Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова»
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием разностной схемы с центральными разностями (ρ, u) (параллельная)

Работу выполнил:
студент 4 курса Сибгатуллин Артур Петрович

Москва, 2021

Оглавление

1. Введение 2
2. Разностная схема 3
3. Отладочный тест 6
4. Негладкие начальные данные 44
5. Задача о стабилизации осцилирующей функции 68
6. Задача протекания 72

Список литературы 77

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \rho f_0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \\ p = p(\rho) \end{cases} \tag{1}$$

Через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать известной положительной константой. Известными также будем считать функцию давления газа p (в данной работе будем рассматривать $p(\rho) = C\rho$, где C - положительная константа) и вектор внешних сил f. f - функция переменных Эйлера: $(t,\, x) \in Q = \Omega_t \times \Omega_x = [0;\, T] \times [0;\, X]$.

Неизвестные функции: плотность ρ и скорость u также являются функциями переменных Эйлера.

Перепишем систему (1) в эквивалентный вид, при условии того, что ρ и u гладкие:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \end{cases} \tag{2}$$

Система (1) дополнена граничными условиями:

$$\begin{aligned} &(\rho,\, u)|_{t=0} = (\rho_0,\, u_0), \qquad && x \in [0;\, X] \\ &u(t,\, 0) = u(t,\, X) = 0, \qquad && t \in [0;\, T] \end{aligned} \tag{3}$$

1.2. Основные обозначения

Введем на Ω_x и Ω_t сетки:

$$\begin{aligned} &\omega_x = \{mh : m = 0, \ldots, M\}, h = \frac{X}{M} \\ &\omega_t = \{n\tau : n = 0, \ldots, N\}, \tau = \frac{T}{N} \end{aligned} \tag{4}$$

Для сокращения записи значение для произвольной функции f в узле (n, m) сетки $\omega_x x \omega_t$ обозначим за f_m^n. Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\hat{f} = f_m^{n+1} \\
&f_t = \tfrac{f_m^{n+1} - f_m^n}{\tau} \\
&f_x = \tfrac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} \\
&f_{\bar{x}} = \tfrac{f_m^n - f_{m-1}^n}{h} \\
&f_{\mathring{x}} = \tfrac{f_{m+1}^n - f_{m-1}^n}{2h} \\
&f_{x\bar{x}} = \tfrac{f_{m-1}^n - 2f_m^n + f_{m+1}^n}{h^2}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

2. Разностная схема

2.1. Описание схемы

Для поиска численного решения задачи (1) можно использовать разностную схему, в которой при апроксимации конвективных членов используются центральные разности, но апроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой.

$$
\begin{aligned}
&H_t + 0.5(V\hat{H}_{\mathring{x}} + (V\hat{H})_{\mathring{x}} + HV_{\mathring{x}}) = 0, w \in \omega_h \\
&H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + H_0 V_{x,0}) - 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + \\
&+H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = 0, x \in \gamma_h^- \\
&H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + \\
&+H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = 0, x \in \gamma_h^+ \\
&V_t + \tfrac{1}{3}(V\hat{V}_{\mathring{x}} + (V\hat{V})_{\mathring{x}}) + \tfrac{p(H)_{\mathring{x}}}{H} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \tfrac{\mu}{H}\right) V_{x\bar{x}} + f, x \in \omega_h
\end{aligned}
\tag{6}
$$

2.2. Координатная запись

Распишем схему приведенных выше обозначениях, и выделим коэффиценты при H и V на $n+1$ временном слое: 1 уравнение:

$$H_t + 0.5(V\hat{H}_{\mathring{x}} + (V\hat{H})_{\mathring{x}} + HV_{\mathring{x}}) = 0$$

$$\frac{H_m^{n+1}-H_m^n}{\tau}+\frac{V(\hat{H}_{m+1}^n-\hat{H}_{m-1}^n)}{4h}+\frac{(V\hat{H})_{m+1}^n-(V\hat{H})_{m-1}^n}{4h}+\frac{H(V_{m+1}^n-V_{m-1}^n)}{4h}=0$$

$$H_{m-1}^{n+1}\left(-\frac{(V_m^n+V_{m-1}^n)}{4h}\right)+H_m^{n+1}\left(\frac{1}{\tau}\right)+H_{m+1}^{n+1}\left(\frac{V_m^n+V_{m+1}^n}{4h}\right)=H_m^n\left(\frac{1}{\tau}-\frac{(V_{m+1}^n-V_{m-1}^n)}{4h}\right)$$

2 уравнение:

$$H_{t,0}+0.5((V\hat{H})_{x,0}+H_0V_{x,0})-0.5h((HV)_{x\bar{x},1}-0.5(HV)_{x\bar{x},2}+$$
$$+H_0(V_{x\bar{x},1}-0.5V_{x\bar{x},2}))=0$$

$$\frac{H_0^{n+1}-H_0^n}{\tau}+0.5\left(\frac{V_1^nH_1^{n+1}-V_0^nH_0^{n+1}}{h}+H_0^n\left(\frac{V_1^n-V_0^n}{h}\right)\right)-$$
$$-\frac{h}{2}\left(\frac{H_0^nV_0^n-2H_1^nV_1^n+H_2^nV_2^n}{h^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{H_1^nV_1^n-2H_2^nV_2^n+H_3^nV_3^n}{h^2}\right)\right)-$$
$$-\frac{h}{2}\left(H_0\left(\frac{V_0^n-2V_1^n+V_2^n}{h^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{V_1^n-2V_2^n+V_3^n}{h^2}\right)\right)\right)=0$$

$$H_0^{n+1}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{V_0^n}{2h}\right)+H_1^{n+1}\left(\frac{V_1^n}{2h}\right)=\frac{H_0^n}{\tau}-\frac{H_0^n(V_1^n-V_0^n)}{2h}+$$
$$+\frac{h}{2}\left(\frac{H_0^nV_0^n-2H_1^nV_1^n+H_2^nV_2^n}{h^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{H_1^nV_1^n-2H_2^nV_2^n+H_3^nV_3^n}{h^2}\right)\right)+$$
$$+\frac{h}{2}\left(H_0\left(\frac{V_0^n-2V_1^n+V_2^n}{h^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{V_1^n-2V_2^n+V_3^n}{h^2}\right)\right)\right)=0$$

3 уравнение:

$$H_{t,M}+0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M}+H_MV_{\bar{x},M})+0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1}-0.5(HV)_{x\bar{x},M-2}+$$
$$+H_M(V_{x\bar{x},M-1}-0.5V_{x\bar{x},M-2}))=0$$

$$\frac{H_M^{n+1}-H_M^n}{\tau}+0.5\left(\frac{V_M^nH_M^{n+1}-V_{M-1}^nH_{M-1}^{n+1}}{h}+H_M^n\left(\frac{V_M^n-V_{M-1}^n}{h}\right)\right)+$$
$$+\frac{h}{2}\left(\frac{H_{M-2}^nV_{M-2}^n-2H_{M-1}^nV_{M-1}^n+H_M^nV_M^n}{h^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{H_{M-3}^nV_{M-3}^n-2H_{M-2}^nV_{M-2}^n+H_{M-1}^nV_{M-1}^n}{h^2}\right)\right)+$$
$$+\frac{h}{2}\left(H_M\left(\frac{V_{M-2}^n-2V_{M-1}^n+V_M^n}{h^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{V_{M-3}^n-2V_{M-2}^n+V_{M-1}^n}{h^2}\right)\right)\right)$$

$$H_M^{n+1}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{V_M^n}{2h}\right)+H_{M-1}^{n+1}\left(-\frac{V_{M-1}^n}{2h}\right)=\frac{H_M^n}{\tau}-\frac{H_M^n(V_M^n-V_{M-1}^n)}{2h}-$$
$$-\frac{h}{2}\left(\frac{H_{M-2}^nV_{M-2}^n-2H_{M-1}^nV_{M-1}^n+H_M^nV_M^n}{h^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{H_{M-3}^nV_{M-3}^n-2H_{M-2}^nV_{M-2}^n+H_{M-1}^nV_{M-1}^n}{h^2}\right)\right)-$$
$$-\frac{h}{2}\left(H_M\left(\frac{V_{M-2}^n-2V_{M-1}^n+V_M^n}{h^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{V_{M-3}^n-2V_{M-2}^n+V_{M-1}^n}{h^2}\right)\right)\right)$$

4 уравнение:

$$V_t+\frac{1}{3}(V\hat{V}_{\mathring{x}}+(V\hat{V})_{\mathring{x}})+\frac{p(H)_{\mathring{x}}}{H}=\tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}}-\left(\tilde{\mu}-\frac{\mu}{H}\right)V_{x\bar{x}}+f$$

$$\frac{V_m^{n+1}-V_m^n}{\tau}+\frac{1}{3}\left(V_m^n\frac{V_{m+1}^{n+1}-V_{m-1}^{n+1}}{2h}+\frac{V_{m+1}^nV_{m+1}^{n+1}-V_{m-1}^nV_{m-1}^{n+1}}{2h}\right)+$$
$$+\frac{p(H)_{m+1}^n-p(H)_{m-1}^n}{2hH_m^n}-\tilde{\mu}\frac{V_{m-1}^{n+1}-2V_m^{n+1}+V_{m+1}^{n+1}}{h^2}+\left(\tilde{\mu}-\frac{\mu}{H_m^n}\right)\frac{V_{m-1}^n-2V_m^n+V_{m+1}^n}{h^2}-f_m^n=0$$

$$V_{m-1}^{n+1}\left(-\frac{V_m^n+V_{m-1}^n}{6h}-\frac{\tilde{\mu}}{h^2}\right)+V_m^{n+1}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2\tilde{\mu}}{h^2}\right)+V_{m+1}^{n-1}\left(\frac{V_m^n+V_{m+1}^n}{6h}-\frac{\tilde{\mu}}{h^2}\right)=$$
$$\frac{V_m^n}{\tau}-\frac{p(H)_{m+1}^n-p(H)_{m-1}^n}{2hH_m^n}-\left(\tilde{\mu}-\frac{\mu}{H_m^n}\right)\frac{V_{m-1}^n-2V_m^n+V_{m+1}^n}{h^2}+f_m^n=0$$

Домножим все уравнения на τh, для того чтобы уменьшить погрешность вычислений. Сделаем это при реализации программы.

3. Отладочный тест

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим $Q = [0;1]\text{x}[0;1]$

Зададим функции $\tilde{\rho}(t,x)$ и $\tilde{u}(t,x)$ так, чтобы они являлись гладким решением задачи (1).

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t,x) &= e^t(cos(3\pi x) + 1.5), \\ \tilde{u}(t,x) &= cos(2\pi t)sin(4\pi x) \end{aligned} \tag{7}$$

Теперь определим функции f_0 и f, так, чтобы они удовлетворяли уравнениям:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + \tfrac{\partial\tilde{\rho}\tilde{u}}{\partial x} = f_0, \\ &\tilde{\rho}\tfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u}\tilde{\rho}\tfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \tfrac{\partial p}{\partial x} = \mu\tfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{\rho}f \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = e^t(cos(3\pi x) + 1.5), \\ &\tfrac{\partial\tilde{\rho}\tilde{u}}{\partial t} = \pi e^t cos(2\pi t) * (4(cos(3\pi x) + 1.5)cos(4\pi x) - 3sin(3\pi x)sin(4\pi x)), \\ &\tfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t} = -2\pi sin(2\pi t)sin(4\pi x), \\ &\tfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = 4\pi cos(2\pi t)cos(4\pi x), \\ &\tfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} = -16\pi^2 cos(2\pi t)sin(4\pi x), \\ &\tfrac{\partial r\tilde{u}}{\partial x} = \pi e^t cos(2\pi t)(4(cos(3\pi x) + 1.5)cos(4\pi x) - 3sin(3\pi x)sin(4\pi x)), \\ &\tfrac{\partial\tilde{p}}{\partial x} = C\gamma\rho^{\gamma-1}\tfrac{\partial\rho}{\partial x} \end{aligned} \tag{9}$$

3.2. Численные эксперименты

Обычная сетка

Table of times.

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	1.450e-04	9.040e-04	7.301e-03	6.713e-02
1.000e-02	7.340e-04	7.709e-03	6.970e-02	7.287e-01
1.000e-03	8.084e-03	8.401e-02	7.561e-01	8.639e+00
1.000e-04	9.792e-02	1.018e+00	9.668e+00	9.706e+01

Table of norms for H. $\mu = 0.0010 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$2.459e+09$ $1.271e+09$ $1.787e+10$	$2.617e+14$ $1.726e+14$ $2.442e+16$	$5.237e+09$ $1.051e+09$ $1.478e+12$	$7.150e+11$ $1.012e+10$ $1.384e+14$
1.000e-02	$2.295e+47$ $9.846e+46$ $2.914e+47$	$1.077e+85$ $1.464e+84$ $2.737e+86$	$7.085e+109$ $4.059e+108$ $5.337e+111$	$5.124e+153$ $inf\ inf$
1.000e-03	$4.877e+259$ $inf\ inf$	$nan\ nan$ nan	$nan\ -nan$ $-nan$	$nan\ nan$ nan
1.000e-04	$nan\ nan$ nan	$nan\ -nan$ $-nan$	$nan\ nan$ nan	$nan\ -nan$ $-nan$

Table of norms for V. $\mu = 0.0010 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.034e+02$ $5.728e+01$ $8.862e+02$	$3.769e+03$ $1.164e+03$ $1.644e+05$	$5.239e+02$ $4.015e+01$ $5.220e+04$	$8.690e+06$ $1.426e+05$ $2.058e+09$
1.000e-02	$8.735e+01$ $5.994e+01$ $8.859e+02$	$1.665e+03$ $2.332e+02$ $3.895e+04$	$2.863e+03$ $3.341e+02$ $4.517e+05$	$6.911e+05$ $1.399e+04$ $2.129e+08$
1.000e-03	$4.651e+02$ $3.278e+02$ $4.869e+03$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan
1.000e-04	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$

Table of norms for H. $\mu = 0.0010 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$7.614e+04$ $3.000e+04$ $1.997e+05$	$1.220e+07$ $2.399e+06$ $4.530e+08$	$1.325e+05$ $9.791e+03$ $1.795e+07$	$3.945e+06$ $1.348e+05$ $2.365e+09$
1.000e-02	$1.639e+21$ $8.067e+20$ $1.702e+22$	$9.181e+60$ $1.911e+60$ $2.248e+62$	$3.063e+82$ $6.889e+80$ $1.415e+84$	$2.983e+83$ $1.149e+82$ $1.896e+86$
1.000e-03	$2.388e+85$ $5.801e+84$ $1.407e+86$	$2.102e+226$ $inf \ inf$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan
1.000e-04	$7.823e+181$ $inf \ inf$	$1.095e-02$ $2.280e-03$ $1.428e-01$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$

Table of norms for V. $\mu = 0.0010 \quad C = 10.0000, \gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.346e+01$ $6.953e+00$ $9.841e+01$	$1.000e+04$ $1.373e+03$ $2.189e+05$	$5.955e+01$ $6.702e+00$ $8.298e+03$	$1.499e+02$ $2.574e+01$ $1.312e+04$
1.000e-02	$3.654e+01$ $2.468e+01$ $3.697e+02$	$8.572e+01$ $2.103e+01$ $3.297e+03$	$2.353e+03$ $2.703e+02$ $3.648e+05$	$2.872e+05$ $7.995e+03$ $1.321e+08$
1.000e-03	$5.806e+01$ $3.838e+01$ $5.856e+02$	$4.999e+01$ $2.608e+01$ $3.236e+03$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan
1.000e-04	$1.267e+02$ $8.832e+01$ $1.312e+03$	$4.506e-03$ $2.344e-03$ $6.926e-02$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$

Table of norms for H. $\mu = 0.0010 \quad C = 1.0000, \gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.140e+02$ $4.643e+01$ $6.830e+02$	$2.303e+03$ $4.776e+02$ $9.043e+04$	$1.457e+02$ $9.078e+00$ $1.202e+04$	$8.860e+00$ $4.289e+00$ $8.506e+02$
1.000e-02	$3.773e+04$ $8.832e+03$ $2.074e+05$	$5.843e+22$ $8.892e+21$ $1.684e+24$	$3.539e+44$ $3.419e+43$ $6.304e+46$	$4.170e+40$ $2.865e+39$ $4.240e+43$
1.000e-03	$8.363e+43$ $1.969e+43$ $4.653e+44$	$1.958e+00$ $1.584e-01$ $2.211e+01$	$8.384e+194$ $inf \ inf$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e-04	$5.700e+49$ $1.284e+49$ $1.965e+50$	$3.963e-02$ $8.792e-03$ $1.213e+00$	$1.290e-02$ $2.311e-03$ $2.981e-01$	$1.253e-02$ $2.319e-03$ $2.996e-01$

Table of norms for V. $\mu = 0.0010 \quad C = 1.0000, \gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$6.763e+00$ $3.636e+00$ $4.417e+01$	$1.806e+02$ $2.261e+01$ $2.501e+03$	$4.581e+00$ $1.432e+00$ $5.801e+01$	$6.133e+00$ $3.709e+00$ $3.239e+01$
1.000e-02	$9.705e+00$ $4.596e+00$ $6.103e+01$	$9.693e+01$ $1.074e+01$ $1.588e+03$	$1.537e+03$ $8.712e+01$ $1.470e+05$	$1.731e+03$ $3.155e+01$ $4.365e+05$
1.000e-03	$2.396e+01$ $1.489e+01$ $2.089e+02$	$3.431e-02$ $1.313e-02$ $1.777e+00$	$1.712e+02$ $7.741e+00$ $1.111e+04$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e-04	$7.905e+01$ $4.418e+01$ $7.942e+02$	$1.048e-02$ $2.817e-03$ $2.426e-01$	$2.261e-03$ $6.061e-04$ $7.027e-02$	$2.311e-03$ $6.073e-04$ $7.104e-02$

Table of norms for H. $\mu = 0.0010 \quad C = 1.0000, \gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e-02	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan
1.000e-03	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e-04	$nan \quad -nan$ $-nan$	$1.478e-02$ $4.869e-03$ $5.349e-01$	$6.906e-04$ $2.724e-04$ $5.368e-03$	$nan \quad nan$ nan

Table of norms for V. $\mu = 0.0010 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e-02	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan
1.000e-03	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e-04	$nan \quad -nan$ $-nan$	$7.856e-03$ $2.837e-03$ $2.038e-01$	$2.161e-04$ $1.035e-04$ $1.978e-03$	$nan \quad nan$ nan

Table of norms for H. $\mu = 0.0100 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$6.013e+14$ $2.706e+14$ $3.824e+15$	$1.607e+10$ $1.666e+09$ $2.356e+11$	$4.220e+09$ $1.903e+08$ $2.664e+11$	$2.457e+09$ $1.073e+08$ $1.257e+12$
1.000e-02	$2.665e+45$ $1.748e+45$ $3.661e+46$	$3.218e+84$ $3.457e+83$ $5.351e+85$	$2.730e+125$ $3.154e+124$ $5.210e+127$	$7.290e+178$ $inf \ inf$
1.000e-03	$5.090e+239$ $inf \ inf$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan
1.000e-04	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$7.861e+02$ $2.878e+02$ $4.036e+03$	$5.704e+02$ $1.111e+02$ $1.640e+04$	$2.101e+04$ $1.848e+03$ $2.993e+06$	$3.236e+04$ $1.020e+03$ $1.647e+06$
1.000e-02	$9.696e+01$ $6.559e+01$ $9.539e+02$	$4.751e+02$ $1.454e+02$ $1.269e+04$	$9.407e+03$ $6.358e+02$ $9.201e+05$	$9.397e+13$ $1.572e+12$ $2.314e+16$
1.000e-03	$3.646e+02$ $2.570e+02$ $3.815e+03$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan
1.000e-04	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan

Table of norms for H. $\mu = 0.0100 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$2.542e+05$ $1.075e+05$ $2.196e+06$	$1.920e+03$ $3.960e+02$ $7.949e+04$	$1.463e+03$ $4.806e+01$ $8.785e+04$	$2.656e+02$ $1.048e+01$ $1.907e+05$
1.000e-02	$2.070e+21$ $1.228e+21$ $2.673e+22$	$2.468e+43$ $4.313e+42$ $7.281e+44$	$3.365e+61$ $4.572e+60$ $6.993e+63$	$3.314e+40$ $6.373e+38$ $1.014e+43$
1.000e-03	$3.535e+73$ $8.893e+72$ $1.600e+74$	$7.022e+162$ $inf \ inf$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e-04	$2.105e+242$ $inf \ inf$	$3.099e-03$ $1.747e-03$ $2.052e-02$	$4.080e-04$ $1.875e-04$ $1.195e-03$	$4.225e-04$ $1.939e-04$ $1.259e-03$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 10.0000, \gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$3.427e+01$ $1.789e+01$ $3.061e+02$	$5.251e+02$ $9.267e+01$ $6.304e+03$	$4.618e+01$ $1.580e+01$ $2.530e+02$	$2.060e+01$ $1.419e+01$ $8.302e+01$
1.000e-02	$5.253e+01$ $3.615e+01$ $5.333e+02$	$5.969e+01$ $1.605e+01$ $2.552e+03$	$1.140e+04$ $9.038e+02$ $1.428e+06$	$5.407e+03$ $5.289e+02$ $6.864e+06$
1.000e-03	$7.549e+01$ $5.210e+01$ $7.720e+02$	$4.119e+01$ $2.328e+01$ $3.225e+03$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e-04	$1.668e+02$ $1.170e+02$ $1.739e+03$	$4.256e-03$ $2.137e-03$ $3.014e-02$	$3.347e-04$ $1.346e-04$ $1.084e-03$	$3.547e-04$ $1.384e-04$ $1.166e-03$

Table of norms for H. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000, \gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$6.341e+02$ $2.059e+02$ $4.781e+03$	$1.603e+02$ $1.229e+01$ $1.775e+03$	$2.713e+02$ $1.446e+01$ $4.703e+03$	$2.776e+02$ $8.667e+00$ $6.197e+04$
1.000e-02	$1.638e+18$ $5.223e+17$ $1.025e+19$	$3.845e+08$ $4.626e+07$ $7.748e+09$	$6.599e+16$ $2.728e+15$ $1.066e+18$	$5.604e+17$ $1.285e+16$ $2.576e+19$
1.000e-03	$1.376e+13$ $3.205e+12$ $7.492e+13$	$6.759e-02$ $1.503e-02$ $8.962e-01$	$5.158e-02$ $1.439e-02$ $7.982e-01$	$5.143e-02$ $1.439e-02$ $7.974e-01$
1.000e-04	$1.664e+06$ $3.859e+05$ $8.943e+06$	$1.717e-02$ $4.093e-03$ $1.890e-01$	$4.578e-03$ $1.367e-03$ $6.947e-02$	$4.464e-03$ $1.371e-03$ $6.916e-02$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000, \gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$4.935e+00$ $2.183e+00$ $2.996e+01$	$4.379e+00$ $2.428e+00$ $4.956e+01$	$3.269e+00$ $1.889e+00$ $1.620e+01$	$2.983e+00$ $1.802e+00$ $2.170e+01$
1.000e-02	$1.829e+01$ $1.215e+01$ $1.798e+02$	$4.542e+02$ $4.972e+01$ $4.838e+03$	$1.772e+01$ $5.358e+00$ $8.343e+02$	$1.511e+01$ $4.302e+00$ $1.873e+02$
1.000e-03	$1.342e+01$ $6.587e+00$ $9.271e+01$	$1.390e-02$ $4.674e-03$ $1.792e-01$	$1.133e-02$ $3.297e-03$ $1.662e-01$	$1.130e-02$ $3.288e-03$ $1.662e-01$
1.000e-04	$9.423e+00$ $4.861e+00$ $6.833e+01$	$5.386e-03$ $2.400e-03$ $4.538e-02$	$1.085e-03$ $3.234e-04$ $1.475e-02$	$1.056e-03$ $3.145e-04$ $1.475e-02$

Table of norms for H. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000, \gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	nan nan nan	nan nan nan	nan nan nan	nan nan nan
1.000e-02	nan nan nan	nan nan nan	nan $-nan$ $-nan$	nan $-nan$ $-nan$
1.000e-03	nan $-nan$ $-nan$	$5.800e-03$ $3.199e-03$ $5.127e-02$	$7.351e-03$ $2.605e-03$ $5.011e-02$	$8.906e-03$ $2.689e-03$ $5.102e-01$
1.000e-04	nan nan nan	$5.154e-03$ $3.071e-03$ $4.441e-02$	$6.410e-04$ $2.412e-04$ $3.784e-03$	$6.856e-04$ $2.526e-04$ $3.957e-03$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan
1.000e-02	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e-03	$nan \quad -nan$ $-nan$	$5.621e-03$ $2.678e-03$ $3.853e-02$	$2.122e-03$ $8.342e-04$ $1.695e-02$	$2.094e-03$ $8.282e-04$ $5.153e-02$
1.000e-04	$nan \quad nan$ nan	$4.061e-03$ $2.251e-03$ $3.296e-02$	$2.287e-04$ $8.859e-05$ $1.602e-03$	$2.008e-04$ $7.835e-05$ $1.549e-03$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.091e+08$ $3.948e+07$ $7.057e+08$	$1.747e+05$ $4.836e+04$ $7.969e+06$	$8.058e+04$ $5.224e+03$ $7.998e+06$	$1.405e+04$ $2.173e+02$ $3.843e+06$
1.000e-02	$7.055e+31$ $3.830e+31$ $8.213e+32$	$2.536e+65$ $4.161e+64$ $3.924e+66$	$1.794e+101$ $6.181e+99$ $8.807e+102$	$2.163e+69$ $1.008e+68$ $1.526e+72$
1.000e-03	$7.174e+166$ $inf \ inf$	$4.785e+300$ $inf \ inf$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan
1.000e-04	$1.348e+232$ $inf \ inf$	$3.819e-03$ $2.353e-03$ $2.399e-02$	$1.866e-04$ $1.346e-04$ $4.009e-04$	$2.248e-04$ $1.428e-04$ $5.979e-04$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$3.339e+01$ $2.025e+01$ $2.383e+02$	$4.504e+02$ $7.770e+01$ $1.146e+04$	$1.053e+04$ $9.202e+02$ $5.058e+05$	$9.656e+01$ $4.862e+01$ $2.510e+02$
1.000e-02	$8.518e+01$ $5.685e+01$ $1.005e+03$	$9.089e+02$ $1.851e+02$ $2.096e+04$	$2.430e+04$ $1.369e+03$ $1.909e+06$	$8.055e+02$ $7.233e+01$ $1.088e+06$
1.000e-03	$3.047e+02$ $2.147e+02$ $3.185e+03$	$1.795e+02$ $5.524e+01$ $7.146e+03$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan
1.000e-04	$4.118e+02$ $2.897e+02$ $4.310e+03$	$3.323e-03$ $1.909e-03$ $2.599e-02$	$1.131e-04$ $5.174e-05$ $2.932e-04$	$1.273e-04$ $5.836e-05$ $4.152e-04$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$1.098e+06$ $2.630e+05$ $3.775e+06$	$1.187e+02$ $2.230e+01$ $3.618e+03$	$3.174e+02$ $1.371e+01$ $2.301e+04$	$1.523e+03$ $1.572e+01$ $1.755e+05$
1.000e-02	$1.221e+20$ $3.421e+19$ $8.649e+20$	$1.780e+07$ $2.985e+06$ $5.849e+08$	$7.748e+03$ $3.353e+02$ $1.794e+05$	$2.314e+03$ $2.044e+01$ $4.329e+05$
1.000e-03	$2.897e+00$ $1.424e+00$ $2.041e+01$	$3.349e-03$ $2.116e-03$ $1.913e-02$	$4.464e-03$ $2.043e-03$ $1.222e-02$	$4.502e-03$ $2.056e-03$ $1.237e-02$
1.000e-04	$1.560e+00$ $7.376e-01$ $1.059e+01$	$4.435e-03$ $2.304e-03$ $2.423e-02$	$4.035e-04$ $1.904e-04$ $1.065e-03$	$4.412e-04$ $2.025e-04$ $1.212e-03$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 10.0000, \gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$2.738e+01$	$1.947e+01$	$2.007e+01$	$3.650e+00$
	$1.215e+01$	$7.508e+00$	$1.102e+01$	$2.328e+00$
	$1.757e+02$	$1.838e+02$	$1.134e+02$	$2.934e+01$
1.000e-02	$2.981e+01$	$2.039e+01$	$1.125e+01$	$2.546e+00$
	$2.047e+01$	$7.961e+00$	$5.232e+00$	$1.008e+00$
	$3.420e+02$	$1.048e+03$	$6.819e+01$	$2.122e+01$
1.000e-03	$5.927e+00$	$4.360e-03$	$3.065e-03$	$3.059e-03$
	$2.487e+00$	$2.429e-03$	$1.361e-03$	$1.358e-03$
	$2.139e+01$	$2.671e-02$	$9.235e-03$	$9.250e-03$
1.000e-04	$2.395e+00$	$3.182e-03$	$3.125e-04$	$3.066e-04$
	$1.058e+00$	$1.827e-03$	$1.387e-04$	$1.347e-04$
	$8.296e+00$	$2.550e-02$	$9.413e-04$	$9.258e-04$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000, \gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$6.007e+02$	$1.180e+02$	$2.192e+02$	$1.965e+01$
	$3.064e+02$	$1.591e+01$	$1.018e+01$	$6.812e+00$
	$7.033e+03$	$1.615e+03$	$5.567e+03$	$1.556e+02$
1.000e-02	$7.943e+08$	$1.568e+00$	$2.048e+00$	$2.145e+00$
	$2.044e+08$	$4.277e-01$	$4.579e-01$	$4.703e-01$
	$5.075e+09$	$2.557e+01$	$3.309e+01$	$3.455e+01$
1.000e-03	$3.214e+21$	$8.436e-02$	$7.259e-02$	$7.248e-02$
	$7.368e+20$	$2.351e-02$	$1.972e-02$	$1.969e-02$
	$1.193e+22$	$5.540e-01$	$4.754e-01$	$4.749e-01$
1.000e-04	$5.058e+63$	$1.968e-02$	$7.045e-03$	$6.945e-03$
	$1.158e+63$	$6.671e-03$	$1.939e-03$	$1.909e-03$
	$1.871e+64$	$1.406e-01$	$4.484e-02$	$4.449e-02$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$5.855e+00$ $3.789e+00$ $6.347e+01$	$2.239e+00$ $1.058e+00$ $3.760e+01$	$1.067e+01$ $5.882e+00$ $2.601e+01$	$1.850e+00$ $9.454e-01$ $1.013e+01$
1.000e-02	$9.409e+00$ $5.648e+00$ $8.658e+01$	$2.318e-01$ $7.808e-02$ $1.927e+00$	$2.597e-01$ $8.324e-02$ $2.107e+00$	$2.676e-01$ $8.564e-02$ $2.166e+00$
1.000e-03	$2.178e+01$ $1.149e+01$ $1.968e+02$	$1.818e-02$ $6.728e-03$ $1.157e-01$	$1.392e-02$ $5.080e-03$ $9.453e-02$	$1.388e-02$ $5.066e-03$ $9.436e-02$
1.000e-04	$4.808e+01$ $3.105e+01$ $4.787e+02$	$5.519e-03$ $2.421e-03$ $3.727e-02$	$1.376e-03$ $5.080e-04$ $9.219e-03$	$1.337e-03$ $4.946e-04$ $9.061e-03$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	nan nan nan	nan $-nan$ $-nan$	nan $-nan$ $-nan$	nan $-nan$ $-nan$
1.000e-02	nan $-nan$ $-nan$	$1.685e+00$ $2.629e-01$ $1.310e+01$	$9.675e-01$ $1.687e-01$ $1.871e+01$	$1.351e+00$ $1.848e-01$ $2.235e+01$
1.000e-03	nan nan nan	$8.272e-03$ $4.593e-03$ $4.257e-02$	$1.074e-02$ $4.336e-03$ $5.749e-02$	$1.077e-02$ $4.342e-03$ $5.779e-02$
1.000e-04	nan nan nan	$5.740e-03$ $2.601e-03$ $3.858e-02$	$1.004e-03$ $4.176e-04$ $5.325e-03$	$1.031e-03$ $4.221e-04$ $5.625e-03$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

τ/h	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03	1.000e-04
1.000e-01	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e-02	$nan \quad -nan$ $-nan$	$1.079e-01$ $4.405e-02$ $1.733e+00$	$8.880e-02$ $2.896e-02$ $1.526e+00$	$8.242e-02$ $2.863e-02$ $1.415e+00$
1.000e-03	$nan \quad nan$ nan	$6.253e-03$ $3.009e-03$ $3.736e-02$	$3.227e-03$ $1.517e-03$ $2.056e-02$	$3.228e-03$ $1.507e-03$ $2.050e-02$
1.000e-04	$nan \quad nan$ nan	$3.758e-03$ $1.963e-03$ $2.731e-02$	$3.241e-04$ $1.593e-04$ $2.093e-03$	$3.202e-04$ $1.480e-04$ $2.016e-03$

3.3. Выводы

По результатам численного эксперимента можно сделать вывод, что схема является условно сходящейся. Также, обратим внимание на то, что сходимость сильно зависит от C, γ, μ. Худшая сходимость при больших и маленьких μ. Обратим внимание на то, что при $\tau < h$ невзяки наименьшие. Сходимость схемы порядка $\tau + h^2$

Вложенная сетка

Table of times.

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	1.170e-04	7.358e-03	7.271e-01
1.000e+00	3.480e-04	3.176e-02	3.102e+00
2.000e+00	1.396e-03	1.282e-01	1.494e+01
3.000e+00	6.399e-03	6.178e-01	6.190e+01
4.000e+00	2.539e-02	2.453e+00	2.421e+02

Table of norms for H. $\mu = 0.0010 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$2.459e+09$ $1.271e+09$ $1.787e+10$	$1.077e+85$ $1.464e+84$ $2.737e+86$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e+00	$1.373e+23$ $5.575e+22$ $6.685e+23$	$1.439e+167$ $inf \ inf$	$nan \quad nan$ nan
2.000e+00	$4.964e+33$ $2.843e+33$ $6.125e+33$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$
3.000e+00	$8.597e+81$ $1.947e+81$ $3.947e+82$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$
4.000e+00	$2.149e+137$ $4.816e+136$ $9.794e+137$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$

Table of norms for V. $\mu = 0.0010 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$1.034e+02$ $5.728e+01$ $8.862e+02$	$1.665e+03$ $2.332e+02$ $3.895e+04$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e+00	$6.518e+02$ $2.303e+02$ $3.227e+03$	$4.797e+02$ $9.971e+01$ $8.254e+03$	$nan \quad nan$ nan
2.000e+00	$9.973e+00$ $5.783e+00$ $5.284e+01$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$
3.000e+00	$2.704e+02$ $9.169e+01$ $1.259e+03$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$
4.000e+00	$1.256e+02$ $7.116e+01$ $8.562e+02$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$

Table of norms for H. $\mu = 0.0010 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$7.614e+04$ $3.000e+04$ $1.997e+05$	$9.181e+60$ $1.911e+60$ $2.248e+62$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e+00	$4.572e+11$ $1.272e+11$ $9.031e+11$	$1.543e{+}114$ $1.092e{+}113$ $1.506e{+}115$	$nan \quad nan$ nan
2.000e+00	$2.800e+23$ $6.592e+22$ $1.097e+24$	$1.253e{+}227$ $inf \ inf$	$nan \quad -nan$ $-nan$
3.000e+00	$2.884e+49$ $6.678e+48$ $7.670e+49$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan
4.000e+00	$4.371e+91$ $1.075e+91$ $1.399e+92$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan

Table of norms for V. $\mu = 0.0010 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$1.346e+01$ $6.953e+00$ $9.841e+01$	$8.572e+01$ $2.103e+01$ $3.297e+03$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e+00	$1.344e+02$ $4.631e+01$ $7.781e+02$	$1.785e+03$ $3.631e+02$ $2.647e+04$	$nan \quad nan$ nan
2.000e+00	$1.874e+01$ $8.536e+00$ $1.353e+02$	$2.083e+03$ $2.093e+02$ $2.982e+04$	$nan \quad -nan$ $-nan$
3.000e+00	$2.765e+01$ $1.338e+01$ $2.007e+02$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan
4.000e+00	$2.727e+02$ $8.714e+01$ $1.264e+03$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan

Table of norms for H. $\mu = 0.0010 \quad C = 1.0000, \gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$1.140e+02$ $4.643e+01$ $6.830e+02$	$5.843e+22$ $8.892e+21$ $1.684e+24$	$8.384e{+}194$ $inf\ inf$
1.000e+00	$2.003e+04$ $6.114e+03$ $4.109e+04$	$1.699e+57$ $1.210e+56$ $1.575e+58$	$nan \quad nan$ nan
2.000e+00	$2.685e+07$ $6.948e+06$ $6.477e+07$	$1.883e{+}108$ $1.867e{+}107$ $2.599e{+}109$	$3.179e+55$ $9.403e+53$ $1.710e+57$
3.000e+00	$1.283e+26$ $2.869e+25$ $5.637e+26$	$2.761e{+}171$ $inf\ inf$	$1.611e-02$ $2.921e-03$ $3.865e-01$
4.000e+00	$9.205e+53$ $2.058e+53$ $2.921e+54$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$7.515e-03$ $1.434e-03$ $1.781e-01$

Table of norms for V. $\mu = 0.0010 \quad C = 1.0000, \gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$6.763e+00$ $3.636e+00$ $4.417e+01$	$9.693e+01$ $1.074e+01$ $1.588e+03$	$1.712e+02$ $7.741e+00$ $1.111e+04$
1.000e+00	$4.298e+00$ $2.509e+00$ $2.245e+01$	$4.844e+02$ $5.844e+01$ $7.852e+03$	$nan \quad nan$ nan
2.000e+00	$4.896e+00$ $3.500e+00$ $5.271e+01$	$1.896e+01$ $4.630e+00$ $6.668e+02$	$3.158e+01$ $3.011e+00$ $2.232e+03$
3.000e+00	$8.664e+00$ $3.977e+00$ $6.327e+01$	$1.753e+02$ $1.892e+01$ $2.701e+03$	$2.910e-03$ $7.636e-04$ $9.087e-02$
4.000e+00	$4.331e+01$ $1.393e+01$ $1.989e+02$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$1.426e-03$ $3.763e-04$ $4.278e-02$

Table of norms for H. $\mu = 0.0010 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$nan \quad nan \quad nan$	$nan \quad -nan \quad -nan$	$nan \quad -nan \quad -nan$
1.000e+00	$nan \quad -nan \quad -nan$	$nan \quad nan \quad nan$	$nan \quad nan \quad nan$
2.000e+00	$nan \quad nan \quad nan$	$nan \quad -nan \quad -nan$	$nan \quad -nan \quad -nan$
3.000e+00	$nan \quad nan \quad nan$	$nan \quad nan \quad nan$	$nan \quad -nan \quad -nan$
4.000e+00	$nan \quad -nan \quad -nan$	$nan \quad nan \quad nan$	$1.387e-02$ $3.580e-04$ $4.317e-01$

Table of norms for V. $\mu = 0.0010 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$nan \quad nan \quad nan$	$nan \quad -nan \quad -nan$	$nan \quad -nan \quad -nan$
1.000e+00	$nan \quad -nan \quad -nan$	$nan \quad nan \quad nan$	$nan \quad nan \quad nan$
2.000e+00	$nan \quad nan \quad nan$	$nan \quad -nan \quad -nan$	$nan \quad -nan \quad -nan$
3.000e+00	$nan \quad nan \quad nan$	$nan \quad nan \quad nan$	$nan \quad -nan \quad -nan$
4.000e+00	$nan \quad -nan \quad -nan$	$nan \quad nan \quad nan$	$1.145e-04$ $5.932e-05$ $1.541e-03$

Table of norms for H. $\mu = 0.0100 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$6.013e+14$ $2.706e+14$ $3.824e+15$	$3.218e+84$ $3.457e+83$ $5.351e+85$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e+00	$8.151e+24$ $7.604e+24$ $7.798e+24$	$1.573e+152$ $3.748e+151$ $3.415e+153$	$nan \quad -nan$ $-nan$
2.000e+00	$9.381e+38$ $2.104e+38$ $3.983e+39$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$
3.000e+00	$1.090e+62$ $2.443e+61$ $4.747e+62$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$
4.000e+00	$1.753e+138$ $3.933e+137$ $8.068e+138$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$7.861e+02$ $2.878e+02$ $4.036e+03$	$4.751e+02$ $1.454e+02$ $1.269e+04$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e+00	$9.823e+00$ $6.986e+00$ $4.845e+01$	$2.666e+04$ $5.741e+03$ $5.205e+05$	$nan \quad -nan$ $-nan$
2.000e+00	$8.715e+02$ $3.289e+02$ $3.603e+03$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$
3.000e+00	$3.312e+03$ $1.104e+03$ $1.607e+04$	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$
4.000e+00	$5.384e+01$ $2.991e+01$ $4.270e+02$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad -nan$ $-nan$

Table of norms for H. $\mu = 0.0100 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$2.542e+05$ $1.075e+05$ $2.196e+06$	$2.468e+43$ $4.313e+42$ $7.281e+44$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e+00	$1.157e+12$ $5.784e+11$ $1.312e+12$	$7.898e+104$ $1.208e+104$ $4.997e+105$	$nan \quad nan$ nan
2.000e+00	$2.357e+28$ $6.798e+27$ $6.242e+28$	$3.574e+184$ $inf \ inf$	$4.147e+251$ $inf \ inf$
3.000e+00	$5.474e+43$ $1.224e+43$ $2.418e+44$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$5.283e-04$ $2.425e-04$ $1.576e-03$
4.000e+00	$4.137e+82$ $9.266e+81$ $1.779e+83$	$nan \quad nan$ nan	$2.639e-04$ $1.211e-04$ $7.852e-04$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$3.427e+01$ $1.789e+01$ $3.061e+02$	$5.969e+01$ $1.605e+01$ $2.552e+03$	$nan \quad -nan$ $-nan$
1.000e+00	$3.254e+00$ $1.652e+00$ $1.699e+01$	$4.239e+02$ $4.440e+01$ $5.603e+03$	$nan \quad nan$ nan
2.000e+00	$5.195e+01$ $2.206e+01$ $3.007e+02$	$3.964e+02$ $6.752e+01$ $8.322e+03$	$8.700e+02$ $4.567e+01$ $5.998e+04$
3.000e+00	$1.057e+02$ $3.547e+01$ $5.239e+02$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$4.434e-04$ $1.730e-04$ $1.459e-03$
4.000e+00	$1.417e+02$ $5.482e+01$ $8.437e+02$	$nan \quad nan$ nan	$2.215e-04$ $8.648e-05$ $7.278e-04$

Table of norms for H. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$6.341e+02$	$3.845e+08$	$5.158e-02$
	$2.059e+02$	$4.626e+07$	$1.439e-02$
	$4.781e+03$	$7.748e+09$	$7.982e-01$
1.000e+00	$6.085e+04$	$8.902e+18$	$2.367e-02$
	$1.509e+04$	$7.214e+17$	$6.999e-03$
	$3.387e+05$	$6.339e+19$	$3.668e-01$
2.000e+00	$1.137e+06$	$2.129e-01$	$1.140e-02$
	$2.627e+05$	$4.859e-02$	$3.454e-03$
	$4.038e+06$	$5.358e+00$	$1.766e-01$
3.000e+00	$1.350e+12$	$6.767e-02$	$5.598e-03$
	$3.164e+11$	$1.826e-02$	$1.716e-03$
	$5.297e+12$	$1.003e+00$	$8.673e-02$
4.000e+00	$1.839e+12$	$3.018e-02$	$2.775e-03$
	$5.392e+11$	$8.808e-03$	$8.553e-04$
	$3.450e+12$	$4.515e-01$	$4.299e-02$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$4.935e+00$	$4.542e+02$	$1.133e-02$
	$2.183e+00$	$4.972e+01$	$3.297e-03$
	$2.996e+01$	$4.838e+03$	$1.662e-01$
1.000e+00	$1.137e+01$	$8.930e+01$	$5.446e-03$
	$3.952e+00$	$9.884e+00$	$1.605e-03$
	$7.002e+01$	$1.272e+03$	$7.750e-02$
2.000e+00	$5.111e+00$	$3.086e-02$	$2.670e-03$
	$2.741e+00$	$9.360e-03$	$7.923e-04$
	$4.608e+01$	$6.797e-01$	$3.754e-02$
3.000e+00	$2.921e+01$	$1.426e-02$	$1.322e-03$
	$1.106e+01$	$4.178e-03$	$3.936e-04$
	$1.383e+02$	$2.087e-01$	$1.849e-02$
4.000e+00	$4.130e+00$	$6.861e-03$	$6.579e-04$
	$2.161e+00$	$2.020e-03$	$1.962e-04$
	$1.804e+01$	$9.568e-02$	$9.175e-03$

Table of norms for H. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan	$7.351e-03$ $2.605e-03$ $5.011e-02$
1.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$3.532e-03$ $1.278e-03$ $2.051e-02$
2.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan	$1.733e-03$ $6.340e-04$ $1.002e-02$
3.000e+00	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan	$8.586e-04$ $3.159e-04$ $4.956e-03$
4.000e+00	$nan \quad -nan$ $-nan$	$4.447e-03$ $1.604e-03$ $2.586e-02$	$4.274e-04$ $1.577e-04$ $2.466e-03$

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan	$2.122e-03$ $8.342e-04$ $1.695e-02$
1.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad -nan$ $-nan$	$1.027e-03$ $4.020e-04$ $7.993e-03$
2.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$nan \quad nan$ nan	$5.062e-04$ $1.977e-04$ $3.917e-03$
3.000e+00	$nan \quad -nan$ $-nan$	$nan \quad nan$ nan	$2.513e-04$ $9.809e-05$ $1.940e-03$
4.000e+00	$nan \quad -nan$ $-nan$	$1.294e-03$ $5.069e-04$ $1.010e-02$	$1.252e-04$ $4.886e-05$ $9.658e-04$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$1.091e+08$ $3.948e+07$ $7.057e+08$	$2.536e+65$ $4.161e+64$ $3.924e+66$	$nan \quad nan$ nan
1.000e+00	$1.515e+12$ $7.061e+11$ $3.665e+12$	$3.954e{+}137$ $1.121e{+}137$ $5.038e{+}138$	$nan \quad -nan$ $-nan$
2.000e+00	$5.398e+27$ $3.015e+27$ $2.167e+28$	$2.707e{+}285$ $inf \ inf$	$nan \quad nan$ nan
3.000e+00	$5.176e+57$ $1.273e+57$ $1.777e+58$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$2.810e-04$ $1.784e-04$ $7.467e-04$
4.000e+00	$2.419e{+}103$ $9.075e{+}102$ $1.484e{+}104$	$nan \quad nan$ nan	$1.406e-04$ $8.925e-05$ $3.741e-04$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 100.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$3.339e+01$ $2.025e+01$ $2.383e+02$	$9.089e+02$ $1.851e+02$ $2.096e+04$	$nan \quad nan$ nan
1.000e+00	$4.768e+01$ $1.963e+01$ $2.241e+02$	$7.276e+03$ $1.205e+03$ $1.372e+05$	$nan \quad -nan$ $-nan$
2.000e+00	$8.885e+02$ $4.582e+02$ $4.080e+03$	$7.186e+02$ $1.787e+02$ $1.819e+04$	$nan \quad nan$ nan
3.000e+00	$8.988e+01$ $4.254e+01$ $4.403e+02$	$nan \quad -nan$ $-nan$	$1.589e-04$ $7.291e-05$ $5.189e-04$
4.000e+00	$1.860e+02$ $8.414e+01$ $1.042e+03$	$nan \quad nan$ nan	$7.968e-05$ $3.651e-05$ $2.597e-04$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$1.098e+06$	$1.780e+07$	$4.464e-03$
	$2.630e+05$	$2.985e+06$	$2.043e-03$
	$3.775e+06$	$5.849e+08$	$1.222e-02$
1.000e+00	$2.667e+04$	$4.318e+09$	$2.217e-03$
	$1.528e+04$	$5.246e+08$	$1.016e-03$
	$1.183e+05$	$3.967e+10$	$6.080e-03$
2.000e+00	$1.591e+13$	$1.146e-02$	$1.105e-03$
	$3.559e+12$	$5.196e-03$	$5.069e-04$
	$5.136e+13$	$3.122e-02$	$3.033e-03$
3.000e+00	$1.794e+13$	$5.599e-03$	$5.517e-04$
	$4.216e+12$	$2.561e-03$	$2.532e-04$
	$6.360e+13$	$1.530e-02$	$1.515e-03$
4.000e+00	$1.262e+13$	$2.775e-03$	$2.756e-04$
	$4.458e+12$	$1.272e-03$	$1.265e-04$
	$1.937e+13$	$7.603e-03$	$7.572e-04$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$2.738e+01$	$2.039e+01$	$3.065e-03$
	$1.215e+01$	$7.961e+00$	$1.361e-03$
	$1.757e+02$	$1.048e+03$	$9.235e-03$
1.000e+00	$1.246e+01$	$1.987e+01$	$1.533e-03$
	$8.572e+00$	$7.869e+00$	$6.767e-04$
	$6.781e+01$	$4.821e+02$	$4.626e-03$
2.000e+00	$1.814e+01$	$7.562e-03$	$7.666e-04$
	$1.029e+01$	$3.453e-03$	$3.374e-04$
	$9.476e+01$	$2.274e-02$	$2.314e-03$
3.000e+00	$2.004e+01$	$3.823e-03$	$3.832e-04$
	$1.110e+01$	$1.705e-03$	$1.685e-04$
	$1.979e+02$	$1.152e-02$	$1.157e-03$
4.000e+00	$1.754e+01$	$1.913e-03$	$1.916e-04$
	$6.125e+00$	$8.470e-04$	$8.418e-05$
	$7.346e+01$	$5.778e-03$	$5.787e-04$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$6.007e+02$	$1.568e+00$	$7.259e-02$
	$3.064e+02$	$4.277e-01$	$1.972e-02$
	$7.033e+03$	$2.557e+01$	$4.754e-01$
1.000e+00	$9.374e+03$	$4.478e-01$	$3.541e-02$
	$2.131e+03$	$1.176e-01$	$9.683e-03$
	$3.814e+04$	$3.736e+00$	$2.289e-01$
2.000e+00	$3.181e+03$	$1.947e-01$	$1.749e-02$
	$7.419e+02$	$5.225e-02$	$4.799e-03$
	$8.624e+03$	$1.339e+00$	$1.124e-01$
3.000e+00	$1.757e+00$	$9.129e-02$	$8.691e-03$
	$8.537e-01$	$2.488e-02$	$2.389e-03$
	$1.009e+01$	$5.997e-01$	$5.570e-02$
4.000e+00	$5.943e-01$	$4.440e-02$	$4.332e-03$
	$1.971e-01$	$1.216e-02$	$1.192e-03$
	$2.880e+00$	$2.859e-01$	$2.773e-02$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$5.855e+00$	$2.318e-01$	$1.392e-02$
	$3.789e+00$	$7.808e-02$	$5.080e-03$
	$6.347e+01$	$1.927e+00$	$9.453e-02$
1.000e+00	$3.129e+00$	$8.344e-02$	$6.805e-03$
	$1.225e+00$	$2.879e-02$	$2.503e-03$
	$1.629e+01$	$5.933e-01$	$4.615e-02$
2.000e+00	$6.710e+01$	$3.701e-02$	$3.365e-03$
	$3.127e+01$	$1.330e-02$	$1.242e-03$
	$2.341e+02$	$2.537e-01$	$2.281e-02$
3.000e+00	$3.947e+00$	$1.754e-02$	$1.673e-03$
	$2.138e+00$	$6.397e-03$	$6.188e-04$
	$9.851e+00$	$1.189e-01$	$1.134e-02$
4.000e+00	$9.862e-02$	$8.544e-03$	$8.341e-04$
	$4.161e-02$	$3.140e-03$	$3.088e-04$
	$5.053e-01$	$5.773e-02$	$5.653e-03$

Table of norms for H. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$1.685e+00$ $2.629e-01$ $1.310e+01$	$1.074e-02$ $4.336e-03$ $5.749e-02$
1.000e+00	$nan \quad -nan$ $-nan$	$6.222e-02$ $2.425e-02$ $3.757e-01$	$5.250e-03$ $2.136e-03$ $2.840e-02$
2.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$2.830e-02$ $1.129e-02$ $1.477e-01$	$2.595e-03$ $1.060e-03$ $1.411e-02$
3.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$1.355e-02$ $5.459e-03$ $7.179e-02$	$1.290e-03$ $5.281e-04$ $7.035e-03$
4.000e+00	$9.378e-02$ $3.781e-02$ $3.758e-01$	$6.579e-03$ $2.680e-03$ $3.536e-02$	$6.431e-04$ $2.635e-04$ $3.512e-03$

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$k/\tau = h$	1.000e-01	1.000e-02	1.000e-03
0.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$1.079e-01$ $4.405e-02$ $1.733e+00$	$3.227e-03$ $1.517e-03$ $2.056e-02$
1.000e+00	$nan \quad -nan$ $-nan$	$1.810e-02$ $8.495e-03$ $1.140e-01$	$1.606e-03$ $7.482e-04$ $1.017e-02$
2.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$8.190e-03$ $3.946e-03$ $5.295e-02$	$8.015e-04$ $3.715e-04$ $5.057e-03$
3.000e+00	$nan \quad nan$ nan	$4.044e-03$ $1.909e-03$ $2.579e-02$	$4.003e-04$ $1.851e-04$ $2.522e-03$
4.000e+00	$2.354e-02$ $1.143e-02$ $1.210e-01$	$2.010e-03$ $9.385e-04$ $1.272e-02$	$2.001e-04$ $9.241e-05$ $1.259e-03$

3.4. Выводы

По результатам численного эксперимента со вложенными сетками можно увидеть оценку точности снизу для схемы для случаев, когда схема сходится. Наименьшая ошибка имеет порядок 10^{-5}.

4. Негладкие начальные данные

4.1. Постановка задачи

Пусть $\Omega_x = [0; 10]$, тогда для системы (1) зададим две задачи, начальные условия которых, определяются следующим образом.

$$\begin{cases} \rho(0,x) = 1, x \notin [4.5; 5.5], \\ \rho(0,x) = 2, x \in [4.5; 5.5], \\ u(0,x) \equiv 0, x \in [0; 10] \\ u(t,0) = u(t,10) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \rho(0,x) = 1, x \in [0; 10] \\ u(0,x) = 0, x \notin [4.5; 5.5], \\ u(0,x) = 1, x \in [4.5; 5.5], \\ u(t,0) = u(t,10) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Функции f и f_0 из гладкой задачи положим равными $f \equiv f_0 \equiv 0$. Вычисление будем проводить до времени T_{st}, при котором решение выходит на стационар. Выходом на стационар будем считать выполнение условия:

$$\|(H^n, V^n) - (\tilde{H}^n, \tilde{V}^n)\|_C \leq \varepsilon$$

4.2. Численные эксперименты

В качестве измельчения сетки возьмем $\tau = 10^{-3}\, h = 10^{-2}$. Эксперементальным путем было подобрано значение $\varepsilon = 10^{-3}$. Ввиду того, что при $C = 100$ и $\mu = 0.001$ сходимость схемы плохая, данные параметры не будем расссматривать при расчете различных вариантов начальных условий.

Первая негладкая задача

Ниже приведены таблицы времени стабилизации в зависимости от разных параметров μ, C, γ

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 10.0000, \gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	1482964	1.483e+03	2.109e-02	4.435e-03	5.727e-03	9.992e-04
1	2965927	1.483e+03	1.263e-02	8.443e-03	3.101e-03	2.917e-03
2	5931853	1.483e+03	1.154e-02	7.154e-03	2.366e-03	2.025e-03
3	11863705	1.483e+03	1.098e-02	6.557e-03	2.043e-03	1.636e-03

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000, \gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	943131	9.431e+02	3.344e-02	1.147e-02	4.332e-03	9.996e-04
1	1886261	9.431e+02	3.311e-02	1.129e-02	4.185e-03	9.050e-04
2	3772521	9.431e+02	3.293e-02	1.120e-02	4.114e-03	8.613e-04
3	7545041	9.431e+02	3.285e-02	1.115e-02	4.079e-03	8.405e-04

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000, \gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	919330	9.193e+02	1.980e-02	8.076e-03	6.651e-03	9.998e-04
1	1838659	9.193e+02	1.891e-02	8.395e-03	5.863e-03	1.467e-03
2	3677317	9.193e+02	1.853e-02	8.487e-03	5.518e-03	1.632e-03
3	7354633	9.193e+02	1.835e-02	8.521e-03	5.358e-03	1.701e-03

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	163946	1.639e+02	1.087e-01	3.157e-02	8.669e-03	9.950e-04
1	327891	1.639e+02	1.041e-01	2.907e-02	7.359e-03	9.549e-04
2	655781	1.639e+02	1.018e-01	2.785e-02	6.758e-03	9.451e-04
3	1311561	1.639e+02	1.007e-01	2.724e-02	6.465e-03	9.426e-04

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	134175	1.342e+02	4.542e-02	4.743e-02	2.030e-02	9.991e-04
1	268349	1.342e+02	4.525e-02	4.705e-02	2.002e-02	1.005e-03
2	536697	1.342e+02	4.517e-02	4.686e-02	1.987e-02	1.009e-03
3	1073393	1.342e+02	4.513e-02	4.677e-02	1.980e-02	1.011e-03

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	135888	1.359e+02	1.034e-01	4.665e-02	1.489e-02	9.984e-04
1	271775	1.359e+02	1.024e-01	4.636e-02	1.488e-02	1.069e-03
2	543549	1.359e+02	1.019e-01	4.622e-02	1.487e-02	1.105e-03
3	1087097	1.359e+02	1.017e-01	4.615e-02	1.487e-02	1.124e-03

Теперь рассмотрим динамику процесса на графиках затухания и временных срезах для различных значений параметров.

Graphic of H for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400
Пространство
Время

Graphic of V for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400
Пространство
Время

Graphic of H for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400
0.25 * Time of stabilization
0.5 * Time of stabilization
0.75 * Time of stabilization
Time of stabilization

Graphic of V for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400
0.25 * Time of stabilization
0.5 * Time of stabilization
0.75 * Time of stabilization
Time of stabilization

Graphic of H for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000
Пространство
Время

Graphic of V for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000
Пространство
Время

Graphic of H for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000
0.25 * Time of stabilization
0.5 * Time of stabilization
0.75 * Time of stabilization
Time of stabilization

Graphic of V for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000
0.25 * Time of stabilization
0.5 * Time of stabilization
0.75 * Time of stabilization
Time of stabilization

Период колебаний не зависит от μ, однако при увеличении C и γ частота колебаний увеличивается. Однако при уменьшении μ увеличивается время стабилизации процесса.

Приведем также графики норм для различных начальных параметров.

Graphic of V norm for Mu=0.010 C=10.000 Gamma=1.000

Graphic of V norm for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.000

Graphic of V norm for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400

Далее приведены значения $\Delta m(n)$ на измельченных и обычных сетках. А также их графическое представление.

Table of mass loss. $\mu = 0.1000 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	163946	1.639e+02	2.222e-03	2.221e-03	2.215e-03	2.212e-03
1	327891	1.639e+02	1.033e-03	1.032e-03	1.029e-03	1.027e-03
2	655781	1.639e+02	4.993e-04	4.983e-04	4.968e-04	4.959e-04
3	1311561	1.639e+02	2.455e-04	2.449e-04	2.442e-04	2.437e-04

Table of mass loss. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	134175	1.342e+02	-1.686e-05	1.170e-04	1.300e-04	9.748e-05
1	268349	1.342e+02	-8.439e-06	5.785e-05	6.433e-05	4.826e-05
2	536697	1.342e+02	-4.225e-06	2.877e-05	3.200e-05	2.401e-05
3	1073393	1.342e+02	-2.116e-06	1.434e-05	1.596e-05	1.197e-05

Table of mass loss. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	135888	1.359e+02	2.745e-04	2.090e-04	2.116e-04	2.205e-04
1	271775	1.359e+02	1.358e-04	1.033e-04	1.044e-04	1.088e-04
2	543549	1.359e+02	6.751e-05	5.138e-05	5.186e-05	5.401e-05
3	1087097	1.359e+02	3.366e-05	2.562e-05	2.584e-05	2.691e-05

Table of mass loss. $\mu = 0.0100 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	1482964	1.483e+03	3.484e-01	3.484e-01	3.484e-01	3.484e-01
1	2965927	1.483e+03	3.022e-02	3.022e-02	3.023e-02	3.023e-02
2	5931853	1.483e+03	7.440e-03	7.443e-03	7.443e-03	7.443e-03
3	11863705	1.483e+03	2.969e-03	2.970e-03	2.971e-03	2.970e-03

Table of mass loss. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	943131	9.431e+02	2.208e-03	2.204e-03	2.224e-03	2.215e-03
1	1886261	9.431e+02	1.020e-03	1.018e-03	1.028e-03	1.023e-03
2	3772521	9.431e+02	4.918e-04	4.909e-04	4.956e-04	4.935e-04
3	7545041	9.431e+02	2.417e-04	2.412e-04	2.436e-04	2.425e-04

Table of mass loss. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	919330	9.193e+02	3.906e-03	3.902e-03	3.904e-03	3.911e-03
1	1838659	9.193e+02	1.715e-03	1.712e-03	1.713e-03	1.717e-03
2	3677317	9.193e+02	8.101e-04	8.087e-04	8.089e-04	8.109e-04
3	7354633	9.193e+02	3.944e-04	3.937e-04	3.937e-04	3.948e-04

Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000

Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.000

Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.400

Как можно заметить по таблицам потери массы составляют меньше 1-2%, из чего можно заключить, что закон сохранения массы выполняется.

Вторая негладкая задача

Ниже приведены таблицы времени стабилизации в зависимости от разных параметров μ, C, γ

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	5197350	5.197e+03	1.187e-02	4.526e-03	2.155e-03	9.998e-04
1	10394699	5.197e+03	6.803e-03	3.945e-03	2.463e-03	1.437e-03
2	20789397	5.197e+03	6.894e-03	3.268e-03	1.659e-03	7.737e-04
3	41578793	5.197e+03	6.781e-03	2.967e-03	1.375e-03	5.684e-04

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	2541366	2.541e+03	1.533e-02	4.103e-03	5.817e-03	9.995e-04
1	5082731	2.541e+03	1.507e-02	4.108e-03	5.616e-03	9.805e-04
2	10165461	2.541e+03	1.493e-02	4.107e-03	5.515e-03	9.711e-04
3	20330921	2.541e+03	1.487e-02	4.106e-03	5.466e-03	9.664e-04

Table of norms for V. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	2495755	2.496e+03	1.360e-02	8.493e-03	3.638e-03	1.015e-03
1	4991509	2.496e+03	1.310e-02	8.478e-03	4.044e-03	1.483e-03
2	9983017	2.496e+03	1.288e-02	8.377e-03	4.184e-03	1.677e-03
3	19966033	2.496e+03	1.278e-02	8.311e-03	4.242e-03	1.763e-03

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	444220	4.442e+02	6.126e-02	2.198e-02	7.506e-03	9.959e-04
1	888439	4.442e+02	6.083e-02	2.162e-02	7.186e-03	8.776e-04
2	1776877	4.442e+02	6.058e-02	2.143e-02	7.023e-03	8.240e-04
3	3553753	4.442e+02	6.046e-02	2.134e-02	6.943e-03	7.985e-04

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	414339	4.143e+02	3.391e-02	2.582e-02	1.688e-02	9.997e-04
1	828677	4.143e+02	3.386e-02	2.571e-02	1.683e-02	1.001e-03
2	1657353	4.143e+02	3.383e-02	2.565e-02	1.680e-02	1.002e-03
3	3314705	4.143e+02	3.382e-02	2.562e-02	1.679e-02	1.002e-03

Table of norms for V. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	400813	4.008e+02	6.232e-02	2.319e-02	8.014e-03	9.986e-04
1	801625	4.008e+02	6.216e-02	2.310e-02	7.955e-03	9.730e-04
2	1603249	4.008e+02	6.209e-02	2.306e-02	7.926e-03	9.603e-04
3	3206497	4.008e+02	6.205e-02	2.304e-02	7.911e-03	9.540e-04

Теперь рассмотрим динамику процесса на графиках затухания и временных срезах для различных значений параметров.

Graphic of H for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.000

Graphic of V for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.000

Graphic of H for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400

Graphic of V for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400

Graphic of H for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000

Graphic of V for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000

Graphic of H for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.000

Graphic of V for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.000

Период колебаний не зависит от μ, однако при увеличении C и γ частота колебаний увеличивается. Однако при уменьшении μ увеличивается время стабилизации процесса.

Приведем также графики невязок для различных параметров.

Graphic of V norm for Mu=0.010 C=10.000 Gamma=1.000
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
1000
2000
3000
4000
5000

Graphic of V norm for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.000
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
500
1000
1500
2000
2500

Graphic of V norm for Mu=0.010 C=1.000 Gamma=1.400
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
500
1000
1500
2000

Далее приведены значения $\Delta m(n)$ на измельченных и обычных сетках. А также их граффическое представление

Table of mass loss. $\mu = 0.1000 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	444220	4.442e+02	2.725e-04	2.826e-04	2.854e-04	2.863e-04
1	888439	4.442e+02	1.288e-04	1.336e-04	1.349e-04	1.353e-04
2	1776877	4.442e+02	6.272e-05	6.505e-05	6.568e-05	6.586e-05
3	3553753	4.442e+02	3.096e-05	3.211e-05	3.242e-05	3.251e-05

Table of mass loss. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	414339	4.143e+02	2.568e-04	2.822e-04	2.735e-04	2.757e-04
1	828677	4.143e+02	1.273e-04	1.399e-04	1.357e-04	1.367e-04
2	1657353	4.143e+02	6.339e-05	6.971e-05	6.757e-05	6.811e-05
3	3314705	4.143e+02	3.164e-05	3.479e-05	3.373e-05	3.400e-05

Table of mass loss. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	400813	4.008e+02	2.850e-04	2.777e-04	2.739e-04	2.725e-04
1	801625	4.008e+02	1.410e-04	1.374e-04	1.355e-04	1.349e-04
2	1603249	4.008e+02	7.019e-05	6.838e-05	6.743e-05	6.710e-05
3	3206497	4.008e+02	3.502e-05	3.411e-05	3.364e-05	3.348e-05

Table of mass loss. $\mu = 0.0100 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	5197350	5.197e+03	2.025e-01	2.025e-01	2.025e-01	2.025e-01
1	10394699	5.197e+03	2.631e-03	2.632e-03	2.632e-03	2.632e-03
2	20789397	5.197e+03	8.500e-04	8.502e-04	8.502e-04	8.502e-04
3	41578793	5.197e+03	3.625e-04	3.625e-04	3.626e-04	3.625e-04

Table of mass loss. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	2541366	2.541e+03	3.223e-03	3.220e-03	3.223e-03	3.222e-03
1	5082731	2.541e+03	1.481e-03	1.479e-03	1.480e-03	1.480e-03
2	10165461	2.541e+03	7.141e-04	7.130e-04	7.136e-04	7.135e-04
3	20330921	2.541e+03	3.511e-04	3.505e-04	3.508e-04	3.508e-04

Table of mass loss. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

K	N_0	$N_0\tau$	$n = \frac{N_0}{4}$	$n = \frac{N_0}{2}$	$n = \frac{3N_0}{4}$	$n = N_0$
0	2495755	2.496e+03	3.307e-03	3.316e-03	3.316e-03	3.315e-03
1	4991509	2.496e+03	1.473e-03	1.477e-03	1.478e-03	1.477e-03
2	9983017	2.496e+03	7.009e-04	7.028e-04	7.031e-04	7.030e-04
3	19966033	2.496e+03	3.425e-04	3.434e-04	3.436e-04	3.435e-04

Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=10.000 Gamma=1.000

Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.000

Graphic of Mass loss for Mu=0.100 C=1.000 Gamma=1.400

Как можно заметить по таблицам потери массы составляют меньше 1-2%, из чего можно заключить, что закон сохранения массы также выполняется.

5. Задача о стабилизации осцилирующей функции

5.1. Постановка задачи

Пусть $\Omega_x = [0;1]$, тогда для системы (1) зададим две задачи, начальные условия которых, определяются следующим образом.

$$\begin{cases} \rho(0,x) = 2 + sin(N\pi x) \\ u(0,x) = 0, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, t \in [0;T] \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \rho(0,x) = 1 \\ u(0,x) = sin(N\pi x), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, t \in [0;T] \end{cases} \tag{13}$$

Функции f и f_0 из гладкой задачи положим равными $f \equiv f_0 \equiv 0$. Вычисление будем проводить до времени T_{st}, при котором решение выходит на стационар. Выходом на стационар будем считать выполнение условия:

$$\|(H^n, V^n) - (\tilde{H}^n, \tilde{V}^n)\|_C \leq \varepsilon$$

Число N будем брать исходя из неравенства $10Nh \leq 1$.

5.2. Численные эксперименты

В качестве измельчения сетки возьмем $\tau = 10^{-4}\, h = 10^{-2}$. Эксперементальным путем было подобрано значение $\varepsilon = 10^{-4}$. Ввиду того, что при $C = 100$ и $\mu = 0.001$ сходимость схемы плохая, данные параметры не будем расссматривать при расчете различных вариантов начальных условий.

5.3. Первая задача

Приведем таблицы времени стабилизации в зависимости от различных μ, C, γ.

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	5.5e+01	1.5e+02	4.7e+01	1.4e+02	4.5e+01	1.4e+02	4.4e+01	1.3e+02

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	4.5e+01	1.3e+02	4.0e+01	1.2e+02	3.7e+01	1.2e+02	3.4e+01	1.1e+02

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	4.5e+01	1.3e+02	3.9e+01	1.2e+02	3.8e+01	1.1e+02	3.6e+01	1.1e+02

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000 \quad C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	5.4e+00	1.8e+01	5.1e+00	1.6e+01	4.1e+00	1.5e+01	3.6e+00	1.4e+01

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	4.0e+00	1.6e+01	4.1e+00	1.3e+01	3.0e+00	1.1e+01	2.5e+00	1.0e+01

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000 \quad C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	4.5e+00	1.7e+01	4.4e+00	1.4e+01	3.3e+00	1.3e+01	2.9e+00	1.1e+01

Вывод: при нечетных N сходимость на порядок быстрее чем при четных, при уменьшении μ также возрастает время стабилизации. От C сходимость практически не зависит.

5.4. Вторая задача

Приведем таблицы времени стабилизации в зависимости от различных μ, C, γ.

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	7.9e+01	2.1e+01	1.0e+01	5.7e+00	3.8e+00	2.7e+00	2.1e+00	1.5e+00

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	7.2e+01	2.0e+01	1.3e+01	1.0e+01	7.1e+00	4.6e+00	3.5e+00	2.6e+00

Table of stabilize time. $\mu = 0.0100$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	7.1e+01	2.0e+01	1.1e+01	8.6e+00	6.0e+00	3.9e+00	3.5e+00	2.2e+00

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000$ $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	8.7e+00	2.1e+00	1.0e+00	5.2e-01	3.5e-01	2.4e-01	1.6e-01	1.5e-01

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	9.5e+00	2.3e+00	8.8e-01	7.3e-01	6.9e-01	5.4e-01	6.4e-01	6.6e-01

Table of stabilize time. $\mu = 0.1000$ $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
T_{st}	8.9e+00	2.4e+00	1.0e+00	5.7e-01	5.1e-01	4.9e-01	4.3e-01	4.5e-01

Вывод: при нечетных N сходимость на порядок быстрее чем при четных, при уменьшении μ также возрастает время стабилизации. От C сходимость практиче-

ски не зависит.

6. Задача протекания

6.1. Постановка задачи

Для исходной системы зададим начальные условия, которые определяют задачу "протекания"

$$\begin{cases} \rho(0,x) = 1, x \in [0;10], \\ u(0,x) = 0, x \in [0;10], \\ u(t,0) = \tilde{v}, t \in [0;T], \\ \rho(t,0) = \tilde{\rho}, t \in [0;T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x) = 0, x = X, t \in [0;T] \end{cases} \tag{14}$$

Функции f и f_0 примем равными нулю. $\tilde{\rho} \geqslant 1, \tilde{v} > 0$. Суть эксперимента состоит в решении исходной задачи с введенными нами начальными значениями до момента стабилизации. Моментом стабилизации назовет время $T = N_0\tau$ при котором выполняется условие:

$$||V^{N_0} - V^{N_0-k}||_c < \varepsilon,$$

$k \in 1, 2, \ldots$ - константа, $\varepsilon]$ подбирается опытным путем.

6.2. Модификация разностной схемы

Ввиду новых граничных условий, уравнения на V и H видоизменятся следующим образом:

Граничные условия на скорость и плотность при $m = 0$: $V_0^{n+1} = \tilde{u}$, $H_0^{n+1} = \tilde{\rho}$

Граничные условия на скорость при $m = M$: $V_M^{n+1} = 0$, на $V_M^{n+1} - V_{M-1}^{n+1} = 0$

Граничные условия на плотность при $m = M$ ищутся чуть сложнее, необходимо учесть обнуление $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x = X$:

$$H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} +$$
$$+ H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = 0$$

Примет вид: $H_{t,M}+V_M\hat{H}_{\bar{x},M}+0.5h(V_M(H_{x\bar{x},M-1}-0.5H_{x\bar{x},M-2})-0.5V_{x\bar{x},M-2})=0$

$$\frac{H_M^{n+1}-H_M^n}{\tau}+0.5V_M^n\left(\frac{H_M^n-H_{M-1}^n}{h}\right)+$$
$$+\frac{h}{2}\left(V_M\left(\frac{H_{M-2}^n-2H_{M-1}^n+H_M^n}{h^2}-\frac{1}{2}\frac{H_{M-3}^n-2H_{M-2}^n+H_{M-1}^n}{h^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{V_{M-3}^n-2V_{M-2}^n+V_{M-1}^n}{h^2}\right)=0$$

$$H_M^{n+1}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{V_M^n}{2h}\right)+H_{M-1}^{n+1}\left(-\frac{V_{M-1}^n}{2h}\right)=\frac{H_M^n}{\tau}-$$
$$\frac{h}{2}\left(V_M\left(\frac{H_{M-2}^n-2H_{M-1}^n+H_M^n}{h^2}-\frac{1}{2}\frac{H_{M-3}^n-2H_{M-2}^n+H_{M-1}^n}{h^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{V_{M-3}^n-2V_{M-2}^n+V_{M-1}^n}{h^2}\right)$$

6.3. Численные эксперименты

В качестве измельчения сетки возьмем $\tau = 10^{-3}\,h = 10^{-2}$. Эксперементальным путем было подобрано значение $\varepsilon = 10^{-3}$, $k = 50$. Ввиду того, что при $C = 100$ и $\mu = 0.001$ сходимость схемы плохая, данные параметры не будем рассматривать при расчете различных вариантов начальных условий.

Далее приведены таблицы с временами стабилизации задачи.

Table of stabilization time. $\mu = 0.1000$, $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	7.941e+00	7.321e+00	7.224e+00	5.459e+00
2	7.998e+01	5.474e+01	2.884e+01	1.965e+00
3	4.498e+02	2.296e+02	2.146e+01	2.427e+00
4	6.748e+02	2.862e+02	2.227e+01	4.601e+00

Table of stabilization time. $\mu = 0.1000$, $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	1.108e+00	2.641e+00	1.011e+00	6.187e+00
2	7.427e+01	1.577e+01	7.542e+00	4.883e+00
3	6.437e+02	1.297e+02	6.615e+00	4.420e+00
4	6.962e+02	1.163e+02	6.126e+01	4.178e+00

Table of stabilization time. $\mu = 0.1000$, $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	6.912e+00	5.525e+01	1.404e+01	5.678e+00
2	5.748e+01	3.227e+01	1.022e+01	6.010e+00
3	9.152e+01	4.200e+01	8.893e+00	5.392e+00
4	2.802e+02	1.838e+02	8.192e+01	5.073e+00

Table of stabilization time. $\mu = 0.0100$, $C = 10.0000$, $\gamma = 1.0000$

$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	2.024e+01	1.956e+01	7.454e+01	5.959e+01
2	2.948e+02	5.477e+02	9.254e+01	3.825e+01
3	8.543e+02	5.152e+02	2.691e+02	2.834e+01
4	1.691e+03	7.695e+02	7.146e+02	1.669e+02

Table of stabilization time. $\mu = 0.0100$, $C = 1.0000$, $\gamma = 1.0000$

$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	8.719e+01	2.613e+01	8.054e+00	9.112e+00
2	4.662e+02	5.559e+01	1.540e+01	4.821e+01
3	7.068e+02	2.279e+02	2.583e+01	4.235e+01
4	8.681e+02	3.137e+02	6.113e+01	7.173e+01

Table of stabilization time. $\mu = 0.0100$, $C = 1.0000$, $\gamma = 1.4000$

$\tilde{\rho}/\tilde{v}$	1	2	3	4
1	1.912e+02	1.525e+02	8.404e+01	2.698e+01
2	3.228e+02	1.227e+02	7.022e+01	1.110e+01
3	8.142e+02	2.200e+02	9.893e+01	4.332e+01
4	1.512e+03	3.336e+02	1.153e+02	7.073e+01

Также приведем график значений функций H и V для разных временных слоев. $\tilde{\rho} = \tilde{u} = 1$

6.4. Выводы

При уменьшении μ время стабилизации значительно увеличивается. От C, γ существенной зависимости не обнаружено, (небольшое увеличение времени стабилизации при $C = 10$). При увеличении $\tilde{\rho}$ время стабилизации увеличивается, при увеличении $\tilde{u}$ время стабилизации уменьшается.

Список литературы

1. Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием неявных разностных схем, *Попов А.В., 2021*