Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова»
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

Численное моделирование нестационарного двумерного течения газа с использованием разностной схемы с центральными разностями (ρ_$V\,I$, параллельная)

Работу выполнил:
студент 4 курса Сибгатуллин Артур Петрович

Москва, 2022

Оглавление

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающую нестационарное движение вязкого баротропного газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) = \rho f_0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla) u \right) + \nabla p = Lu + \rho f \\ Lu = div(\mu \nabla u) + \frac{1}{3} \nabla (\mu div(u)) \\ p = p(\rho) \end{cases} \tag{1}$$

В нашей задаче L - линейный симметричный положительно определеннный оператор. Через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать известной положительной константой. Известными также будем считать функцию давления газа p (в данной работе будем рассматривать $p(\rho) = C\rho$, где C - положительная константа) и вектор внешних сил f, где f - функция переменных Эйлера:

$$(t,\, x) \in Q = \Omega_t \times \Omega_x = [0;\, T] \times \mathbb{R}^d$$

Неизвестные функции: плотность ρ и скорость $u = (u_1, \ldots, u_d)$ также являются функциями переменных Эйлера.

Система (1) дополнена начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} &(\rho,\, u)|_{t=0} = (\rho_0,\, u_0), && x \in [0;\, X] \\ &u(t,\, x) = 0, && (t,\, x) \in [0;\, T] \times \partial\Omega_x \end{aligned} \tag{2}$$

Перепишем систему (1) в эквивалентный вид, при условии того, что мы рассматриваем двумерную по пространству задачу :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} = f_0 \\ \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2 u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho f_1 \\ \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_2 u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho f_2 \end{cases} \tag{3}$$

1.2. Основные обозначения

Введем на $\Omega_x = \Omega_{x_1} \times \dots \times \Omega_{x_d}$, где $\Omega_{x_s} = [0; X_s]$, $s = 1, \dots, d$ и Ω_t сетки:

$$\begin{aligned} &\omega_t = \{n\tau : n = 0, \dots, N\}, \tau = \tfrac{T}{N} \\ &\omega_{h_s} = \{mh_s : m = 0, \dots, M_s\}, h_s = \tfrac{X_s}{M_s} \end{aligned} \tag{4}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &h = (h_1, \dots, h_d) \\ &\omega_h = \omega_{h_1} \times \dots \times \omega_{h_d} \\ &\omega_{\tau,h} = \omega_\tau \times \omega_h \\ &\gamma_{h,s}^- = \omega_{h_1} \times \dots \times \omega_{h_{s-1}} \times \{0\} \times \omega_{h_{s+1}} \dots \times \omega_{h_d} \\ &\gamma_{h,s}^+ = \omega_{h_1} \times \dots \times \omega_{h_{s-1}} \times \{X_s\} \times \omega_{h_{s+1}} \dots \times \omega_{h_d} \\ &\gamma_{h,s} = \gamma_{h,s}^- \cup \gamma_{h,s}^+ \\ &\gamma_h = \gamma_{h,1} \cup \dots \cup \gamma_{h,d} \end{aligned} \tag{5}$$

Для сокращения записи значение обозначим $m = (m_1, \dots, m_d)$, $m \pm q_s = (m_1, \dots, m_{s-1}, m \pm q, m_{s+1}, \dots, m_d)$, значение для произвольной функции f в узле (n, m) через f_n^m. Для простоты вместо вместо f_m^n, f_m^{n+1} и $f_{m \pm q_s}^n$ будем писать f, $\hat{f}$ и $f^{\pm q_s}$ соотвественно.

Введем обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах, а так же для разностных операторов:

$$\begin{aligned} &f_{avg_s} = \tfrac{f_m^n + f_{m+1_s}^n}{2} \\ &f_{\overline{avg}_s} = \tfrac{f_{m-1_s}^n + f_m^n}{2} \\ &f_t = \tfrac{f_m^{n+1} - f_m^n}{\tau} \\ &f_{x_s} = \tfrac{f_{m+1_s}^n - f_m^n}{h_s} \\ &f_{\bar{x}_s} = \tfrac{f_m^n - f_{m-1_s}^n}{h_s} \\ &f_{x_s \bar{x}_s} = \tfrac{f_{m-1_s}^n - 2f_m^n + f_{m+1_s}^n}{h_s^2} \\ &f_{\mathring{x}_s} = \tfrac{f_{m+1_s}^n - f_{m-1_s}^n}{2h_s} \\ &f_{\mathring{x}_s \mathring{x}_q} = \tfrac{f_{m+1_s}^{n\ +1_q} + f_{m-1_s}^{n\ +1_q} - f_{m+1_s}^{n\ -1_q} - f_{m-1_s}^{n\ -1_q}}{4h_s h_q} \end{aligned} \tag{6}$$

Введем нормы, для определения невязок при выполнении заданий практикума. Обозначим $int\omega_h = \omega_h \setminus \gamma_h$. Тогда для произвольной сеточной функции:

$$||v||_C = \max_{x \in \omega_h}$$

$$||v||_L = \sqrt{\Pi_h \left(\sum_{x \in int\omega_h} v^2(x) + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_h} v^2(x) \right)}$$

$$||v||_W = \sqrt{||v||_L^2 + \Pi_h \sum_{i=1}^{d} \sum_{x \in int\omega_h \cup \gamma_{h,i}^-} v^2(x)}$$

где $\Pi_h = h_1 \cdot \ldots \cdot h_d$

2. Разностная схема

2.1. Описание схемы

Для поиска численного решения задачи (1) можно использовать разностную схему, в которой при апроксимации конвективных членов используются центральные разности, а приближенные значения плотности H и скорости V на каждом временном слое ищутся в узлах сетки Ω_h как решения двух СЛАУ, порядок решения которых произволен:

$$H_t + 0.5\sum_{k=1}^{2}(V_k\hat{H}_{\mathring{x}_k} + (V_k\hat{H})_{\mathring{x}_k} + H(V_k)_{\mathring{x}_k}) = 0, w \in \Omega_h \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} H_t + 0.5((V_k\hat{H})_{x_k} + H(V_k)_{x_k}) - 0.5h_k((HV_k)^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(HV_k)^{+2_k}_{x_k\bar{x}_k} + \\ +H((V_k)^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(V_k)^{+2_k}_{x_k\bar{x}_k})) = 0, x \in \gamma_k^- \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} H_t + 0.5((V_k\hat{H})_{\bar{x}_k} + H(V_k)_{\bar{x}_k}) - 0.5h_k((HV_k)^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(HV_k)^{-2_k}_{x_k\bar{x}_k} + \\ +H((V_k)^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(V_k)^{-2_k}_{x_k\bar{x}_k})) = 0, x \in \gamma_k^- \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} (V_k)_t + \frac{1}{3}(V_k(\hat{V}_k)_{\mathring{x}_k} + (V_k\hat{V}_k)_{\mathring{x}_k}) + \\ \frac{1}{2}\sum_{m=1, m\neq k}^{2}\left(V_m(\hat{V}_k)_{\mathring{x}_m} + (V_m\hat{V}_k)_{\mathring{x}_m} - V_k(V_m)_{\mathring{x}_m}\right) + \frac{p(H)_{\mathring{x}_k}}{H} = \\ = \tilde{\mu}\left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1, m\neq k}^{2}(\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) - (\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H})\left(\frac{4}{3}(V_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1, m\neq k}^{2}(V_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) + \\ +\frac{\mu}{3H}\sum_{m=1, m\neq k}^{2}(V_m)_{\mathring{x}_k\mathring{x}_m} + f_k, x \in \Omega_h \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\hat{V}_k = 0, x \in \gamma_h^-, k = 1, 2 \tag{2.5}$$

Где:

$$\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$$

2.2. Координатная запись

Распишем схему приведенных выше обозначениях, и выделим коэффиценты при H и V на $n+1$ временном слое:

1 уравнение (2.1)

$$H_t + 0.5\sum_{k=1}^{2}(V_k \hat{H}_{\mathring{x}_k} + (V_k \hat{H})_{\mathring{x}_k} + H(V_k)_{\mathring{x}_k}) = 0$$

$$2\frac{H^{n+1}_{m_1,m_2} - H^{n}_{m_1,m_2}}{\tau} + V^{n}_{1\,m_1,m_2}\frac{H^{n+1}_{m_1+1,m_2} - H^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{2h_1} + \frac{V^{n}_{1\,m_1+1,m_2}H^{n+1}_{m_1+1,m_2} - V^{n}_{1\,m_1-1,m_2}H^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{2h_1} +$$
$$+ H^{n}_{m_1,m_2}\left(\frac{V^{n}_{1\,m_1+1,m_2} - V^{n}_{1\,m_1-1,m_2}}{2h_1}\right) +$$
$$+ V^{n}_{2\,m_1,m_2}\frac{H^{n+1}_{m_1,m_2+1} - H^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{2h_2} + \frac{V^{n}_{2\,m_1,m_2+1}H^{n+1}_{m_1,m_2+1} - V^{n}_{2\,m_1,m_2-1}H^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{2h_2} +$$
$$+ H^{n}_{m_1,m_2}\left(\frac{V^{n}_{2\,m_1,m_2+1} - V^{n}_{2\,m_1,m_2-1}}{2h_2}\right) = 0$$

$$H^{n+1}_{m_1-1,m_2}\left(-\frac{V^{n}_{1\,m_1,m_2} + V^{n}_{1\,m_1-1,m_2}}{2h_1}\right) + H^{n+1}_{m_1,m_2}\left(\frac{2}{\tau}\right) + H^{n+1}_{m_1+1,m_2}\left(\frac{V^{n}_{1\,m_1,m_2} + V^{n}_{1\,m_1+1,m_2}}{2h_1}\right) +$$
$$+ H^{n+1}_{m_1,m_2-1}\left(-\frac{V^{n}_{2\,m_1,m_2} + V^{n}_{2\,m_1,m_2-1}}{2h_2}\right) + H^{n+1}_{m_1,m_2}(0) + H^{n+1}_{m_1,m_2+1}\left(\frac{V^{n}_{2\,m_1,m_2} + V^{n}_{1\,m_1,m_2+1}}{2h_2}\right) =$$
$$= -\frac{2H^{n}_{m_1,m_2}}{\tau} - H^{n}_{m_1,m_2}\left(\frac{V^{n}_{1\,m_1+1,m_2} - V^{n}_{1\,m_1-1,m_2}}{2h_1} + \frac{V^{n}_{2\,m_1,m_2+1} - V^{n}_{2\,m_1,m_2-1}}{2h_2}\right)$$

2 уравнение (2.2)

$$H_t + 0.5((V_k\hat{H})_{x_k} + H(V_k)_{x_k}) - 0.5h_k((HV_k)^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(HV_k)^{+2_k}_{x_k\bar{x}_k} +$$

$$+H((V_k)^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(V_k)^{+2_k}_{x_k\bar{x}_k})) = 0$$

Распишем случай для $k = 1$:

$$H_t + 0.5((V_1\hat{H})_{x_1} + H(V_1)_{x_1}) - 0.5h_1((HV_1)^{+1_1}_{x_1\bar{x}_1} - 0.5(HV_1)^{+2_1}_{x_1\bar{x}_1} +$$

$$+H((V_1)^{+1_1}_{x_1\bar{x}_1} - 0.5(V_1)^{+2_1}_{x_1\bar{x}_1})) = 0$$

$$\frac{H^{n+1}_{m_1,m_2} - H^n_{m_1,m_2}}{\tau} + 0.5(\frac{{V_1}^n_{m_1+1,m_2}H^{n+1}_{m_1+1,m_2} - {V_1}^n_{m_1,m_2}H^{n+1}_{m_1,m_2}}{h_1} + H^n_{m_1,m_2}\frac{{V_1}^n_{m_1+1,m_2} - {V_1}^n_{m_1,m_2}}{h_1}) -$$
$$- 0.5h_1((\frac{H^n_{m_1,m_2}{V_1}^n_{m_1,m_2} - 2H^n_{m_1+1,m_2}{V_1}^n_{m_1+1,m_2} + H^n_{m_1+2,m_2}{V_1}^n_{m_1+2,m_2}}{h_1^2}) -$$
$$- 0.5\frac{H^n_{m_1+1,m_2}{V_1}^n_{m_1+1,m_2} - 2H^n_{m_1+2,m_2}{V_1}^n_{m_1+2,m_2} + H^n_{m_1+3,m_2}{V_1}^n_{m_1+3,m_2}}{h_1^2} +$$
$$+ H^n_{m_1,m_2}(\frac{{V_1}^n_{m_1,m_2} - 2{V_1}^n_{m_1+1,m_2} + {V_1}^n_{m_1+2,m_2}}{h_1^2} - 0.5\frac{{V_1}^n_{m_1+1,m_2} - 2{V_1}^n_{m_1+2,m_2} + {V_1}^n_{m_1+3,m_2}}{h_1^2})) = 0$$

$$H^{n+1}_{m_1-1,m_2}(0) + H^{n+1}_{m_1,m_2}(\frac{1}{\tau} - 0.5\frac{{V_1}^n_{m_1,m_2}}{h_1}) + H^{n+1}_{m_1+1,m_2}(0.5\frac{{V_1}^n_{m_1+1,m_2}}{h_1}) +$$
$$+ H^{n+1}_{m_1,m_2-1}(0) + H^{n+1}_{m_1,m_2}(0) + H^{n+1}_{m_1,m_2+1}(0) =$$
$$= -0.5H^n_{m_1,m_2}\frac{{V_1}^n_{m_1+1,m_2} - {V_1}^n_{m_1,m_2}}{h_1} + \frac{H^n_{m_1,m_2}}{\tau} +$$
$$+ 0.5h_1((\frac{H^n_{m_1,m_2}{V_1}^n_{m_1,m_2} - 2H^n_{m_1+1,m_2}{V_1}^n_{m_1+1,m_2} + H^n_{m_1+2,m_2}{V_1}^n_{m_1+2,m_2}}{h_1^2}) -$$
$$- 0.5\frac{H^n_{m_1+1,m_2}{V_1}^n_{m_1+1,m_2} - 2H^n_{m_1+2,m_2}{V_1}^n_{m_1+2,m_2} + H^n_{m_1+3,m_2}{V_1}^n_{m_1+3,m_2}}{h_1^2} +$$
$$+ H^n_{m_1,m_2}(\frac{{V_1}^n_{m_1,m_2} - 2{V_1}^n_{m_1+1,m_2} + {V_1}^n_{m_1+2,m_2}}{h_1^2} - 0.5\frac{{V_1}^n_{m_1+1,m_2} - 2{V_1}^n_{m_1+2,m_2} + {V_1}^n_{m_1+3,m_2}}{h_1^2}))$$

Распишем случай для $k=2$:

$$H_t+0.5((V_2\hat{H})_{x_2}+H(V_2)_{x_2})-0.5h_2((HV_2)^{+1_2}_{x_2\bar{x}_2}-0.5(HV_2)^{+2_2}_{x_2\bar{x}_2}+$$

$$+H((V_2)^{+1_2}_{x_2\bar{x}_2}-0.5(V_2)^{+2_2}_{x_2\bar{x}_2}))=0$$

$$\frac{H^{n+1}_{m_1,m_2}-H^n_{m_1,m_2}}{\tau}+0.5(\frac{V^n_{2\,m_1,m_2+1}H^{n+1}_{m_1,m_2+1}-V^n_{2\,m_1,m_2}H^{n+1}_{m_1,m_2}}{h_2}+H^n_{m_1,m_2}\frac{V^n_{2\,m_1,m_2+1}-V^n_{2\,m_1,m_2}}{h_2})-$$
$$-0.5h_2((\frac{H^n_{m_1,m_2}V^n_{2\,m_1,m_2}-2H^n_{m_1,m_2+1}V^n_{2\,m_1,m_2+1}+H^n_{m_1,m_2+2}V^n_{2\,m_1,m_2+2}}{h_2^2})-$$
$$-0.5\frac{H^n_{m_1,m_2+1}V^n_{2\,m_1,m_2+1}-2H^n_{m_1,m_2+2}V^n_{2\,m_1,m_2+2}+H^n_{m_1,m_2+3}V^n_{2\,m_1,m_2+3}}{h_2^2}+$$
$$+H^n_{m_1,m_2}(\frac{V^n_{2\,m_1,m_2}-2V^n_{2\,m_1,m_2+1}+V^n_{2\,m_1,m_2+2}}{h_2^2}-0.5\frac{V^n_{2\,m_1,m_2+1}-2V^n_{2\,m_1,m_2+2}+V^n_{2\,m_1,m_2+3}}{h_2^2}))=0$$

$$H^{n+1}_{m_1-1,m_2}(0)+H^{n+1}_{m_1,m_2}(0)+H^{n+1}_{m_1+1,m_2}(0)+$$
$$+H^{n+1}_{m_1,m_2-1}(0)+H^{n+1}_{m_1,m_2}(\frac{1}{\tau}-0.5\frac{V^n_{2\,m_1,m_2}}{h_2})+H^{n+1}_{m_1,m_2+1}(0.5\frac{V^n_{2\,m_1,m_2+1}}{h_2})=$$
$$=-0.5H^n_{m_1,m_2}\frac{V^n_{2\,m_1,m_2+1}-V^n_{2\,m_1,m_2}}{h_2}+\frac{H^n_{m_1,m_2}}{\tau}+$$
$$+0.5h_2((\frac{H^n_{m_1,m_2}V^n_{2\,m_1,m_2}-2H^n_{m_1,m_2+1}V^n_{2\,m_1,m_2+1}+H^n_{m_1,m_2+2}V^n_{2\,m_1,m_2+2}}{h_2^2})-$$
$$-0.5\frac{H^n_{m_1,m_2+1}V^n_{2\,m_1,m_2+1}-2H^n_{m_1,m_2+2}V^n_{2\,m_1,m_2+2}+H^n_{m_1,m_2+3}V^n_{2\,m_1,m_2+3}}{h_2^2}+$$
$$+H^n_{m_1,m_2}(\frac{V^n_{2\,m_1,m_2}-2V^n_{2\,m_1,m_2+1}+V^n_{2\,m_1,m_2+2}}{h_2^2}-0.5\frac{V^n_{2\,m_1,m_2+1}-2V^n_{2\,m_1,m_2+2}+V^n_{2\,m_1,m_2+3}}{h_2^2}))$$

3 уравнение (2.3)

$$H_t + 0.5((V_k\hat{H})_{\bar{x}_k} + H(V_k)_{\bar{x}_k}) - 0.5h_k((HV_k)^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(HV_k)^{-2_k}_{x_k\bar{x}_k} +$$

$$+H((V_k)^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(V_k)^{-2_k}_{x_k\bar{x}_k})) = 0$$

Распишем случай для $k = 1$:

$$H_t + 0.5((V_1\hat{H})_{\bar{x}_1} + H(V_1)_{\bar{x}_1}) - 0.5h_1((HV_1)^{-1_1}_{x_1\bar{x}_1} - 0.5(HV_1)^{-2_1}_{x_1\bar{x}_1} +$$

$$+H((V_1)^{-1_1}_{x_1\bar{x}_1} - 0.5(V_1)^{-2_1}_{x_1\bar{x}_1})) = 0$$

$$\frac{H^{n+1}_{m_1,m_2} - H^n_{m_1,m_2}}{\tau} + 0.5(\frac{V^n_{1\,m_1,m_2}H^{n+1}_{m_1,m_2} - V^n_{1\,m_1-1,m_2}H^{n+1}_{m_1-1,m_2}}{h_1} + H^n_{m_1,m_2}\frac{V^n_{1\,m_1,m_2} - V^n_{1\,m_1-1,m_2}}{h_1}) -$$
$$- 0.5h_1((\frac{H^n_{m_1-2,m_2}V^n_{1\,m_1-2,m_2} - 2H^n_{m_1-1,m_2}V^n_{1\,m_1-1,m_2} + H^n_{m_1,m_2}V^n_{1\,m_1,m_2}}{h_1^2}) -$$
$$- 0.5\frac{H^n_{m_1-3,m_2}V^n_{1\,m_1-3,m_2} - 2H^n_{m_1-2,m_2}V^n_{1\,m_1-2,m_2} + H^n_{m_1-1,m_2}V^n_{1\,m_1-1,m_2}}{h_1^2} +$$
$$+ H^n_{m_1,m_2}(\frac{V^n_{1\,m_1-2,m_2} - 2V^n_{1\,m_1-1,m_2} + V^n_{1\,m_1,m_2}}{h_1^2} - 0.5\frac{V^n_{1\,m_1-3,m_2} - 2V^n_{1\,m_1-2,m_2} + V^n_{1\,m_1-1,m_2}}{h_1^2})) = 0$$

$$H^{n+1}_{m_1-1,m_2}(-0.5\frac{V^n_{1\,m_1-1,m_2}}{h_1}) + H^{n+1}_{m_1,m_2}(\frac{1}{\tau} + 0.5\frac{V^n_{1\,m_1,m_2}}{h_1}) + H^{n+1}_{m_1+1,m_2}(0) +$$
$$+ H^{n+1}_{m_1,m_2-1}(0) + H^{n+1}_{m_1,m_2}(0) + H^{n+1}_{m_1,m_2+1}(0) =$$
$$= -0.5H^n_{m_1,m_2}\frac{V^n_{1\,m_1,m_2} - V^n_{1\,m_1-1,m_2}}{h_1} + \frac{H^n_{m_1,m_2}}{\tau} +$$
$$+ 0.5h_1((\frac{H^n_{m_1-2,m_2}V^n_{1\,m_1-2,m_2} - 2H^n_{m_1-1,m_2}V^n_{1\,m_1-1,m_2} + H^n_{m_1,m_2}V^n_{1\,m_1,m_2}}{h_1^2}) -$$
$$- 0.5\frac{H^n_{m_1-3,m_2}V^n_{1\,m_1-3,m_2} - 2H^n_{m_1-2,m_2}V^n_{1\,m_1-2,m_2} + H^n_{m_1-1,m_2}V^n_{1\,m_1-1,m_2}}{h_1^2} +$$
$$+ H^n_{m_1,m_2}(\frac{V^n_{1\,m_1-2,m_2} - 2V^n_{1\,m_1-1,m_2} + V^n_{1\,m_1,m_2}}{h_1^2} - 0.5\frac{V^n_{1\,m_1-3,m_2} - 2V^n_{1\,m_1-2,m_2} + V^n_{1\,m_1-1,m_2}}{h_1^2}))$$

Распишем случай для $k = 2$:

$$H_t + 0.5((V_2\hat{H})_{\bar{x}_2} + H(V_2)_{\bar{x}_2}) - 0.5h_2((HV_2)^{-1_2}_{x_2\bar{x}_2} - 0.5(HV_2)^{-2_2}_{x_2\bar{x}_2} +$$

$$+H((V_2)^{-1_2}_{x_2\bar{x}_2} - 0.5(V_2)^{-2_2}_{x_2\bar{x}_2})) = 0$$

$$\frac{H^{n+1}_{m_1,m_2} - H^n_{m_1,m_2}}{\tau} + 0.5(\frac{V^n_{2\,m_1,m_2}H^{n+1}_{m_1,m_2} - V^n_{2\,m_1,m_2-1}H^{n+1}_{m_1,m_2-1}}{h_2} + H^n_{m_1,m_2}\frac{V^n_{2\,m_1,m_2} - V^n_{2\,m_1,m_2-1}}{h_2}) -$$
$$- 0.5h_2((\frac{H^n_{m_1,m_2-2}V^n_{2\,m_1,m_2-2} - 2H^n_{m_1,m_2-1}V^n_{2\,m_1,m_2-1} + H^n_{m_1,m_2}V^n_{2\,m_1,m_2}}{h_2^2}) -$$
$$- 0.5\frac{H^n_{m_1,m_2-3}V^n_{2\,m_1,m_2-3} - 2H^n_{m_1,m_2-2}V^n_{2\,m_1,m_2-2} + H^n_{m_1,m_2-1}V^n_{2\,m_1,m_2-1}}{h_2^2} +$$
$$+ H^n_{m_1,m_2}(\frac{V^n_{2\,m_1,m_2-2} - 2V^n_{2\,m_1,m_2-1} + V^n_{2\,m_1,m_2}}{h_2^2} - 0.5\frac{V^n_{2\,m_1,m_2-3} - 2V^n_{2\,m_1,m_2-2} + V^n_{2\,m_1,m_2-1}}{h_2^2})) = 0$$

$$H^{n+1}_{m_1-1,m_2}(0) + H^{n+1}_{m_1,m_2}(0) + H^{n+1}_{m_1+1,m_2}(0) +$$
$$+ H^{n+1}_{m_1,m_2-1}(-0.5\frac{V^n_{2\,m_1,m_2-1}}{h_2}) + H^{n+1}_{m_1,m_2}(\frac{1}{\tau} + 0.5\frac{V^n_{2\,m_1,m_2}}{h_2}) + H^{n+1}_{m_1,m_2+1}(0) =$$
$$= -0.5H^n_{m_1,m_2}\frac{V^n_{2\,m_1,m_2} - V^n_{2\,m_1,m_2-1}}{h_2} + \frac{H^n_{m_1,m_2}}{\tau} +$$
$$+ 0.5h_2((\frac{H^n_{m_1,m_2-2}V^n_{2\,m_1,m_2-2} - 2H^n_{m_1,m_2-1}V^n_{2\,m_1,m_2-1} + H^n_{m_1,m_2}V^n_{2\,m_1,m_2}}{h_2^2}) -$$
$$- 0.5\frac{H^n_{m_1,m_2-3}V^n_{2\,m_1,m_2-3} - 2H^n_{m_1,m_2-2}V^n_{2\,m_1,m_2-2} + H^n_{m_1,m_2-1}V^n_{2\,m_1,m_2-1}}{h_2^2} +$$
$$+ H^n_{m_1,m_2}(\frac{V^n_{2\,m_1,m_2-2} - 2V^n_{2\,m_1,m_2-1} + V^n_{2\,m_1,m_2}}{h_2^2} - 0.5\frac{V^n_{2\,m_1,m_2-3} - 2V^n_{2\,m_1,m_2-2} + V^n_{2\,m_1,m_2-1}}{h_2^2}))$$

4 уравнение (2.4)

$$(V_k)_t + \frac{1}{3}(V_k(\hat{V}_k)_{\mathring{x}_k} + (V_k\hat{V}_k)_{\mathring{x}_k}) +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1,m\neq k}^{2}\left(V_m(\hat{V}_k)_{\mathring{x}_m} + (V_m\hat{V}_k)_{\mathring{x}_m} - V_k(V_m)_{\mathring{x}_m}\right) + \frac{p(H)_{\mathring{x}_k}}{H} =$$

$$= \tilde{\mu}\left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1,m\neq k}^{2}(\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) - (\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H})\left(\frac{4}{3}(V_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1,m\neq k}^{2}(V_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) +$$

$$+\frac{\mu}{3H}\sum_{m=1,m\neq k}^{2}(V_m)_{\mathring{x}_k\mathring{x}_m} + f_k$$

Распишем случай для $k = 1$:

$$(V_1)_t + \frac{1}{3}(V_1(\hat{V}_1)_{\mathring{x}_1} + (V_1\hat{V}_1)_{\mathring{x}_1}) +$$

$$\frac{1}{2}(V_2(\hat{V}_1)_{\mathring{x}_2} + (V_2\hat{V}_1)_{\mathring{x}_2}) - \tilde{\mu}(\frac{4}{3}(\hat{V}_1)_{x_1\bar{x}_1} + (\hat{V}_1)_{x_2\bar{x}_2}) =$$

$$= \frac{1}{2}V_1(V_2)_{\mathring{x}_2} - (\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H})(\frac{4}{3}(V_1)_{x_1\bar{x}_1} + (V_1)_{x_2\bar{x}_2}) + \frac{\mu}{3H}(V_2)_{\mathring{x}_1\mathring{x}_2} - \frac{p(H)_{\mathring{x}_1}}{H} + f_1$$

$$\frac{V^{n+1}_{1\,m_1,m_2} - V^{n}_{1\,m_1,m_2}}{\tau} + \frac{1}{3}(V^{n}_{1\,m_1,m_2}\frac{V^{n+1}_{1\,m_1+1,m_2} - V^{n+1}_{1\,m_1-1,m_2}}{2h_1} + \frac{V^{n}_{1\,m_1+1,m_2}V^{n+1}_{1\,m_1+1,m_2} - V^{n}_{1\,m_1-1,m_2}V^{n+1}_{1\,m_1-1,m_2}}{2h_1}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(V^{n}_{2\,m_1,m_2}\frac{V^{n+1}_{1\,m_1,m_2+1} - V^{n+1}_{1\,m_1,m_2-1}}{2h_2} + \frac{V^{n}_{2\,m_1,m_2+1}V^{n+1}_{1\,m_1,m_2+1} - V^{n}_{2\,m_1,m_2-1}V^{n+1}_{1\,m_1,m_2-1}}{2h_2}) -$$
$$- \tilde{\mu}(\frac{4}{3}\frac{V^{n+1}_{1\,m_1-1,m_2} - 2V^{n+1}_{1\,m_1,m_2} + V^{n+1}_{1\,m_1+1,m_2}}{h_1^2} + \frac{V^{n+1}_{1\,m_1,m_2-1} - 2V^{n+1}_{1\,m_1,m_2} + V^{n+1}_{1\,m_1,m_2+1}}{h_2^2}) =$$
$$= \frac{1}{2}V^{n}_{1\,m_1,m_2}\frac{V^{n}_{2\,m_1,m_2+1} - V^{n}_{2\,m_1,m_2-1}}{2h_2} - (\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H})(\frac{4}{3}\frac{V^{n}_{1\,m_1-1,m_2} - 2V^{n}_{1\,m_1,m_2} + V^{n}_{1\,m_1+1,m_2}}{h_1^2} +$$
$$+ \frac{V^{n}_{1\,m_1,m_2-1} - 2V^{n}_{1\,m_1,m_2} + V^{n}_{1\,m_1,m_2+1}}{h_2^2}) + \frac{\mu}{3H}\frac{V^{n}_{2\,m_1+1,m_2+1} + V^{n}_{2\,m_1-1,m_2+1} - V^{n}_{2\,m_1+1,m_2-1} - V^{n}_{2\,m_1-1,m_2-1}}{4h_1h_2} -$$
$$- \frac{1}{H}(\frac{p(H^{n}_{m_1+1,m_2}) - p(H^{n}_{m_1-1,m_2})}{2h_1})) + f_1$$

$$V^{n+1}_{1\,m_1-1,m_2}(-\frac{V^{n}_{1\,m_1,m_2} + V^{n}_{1\,m_1-1,m_2}}{6h_1} - \frac{4\tilde{\mu}}{3h_1^2}) + V^{n+1}_{1\,m_1,m_2}(\frac{1}{\tau} + \frac{8\tilde{\mu}}{3h_1^2} + \frac{2\tilde{\mu}}{h_2^2}) +$$
$$+ V^{n+1}_{1\,m_1+1,m_2}(\frac{V^{n}_{1\,m_1,m_2} + V^{n}_{1\,m_1+1,m_2}}{6h_1} - \frac{4\tilde{\mu}}{3h_1^2}) +$$

$+V^{n+1}_{1\,m_1,m_2-1}(-\frac{V^n_{2\,m_1,m_2}+V^n_{2\,m_1,m_2-1}}{4h_2}-\frac{\tilde{\mu}}{h_2^2})+V^{n+1}_{1\,m_1,m_2}(0)+V^{n+1}_{1\,m_1,m_2+1}(\frac{V^n_{2\,m_1,m_2}+V^n_{2\,m_1,m_2+1}}{4h_2}-\frac{\tilde{\mu}}{h_2^2})=$
$=\frac{V^n_{1\,m_1,m_2}}{\tau}+\frac{1}{2}V^n_{1\,m_1,m_2}\frac{V^n_{2\,m_1,m_2+1}-V^n_{2\,m_1,m_2-1}}{2h_2}-(\tilde{\mu}-\frac{\mu}{H})(\frac{4}{3}\frac{V^n_{1\,m_1-1,m_2}-2V^n_{1\,m_1,m_2}+V^n_{1\,m_1+1,m_2}}{h_1^2}+$
$+\frac{V^n_{1\,m_1,m_2-1}-2V^n_{1\,m_1,m_2}+V^n_{1\,m_1,m_2+1}}{h_2^2})+\frac{\mu}{3H}\frac{V^n_{2\,m_1+1,m_2+1}+V^n_{2\,m_1-1,m_2+1}-V^n_{2\,m_1+1,m_2-1}-V^n_{2\,m_1-1,m_2-1}}{4h_1h_2}-$
$-\frac{1}{H}(\frac{p(H^n_{m_1+1,m_2})-p(H^n_{m_1-1,m_2})}{2h_1}))+f_1$

Распишем случай для $k=2$:

$$(V_2)_t+\frac{1}{3}(V_2(\hat{V}_2)_{\mathring{x}_2}+(V_2\hat{V}_2)_{\mathring{x}_2})+$$

$$\frac{1}{2}(V_1(\hat{V}_2)_{\mathring{x}_1}+(V_1\hat{V}_2)_{\mathring{x}_1})-\tilde{\mu}(\frac{4}{3}(\hat{V}_2)_{x_2\bar{x}_2}+(\hat{V}_2)_{x_1\bar{x}_1})=$$

$$=\frac{1}{2}V_2(V_1)_{\mathring{x}_1}-(\tilde{\mu}-\frac{\mu}{H})(\frac{4}{3}(V_2)_{x_2\bar{x}_2}+(V_2)_{x_1\bar{x}_1})+\frac{\mu}{3H}(V_1)_{\mathring{x}_2\mathring{x}_1}-\frac{p(H)_{\mathring{x}_2}}{H}f_2$$

$\frac{V^{n+1}_{2\,m_1,m_2}-V^n_{2\,m_1,m_2}}{\tau}+\frac{1}{3}(V^n_{2\,m_1,m_2}\frac{V^{n+1}_{2\,m_1,m_2+1}-V^{n+1}_{2\,m_1,m_2-1}}{2h_2}+\frac{V^n_{2\,m_1,m_2+1}V^{n+1}_{2\,m_1,m_2+1}-V^n_{2\,m_1,m_2-1}V^{n+1}_{2\,m_1,m_2-1}}{2h_2})+$

$+\frac{1}{2}(V^n_{1\,m_1,m_2}\frac{V^{n+1}_{2\,m_1+1,m_2}-V^{n+1}_{2\,m_1-1,m_2}}{2h_1}+\frac{V^n_{1\,m_1+1,m_2}V^{n+1}_{2\,m_1+1,m_2}-V^n_{1\,m_1-1,m_2}V^{n+1}_{2\,m_1-1,m_2}}{2h_1})-$
$-\tilde{\mu}(\frac{4}{3}\frac{V^{n+1}_{2\,m_1,m_2-1}-2V^{n+1}_{2\,m_1,m_2}+V^{n+1}_{2\,m_1,m_2+1}}{h_2^2}+\frac{V^{n+1}_{2\,m_1-1,m_2}-2V^{n+1}_{2\,m_1,m_2}+V^{n+1}_{2\,m_1+1,m_2}}{h_1^2})=$
$=\frac{1}{2}V^n_{2\,m_1,m_2}\frac{V^n_{1\,m_1+1,m_2}-V^n_{1\,m_1-1,m_2}}{2h_1}-(\tilde{\mu}-\frac{\mu}{H})(\frac{4}{3}\frac{V^n_{2\,m_1,m_2-1}-2V^n_{2\,m_1,m_2}+V^n_{2\,m_1,m_2+1}}{h_2^2}+$
$+\frac{V^n_{2\,m_1-1,m_2}-2V^n_{2\,m_1,m_2}+V^n_{2\,m_1+1,m_2}}{h_1^2})+\frac{\mu}{3H}\frac{V^n_{1\,m_1+1,m_2+1}+V^n_{1\,m_1+1,m_2-1}-V^n_{1\,m_1-1,m_2+1}-V^n_{1\,m_1-1,m_2-1}}{4h_1h_2}-$
$-\frac{1}{H}(\frac{p(H^n_{m_1,m_2+1})-p(H^n_{m_1,m_2-1})}{2h_2}))+f_2$

$V^{n+1}_{2\,m_1-1,m_2}(-\frac{V^n_{1\,m_1,m_2}+V^n_{1\,m_1-1,m_2}}{4h_1}-\frac{\tilde{\mu}}{h_1^2})+V^{n+1}_{2\,m_1,m_2}(\frac{1}{\tau}+\frac{8\tilde{\mu}}{3h_2^2}+\frac{2\tilde{\mu}}{h_1^2})+$
$+V^{n+1}_{2\,m_1+1,m_2}(\frac{V^n_{1\,m_1,m_2}+V^n_{1\,m_1+1,m_2}}{4h_1}-\frac{\tilde{\mu}}{h_1^2})+$
$+V^{n+1}_{2\,m_1,m_2-1}(-\frac{V^n_{2\,m_1,m_2}+V^n_{2\,m_1,m_2-1}}{6h_2}-\frac{4\tilde{\mu}}{3h_2^2})+V^{n+1}_{2\,m_1,m_2}(0)+V^{n+1}_{2\,m_1,m_2+1}(\frac{V^n_{2\,m_1,m_2}+V^n_{2\,m_1,m_2+1}}{6h_2}-\frac{4\tilde{\mu}}{3h_2^2})=$
$=\frac{V^n_{2\,m_1,m_2}}{\tau}+\frac{1}{2}V^n_{2\,m_1,m_2}\frac{V^n_{1\,m_1+1,m_2}-V^n_{1\,m_1-1,m_2}}{2h_1}-(\tilde{\mu}-\frac{\mu}{H})(\frac{4}{3}\frac{V^n_{2\,m_1,m_2-1}-2V^n_{2\,m_1,m_2}+V^n_{2\,m_1,m_2+1}}{h_2^2}+$
$+\frac{V^n_{2\,m_1-1,m_2}-2V^n_{2\,m_1,m_2}+V^n_{2\,m_1+1,m_2}}{h_1^2})+\frac{\mu}{3H}\frac{V^n_{1\,m_1+1,m_2+1}+V^n_{1\,m_1+1,m_2-1}-V^n_{1\,m_1-1,m_2+1}-V^n_{1\,m_1-1,m_2-1}}{4h_1h_2}-$
$-\frac{1}{H}(\frac{p(H^n_{m_1,m_2+1})-p(H^n_{m_1,m_2-1})}{2h_2}))+f_2$

3. Отладочный тест на гладком решении

3.1. Поставновка задачи

Список литературы

1. Численное моделирование нестационарного течения газа с использованием неявных разностных схем, *Попов А.В., 2022*