562e + 02$		

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03		
0.000e+00	$7.614e + 04$	$9.181e + 60$	nan	$-nan$	
	$3.000e + 04$	$1.911e + 60$		$-nan$	
	$1.997e + 05$	$2.248e + 62$			
1.000e+00	$4.572e + 11$	$1.543e+114$	nan	nan	
	$1.272e + 11$	$1.092e+113$	nan		
	$9.031e + 11$	$1.506e+115$			
2.000e+00	$2.800e + 23$	$1.253e+227$	nan	$-nan$	
	$6.592e + 22$	$inf\ inf$		$-nan$	
	$1.097e + 24$				
3.000e+00	$2.884e + 49$	nan	nan	nan	nan
	$6.678e + 48$	nan		nan	
	$7.670e + 49$				
4.000e+00	$4.371e + 91$	nan	nan	nan	nan
	$1.075e + 91$	nan		nan	
	$1.399e + 92$				

Table of norms for V. $\mu = 0.0010$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03		
0.000e+00	$1.346e + 01$	$8.572e + 01$	nan	$-nan$	
	$6.953e + 00$	$2.103e + 01$		$-nan$	
	$9.841e + 01$	$3.297e + 03$			
1.000e+00	$1.344e + 02$	$1.785e + 03$	nan	nan	
	$4.631e + 01$	$3.631e + 02$		nan	
	$7.781e + 02$	$2.647e + 04$			
2.000e+00	$1.874e + 01$	$2.083e + 03$	nan	$-nan$	
	$8.536e + 00$	$2.093e + 02$		$-nan$	
	$1.353e + 02$	$2.982e + 04$			
3.000e+00	$2.765e + 01$	nan	nan	nan	nan
	$1.338e + 01$	nan		nan	
	$2.007e + 02$				
4.000e+00	$2.727e + 02$	nan	nan	nan	nan
	$8.714e + 01$	nan		nan	
	$1.264e + 03$				

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	
0.000e+00	$1.140e + 02$	$5.843e + 22$	$8.384e + 194$	
	$4.643e + 01$	$8.892e + 21$	inf inf	
	$6.830e + 02$	$1.684e + 24$		
1.000e+00	$2.003e + 04$	$1.699e + 57$	nan	nan
	$6.114e + 03$	$1.210e + 56$	nan	
	$4.109e + 04$	$1.575e + 58$		
2.000e+00	$2.685e + 07$	$1.883e + 108$	$3.179e + 55$	
	$6.948e + 06$	$1.867e + 107$	$9.403e + 53$	
	$6.477e + 07$	$2.599e + 109$	$1.710e + 57$	
3.000e+00	$1.283e + 26$	$2.761e + 171$	$1.611e - 02$	
	$2.869e + 25$	inf inf	$2.921e - 03$	
	$5.637e + 26$		$3.865e - 01$	
4.000e+00	$9.205e + 53$	nan $-nan$	$7.515e - 03$	
	$2.058e + 53$	$-nan$	$1.434e - 03$	
	$2.921e + 54$		$1.781e - 01$	

Table of norms for V. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$6.763e + 00$	$9.693e + 01$	$1.712e + 02$
	$3.636e + 00$	$1.074e + 01$	$7.741e + 00$
	$4.417e + 01$	$1.588e + 03$	$1.111e + 04$
1.000e+00	$4.298e + 00$	$4.844e + 02$	$nan \quad nan$
	$2.509e + 00$	$5.844e + 01$	nan
	$2.245e + 01$	$7.852e + 03$	
2.000e+00	$4.896e + 00$	$1.896e + 01$	$3.158e + 01$
	$3.500e + 00$	$4.630e + 00$	$3.011e + 00$
	$5.271e + 01$	$6.668e + 02$	$2.232e + 03$
3.000e+00	$8.664e + 00$	$1.753e + 02$	$2.910e - 03$
	$3.977e + 00$	$1.892e + 01$	$7.636e - 04$
	$6.327e + 01$	$2.701e + 03$	$9.087e - 02$
4.000e+00	$4.331e + 01$	$nan \quad -nan$	$1.426e - 03$
	$1.393e + 01$	$-nan$	$3.763e - 04$
	$1.989e + 02$		$4.278e - 02$

Table of norms for H. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e+00	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
2.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
3.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>
4.000e+00	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	$1.387e - 02$
	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	$3.580e - 04$
			$4.317e - 01$

Table of norms for V. $\mu = 0.0010$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
1.000e+00	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>
	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	<i>nan</i>
2.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	<i>-nan</i>
3.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>
	<i>nan</i>	<i>nan</i>	<i>-nan</i>
4.000e+00	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	$1.145e - 04$
	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	$5.932e - 05$
			$1.541e - 03$

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$6.013e + 14$	$3.218e + 84$	$nan -nan$
	$2.706e + 14$	$3.457e + 83$	$-nan$
	$3.824e + 15$	$5.351e + 85$	
1.000e+00	$8.151e + 24$	$1.573e+152$	$nan -nan$
	$7.604e + 24$	$3.748e+151$	$-nan$
	$7.798e + 24$	$3.415e+153$	
2.000e+00	$9.381e + 38$	$nan -nan$	$nan -nan$
	$2.104e + 38$	$-nan$	$-nan$
	$3.983e + 39$		
3.000e+00	$1.090e + 62$	$nan nan$	$nan -nan$
	$2.443e + 61$	nan	$-nan$
	$4.747e + 62$		
4.000e+00	$1.753e+138$	$nan -nan$	$nan -nan$
	$3.933e+137$	$-nan$	$-nan$
	$8.068e+138$		

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$7.861e + 02$	$4.751e + 02$	$nan -nan$
	$2.878e + 02$	$1.454e + 02$	$-nan$
	$4.036e + 03$	$1.269e + 04$	
1.000e+00	$9.823e + 00$	$2.666e + 04$	$nan -nan$
	$6.986e + 00$	$5.741e + 03$	$-nan$
	$4.845e + 01$	$5.205e + 05$	
2.000e+00	$8.715e + 02$	$nan -nan$	$nan -nan$
	$3.289e + 02$	$-nan$	$-nan$
	$3.603e + 03$		
3.000e+00	$3.312e + 03$	$nan nan$	$nan -nan$
	$1.104e + 03$	nan	$-nan$
	$1.607e + 04$		
4.000e+00	$5.384e + 01$	$nan -nan$	$nan -nan$
	$2.991e + 01$	$-nan$	$-nan$
	$4.270e + 02$		

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$2.542e + 05$	$2.468e + 43$	$nan -nan$
	$1.075e + 05$	$4.313e + 42$	$-nan$
	$2.196e + 06$	$7.281e + 44$	
1.000e+00	$1.157e + 12$	$7.898e + 104$	$nan nan$
	$5.784e + 11$	$1.208e + 104$	nan
	$1.312e + 12$	$4.997e + 105$	
2.000e+00	$2.357e + 28$	$3.574e + 184$	$4.147e + 251$
	$6.798e + 27$	$inf inf$	$inf inf$
	$6.242e + 28$		
3.000e+00	$5.474e + 43$	$nan -nan$	$5.283e - 04$
	$1.224e + 43$	$-nan$	$2.425e - 04$
	$2.418e + 44$		$1.576e - 03$
4.000e+00	$4.137e + 82$	$nan nan$	$2.639e - 04$
	$9.266e + 81$	nan	$1.211e - 04$
	$1.779e + 83$		$7.852e - 04$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$3.427e + 01$	$5.969e + 01$	$nan -nan$
	$1.789e + 01$	$1.605e + 01$	$-nan$
	$3.061e + 02$	$2.552e + 03$	
1.000e+00	$3.254e + 00$	$4.239e + 02$	$nan nan$
	$1.652e + 00$	$4.440e + 01$	nan
	$1.699e + 01$	$5.603e + 03$	
2.000e+00	$5.195e + 01$	$3.964e + 02$	$8.700e + 02$
	$2.206e + 01$	$6.752e + 01$	$4.567e + 01$
	$3.007e + 02$	$8.322e + 03$	$5.998e + 04$
3.000e+00	$1.057e + 02$	$nan -nan$	$4.434e - 04$
	$3.547e + 01$	$-nan$	$1.730e - 04$
	$5.239e + 02$		$1.459e - 03$
4.000e+00	$1.417e + 02$	$nan nan$	$2.215e - 04$
	$5.482e + 01$	nan	$8.648e - 05$
	$8.437e + 02$		$7.278e - 04$

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$6.341e + 02$	$3.845e + 08$	$5.158e - 02$
	$2.059e + 02$	$4.626e + 07$	$1.439e - 02$
	$4.781e + 03$	$7.748e + 09$	$7.982e - 01$
1.000e+00	$6.085e + 04$	$8.902e + 18$	$2.367e - 02$
	$1.509e + 04$	$7.214e + 17$	$6.999e - 03$
	$3.387e + 05$	$6.339e + 19$	$3.668e - 01$
2.000e+00	$1.137e + 06$	$2.129e - 01$	$1.140e - 02$
	$2.627e + 05$	$4.859e - 02$	$3.454e - 03$
	$4.038e + 06$	$5.358e + 00$	$1.766e - 01$
3.000e+00	$1.350e + 12$	$6.767e - 02$	$5.598e - 03$
	$3.164e + 11$	$1.826e - 02$	$1.716e - 03$
	$5.297e + 12$	$1.003e + 00$	$8.673e - 02$
4.000e+00	$1.839e + 12$	$3.018e - 02$	$2.775e - 03$
	$5.392e + 11$	$8.808e - 03$	$8.553e - 04$
	$3.450e + 12$	$4.515e - 01$	$4.299e - 02$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$4.935e + 00$	$4.542e + 02$	$1.133e - 02$
	$2.183e + 00$	$4.972e + 01$	$3.297e - 03$
	$2.996e + 01$	$4.838e + 03$	$1.662e - 01$
1.000e+00	$1.137e + 01$	$8.930e + 01$	$5.446e - 03$
	$3.952e + 00$	$9.884e + 00$	$1.605e - 03$
	$7.002e + 01$	$1.272e + 03$	$7.750e - 02$
2.000e+00	$5.111e + 00$	$3.086e - 02$	$2.670e - 03$
	$2.741e + 00$	$9.360e - 03$	$7.923e - 04$
	$4.608e + 01$	$6.797e - 01$	$3.754e - 02$
3.000e+00	$2.921e + 01$	$1.426e - 02$	$1.322e - 03$
	$1.106e + 01$	$4.178e - 03$	$3.936e - 04$
	$1.383e + 02$	$2.087e - 01$	$1.849e - 02$
4.000e+00	$4.130e + 00$	$6.861e - 03$	$6.579e - 04$
	$2.161e + 00$	$2.020e - 03$	$1.962e - 04$
	$1.804e + 01$	$9.568e - 02$	$9.175e - 03$

Table of norms for H. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	$7.351e - 03$
	<i>nan</i>	<i>nan</i>	$2.605e - 03$ $5.011e - 02$
1.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$3.532e - 03$
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	$1.278e - 03$ $2.051e - 02$
2.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	$1.733e - 03$
	<i>nan</i>	<i>nan</i>	$6.340e - 04$ $1.002e - 02$
3.000e+00	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	$8.586e - 04$
	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	$3.159e - 04$ $4.956e - 03$
4.000e+00	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$4.447e - 03$	$4.274e - 04$
	<i>-nan</i>	$1.604e - 03$ $2.586e - 02$	$1.577e - 04$ $2.466e - 03$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	$2.122e - 03$
	<i>nan</i>	<i>nan</i>	$8.342e - 04$
1.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$1.027e - 03$
	<i>nan</i>	<i>-nan</i>	$4.020e - 04$
2.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	$5.062e - 04$
	<i>nan</i>	<i>nan</i>	$1.977e - 04$
3.000e+00	<i>nan</i> <i>-nan</i>	<i>nan</i> <i>nan</i>	$2.513e - 04$
	<i>-nan</i>	<i>nan</i>	$9.809e - 05$
4.000e+00	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$1.294e - 03$	$1.252e - 04$
	<i>-nan</i>	$5.069e - 04$	$4.886e - 05$
		$1.010e - 02$	$9.658e - 04$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	
0.000e+00	$1.091e + 08$	$2.536e + 65$	nan	nan
	$3.948e + 07$	$4.161e + 64$	nan	
	$7.057e + 08$	$3.924e + 66$		
1.000e+00	$1.515e + 12$	$3.954e + 137$	nan	$-nan$
	$7.061e + 11$	$1.121e + 137$	$-nan$	
	$3.665e + 12$	$5.038e + 138$		
2.000e+00	$5.398e + 27$	$2.707e + 285$	nan	nan
	$3.015e + 27$	$inf\ inf$	nan	
	$2.167e + 28$			
3.000e+00	$5.176e + 57$	nan	$-nan$	$2.810e - 04$
	$1.273e + 57$	$-nan$		$1.784e - 04$
	$1.777e + 58$			$7.467e - 04$
4.000e+00	$2.419e + 103$	nan	nan	$1.406e - 04$
	$9.075e + 102$	nan		$8.925e - 05$
	$1.484e + 104$			$3.741e - 04$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	
0.000e+00	$3.339e + 01$	$9.089e + 02$	nan	nan
	$2.025e + 01$	$1.851e + 02$	nan	
	$2.383e + 02$	$2.096e + 04$		
1.000e+00	$4.768e + 01$	$7.276e + 03$	nan	$-nan$
	$1.963e + 01$	$1.205e + 03$	$-nan$	
	$2.241e + 02$	$1.372e + 05$		
2.000e+00	$8.885e + 02$	$7.186e + 02$	nan	nan
	$4.582e + 02$	$1.787e + 02$	nan	
	$4.080e + 03$	$1.819e + 04$		
3.000e+00	$8.988e + 01$	nan	$-nan$	$1.589e - 04$
	$4.254e + 01$	$-nan$		$7.291e - 05$
	$4.403e + 02$			$5.189e - 04$
4.000e+00	$1.860e + 02$	nan	nan	$7.968e - 05$
	$8.414e + 01$	nan		$3.651e - 05$
	$1.042e + 03$			$2.597e - 04$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$1.098e + 06$	$1.780e + 07$	$4.464e - 03$
	$2.630e + 05$	$2.985e + 06$	$2.043e - 03$
	$3.775e + 06$	$5.849e + 08$	$1.222e - 02$
1.000e+00	$2.667e + 04$	$4.318e + 09$	$2.217e - 03$
	$1.528e + 04$	$5.246e + 08$	$1.016e - 03$
	$1.183e + 05$	$3.967e + 10$	$6.080e - 03$
2.000e+00	$1.591e + 13$	$1.146e - 02$	$1.105e - 03$
	$3.559e + 12$	$5.196e - 03$	$5.069e - 04$
	$5.136e + 13$	$3.122e - 02$	$3.033e - 03$
3.000e+00	$1.794e + 13$	$5.599e - 03$	$5.517e - 04$
	$4.216e + 12$	$2.561e - 03$	$2.532e - 04$
	$6.360e + 13$	$1.530e - 02$	$1.515e - 03$
4.000e+00	$1.262e + 13$	$2.775e - 03$	$2.756e - 04$
	$4.458e + 12$	$1.272e - 03$	$1.265e - 04$
	$1.937e + 13$	$7.603e - 03$	$7.572e - 04$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$2.738e + 01$	$2.039e + 01$	$3.065e - 03$
	$1.215e + 01$	$7.961e + 00$	$1.361e - 03$
	$1.757e + 02$	$1.048e + 03$	$9.235e - 03$
1.000e+00	$1.246e + 01$	$1.987e + 01$	$1.533e - 03$
	$8.572e + 00$	$7.869e + 00$	$6.767e - 04$
	$6.781e + 01$	$4.821e + 02$	$4.626e - 03$
2.000e+00	$1.814e + 01$	$7.562e - 03$	$7.666e - 04$
	$1.029e + 01$	$3.453e - 03$	$3.374e - 04$
	$9.476e + 01$	$2.274e - 02$	$2.314e - 03$
3.000e+00	$2.004e + 01$	$3.823e - 03$	$3.832e - 04$
	$1.110e + 01$	$1.705e - 03$	$1.685e - 04$
	$1.979e + 02$	$1.152e - 02$	$1.157e - 03$
4.000e+00	$1.754e + 01$	$1.913e - 03$	$1.916e - 04$
	$6.125e + 00$	$8.470e - 04$	$8.418e - 05$
	$7.346e + 01$	$5.778e - 03$	$5.787e - 04$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$6.007e + 02$	$1.568e + 00$	$7.259e - 02$
	$3.064e + 02$	$4.277e - 01$	$1.972e - 02$
	$7.033e + 03$	$2.557e + 01$	$4.754e - 01$
1.000e+00	$9.374e + 03$	$4.478e - 01$	$3.541e - 02$
	$2.131e + 03$	$1.176e - 01$	$9.683e - 03$
	$3.814e + 04$	$3.736e + 00$	$2.289e - 01$
2.000e+00	$3.181e + 03$	$1.947e - 01$	$1.749e - 02$
	$7.419e + 02$	$5.225e - 02$	$4.799e - 03$
	$8.624e + 03$	$1.339e + 00$	$1.124e - 01$
3.000e+00	$1.757e + 00$	$9.129e - 02$	$8.691e - 03$
	$8.537e - 01$	$2.488e - 02$	$2.389e - 03$
	$1.009e + 01$	$5.997e - 01$	$5.570e - 02$
4.000e+00	$5.943e - 01$	$4.440e - 02$	$4.332e - 03$
	$1.971e - 01$	$1.216e - 02$	$1.192e - 03$
	$2.880e + 00$	$2.859e - 01$	$2.773e - 02$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$5.855e + 00$	$2.318e - 01$	$1.392e - 02$
	$3.789e + 00$	$7.808e - 02$	$5.080e - 03$
	$6.347e + 01$	$1.927e + 00$	$9.453e - 02$
1.000e+00	$3.129e + 00$	$8.344e - 02$	$6.805e - 03$
	$1.225e + 00$	$2.879e - 02$	$2.503e - 03$
	$1.629e + 01$	$5.933e - 01$	$4.615e - 02$
2.000e+00	$6.710e + 01$	$3.701e - 02$	$3.365e - 03$
	$3.127e + 01$	$1.330e - 02$	$1.242e - 03$
	$2.341e + 02$	$2.537e - 01$	$2.281e - 02$
3.000e+00	$3.947e + 00$	$1.754e - 02$	$1.673e - 03$
	$2.138e + 00$	$6.397e - 03$	$6.188e - 04$
	$9.851e + 00$	$1.189e - 01$	$1.134e - 02$
4.000e+00	$9.862e - 02$	$8.544e - 03$	$8.341e - 04$
	$4.161e - 02$	$3.140e - 03$	$3.088e - 04$
	$5.053e - 01$	$5.773e - 02$	$5.653e - 03$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	$1.685e + 00$	$1.074e - 02$
	<i>nan</i>	$2.629e - 01$	$4.336e - 03$
		$1.310e + 01$	$5.749e - 02$
1.000e+00	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$6.222e - 02$	$5.250e - 03$
	<i>-nan</i>	$2.425e - 02$	$2.136e - 03$
		$3.757e - 01$	$2.840e - 02$
2.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	$2.830e - 02$	$2.595e - 03$
	<i>nan</i>	$1.129e - 02$	$1.060e - 03$
		$1.477e - 01$	$1.411e - 02$
3.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	$1.355e - 02$	$1.290e - 03$
	<i>nan</i>	$5.459e - 03$	$5.281e - 04$
		$7.179e - 02$	$7.035e - 03$
4.000e+00	$9.378e - 02$	$6.579e - 03$	$6.431e - 04$
	$3.781e - 02$	$2.680e - 03$	$2.635e - 04$
	$3.758e - 01$	$3.536e - 02$	$3.512e - 03$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	$1.079e - 01$	$3.227e - 03$
	<i>nan</i>	$4.405e - 02$	$1.517e - 03$
		$1.733e + 00$	$2.056e - 02$
1.000e+00	<i>nan</i> <i>-nan</i>	$1.810e - 02$	$1.606e - 03$
	<i>-nan</i>	$8.495e - 03$	$7.482e - 04$
		$1.140e - 01$	$1.017e - 02$
2.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	$8.190e - 03$	$8.015e - 04$
	<i>nan</i>	$3.946e - 03$	$3.715e - 04$
		$5.295e - 02$	$5.057e - 03$
3.000e+00	<i>nan</i> <i>nan</i>	$4.044e - 03$	$4.003e - 04$
	<i>nan</i>	$1.909e - 03$	$1.851e - 04$
		$2.579e - 02$	$2.522e - 03$
4.000e+00	$2.354e - 02$	$2.010e - 03$	$2.001e - 04$
	$1.143e - 02$	$9.385e - 04$	$9.241e - 05$
	$1.210e - 01$	$1.272e - 02$	$1.259e - 03$

3.4. Выводы

По результатам численного эксперимента со вложенными сетками можно увидеть оценку точности снизу для схемы для случаев, когда схема сходится. Наименьшая ошибка имеет порядок 10^{-5} .

4. Негладкие начальные данные

4.1. Постановка задачи

Пусть $\Omega_x = [0; 10]$, тогда для системы (1) зададим две задачи, начальные условия которых, определяются следующим образом.

$$\begin{cases} \rho(0, x) = 1, x \notin [4.5; 5.5], \\ \rho(0, x) = 2, x \in [4.5; 5.5], \\ u(0, x) \equiv 0, x \in [0; 10] \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \rho(0, x) = 1, x \in [0; 10] \\ u(0, x) = 0, x \notin [4.5; 5.5], \\ u(0, x) = 1, x \in [4.5; 5.5], \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Функции f и f_0 из гладкой задачи положим равными $f \equiv f_0 \equiv 0$. Вычисление будем проводить до времени T_{st} , при котором решение выходит на стационар. Выходом на стационар будем считать выполнение условия:

$$\|(H^n, V^n) - (\tilde{H}^n, \tilde{V}^n)\|_C \leq \varepsilon$$

4.2. Численные эксперименты

В качестве измельчения сетки возьмем $\tau = 10^{-3} h = 10^{-2}$. Экспериментальным путем было подобрано значение $\varepsilon = 10^{-3}$. Ввиду того, что при $C = 100$ и $\mu = 0.001$ сходимость схемы плохая, данные параметры не будем рассматривать при расчете различных вариантов начальных условий.

Первая негладкая задача

Ниже приведены таблицы времени стабилизации в зависимости от разных параметров μ, C, γ

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	1482964	1.483e+03	2.109e-02	4.435e-03	5.727e-03	9.992e-04
1	2965927	1.483e+03	1.263e-02	8.443e-03	3.101e-03	2.917e-03
2	5931853	1.483e+03	1.154e-02	7.154e-03	2.366e-03	2.025e-03
3	11863705	1.483e+03	1.098e-02	6.557e-03	2.043e-03	1.636e-03

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	943131	9.431e+02	3.344e-02	1.147e-02	4.332e-03	9.996e-04
1	1886261	9.431e+02	3.311e-02	1.129e-02	4.185e-03	9.050e-04
2	3772521	9.431e+02	3.293e-02	1.120e-02	4.114e-03	8.613e-04
3	7545041	9.431e+02	3.285e-02	1.115e-02	4.079e-03	8.405e-04

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	919330	9.193e+02	1.980e-02	8.076e-03	6.651e-03	9.998e-04
1	1838659	9.193e+02	1.891e-02	8.395e-03	5.863e-03	1.467e-03
2	3677317	9.193e+02	1.853e-02	8.487e-03	5.518e-03	1.632e-03
3	7354633	9.193e+02	1.835e-02	8.521e-03	5.358e-03	1.701e-03

Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	163946	1.639e+02	1.087e-01	3.157e-02	8.669e-03	9.950e-04
1	327891	1.639e+02	1.041e-01	2.907e-02	7.359e-03	9.549e-04
2	655781	1.639e+02	1.018e-01	2.785e-02	6.758e-03	9.451e-04
3	1311561	1.639e+02	1.007e-01	2.724e-02	6.465e-03	9.426e-04

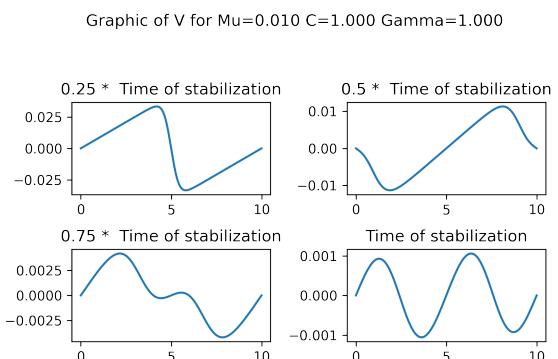
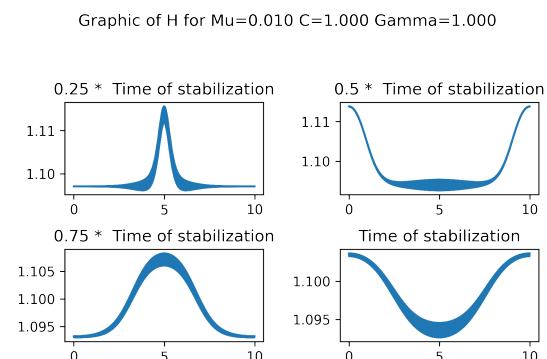
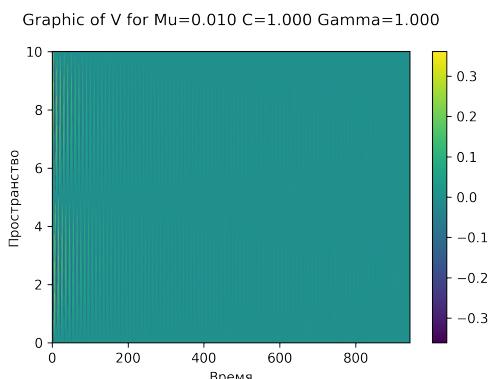
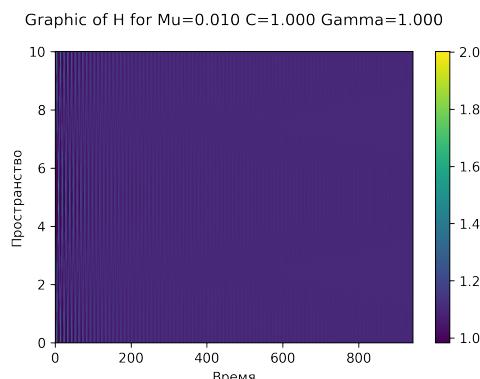
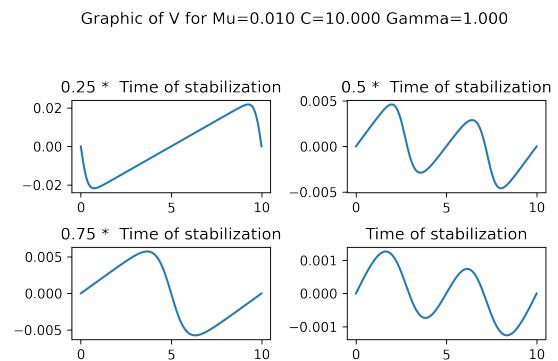
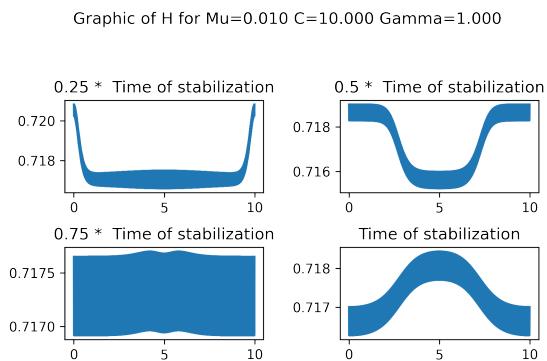
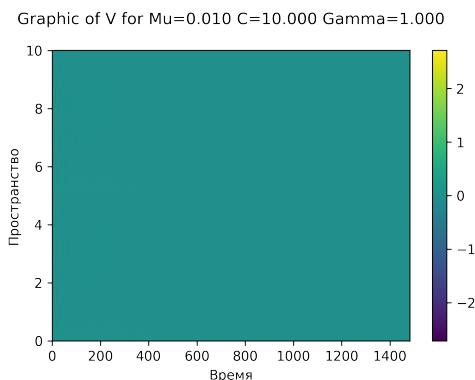
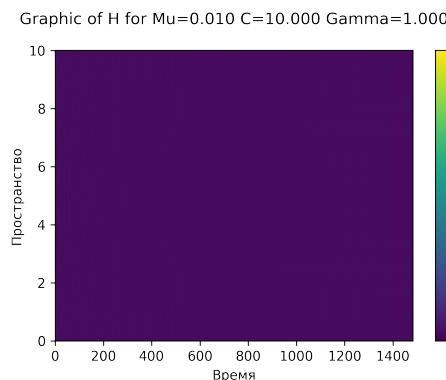
Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	134175	1.342e+02	4.542e-02	4.743e-02	2.030e-02	9.991e-04
1	268349	1.342e+02	4.525e-02	4.705e-02	2.002e-02	1.005e-03
2	536697	1.342e+02	4.517e-02	4.686e-02	1.987e-02	1.009e-03
3	1073393	1.342e+02	4.513e-02	4.677e-02	1.980e-02	1.011e-03

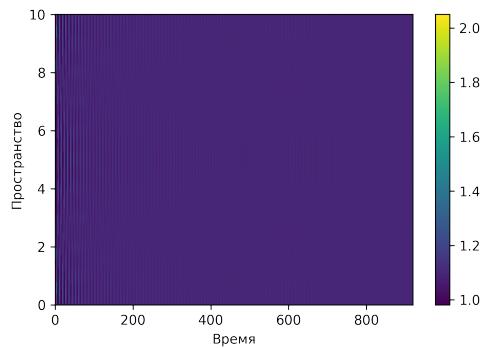
Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	135888	1.359e+02	1.034e-01	4.665e-02	1.489e-02	9.984e-04
1	271775	1.359e+02	1.024e-01	4.636e-02	1.488e-02	1.069e-03
2	543549	1.359e+02	1.019e-01	4.622e-02	1.487e-02	1.105e-03
3	1087097	1.359e+02	1.017e-01	4.615e-02	1.487e-02	1.124e-03

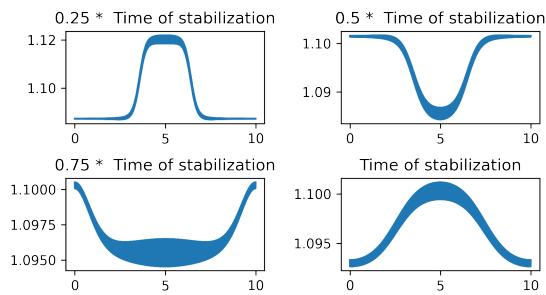
Теперь рассмотрим динамику процесса на графиках затухания и временных срезах для различных значений параметров.



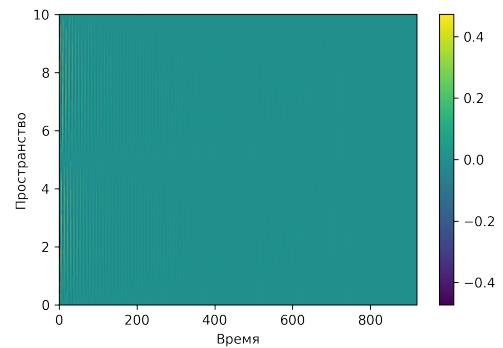
Graphic of H for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400



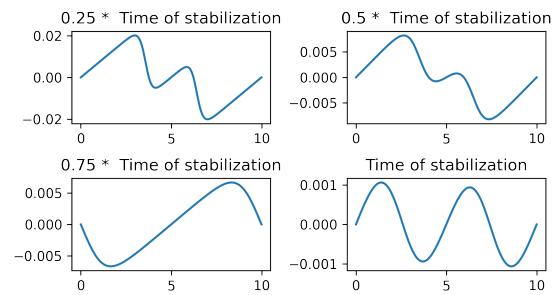
Graphic of H for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400



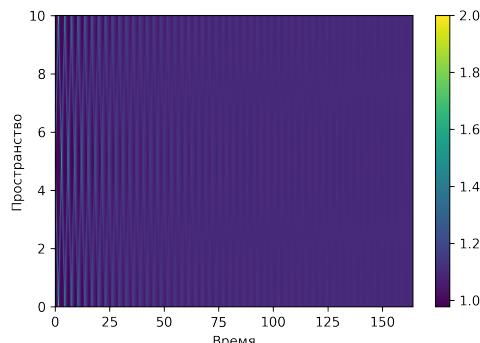
Graphic of V for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400



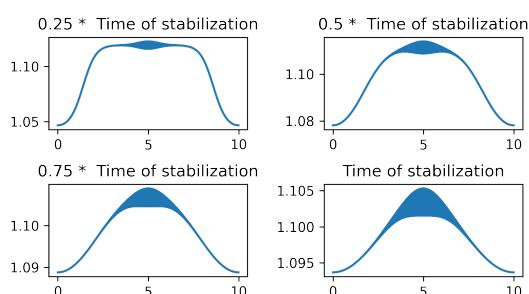
Graphic of V for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400



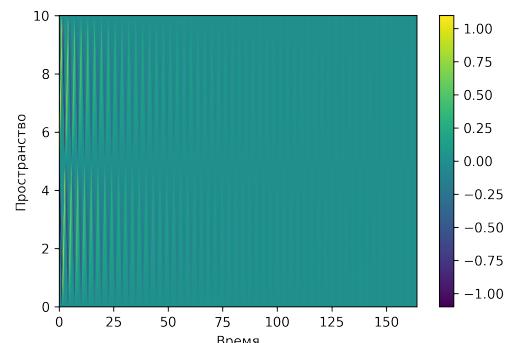
Graphic of H for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000



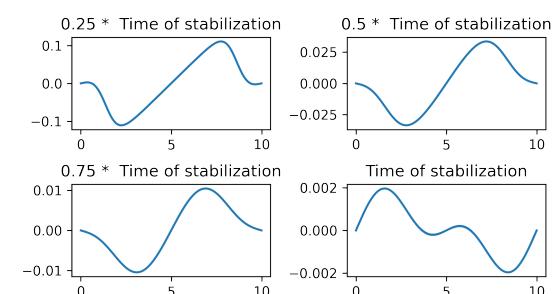
Graphic of H for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000

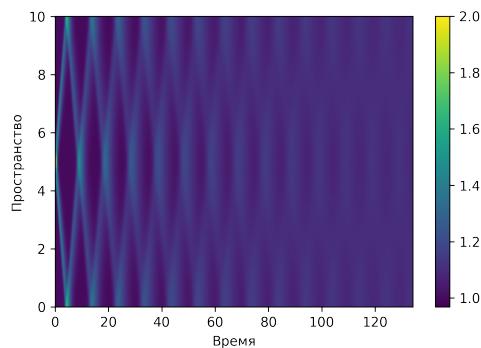
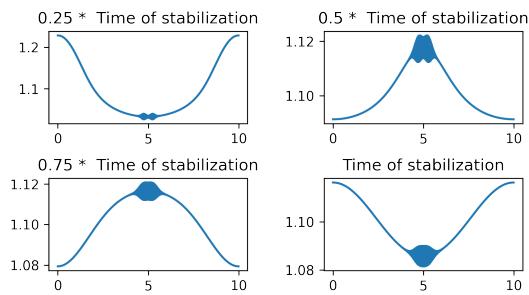
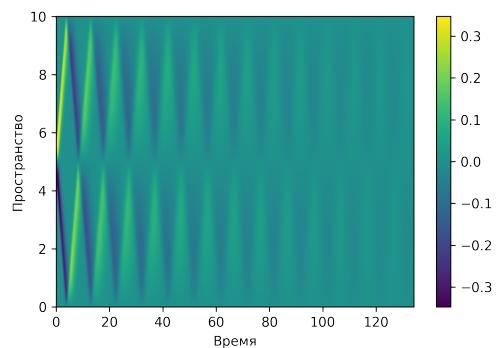
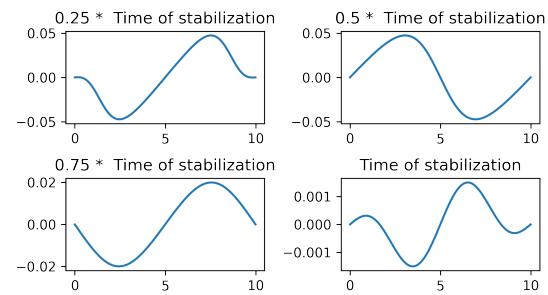
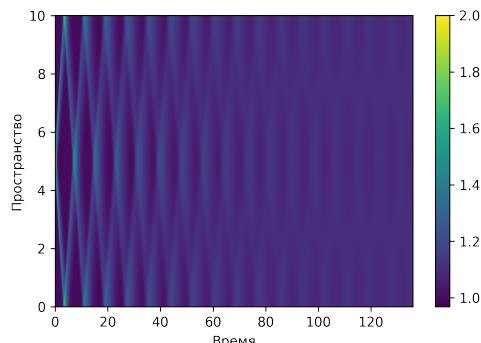
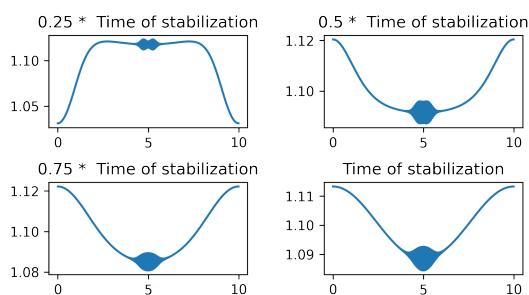
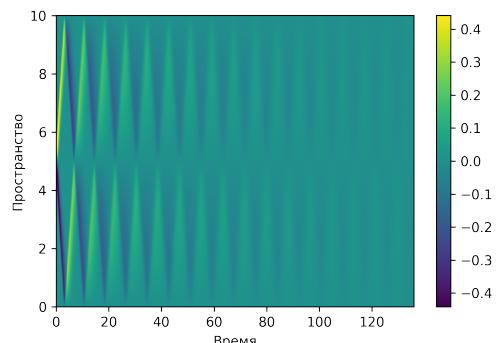
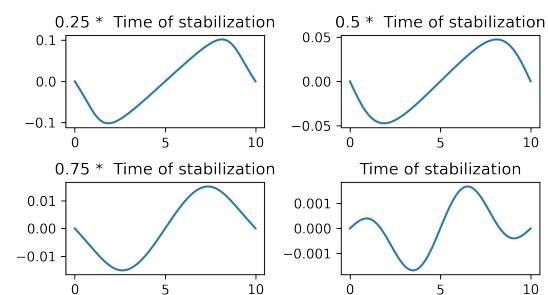


Graphic of V for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000



Graphic of V for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000

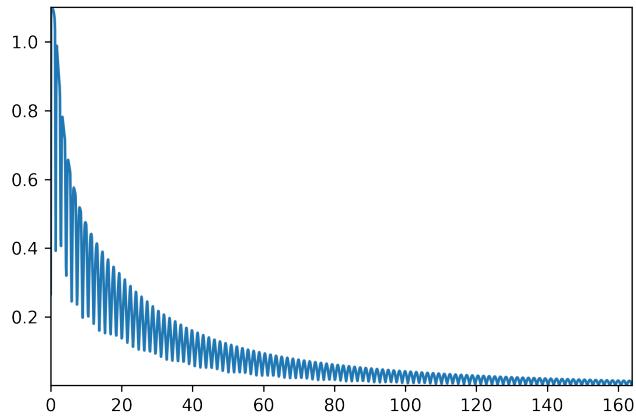


Graphic of H for $\mu=0.100$ $C=1.000$ $\gamma=1.000$ Graphic of H for $\mu=0.100$ $C=1.000$ $\gamma=1.000$ Graphic of V for $\mu=0.100$ $C=1.000$ $\gamma=1.000$ Graphic of V for $\mu=0.100$ $C=1.000$ $\gamma=1.000$ Graphic of H for $\mu=0.100$ $C=1.000$ $\gamma=1.400$ Graphic of H for $\mu=0.100$ $C=1.000$ $\gamma=1.400$ Graphic of V for $\mu=0.100$ $C=1.000$ $\gamma=1.400$ Graphic of V for $\mu=0.100$ $C=1.000$ $\gamma=1.400$ 

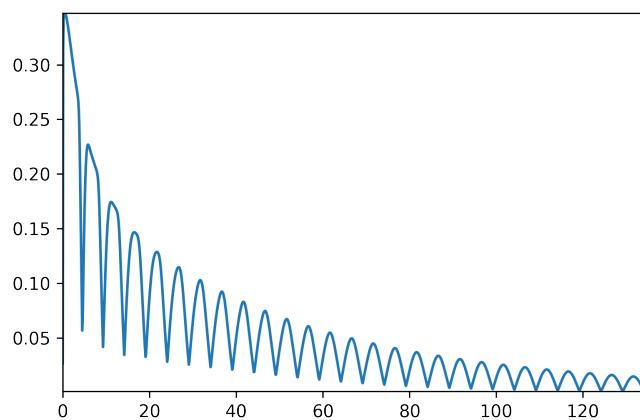
Период колебаний не зависит от μ , однако при увеличении C и γ частота колебаний увеличивается. Однако при уменьшении μ увеличивается время стабилизации процесса.

Приведем также графики норм для различных начальных параметров.

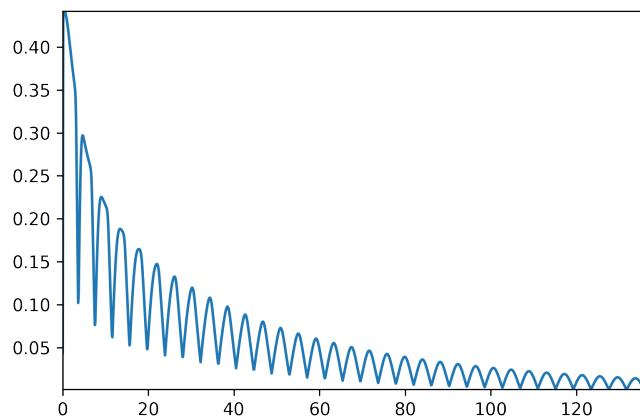
Graphic of V norm for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000



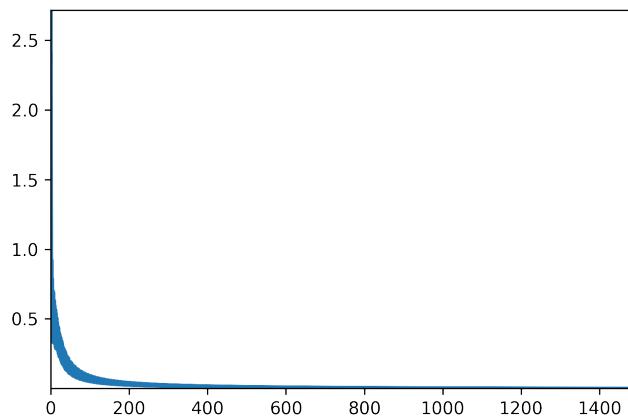
Graphic of V norm for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.000



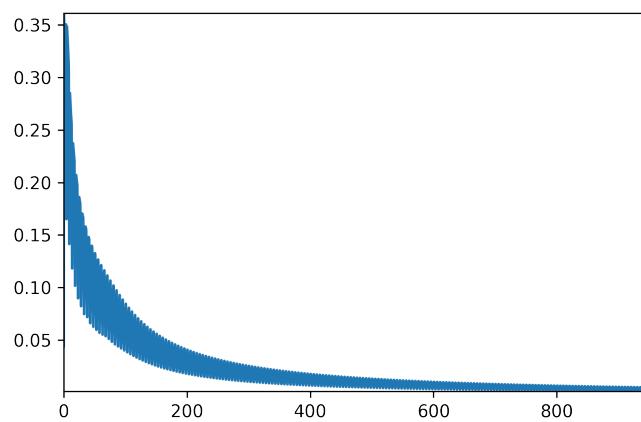
Graphic of V norm for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.400



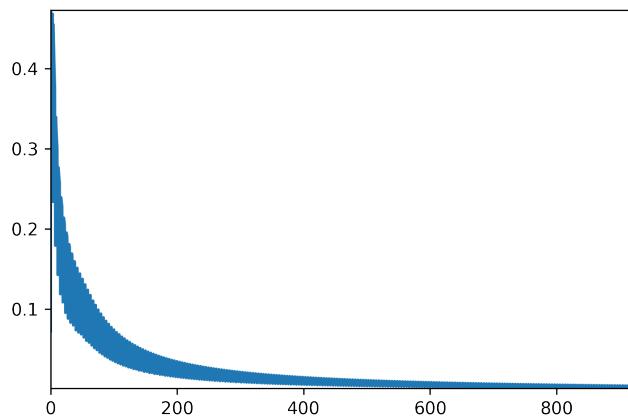
Graphic of V norm for Mu=0.010 C=10.000 Gamma=1.000



Graphic of V norm for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.000



Graphic of V norm for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400



Далее приведены значения $\Delta m(n)$ на измельченных и обычных сетках. А также их графическое представление.

Table of mass loss. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	163946	1.639e+02	2.222e-03	2.221e-03	2.215e-03	2.212e-03
1	327891	1.639e+02	1.033e-03	1.032e-03	1.029e-03	1.027e-03
2	655781	1.639e+02	4.993e-04	4.983e-04	4.968e-04	4.959e-04
3	1311561	1.639e+02	2.455e-04	2.449e-04	2.442e-04	2.437e-04

Table of mass loss. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	134175	1.342e+02	-1.686e-05	1.170e-04	1.300e-04	9.748e-05
1	268349	1.342e+02	-8.439e-06	5.785e-05	6.433e-05	4.826e-05
2	536697	1.342e+02	-4.225e-06	2.877e-05	3.200e-05	2.401e-05
3	1073393	1.342e+02	-2.116e-06	1.434e-05	1.596e-05	1.197e-05

Table of mass loss. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	135888	1.359e+02	2.745e-04	2.090e-04	2.116e-04	2.205e-04
1	271775	1.359e+02	1.358e-04	1.033e-04	1.044e-04	1.088e-04
2	543549	1.359e+02	6.751e-05	5.138e-05	5.186e-05	5.401e-05
3	1087097	1.359e+02	3.366e-05	2.562e-05	2.584e-05	2.691e-05

Table of mass loss. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	1482964	1.483e+03	3.484e-01	3.484e-01	3.484e-01	3.484e-01
1	2965927	1.483e+03	3.022e-02	3.022e-02	3.023e-02	3.023e-02
2	5931853	1.483e+03	7.440e-03	7.443e-03	7.443e-03	7.443e-03
3	11863705	1.483e+03	2.969e-03	2.970e-03	2.971e-03	2.970e-03

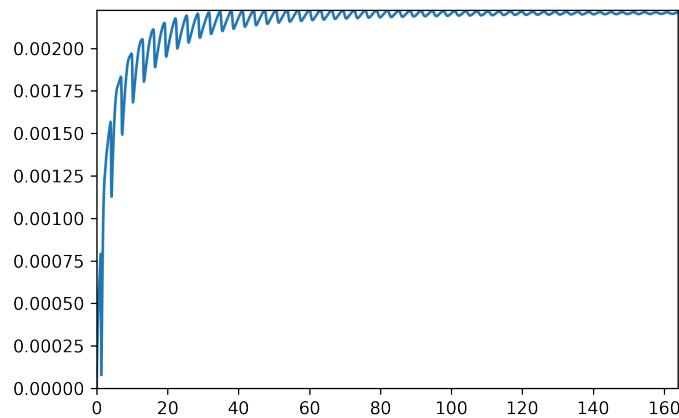
Table of mass loss. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	943131	9.431e+02	2.208e-03	2.204e-03	2.224e-03	2.215e-03
1	1886261	9.431e+02	1.020e-03	1.018e-03	1.028e-03	1.023e-03
2	3772521	9.431e+02	4.918e-04	4.909e-04	4.956e-04	4.935e-04
3	7545041	9.431e+02	2.417e-04	2.412e-04	2.436e-04	2.425e-04

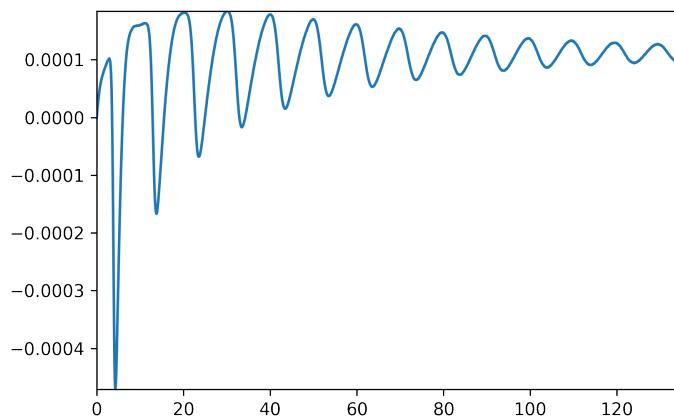
Table of mass loss. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	919330	9.193e+02	3.906e-03	3.902e-03	3.904e-03	3.911e-03
1	1838659	9.193e+02	1.715e-03	1.712e-03	1.713e-03	1.717e-03
2	3677317	9.193e+02	8.101e-04	8.087e-04	8.089e-04	8.109e-04
3	7354633	9.193e+02	3.944e-04	3.937e-04	3.937e-04	3.948e-04

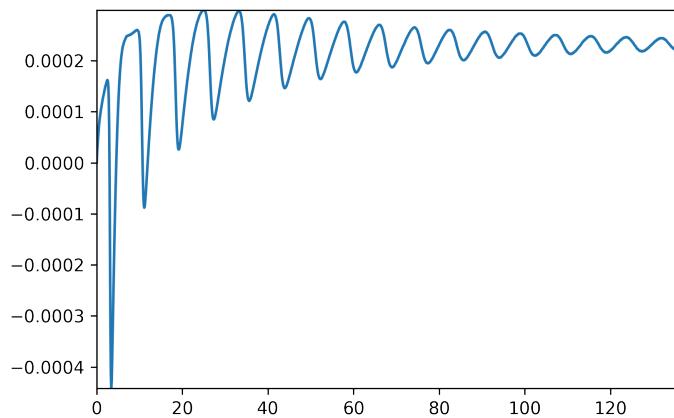
Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000



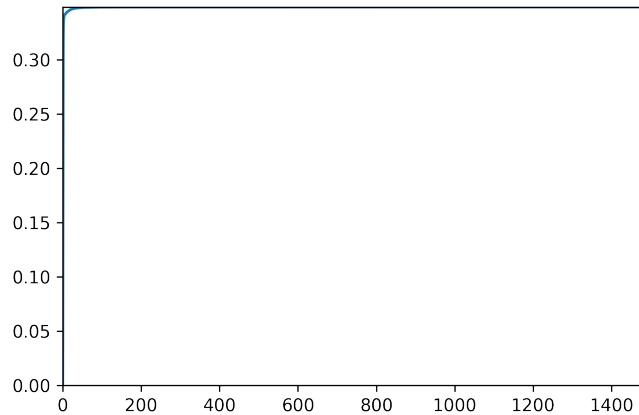
Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.000



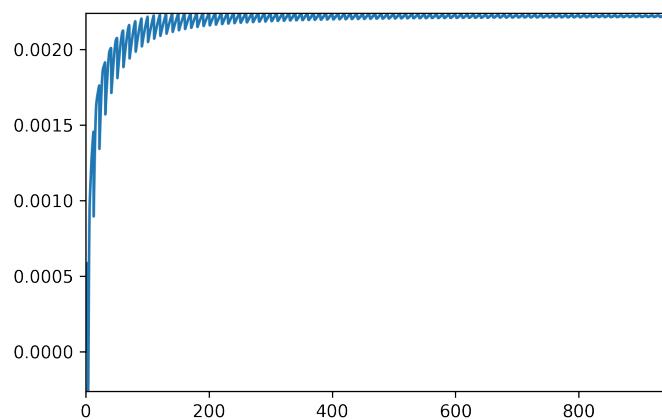
Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.400



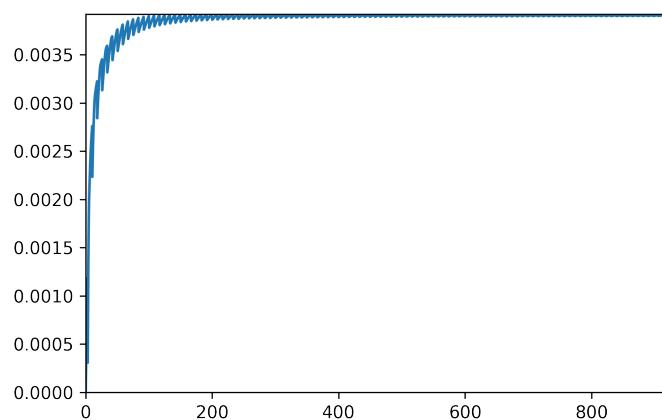
Graphic of Mass loss for Mu=0.010 C=10.000 Gamma=1.000



Graphic of Mass loss for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.000



Graphic of Mass loss for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400



Как можно заметить по таблицам потери массы составляют меньше 1-2%, из чего можно заключить, что закон сохранения массы выполняется.

Вторая негладкая задача

Ниже приведены таблицы времени стабилизации в зависимости от разных параметров μ , C , γ

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	5197350	5.197e+03	1.187e-02	4.526e-03	2.155e-03	9.998e-04
1	10394699	5.197e+03	6.803e-03	3.945e-03	2.463e-03	1.437e-03
2	20789397	5.197e+03	6.894e-03	3.268e-03	1.659e-03	7.737e-04
3	41578793	5.197e+03	6.781e-03	2.967e-03	1.375e-03	5.684e-04

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	2541366	2.541e+03	1.533e-02	4.103e-03	5.817e-03	9.995e-04
1	5082731	2.541e+03	1.507e-02	4.108e-03	5.616e-03	9.805e-04
2	10165461	2.541e+03	1.493e-02	4.107e-03	5.515e-03	9.711e-04
3	20330921	2.541e+03	1.487e-02	4.106e-03	5.466e-03	9.664e-04

Table of norms for V. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	2495755	2.496e+03	1.360e-02	8.493e-03	3.638e-03	1.015e-03
1	4991509	2.496e+03	1.310e-02	8.478e-03	4.044e-03	1.483e-03
2	9983017	2.496e+03	1.288e-02	8.377e-03	4.184e-03	1.677e-03
3	19966033	2.496e+03	1.278e-02	8.311e-03	4.242e-03	1.763e-03

Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	444220	4.442e+02	6.126e-02	2.198e-02	7.506e-03	9.959e-04
1	888439	4.442e+02	6.083e-02	2.162e-02	7.186e-03	8.776e-04
2	1776877	4.442e+02	6.058e-02	2.143e-02	7.023e-03	8.240e-04
3	3553753	4.442e+02	6.046e-02	2.134e-02	6.943e-03	7.985e-04

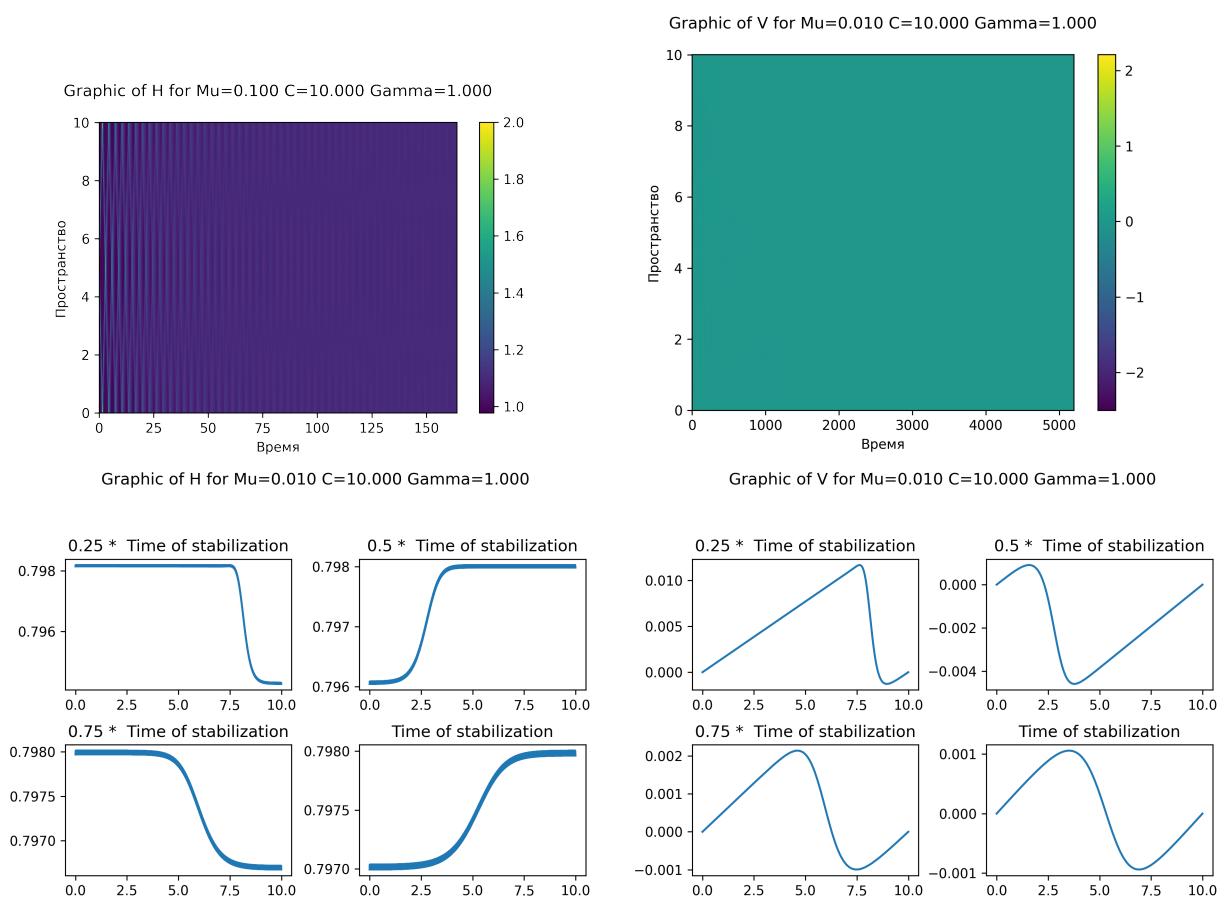
Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	414339	4.143e+02	3.391e-02	2.582e-02	1.688e-02	9.997e-04
1	828677	4.143e+02	3.386e-02	2.571e-02	1.683e-02	1.001e-03
2	1657353	4.143e+02	3.383e-02	2.565e-02	1.680e-02	1.002e-03
3	3314705	4.143e+02	3.382e-02	2.562e-02	1.679e-02	1.002e-03

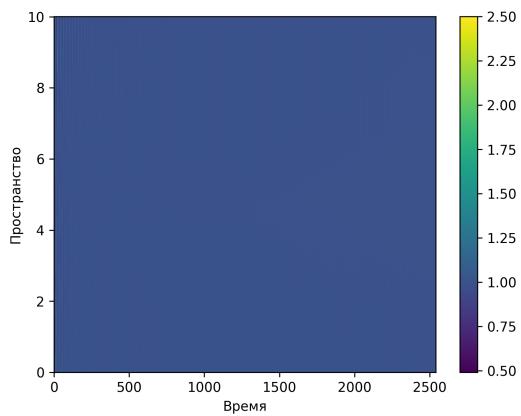
Table of norms for V. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	400813	4.008e+02	6.232e-02	2.319e-02	8.014e-03	9.986e-04
1	801625	4.008e+02	6.216e-02	2.310e-02	7.955e-03	9.730e-04
2	1603249	4.008e+02	6.209e-02	2.306e-02	7.926e-03	9.603e-04
3	3206497	4.008e+02	6.205e-02	2.304e-02	7.911e-03	9.540e-04

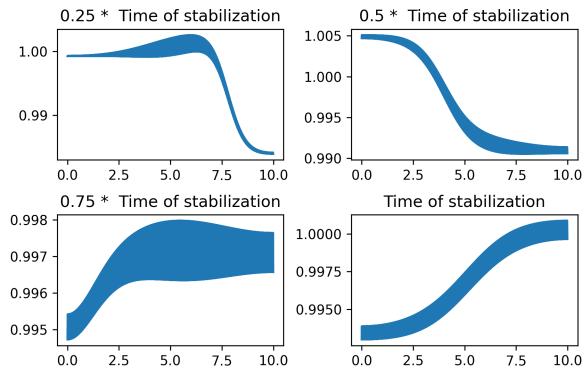
Теперь рассмотрим динамику процесса на графиках затухания и временных срезах для различных значений параметров.



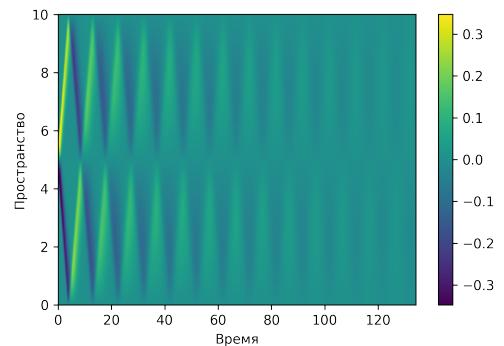
Graphic of H for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.000



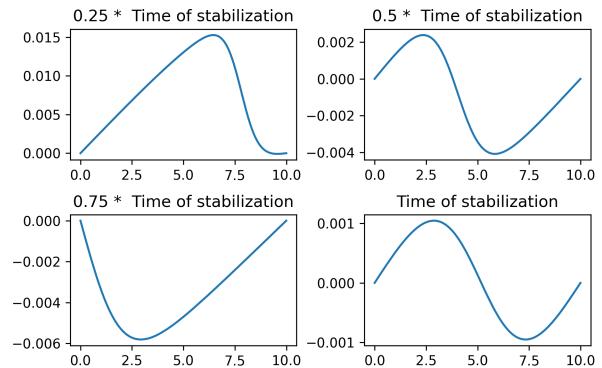
Graphic of H for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.000



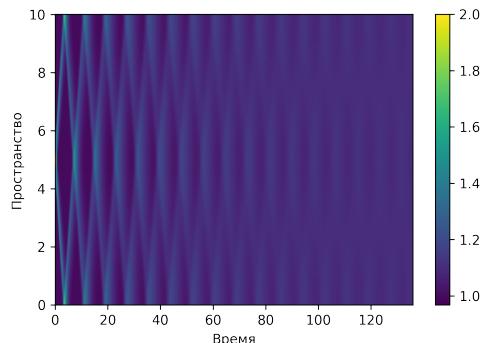
Graphic of V for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.000



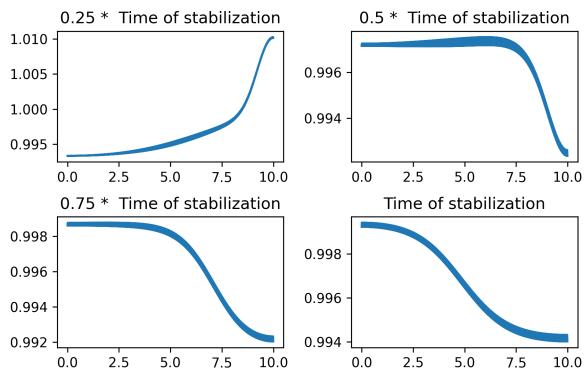
Graphic of V for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.000



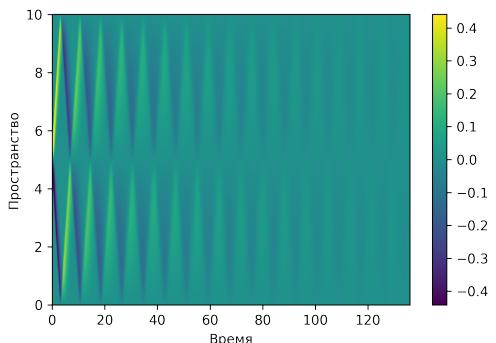
Graphic of H for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.400



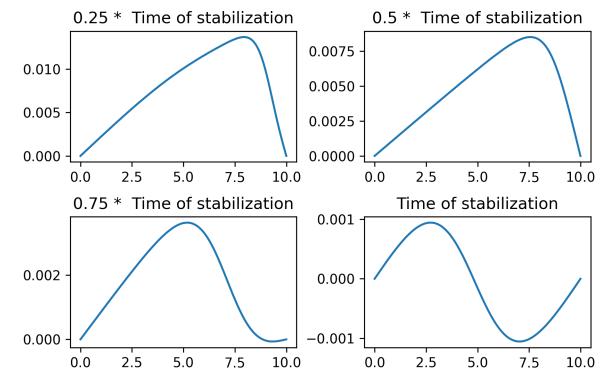
Graphic of H for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400



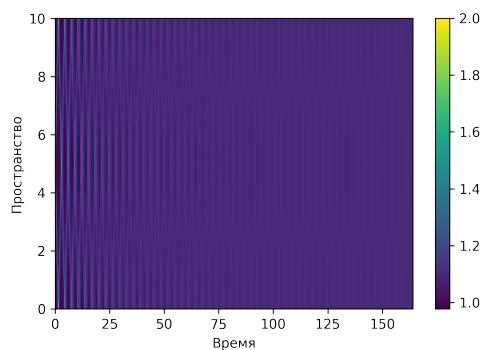
Graphic of V for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.400



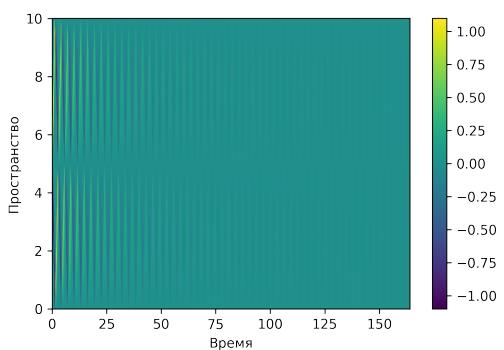
Graphic of V for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400



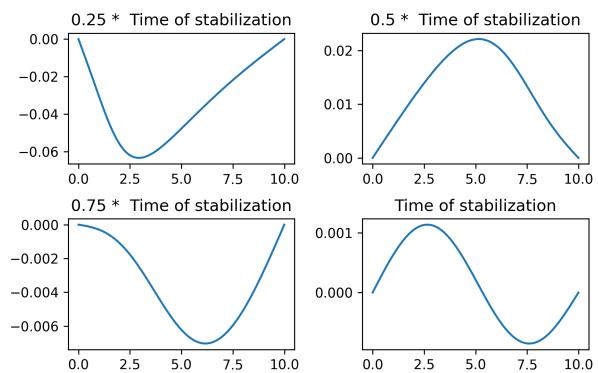
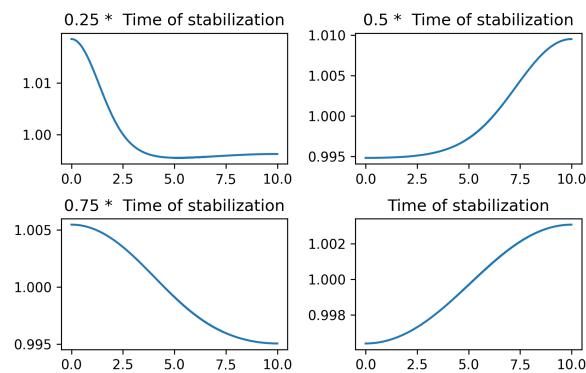
Graphic of H for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000



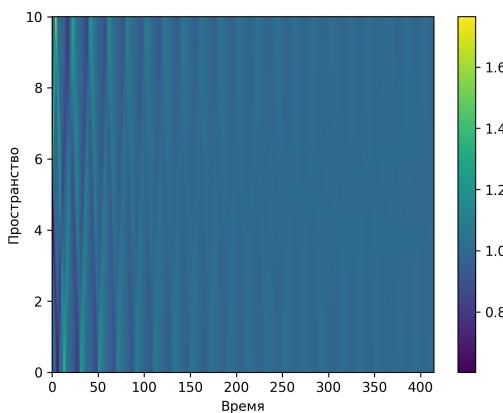
Graphic of V for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000



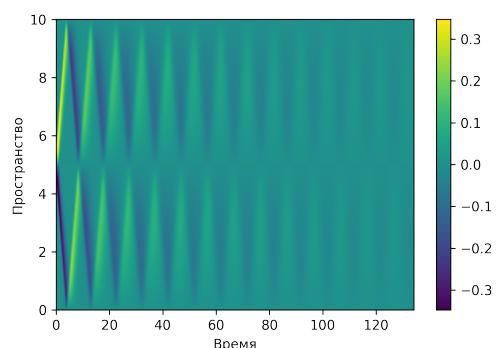
Graphic of H for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000



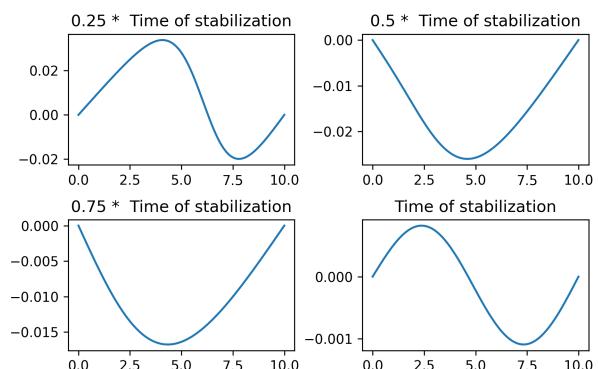
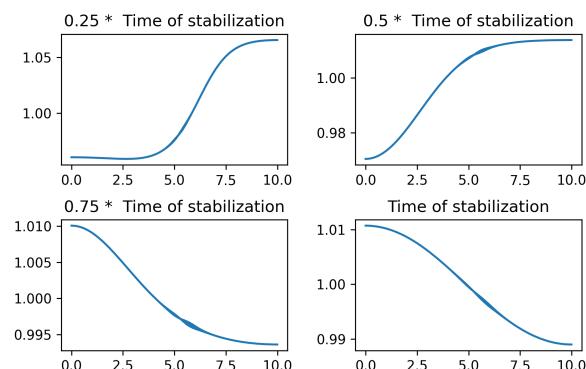
Graphic of H for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.000



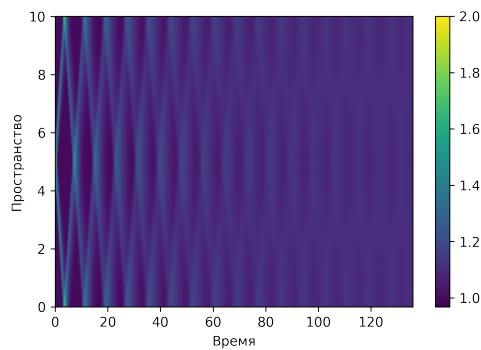
Graphic of V for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.000



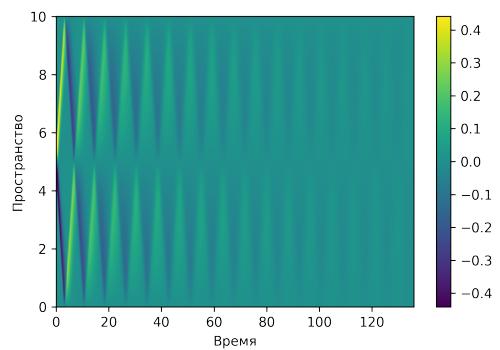
Graphic of H for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.000



Graphic of H for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.400

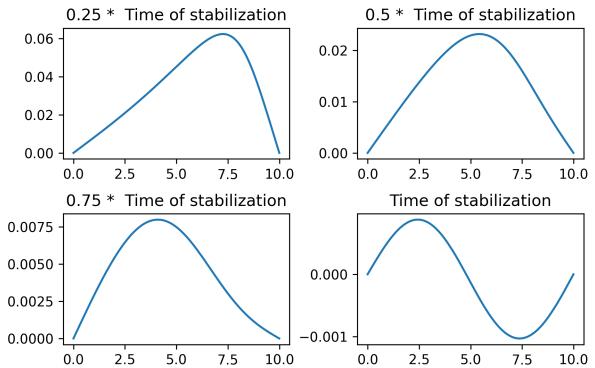
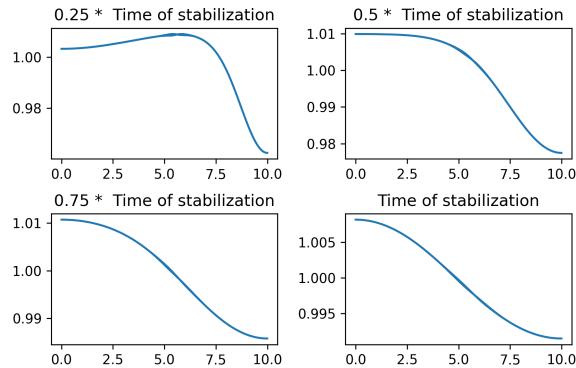


Graphic of V for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.400



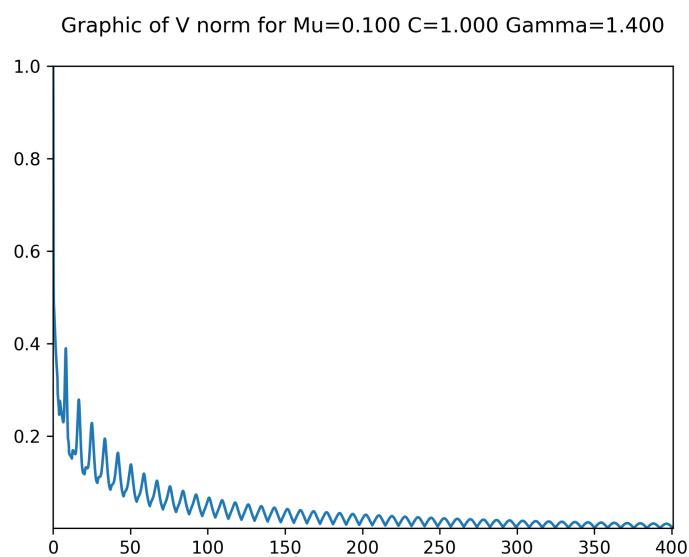
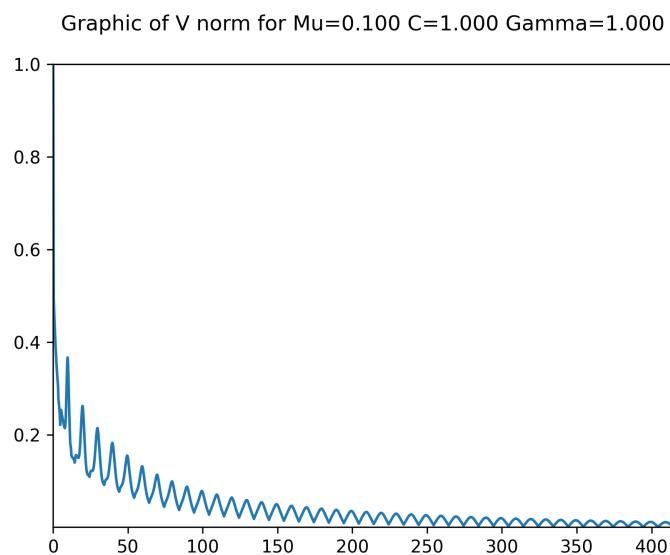
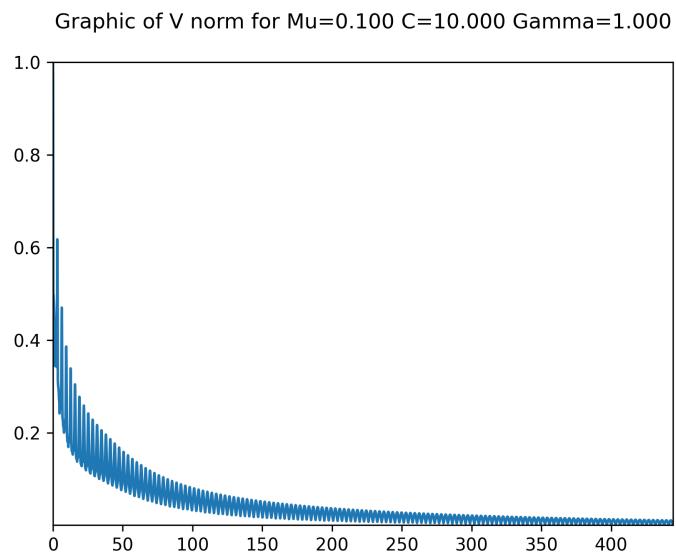
Graphic of H for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.400

Graphic of V for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.400

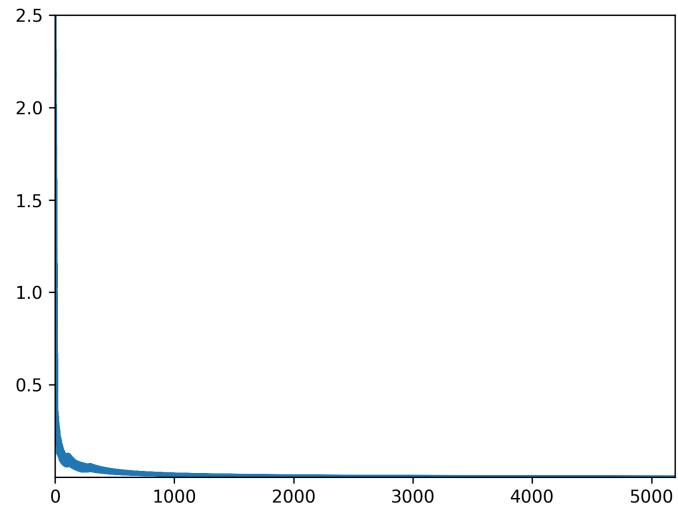


Период колебаний не зависит от μ , однако при увеличении C и γ частота колебаний увеличивается. Однако при уменьшении μ увеличивается время стабилизации процесса.

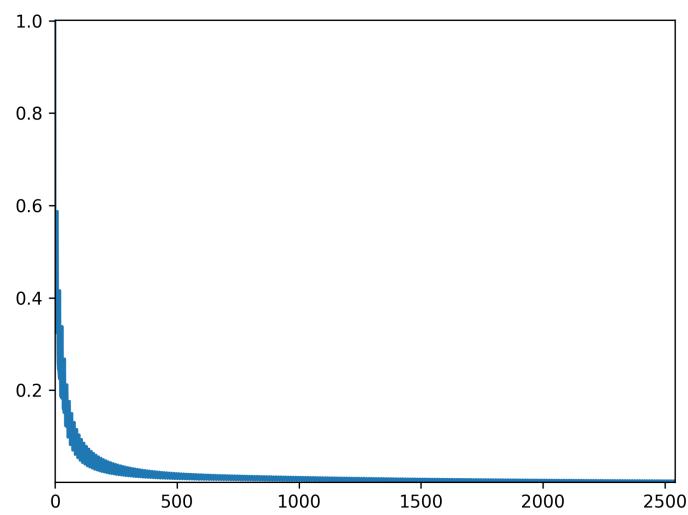
Приведем также графики невязок для различных параметров.



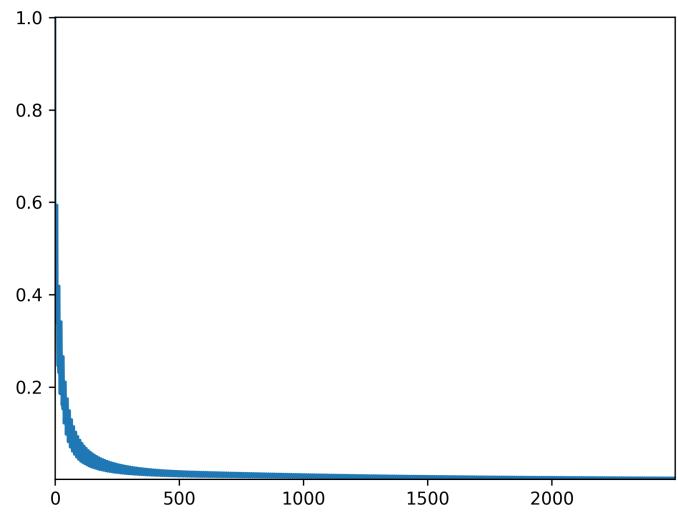
Graphic of V norm for Mu=0.010 C=10.000 Gamma=1.000



Graphic of V norm for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.000



Graphic of V norm for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400



Далее приведены значения $\Delta m(n)$ на измельченных и обычных сетках. А также их графическое представление

Table of mass loss. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	444220	4.442e+02	2.725e-04	2.826e-04	2.854e-04	2.863e-04
1	888439	4.442e+02	1.288e-04	1.336e-04	1.349e-04	1.353e-04
2	1776877	4.442e+02	6.272e-05	6.505e-05	6.568e-05	6.586e-05
3	3553753	4.442e+02	3.096e-05	3.211e-05	3.242e-05	3.251e-05

Table of mass loss. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	414339	4.143e+02	2.568e-04	2.822e-04	2.735e-04	2.757e-04
1	828677	4.143e+02	1.273e-04	1.399e-04	1.357e-04	1.367e-04
2	1657353	4.143e+02	6.339e-05	6.971e-05	6.757e-05	6.811e-05
3	3314705	4.143e+02	3.164e-05	3.479e-05	3.373e-05	3.400e-05

Table of mass loss. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	400813	4.008e+02	2.850e-04	2.777e-04	2.739e-04	2.725e-04
1	801625	4.008e+02	1.410e-04	1.374e-04	1.355e-04	1.349e-04
2	1603249	4.008e+02	7.019e-05	6.838e-05	6.743e-05	6.710e-05
3	3206497	4.008e+02	3.502e-05	3.411e-05	3.364e-05	3.348e-05

Table of mass loss. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	5197350	5.197e+03	2.025e-01	2.025e-01	2.025e-01	2.025e-01
1	10394699	5.197e+03	2.631e-03	2.632e-03	2.632e-03	2.632e-03
2	20789397	5.197e+03	8.500e-04	8.502e-04	8.502e-04	8.502e-04
3	41578793	5.197e+03	3.625e-04	3.625e-04	3.626e-04	3.625e-04

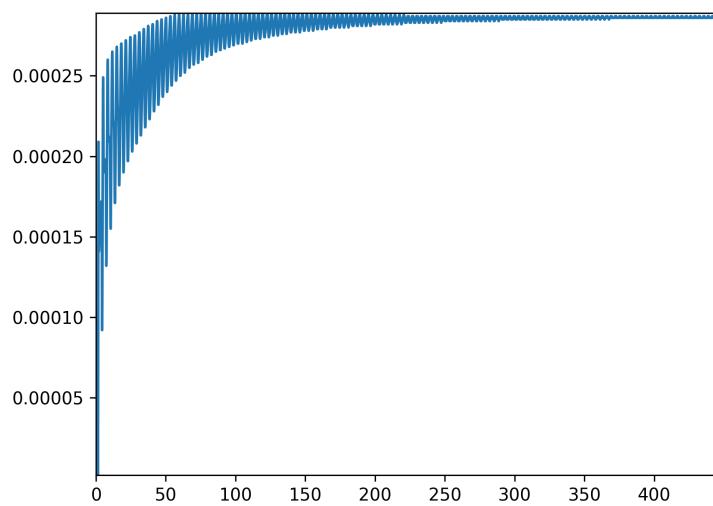
Table of mass loss. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	2541366	2.541e+03	3.223e-03	3.220e-03	3.223e-03	3.222e-03
1	5082731	2.541e+03	1.481e-03	1.479e-03	1.480e-03	1.480e-03
2	10165461	2.541e+03	7.141e-04	7.130e-04	7.136e-04	7.135e-04
3	20330921	2.541e+03	3.511e-04	3.505e-04	3.508e-04	3.508e-04

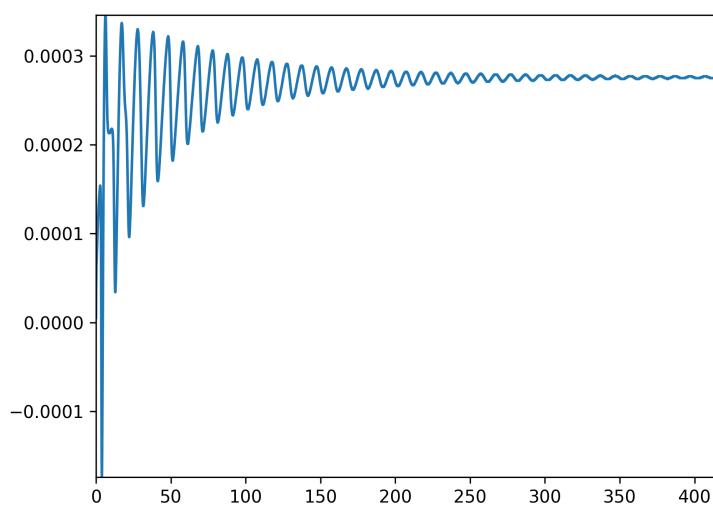
Table of mass loss. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	2495755	2.496e+03	3.307e-03	3.316e-03	3.316e-03	3.315e-03
1	4991509	2.496e+03	1.473e-03	1.477e-03	1.478e-03	1.477e-03
2	9983017	2.496e+03	7.009e-04	7.028e-04	7.031e-04	7.030e-04
3	19966033	2.496e+03	3.425e-04	3.434e-04	3.436e-04	3.435e-04

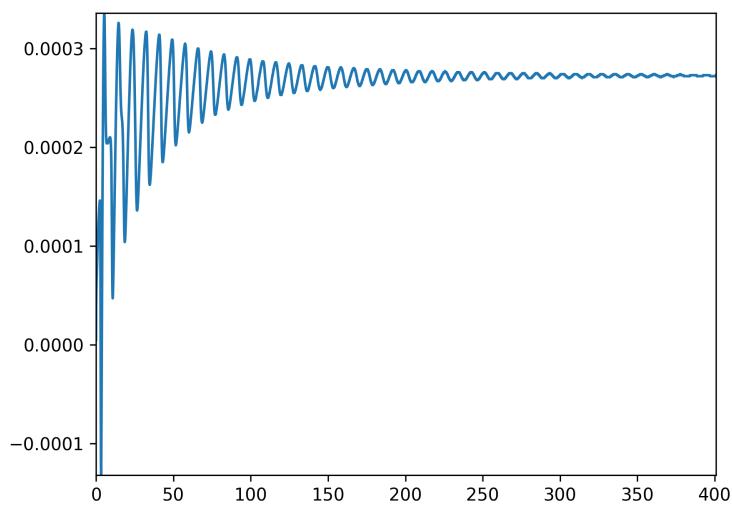
Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000



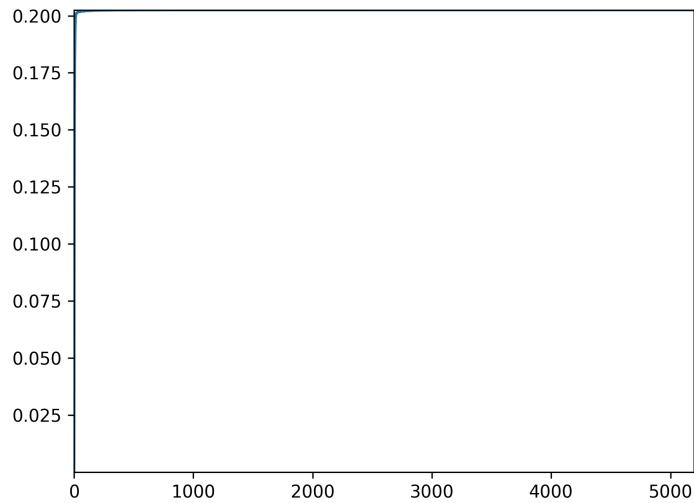
Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.000



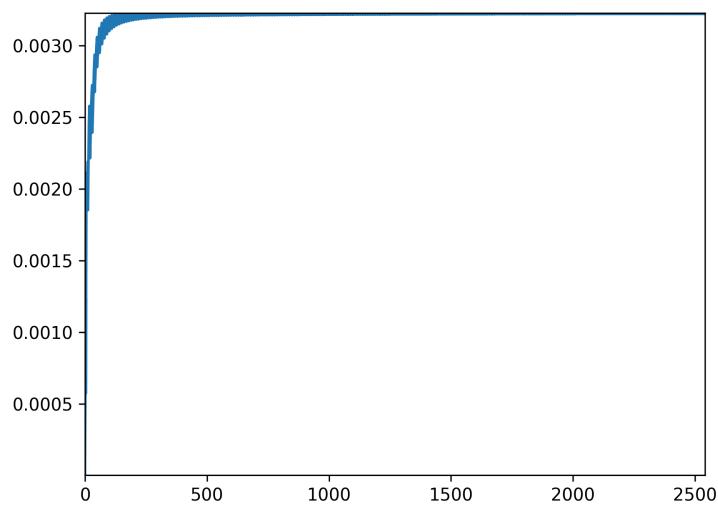
Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.400



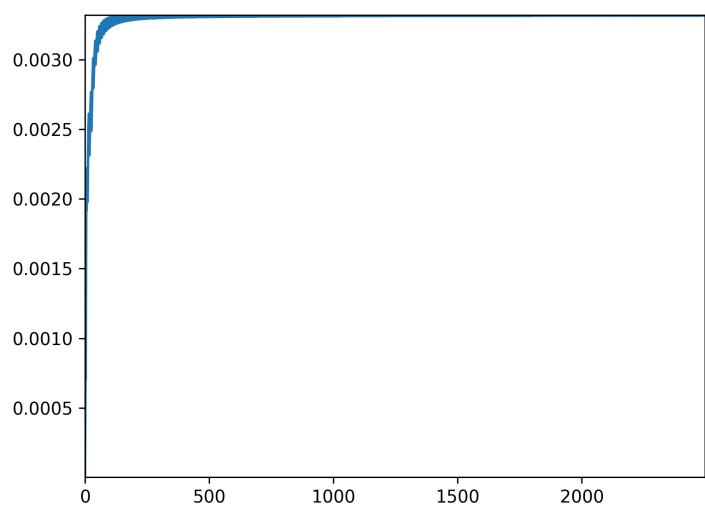
Graphic of Mass loss for Mu=0.010 C=10.000 Gamma=1.000



Graphic of Mass loss for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.000



Graphic of Mass loss for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400



Как можно заметить по таблицам потери массы составляют меньше 1-2%, из чего можно заключить, что закон сохранения массы также выполняется.

5. Задача о стабилизации осцилирующей функции

5.1. Постановка задачи

Пусть $\Omega_x = [0; 1]$, тогда для системы (1) зададим две задачи, начальные условия которых, определяются следующим образом.

$$\begin{cases} \rho(0, x) = 2 + \sin(N\pi x) \\ u(0, x) = 0, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, t \in [0; T] \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \rho(0, x) = 1 \\ u(0, x) = \sin(N\pi x), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, t \in [0; T] \end{cases} \quad (13)$$

Функции f и f_0 из гладкой задачи положим равными $f \equiv f_0 \equiv 0$. Вычисление будем проводить до времени T_{st} , при котором решение выходит на стационар. Выходом на стационар будем считать выполнение условия:

$$\|(H^n, V^n) - (\tilde{H}^n, \tilde{V}^n)\|_C \leq \varepsilon$$

Число N будем брать исходя из неравенства $10Nh \leq 1$.

5.2. Численные эксперименты

В качестве измельчения сетки возьмем $\tau = 10^{-4} h = 10^{-2}$. Экспериментальным путем было подобрано значение $\varepsilon = 10^{-4}$. Ввиду того, что при $C = 100$ и $\mu = 0.001$ сходимость схемы плохая, данные параметры не будем рассматривать при расчете различных вариантов начальных условий.

5.3. Первая задача

Приведем таблицы времени стабилизации в зависимости от различных μ , C , γ .

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	5.5e+01	1.5e+02	4.7e+01	1.4e+02	4.5e+01	1.4e+02	4.4e+01	1.3e+02

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	4.5e+01	1.3e+02	4.0e+01	1.2e+02	3.7e+01	1.2e+02	3.4e+01	1.1e+02

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	4.5e+01	1.3e+02	3.9e+01	1.2e+02	3.8e+01	1.1e+02	3.6e+01	1.1e+02

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	5.4e+00	1.8e+01	5.1e+00	1.6e+01	4.1e+00	1.5e+01	3.6e+00	1.4e+01

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	4.0e+00	1.6e+01	4.1e+00	1.3e+01	3.0e+00	1.1e+01	2.5e+00	1.0e+01

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	4.5e+00	1.7e+01	4.4e+00	1.4e+01	3.3e+00	1.3e+01	2.9e+00	1.1e+01

Вывод: при нечетных N сходимость на порядок быстрее чем при четных, при уменьшении μ также возрастает время стабилизации. От C сходимость практически не зависит.

5.4. Вторая задача

Приведем таблицы времени стабилизации в зависимости от различных μ , C , γ .

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	7.9e+01	2.1e+01	1.0e+01	5.7e+00	3.8e+00	2.7e+00	2.1e+00	1.5e+00

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	7.2e+01	2.0e+01	1.3e+01	1.0e+01	7.1e+00	4.6e+00	3.5e+00	2.6e+00

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	7.1e+01	2.0e+01	1.1e+01	8.6e+00	6.0e+00	3.9e+00	3.5e+00	2.2e+00

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	8.7e+00	2.1e+00	1.0e+00	5.2e-01	3.5e-01	2.4e-01	1.6e-01	1.5e-01

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	9.5e+00	2.3e+00	8.8e-01	7.3e-01	6.9e-01	5.4e-01	6.4e-01	6.6e-01

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	8.9e+00	2.4e+00	1.0e+00	5.7e-01	5.1e-01	4.9e-01	4.3e-01	4.5e-01

Вывод: при нечетных N сходимость на порядок быстрее чем при четных, при уменьшении μ также возрастает время стабилизации. От C сходимость практически

ски не зависит.

6. Задача протекания

6.1. Постановка задачи

Для исходной системы зададим начальные условия, которые определяют задачу "протекания"

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(0, x) = 1, x \in [0; 10], \\ u(0, x) = 0, x \in [0; 10], \\ u(t, 0) = \tilde{v}, t \in [0; T], \\ \rho(t, 0) = \tilde{\rho}, t \in [0; T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x) = 0, x = X, t \in [0; T] \end{array} \right. \quad (14)$$

Функции f и f_0 примем равными нулю. $\tilde{\rho} \geq 1$, $\tilde{v} > 0$. Суть эксперимента состоит в решении исходной задачи с введенными нами начальными значениями до момента стабилизации. Моментом стабилизации назовет время $T = N_0\tau$ при котором выполняется условие:

$$\|V^{N_0} - V^{N_0-k}\|_c < \varepsilon,$$

$k \in 1, 2, \dots$ - константа, ε] подбирается опытным путем.

6.2. Модификация разностной схемы

Ввиду новых граничных условий, уравнения на V и H видоизменятся следующим образом:

Граничные условия на скорость и плотность при $m = 0$: $V_0^{n+1} = \tilde{u}$, $H_0^{n+1} = \tilde{\rho}$

Граничные условия на скорость при $m = M$: $V_M^{n+1} = 0$, на $V_M^{n+1} - V_{M-1}^{n+1} = 0$

Граничные условия на плотность при $m = M$ ищутся чуть сложнее, необходимо учесть обнуление $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x = X$:

$$H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = 0$$

Примет вид: $H_{t,M} + V_M \hat{H}_{\bar{x},M} + 0.5h(V_M(H_{x\bar{x},M-1} - 0.5H_{x\bar{x},M-2}) - 0.5V_{x\bar{x},M-2}) = 0$

$$\begin{aligned}
 & \frac{H_M^{n+1} - H_M^n}{\tau} + 0.5V_M^n \left(\frac{H_M^n - H_{M-1}^n}{h} \right) + \\
 & + \frac{h}{2} \left(V_M \left(\frac{H_{M-2}^n - 2H_{M-1}^n + H_M^n}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{H_{M-3}^n - 2H_{M-2}^n + H_{M-1}^n}{h^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{V_{M-3}^n - 2V_{M-2}^n + V_{M-1}^n}{h^2} \right) = 0 \\
 & H_M^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{V_M^n}{2h} \right) + H_{M-1}^{n+1} \left(-\frac{V_{M-1}^n}{2h} \right) = \frac{H_M^n}{\tau} - \\
 & \frac{h}{2} \left(V_M \left(\frac{H_{M-2}^n - 2H_{M-1}^n + H_M^n}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{H_{M-3}^n - 2H_{M-2}^n + H_{M-1}^n}{h^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{V_{M-3}^n - 2V_{M-2}^n + V_{M-1}^n}{h^2} \right)
 \end{aligned}$$

6.3. Численные эксперименты

В качестве измельчения сетки возьмем $\tau = 10^{-3} h = 10^{-2}$. Экспериментальным путем было подобрано значение $\varepsilon = 10^{-3}$, $k = 50$. Ввиду того, что при $C = 100$ и $\mu = 0.001$ сходимость схемы плохая, данные параметры не будем рассматривать при расчете различных вариантов начальных условий.

Далее приведены таблицы с временами стабилизации задачи.

Table of stabilization time. $\mu = 0.1000$, $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	7.941e+00	7.321e+00	7.224e+00	5.459e+00
2	7.998e+01	5.474e+01	2.884e+01	1.965e+00
3	4.498e+02	2.296e+02	2.146e+01	2.427e+00
4	6.748e+02	2.862e+02	2.227e+01	4.601e+00

Table of stabilization time. $\mu = 0.1000$, $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	1.108e+00	2.641e+00	1.011e+00	6.187e+00
2	7.427e+01	1.577e+01	7.542e+00	4.883e+00
3	6.437e+02	1.297e+02	6.615e+00	4.420e+00
4	6.962e+02	1.163e+02	6.126e+01	4.178e+00

Table of stabilization time. $\mu = 0.1000$, $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	6.912e+00	5.525e+01	1.404e+01	5.678e+00
2	5.748e+01	3.227e+01	1.022e+01	6.010e+00
3	9.152e+01	4.200e+01	8.893e+00	5.392e+00
4	2.802e+02	1.838e+02	8.192e+01	5.073e+00

Table of stabilization time. $\mu = 0.0100$, $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	2.024e+01	1.956e+01	7.454e+01	5.959e+01
2	2.948e+02	5.477e+02	9.254e+01	3.825e+01
3	8.543e+02	5.152e+02	2.691e+02	2.834e+01
4	1.691e+03	7.695e+02	7.146e+02	1.669e+02

Table of stabilization time. $\mu = 0.0100$, $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

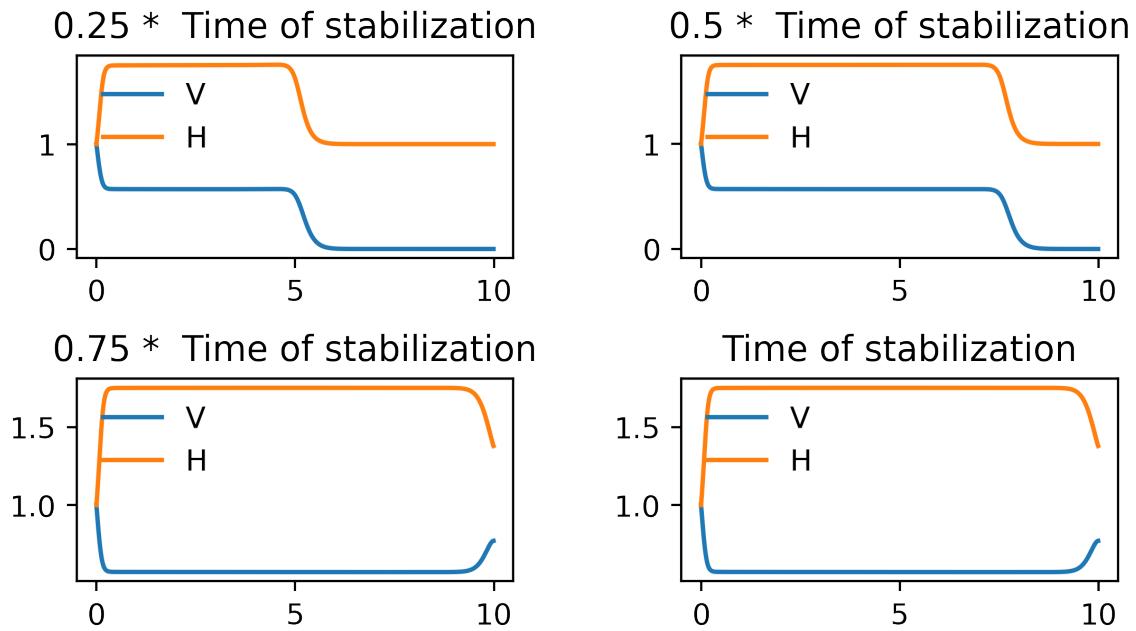
$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	8.719e+01	2.613e+01	8.054e+00	9.112e+00
2	4.662e+02	5.559e+01	1.540e+01	4.821e+01
3	7.068e+02	2.279e+02	2.583e+01	4.235e+01
4	8.681e+02	3.137e+02	6.113e+01	7.173e+01

Table of stabilization time. $\mu = 0.0100$, $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	1.912e+02	1.525e+02	8.404e+01	2.698e+01
2	3.228e+02	1.227e+02	7.022e+01	1.110e+01
3	8.142e+02	2.200e+02	9.893e+01	4.332e+01
4	1.512e+03	3.336e+02	1.153e+02	7.073e+01

Также приведем график значений функций H и V для разных временных слоев. $\tilde{\rho} = \tilde{u} = 1$

Slices of H and V for $\mu=0.100$ $C=1.000$ $\gamma=1.000$



6.4. Выводы

При уменьшении μ время стабилизации значительно увеличивается. От C , γ существенной зависимости не обнаружено, (небольшое увеличение времени стабилизации при $C = 10$). При увеличении $\tilde{\rho}$ время стабилизации увеличивается, при увеличении \tilde{u} время стабилизации уменьшается.

Список литературы

1. Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием неявных разностных схем, *Попов А.В., 2021*