Численное моделирование нестационарного двумерного течения газа с использованием неявной разностной схемы с центральными разностями $(u, \ln\rho)$

Алексей А. Исмагилов

Содержание

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений, описывающую нестационарное движение вязкого баротропного газа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = \rho f_0; \\ \rho\left[\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u},\, \nabla)\mathbf{u}\right] + \nabla p = L\mathbf{u} + \rho\mathbf{f}; \\ L\mathbf{u} = \operatorname{div}(\mu\nabla\mathbf{u}) + \dfrac{1}{3}\nabla(\mu\operatorname{div}\mathbf{u}); \\ p = p(\rho). \end{cases} \tag{1}$$

Через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который считаем известной неотрицательной величиной. Известными также будем считать функцию давления газа p (уравнение состояния газа) и вектор внешних сил $\mathbf{f}$, который является функцией переменных Эйлера $(t, \mathbf{x}) \in \Omega = \Omega_t \times \Omega_x \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Зависимость $p = p(\rho)$ часто называют уравнением состояния газа. Мы будем рассматривать две возможные зависимости: $p(\rho) = C\rho$, где C — положительная константа, и $p(\rho) = \rho^{1.4}$. Неизвестными же будут функция плотности ρ и функция скорости $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d)$.

Систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = \rho f_0; \\ \dfrac{\partial \rho u_s}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial \rho u_i u_s}{\partial x_i} + \dfrac{\partial p}{\partial x_s} = \mu \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial^2 u_s}{\partial x_i^2} + \dfrac{1}{3} \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_s \partial x_i} \right) + \rho f_s, \quad s = 1, \ldots, d. \end{cases}$$

Сделав замену $g = \ln \rho$ и ряд преобразований, систему (1) можно переписать в виде (см. [1])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \left(u_i \dfrac{\partial g}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_i g}{\partial x_i} + (2 - g) \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = f_0; \\ \dfrac{\partial u_s}{\partial t} + \dfrac{1}{3} \left(u_s \dfrac{\partial u_s}{\partial x_s} + \dfrac{\partial u_s^2}{\partial x_s} \right) + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1,\, i \neq s}^{d} \left(u_i \dfrac{\partial u_s}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_i u_s}{\partial x_i} - u_s \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \\ \qquad + p_\rho(e^g) \dfrac{\partial g}{\partial x_s} = \mu e^g \left(\dfrac{4}{3} \dfrac{\partial^2 u_s}{\partial x_s^2} + \displaystyle\sum_{i=1,\, i \neq s}^{d} \left(\dfrac{\partial^2 u_s}{\partial x_i^2} + \dfrac{1}{3} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_s \partial x_i} \right) \right) + f_s, \quad s = 1, \ldots, d. \end{cases} \tag{2}$$

Дополним систему (1) начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} &(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega_x; \\ &u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in \Omega_t \times \partial \Omega_x. \end{aligned} \tag{3}$$

В качестве областей Ω_t и Ω_x рассмотрим $[0; T] \subset \mathbb{R}$ и $\Omega_{x_1} \times \ldots \times \Omega_{x_d} \subset \mathbb{R}^d$, где $\Omega_{x_s} = [0; X_s]$, $s = 1, \ldots, d$, соответственно.

2 Основные обозначения

Введем на Ω_t и Ω_{x_s} сетки $\omega_t = \{n\tau : n = 0, \ldots, N\}$ и $\omega_{h_s} = \{m h_s : m = 0, \ldots, M_s\}$ соответственно, где $\tau = T/N$ и $h_s = X_s / M_s$, $s = 1, \ldots, d$. Обозначим $h = (h_1, \ldots, h_d)$, $\omega_h = \omega_{h_1} \times \ldots \times \omega_{h_d}$, $\omega_{\tau, h} = \omega_\tau \times \omega_h$, $\gamma_{h,s}^- = \omega_{h_1} \times \ldots \times \omega_{h_{s-1}} \times \{0\} \times \omega_{h_{s+1}} \times \ldots \times \omega_{h_d}$, $\gamma_{h,s}^+ = \omega_{h_1} \times \ldots \times \omega_{h_{s-1}} \times \{X_s\} \times \omega_{h_{s+1}} \times \ldots \times \omega_{h_d}$, $\gamma_{h,s} = \gamma_{h,s}^- \cup \gamma_{h,s}^+$ и $\gamma_h = \gamma_{h,1} \cup \ldots \cup \gamma_{h,d}$.

Для сокращения записи обозначим $m = (m_1, \ldots, m_d)$, $m \pm q_s = (m_1, \ldots, m_{s-1}, m_s \pm q, m_{s+1}, \ldots, m_d)$, значение для произвольной функции g в узле (n, m) через g_m^n. Для простоты вместо g_m^n и g_m^{n+1} будем писать g и $\widehat{g}$ соответственно. Введем обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах:

$$g_{\mathrm{avg}_s} = \frac{g_m^n + g_{m+1_s}^n}{2}; \qquad g_{\overline{\mathrm{avg}}_s} = \frac{g_m^n + g_{m-1_s}^n}{2}$$

и для разностных операторов:

$$g_t = \frac{g_m^{n+1} - g_m^n}{\tau}; \qquad g_{x_s} = \frac{g_{m+1_s}^n - g_m^n}{h_s}; \qquad g_{\bar{x}_s} = \frac{g_m^n - g_{m-1_s}^n}{h_s};$$

$$g_{\mathring{x}_s} = \frac{g^n_{m+1_s} - g^n_{m-1_s}}{2h_s}.$$

Обозначим $\operatorname{int}\omega_h = \omega_h \backslash \gamma_h$ и введем нормы для произвольной сеточной функции v:

$$\|v\|_C = \max_{x\in\omega_h} |v(x)|;$$
$$\|v\|_L = \sqrt{\Pi_h \cdot \left(\sum_{x\in\operatorname{int}\omega_h} v^2(x) + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_h} v^2(x)\right)};$$
$$\|v\|_W = \sqrt{\|v\|_L^2 + \Pi_h \sum_{i=1}^{d} \sum_{x\in\operatorname{int}\omega_h \cup \gamma^-_{h,\,i}} v^2_{x_i}(x)},$$

где $\Pi_h = h_1 \cdot \ldots \cdot h_d$, что эквивалентно следующему:

$$\|v\|_C = \max_{0\leqslant m_1 \leqslant M_1} \cdots \max_{0\leqslant m_d\leqslant M_d} |v_m|;$$
$$\|v\|_L = \sqrt{\Pi_h \cdot \left(\sum_{0<m_1<M_1} \cdots \sum_{0<m_d<M_d} (v_m)^2 + \frac{1}{2} \sum_{m_1\in\{0,\,M_1\}} \cdots \sum_{m_d\in\{0,\,M_d\}} (v_m)^2 \right)};$$
$$\|v\|_W = \sqrt{\|v\|_L^2 + \Pi_h \sum_{i=1}^{d} \sum_{0<m_1<M_1} \cdots \sum_{0<m_{i-1}<M_{i-1}} \sum_{0\leqslant m_i<M_i} \sum_{0<m_{i+1}<M_{i+1}} \cdots \sum_{0<m_d<M_d} \left(\frac{v_{m+1_i} - v_m}{h}\right)^2}.$$

3 Описание схемы

3.1 Описание схемы

Обозначим через G и V_s, $s = 1, \ldots, d$, приближенные значения функций $\ln\rho$ и u_s соответственно.

Для поиска численного решения задачи (2) с начальными условиями (3) можно использовать следующую разностную схему:

$$\begin{cases} F_0(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = f_0, & \mathbf{x} \in \operatorname{int}\omega_h; \\ F^-_{0,\,s}(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = f_0, & \mathbf{x} \in \gamma^-_{h,\,s}; \\ F^+_{0,\,s}(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = f_0, & \mathbf{x} \in \gamma^+_{h,\,s}; \\ F_s(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) = f_s, & \mathbf{x} \in \operatorname{int}\omega_h; \\ \widehat{V}_s = 0, & \mathbf{x} \in \gamma_{h,\,s}, \end{cases} \tag{4}$$

$s = 1, \ldots, d$, где

$$F_0(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) =$$
$$= G_t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\Big(V_i \widehat{G}_{\mathring{x}_i} + (V_i\widehat{G})_{\mathring{x}_i} + 2(\widehat{V}_i)_{\mathring{x}_i} - G(V_i)_{\mathring{x}_i}\Big) -$$
$$- \tau\eta \sum_{i=1}^{d} (\Phi_{\mathrm{avg}_i} \widehat{G}_{x_i})_{\overline{x}_i}; \tag{5}$$

$$F^-_{0,\,s}(G,\, V_1,\, \ldots,\, V_d) =$$
$$= G_t + \frac{1}{2}\Big((V_s\widehat{G})_{x_s} + 2(\widehat{V}_s)_{x_s} - G(V_s)_{x_s}\Big) -$$
$$- \tau\eta \frac{2\Phi_{\mathrm{avg}_s}}{h_s} \widehat{G}_{x_s}; \tag{6}$$

$$F^{+}_{0,s}(G, V_1, \ldots, V_d) =$$
$$= G_t + \frac{1}{2}\Big((V_s\widehat{G})_{\bar{x}_s} + 2(\widehat{V}_s)_{\bar{x}_s} - G(V_s)_{\bar{x}_s}\Big) +$$
$$+ \tau\eta\frac{2\Phi_{\overline{\mathrm{avg}_s}}}{h_s}\widehat{G}_{\bar{x}_s}; \quad (7)$$

$$F_s(G, V_1, \ldots, V_d) =$$
$$= (V_s)_t + \frac{1}{3}\Big(V_s(\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_s} + (V_s\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_s}\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}\Big(V_i(\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_i} + (V_i\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_i} - V_s(V_i)_{\mathring{x}_i}\Big) + p_\rho(e^G)\widehat{G}_{\mathring{x}_s} -$$
$$-\widetilde{\mu}\left(\frac{4}{3}(\widehat{V}_s)_{x_s\bar{x}_s} + \sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}(\widehat{V}_s)_{x_i\bar{x}_i}\right) + (\widetilde{\mu} - \mu e^{-G})\cdot\left(\frac{4}{3}(V_s)_{x_s\bar{x}_s} + \sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}(V_s)_{x_i\bar{x}_i}\right) - \frac{1}{3}\mu e^{-G}\sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}(V_i)_{\mathring{x}_s\mathring{x}_i}, \quad (8)$$

где
$$\widetilde{\mu} = \mu\,\|\exp(-G^n)\| = \mu\,\max_m|\exp(-G^n_m)| = \mu\,\exp\Big(-\min_m G^n_m\Big)$$
и функция Φ берется равной либо e^G, либо V^2. Величина η является положительной константой и подбирается экспериментально. Наличие слагаемых с коэффициентом η, называемых искусственными вязкостями, обусловлено использованием в схеме центральных разностей, которые приводят к появлению осцилляций у численного решения на фоне точного решения дифференциальной задачи.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку ω_h функций $\ln\rho_0$ и u_0 (запись $g(hm)$ стоит понимать как $g(h_1m_1, \ldots, h_dm_d)$):
$$G^0_m = \ln\rho_0(hm), \quad V^0_m = \mathbf{u}_0(hm),$$
а граничные значения скорости полагаются равными нулю (последнее уравнение в (4)):
$$V^n_m = 0,$$
$n = 1, \ldots, N$.

Так как
$$p_\rho(e^g) = C\gamma e^{(\gamma-1)g}$$
для $p(\rho) = C\rho^\gamma$, то
$$p_\rho(e^{G^n_m}) = C\gamma e^{(\gamma-1)G^n_m}.$$

3.2 Координатная запись уравнений

Используя обозначения из раздела 2, перепишем систему (4).

Заметим, что в уравнениях (5), (6), (7), (8) встречается запись вида $g_{x_s\bar{x}_s}$. Нетрудно видеть, что
$$g_{x_s\bar{x}_s} = (g_{x_s})_{\bar{x}_s} = \frac{g^n_{m+1_s} - 2g^n_m + g^n_{m-1_s}}{h_s^2}.$$

3.2.1 Первое уравнение

Рассмотрим уравнение (5):

$$F_0(G, V_1, \ldots, V_d) =$$
$$= G_t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\Big(V_i\widehat{G}_{\mathring{x}_i} + (V_i\widehat{G})_{\mathring{x}_i} + 2(\widehat{V}_i)_{\mathring{x}_i} - G(V_i)_{\mathring{x}_i}\Big) -$$
$$-\tau\eta\sum_{i=1}^{d}(\Phi_{\mathrm{avg}_i}\widehat{G}_{x_i})_{\bar{x}_i}.$$

Преобразуем i-ое слагаемое искусственной вязкости:

$$(\Phi_{\mathrm{avg}_i}\widehat{G}_{x_i})_{\overline{x}_i} =$$

$$= \left(\frac{\Phi^n_m + \Phi^n_{m+1_i}}{2}\cdot\frac{G^{n+1}_{m+1_i} - G^{n+1}_m}{h_i}\right)_{\overline{x}_i} = \left(\frac{(\Phi^n_m + \Phi^n_{m+1_i})(G^{n+1}_{m+1_i} - G^{n+1}_m)}{2h_i}\right)_{\overline{x}_i} =$$

$$= \frac{(\Phi^n_m + \Phi^n_{m+1_i})(G^{n+1}_{m+1_i} - G^{n+1}_m) - (\Phi^n_{m-1_i} + \Phi^n_m)(G^{n+1}_m - G^{n+1}_{m-1_i})}{2h_i^2} =$$

$$= \frac{(\Phi^n_m + \Phi^n_{m+1_i})G^{n+1}_{m+1_i} - (\Phi^n_{m+1_i} + 2\Phi^n_m + \Phi^n_{m-1_i})G^{n+1}_m + (\Phi^n_m + \Phi^n_{m-1_i})G^{n+1}_{m-1_i}}{2h_i^2}.$$

Преобразуем правую часть (5):

$$F_0(G, V_1, \ldots, V_d) =$$

$$= \frac{G^{n+1}_m - G^n_m}{\tau} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left((V_i)^n_m \frac{G^{n+1}_{m+1_i} - G^{n+1}_{m-1_i}}{2h_i} + \frac{(V_i)^n_{m+1_i}G^{n+1}_{m+1_i} - (V_i)^n_{m-1_i}G^{n+1}_{m-1_i}}{2h_i} +\right.$$

$$\left. + 2\frac{(V_i)^{n+1}_{m+1_i} - (V_i)^{n+1}_{m-1_i}}{2h_i} - G^n_m\frac{(V_i)^n_{m+1_i} - (V_i)^n_{m-1_i}}{2h_i}\right) -$$

$$- \tau\eta\sum_{i=1}^{d}\frac{(\Phi^n_m + \Phi^n_{m+1_i})G^{n+1}_{m+1_i} - (\Phi^n_{m+1_i} + 2\Phi^n_m + \Phi^n_{m-1_i})G^{n+1}_m + (\Phi^n_m + \Phi^n_{m-1_i})G^{n+1}_{m-1_i}}{2h_i^2};$$

$$F_0(G, V_1, \ldots, V_d) =$$

$$= \left(\frac{1}{\tau} + \tau\eta\sum_{i=1}^{d}\frac{\Phi^n_{m+1_i} + 2\Phi^n_m + \Phi^n_{m-1_i}}{2h_i^2}\right)G^{n+1}_m +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{(V_i)^n_m + (V_i)^n_{m-1_i}}{4h_i} - \tau\eta\frac{(\Phi^n_m + \Phi^n_{m-1_i})}{2h_i^2}\right)G^{n+1}_{m-1_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{(V_i)^n_m + (V_i)^n_{m+1_i}}{4h_i} - \tau\eta\frac{(\Phi^n_m + \Phi^n_{m+1_i})}{2h_i^2}\right)G^{n+1}_{m+1_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{1}{2h_i}\right)(V_i)^{n+1}_{m-1_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{1}{2h_i}\right)(V_i)^{n+1}_{m+1_i} -$$

$$- \left(\frac{G^n_m}{\tau} + \sum_{i=1}^{d}G^n_m\frac{(V_i)^n_{m+1_i} - (V_i)^n_{m-1_i}}{4h_i}\right).$$

3.2.2 Второе уравнение

Рассмотрим уравнение (6):

$$F^-_{0,s}(G, V_1, \ldots, V_d) =$$

$$= G_t + \frac{1}{2}\left((V_s\widehat{G})_{x_s} + 2(\widehat{V}_s)_{x_s} - G(V_s)_{x_s}\right) -$$

$$- \tau\eta\frac{2\Phi_{\mathrm{avg}_s}}{h_s}\widehat{G}_{x_s},$$

$s=1,\ \ldots,\ d.$

Преобразуем правую часть (6):

$$F^{-}_{0,\,s}(G,\,V_1,\,\ldots,\,V_d)=$$
$$=\frac{G^{n+1}_m-G^n_m}{\tau}+\frac{1}{2}\left(\frac{(V_s)^n_{m+1_s}G^{n+1}_{m+1_s}-(V_s)^n_mG^{n+1}_m}{h_s}+2\frac{(V_s)^{n+1}_{m+1_s}-(V_s)^{n+1}_m}{h_s}-G^n_m\frac{(V_s)^n_{m+1_s}-(V_s)^n_m}{h_s}\right)-$$
$$-\tau\eta\frac{\Phi^n_m+\Phi^n_{m+1_s}}{h_s}\cdot\frac{G^{n+1}_{m+1_s}-G^{n+1}_m}{h_s};$$

$$F^{-}_{0,\,s}(G,\,V_1,\,\ldots,\,V_d)=$$
$$=\left(\frac{1}{\tau}-\frac{(V_s)^n_m}{2h_s}+\tau\eta\frac{\Phi^n_m+\Phi^n_{m+1_s}}{h_s^2}\right)G^{n+1}_m+$$
$$+\left(\frac{(V_s)^n_{m+1_s}}{2h_s}-\tau\eta\frac{\Phi^n_m+\Phi^n_{m+1_s}}{h_s^2}\right)G^{n+1}_{m+1_s}+$$
$$+\left(-\frac{1}{h_s}\right)(V_s)^{n+1}_m+$$
$$+\left(\frac{1}{h_s}\right)(V_s)^{n+1}_{m+1_s}-$$
$$-\left(\frac{G^n_m}{\tau}+G^n_m\frac{(V_s)^n_{m+1_s}-(V_s)^n_m}{2h_s}\right).$$

3.2.3 Третье уравнение

Рассмотрим уравнение (7):

$$F^{+}_{0,\,s}(G,\,V_1,\,\ldots,\,V_d)=$$
$$=G_t+\frac{1}{2}\Big((V_s\widehat{G})_{\overline{x}_s}+2(\widehat{V}_s)_{\overline{x}_s}-G(V_s)_{\overline{x}_s}\Big)+$$
$$+\tau\eta\frac{2\Phi_{\overline{\mathrm{avg}}_s}}{h_s}\widehat{G}_{\overline{x}_s},$$

$s=1,\ \ldots,\ d.$

Преобразуем правую часть (7):

$$F^{+}_{0,\,s}(G,\,V_1,\,\ldots,\,V_d)=$$
$$=\frac{G^{n+1}_m-G^n_m}{\tau}+\frac{1}{2}\left(\frac{(V_s)^n_mG^{n+1}_m-(V_s)^n_{m-1_s}G^{n+1}_{m-1_s}}{h_s}+2\frac{(V_s)^{n+1}_m-(V_s)^{n+1}_{m-1_s}}{h_s}-G^n_m\frac{(V_s)^n_m-(V_s)^n_{m-1_s}}{h_s}\right)+$$
$$+\tau\eta\frac{\Phi^n_m+\Phi^n_{m-1_s}}{h_s}\cdot\frac{G^{n+1}_m-G^{n+1}_{m-1_s}}{h_s};$$

$$F^{+}_{0,\,s}(G,\,V_1,\,\ldots,\,V_d)=$$
$$=\left(\frac{1}{\tau}+\frac{(V_s)^n_m}{2h_s}+\tau\eta\frac{\Phi^n_m+\Phi^n_{m-1_s}}{h_s^2}\right)G^{n+1}_m+$$
$$+\left(-\frac{(V_s)^n_{m-1_s}}{2h_s}-\tau\eta\frac{\Phi^n_m+\Phi^n_{m-1_s}}{h_s^2}\right)G^{n+1}_{m-1_s}+$$
$$+\left(\frac{1}{h_s}\right)(V_s)^{n+1}_m+$$

$$+\left(-\frac{1}{h_s}\right)(V_s)^{n+1}_{m-1_s}-$$

$$-\left(\frac{G^n_m}{\tau}+G^n_m\frac{(V_s)^n_m-(V_s)^n_{m-1_s}}{2h_s}\right).$$

3.2.4 Четвертое уравнение

Рассмотрим уравнение (8):

$$F_s(G,V_1,\ldots,V_d)=$$
$$=(V_s)_t+\frac{1}{3}\big(V_s(\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_s}+(V_s\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_s}\big)+\frac{1}{2}\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\big(V_i(\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_i}+(V_i\widehat{V}_s)_{\mathring{x}_i}-V_s(V_i)_{\mathring{x}_i}\big)+p_\rho(e^G)\widehat{G}_{\mathring{x}_s}-$$
$$-\widetilde{\mu}\left(\frac{4}{3}(\widehat{V}_s)_{x_s\bar{x}_s}+\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}(\widehat{V}_s)_{x_i\bar{x}_i}\right)+(\widetilde{\mu}-\mu e^{-G})\cdot\left(\frac{4}{3}(V_s)_{x_s\bar{x}_s}+\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}(V_s)_{x_i\bar{x}_i}\right)-\frac{1}{3}\mu e^{-G}\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}(V_i)_{\mathring{x}_s\mathring{x}_i},$$

$s=1,\ldots,d$.

Преобразуем правую часть (8):

$$F_s(G,V_1,\ldots,V_d)=$$
$$=\frac{(V_s)^{n+1}_m-(V_s)^n_m}{\tau}+$$
$$+\frac{1}{3}\left((V_s)^n_m\frac{(V_s)^{n+1}_{m+1_s}-(V_s)^{n+1}_{m-1_s}}{2h_s}+\frac{(V_s)^n_{m+1_s}(V_s)^{n+1}_{m+1_s}-(V_s)^n_{m-1_s}(V_s)^{n+1}_{m-1_s}}{2h_s}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\left((V_i)^n_m\frac{(V_s)^{n+1}_{m+1_i}-(V_s)^{n+1}_{m-1_i}}{2h_i}+\frac{(V_i)^n_{m+1_i}(V_s)^{n+1}_{m+1_i}-(V_i)^n_{m-1_i}(V_s)^{n+1}_{m-1_i}}{2h_i}-\right.$$
$$\left.-(V_s)^n_m\frac{(V_i)^n_{m+1_i}-(V_i)^n_{m-1_i}}{2h_i}\right)+$$
$$+p_\rho(\exp(G^n_m))\cdot\frac{G^{n+1}_{m+1_s}-G^{n+1}_{m-1_s}}{2h_s}-$$
$$-\widetilde{\mu}^n\left(\frac{4}{3}\frac{(V_s)^{n+1}_{m+1_s}-2(V_s)^{n+1}_m+(V_s)^{n+1}_{m-1_s}}{h_s^2}+\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\frac{(V_s)^{n+1}_{m+1_i}-2(V_s)^{n+1}_m+(V_s)^{n+1}_{m-1_i}}{h_i^2}\right)+$$
$$+(\widetilde{\mu}^n-\mu\exp(-G^n_m))\cdot\left(\frac{4}{3}\frac{(V_s)^n_{m+1_s}-2(V_s)^n_m+(V_s)^n_{m-1_s}}{h_s^2}+\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\frac{(V_s)^n_{m+1_i}-2(V_s)^n_m+(V_s)^n_{m-1_i}}{h_i^2}\right)-$$
$$-\frac{1}{3}\mu\exp(-G^n_m)\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\frac{(V_i)^n_{m+1_s+1_i}-(V_i)^n_{m+1_s-1_i}-(V_i)^n_{m-1_s+1_i}+(V_i)^n_{m-1_s-1_i}}{4h_sh_i};$$

$$F_s(G,V_1,\ldots,V_d)=$$
$$=\left(-\frac{p_\rho(\exp(G^n_m))}{2h_s}\right)G^{n+1}_{m-1_s}+$$
$$+\left(\frac{p_\rho(\exp(G^n_m))}{2h_s}\right)G^{n+1}_{m+1_s}+$$
$$+\left(\frac{1}{\tau}+\frac{8\widetilde{\mu}^n}{3h_s^2}+\sum_{i=1,\,i\neq s}^{d}\frac{2\widetilde{\mu}^n}{h_i^2}\right)(V_s)^{n+1}_m+$$
$$+\left(-\frac{(V_s)^n_m+(V_s)^n_{m-1_s}}{6h_s}-\frac{4\widetilde{\mu}^n}{3h_s^2}\right)(V_s)^{n+1}_{m-1_s}+$$

$$+\sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}\left(-\frac{(V_i)^n_m+(V_i)^n_{m-1_i}}{4h_i}-\frac{\widetilde{\mu}^n}{h_i^2}\right)(V_s)^{n+1}_{m-1_i}+$$
$$+\left(\frac{(V_s)^n_m+(V_s)^n_{m+1_s}}{6h_s}-\frac{4\widetilde{\mu}^n}{3h_s^2}\right)(V_s)^{n+1}_{m+1_s}+$$
$$+\sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}\left(\frac{(V_i)^n_m+(V_i)^n_{m+1_i}}{4h_i}-\frac{\widetilde{\mu}^n}{h_i^2}\right)(V_s)^{n+1}_{m+1_i}-$$
$$-\left(\frac{(V_s)^n_m}{\tau}+\sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}(V_s)^n_m\frac{(V_i)^n_{m+1_i}-(V_i)^n_{m-1_i}}{4h_i}-\right.$$
$$-(\widetilde{\mu}^n-\mu\exp(-G^n_m))\cdot\left(\frac{4}{3}\frac{(V_s)^n_{m+1_s}-2(V_s)^n_m+(V_s)^n_{m-1_s}}{h_s^2}+\sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}\frac{(V_s)^n_{m+1_i}-2(V_s)^n_m+(V_s)^n_{m-1_i}}{h_i^2}\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{3}\mu\exp(-G^n_m)\sum_{i=1,\, i\neq s}^{d}\frac{(V_i)^n_{m+1_s+1_i}-(V_i)^n_{m+1_s-1_i}-(V_i)^n_{m-1_s+1_i}+(V_i)^n_{m-1_s-1_i}}{4h_sh_i}\right).$$

3.2.5 Пятое уравнение

$$\widehat{V}_s=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (V_s)^{n+1}_m=0.$$

4 Программная реалзиация

4.1 Особенности схемы

На момент написания данного раздела предыдущие разделы уже были сформированы и вносить в них изменения не виделось автору хорошей идеей.

Уравнения 2 и 3 были получены из уравнения 1 заменой части разностей с центральных на односторонние (выбирались те разности, которые возможно было бы взять), а часть слагаемых, в силу уравнения 5 исчела. В результате чего и получилось так, что суммы, которые брались по i вдруг стали состоять из одного единственного слагаемого.

4.2 Особенности реализации схемы

Уравнения $F^-_{0,s}(G, V_1, \ldots, V_d)=f_0$ и $F^+_{0,s}(G, V_1, \ldots, V_d)=f_0$ можно заменить на одно уравнение, добавив дополнительную переменную: пусть $\delta\in\{-1, +1\}$ – сдвиг. Если

$$F_{0,s}(G, V_1, \ldots, V_d, \delta)=$$
$$=\left(\frac{1}{\tau}+\delta\frac{(V_s)^n_m}{2h_s}+\tau\eta\frac{\Phi^n_m+\Phi^n_{m-\delta_s}}{h_s^2}\right)G^{n+1}_m+$$
$$+\left(-\delta\frac{(V_s)^n_{m-\delta_s}}{2h_s}-\tau\eta\frac{\Phi^n_m+\Phi^n_{m-\delta_s}}{h_s^2}\right)G^{n+1}_{m-\delta_s}+$$
$$+\left(\frac{\delta}{h_s}\right)(V_s)^{n+1}_m+$$
$$+\left(-\frac{\delta}{h_s}\right)(V_s)^{n+1}_{m-\delta_s}-$$
$$-\left(\frac{G^n_m}{\tau}+\delta G^n_m\frac{(V_s)^n_m-(V_s)^n_{m-\delta_s}}{2h_s}\right),$$

то $F^{\pm}_{0,s}(G, V_1, \ldots, V_d)=F_{0,s}(G, V_1, \ldots, V_d, \pm1)$.

Рассмотрим теперь рабра и вершины области — точки, где граница достигается минимум по двум направлениям. Уравнения в таких точках, в силу равенства $\widehat{V}_s = 0$, становятся еще проще: $G_t = f_s$.

Таким образом, узлы разбиваются на 3 типа: внтрунние, гранчные и вершинные узлы. Для уравнения на скорости последние два неразличимы.

4.3 Особенности реализации программы

Система (4) является линейной относительно переменных G^{n+1}, $(V_s)^{n+1}$, $s = 1, \ldots, d$ с разреженной матрицей коэффициентов и, следовательно, может быть эффективно решена с помощью какого-либо итерационного алгоритма. В качестве же начального приближения можно взять значения на n-ом слое.

Для использования итерационных методов решения разреженных линейных систем матрицы чтоит делать ближе к диагональной. Для этого необходимо упорядочить уравнения системы (4). Зададим сперва на сетке ω_h порядок: нулевым узлом будем считать узел, имеющий наименьшие значения всех пространственных координат; далее последовательно выбираются узлы, у которых в первую очередь увеличивается первая координата, потом вторая и т.д., причем при изменении s-ой координаты, $s = 2, \ldots, d$, координаты $1, \ldots, s-1$ принимают наименьшее возможное значение. Пронумеровав все узлы, обозначим $z = (\widehat{G}_0, (\widehat{V}_1)_0, (\widehat{V}_2)_0, \ldots, (\widehat{V}_d)_0, \widehat{G}_1, (\widehat{V}_1)_1, (\widehat{V}_2)_1, \ldots, (\widehat{V}_d)_1, \ldots)^T$.

В системе (4) первые 3 уравнения служат для приближения первого равенства (1), а 4ое для приближения второго. Будем говорить, что первые 3 уравнения системы (4) являются уравнениями первого типа, а последние 2 уравнения второго типа с номером s, $s = 1, \ldots, d$. Переупорядочим уравнения так, чтобы уравнения с номером $(d+1)k$ и $(d+1)k+s$ являлись уравнениями первого и второго с параметром s типов соответственно для k-ой точки. В результате получится система $Az = b$ с почти $d+1$ диагональной матрицей A.

Для решения системы будем использовать стабилизированный метода бисопряжённых градиентов с предобусловливателем ILU(0), описание которых можно найти, например, в [2].

4.4 Особенности параллельной реализации программы

Параллельная реализация предобусловливателя, векторых и матричных операций не дали значительный прирост к времени работы программы. Связано это с тем, что большая часть времени уходит на заполнение матрицы и вектора правой части. Однако, стоит отметить, что параллелизм очень хорошо сказался на предобусловливателе, векторых и матричных операциях.

5 Отладочный тест

5.1 Постановка задачи

Рассмотрим случай $d = 2$, $\Omega_t = [0; 1]$, $\Omega_x = [0; 1] \times [0; 1]$. Зададим функции

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho}(t, x_1, x_2) &= (\cos(2\pi x_1) + 1.5)(\sin(2\pi x_2) + 1.5)\exp(t);\\
\widetilde{u}_2(t, x_1, x_2) &= \sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)\exp(t);\\
\widetilde{u}_2(t, x_1, x_2) &= \sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)\exp(-t);
\end{aligned}$$

Определим функции $\widetilde{f}_0$, $\widetilde{f}_1$, $\widetilde{f}_2$ так, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial\widetilde{\rho}\widetilde{u}_i}{\partial x_i} = \widetilde{\rho}\widetilde{f}_0;\\
\dfrac{\partial\widetilde{\rho}\widetilde{u}_s}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial\widetilde{\rho}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_s}{\partial x_i} + \dfrac{\partial p}{\partial x_s} = \mu\Big(\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial^2\widetilde{u}_s}{\partial x_i^2} + \dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial^2\widetilde{u}_i}{\partial x_s\partial x_i}\Big) + \widetilde{\rho}\widetilde{f}_s, \quad s = 1, 2.
\end{cases}$$

6 Таблицы ошибок

C, L_2 и W_2 нормы соответственно.

6.1 $\mu = 0.1, C = 1$

Таблица для G.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0500000	4.482617e-01 6.383184e-02 7.043255e-02	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0250000	2.472146e-01 3.409804e-02 3.803945e-02	2.495943e-01 3.448000e-02 3.751847e-02	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0125000	1.580101e-01 1.958363e-02 2.076929e-02	1.403144e-01 1.804822e-02 1.966865e-02	1.337255e-01 1.807367e-02 1.942134e-02	NaN NaN NaN
0.0062500	1.076015e-01 1.158110e-02 1.256558e-02	7.175910e-02 9.393308e-03 1.042025e-02	7.231800e-02 8.899933e-03 1.012728e-02	6.908043e-02 8.774750e-03 9.885382e-03
0.0031250	8.008650e-02 8.621163e-03 8.907236e-03	4.123032e-02 5.053052e-03 5.520194e-03	3.766751e-02 4.634440e-03 5.153051e-03	3.592457e-03 4.625282e-03 4.965253e-03
0.0015625	6.626060e-02 7.340508e-03 8.041118e-03	2.625566e-02 2.909929e-03 3.239691e-03	1.891171e-02 2.367424e-03 2.587931e-03	1.903686e-02 2.355307e-03 2.673878e-03

Таблица для V_1.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0500000	8.999009e-02 1.399529e-02 1.633003e-02	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0250000	4.944543e-02 7.390599e-03 8.287089e-03	4.824906e-02 7.159076e-03 7.992585e-03	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0125000	2.827896e-02 4.064127e-03 4.335486e-03	2.274705e-02 3.673393e-03 4.234477e-03	2.463924e-02 3.617666e-03 4.137350e-03	NaN NaN NaN
0.0062500	1.700476e-02 2.471345e-03 2.672445e-03	1.312914e-02 1.872861e-03 2.118845e-03	1.207071e-02 1.821878e-03 2.065799e-03	1.274534e-02 1.925126e-03 2.039209e-03
0.0031250	1.153141e-02 1.818508e-03 2.047199e-03	7.230558e-03 9.901299e-04 1.068712e-03	6.670095e-03 9.469786e-04 1.013110e-03	6.167628e-03 9.603860e-04 1.009190e-03
0.0015625	9.747216e-03 1.706124e-03 1.906714e-03	4.062450e-03 6.132697e-04 6.866265e-04	3.346889e-03 4.605327e-04 5.172722e-04	3.286874e-03 4.502363e-04 5.148565e-04

Таблица для V_2.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0500000	3.142132e-02 5.958661e-03 6.555378e-03	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0250000	1.701745e-02 3.143274e-03 3.606364e-03	1.688051e-02 3.417541e-03 3.657010e-03	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0125000	9.876573e-03 1.686967e-03 1.793017e-03	9.377121e-03 1.715500e-03 1.946781e-03	9.069327e-03 1.759619e-03 1.861157e-03	NaN NaN NaN
0.0062500	5.662700e-03 9.345932e-04 1.024769e-03	4.781025e-03 8.932582e-04 9.188853e-04	4.600605e-03 8.590230e-04 9.525336e-04	4.633240e-03 9.060256e-04 9.885460e-04
0.0031250	4.167334e-03 7.012625e-04 7.433868e-04	2.626844e-03 4.381523e-04 4.665895e-04	2.364410e-03 4.578924e-04 5.105645e-04	2.400256e-03 4.488578e-04 5.046092e-04
0.0015625	3.720306e-03 5.997879e-04 7.093528e-04	1.582459e-03 2.480354e-04 2.550212e-04	1.287314e-03 2.171915e-04 2.466425e-04	1.174618e-03 2.277401e-04 2.481845e-04

6.2 $\mu = 0.01, C = 1$

Таблица для G.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0250000	5.704045e-01 4.576529e-02 5.001876e-02	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0125000	4.361256e-01 2.461811e-02 2.796217e-02	3.245672e-01 2.206281e-02 2.446337e-02	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0062500	2.284346e-01 1.695114e-02 1.818494e-02	1.814249e-01 1.139044e-02 1.183363e-02	1.781777e-01 1.126548e-02 1.184268e-02	NaN NaN NaN
0.0031250	1.538708e-01 1.330933e-02 1.398028e-02	9.662915e-02 6.153489e-03 6.669465e-03	8.650345e-02 5.475710e-03 6.091467e-03	8.298890e-02 5.249146e-03 6.160562e-03
0.0015625	1.384770e-01 1.297493e-02 1.397680e-02	4.769869e-02 3.819158e-03 4.365953e-03	4.218015e-02 2.805642e-03 3.184885e-03	4.292776e-02 2.724375e-03 3.010823e-04

Таблица для V_1.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0250000	1.574315e-01 1.488487e-02 1.715432e-02	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0125000	8.596491e-02 8.493476e-03 9.503936e-03	7.427562e-02 7.664623e-03 8.030954e-03	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0062500	4.610011e-02 5.140924e-03 5.706883e-03	4.011474e-02 3.723153e-04 4.286078e-03	3.963280e-02 3.851547e-03 4.067230e-03	NaN NaN NaN
0.0031250	2.861884e-02 4.061443e-04 4.542200e-03	2.131346e-02 2.119743e-03 2.290072e-03	1.989980e-02 1.906876e-03 2.112616e-03	1.981068e-02 2.140683e-03 2.015946e-03
0.0015625	3.447494e-02 4.313979e-03 4.195181e-03	1.092496e-02 1.271825e-03 1.467415e-03	9.794785e-03 9.667033e-04 1.040100e-03	1.032803e-02 9.108287e-04 1.000033e-03

Таблица для V_2.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0250000	5.331323e-02 6.818936e-03 6.768773e-03	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0125000	2.928174e-02 3.653824e-03 3.758897e-03	2.850887e-02 3.645285e-03 3.789490e-04	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0062500	1.874188e-02 2.173547e-03 2.490404e-03	1.467524e-02 1.785325e-03 1.981065e-03	1.485738e-02 1.959472e-03 2.087443e-03	NaN NaN NaN
0.0031250	2.016624e-02 1.939377e-03 2.145895e-03	8.136315e-03 9.405169e-04 1.015001e-03	7.592297e-03 9.099835e-04 9.989750e-04	8.089271e-03 9.191887e-04 1.086301e-03
0.0015625	2.325658e-03 1.885579e-03 2.273633e-03	4.344691e-03 5.224014e-04 5.856468e-04	3.996205e-04 4.631010e-04 4.896936e-04	3.882547e-02 4.786033e-04 5.372300e-04

6.3 $\mu = 0.001, C = 1$

Таблица для G.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0250000	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0125000	1.672136e+00 7.539109e-02 7.995510e-02	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0062500	5.423829e-01 3.986095e-02 4.578278e-02	7.508658e-01 2.383993e-02 2.637653e-02	2.528081e+00 1.014629e-01 1.156408e-01	NaN NaN NaN
0.0031250	7.633045e-01 3.360944e-02 3.848526e-02	3.062194e-01 1.324792e-02 1.367280e-02	2.608487e-01 7.942716e-03 9.034159e-03	4.845622e-01 9.802728e-03 1.047662e-02
0.0015625	9.179885e-01 3.793815e-02 4.246856e-02	1.494132e-01 8.024104e-03 9.302050e-03	1.462905e-01 4.124584e-03 4.781897e-03	1.033737e-01 3.949808e-04 4.261782e-03

Таблица для V_1.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0250000	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0125000	6.140321e-01 2.171386e-02 2.125803e-02	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0062500	2.953409e-01 1.401910e-02 1.545952e-02	2.002819e-01 6.097723e-03 6.782334e-03	4.988105e-01 1.154022e-02 1.314003e-02	NaN NaN NaN
0.0031250	3.965237e-01 1.427229e-02 1.601933e-02	7.188423e-02 3.381587e-03 3.810086e-03	5.615562e-02 2.579925e-03 2.676709e-03	5.842451e-02 2.542173e-03 2.709279e-03
0.0015625	5.761257e-01 1.627425e-02 1.782656e-02	3.686363e-02 2.246079e-03 2.364163e-03	3.392110e-02 1.308220e-03 1.443221e-03	2.953018e-02 1.267860e-03 1.377610e-03

Таблица для V_2.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0250000	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0125000	1.360934e-01 9.880309e-03 1.135991e-02	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0062500	7.636247e-02 7.716651e-03 8.253407e-03	4.168968e-02 2.916886e-03 3.149599e-03	3.928444e-01 1.101047e-02 1.212912e-02	NaN NaN NaN
0.0031250	9.895490e-02 8.387291e-03 9.250723e-03	2.252184e-02 1.626586e-03 1.846045e-03	1.465716e-02 1.291201e-03 1.400078e-03	6.104416e-02 1.503596e-03 1.696563e-03
0.0015625	1.276964e-01 9.084975e-03 1.053935e-02	1.619970e-02 1.126007e-03 1.218537e-03	6.390871e-03 6.351960e-04 7.101450e-04	7.007016e-03 6.884207e-04 7.390172e-04

6.4 $\mu = 0.1$, $C = 10$

Таблица для G.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0125000	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0062500	1.874715e-02 3.608665e-03 4.072510e-03	1.051961e-02 1.844288e-03 2.116219e-03	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0031250	1.698609e-02 3.590890e-03 3.778797e-03	6.645753e-03 1.177473e-03 1.359556e-03	4.895249e-03 8.529376e-04 1.223514e-03	NaN NaN NaN
0.0015625	1.524378e-02 3.474286e-03 3.757007e-03	4.861851e-03 9.314107e-04 1.003840e-03	2.563604e-03 4.683328e-04 5.170292e-04	2.311220e-03 4.500432e-04 4.916998e-04
0.0007813	1.573627e-02 3.212142e-03 3.725843e-03	2.096931e-03 8.487659e-04 9.506243e-04	1.588797e-03 2.967454e-04 3.316191e-04	1.189472e-03 2.171043e-04 2.941728e-04

Таблица для V_1.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0125000	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0062500	7.257440e-03 1.456717e-03 1.599121e-03	7.105558e-03 1.505073e-03 1.637334e-03	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0031250	5.157404e-03 1.190523e-03 1.352592e-03	3.075192e-03 7.159011e-04 8.293475e-04	3.789800e-03 7.739085e-04 8.546945e-04	NaN NaN NaN
0.0015625	5.864451e-03 1.235843e-03 1.384431e-03	1.739515e-03 3.785559e-04 4.181294e-04	1.723574e-03 3.876090e-04 4.117309e-04	1.877054e-03 4.259352e-04 4.407451e-04
0.0007813	5.371419e-03 1.284005e-03 1.313671e-03	1.306861e-03 2.998492e-04 3.196224e-04	7.456244e-04 1.793777e-04 2.080109e-04	9.657265e-04 1.992061e-04 2.168908e-04

Таблица для V_2.

$\tau \backslash h$	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**	**0.00250**
0.0125000	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0062500	7.930538e-03 1.267341e-03 1.414010e-03	6.392669e-03 1.425988e-03 1.508873e-03	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0031250	4.055697e-03 7.381759e-04 8.243619e-04	3.077202e-03 6.630413e-04 7.655949e-04	3.295431e-03 7.516160e-04 7.761238e-04	NaN NaN NaN
0.0015625	3.929944e-03 6.606108e-04 7.224142e-04	1.410585e-03 3.258579e-04 3.456782e-04	1.613027e-03 3.565195e-04 3.831521e-04	1.725845e-03 3.747684e-04 3.990591e-04
0.0007813	3.341227e-03 5.928863e-04 7.014604e-04	1.036646e-03 1.856177e-04 2.155439e-04	7.826051e-04 1.749224e-04 1.814019e-04	8.698114e-04 1.836526e-04 1.969246e-04

6.5 $\mu = 0.01, C = 10$

Таблица для G.

$\tau \backslash h$	**0.05000**	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**
0.0125000	9.511684e-02	NaN	NaN	NaN
	1.635478e-02	NaN	NaN	NaN
	1.830059e-02	NaN	NaN	NaN
0.0062500	8.568521e-02	2.443923e-02	NaN	NaN
	1.611803e-02	4.034803e-03	NaN	NaN
	1.838759e-02	4.456690e-03	NaN	NaN
0.0031250	8.536886e-02	2.312920e-02	NaN	NaN
	1.599702e-02	4.187899e-03	NaN	NaN
	1.786157e-02	4.378687e-03	NaN	NaN
0.0015625	8.549353e-02	2.244814e-02	5.833334e-03	3.456733e-03
	1.663654e-02	4.086817e-03	9.951673e-04	5.094843e-04
	1.767401e-02	4.314045e-03	1.117242e-03	5.385788e-04

Таблица для V_1.

$\tau \backslash h$	**0.05000**	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**
0.0125000	1.021899e-01	NaN	NaN	NaN
	8.767060e-03	NaN	NaN	NaN
	1.011765e-02	NaN	NaN	NaN
0.0062500	1.261398e-01	1.903112e-02	NaN	NaN
	9.723646e-03	2.604519e-03	NaN	NaN
	1.121349e-02	2.771257e-03	NaN	NaN
0.0031250	1.211471e-01	2.521494e-02	NaN	NaN
	9.393705e-03	2.232792e-03	NaN	NaN
	1.043654e-02	2.486916e-03	NaN	NaN
0.0015625	1.124197e-01	2.940081e-02	5.042925e-03	7.128457e-03
	9.315016e-03	2.493895e-03	6.717042e-04	6.506027e-04
	1.018920e-02	2.612472e-03	6.863251e-04	7.306592e-04

Таблица для V_2.

$\tau \backslash h$	**0.05000**	**0.02000**	**0.01000**	**0.00500**
0.0125000	7.511792e-02 7.069170e-03 7.430210e-03	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0062500	9.498717e-02 7.214421e-03 8.021224e-03	1.681003e-03 1.723373e-03 2.459307e-03	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0031250	9.199538e-02 7.471182e-03 7.683472e-03	1.958646e-02 1.746156e-03 1.825076e-03	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0015625	9.319058e-02 7.126162e-03 7.915663e-03	2.377601e-02 1.780171e-03 1.998835e-03	4.081405e-04 5.523785e-04 6.160825e-04	4.540238e-03 6.140123e-04 6.381413e-04

6.6 $\mu = 0.001, C = 10$

Таблица для G.

$\tau \backslash h$	**0.02500**	**0.01250**	**0.00625**
0.0250000	2.544238e-02 7.468579e-03 5.919801e-01	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0031250	2.850979e-02 7.206810e-03 6.193139e-01	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0015625	2.290198e-02 6.957825e-03 5.518427e-01	7.187401e-01 3.797189e-01 5.355423e+00	NaN NaN NaN
0.0010000	2.339235e-02 7.468003e-03 5.594696e-01	4.596623e-03 1.476061e-03 1.724560e-01	NaN NaN NaN

Таблица для V_1.

$\tau \backslash h$	**0.02500**	**0.01250**	**0.00625**
0.0250000	1.265563e-01 2.843705e-02 7.903451e-01	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0031250	1.158799e-01 3.042546e-02 9.526116e-01	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0015625	1.281257e-01 3.047280e-02 7.758914e-01	1.964071e+01 4.691116e-01 8.211157e+01	NaN NaN NaN
0.0010000	1.303206e-01 3.079494e-02 8.240791e-01	2.068710e-02 4.305284e-03 1.810195e-01	NaN NaN NaN

Таблица для V_2.

$\tau \backslash h$	**0.02500**	**0.01250**	**0.00625**
0.0250000	1.173631e-01 2.779022e-02 1.030974e+00	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0031250	1.303210e-01 2.631050e-02 1.133984e+00	NaN NaN NaN	NaN NaN NaN
0.0015625	1.220188e-01 2.760888e-02 1.057952e+00	1.544918e+00 8.411530e-02 1.208130e+01	NaN NaN NaN
0.0010000	1.180814e-01 2.800510e-02 1.014208e+00	1.354441e-02 3.400246e-03 1.555645e-01	NaN NaN NaN

Список литературы

[1] *Попов А. В.* Численное моделирование нестационарного течения газа с использованием неявных разностных схем.

[2] *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems, SIAM, 2ed., 2003.