

Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Численное решение системы уравнений
Навье-Стокса с использованием схемы с
центральными разностями
Плотность-Скорость (параллельная)

Бушуева Наталья Сергеевна, 410 группа

Декабрь 2019

1. Постановка задачи.

Приведем систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f \\ p = p(\rho) \end{cases}$$

Через μ обозначен коэффициент вязкости газа, которую будем считать известной неотрицательной константой ($\mu = 0.1$). Известные функции: плотность ρ и скорость u являются функциями переменных Эйлера $(t, x) \in [0, T] \times [0, X]$. В уравнения также входят две известные функции: давление газа $p = C\rho$ и вектор внешних сил f , являющейся функцией переменных Эйлера.

В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка $[0, X]$:

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), x \in [0, X].$$

Простейшими граничными условиями являются условия непротекания:

$$u(t, 0) = u(t, X) = 0, t \in [0, T].$$

2. Описание схемы

Для поиска численного решения задачи можно использовать разностную схему, в которой при аппроксимации используются центральные разности, а системы уравнений решаются параллельно методом "прогонки".

$$\begin{cases} H_{t,0} + 0.5((V \hat{H})_{x,0} + H_0 V x, 0) - 0.5h((HV)_{x,\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x,\bar{x},2} + H_0(V_{x,\bar{x},1} - 0.5V_{x,\bar{x},2})) = 0 \\ H_t + 0.5(V \hat{H}_x^0 + (V \hat{H})_x^0 + HVx^0) = 0, x \in \omega_h \\ H_{t,M} + 0.5((V \hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) + 0.5h((HV)_{x,\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x,\bar{x},M-2} + \\ + H_M(V_{x,\bar{x},M-1} - 0.5V_{x,\bar{x},M-2})) = 0 \\ V_t + \frac{1}{3}(V \hat{V}_x^0 + (V \hat{V})_x^0) + \frac{p(H)_x^0}{H} = \tilde{\mu} \hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H})V_{x\bar{x}} + f, x \in \omega_h \end{cases}$$

Под ω_h понимаются внутренние узлы отрезка $[0, X]$, а $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$

3. Координатная запись уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{H_0^{n+1} - H_0^n}{t} + \frac{1}{2} \left(\frac{V_1^n H_1^{n+1} - V_0^n H_0^{n+1}}{h} + H_0^n \frac{V_1^n - V_0^n}{h} \right) - \\ & - \frac{h}{2} \left(\frac{H_2^n V_2^n - 2H_1^n V_1^n + H_0^n V_0^n}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{H_3^n V_3^n - 2H_2^n V_2^n + H_1^n V_1^n}{h^2} + H_0^n \left(\frac{V_2^n - 2V_1^n + V_0^n}{h^2} - \frac{V_3^n - 2V_2^n + V_1^n}{2h^2} \right) \right) = 0 \\ & \frac{H_m^{n+1} - H_m^n}{t} + \frac{1}{2} \left(V_m^n \frac{H_{m+1}^{n+1} - H_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V_{m+1}^n H_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^n H_{m-1}^{n+1}}{2h} + H_m^n \frac{V_{m+1}^n - V_{m-1}^n}{2h} \right) = 0 \\ & \frac{H_M^{n+1} - H_M^n}{t} + \frac{1}{2} \left(\frac{V_M^n H_M^{n+1} - V_{M-1}^n H_{M-1}^{n+1}}{h} + H_M^n \frac{V_M^n - V_{M-1}^n}{h} \right) + \frac{h}{2} \left(\frac{H_M^n V_M^n - 2H_{M-1}^n V_{M-1}^n + H_{M-2}^n V_{M-2}^n}{h^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{H_{M-1}^n V_{M-1}^n - 2H_{M-2}^n V_{M-2}^n + H_{M-3}^n V_{M-3}^n}{h^2} + H_M^n \left(\frac{V_M^n - 2V_{M-1}^n + V_{M-2}^n}{h^2} - \frac{V_{M-1}^n - 2V_{M-2}^n + V_{M-3}^n}{2h^2} \right) \right) = 0 \\ & \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{t} + \frac{1}{3} \left(V_m^n \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V_{m+1}^n V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^n V_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) + \frac{p(H_{m+1}^n) - p(H_{m-1}^n)}{2hH_m^n} = \\ & = \max_m \frac{\mu}{H_m^n} \frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} - \left(\max_m \frac{\mu}{H_m^n} - \frac{\mu}{H_m^n} \right) \frac{V_{m+1}^n - 2V_m^n + V_{m-1}^n}{h^2} + f \end{aligned} \right.$$

Выделив коэффициенты при H_m^{n+1} из первых трех уравнений системы, получим трехдиагональную матрицу. Решим её методом "прогонки" который является урезанным методом Гаусса, учитывающим строение матрицы.

После этого выделим из четвертого уравнения системы коэффициенты при V_m^{n+1} . Снова получим трехдиагональную матрицу. Решаем её методом прогонки и переходим к следующему $n + 2$ -му шагу алгоритма.

4. Заполнение матриц.

Напишем в явном виде формулы заполнения трехдиагональных матриц плотности и скорости.

4.1. Матрица плотности.

Преобразуем некраевой случай для плотности (второе уравнение):

$$H_{m-1}^{n+1} \underbrace{\left[-\frac{V_{m-1}^n + V_m^n}{4h} \right]}_{a_{m,m-1}} + H_m^{n+1} \underbrace{\left[\frac{1}{t} \right]}_{a_{m,m}} + H_{m+1}^{n+1} \underbrace{\left[\frac{V_m^n + V_{m+1}^n}{4h} \right]}_{a_{m,m+1}} = \underbrace{-H_m^n \left(\frac{V_{m+1}^n - V_{m-1}^n}{4h} \right) + \frac{H_m^n}{t}}_{b_m}$$

Здесь A - это искомая трехдиагональная матрица плотности.

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & \dots \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & a_{M,M-1} & a_{M,M} \end{pmatrix}$$

Будем хранить эту матрицу в виде трех векторов (по диагоналям).
Заполнение матрицы плотности:

```

a[0+M+1]=1./t;

a[0]=V[i*(M+1)+1]/(2.0*h);

b[0]=-H[i*(M+1)+0]*V[i*(M+1)+1]/(2.0*h)+
(1/(2.0*h))*
(H[i*(M+1)+2]*V[i*(M+1)+2]-
2*H[i*(M+1)+1]*V[i*(M+1)+1]+
H[i*(M+1)+0]*V[i*(M+1)+0]-
0.5*(H[i*(M+1)+3]*V[i*(M+1)+3]-
2*H[i*(M+1)+2]*V[i*(M+1)+2]+
H[i*(M+1)+1]*V[i*(M+1)+1])+
H[i*(M+1)+0]*(V[i*(M+1)+2]-
2*V[i*(M+1)+1]+V[i*(M+1)+0]-
0.5*(V[i*(M+1)+3]-2*V[i*(M+1)+2]+
V[i*(M+1)+1])))+H[i*(M+1)+0]/t+f0(i,0,t,h);

for(int j=1;j<M;j++)
{
    a[j+2*(M+1)]=-(1./(4.*h))*(V[i*(M+1)+j-1]+
    V[i*(M+1)+j]);

    a[j+M+1]=1./t;

    a[j]=(1./(4.*h))*(V[i*(M+1)+j+1]+V[i*(M+1)+j]);

    b[j]=f0(i,j,t,h)-H[i*(M+1)+j]*(V[i*(M+1)+j+1]-
    V[i*(M+1)+j-1])/(4.*h)+H[i*(M+1)+j]/t;
}

a[M+2*(M+1)]=-0.5*V[i*(M+1)+M-1]/h;

a[M+(M+1)]=1./t+0.5*V[i*(M+1)+M]/h;

b[M]=H[i*(M+1)+M]/t-0.5*H[i*(M+1)+M]*
(V[i*(M+1)+M]-V[i*(M+1)+M-1])/h-
0.5*h*(H[i*(M+1)+M]*V[i*(M+1)+M]-
2.*H[i*(M+1)+M-1]*V[i*(M+1)+M-1]+
H[i*(M+1)+M-2]*V[i*(M+1)+M-2])/(h*h)-
0.5*(H[i*(M+1)+M-1]*V[i*(M+1)+M-1]-
2.*H[i*(M+1)+M-2]*V[i*(M+1)+M-2]+
H[i*(M+1)+M-3]*V[i*(M+1)+M-3])/(h*h)+
H[i*(M+1)+M]*(V[i*(M+1)+M]-2*V[i*(M+1)+M-1]+
V[i*(M+1)+M-2])/(h*h)-0.5*(V[i*(M+1)+M-1]-
2*V[i*(M+1)+M-2]+V[i*(M+1)+M-3])/(h*h))+f0(i,M,t,h);

```

И умножим уравнения на th с целью повышения точности при малых t и h .

4.2. Матрица скорости.

Далее заполняем матрицу скорости. Аналогично выражаем коэффициенты, но считаем $a_{00} = a_{01} = a_{10} = a_{M,M-1} = a_{M,M} = a_{M-1,M} = 0$. Получаем следующий фрагмент кода:

```
for(int j=1;j<M;j++)
{
    a[j+2*(M+1)] = -(V[i*(M+1)+j] + V[i*(M+1)+j-1]) / (6*h) -
    max / (h*h);

    a[j+M+1] = 1. / t + 2. * max / (h*h);

    a[j] = (V[i*(M+1)+j] + V[i*(M+1)+j+1]) / (6*h) - max / (h*h);

    b[j] = V[i*(M+1)+j] / t - (p(H[(i+1)*(M+1)+j+1]) -
    p(H[(i+1)*(M+1)+j-1])) / (2. * h * H[(i+1)*(M+1)+j]) -
    (max - mu / H[(i+1)*(M+1)+j]) * (V[i*(M+1)+j+1] -
    2 * V[i*(M+1)+j] + V[i*(M+1)+j-1]) / (h*h) + f(i, j, t, h, mu);
}
```

И умножим уравнения на th с целью повышения точности при малых t и h .

5. Расчет гладкого решения.

Зададим функции:

$$\tilde{\rho} = e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right), \quad \tilde{u} = \cos(2\pi t) \sin\left(\pi \frac{x^2}{100}\right)$$

Определим функции f_0 и f так, чтобы они удовлетворяли системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial x} = f_0 \\ \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{\rho} f \\ p = p(\tilde{\rho}) \end{cases}$$

Проведя подстановку и соответствующие вычисления, найдем функции:

$$\begin{cases} f_0(t, x) = e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) + e^t \cos(2\pi t) \left(-\frac{\pi}{10} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) + \frac{\pi x}{50} \cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) \right) \\ f(t, x) = \left(-e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) 2\pi \sin(2\pi t) \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) + \frac{\pi t}{50} e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) (\cos(2\pi t))^2 \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) \cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) - \right. \\ \left. - p\left(\frac{\pi}{10}\right) e^t \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) - \frac{\mu \pi}{50} \cos(2\pi t) \left(\cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) - \frac{x^2 \pi}{50} \sin\left(\left(\frac{\pi x^2}{100}\right)\right) \right) \right) / \left(e^t \left(\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) \right) \end{cases}$$

Таким образом, имеем дифференциальную задачу для системы с начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(0, x) = \cos(\frac{\pi x}{10}) + 1.5, x \in [0, 10] \\ \tilde{u}(0, x) = \sin(\pi \frac{x^2}{100}), x \in [0, 10] \\ \tilde{u}(t, 0) = \tilde{u}(t, 10) = 0, t \in [0, 1] \end{cases}$$

Она имеет гладкое точное решение в области $[0, 1] \times [0, 10]$.

Составим таблицы ошибок численного решения с теоретическим для плотности и скорости в нормах $\| \cdot \|_{C_h}$, $\| \cdot \|_{L_2}$, $\| \cdot \|_W$ при различных значениях $C=1, 10, 100$ и $\mu = 0.1, 0.01, 0.001$.

Таблица для Н при $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.143694e-01	2.264050e-01	2.251116e-01	2.250955e-01
100	2.964124e-02	2.221759e-02	2.228827e-02	2.228837e-02
1000	2.317728e-02	2.192264e-03	2.225735e-03	2.226023e-03
10 000	2.252601e-02	2.623133e-043	2.222659e-04	2.225705e-04

Таблица для Н при $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.417969e-01	4.391595e-01	4.390930e-01	4.390929e-01
100	4.723786e-02	4.298727e-02	4.300219e-02	4.300234e-02
1000	2.016514e-02	4.281144e-03	4.293383e-03	4.293544e-03
10 000	1.980081e-02	4.514181e-04	4.291298e-04	4.292884e-04

Таблица для Н при $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.462457e-01	4.437024e-01	4.435496e-01	4.435500e-01
100	5.208176e-02	4.331901e-02	4.334279e-02	4.334300e-02
1000	2.999366e-02	4.315816e-03	4.327254e-03	4.327461e-03
10 000	2.981948e-02	5.029274e-04	4.324820e-04	4.326792e-04

Таблица для V при $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.444460e-01	3.429665e-01	3.430031e-01	3.430030e-01
100	3.744959e-02	3.189993e-02	3.189130e-02	3.189126e-02
1000	1.858139e-02	3.180874e-03	3.174460e-03	3.174446e-03
10 000	1.857666e-02	3.844859e-04	3.177237e-04	3.177065e-04

Таблица для V при $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.788023e-02	3.086641e-02	3.070495e-02	3.070333e-02
100	2.241863e-02	7.767198e-04	7.767198e-04	7.757596e-04
1000	2.215128e-02	2.514846e-04	7.336845e-05	7.299164e-053
10 000	2.214510e-02	2.310423e-04	7.920253e-06	7.310115e-063

Таблица для V при $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.573218e-02	4.150134e-02	4.126848e-02	4.126624e-02
100	3.287995e-02	1.120130e-03	9.368058e-04	9.354343e-04
1000	3.264929e-02	3.749411e-04	8.728497e-05	8.695886e-05
10 000	3.265416e-02	3.593887e-04	9.546523e-06	8.716269e-06

Таблица для H при $\mu = 0.01$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.211703e-01	2.263311e-01	1.582959e+00	5.372131e+00
100	3.142828e-02	2.245293e-02	2.246906e-02	2.246932e-02
1000	2.482366e-02	2.213685e-03	2.244466e-03	2.244768e-03
10 000	2.415879e-02	2.929521e-04	2.241461e-04	2.244516e-04

Таблица для H при $\mu = 0.01$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.428018e-01	4.392113e-01	5.252379e-01	6.093233e-01
100	4.786355e-02	4.302245e-02	4.303809e-02	4.303825e-02
1000	2.127418e-02	4.284601e-03	4.297226e-03	4.297396e-03
10 000	2.091750e-02	4.550180e-04	4.295095e-04	4.296761e-04

Таблица для H при $\mu = 0.01$, $C = 1$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.475027e-01	4.435662e-01	3.172539e+01	1.679467e+02
100	5.329391e-02	4.336868e-02	4.339092e-02	4.339114e-02
1000	3.185870e-02	4.321297e-03	4.332518e-03	4.332742e-03
10 000	3.169456e-02	5.171906e-04	4.329971e-04	4.332119e-04

Таблица для V при $\mu = 0.01$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.422005e-01	3.405622e-01	1.548628e+00	4.175018e-01
100	3.774782e-02	3.174822e-02	3.174968e-02	3.174968e-02
1000	1.959094e-02	3.205442e-03	3.201035e-03	3.201043e-03
10 000	1.958207e-02	3.891733e-04	3.203633e-04	3.203665e-04

Таблица для V при $\mu = 0.01$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.990424e-02	3.216016e-02	2.135581e-01	1.082185e-01
100	2.341577e-02	1.101758e-03	9.954724e-04	9.946412e-04
1000	2.310145e-02	2.714493e-04	9.530832e-05	9.496017e-05
10 000	2.309122e-02	2.432983e-04	1.005089e-05	9.495519e-06

Таблица для V при $\mu = 0.01$, $C = 1$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.835065e-02	4.286211e-02	1.714778e+01	6.841703e+00
100	3.446748e-02	1.323483e-03	1.169268e-03	1.168214e-03
1000	3.421400e-02	3.991829e-04	1.113716e-04	1.112409e-04
10 000	3.421724e-02	3.818741e-04	1.173585e-05	1.113611e-05

Таблица для H при $\mu = 0.001$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.218780e-01	2.261835e-01	2.585887e+06	2.165843e+05
100	3.162551e-02	2.245921e-02	2.248779e-02	9.648828e+44
1000	2.500499e-02	2.215424e-03	2.246375e-03	2.246679e-03
10 000	2.433857e-02	3.042393e-04	2.243375e-04	2.246431e-04

Таблица для H при $\mu = 0.001$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.429164e-01	4.392228e-01	3.828000e+05	1.969445e+04
100	4.793440e-02	4.302637e-02	4.304229e-02	7.776510e+43
1000	2.139615e-02	4.285062e-03	4.297672e-03	4.297842e-03
10 000	2.104003e-02	4.556348e-04	4.295536e-04	4.297210e-04

Таблица для H при $\mu = 0.001$, $C = 1$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.476502e-01	4.436026e-01	5.470499e+07	3.685878e+07
100	5.343186e-02	4.337631e-02	4.339887e-02	1.492133e+47
1000	3.206457e-02	4.322675e-03	4.333353e-03	4.333580e-03
10 000	3.190117e-02	5.233605e-04	4.330795e-04	4.332960e-04

Таблица для V при $\mu = 0.001$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.419760e-01	3.403284e-01	3.233496e+02	2.298566e+02
100	3.777779e-02	3.177527e-02	3.177693e-02	1.022704e+03
1000	1.969975e-02	3.207939e-03	3.203747e-03	3.203758e-03
10 000	1.969037e-02	3.896910e-04	3.206325e-04	3.206378e-04

Таблица для V при $\mu = 0.001$, $C = 1$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	5.012832e-02	3.230986e-02	1.624489e+01	3.884439e+01
100	2.352296e-02	1.124423e-03	1.019120e-03	1.649396e+01
1000	2.320283e-02	2.737599e-04	9.766722e-05	9.731917e-05
10 000	2.319209e-02	2.446654e-04	1.028347e-05	9.730381e-06

Таблица для V при $\mu = 0.001$, $C = 1$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.864411e-02	4.303422e-02	1.037434e+03	9.834436e+02
100	3.463934e-02	1.349755e-03	1.198210e-03	6.965285e+03
1000	3.438205e-02	4.030825e-04	1.143226e-04	1.142056e-04
10 000	3.438498e-02	3.854373e-04	1.201492e-05	1.143154e-05

Таблица для H при $\mu = 0.1$, $C = 10$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.513310e-01	6.840937e-01	3.619086e+00	1.097858e+01
100	2.740819e-02	2.366752e-02	2.383323e-02	2.383486e-02
1000	1.956120e-02	2.202376e-03	2.367907e-03	2.369558e-03
10 000	2.130836e-02	2.572322e-04	2.351462e-04	2.367993e-04

Таблица для H при $\mu = 0.1$, $C = 10$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.330993e-01	4.699694e-01	1.664312e+00	1.826387e+00
100	4.644060e-02	4.301035e-02	4.310528e-02	4.310624e-02
1000	3.346195e-02	4.224109e-03	4.305530e-03	4.306463e-03
10 000	3.443016e-02	4.630315e-04	4.296777e-04	4.305969e-04

Таблица для H при $\mu = 0.1$, $C = 10$, $\|\cdot\|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.389722e-01	2.653836e+00	3.707389e+01	3.559133e+02
100	4.718579e-02	4.371834e-02	4.382771e-02	4.382882e-02
1000	3.579572e-02	4.284730e-03	4.377660e-03	4.378718e-03
10 000	3.690329e-02	4.710372e-04	4.367784e-04	4.378209e-04

Таблица для V при $\mu = 0.1$, $C = 10$, $\|\cdot\|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.750469e-01	1.230806e+00	1.095256e+01	1.138714e+02
100	6.600732e-02	3.688866e-02	3.658867e-02	3.658567e-02
1000	3.726058e-02	3.979793e-03	3.677855e-03	3.674847e-03
10 000	3.670124e-02	6.805344e-04	3.706906e-04	3.676773e-04

Таблица для V при $\mu = 0.1$, $C = 10$, $\|\cdot\|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.746435e-01	4.284444e-01	2.494228e+00	3.763049e+01
100	8.368716e-02	7.648909e-03	6.913849e-03	6.906527e-03
1000	7.798488e-02	1.417858e-03	6.636130e-04	6.562138e-04
10 000	7.744721e-02	8.378828e-04	7.277683e-05	6.534517e-05

Таблица для V при $\mu = 0.1$, $C = 10$, $\|\cdot\|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.908808e-01	5.149794e+00	1.018747e+02	7.972251e+02
100	9.003273e-02	8.542508e-03	7.772740e-03	7.765089e-03
1000	8.390559e-02	1.545760e-03	7.454532e-04	7.377036e-04
10 000	8.333088e-02	9.015871e-04	8.125727e-05	7.345495e-05

Таблица для H при $\mu = 0.01$, $C = 10$, $\|\cdot\|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.524745e-01	1.289765e+04	2.374686e+04	8.622140e+04
100	2.747173e-02	2.369868e-02	4.560177e+18	5.454099e+58
1000	1.957615e-02	2.205360e-03	2.370923e-03	2.372576e-03
10 000	2.134193e-02	2.593398e-04	2.354473e-04	2.371008e-04

Таблица для H при $\mu = 0.01$, $C = 10$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.334053e-01	6.793411e+03	5.587676e+03	5.759727e+03
100	4.649140e-02	4.306713e-02	6.730699e+17	2.500740e+57
1000	3.351083e-02	4.229880e-03	4.311095e-03	4.312026e-03
10 000	3.447509e-02	4.641414e-04	4.302347e-04	4.311521e-04

Таблица для H при $\mu = 0.01$, $C = 10$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.394616e-01	1.339472e+05	6.396975e+05	8.002384e+06
100	4.724397e-02	4.380764e-02	1.174399e+20	3.472873e+60
1000	3.585155e-02	4.293535e-03	4.386480e-03	4.387539e-03
10 000	3.695566e-02	4.724853e-04	4.376584e-04	4.387015e-04

Таблица для V при $\mu = 0.01$, $C = 10$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.766542e-01	2.434208e+02	4.917218e+02	2.132218e+02
100	6.619407e-02	3.703839e-02	2.698780e+04	8.058098e+05
1000	3.737069e-02	3.997215e-03	3.692591e-03	3.689547e-03
10 000	3.682553e-02	6.850500e-04	3.721883e-04	3.691466e-04

Таблица для V при $\mu = 0.01$, $C = 10$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.743680e-01	9.274478e+01	1.533499e+02	7.071701e+01
100	8.393404e-02	7.597186e-03	1.858218e+02	1.681499e+03
1000	7.824325e-02	1.416750e-03	6.585911e-04	6.511391e-04
10 000	7.770639e-02	8.402207e-04	7.232663e-05	6.484504e-05

Таблица для V при $\mu = 0.01$, $C = 10$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.904086e-01	8.169066e+02	2.453591e+03	6.585651e+02
100	9.030136e-02	8.472591e-03	1.109948e+04	2.671933e+06
1000	8.420600e-02	1.542929e-03	7.387875e-04	7.309949e-04
10 000	8.363417e-02	9.041614e-04	8.063660e-05	7.279252e-05

Таблица для H при $\mu = 0.001$, $C = 10$, $\|\cdot\|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.525803e-01	3.810761e+04	4.036218e+08	3.790344e+08
100	2.747631e-02	2.370113e-02	1.344236e+54	3.334677e+82
1000	1.957590e-02	2.205616e-03	2.371229e-03	nan
10 000	2.134526e-02	2.589457e-04	2.354779e-04	2.371315e-04

Таблица для H при $\mu = 0.001$, $C = 10$, $\|\cdot\|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.334356e-01	1.410200e+04	5.865876e+07	3.253876e+07
100	4.649621e-02	4.307303e-02	1.723133e+53	1.573913e+81
1000	3.351533e-02	4.230474e-03	4.311675e-03	nan
10 000	3.447922e-02	4.642444e-04	4.302926e-04	4.312099e-04

Таблица для H при $\mu = 0.001$, $C = 10$, $\|\cdot\|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.395100e-01	2.278425e+05	8.433941e+09	3.643904e+10
100	4.724951e-02	4.381695e-02	3.134390e+55	2.190795e+84
1000	3.585663e-02	4.294449e-03	4.387400e-03	nan
10 000	3.696042e-02	4.726341e-04	4.377502e-04	4.387934e-04

Таблица для V при $\mu = 0.001$, $C = 10$, $\|\cdot\|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.768193e-01	1.766271e+02	2.005202e+04	2.708942e+04
100	6.621307e-02	3.705380e-02	1.698175e+06	2.920801e+06
1000	3.738169e-02	3.999016e-03	3.694111e-03	1.409340e+07
10 000	3.683789e-02	6.855323e-04	3.723428e-04	3.692986e-04

Таблица для V при $\mu = 0.001$, $C = 10$, $\|\cdot\|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.743434e-01	7.208726e+01	9.806257e+02	1.570384e+02
100	8.395888e-02	7.592556e-03	1.230660e+02	1.027037e+03
1000	7.826898e-02	1.416684e-03	6.581469e-04	nan
10 000	7.773218e-02	8.404618e-04	7.228717e-05	6.480088e-05

Таблица для V при $\mu = 0.001$, $C = 10$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.903650e-01	1.095608e+03	7.396439e+04	2.854414e+03
100	9.032825e-02	8.466287e-03	1.551421e+04	1.524546e+06
1000	8.423582e-02	1.542716e-03	7.381960e-04	nan
10 000	8.366426e-02	9.044598e-04	8.058158e-05	7.273386e-05

Таблица для H при $\mu = 0.1$, $C = 100$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.845259e-01	6.583996e+04	2.229711e+04	1.406105e+07
100	6.314241e-02	1.633035e-02	1.857319e+63	4.979522e+89
1000	6.995732e-02	1.727615e-03	1.659239e-03	1.660194e-03
10 000	7.065563e-02	6.422419e-04	1.653621e-04	1.661981e-04

Таблица для H при $\mu = 0.1$, $C = 100$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.476717e-01	4.993000e+04	5.395078e+03	1.127133e+06
100	1.474096e-01	4.169186e-02	2.248001e+62	1.787611e+88
1000	1.397630e-01	4.459672e-03	4.163849e-03	4.163023e-03
10 000	1.395490e-01	1.457592e-03	4.173837e-04	4.163639e-04

Таблица для H при $\mu = 0.1$, $C = 100$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.518418e-01	9.759963e+05	2.870931e+05	1.415807e+09
100	1.546395e-01	4.211100e-02	2.685174e+64	2.534312e+91
1000	1.469140e-01	4.537067e-03	4.207191e-03	4.206206e-03
10 000	1.466721e-01	1.528534e-03	4.219124e-04	4.207149e-04

Таблица для V при $\mu = 0.1$, $C = 100$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.252598e-01	8.879800e+02	4.547761e+02	1.896095e+02
100	1.709711e-01	5.094260e-02	2.704737e+05	1.108724e+06
1000	1.270639e-01	6.169077e-03	4.973440e-03	4.961510e-03
10 000	1.233556e-01	1.715816e-03	5.080713e-04	4.961333e-04

Таблица для V при $\mu = 0.1$, $C = 100$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.368946e-01	5.510062e+02	1.644422e+02	1.454028e+02
100	6.411959e-02	5.793595e-02	5.572300e+02	2.700454e+03
1000	9.068685e-02	5.343706e-03	5.928335e-03	5.934478e-03
10 000	9.444016e-02	5.833748e-04	5.880938e-04	5.941778e-04

Таблица для V при $\mu = 0.1$, $C = 100$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	5.122246e-01	7.530496e+03	1.299412e+03	1.262009e+03
100	6.934462e-02	6.843348e-02	8.806266e+04	3.904029e+06
1000	9.833935e-02	6.359216e-03	6.990951e-03	6.997551e-03
10 000	1.026223e-01	6.309003e-04	6.940319e-04	7.005493e-04

Таблица для H при $\mu = 0.01$, $C = 100$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.841277e-01	1.275948e+07	2.188936e+08	3.970911e+11
100	6.326133e-02	1.643460e-02	2.519265e+73	1.260722e+91
1000	7.011649e-02	1.734247e-03	1.669098e-03	3.602561e+301
10 000	7.079909e-02	6.427447e-04	1.663595e-04	1.671784e-04

Таблица для H при $\mu = 0.01$, $C = 100$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.483706e-01	1.343671e+07	3.037518e+07	1.302293e+10
100	1.476911e-01	4.174663e-02	5.131454e+72	1.357487e+90
1000	1.399703e-01	4.467551e-03	4.169100e-03	nan
10 000	1.397491e-01	1.460142e-03	4.179319e-04	4.168869e-04

Таблица для H при $\mu = 0.01$, $C = 100$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.527400e-01	1.719436e+08	4.280805e+09	1.842197e+13
100	1.549485e-01	4.218772e-02	5.241700e+74	1.891694e+93
1000	1.471323e-01	4.547538e-03	4.214591e-03	nan
10 000	1.468822e-01	1.531407e-03	4.226806e-04	4.214522e-04

Таблица для V при $\mu = 0.01$, $C = 100$, $\|\cdot\|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.225402e-01	6.721016e+03	4.558179e+03	1.584303e+04
100	1.709270e-01	5.077288e-02	8.062654e+04	1.596971e+06
1000	1.271934e-01	6.152719e-03	4.956244e-03	1.317858e+07
10 000	1.237083e-01	1.714890e-03	5.063633e-04	4.944152e-04

Таблица для V при $\mu = 0.01$, $C = 100$, $\|\cdot\|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.435176e-01	3.612954e+02	3.941217e+02	1.259630e+03
100	6.402450e-02	5.829656e-02	1.609875e+03	1.950357e+03
1000	9.082143e-02	5.376518e-03	5.962292e-03	nan
10 000	9.460853e-02	5.821508e-04	5.914602e-04	5.975541e-04

Таблица для V при $\mu = 0.01$, $C = 100$, $\|\cdot\|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	5.201995e-01	5.800149e+03	2.923469e+04	7.434317e+05
100	6.934991e-02	6.888147e-02	2.197652e+05	2.550464e+06
1000	9.861408e-02	6.400201e-03	7.032877e-03	nan
10 000	1.029358e-01	6.300024e-04	6.981898e-04	7.047151e-04

Таблица для H при $\mu = 0.001$, $C = 100$, $\|\cdot\|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.840873e-01	3.739917e+07	5.514377e+10	1.768935e+10
100	6.327378e-02	1.644507e-02	1.254961e+76	7.593688e+117
1000	7.013243e-02	1.734938e-03	1.670089e-03	nan
10 000	7.081346e-02	6.428448e-04	1.664596e-04	1.672770e-04

Таблица для H при $\mu = 0.001$, $C = 100$, $\|\cdot\|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.484431e-01	1.826424e+07	9.049440e+09	1.685555e+09
100	1.477195e-01	4.175223e-02	2.897197e+75	5.595372e+116
1000	1.399911e-01	4.468351e-03	4.169636e-03	nan
10 000	1.397693e-01	1.460400e-03	4.179877e-04	4.169402e-04

Таблица для H при $\mu = 0.001$, $C = 100$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.528332e-01	2.517398e+08	1.297191e+12	2.420641e+12
100	1.549797e-01	4.219554e-02	4.464021e+77	6.116383e+119
1000	1.471544e-01	4.548601e-03	4.215346e-03	nan
10 000	1.469034e-01	1.531700e-03	4.227588e-04	4.215274e-04

Таблица для V при $\mu = 0.001$, $C = 100$, $\| \cdot \|_{C_h}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.222634e-01	5.058694e+03	1.482826e+05	1.763216e+04
100	1.709229e-01	5.075580e-02	2.629151e+06	3.485066e+06
1000	1.272068e-01	6.151047e-03	4.954532e-03	3.656183e+07
10 000	1.237442e-01	1.714861e-03	5.061924e-04	4.942434e-04

Таблица для V при $\mu = 0.001$, $C = 100$, $\| \cdot \|_{L_2}$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.441868e-01	1.495402e+03	1.075883e+04	2.408517e+03
100	6.401593e-02	5.833287e-02	5.232401e+02	1.580412e+04
1000	9.083621e-02	5.379825e-03	5.965712e-03	nan
10 000	9.462670e-02	5.820322e-04	6.986087e-04	5.978942e-04

Таблица для V при $\mu = 0.001$, $C = 100$, $\| \cdot \|_W$:

N / M	10	100	1000	10 000
10	5.210084e-01	1.778741e+04	1.413502e+06	2.651711e+05
100	6.935247e-02	7.793750e+04	2.183592e+07	2.183592e+07
1000	9.864410e-02	6.404335e-03	7.037101e-03	nan
10 000	1.029697e-01	6.299253e-04	6.986087e-04	7.051348e-04

5.1. Выводы о работе схемы для гладкой задачи.

Таблицы ошибок говорят о том, что система сходится условно. Также, обратим внимание на то, что сходимость задачи зависит от параметров μ и

C . При $\mu = 0.1$, $C = 1$ система сходится при любом отношении $\frac{N}{M}$.

Если же M не превосходит N , то система сходится (во всех нормах).

Из таблиц ошибок очевидно, что чаще всего в строке наименьшую ошибку имеем при $N = M$, и значения ошибки на диагонали уменьшаются при росте N и достигают своего минимума при $N = 10000$ -это значение является минимумом всей таблицы (чаще всего). Также хороший результат достигается при $N = 10M$. Из этого можно сделать вывод о том, что наилучшее отношение $\frac{N}{M}$ между единицей и десятью.

6. Исследование разрывного возмущения плотности.

Зададим начально-краевую задачу, начальные и граничные условия которой определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \rho_0(x) = 1 + \mathbf{1}(x \in [4.5, 5.5]) \\ u_0(x) = 0, x \in [0, 10] \end{cases} \quad (1)$$

Будем считать, что решение стабилизировалась, если максимум и минимум функции плотности (скорости) отличаются не более чем на ε .

7. Первый набор параметров

Зафиксируем $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\varepsilon = 0.01$. Тогда для $\tau = h = 0.1$ имеем стабилизацию при данных начальных условиях за 326.2 едениц времени (за 3262 шага), где h и τ - разбиение пространства и времени соответственно.

Промежуточные шаги

Приведем графики плотности и скорости на промежуточных шагах:

Приведем общую картину для плотности и скорости:

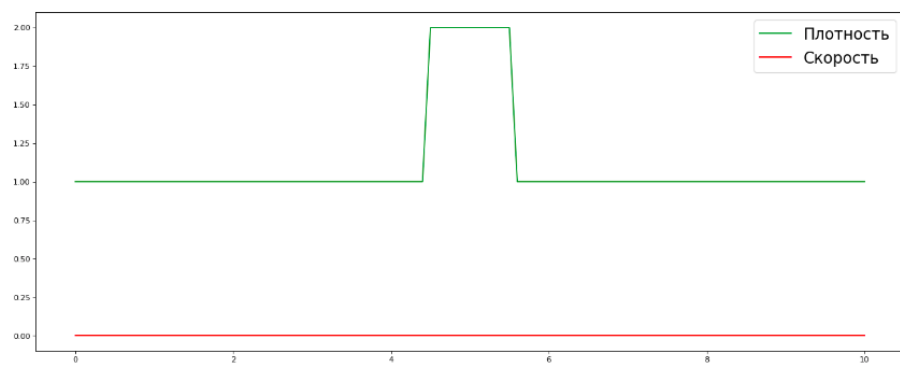


Рис. 1. Время $t = 0$, $\Delta m = 0.000000e + 00$

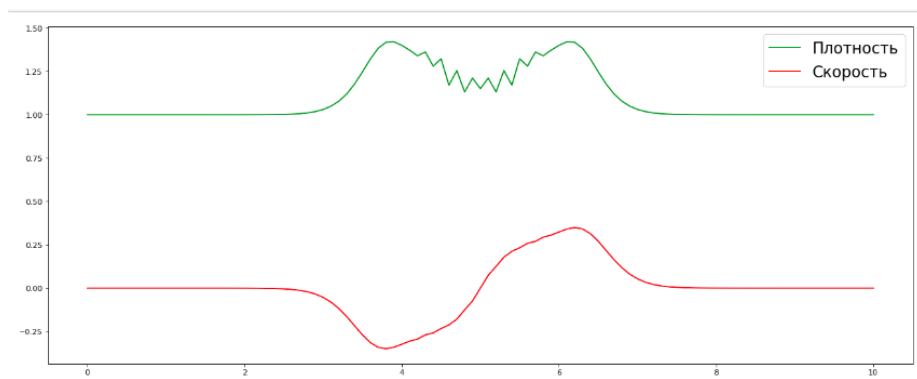


Рис. 2. Время $t = 1$, $\Delta m = -5.734366e - 02$

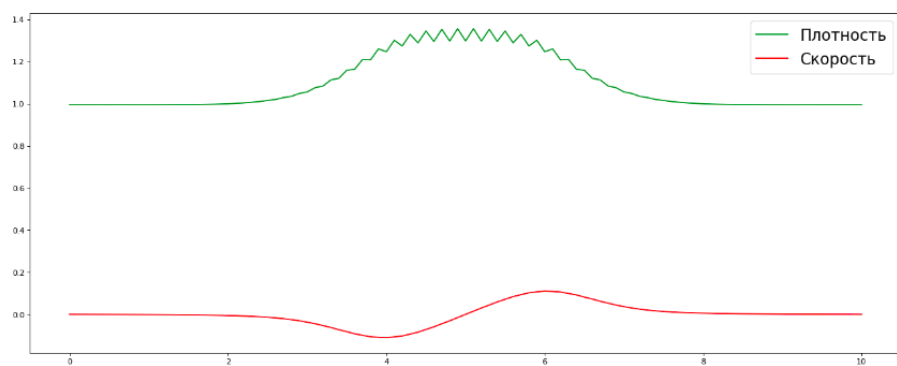


Рис. 3. Время $t = 10$, $\Delta m = -1.495567e - 01$

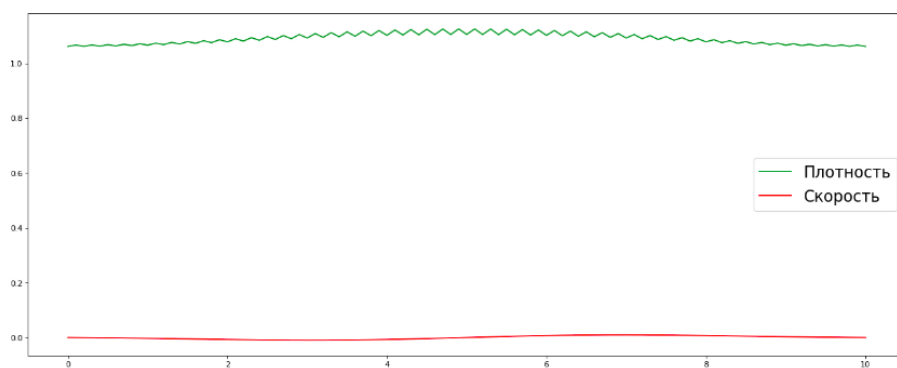


Рис. 4. Время $t = 100$, $\Delta m = -1.890028e - 01$

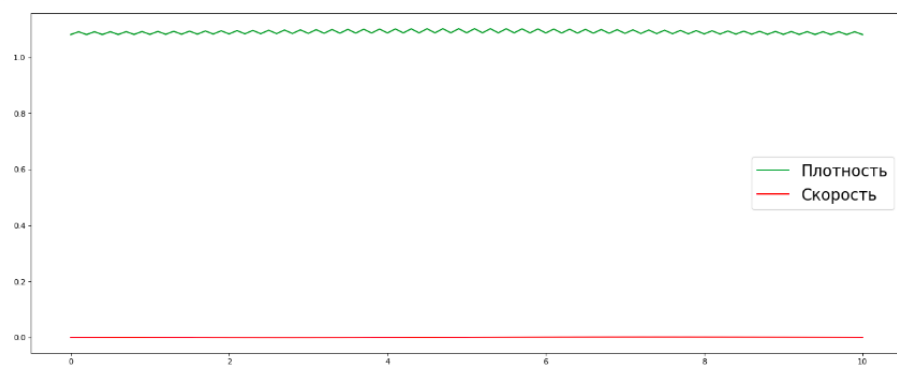


Рис. 5. Время $t = 200$, $\Delta t = -1.884684e - 01$

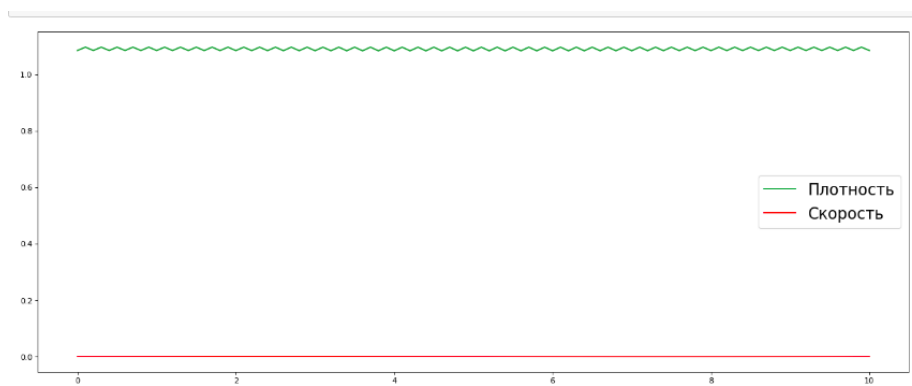


Рис. 6. Время $t = 326.1$, $\Delta t = -1.883144e - 01$

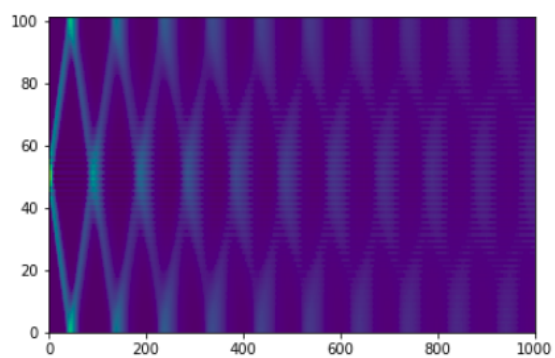


Рис. 7. Плотность $\tau = 0.1$

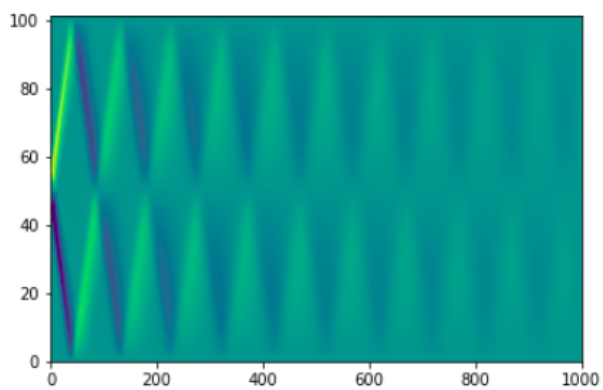


Рис. 8. Скорость при $\tau = 0.1$

Таблица моментов колебаний:

Момент возврата волны в центр	0	9.8	18.7	27.4	37.2	47.3	57.1	67.6	77.3
Периодичность колебаний	-	9.8	8.9	8.7	9.8	10.1	9.8	10.5	9.7

Из таблицы видно, что средняя периодичность колебаний примерно 9.66, это также можно наблюдать на графике.

7.1. Вывод

Видим, что масса при таких параметрах не сохраняется. Так же наблюдается непостоянная величина периода колебаний газа. Предположим, что параметры подобраны для схемы неудачно. Рассмотрим другие параметры:

8. Второй набор параметров

Зафиксируем те же гиперпараметры $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\varepsilon = 0.01$. Тогда для $\tau = h = 0.01$ имеем стабилизацию при данных начальных условиях за 215.11 единиц времени (за 21511 шага), где h и τ - разбиение пространства и времени соответственно.

Промежуточные шаги

Приведем графики плотности и скорости на промежуточных шагах:

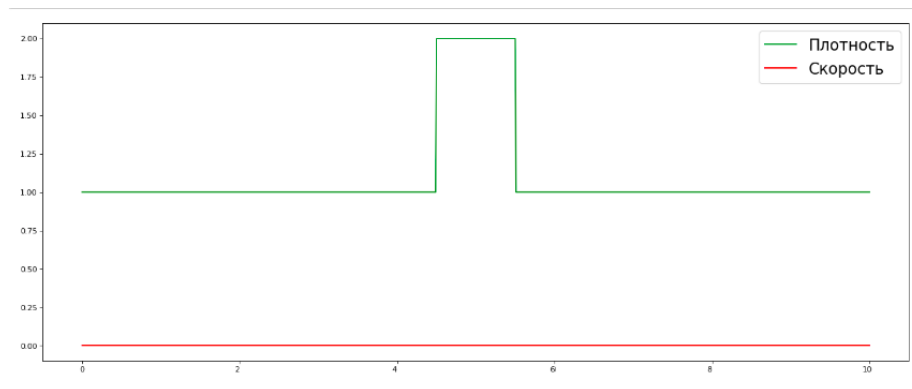


Рис. 9. Время $t = 0$, $\Delta t = 0.000000e + 00$

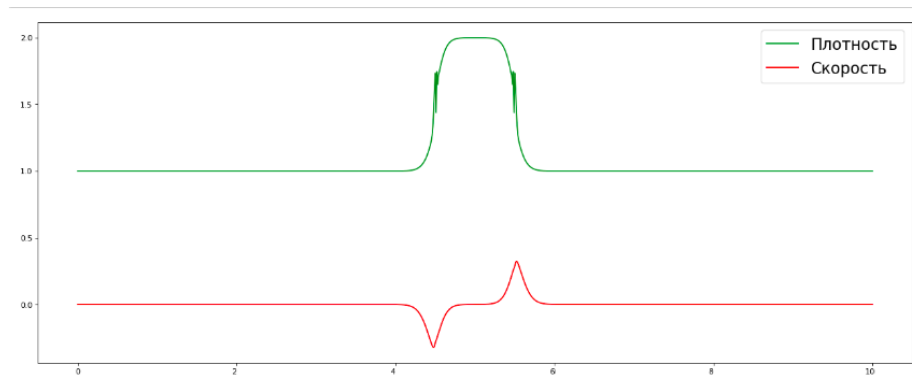


Рис. 10. Время $t = 0.01$, $\Delta t = -1.103967e - 03$

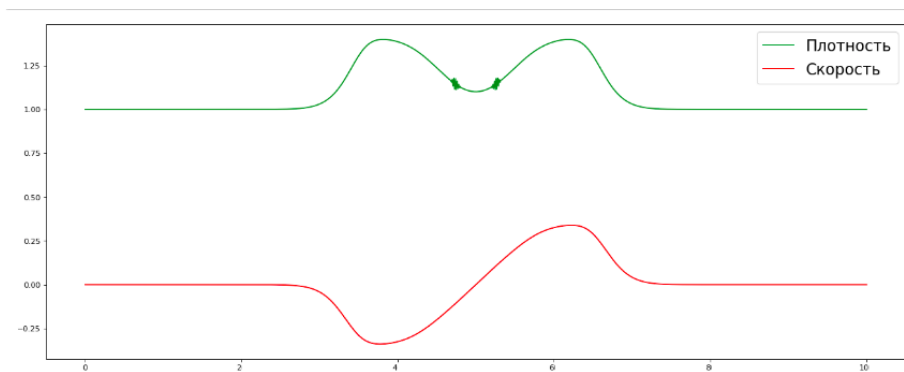


Рис. 11. Время $t = 0.1$, $\Delta m = -7.004731e - 03$

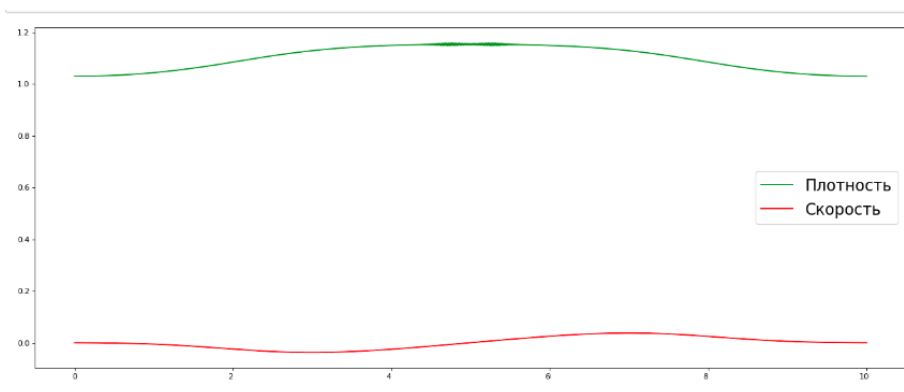


Рис. 12. Время $t = 5$, $\Delta m = -2.092902e - 02$

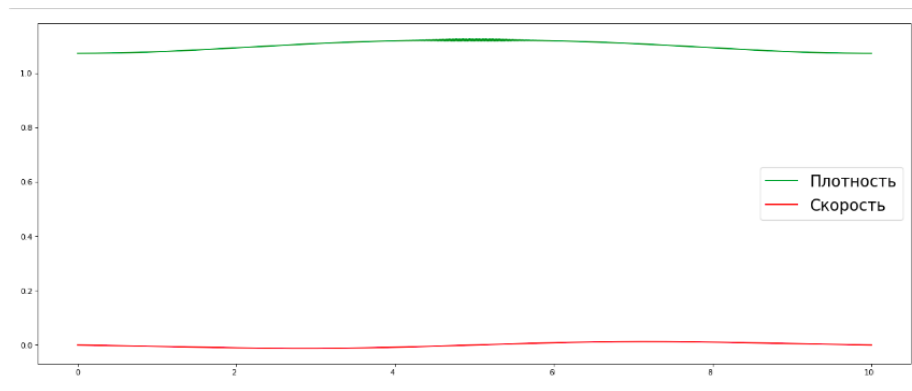


Рис. 13. Время $t = 10$, $\Delta m = -2.109365e - 02$

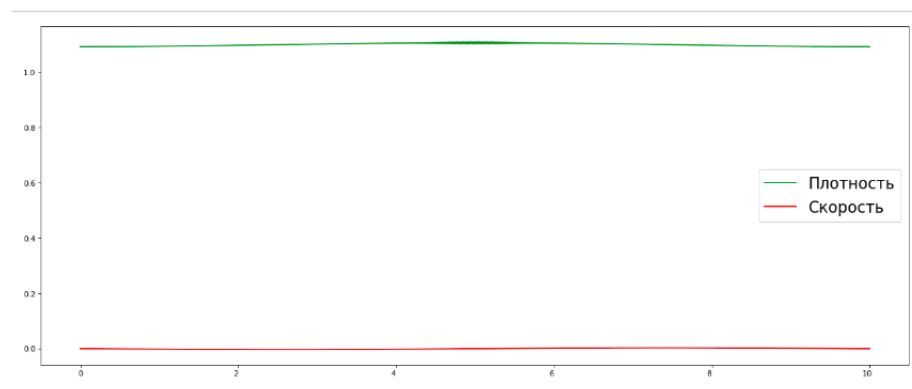


Рис. 14. Время $t = 170$, $\Delta m = -2.099146e - 02$

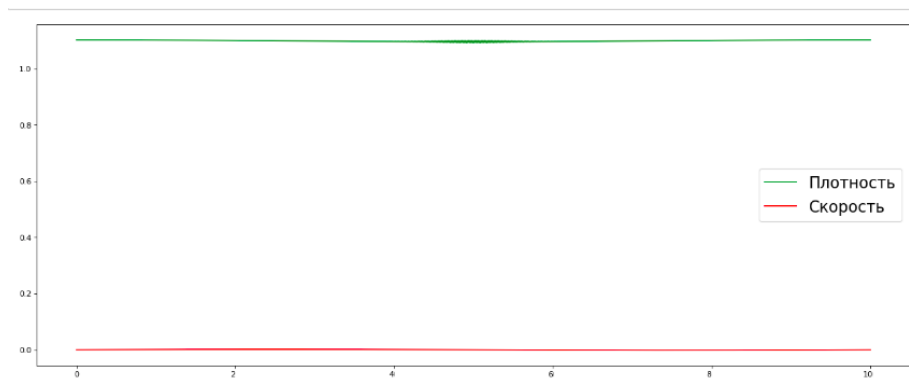


Рис. 15. Время $t = 215.11$, $\Delta m = -2.089567e - 02$

Приведем общую картину для плотности и скорости:

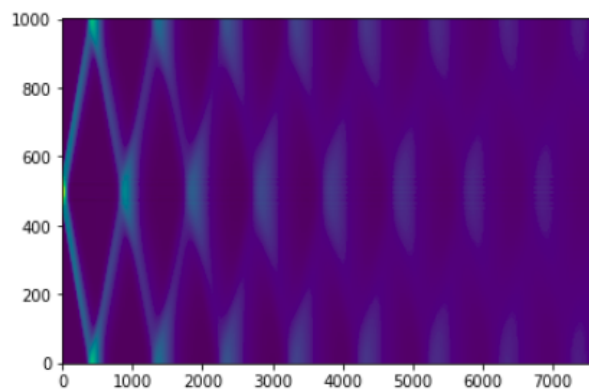


Рис. 16. Плотность $\tau = 0.01$

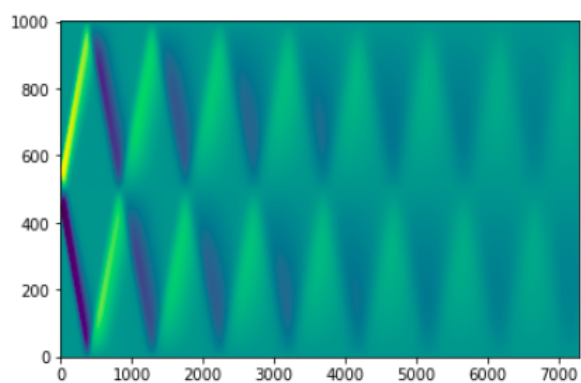


Рис. 17. Скорость при $\tau = 0.01$

Таблица моментов колебаний:

Момент возврата волны в центр	0	9.6	17.8	27.7	37.5	47.5	57.5
Периодичность колебаний	-	8.2	9.9	9.8	10	10	9.8

8.1. Вывод

Из таблицы видно, что средняя периодичность колебаний примерно 9.61, это также можно наблюдать на графике. Также, можно заметить, что закон сохранения массы все еще не наблюдается, но потери гораздо меньше.

9. Сходимость

Теперь посмотрим насколько меняется стабилизация решения при измельчении сетки. Будем измельчать сетку в 2 раза и мерить $\| \cdot \|_{L_2}$ норму вектора разности в узлах крупной сетки.

Таблица 1. Сходимость решения, при $\varepsilon = 0.01$ (сверху плотность, снизу скорость)

$\tau \backslash M$	100	200	400	800	1600
0.1	5.151709e-01	3.987600e-01	2.402914e-01	6.563477e-02	1.989034e-01
	2.872185e-01	1.871369e-01	1.974330e-01	2.116211e-01	1.945563e-01
0.01	-	1.361602e-01	9.641251e-02	1.050565e-02	5.078916e-02
	-	1.205360e-04	3.798686e-03	1.079030e-02	2.203889e-02

Закон сохранения массы

Проверим выполнение закона сохранения массы для тех же параметров, что были в предыдущем пункте.

Таблица 2. Закон сохранения массы, при $\varepsilon = 0.01$

$\tau \backslash M$	100	200	400	800	1600
0.1	-1.883165e-01	-2.948115e-01	-2.085605e-01	-1.170077e-01	-3.195044e-01
0.01	-	-2.360895e-02	-1.961713e-02	-2.811016e-02	-3.464932e-02

Вывод

Закон сохранения массы не выполняется для маленьких разбиений времени ($\tau = 0.1$). С увеличением количества точек M увеличивается потеря массы газа.

10. Исследование гладкого возмущения плотности

Проанализируем поведение разностной схемы при возмущении плотности гладкой функцией. Зададим начально-краевую задачу с следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \rho_0(x) = 2 + \sin(k\pi x) \\ u_0(x) = 0, x \in [0, 10] \end{cases} \quad (2)$$

Зафиксируем $\mu = 0.1$ и $C = 1$, $h = 0.001$. Условие стабилизации такое же как в предыдущем параграфе.

Таблица 3. Шаги стабилизации, при $\varepsilon = 0.01$ (сверху шаг стабилизации, снизу Δm)

$\tau \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.1	69.1 -19.7	79.1 -19.7	83.4 -19.7	39.4 -19.7	98.2 -18.3	159.8 -17.9	57.4 -17	86.5 -19.5	1009.3 -17	43.8 -18.3

11. Исследование разрывного возмущения скорости

Проанализируем поведение разностной схемы при возмущении скорости разрывной функцией. Зададим начально-краевую задачу с следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \rho_0(x) = 1 \\ u_0(x) = \mathbf{1}(x \in [4.5, 5.5]), x \in [0, 10] \end{cases} \quad (3)$$

Условие стабилизации такое же как в параграфе 6.

12. Первый набор параметров

Зафиксируем $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\varepsilon = 0.01$. Тогда для $\tau = h = 0.1$ имеем стабилизацию при данных начальных условиях за 411.4 единиц времени (за 4114 шага), где h и τ - разбиение пространства и времени соответственно.

Промежуточные шаги

Приведем графики плотности и скорости на промежуточных шагах:

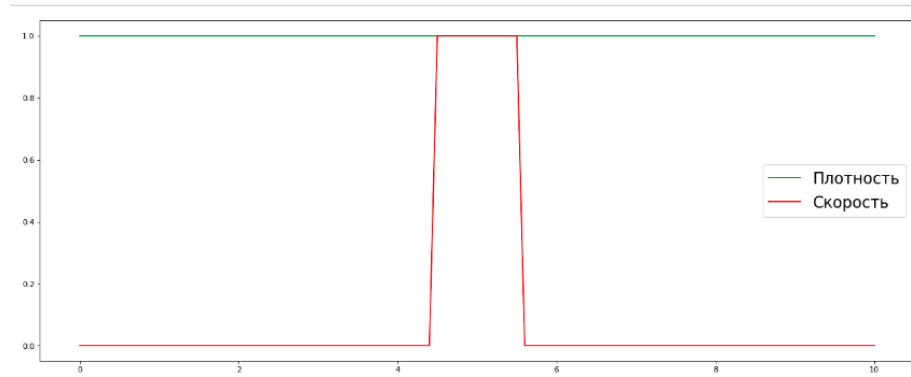


Рис. 18. Время $t = 0$, $\Delta m = 0.000000e + 00$

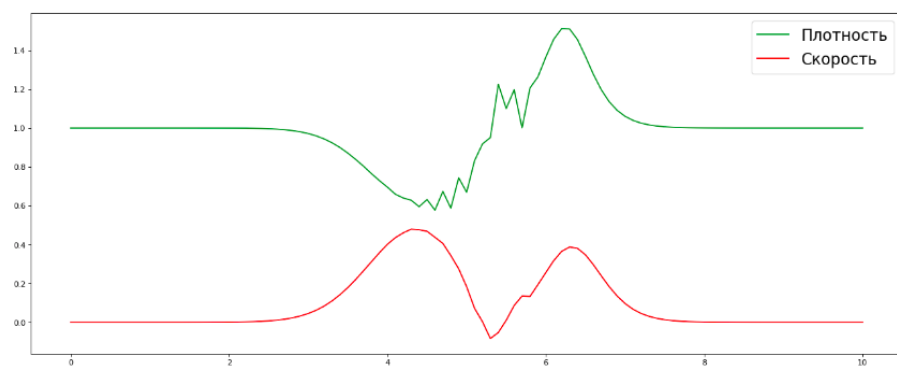


Рис. 19. Время $t = 1$, $\Delta m = -1.021491e - 01$

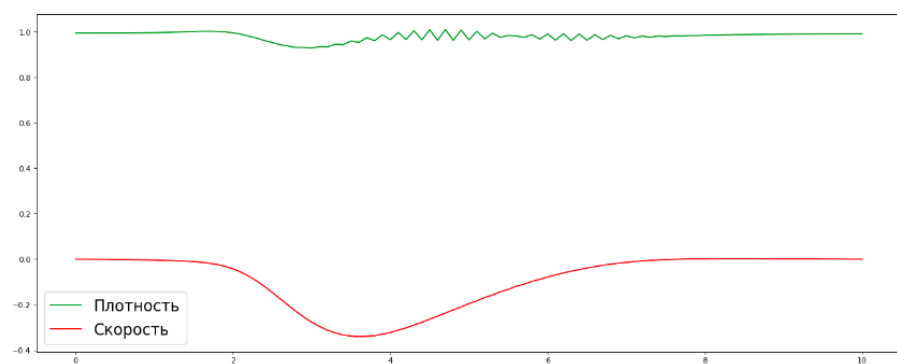


Рис. 20. Время $t = 10$, $\Delta m = -1.944952e - 01$

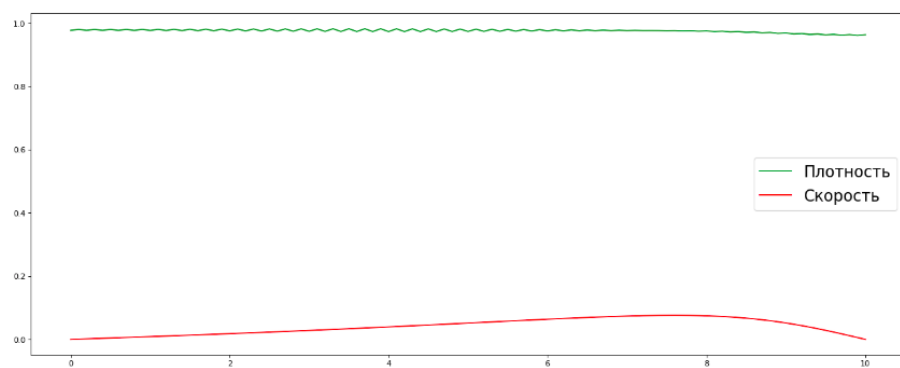


Рис. 21. Время $t = 100$, $\Delta m = -2.447553e - 01$

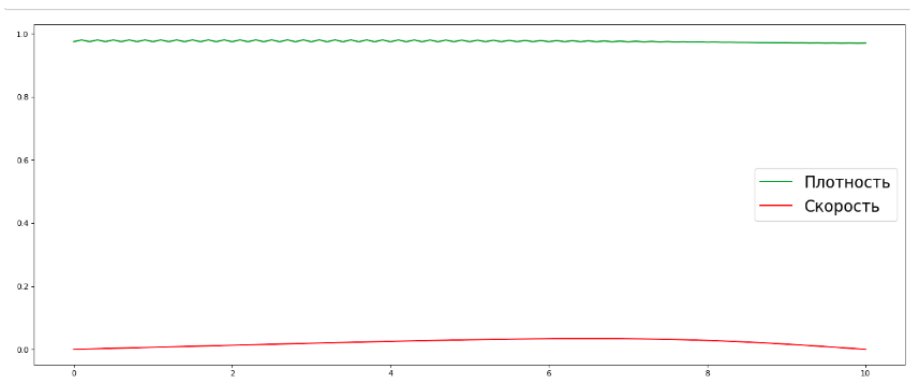


Рис. 22. Время $t = 200$, $\Delta m = -2.489997e - 01$

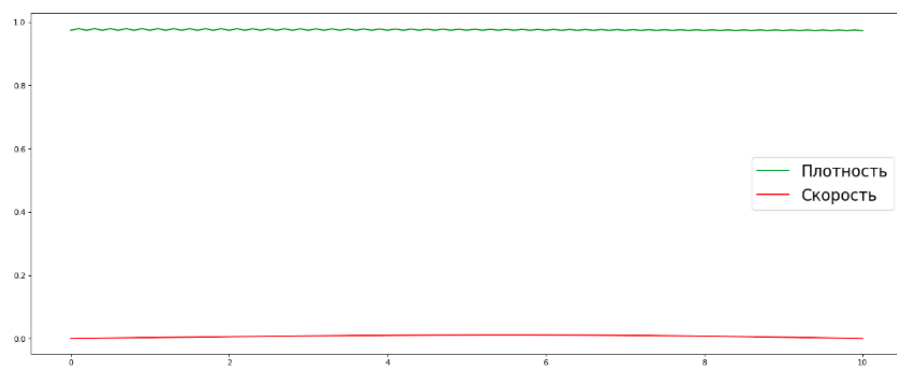


Рис. 23. Время $t = 400$, $\Delta m = -2.501832e - 01$

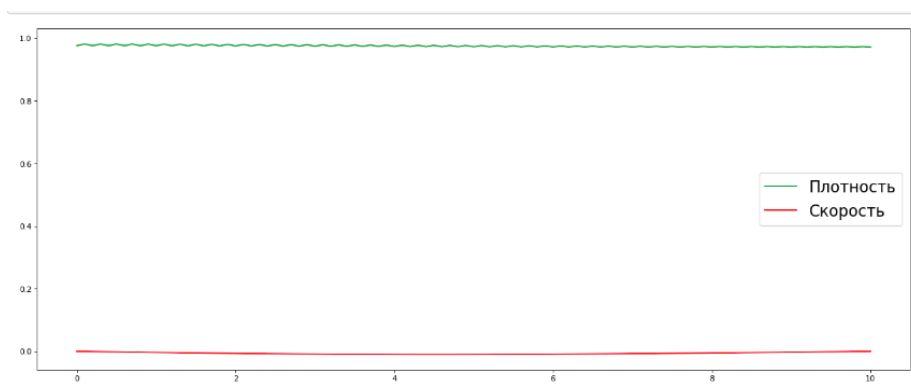


Рис. 24. Время $t = 411.4$, $\Delta m = -2.501290e - 01$

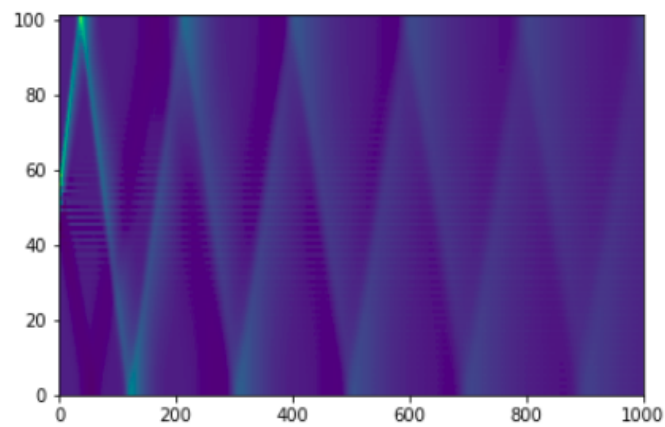


Рис. 25. Плотность $\tau = 0.1$

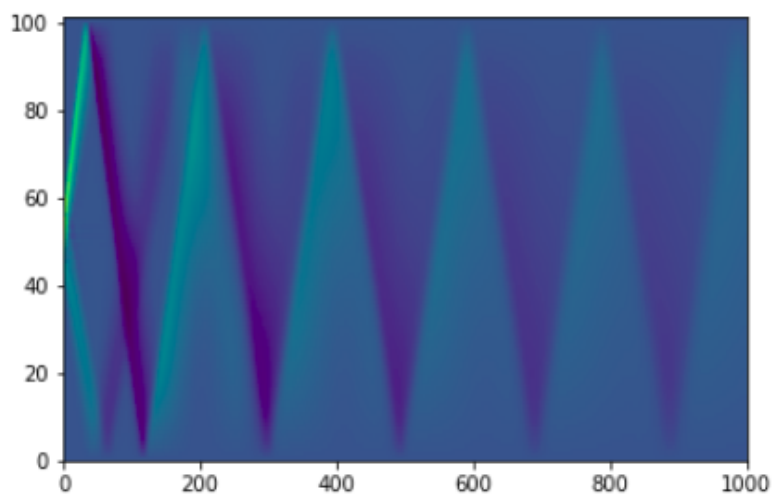


Рис. 26. Скорость при $\tau = 0.1$

Таблица моментов колебаний:

Момент возврата волны в центр	0	12.2	30	51.3	72.2
Периодичность колебаний	-	12.2	17.8	21.3	20.9

12.1. Вывод

Из таблицы видно, что период не стабилизируется, это также можно наблюдать на графике. Закон сохранения массы не выполняется.

13. Второй набор параметров

Зафиксируем те же гиперпараметры $\mu = 0.1$, $C = 1$, $\varepsilon = 0.01$. Тогда для $\tau = h = 0.01$ имеем стабилизацию при данных начальных условиях за 428.13 единиц времени (за 42813 шага), где h и τ - разбиение пространства и времени соответственно.

Промежуточные шаги

Приведем графики плотности и скорости на промежуточных шагах:

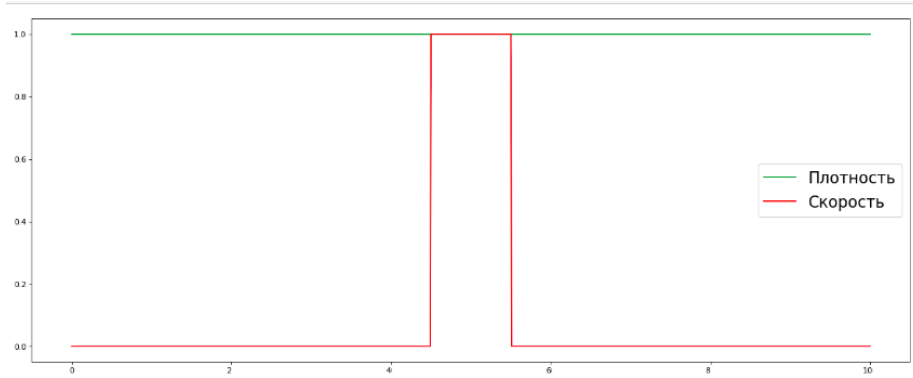


Рис. 27. Время $t = 0$, $\Delta m = 0.000000e + 00$

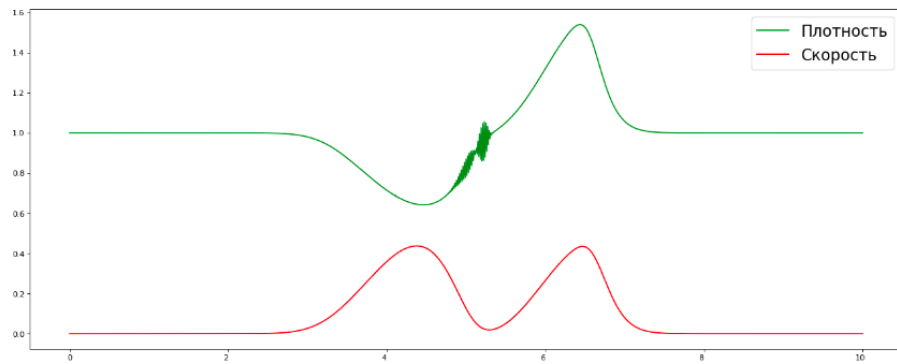


Рис. 28. Время $t = 1$, $\Delta m = -1.473432e - 02$

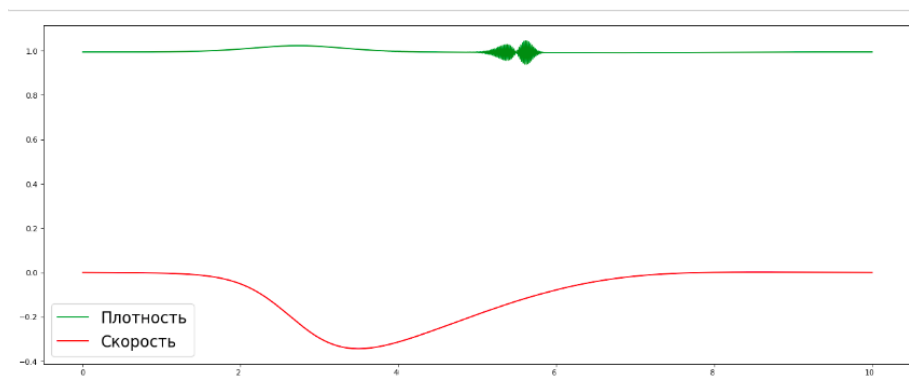


Рис. 29. Время $t = 10$, $\Delta m = -2.477754e - 02$

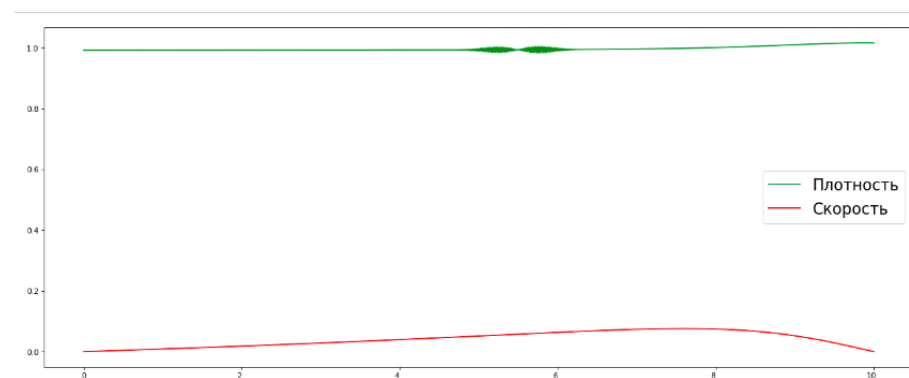


Рис. 30. Время $t = 100$, $\Delta m = -2.989916e - 02$

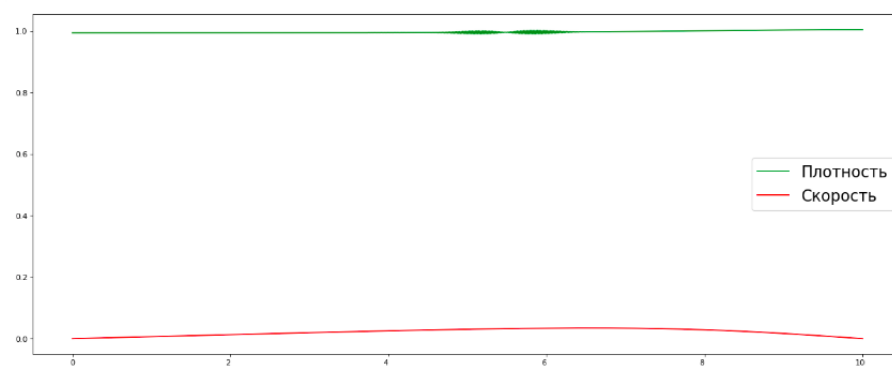


Рис. 31. Время $t = 200$, $\Delta m = -3.040205e - 02$

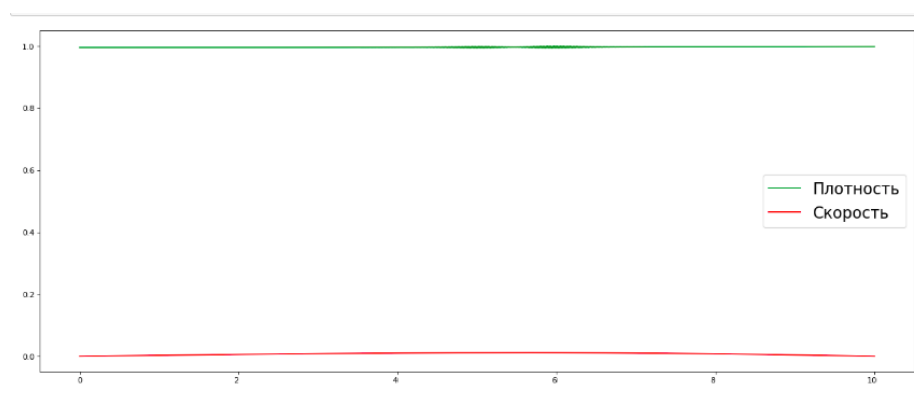


Рис. 32. Время $t = 428.13$, $\Delta m = -3.054606e - 02$

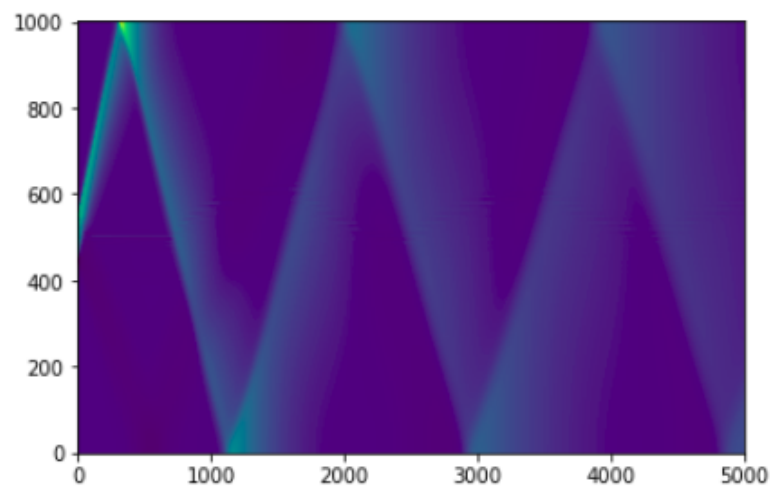


Рис. 33. Плотность $\tau = 0.1$

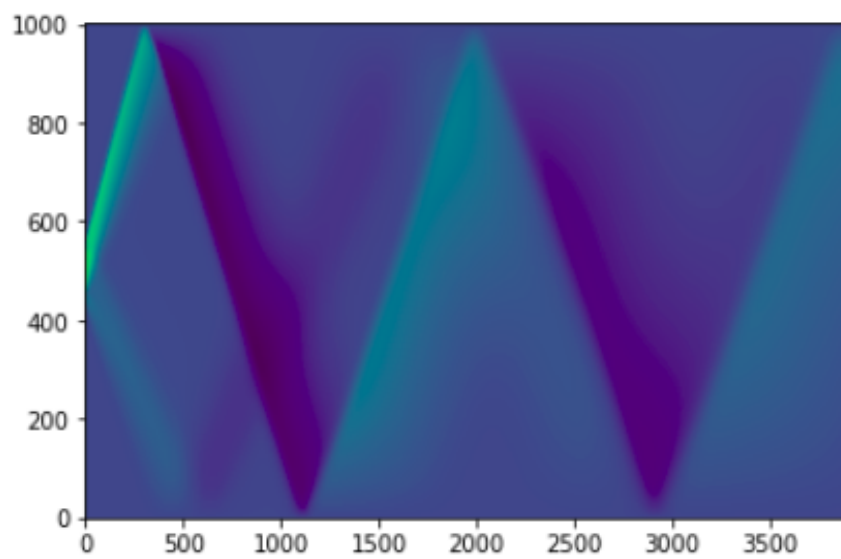


Рис. 34. Скорость при $\tau = 0.1$

Таблица моментов колебаний:

Момент возврата волны в центр	0	11.3	29.2	49.8
Периодичность колебаний	-	11.3	17.9	20.6

13.1. Вывод

Из таблицы видно, что период не стабилизируется, это также можно наблюдать на графике. Закон сохранения массы выполняется.

14. Сходимость

Теперь посмотрим насколько меняется стабилизация решения при измельчении сетки. Будем измельчать сетку в 2 раза и мерить $\| \cdot \|_{L_2}$ норму вектора разности в узлах крупной сетки.

Таблица 4. Сходимость решения, при $\varepsilon = 0.01$ (сверху плотность, снизу скорость)

$\tau \backslash M$	100	200	400	800	1600
0.01	3.517097e-04	3.987600e-04	7.402914e-04	1.563477e-03	1.989034e-01
	8.515185e-05	1.871369e-05	6.974330e-05	7.116211e-06	2.945563e-02
0.005	6.87600e-04	3.111602e-04	3.011251e-04	4.330565e-04	1.115916e-04
	6.587600e-05	2.205360e-05	3.298686e-05	1.279030e-05	1.103889e-05

Закон сохранения массы

Проверим выполнение закона сохранения массы для тех же параметров, что были в предыдущем пункте.

Таблица 5. Закон сохранения массы, при $\varepsilon = 0.01$

$\tau \backslash M$	100	200	400	800	1600
0.1	-1.932165e-01	-2.897115e-01	-2.112605e-02	-1.320077e-02	-3.195044e-01
0.01	-2.240895e-02	-2.360785e-02	-1.876613e-02	-2.822616e-02	-3.464932e-02

Вывод

Закон сохранения массы не выполняется для маленьких разбиений времени ($\tau = 0.1$). С увеличением количества точек M увеличивается потеря массы газа.

15. Исследование гладкого возмущения скорости

Проанализируем поведение разностной схемы при возмущении плотности гладкой функцией. Зададим начально-краевую задачу с следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \rho_0(x) = 2 + \sin(k\pi x) \\ u_0(x) = 0, x \in [0, 10] \end{cases} \quad (4)$$

Зафиксируем $\mu = 0.1$ и $C = 1$, $h = 0.001$. Условие стабилизации такое же как в предыдущем параграфе.

Список литературы

- [1] А. В. Попов: Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием неявных разностных схем . 2017.
- [2] А. В. Попов: Численное моделирование нестационарного течения газа с использованием неявных разностных схем . 2018.
- [3] А. В. Попов: GNUPLOT и его приложения . Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ. 2015.
- [4] К. Ю. Богачев: Практикум на ЭВМ.Методы решения линейных систем и нахождения значений. Издательство Механико-Математического факультета МГУ. 1998.