Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

Реферат по истории математики

Основание топологии Анри Пуанкаре в "Analysis situs"

Студента группы 402
Чернавских М.М.
преп. Смирнова Г.С.

Москва, 2021 год

Рис. 1: Анри Пуанкаре.

Вступление

Фамилию Пуанкаре я знал еще до постпления в МГУ, даже до поступления в СУНЦ. Конечно же, для меня это был не великий ученый, а автор "Гипотезы Пуанкаре". И вот с каждым годом обучения в университете я понимал всё больше слов в формулировке гипотезы Пуанкаре, теперь уже теоремы Перельмана. Раньше это казалось чем-то необычным и потусторонним. Теперь же я способен понять основные идеи доказательства.

Поскольку я поступил на кафедру ВГТ, моим долгом было поближе познакомиться с работами основателя топологии, ведь столько объектов носят его имя: гомологическая сфера Пуанкаре, двойственность Пуанкаре в алгебраической топологии, неравенство Пуанкаре в Соболевских пространствах, модель гиперболической геометрии в круге, группа Пуанкаре изометрий пространства–времени Минковского. Я не узнал много нового из этой книги, но взглянул на привычные вещи по-другому. Я почувствовал, как громоздки и неаккуратны были рассуждения наших предшественников. А также, как изящно переизложена теория, созданная Пуанкаре, в современных учебниках.

Об используемой литературе

Основной используемой книгой была «Пуанкаре А. Избранные труды» в трёх томах (Москва: Издательство «Наука», 1971-1974. - Серия «Классики науки»). Под редакцией Н.Н. Боголюбова[1], В.И. Арнольда[2], И.Б. Погребысского[3]. Книга является переводом избранных работ Пуанкаре, причем

[1] математик, физик-теоретик, академик АН СССР, АН УССР и проч.

[2] один из крупнейших математиков XX века, академик АН СССР, Французской АН и проч.

[3] математик, историк науки, д. ф.-м.н.

авторы старались уделить больше внимания работам, еще не переведенным на русский язык в то время.

Данный реферат написан по главе «Топология» из второго тома. Биография Пуанкаре была приведена с опорой на статью «Анри Пуанкаре, его жизнь и деятельность» Гастона Жюлиа, переведенную в третьем томе.

Хочется отметить комментарии А.В.Чернавского, приведенные в конце второго тома, где он указывает на допущенные Пуанкаре ошибки а также сообщает, какие из вопросов, поставленных Пуанкаре, были разрешены к моменту перевода его мемуаров.

Биография

Анри Пуанкаре родился в 29 апреля 1854 года в Нанси во Франции. Семья была довольно знаменита. Посудите сами: отец — невропатолог, занимавший должность профессора медицинского факультета. Пуанкаре имел двух двоюродных братьев. Первый, — Раймон, — Председатель Совета Министров и Президент Французской Республики. Второй, — Люсьен, — известный физик, впоследствии ректор Парижского университета.

В детстве его подкосила дифтерия, которая надолго приковала его к постели, что привило любовь к книгам и воспитало в нем пытливость к новым знаниям.

Он, безусловно, с младших лет проявлялся как математик, хоть не был чужд и языкам: в совершенстве владел латинским, английским и немецким языками. К ранним его достижениям стоит отнести первую премию в общем конкурсе и вторую премию на конкурсе в Лесной школе[4], что заслужило ему некоторую репутацию.

А.Пуанкаре тяжело переживал оккупацию Нанси. Тяготы, увиденные им, укрепили в нем патриотизм и желание упорно трудиться во благо страны.

В 1873 г. снова получил первую премию по математике на Общем конкурсе. Затем он поступает в Политехническую школу, где занимает первое место на вступительных испытаниях. Он также поступал в Высшую Нормальную школу, но занял на конкурсе лишь пятое место и вернулся в Политехническую школу.

После второго курса Политехнической школы, Пуанкаре поступает в Горную школу в 1875 г., которую заканчивает в марте 1879 года. Затем он принимает приглашение Канского университета и становится преподавателем на факультете точных наук.

Уже первого августа 1879 года Пуанкаре защищает докторскую диссертацию «О свойствах функций, определяемых дифференциальными уравнениями в частных производных», которую высоко оценил Дарбу. В 1879-1887 Пуанкаре обширно занимается математической деятельностью и читает большое количество курсов в Париже. 31 явнваря 1887 году его избирают членом Академии наук по отделению геометрии, которое впоследствии и возглавил. А в 1908 году Пуанкаре был избран членом Французской Академии.

После написания докторской диссертации, Пуанкаре обращает свое внимание на работы Фукса и решает задачу интегрирования линейных диф-

[4]2 июля 1872г.

ференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами. Подготовленными своими работами по дифференциальным уравнениям, Пуанкаре получает всяческие похвалы на конкурсе по *проблеме трех тел*, объявленном шведским королем Оскаром II в 1889 году.

Отходя от небесной механики, Пуанкаре создает труды по топологии, изложенные в шести мемуарах по Analysis situs, которая по праву считается рождением новой науки.

Резко ухудшившееся состояние здоровья вынудило Пуанкаре согласиться на серьезную, но не слишком тяжелую хирургическую операцию. Она была успешно произведена 9 июля. Пуанкаре был уже на пути к выздоровлению, когда 17 июля 1912 года эмболия сразила его.

Г. Жюлиа приводит множество воспоминаний современников, которые я для краткости здесь воспроизводить не буду. Отмечу лишь, что Пуанкаре был поистине благородым джентельменом.

Analysis situs

Словосочетание «Analysis situs» с латыни дословно переводится как "Анализ расположения". Это прекрасное определение слову «топология», ведь в этой науке не столь важно, как устроены объекты, сколь то, как они расположены друг относительно друга. Этот новый взгляд на объекты стал прорывом в математике.

Во введении Пуанкаре показывает необходимость изучения «геометрии n измерений» и пытается дать определение топологии. С одной стороны, при решении задач больше трёх измерений, вроде бы нельзя пользоваться интуицией: мы привыкли жить в трёхмерном пространстве; представить себе что-то большее было бы наивной задачей. С другой стороны, результаты говорят сами за себя: достаточно вспомнить классификацию алгебраических кривых по родам и применение «Analysis situs» трех измерений в работах Пуанкаре по дифференциальным уравнениям.

> Геометрия n измерений занимается исследованием действительности; в этом теперь никто не сомневается.

— пишет Пуанкаре.

Всего в главе Analysis situs содержится 18 параграфов. Последние три довольно технические — их я освещать не буду. Скажу лишь, что там доказывается формула Эйлера–Пуанкаре (обощение формулы Эйлера о многоугольнике $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2$).

Для наглядности я буду пояснять, как выглядят некоторые конструкции на примере тора.

§1 Первое определения многообразий

Сначала Пуанкаре даёт определение 1-гладкого *подмногообразия* $\mathbb{R}^n$. заданного как решение системы равенств и неравенств. Попутно вводятся понятия *связности*, *конечности* (что сейчас называют *ограниченностью*), *границы многобразия*, *ограниченности* и *неограниченности* (что соответствует отстутствию или наличию границы), *замкнутости* (это определение соответствует современному). За исключением некоторых лексических изменений, эти определения дошли и до нас.

§2 Гомеоморфизм

Определение гомеоморфизма на первый взгляд не совсем понятно. Приведу его:

> Рассмотрим подстановку, которая переводит $x_1, \dots, x_n$ в $x'_1, \dots, x'_n$ и которую я подчиню следующим условиям.
>
> Имеем
> $$x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), (i = 1, \dots, n)$$
>
> В определенной области функции φ_i однозначны, конечны, непрерывны, их производные также непрерывны и их функциональные детерминант не равен нулю.

В современном изложении «функциональный детерминант» означает просто *якобиан*. Не понятны здесь слова «в определенной области». Оказалось, он их поясняет чуть ниже (понять это было нетривиальной задачей): нужно выбрать область D, в которой функции, задающие многообразие не больше некоторой малой величины, т.е. $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | -\varepsilon < F_\alpha < \varepsilon\}$.

Привычное определение гомеоморфизма выглядит громоздким, ведь приходится давать его для подмногообразий $\mathbb{R}^n$. Для абстрактных топологических пространств можно дать определение в одну строчку. Также Пуанкаре отмечает, что множество гомеоморфизмов образуют группу. Эта группа является основным объектом изучения Analysis situs.

§3 Второе определение многообразий

Тут мы имеем дело почти с классическим определением многообразия: сначала Пуанкаре определеяет «частичное многообразие», а затем показывает, как из таких кусков склеить одно целое. Также он замечает, что второе определение богаче первого (например, допускает неориентируемые многообразия).

В конце Пуанкаре приводит уравнение тора (что мне бы далось с трудом):

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

А также приводит его параметризацию:

$$\begin{aligned} x_1 &= (R + r\cos y_1)\cos y_2 \\ x_2 &= (R + r\cos y_1)\sin y_2 \\ x_3 &= r\sin y_1 \end{aligned}$$

Таким образом, тор $\mathbb{T}^2$ можно представить и с помощью первого определения, и с помощью второго.

§4 Противоположные многообразия

Если у многообразия изменить ориентацию, оно станет *противоположным*. Этого можно достичь, если в уравнениях, задающих многообразие, сделать нечетную перестановку. Введенное понятие мало отличается от современного.

§5 Гомологии

Тут не обойтись без цитирования, ведь это — самое интересное понятие.

> Рассмотрим многообразие V p измерений; пусть, далее, W — многообразие q измерений ($q \leqslant p$), составляющее часть V. Предположим, что полная граница W состоит из λ связных многообразий $q-1$ измерений.
>
> $$v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$$
>
> Выразим это обстоятельство с помощью обозначения
>
> $$v_1 + v_2 + \ldots + v_n \sim 0$$
>
> <...>
>
> Отношения такого вида можно назвать *гомологиями*.

Определение напоминает современные сингулярные гомологии. Если сказать точнее, понятие *гомология* говорит, когда элемент в $(q-1)$-ых гомологиях, представлимый вложенной поверхностью, равен нулю. Однако, как верно замечено в комментариях А.Чернавского, из современных работ известно, что не любой класс гомологий можно представить как вложенное подмногообразие. (Смотри, напрмиер работу Р. Тома 1962 года.)

§6 Числа Бетти

Говорится, что если существует не более чем $P_m - 1$ линейно независимых (в смысле гомологий) подмногообразий, то m-ое числа Бетти равно P_m.

Данное определение отличается от современного на единицу. Это можно увидеть из приведенных им примеров.

> Для внутренней области сферы
>
> $$P_2 = 1, P_1 = 1;$$
>
> для области, заключенной между двумя сферами,
>
> $$P_2 = 2, P_1 = 1;$$
>
> для внутренней области тора
>
> $$P_2 = 1, P_1 = 2;$$
>
> для области, заключенной между двумя торами,
>
> $$P_2 = 2, P_1 = 3.$$

Первое пространство гомотопически эквивалентно точке, второе — сфере, третье — окружности, четвёртое — двумерному тору. Чтобы получить современные числа Бетти, нужно все числа уменьшить на 1:

$$b_i(X) = P_i(X) - 1$$

.

§7 Применение интегралов

Сначала Пуанкаре определяет дифференциальные формы и рассказывает, как их интегрировать. Естественно таких слов он не употребляет. Смысл этого параграфа был объяснен позже в работах Э. Картана 1929 г. Сам же Пуанкаре предлагает изучать периоды интегралов и замечает, что они связаны с числами Бетти. Например, числа число P_m — в точности размерность нульмерных когомологий. Это и было по сути сформулировано Пуанкаре.

§8 Односторонние и двусторонние многообразия

Это довольно классический параграф, претерпевший лишь терминологические изменения. *(Ондо-)Двусторонее многообразие* — (не-)ориентируемое многообразие. Если многообразие склеено из частичных многообразий, т.ч. каждое задано как решение уравнения (в таком случае оно обязательно ориентируемо), то если ориентации кусочков можно согласовать, то и всё многообразие ориентируемо.

§9 Пересечение двух многообразий

Пуанкаре строит форму пересечений на многообразии M размерности n: если взять два подмногообразия U, V дополнительных размерностей p и $n-p$ и посчитать со знаком их точки пересечения, то получим билинейную форму:

$$B : H_p(M) \times H_{n-p}(M) \to \mathbb{R}$$

Знак точки персечения определяется так: берут касательные пространства к обоим многообразиям, составляют из них базис касательного пространства ко всему многообразию. Если ориентации совпадают, то знак будет положительный, в противном случае — отрицательный.

Чтобы это утверждать, стоит проверить, что отображение корректно определено. А именно, если заменить в определении многообразия U и V на гмологогичные им $\widetilde{U}$ и $\widetilde{V}$. Это Пуанкаре и делает в довольно изящной манере:

> Пусть задано теперь замкнутое многообразие V одного измерения и пусть W — область n измерений, полная граница которой состоит из k многообразий $n-1$ измерений $V_1, V_2, \ldots, V_k$, таким образом что
>
> $$V_1 + V_2 + \cdots + V_k \sim 0$$
>
> Я утверждаю, что $N(V, V_1) + N(V, V_2) + ... + N(V, V_k) = 0$.

Здесь символ $N(V, V')$ означает албраическое число точек пересечения подмногообразий V и V'.

Далее он доказывает это утверждение в обратную сторону и обощает на случай, когда многообразие V имеет не одно измерение, а p.

Поскольку полученная форма получается невырожденной для замкнутого многообразия M, ее матрица должна быть квадратной, а это значит, что числа Бетти дополнительных размерностей равны. Потрясающий факт.

В конце он интересуется числом $P_{n/2}$. При нечетном $n/2$ удается доказать, что обозаченное число Бетти четно (т.е. $P_{n/2}$ нечетно), поскольку форма должны быть кососимметрична и невырождена, а такие бывают только в четных рамерностях.

§10 Геометрическое представление

В данном параграфе Пуанкаре предлагает способ задания многообразий с помощью склейки некоторого числа многоугольников. В качестве примера он демонстрирует пять различных пространств, склеенных из куба, четыре из которых являются многообразиями. Склейка не может быть произвольной, поэтому Пуанкаре формулирует некоторые требования.

Можно привести еще такую аналогию. Известно, что ориентируемую двумерную поверхность рода g можно получить склейкой $4g$-угольника. Например, тор $\mathbb{T}^2$ — это квадрат, со склеенными противоположными сторонами. А если склеить противоположные грани у трехмерного куба $\mathbb{I}^3$, получится трехмерный тор $\mathbb{T}^3$! Естественно, используя более сложные склейки полиэдров можно получить более сложные многообразия. Например, склеив противоположные стороны додекаэдра, с поворотом на $\pi/5$ можно получить многообразие, известное как сфера Пуанкаре. Это пример гомологической сферы, т.е. многообразия с группами гомологий как у $\mathbb{S}^3$. Это показывает, что в гипотезе Пуанкаре недостаточно требовать условия равенства групп гомологий.

§11 Представление с помощью дискретной группы

Второй классический пример. Можно получить многообразие, взяв фактор некоторого топологического пространства M по действию фуксовой группы G. Аналогия с предыдущим параграфом такая: пусть D — фундаментальная область действия группы, т.е. $M = GD$ (опустим технические детали). Тогда многообразие M/G есть не что иное как D со склеенной определенным способом границей.

> Рассмотрим группу, полученную при помощи трех подстановок.
>
> $$(x, y, z; x + 1, y, z)$$
> $$(x, y, z; x, y + 1, z)$$
> $$(x, y, z; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, z + 1)$$
>
> где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — целые числа, такие, что
>
> $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$
>
> $<\ldots>$ Основная область D_0 является кубом, стороны которого равны 1 и ограничены шестью плоскостями
>
> $$x; y; z = 0; 1.$$
>
> $<\ldots>$
>
> В более общем случае грани, параллельные оси z, остаются сопряженными по две друг с другом, но грани, перпендикулярные оси z, следует разложить на более мелкие многоугольники,

> которые будут тем более многочисленными, чем больше числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, и которые будут сопряжены по два в соответствии с более или менее сложным законом.

Мы получаем очень богатое семейство примеров. Возвращаясь к тору, возьмем в определении выше следующие параметры: $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 1$. Тогда группа G будет просто группой сдвигов $\mathbb{Z}^3$ на $\mathbb{R}^3$, поэтому $M/G = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 = \mathbb{T}^3$. Получаем два разных определения для трёхмерного тора $\mathbb{T}^3$.

§12 Фундаментальная группа

Сначала Пуанкаре определяет группу g — группу монодромии слоя при универсальном накрытии. Так, во всяком случае, хочется сформулировать в современных терминах. Затем он определяет фундаментальную группу G как пространство замкнутых путей с некоторым отношением эквивалентности. Особенное внимание Пуанкаре уделяет отличиям группы G от группы первых гомологий: группа G не обязательно коммутативна, в гомологиях контуры могут исходить из любой точки, в то время как в G все пути имеют одно начало.

Очевидно, существует инъективный гомоморфизм

$$\varphi : g \to G$$

Просто нужно каждой перестановке элементов слоя сопоставить элемент G, поднятие которого дает эту перестановку.

§13 Фундаментальные эквивалентности

Главное достижение данного параграфа состоит в связи фундаментальной группы и первых гомологий. Связь следующая:

$$Ab[\pi_1(M)] = H_1(M)$$

Сначала Пуанкаре показывает, как устроена группа G. Нужно взять некоторые одномерные образующие, соотношениями будут соответствовать двумерные клетки, приклеенные по некоторому циклу. Возвращаясь к тору: его можно склеить из квадрата. В клеточном разбиении тора всего одна вершина и четыре стороны, которые попарно отождествлены, поэтому возьмем две образующие a, b. Двумерная клетка приклеивается по циклу $a - b - a^{-1} - b^{-1}$, поэтому $G(\mathbb{T}^2) = \langle a, b | ab = ba \rangle = \mathbb{Z}^2$. Эта группа абелева, поэтому первая гомотопическая группа и группа первых гомологий совпадают.

Интересно, что после этого открытия, научному сообществу хотелось построить высшие гомотопические группы с тем же условием: $Ab[\pi_n(M)] = H_n(M)$ и когда Гуревич их придумал, они оказались абелевыми, все посчитали его определение неверным.

§14 Условия гомеморфизма

Для двумерных многообразий еще Пуанкаре был известен результат: если у двух многообразий совпадают числа Бетти, то они гомеоморфны (т.е. род поверхности — полный инвариант).

Пуанкаре изучает многообразия, определенные в §11, в частности считает их фундаментальные группы. Это многообразие есть не что иное как произведение тора на отрезок, со склеиванием граничных компонент произведения по некоторому гомеоморфизму.

Всё это делается чтобы показать, что условие равенства чисел Бетти не достаточно для существования гомоморфизма: существуют два многообразия с одинаковыми гомологиям, но с разной фундаментальной группой, т.е. группа G — более сильный топологический инвариант.

Пуанкаре в конце даже интересуется, является ли равенство групп G достаточным. Ответ отрицательный. Линзовые пространства $L(5, 1)$ и $L(5, 2)$ имеют одну и ту же фундаментальную группу $\mathbb{Z}^5$, они даже гомотопически эквивалентны, но не гомеоморфны (это можно показать с помощью курчения Радемайстера).

Приведу современные результаты по этой теме. Равенство гомотопических групп не влечет гомеоморфности пространств (в книге Фоменко–Фукса "Курс гомотопической топологии"можно найти пример к этому утверждению). Хотя есть такой красивый результат: если некоторое отображение $f : X \to Y$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп $f*(\pi_n(X)) \simeq \pi_n(Y)$, то имеется гомотопическая эквивалентность $X \sim Y$.

§15 Другие способы образования многообразия

Пуанкаре определяет произведение топологических пространств. Пусть есть $p + q$ переменных $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$ и m уравнений $F_1(x_1, \dots, x_p) = 0$, $\dots$, $F_m(x_1, \dots, x_p) = 0$ на переменные $x_1, \dots, x_p$, а также n уравнений $F'_1(y_1, \dots, y_q) = 0, \dots, F'_n(y_1, \dots, y_q) = 0$ на переменные $y_1, \dots, y_q$. Получим многообразие $(p+q-n-m)$ измерений — произведение двух многообразий $(p-m)$ и $(q-n)$ измерений (координаты на одном из них это x_i, на втором — y_i). В этом и состоит новый способ образования многообразия.

Например, тор $\mathbb{T}^2$ есть произведение окружностей $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Дальше Пуанкаре считает гомологии $\mathbb{S}^q \times \mathbb{S}^q$ – симметрического квадрата сферы. Рассуждения довольно длинные, их я приводить не буду.

О гипотезе Пуанкаре

В пятом дополнении к «Analysis situs» можно найти первую простую формулировку проблемы Пуанкаре.

> Возможно ли, чтобы фундаментальная группа V сводилась к тождественной подстановке и чтобы все же V не обладала простой связностью?

Позже она была распространена на высшие размерности Гуревичем и начиная с размерности 5 решена Смейлом. В комментариях пишется, что в размерности $3, 4$ проблема остается нерешенной. Дело в том, что книга была выпущена в 1972 году. В 1982 году Фридман получил Филдсовскую премию за решение обощенной проблемы Пуанкаре как раз для размерности 4. И только спустя 20 лет, в 2002-2003 гг. Гриша Перельман опубликовал решение для размерности 3.

Список литературы

[1] Пуанкаре А. Избранные труды. М., Наука. 1971–1974. т. 2, 3.