

Московский Государственный Университет  
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Численное решение одномерного уравнения  
Навье-Стокса с использованием схемы с  
центральными разностями  
Плотность-Скорость (параллельная)

Бушуева Наталья Сергеевна, 410 группа

Декабрь 2019

## 1. Постановка задачи.

Приведем систему уравнений, описывающую нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f \\ p = p(\rho) \end{cases}$$

Через  $\mu$  обозначен коэффициент вязкости газа, которую будем считать известной неотрицательной константой ( $\mu = 0.1$ ). Известные функции: плотность  $\rho$  и скорость  $u$  являются функциями переменных Эйлера  $(t, x) \in [0, T] \times [0, X]$ . В уравнения также входят две известные функции: давление газа  $p = C\rho$  и вектор внешних сил  $f$ , являющейся функцией переменных Эйлера.

В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка  $[0, X]$ :

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), x \in [0, X].$$

Простейшими граничными условиями являются условия непротекания:

$$u(t, 0) = u(t, X) = 0, t \in [0, T].$$

## 2. Описание схемы

Для поиска численного решения задачи можно использовать разностную схему, в которой при аппроксимации используются центральные разности, а системы уравнений решаются параллельно методом "прогонки".

$$\begin{cases} H_{t,0} + 0.5((V \hat{H})_{x,0} + H_0 V x, 0) - 0.5h((HV)_{x,\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x,\bar{x},2} + H_0(V_{x,\bar{x},1} - 0.5V_{x,\bar{x},2})) = 0 \\ H_t + 0.5(V \hat{H}_x^0 + (V \hat{H})_x^0 + HVx^0) = 0, x \in \omega_h \\ H_{t,M} + 0.5((V \hat{H})_{\bar{x},M} + H_M V_{\bar{x},M}) + 0.5h((HV)_{x,\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x,\bar{x},M-2} + \\ + H_M(V_{x,\bar{x},M-1} - 0.5V_{x,\bar{x},M-2})) = 0 \\ V_t + \frac{1}{3}(V \hat{V}_x^0 + (V \hat{V})_x^0) + \frac{p(H)_x^0}{H} = \tilde{\mu} \hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H})V_{x\bar{x}} + f, x \in \omega_h \end{cases}$$

Под  $\omega_h$  понимаются внутренние узлы отрезка  $[0, X]$ , а  $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$

### 3. Координатная запись уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{H_0^{n+1} - H_0^n}{t} + \frac{1}{2} \left( \frac{V_1^n H_1^{n+1} - V_0^n H_0^{n+1}}{h} + H_0^n \frac{V_1^n - V_0^n}{h} \right) - \\ & - \frac{h}{2} \left( \frac{H_2^n V_2^n - 2H_1^n V_1^n + H_0^n V_0^n}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{H_3^n V_3^n - 2H_2^n V_2^n + H_1^n V_1^n}{h^2} + H_0^n \left( \frac{V_2^n - 2V_1^n + V_0^n}{h^2} - \frac{V_3^n - 2V_2^n + V_1^n}{2h^2} \right) \right) = 0 \\ & \frac{H_m^{n+1} - H_m^n}{t} + \frac{1}{2} \left( V_m^n \frac{H_{m+1}^{n+1} - H_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V_{m+1}^n H_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^n H_{m-1}^{n+1}}{2h} + H_m^n \frac{V_{m+1}^n - V_{m-1}^n}{2h} \right) = 0 \\ & \frac{H_M^{n+1} - H_M^n}{t} + \frac{1}{2} \left( \frac{V_M^n H_M^{n+1} - V_{M-1}^n H_{M-1}^{n+1}}{h} + H_M^n \frac{V_M^n - V_{M-1}^n}{h} \right) + \frac{h}{2} \left( \frac{H_M^n V_M^n - 2H_{M-1}^n V_{M-1}^n + H_{M-2}^n V_{M-2}^n}{h^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{H_{M-1}^n V_{M-1}^n - 2H_{M-2}^n V_{M-2}^n + H_{M-3}^n V_{M-3}^n}{h^2} + H_M^n \left( \frac{V_M^n - 2V_{M-1}^n + V_{M-2}^n}{h^2} - \frac{V_{M-1}^n - 2V_{M-2}^n + V_{M-3}^n}{2h^2} \right) \right) = 0 \\ & \frac{V_m^{n+1} - V_m^n}{t} + \frac{1}{3} \left( V_m^n \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V_{m+1}^n V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^n V_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) + \frac{p(H_{m+1}^n) - p(H_{m-1}^n)}{2h H_m^n} = \\ & = \max_m \frac{\mu}{H_m^n} \frac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{h^2} - \left( \max_m \frac{\mu}{H_m^n} - \frac{\mu}{H_m^n} \right) \frac{V_{m+1}^n - 2V_m^n + V_{m-1}^n}{h^2} + f \end{aligned} \right.$$

Выделив коэффициенты при  $H_m^{n+1}$  из первых трех уравнений системы, получим трехдиагональную матрицу. Решим её методом "прогонки" который является урезанным методом Гаусса, учитывающим строение матрицы.

После этого выделим из четвертого уравнения системы коэффициенты при  $V_m^{n+1}$ . Снова получим трехдиагональную матрицу. Решаем её методом прогонки и переходим к следующему  $n + 2$ -му шагу алгоритма.

### 4. Заполнение матриц.

Напишем в явном виде формулы заполнения трехдиагональных матриц плотности и скорости.

#### 4.1. Матрица плотности.

Преобразуем некраевой случай для плотности (второе уравнение):

$$H_{m-1}^{n+1} \underbrace{\left[ -\frac{V_{m-1}^n + V_m^n}{4h} \right]}_{a_{m,m-1}} + H_m^{n+1} \underbrace{\left[ \frac{1}{t} \right]}_{a_{m,m}} + H_{m+1}^{n+1} \underbrace{\left[ \frac{V_m^n + V_{m+1}^n}{4h} \right]}_{a_{m,m+1}} = \underbrace{-H_m^n \left( \frac{V_{m+1}^n - V_{m-1}^n}{4h} \right) + \frac{H_m^n}{t}}_{b_m}$$

Здесь  $A$  - это искомая трехдиагональная матрица плотности.

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & \dots \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & a_{M,M-1} & a_{M,M} \end{pmatrix}$$

Будем хранить эту матрицу в виде трех векторов (по диагоналям).  
Заполнение матрицы плотности:

```

a[0+M+1]=1./t;

a[0]=V[i*(M+1)+1]/(2.0*h);

b[0]=-H[i*(M+1)+0]*V[i*(M+1)+1]/(2.0*h)+
(1/(2.0*h))*
(H[i*(M+1)+2]*V[i*(M+1)+2]-
2*H[i*(M+1)+1]*V[i*(M+1)+1]+
H[i*(M+1)+0]*V[i*(M+1)+0]-
0.5*(H[i*(M+1)+3]*V[i*(M+1)+3]-
2*H[i*(M+1)+2]*V[i*(M+1)+2]+
H[i*(M+1)+1]*V[i*(M+1)+1])+
H[i*(M+1)+0]*(V[i*(M+1)+2]-
2*V[i*(M+1)+1]+V[i*(M+1)+0]-
0.5*(V[i*(M+1)+3]-2*V[i*(M+1)+2]+
V[i*(M+1)+1])))+H[i*(M+1)+0]/t+f0(i,0,t,h);

for(int j=1;j<M;j++)
{
    a[j+2*(M+1)]=-(1./(4.*h))*(V[i*(M+1)+j-1]+
    V[i*(M+1)+j]);

    a[j+M+1]=1./t;

    a[j]=(1./(4.*h))*(V[i*(M+1)+j+1]+V[i*(M+1)+j]);

    b[j]=f0(i,j,t,h)-H[i*(M+1)+j]*(V[i*(M+1)+j+1]-
    V[i*(M+1)+j-1])/(4.*h)+H[i*(M+1)+j]/t;
}

a[M+2*(M+1)]=-0.5*V[i*(M+1)+M-1]/h;

a[M+(M+1)]=1./t+0.5*V[i*(M+1)+M]/h;

b[M]=H[i*(M+1)+M]/t-0.5*H[i*(M+1)+M]*
(V[i*(M+1)+M]-V[i*(M+1)+M-1])/h-
0.5*h*(H[i*(M+1)+M]*V[i*(M+1)+M]-
2.*H[i*(M+1)+M-1]*V[i*(M+1)+M-1]+
H[i*(M+1)+M-2]*V[i*(M+1)+M-2])/(h*h)-
0.5*(H[i*(M+1)+M-1]*V[i*(M+1)+M-1]-
2.*H[i*(M+1)+M-2]*V[i*(M+1)+M-2]+
H[i*(M+1)+M-3]*V[i*(M+1)+M-3])/(h*h)+
H[i*(M+1)+M]*(V[i*(M+1)+M]-2*V[i*(M+1)+M-1]+
V[i*(M+1)+M-2])/(h*h)-0.5*(V[i*(M+1)+M-1]-
2*V[i*(M+1)+M-2]+V[i*(M+1)+M-3])/(h*h))+f0(i,M,t,h);

```

И умножим уравнения на  $th$  с целью повышения точности при малых  $t$  и  $h$ .

## 4.2. Матрица скорости.

Далее заполняем матрицу скорости. Аналогично выражаем коэффициенты, но считаем  $a_{00} = a_{01} = a_{10} = a_{M,M-1} = a_{M,M} = a_{M-1,M} = 0$ . Получаем следующий фрагмент кода:

```
for(int j=1;j<M;j++)
{
    a[j+2*(M+1)] = -(V[i*(M+1)+j] + V[i*(M+1)+j-1]) / (6*h) -
    max / (h*h);

    a[j+M+1] = 1. / t + 2. * max / (h*h);

    a[j] = (V[i*(M+1)+j] + V[i*(M+1)+j+1]) / (6*h) - max / (h*h);

    b[j] = V[i*(M+1)+j] / t - (p(H[(i+1)*(M+1)+j+1]) -
    p(H[(i+1)*(M+1)+j-1])) / (2. * h * H[(i+1)*(M+1)+j]) -
    (max - mu / H[(i+1)*(M+1)+j]) * (V[i*(M+1)+j+1] -
    2 * V[i*(M+1)+j] + V[i*(M+1)+j-1]) / (h*h) + f(i, j, t, h, mu);
}
```

И умножим уравнения на  $th$  с целью повышения точности при малых  $t$  и  $h$ .

## 5. Расчет гладкого решения.

Зададим функции:

$$\tilde{\rho} = e^t \left( \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right), \quad \tilde{u} = \cos(2\pi t) \sin\left(\pi \frac{x^2}{100}\right)$$

Определим функции  $f_0$  и  $f$  так, чтобы они удовлетворяли системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial x} = f_0 \\ \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{\rho} f \\ p = p(\tilde{\rho}) \end{cases}$$

Проведя подстановку и соответствующие вычисления, найдем функции:

$$\begin{cases} f_0(t, x) = e^t \left( \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) + e^t \cos(2\pi t) \left( -\frac{\pi}{10} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) + \frac{\pi x}{50} \cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) \left( \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) \right) \\ f(t, x) = \left( -e^t \left( \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) 2\pi \sin(2\pi t) \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) + \frac{\pi t}{50} e^t \left( \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) (\cos(2\pi t))^2 \sin\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) \cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) - \right. \\ \left. - p\left(\frac{\pi}{10}\right) e^t \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) - \frac{\mu \pi}{50} \cos(2\pi t) \left( \cos\left(\frac{\pi x^2}{100}\right) - \frac{x^2 \pi}{50} \sin\left(\left(\frac{\pi x^2}{100}\right)\right) \right) \right) / \left( e^t \left( \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 1.5 \right) \right) \end{cases}$$

Таким образом, имеем дифференциальную задачу для системы с начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(0, x) = \cos(\frac{\pi x}{10}) + 1.5, x \in [0, 10] \\ \tilde{u}(0, x) = \sin(\pi \frac{x^2}{100}), x \in [0, 10] \\ \tilde{u}(t, 0) = \tilde{u}(t, 10) = 0, t \in [0, 1] \end{cases}$$

Она имеет гладкое точное решение в области  $[0, 1] \times [0, 10]$ .

Составим таблицы ошибок численного решения с теоретическим для плотности и скорости в нормах  $\| \cdot \|_{C_h}$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$ ,  $\| \cdot \|_W$  при различных значениях  $C=1, 10, 100$  и  $\mu = 0.1, 0.01, 0.001$ .

Таблица для Н при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.143694e-01	2.264050e-01	2.251116e-01	2.250955e-01
100	2.964124e-02	2.221759e-02	2.228827e-02	2.228837e-02
1000	2.317728e-02	2.192264e-03	2.225735e-03	2.226023e-03
10 000	2.252601e-02	2.623133e-043	2.222659e-04	2.225705e-04

Таблица для Н при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.417969e-01	4.391595e-01	4.390930e-01	4.390929e-01
100	4.723786e-02	4.298727e-02	4.300219e-02	4.300234e-02
1000	2.016514e-02	4.281144e-03	4.293383e-03	4.293544e-03
10 000	1.980081e-02	4.514181e-04	4.291298e-04	4.292884e-04

Таблица для Н при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.462457e-01	4.437024e-01	4.435496e-01	4.435500e-01
100	5.208176e-02	4.331901e-02	4.334279e-02	4.334300e-02
1000	2.999366e-02	4.315816e-03	4.327254e-03	4.327461e-03
10 000	2.981948e-02	5.029274e-04	4.324820e-04	4.326792e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.444460e-01	3.429665e-01	3.430031e-01	3.430030e-01
100	3.744959e-02	3.189993e-02	3.189130e-02	3.189126e-02
1000	1.858139e-02	3.180874e-03	3.174460e-03	3.174446e-03
10 000	1.857666e-02	3.844859e-04	3.177237e-04	3.177065e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.788023e-02	3.086641e-02	3.070495e-02	3.070333e-02
100	2.241863e-02	7.767198e-04	7.767198e-04	7.757596e-04
1000	2.215128e-02	2.514846e-04	7.336845e-05	7.299164e-053
10 000	2.214510e-02	2.310423e-04	7.920253e-06	7.310115e-063

Таблица для V при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.573218e-02	4.150134e-02	4.126848e-02	4.126624e-02
100	3.287995e-02	1.120130e-03	9.368058e-04	9.354343e-04
1000	3.264929e-02	3.749411e-04	8.728497e-05	8.695886e-05
10 000	3.265416e-02	3.593887e-04	9.546523e-06	8.716269e-06

Таблица для H при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.211703e-01	2.263311e-01	1.582959e+00	5.372131e+00
100	3.142828e-02	2.245293e-02	2.246906e-02	2.246932e-02
1000	2.482366e-02	2.213685e-03	2.244466e-03	2.244768e-03
10 000	2.415879e-02	2.929521e-04	2.241461e-04	2.244516e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.428018e-01	4.392113e-01	5.252379e-01	6.093233e-01
100	4.786355e-02	4.302245e-02	4.303809e-02	4.303825e-02
1000	2.127418e-02	4.284601e-03	4.297226e-03	4.297396e-03
10 000	2.091750e-02	4.550180e-04	4.295095e-04	4.296761e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.475027e-01	4.435662e-01	3.172539e+01	1.679467e+02
100	5.329391e-02	4.336868e-02	4.339092e-02	4.339114e-02
1000	3.185870e-02	4.321297e-03	4.332518e-03	4.332742e-03
10 000	3.169456e-02	5.171906e-04	4.329971e-04	4.332119e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.422005e-01	3.405622e-01	1.548628e+00	4.175018e-01
100	3.774782e-02	3.174822e-02	3.174968e-02	3.174968e-02
1000	1.959094e-02	3.205442e-03	3.201035e-03	3.201043e-03
10 000	1.958207e-02	3.891733e-04	3.203633e-04	3.203665e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.990424e-02	3.216016e-02	2.135581e-01	1.082185e-01
100	2.341577e-02	1.101758e-03	9.954724e-04	9.946412e-04
1000	2.310145e-02	2.714493e-04	9.530832e-05	9.496017e-05
10 000	2.309122e-02	2.432983e-04	1.005089e-05	9.495519e-06

Таблица для V при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.835065e-02	4.286211e-02	1.714778e+01	6.841703e+00
100	3.446748e-02	1.323483e-03	1.169268e-03	1.168214e-03
1000	3.421400e-02	3.991829e-04	1.113716e-04	1.112409e-04
10 000	3.421724e-02	3.818741e-04	1.173585e-05	1.113611e-05

Таблица для H при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.218780e-01	2.261835e-01	2.585887e+06	2.165843e+05
100	3.162551e-02	2.245921e-02	2.248779e-02	9.648828e+44
1000	2.500499e-02	2.215424e-03	2.246375e-03	2.246679e-03
10 000	2.433857e-02	3.042393e-04	2.243375e-04	2.246431e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.429164e-01	4.392228e-01	3.828000e+05	1.969445e+04
100	4.793440e-02	4.302637e-02	4.304229e-02	7.776510e+43
1000	2.139615e-02	4.285062e-03	4.297672e-03	4.297842e-03
10 000	2.104003e-02	4.556348e-04	4.295536e-04	4.297210e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_W$  :



N / M	10	100	1000	10 000
10	4.476502e-01	4.436026e-01	5.470499e+07	3.685878e+07
100	5.343186e-02	4.337631e-02	4.339887e-02	1.492133e+47
1000	3.206457e-02	4.322675e-03	4.333353e-03	4.333580e-03
10 000	3.190117e-02	5.233605e-04	4.330795e-04	4.332960e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.419760e-01	3.403284e-01	3.233496e+02	2.298566e+02
100	3.777779e-02	3.177527e-02	3.177693e-02	1.022704e+03
1000	1.969975e-02	3.207939e-03	3.203747e-03	3.203758e-03
10 000	1.969037e-02	3.896910e-04	3.206325e-04	3.206378e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	5.012832e-02	3.230986e-02	1.624489e+01	3.884439e+01
100	2.352296e-02	1.124423e-03	1.019120e-03	1.649396e+01
1000	2.320283e-02	2.737599e-04	9.766722e-05	9.731917e-05
10 000	2.319209e-02	2.446654e-04	1.028347e-05	9.730381e-06

Таблица для V при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 1$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.864411e-02	4.303422e-02	1.037434e+03	9.834436e+02
100	3.463934e-02	1.349755e-03	1.198210e-03	6.965285e+03
1000	3.438205e-02	4.030825e-04	1.143226e-04	1.142056e-04
10 000	3.438498e-02	3.854373e-04	1.201492e-05	1.143154e-05

Таблица для H при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.513310e-01	6.840937e-01	3.619086e+00	1.097858e+01
100	2.740819e-02	2.366752e-02	2.383323e-02	2.383486e-02
1000	1.956120e-02	2.202376e-03	2.367907e-03	2.369558e-03
10 000	2.130836e-02	2.572322e-04	2.351462e-04	2.367993e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.330993e-01	4.699694e-01	1.664312e+00	1.826387e+00
100	4.644060e-02	4.301035e-02	4.310528e-02	4.310624e-02
1000	3.346195e-02	4.224109e-03	4.305530e-03	4.306463e-03
10 000	3.443016e-02	4.630315e-04	4.296777e-04	4.305969e-04

Таблица для Н при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.389722e-01	2.653836e+00	3.707389e+01	3.559133e+02
100	4.718579e-02	4.371834e-02	4.382771e-02	4.382882e-02
1000	3.579572e-02	4.284730e-03	4.377660e-03	4.378718e-03
10 000	3.690329e-02	4.710372e-04	4.367784e-04	4.378209e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.750469e-01	1.230806e+00	1.095256e+01	1.138714e+02
100	6.600732e-02	3.688866e-02	3.658867e-02	3.658567e-02
1000	3.726058e-02	3.979793e-03	3.677855e-03	3.674847e-03
10 000	3.670124e-02	6.805344e-04	3.706906e-04	3.676773e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.746435e-01	4.284444e-01	2.494228e+00	3.763049e+01
100	8.368716e-02	7.648909e-03	6.913849e-03	6.906527e-03
1000	7.798488e-02	1.417858e-03	6.636130e-04	6.562138e-04
10 000	7.744721e-02	8.378828e-04	7.277683e-05	6.534517e-05

Таблица для V при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.908808e-01	5.149794e+00	1.018747e+02	7.972251e+02
100	9.003273e-02	8.542508e-03	7.772740e-03	7.765089e-03
1000	8.390559e-02	1.545760e-03	7.454532e-04	7.377036e-04
10 000	8.333088e-02	9.015871e-04	8.125727e-05	7.345495e-05

Таблица для Н при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.524745e-01	1.289765e+04	2.374686e+04	8.622140e+04
100	2.747173e-02	2.369868e-02	4.560177e+18	5.454099e+58
1000	1.957615e-02	2.205360e-03	2.370923e-03	2.372576e-03
10 000	2.134193e-02	2.593398e-04	2.354473e-04	2.371008e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.334053e-01	6.793411e+03	5.587676e+03	5.759727e+03
100	4.649140e-02	4.306713e-02	6.730699e+17	2.500740e+57
1000	3.351083e-02	4.229880e-03	4.311095e-03	4.312026e-03
10 000	3.447509e-02	4.641414e-04	4.302347e-04	4.311521e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.394616e-01	1.339472e+05	6.396975e+05	8.002384e+06
100	4.724397e-02	4.380764e-02	1.174399e+20	3.472873e+60
1000	3.585155e-02	4.293535e-03	4.386480e-03	4.387539e-03
10 000	3.695566e-02	4.724853e-04	4.376584e-04	4.387015e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.766542e-01	2.434208e+02	4.917218e+02	2.132218e+02
100	6.619407e-02	3.703839e-02	2.698780e+04	8.058098e+05
1000	3.737069e-02	3.997215e-03	3.692591e-03	3.689547e-03
10 000	3.682553e-02	6.850500e-04	3.721883e-04	3.691466e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.743680e-01	9.274478e+01	1.533499e+02	7.071701e+01
100	8.393404e-02	7.597186e-03	1.858218e+02	1.681499e+03
1000	7.824325e-02	1.416750e-03	6.585911e-04	6.511391e-04
10 000	7.770639e-02	8.402207e-04	7.232663e-05	6.484504e-05

Таблица для V при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.904086e-01	8.169066e+02	2.453591e+03	6.585651e+02
100	9.030136e-02	8.472591e-03	1.109948e+04	2.671933e+06
1000	8.420600e-02	1.542929e-03	7.387875e-04	7.309949e-04
10 000	8.363417e-02	9.041614e-04	8.063660e-05	7.279252e-05

Таблица для  $H$  при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 10$ ,  $\|\cdot\|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	2.525803e-01	3.810761e+04	4.036218e+08	3.790344e+08
100	2.747631e-02	2.370113e-02	1.344236e+54	3.334677e+82
1000	1.957590e-02	2.205616e-03	2.371229e-03	nan
10 000	2.134526e-02	2.589457e-04	2.354779e-04	2.371315e-04

Таблица для  $H$  при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 10$ ,  $\|\cdot\|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.334356e-01	1.410200e+04	5.865876e+07	3.253876e+07
100	4.649621e-02	4.307303e-02	1.723133e+53	1.573913e+81
1000	3.351533e-02	4.230474e-03	4.311675e-03	nan
10 000	3.447922e-02	4.642444e-04	4.302926e-04	4.312099e-04

Таблица для  $H$  при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 10$ ,  $\|\cdot\|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.395100e-01	2.278425e+05	8.433941e+09	3.643904e+10
100	4.724951e-02	4.381695e-02	3.134390e+55	2.190795e+84
1000	3.585663e-02	4.294449e-03	4.387400e-03	nan
10 000	3.696042e-02	4.726341e-04	4.377502e-04	4.387934e-04

Таблица для  $V$  при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 10$ ,  $\|\cdot\|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	3.768193e-01	1.766271e+02	2.005202e+04	2.708942e+04
100	6.621307e-02	3.705380e-02	1.698175e+06	2.920801e+06
1000	3.738169e-02	3.999016e-03	3.694111e-03	1.409340e+07
10 000	3.683789e-02	6.855323e-04	3.723428e-04	3.692986e-04

Таблица для  $V$  при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 10$ ,  $\|\cdot\|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.743434e-01	7.208726e+01	9.806257e+02	1.570384e+02
100	8.395888e-02	7.592556e-03	1.230660e+02	1.027037e+03
1000	7.826898e-02	1.416684e-03	6.581469e-04	nan
10 000	7.773218e-02	8.404618e-04	7.228717e-05	6.480088e-05

Таблица для V при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 10$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.903650e-01	1.095608e+03	7.396439e+04	2.854414e+03
100	9.032825e-02	8.466287e-03	1.551421e+04	1.524546e+06
1000	8.423582e-02	1.542716e-03	7.381960e-04	nan
10 000	8.366426e-02	9.044598e-04	8.058158e-05	7.273386e-05

Таблица для H при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.845259e-01	6.583996e+04	2.229711e+04	1.406105e+07
100	6.314241e-02	1.633035e-02	1.857319e+63	4.979522e+89
1000	6.995732e-02	1.727615e-03	1.659239e-03	1.660194e-03
10 000	7.065563e-02	6.422419e-04	1.653621e-04	1.661981e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.476717e-01	4.993000e+04	5.395078e+03	1.127133e+06
100	1.474096e-01	4.169186e-02	2.248001e+62	1.787611e+88
1000	1.397630e-01	4.459672e-03	4.163849e-03	4.163023e-03
10 000	1.395490e-01	1.457592e-03	4.173837e-04	4.163639e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.518418e-01	9.759963e+05	2.870931e+05	1.415807e+09
100	1.546395e-01	4.211100e-02	2.685174e+64	2.534312e+91
1000	1.469140e-01	4.537067e-03	4.207191e-03	4.206206e-03
10 000	1.466721e-01	1.528534e-03	4.219124e-04	4.207149e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.252598e-01	8.879800e+02	4.547761e+02	1.896095e+02
100	1.709711e-01	5.094260e-02	2.704737e+05	1.108724e+06
1000	1.270639e-01	6.169077e-03	4.973440e-03	4.961510e-03
10 000	1.233556e-01	1.715816e-03	5.080713e-04	4.961333e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.368946e-01	5.510062e+02	1.644422e+02	1.454028e+02
100	6.411959e-02	5.793595e-02	5.572300e+02	2.700454e+03
1000	9.068685e-02	5.343706e-03	5.928335e-03	5.934478e-03
10 000	9.444016e-02	5.833748e-04	5.880938e-04	5.941778e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.1$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	5.122246e-01	7.530496e+03	1.299412e+03	1.262009e+03
100	6.934462e-02	6.843348e-02	8.806266e+04	3.904029e+06
1000	9.833935e-02	6.359216e-03	6.990951e-03	6.997551e-03
10 000	1.026223e-01	6.309003e-04	6.940319e-04	7.005493e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.841277e-01	1.275948e+07	2.188936e+08	3.970911e+11
100	6.326133e-02	1.643460e-02	2.519265e+73	1.260722e+91
1000	7.011649e-02	1.734247e-03	1.669098e-03	3.602561e+301
10 000	7.079909e-02	6.427447e-04	1.663595e-04	1.671784e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.483706e-01	1.343671e+07	3.037518e+07	1.302293e+10
100	1.476911e-01	4.174663e-02	5.131454e+72	1.357487e+90
1000	1.399703e-01	4.467551e-03	4.169100e-03	nan
10 000	1.397491e-01	1.460142e-03	4.179319e-04	4.168869e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.527400e-01	1.719436e+08	4.280805e+09	1.842197e+13
100	1.549485e-01	4.218772e-02	5.241700e+74	1.891694e+93
1000	1.471323e-01	4.547538e-03	4.214591e-03	nan
10 000	1.468822e-01	1.531407e-03	4.226806e-04	4.214522e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.225402e-01	6.721016e+03	4.558179e+03	1.584303e+04
100	1.709270e-01	5.077288e-02	8.062654e+04	1.596971e+06
1000	1.271934e-01	6.152719e-03	4.956244e-03	1.317858e+07
10 000	1.237083e-01	1.714890e-03	5.063633e-04	4.944152e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.435176e-01	3.612954e+02	3.941217e+02	1.259630e+03
100	6.402450e-02	5.829656e-02	1.609875e+03	1.950357e+03
1000	9.082143e-02	5.376518e-03	5.962292e-03	nan
10 000	9.460853e-02	5.821508e-04	5.914602e-04	5.975541e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.01$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	5.201995e-01	5.800149e+03	2.923469e+04	7.434317e+05
100	6.934991e-02	6.888147e-02	2.197652e+05	2.550464e+06
1000	9.861408e-02	6.400201e-03	7.032877e-03	nan
10 000	1.029358e-01	6.300024e-04	6.981898e-04	7.047151e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	1.840873e-01	3.739917e+07	5.514377e+10	1.768935e+10
100	6.327378e-02	1.644507e-02	1.254961e+76	7.593688e+117
1000	7.013243e-02	1.734938e-03	1.670089e-03	nan
10 000	7.081346e-02	6.428448e-04	1.664596e-04	1.672770e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.484431e-01	1.826424e+07	9.049440e+09	1.685555e+09
100	1.477195e-01	4.175223e-02	2.897197e+75	5.595372e+116
1000	1.399911e-01	4.468351e-03	4.169636e-03	nan
10 000	1.397693e-01	1.460400e-03	4.179877e-04	4.169402e-04

Таблица для H при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.528332e-01	2.517398e+08	1.297191e+12	2.420641e+12
100	1.549797e-01	4.219554e-02	4.464021e+77	6.116383e+119
1000	1.471544e-01	4.548601e-03	4.215346e-03	nan
10 000	1.469034e-01	1.531700e-03	4.227588e-04	4.215274e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{C_h}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	6.222634e-01	5.058694e+03	1.482826e+05	1.763216e+04
100	1.709229e-01	5.075580e-02	2.629151e+06	3.485066e+06
1000	1.272068e-01	6.151047e-03	4.954532e-03	3.656183e+07
10 000	1.237442e-01	1.714861e-03	5.061924e-04	4.942434e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_{L_2}$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	4.441868e-01	1.495402e+03	1.075883e+04	2.408517e+03
100	6.401593e-02	5.833287e-02	5.232401e+02	1.580412e+04
1000	9.083621e-02	5.379825e-03	5.965712e-03	nan
10 000	9.462670e-02	5.820322e-04	6.986087e-04	5.978942e-04

Таблица для V при  $\mu = 0.001$ ,  $C = 100$ ,  $\| \cdot \|_W$  :

N / M	10	100	1000	10 000
10	5.210084e-01	1.778741e+04	1.413502e+06	2.651711e+05
100	6.935247e-02	7.793750e+04	2.183592e+07	2.183592e+07
1000	9.864410e-02	6.404335e-03	7.037101e-03	nan
10 000	1.029697e-01	6.299253e-04	6.986087e-04	7.051348e-04

### 5.1. Выводы о работе схемы для гладкой задачи.

Таблицы ошибок говорят о том, что система является расходящейся. Также, обратим внимание на то, что сходимость задачи зависит от параметров  $\mu$  и



$C$ . При  $\mu = 0.1$ ,  $C = 1$  система сходится при любом отношении  $\frac{N}{M}$ , однако при росте  $C$  и убывании  $\mu$  задача начинает расходиться при  $\frac{N}{M} < 1$ .

Если же  $M$  не превосходит  $N$ , то система сходится (во всех нормах).

Из таблиц ошибок очевидно, что чаще всего в строке наименьшую ошибку имеем при  $N = M$ , и значения ошибки на диагонали уменьшаются при росте  $N$  и достигают своего минимума при  $N = 10000$ -это значение является минимумом всей таблицы (чаще всего). Также хороший результат достигается при  $N = 10M$ . Из этого можно сделать вывод о том, что наилучшее отношение  $\frac{N}{M}$  между единицей и десятью.

## 6. Разрывное решение.

Применим метод к решению двух разрывных задач.

### 6.1. Первая разрывная задача.

Зададим начально-краевую задачу, начальные и граничные условия которой определяются следующим образом:

$$\begin{cases} u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5 \\ 1, & x \in [4.5, 5.5] \end{cases} \\ \rho_0(x) \equiv 1, & x \in [0, 10] \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0, & t \in [0, 1] \end{cases}$$

Зафиксируем  $N$  и начнем менять  $M = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$  (уменьшаем шаг по оси  $x$ ). Составим таблицы с отношениями скорости и плотности на последних слоях на двух соседних запусках:

### 6.2. Вторая разрывная задача.

Зададим начально-краевую задачу, начальные и граничные условия которой определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \rho_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5 \\ 2, & x \in [4.5, 5.5] \end{cases} \\ u_0(x) \equiv 0, & x \in [0, 10] \\ u(t, 0) = u(t, 10) = 0, & t \in [0, 1] \end{cases}$$

## Список литературы

- [1] А. В. Попов: Численное моделирование нестационарного одномерного течения газа с использованием неявных разностных схем . 2017.
- [2] А. В. Попов: Численное моделирование нестационарного течения газа с использованием неявных разностных схем . 2018.

- [3] А. В. Попов: GNUPLOT и его приложения . Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ. 2015.
- [4] К. Ю. Богачев: Практикум на ЭВМ.Методы решения линейных систем и нахождения значений. Издательство Механико-Математического факультета МГУ. 1998.