

Численное моделирование нестационарного
течения газа с использованием неявных
разностных схем

Морозова Александра

410 группа

Содержание

1 Постановка дифференциальной задачи	3
2 Схема для $\log(\rho)$ с центральными разностями	4
3 Тестирование на известном гладком решении	8
4 Расчёт для неизвестного решения	14
5 Выводы	30

1 Постановка дифференциальной задачи

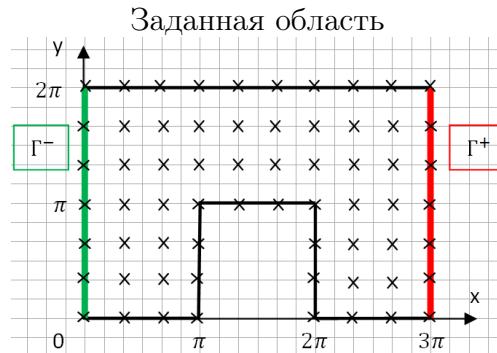
Нестационарное двумерное движение вязкого баротропного газа описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho f_1, \\ \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \mu \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \rho f_2, \\ p &= p(\rho), \end{aligned}$$

где μ - коэффициент вязкости газа (известная неотрицательная константа), p - давление газа (известная функция), f - вектор внешних сил (также известная функция от переменных Эйлера, см. ниже).

Неизвестные функции: плотность ρ и вектор скорости u являются функциями переменных Эйлера

$$(t, x) \in Q = [0, T] \times \Omega.$$



Границные условия для неизвестного решения: $\rho|_{\Gamma^-} = \rho_\gamma = 1$, $u_1|_{\Gamma^-} = \omega$, $\omega \in \{0, 1; 1\}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}|_{\Gamma^+} = 0$. На оставшейся границе компоненты скорости равны нулю, а функция плотности считается неизвестной.

Для решения задачи вводится равномерная сетка с шагом h_x по оси X, h_y по оси Y, τ по времени.

2 Схема для $\log(\rho)$ с центральными разностями

Для автоматического обеспечения условия положительности функции плотности систему дифференциальных уравнений можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(u_k \frac{\partial g}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k g}{\partial x_k} + (2 - g) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) &= f_0, \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^2}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(u_m \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m u_k}{\partial x_m} - u_k \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) + p'_\rho \frac{\partial g}{\partial x_k} &= \\ = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_m} \right) \right) + f_k, \quad k = 1..s, \\ p = p(\rho), \quad g = \ln \rho. \end{aligned}$$

Сеточную функцию, разностное приближение для плотности ρ , обозначим H . Аналогично, разностные аналоги g и u обозначим через G и V . Для поиска численного решения задачи используется следующая разностная схема:

$$\begin{aligned}
& G_t + 0.5 \sum_{k=1}^2 \left(V_k \hat{G}_{x_k^0} + (V_k \hat{G})_{x_k^0} + 2(\hat{V}_k)_{x_k^0} - G(V_k)_{x_k^0} \right) = f_0, \quad x \in \Omega_{\bar{h}}; \\
& G_t + 0.5 \left((V_k \hat{G})_{x_k} + 2(\hat{V}_k)_{x_k} - G(V_k)_{x_k} \right) - \\
& \quad - 0.5 h_k \left((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5(GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k} + (2-G)((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5(V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k}) \right) = \\
& \quad = f_0, \quad x \in \gamma_k^-, k = 1, 2; \\
& G_t + 0.5 \left((V_k \hat{G})_{\bar{x}_k} + 2(\hat{V}_k)_{\bar{x}_k} - G(V_k)_{\bar{x}_k} \right) + \\
& \quad + 0.5 h_k \left((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5(GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k} + (2-G)((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5(V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k}) \right) = \\
& \quad = f_0, \quad x \in \gamma_k^+, k = 1, 2; \\
& (V_k)_t + \frac{1}{3} \left(V_k (\hat{V}_k)_{x_k^0} + (V_k \hat{V}_k)_{x_k^0} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(V_m (\hat{V}_k)_{x_m^0} + (V_m \hat{V}_k)_{x_m^0} - V_k (\hat{V}_m)_{x_m^0} \right) + \\
& \quad + p'_\rho(e^G) \hat{G}_{x_m^0} = \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) - \\
& \quad - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) \left(\frac{4}{3} (V_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) + \\
& \quad + \frac{\mu e^{-G}}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k^0 x_m^0} + f_k, \quad x \in \Omega_{\bar{h}}; \\
& \hat{V}_k = 0, \quad x \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

Распишем уравнения схемы в поточечном виде и преобразуем их, приведя подобные слагаемые при неизвестных значениях с верхнего слоя.

Получим:

$$\begin{aligned}
& 4G_{m_1, m_2}^{n+1} - \frac{\tau}{h_x} G_{m_1-1, m_2}^{n+1} (V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1-1, m_2}^n) + \\
& + \frac{\tau}{h_x} G_{m_1+1, m_2}^{n+1} (V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1+1, m_2}^n) \\
& - \frac{\tau}{h_y} G_{m_1, m_2-1}^{n+1} (V2_{m_1, m_2}^n + V2_{m_1, m_2-1}^n) + \frac{\tau}{h_y} G_{m_1, m_2+1}^{n+1} (V2_{m_1, m_2}^n + V2_{m_1, m_2+1}^n) \\
& - \frac{2\tau}{h_x} V1_{m_1-1, m_2}^{n+1} + \frac{2\tau}{h_x} V1_{m_1+1, m_2}^{n+1} - \frac{2\tau}{h_y} V2_{m_1, m_2-1}^{n+1} + \frac{2\tau}{h_y} V2_{m_1, m_2+1}^{n+1} = \\
& = 4G_{m_1, m_2}^n + \tau G_{m_1, m_2}^n \left(\frac{V1_{m_1+1, m_2}^n - V1_{m_1-1, m_2}^n}{h_x} + \frac{V2_{m_1, m_2+1}^n - V2_{m_1, m_2-1}^n}{h_y} \right) \\
& + 4\tau f_0, \quad x \in \Omega_h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G_{0, m_2}^{n+1} (2 - \frac{\tau}{h_x} V1_{0, m_2}^n) + G_{1, m_2}^{n+1} \frac{\tau}{h_x} V1_{1, m_2}^n + \\
& + \frac{2\tau}{h_x} V1_{1, m_2}^{n+1} - \frac{2\tau}{h_x} V1_{0, m_2}^{n+1} = 2G_{0, m_2}^n + \frac{\tau}{h_x} G_{0, m_2}^n (V1_{1, m_2}^n - V1_{0, m_2}^n) + \\
& + 2\tau f_0 + \frac{\tau}{h_x} \left(G_{0, m_2}^n V1_{0, m_2}^n - 2.5G_{1, m_2}^n V1_{1, m_2}^n + \right. \\
& \left. + 2G_{2, m_2}^n V1_{2, m_2}^n - 0.5G_{3, m_2}^n V1_{3, m_2}^n + \right. \\
& \left. + (2 - G_{0, m_2}^n) (V1_{0, m_2}^n - 2.5V1_{1, m_2}^n + 2V1_{2, m_2}^n - 0.5V1_{3, m_2}^n) \right), \quad x \in \gamma_k^-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G_{M, m_2}^{n+1} (2 + \frac{\tau}{h_x} V1_{M, m_2}^n) - G_{M-1, m_2}^{n+1} \frac{\tau}{h_x} V1_{M-1, m_2}^n + \\
& + \frac{2\tau}{h_x} V1_{M, m_2}^{n+1} - \frac{2\tau}{h_x} V1_{M-1, m_2}^{n+1} = 2G_{M, m_2}^n + \frac{\tau}{h_x} G_{M, m_2}^n (V1_{M, m_2}^n - V1_{M-1, m_2}^n) + \\
& + 2\tau f_0 - \frac{\tau}{h_x} \left(G_{M, m_2}^n V1_{M, m_2}^n - 2.5G_{M-1, m_2}^n V1_{M-1, m_2}^n + \right. \\
& \left. + 2G_{M-2, m_2}^n V1_{M-2, m_2}^n - 0.5G_{M-3, m_2}^n V1_{M-3, m_2}^n + \right. \\
& \left. + (2 - G_{M, m_2}^n) (V1_{M, m_2}^n - 2.5V1_{M-1, m_2}^n + 2V1_{M-2, m_2}^n - 0.5V1_{M-3, m_2}^n) \right), \quad x \in \gamma_k^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V1_{m_1, m_2}^{n+1} \left(6 + 4\tau \tilde{\mu} \left(\frac{4}{h_x^2} + \frac{3}{h_y^2} \right) \right) + \\
& V1_{m_1-1, m_2}^{n+1} \left(-\frac{\tau}{h_x} (V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1-1, m_2}^n) - \tilde{\mu} \frac{8\tau}{h_x^2} \right) + \\
& V1_{m_1+1, m_2}^{n+1} \left(\frac{\tau}{h_x} (V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1+1, m_2}^n) - \tilde{\mu} \frac{8\tau}{h_x^2} \right) + \\
& V1_{m_1, m_2-1}^{n+1} \left(-\frac{3\tau}{2h_y} (V2_{m_1, m_2}^n + V2_{m_1, m_2-1}^n) - \tilde{\mu} \frac{6\tau}{h_y^2} \right) + \\
& V1_{m_1, m_2+1}^{n+1} \left(\frac{3\tau}{2h_y} (V2_{m_1, m_2}^n + V2_{m_1, m_2+1}^n) - \tilde{\mu} \frac{6\tau}{h_y^2} \right) - \\
& - 3 \frac{\tau}{h_x} p'_\rho G_{m_1-1, m_2}^{n+1} + 3 \frac{\tau}{h_x} p'_\rho G_{m_1+1, m_2}^{n+1} = \\
& = 6V1_{m_1, m_2}^n + 6\tau f_1 + \frac{3\tau}{2h_y} V1_{m_1, m_2}^n (V2_{m_1, m_2+1}^n - V2_{m_1, m_2-1}^n) - \\
& - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) 6\tau \left(\frac{4}{3h_x^2} (V1_{m_1+1, m_2}^n - 2V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1-1, m_2}^n) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{h_y^2} (V1_{m_1, m_2+1}^n - 2V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1, m_2-1}^n) \right) + \\
& + \mu e^{-G} \frac{\tau}{2h_x h_y} (V2_{m_1+1, m_2+1}^n - V2_{m_1-1, m_2+1}^n - V2_{m_1+1, m_2-1}^n + V2_{m_1-1, m_2-1}^n), \\
& \tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|.
\end{aligned}$$

3 Тестирование на известном гладком решении

Для тестирования программы приведём результаты решения задач с помощью заданных схем на известном гладком решении:

$$\begin{aligned} u1 &= \sin x \sin y e^t \\ u2 &= \sin x \sin y e^{-t} \\ \rho &= e^g, \quad \text{где } g = \cos x \sin y + t \end{aligned}$$

В расчётах положим $p_\rho = \rho$, $p'_\rho = 1$.

$$\mu = 0.1$$

$$|G - g|_C$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	1.230e+00	3.214e-01	2.788e-01	3.534e-01
0.062500	1.610e+00	1.291e-01	8.577e-02	9.438e-02
0.015625	1.757e+00	1.391e-01	2.992e-02	2.285e-02
0.003906	1.794e+00	1.603e-01	2.921e-02	7.612e-03

$$|G - g|_{L2}$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	1.973e+00	1.011e+00	1.010e+00	1.002e+00
0.062500	2.351e+00	3.110e-01	3.156e-01	3.287e-01
0.015625	2.566e+00	1.831e-01	7.278e-02	8.370e-02
0.003906	2.629e+00	2.042e-01	4.061e-02	1.777e-02

$$|G - g|_2^1$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	3.152e+00	2.311e+00	3.397e+00	4.991e+00
0.062500	4.042e+00	6.521e-01	9.265e-01	1.379e+00
0.015625	4.493e+00	4.784e-01	2.262e-01	3.356e-01
0.003906	4.620e+00	5.483e-01	1.627e-01	7.901e-02

$$|V1 - u1|_C$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	6.586e-01	5.265e-01	5.372e-01	5.369e-01
0.062500	5.509e-01	2.177e-01	1.599e-01	1.527e-01
0.015625	6.080e-01	2.120e-01	6.369e-02	4.186e-02
0.003906	6.246e-01	2.206e-01	6.211e-02	1.628e-02

$$|V1 - u1|_{L2}$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	1.888e+00	1.753e+00	1.780e+00	1.793e+00
0.062500	1.298e+00	5.439e-01	4.880e-01	4.922e-01
0.015625	1.336e+00	3.445e-01	1.429e-01	1.266e-01
0.003906	1.365e+00	3.407e-01	8.749e-02	3.616e-02

$$|V1 - u1|_2^1$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	2.779e+00	2.627e+00	2.671e+00	2.678e+00
0.062500	2.307e+00	9.789e-01	7.883e-01	7.767e-01
0.015625	2.486e+00	7.559e-01	2.794e-01	2.114e-01
0.003906	2.557e+00	7.570e-01	2.024e-01	7.261e-02

$$|V2 - u2|_C$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	2.486e-01	1.860e-01	1.662e-01	1.618e-01
0.062500	2.223e-01	7.943e-02	5.911e-02	5.423e-02
0.015625	2.137e-01	4.756e-02	2.077e-02	1.580e-02
0.003906	2.140e-01	4.012e-02	1.073e-02	5.194e-03

$$|V2 - u2|_{L2}$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	7.501e-01	5.287e-01	4.779e-01	4.679e-01
0.062500	6.184e-01	2.430e-01	1.755e-01	1.636e-01
0.015625	5.817e-01	1.465e-01	6.281e-02	4.769e-02
0.003906	5.731e-01	1.247e-01	3.501e-02	1.585e-02

$$|V2 - u2|_2^1$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	1.346e+00	9.783e-01	9.107e-01	9.026e-01
0.062500	1.127e+00	4.675e-01	3.481e-01	3.310e-01
0.015625	1.063e+00	2.923e-01	1.289e-01	9.842e-02
0.003906	1.048e+00	2.526e-01	7.592e-02	3.347e-02

time

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	0.0178	0.0197	0.1287	1.3997
0.062500	0.0221	0.0635	0.2200	1.5765
0.015625	0.1074	0.2512	0.7853	3.2532
0.003906	0.3228	0.8516	2.9018	10.2778

$$\mu = 0.01$$

$$|G - g|_C$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	1.234e+00	3.258e-01	3.537e-01	3.937e-01
0.062500	1.523e+00	1.250e-01	1.067e-01	1.077e-01
0.015625	1.669e+00	1.919e-01	3.001e-02	2.802e-02
0.003906	1.708e+00	2.213e-01	4.291e-02	6.727e-03

$$|G - g|_{L2}$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	1.969e+00	1.113e+00	1.131e+00	1.125e+00
0.062500	2.322e+00	3.339e-01	3.458e-01	3.598e-01
0.015625	2.556e+00	2.112e-01	8.196e-02	9.165e-02
0.003906	2.627e+00	2.377e-01	4.838e-02	2.027e-02

$$|G - g|_2^1$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	3.139e+00	2.506e+00	4.005e+00	6.713e+00
0.062500	3.946e+00	7.242e-01	1.091e+00	1.819e+00
0.015625	4.424e+00	6.062e-01	2.765e-01	4.392e-01
0.003906	4.565e+00	6.951e-01	2.165e-01	1.012e-01

$$|V1 - u1|_C$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	6.496e-01	5.308e-01	4.944e-01	4.730e-01
0.062500	5.616e-01	2.037e-01	1.561e-01	1.342e-01
0.015625	6.397e-01	2.319e-01	6.071e-02	3.861e-02
0.003906	6.604e-01	2.496e-01	6.796e-02	1.536e-02

$$|V1 - u1|_{L2}$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	1.662e+00	1.516e+00	1.543e+00	1.545e+00
0.062500	1.365e+00	5.014e-01	4.248e-01	4.255e-01
0.015625	1.459e+00	3.796e-01	1.335e-01	1.096e-01
0.003906	1.496e+00	3.884e-01	9.626e-02	3.372e-02

$$|V1 - u1|_2^1$$

τ	h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000		2.613e+00	2.683e+00	3.139e+00	3.179e+00
0.062500		2.553e+00	1.021e+00	9.792e-01	1.045e+00
0.015625		2.804e+00	8.829e-01	3.184e-01	2.790e-01
0.003906		2.885e+00	9.177e-01	2.456e-01	8.674e-02

$$|V2 - u2|_C$$

τ	h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000		3.392e-01	1.876e-01	1.778e-01	1.869e-01
0.062500		2.693e-01	7.823e-02	5.919e-02	5.693e-02
0.015625		2.533e-01	4.987e-02	2.271e-02	1.648e-02
0.003906		2.495e-01	4.343e-02	1.460e-02	6.122e-03

$$|V2 - u2|_{L2}$$

τ	h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000		9.040e-01	6.138e-01	5.637e-01	5.575e-01
0.062500		6.875e-01	2.611e-01	1.921e-01	1.816e-01
0.015625		6.389e-01	1.574e-01	6.751e-02	5.202e-02
0.003906		6.282e-01	1.355e-01	3.823e-02	1.716e-02

$$|V2 - u2|_2^1$$

τ	h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000		1.713e+00	1.360e+00	1.458e+00	1.575e+00
0.062500		1.296e+00	5.763e-01	4.860e-01	5.230e-01
0.015625		1.199e+00	3.536e-01	1.721e-01	1.473e-01
0.003906		1.177e+00	3.062e-01	1.030e-01	4.765e-02

time

τ	h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000		0.0108	0.0265	0.1171	0.8432
0.062500		0.0257	0.0753	0.2921	1.0513
0.015625		0.0868	0.2422	0.7614	2.5027
0.003906		0.3246	1.4502	3.0378	10.6720

$$\mu = 0.001$$

$ G - g _C$					
τ	h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000		1.232e+00	3.238e-01	3.719e-01	3.762e-01
0.062500		1.517e+00	1.244e-01	1.116e-01	1.248e-01
0.015625		1.658e+00	1.997e-01	3.092e-02	3.250e-02
0.003906		1.698e+00	2.303e-01	4.515e-02	7.879e-03

$ G - g _{L2}$					
τ	h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000		1.968e+00	1.128e+00	1.153e+00	1.156e+00
0.062500		2.318e+00	3.379e-01	3.514e-01	3.680e-01
0.015625		2.555e+00	2.161e-01	8.392e-02	9.390e-02
0.003906		2.627e+00	2.430e-01	4.978e-02	2.107e-02

$ G - g _2^1$					
τ	h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000		3.136e+00	2.532e+00	4.092e+00	7.208e+00
0.062500		3.935e+00	7.386e-01	1.130e+00	1.985e+00
0.015625		4.417e+00	6.276e-01	2.909e-01	4.876e-01
0.003906		4.561e+00	7.182e-01	2.261e-01	1.149e-01

$ V1 - u1 _C$					
τ	h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000		6.499e-01	5.636e-01	5.582e-01	5.281e-01
0.062500		5.643e-01	2.042e-01	1.732e-01	1.617e-01
0.015625		6.433e-01	2.348e-01	6.035e-02	4.699e-02
0.003906		6.645e-01	2.536e-01	6.854e-02	1.598e-02

$ V1 - u1 _{L2}$					
τ	h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000		1.640e+00	1.503e+00	1.550e+00	1.552e+00
0.062500		1.376e+00	4.989e-01	4.260e-01	4.305e-01
0.015625		1.475e+00	3.847e-01	1.335e-01	1.105e-01
0.003906		1.513e+00	3.951e-01	9.741e-02	3.363e-02

$ V1 - u1 _2^1$					
τ	h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000		2.604e+00	2.834e+00	4.185e+00	6.171e+00
0.062500		2.588e+00	1.041e+00	1.235e+00	1.988e+00
0.015625		2.845e+00	9.021e-01	3.567e-01	5.111e-01
0.003906		2.927e+00	9.423e-01	2.529e-01	1.234e-01

$$|V2 - u2|_C$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	3.539e-01	1.999e-01	2.121e-01	2.322e-01
0.062500	2.759e-01	7.856e-02	6.274e-02	6.645e-02
0.015625	2.579e-01	5.230e-02	2.397e-02	1.753e-02
0.003906	2.536e-01	4.541e-02	1.594e-02	6.489e-03

$$|V2 - u2|_{L2}$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	9.288e-01	6.309e-01	5.838e-01	5.791e-01
0.062500	6.968e-01	2.644e-01	1.956e-01	1.854e-01
0.015625	6.461e-01	1.592e-01	6.849e-02	5.288e-02
0.003906	6.350e-01	1.372e-01	3.885e-02	1.743e-02

$$|V2 - u2|_2^1$$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	1.769e+00	1.435e+00	1.651e+00	2.147e+00
0.062500	1.319e+00	5.944e-01	5.188e-01	6.330e-01
0.015625	1.217e+00	3.634e-01	1.811e-01	1.707e-01
0.003906	1.193e+00	3.146e-01	1.084e-01	5.295e-02

time

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	0.0205	0.0261	0.1288	0.5933
0.062500	0.0218	0.0652	0.2378	0.9995
0.015625	0.0888	0.2597	1.3859	2.7686
0.003906	0.3564	0.9484	2.8053	9.5854

Данными результатами подтверждается сходимость схемы к решению с порядком $\tau + h^2$. При этом можно наблюдать небольшое ухудшение в точности решения при уменьшении параметра μ (в норме $\|\cdot\|_2^1$).

4 Расчёт для неизвестного решения

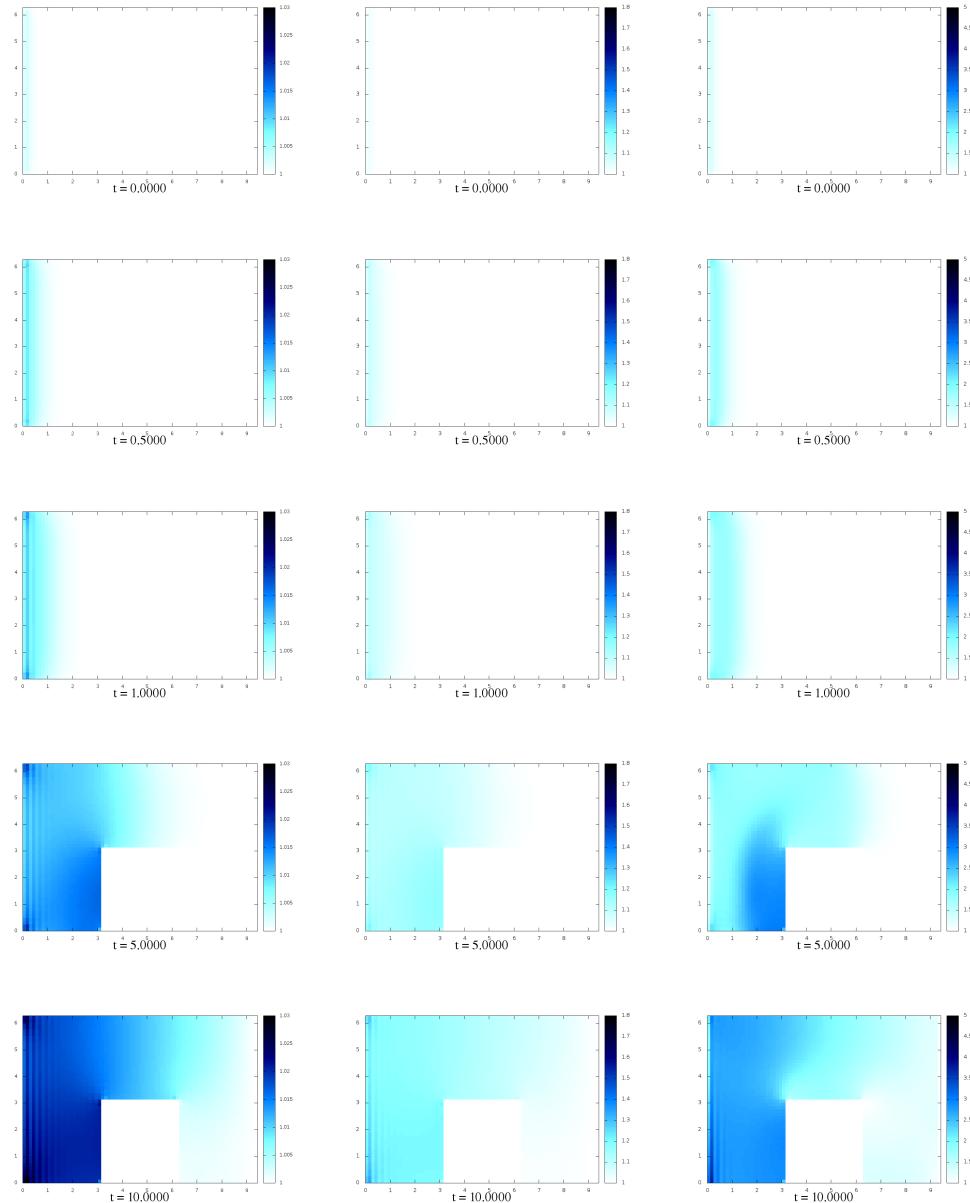
Положим $p_\rho = \rho$, $p'_\rho = 1$.

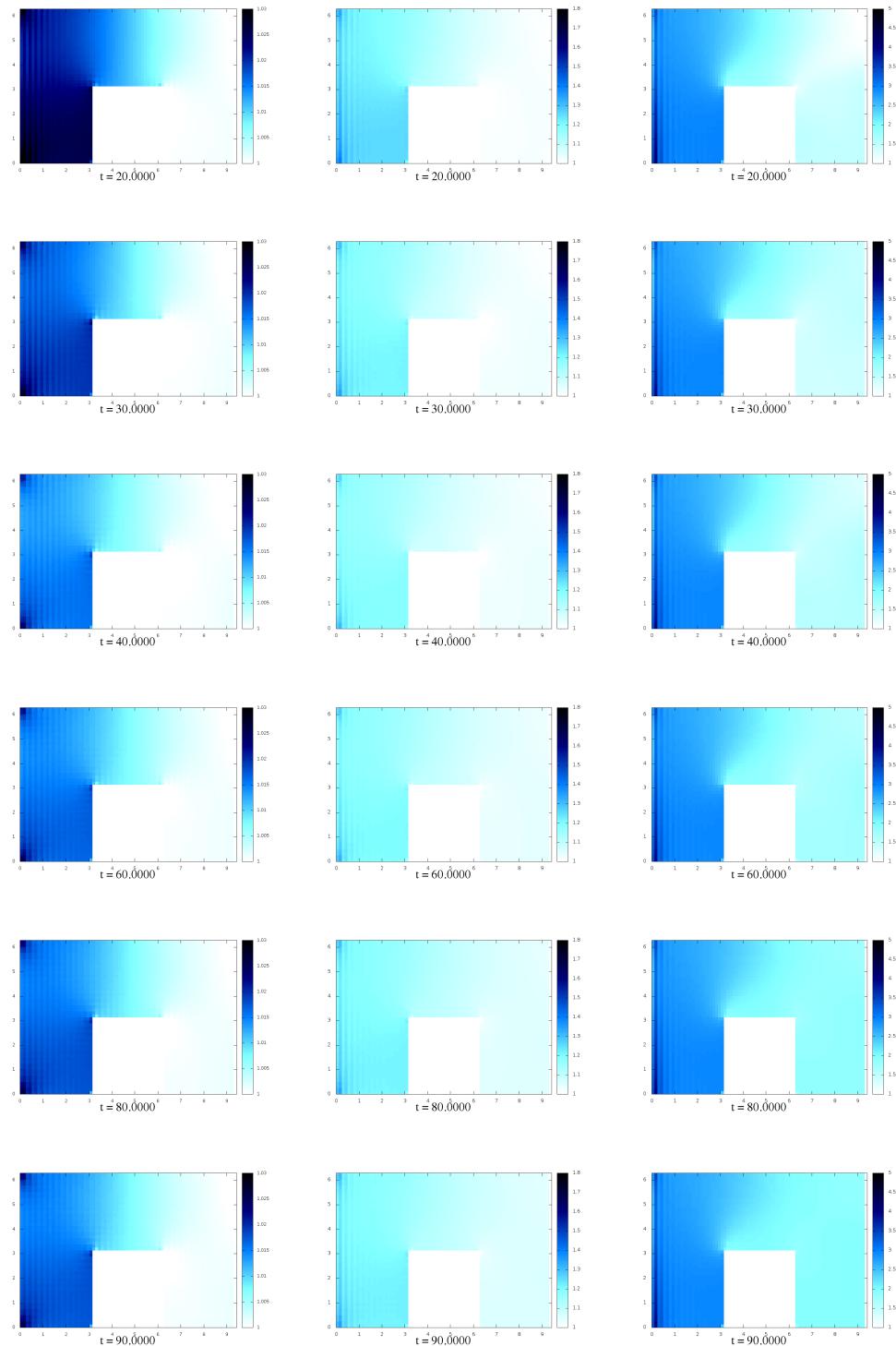
$$\mu = 0.1; \quad \{T, N, M\} = \{100, 800, 25\}$$

$$\omega = 0.01$$

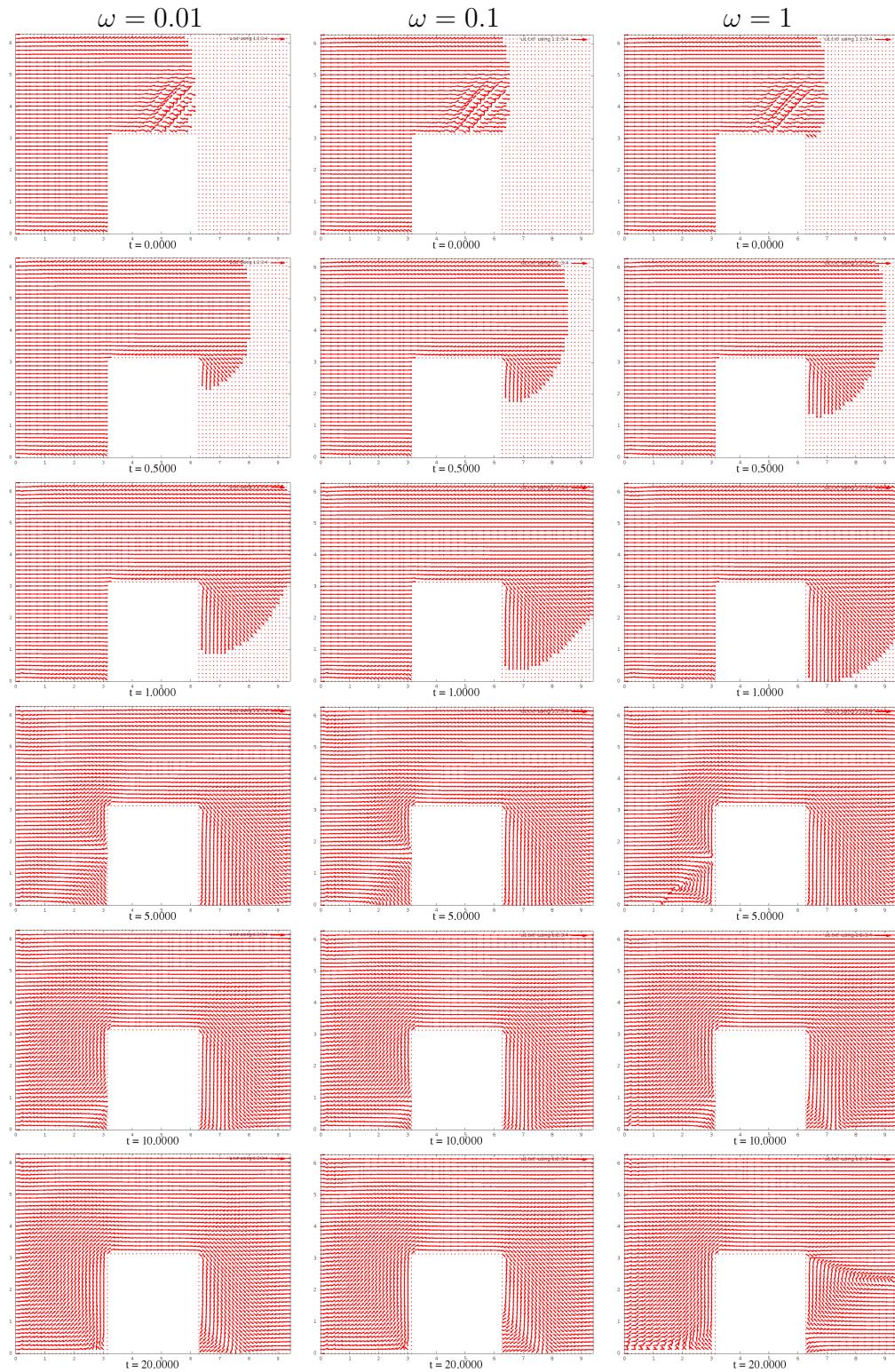
$$\omega = 0.1$$

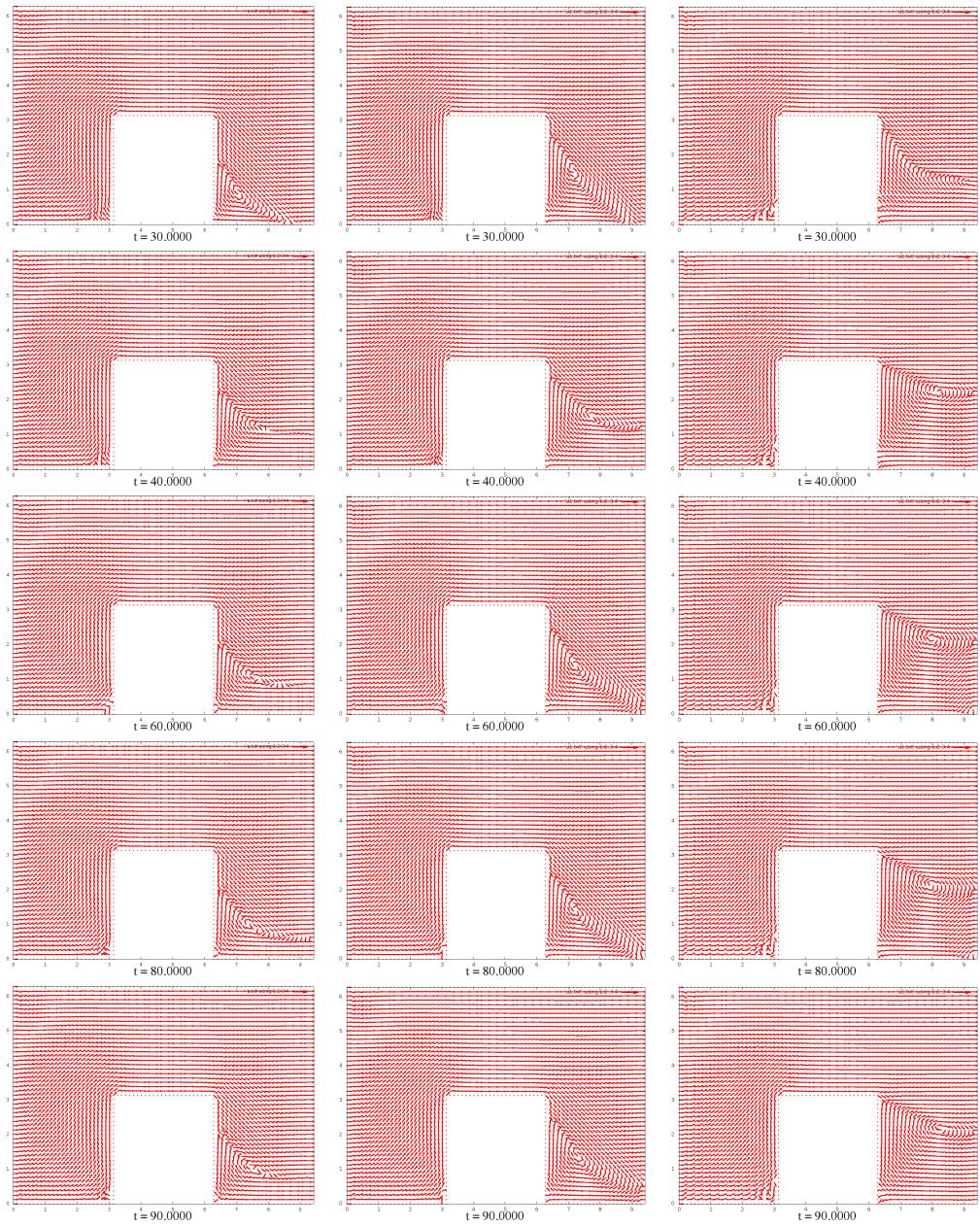
$$\omega = 1$$





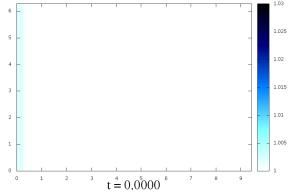
Поле скоростей:



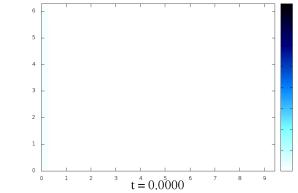


$$\mu = 0.01; \quad \{T, N, M\} = \{100, 800, 25\}$$

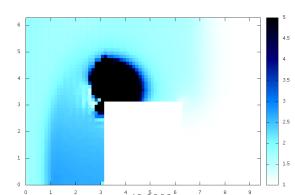
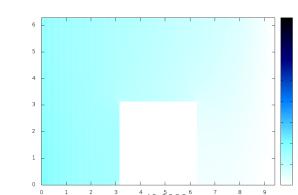
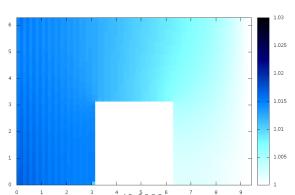
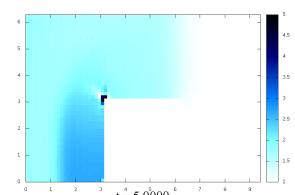
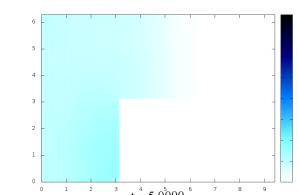
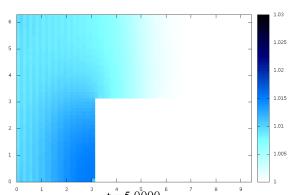
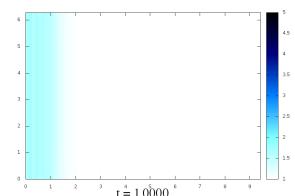
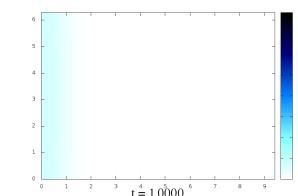
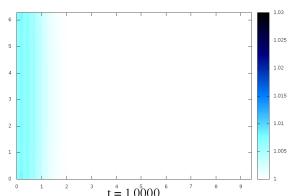
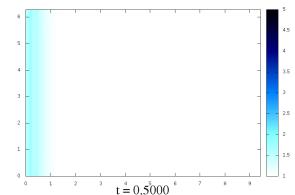
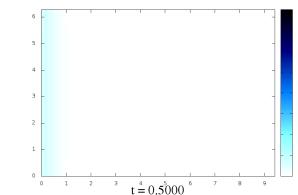
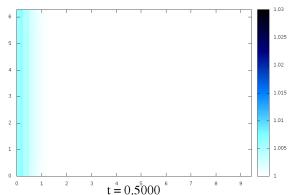
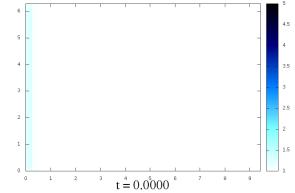
$$\omega = 0.01$$

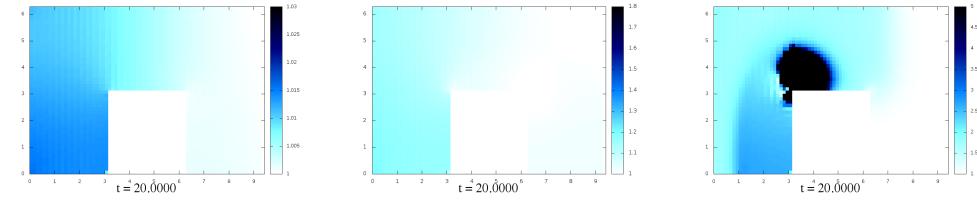


$$\omega = 0.1$$

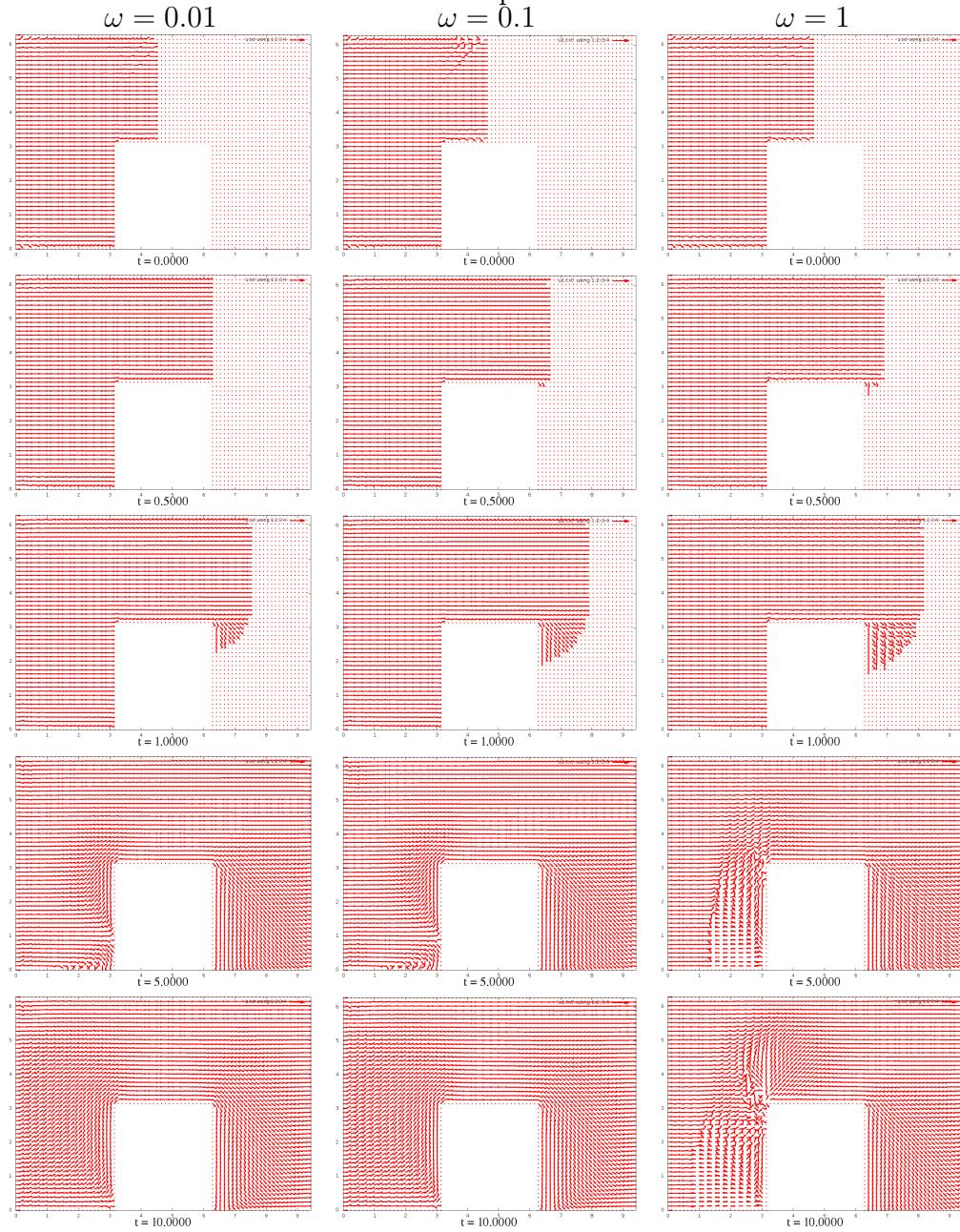


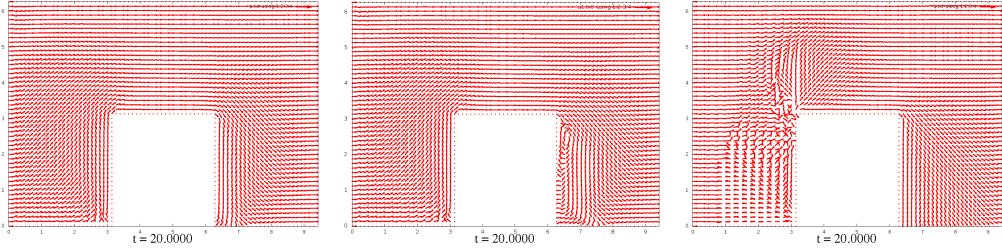
$$\omega = 1$$





Поле скоростей:



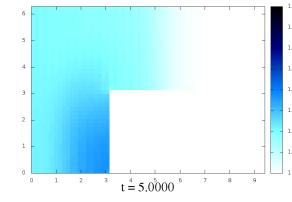
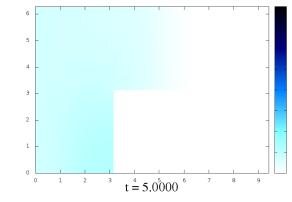
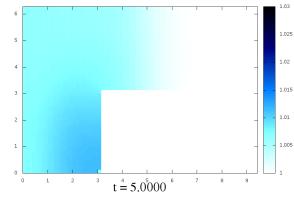
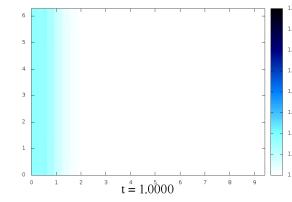
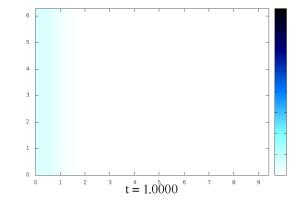
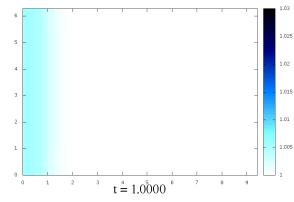
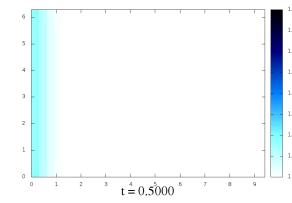
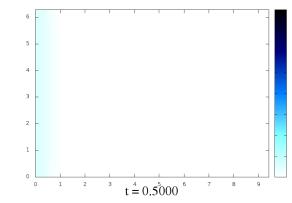
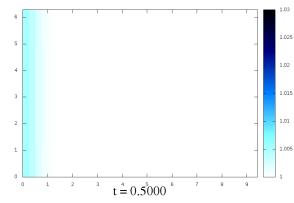
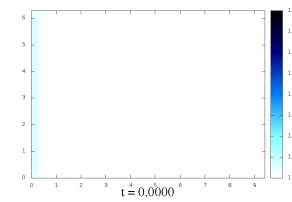
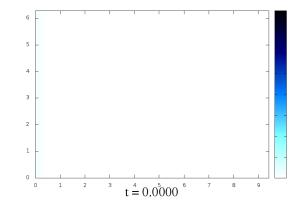
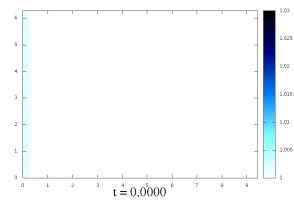


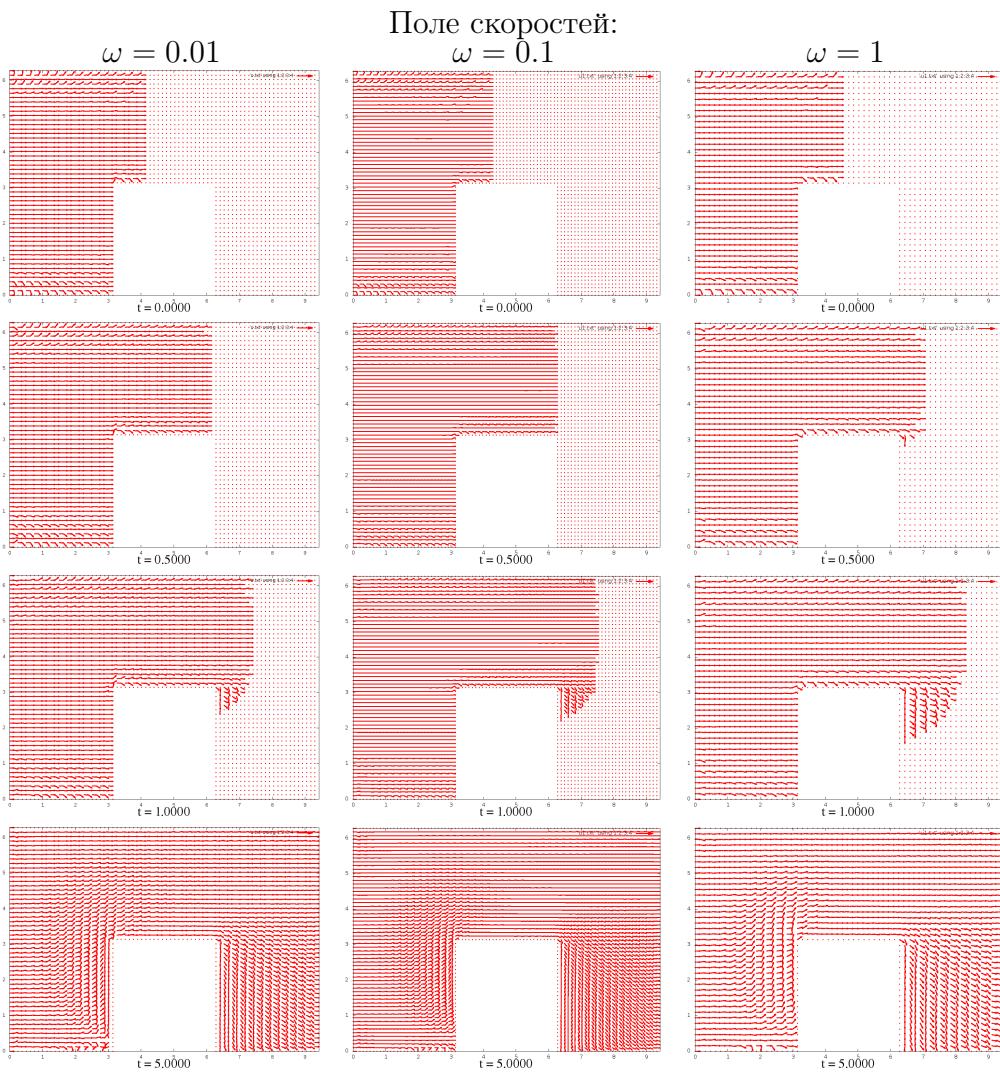
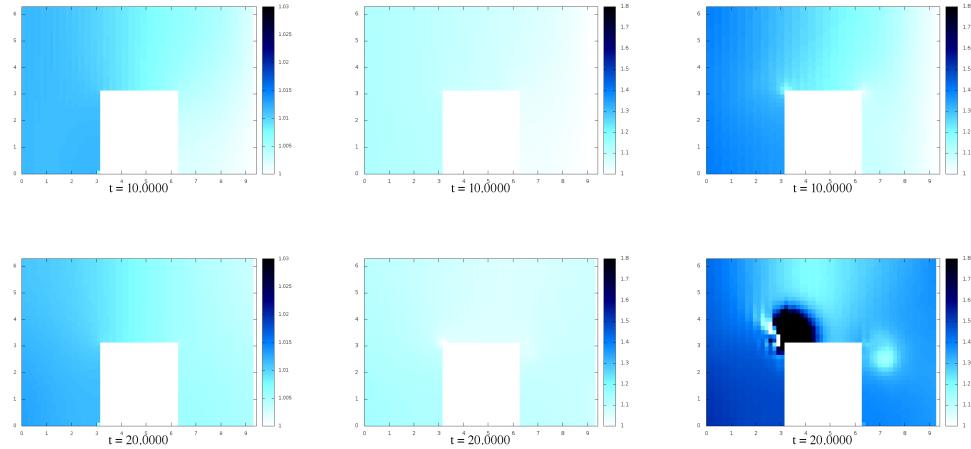
$$\mu = 0.001; \quad \{T, N, M\} = \{100, 800, 25\}$$

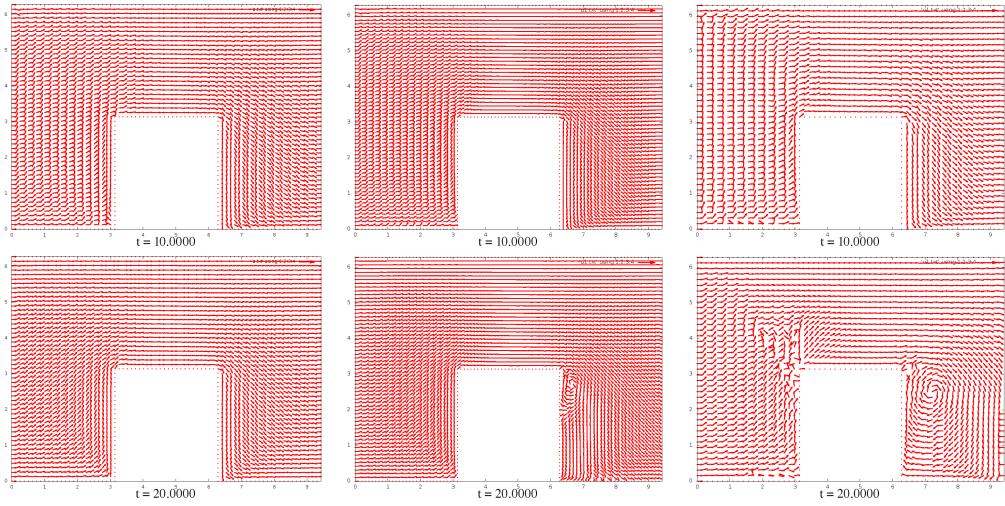
$$\omega = 0.01$$

$$\omega = 0.1$$

$$\omega = 1$$







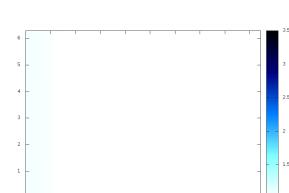
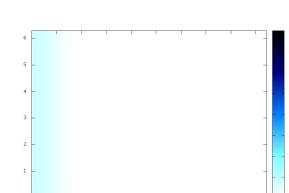
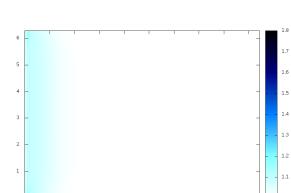
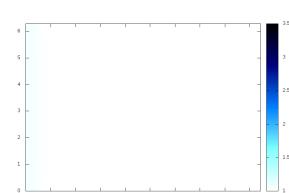
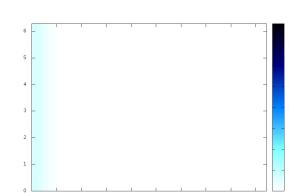
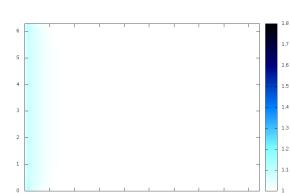
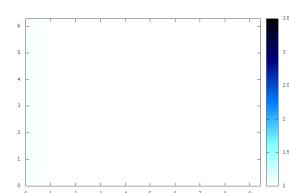
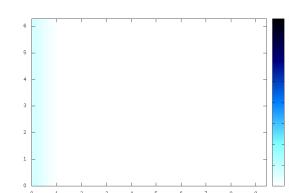
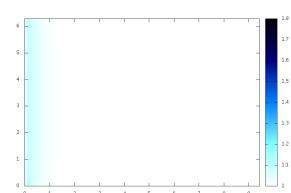
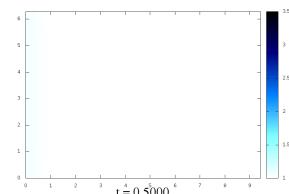
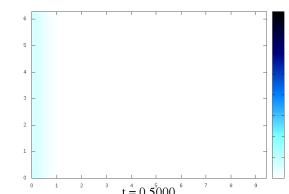
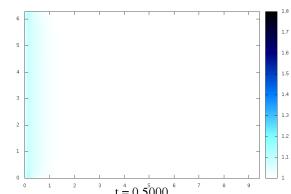
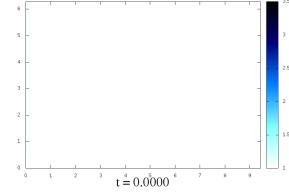
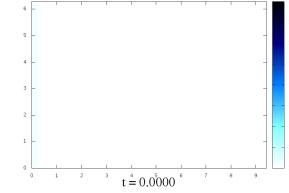
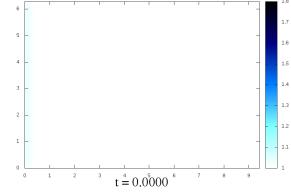
Из иллюстраций видна зависимость решения и поведения схемы от таких параметров, как коэффициент вязкости (μ) и скорости втекания газа в область (ω). Если скорость достаточно велика (см. $\omega = 1$), то начиная с некоторого момента времени схема перестаёт считать правильно. Так, при $\mu = 0.001$ схема перестаёт работать при $t \approx 15$, при $\mu = 0.01$ $t \approx 5$. При максимальном же $\mu = 0.1$ схема работает стабильно.

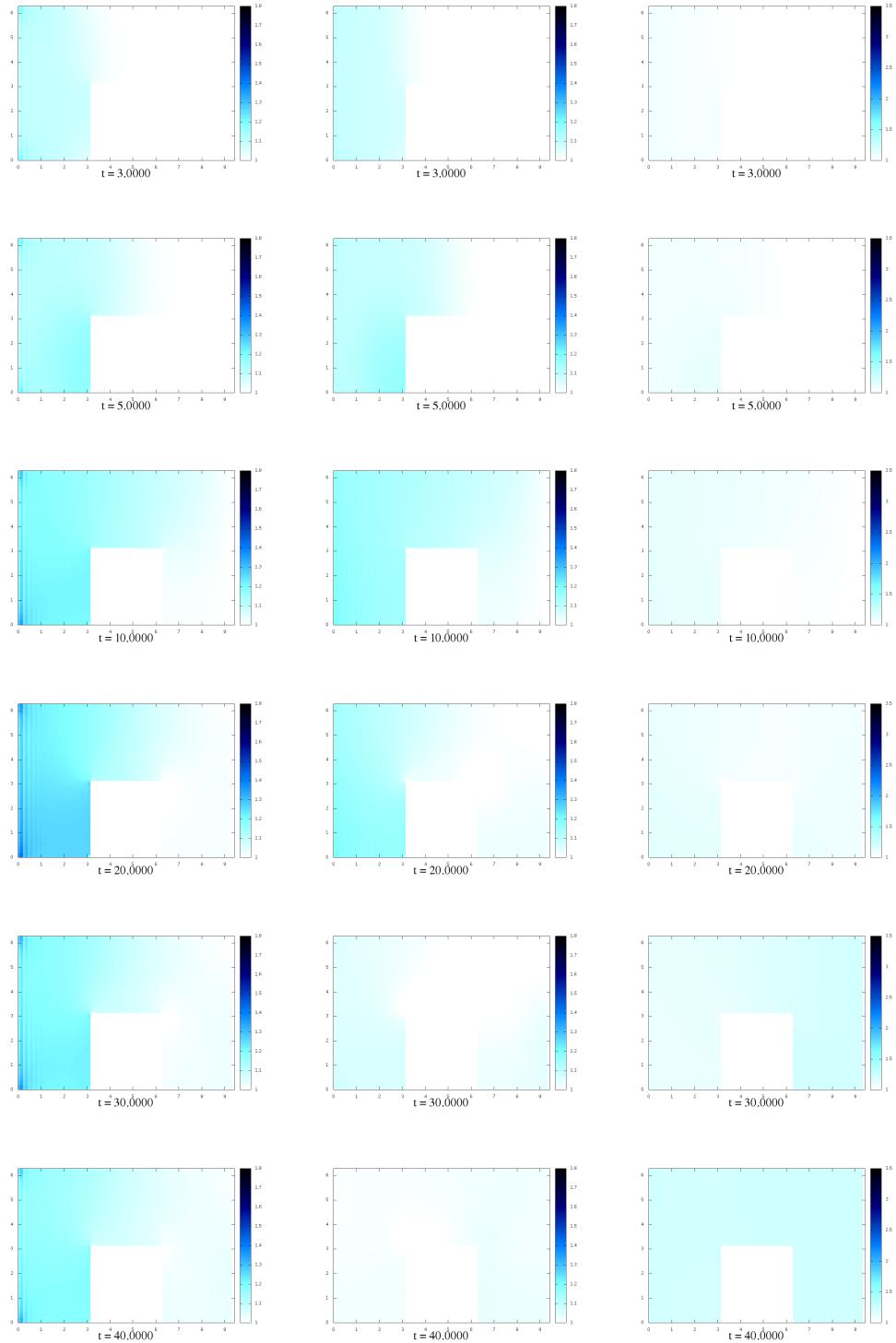
$$\omega = 0.1; \quad \{T, N, M\} = \{300, 2400, 30\}$$

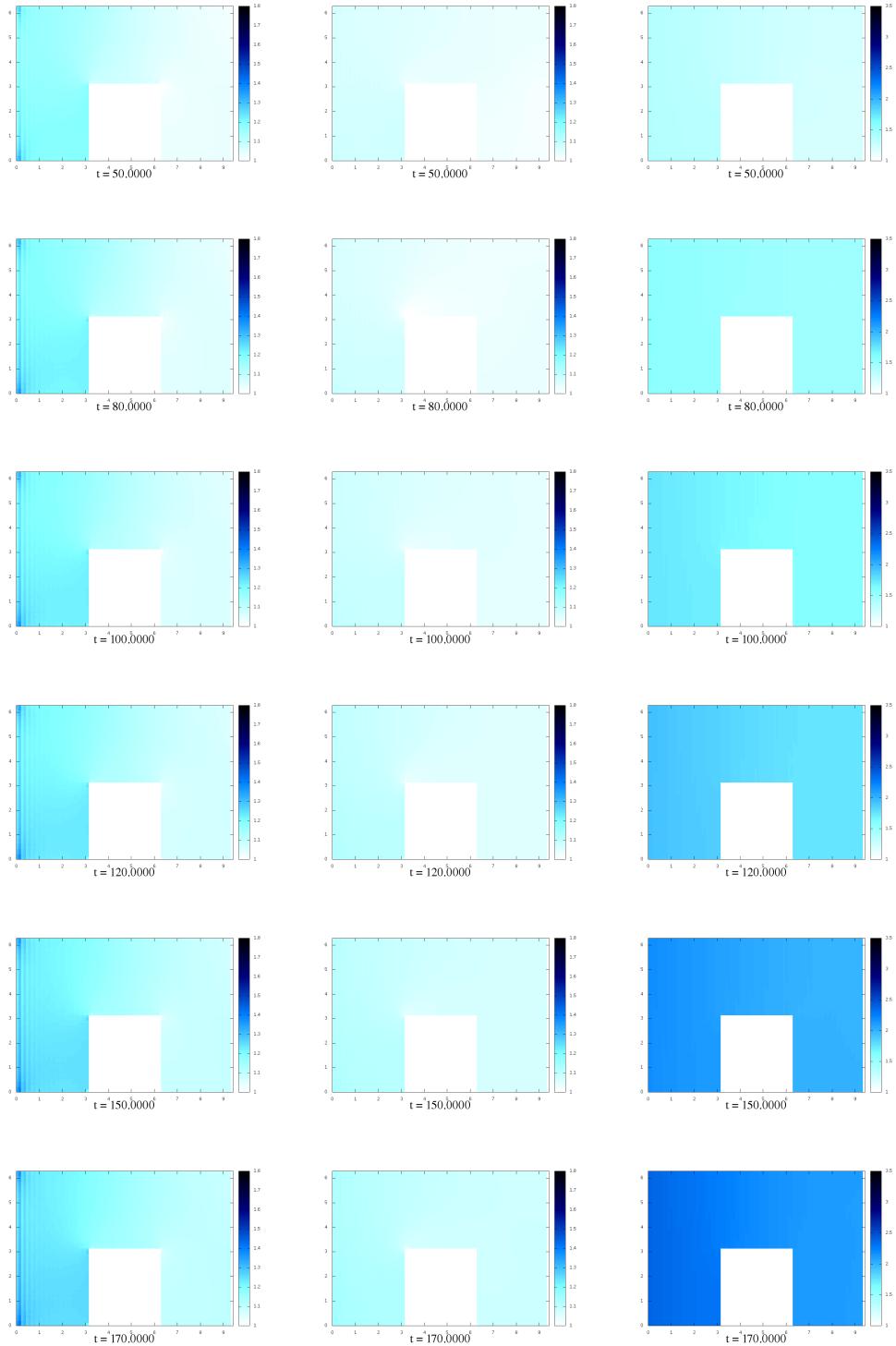
$$\mu = 0.1$$

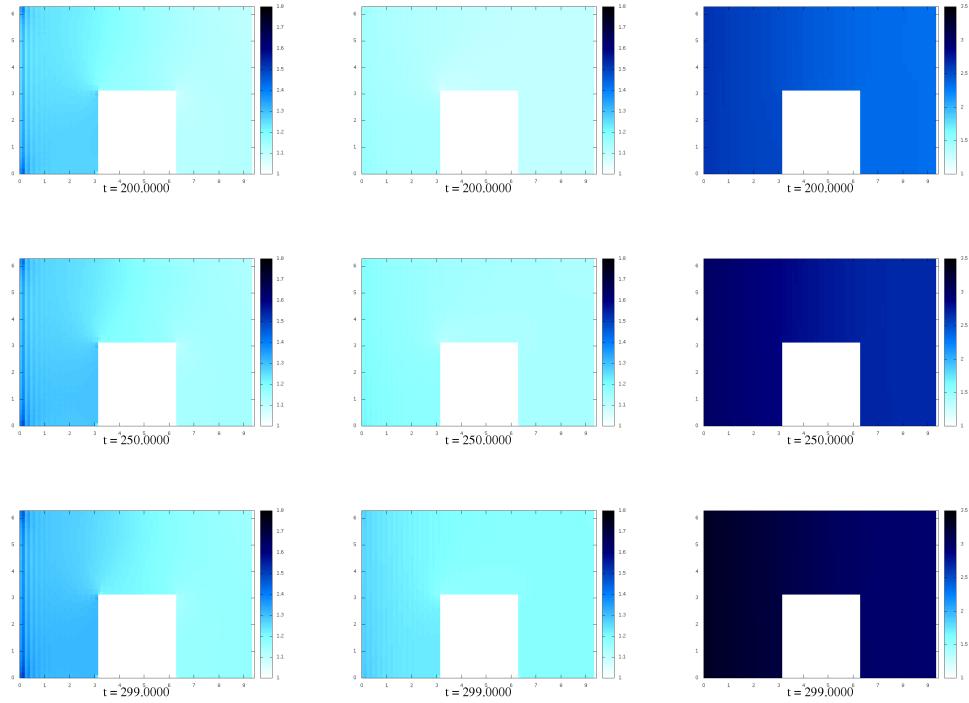
$$\mu = 0.01$$

$$\mu = 0.001$$







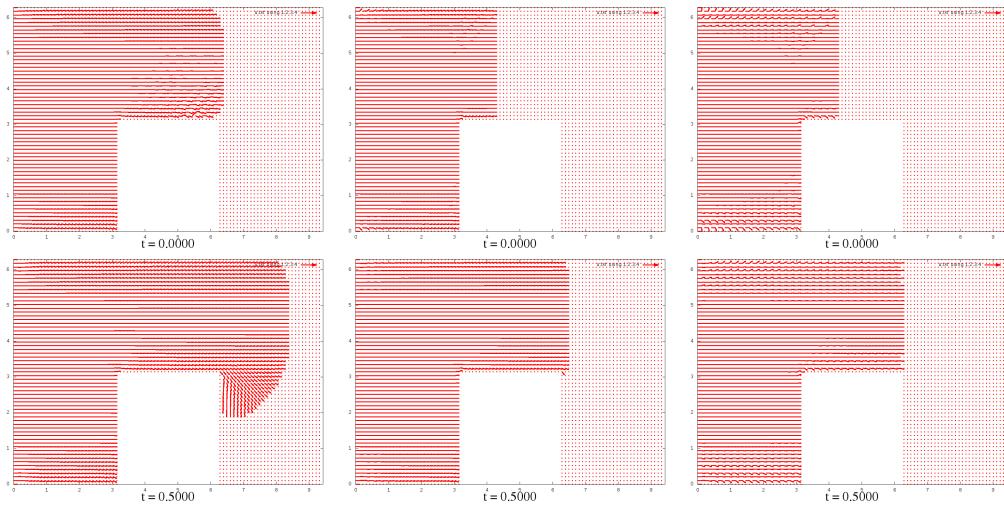


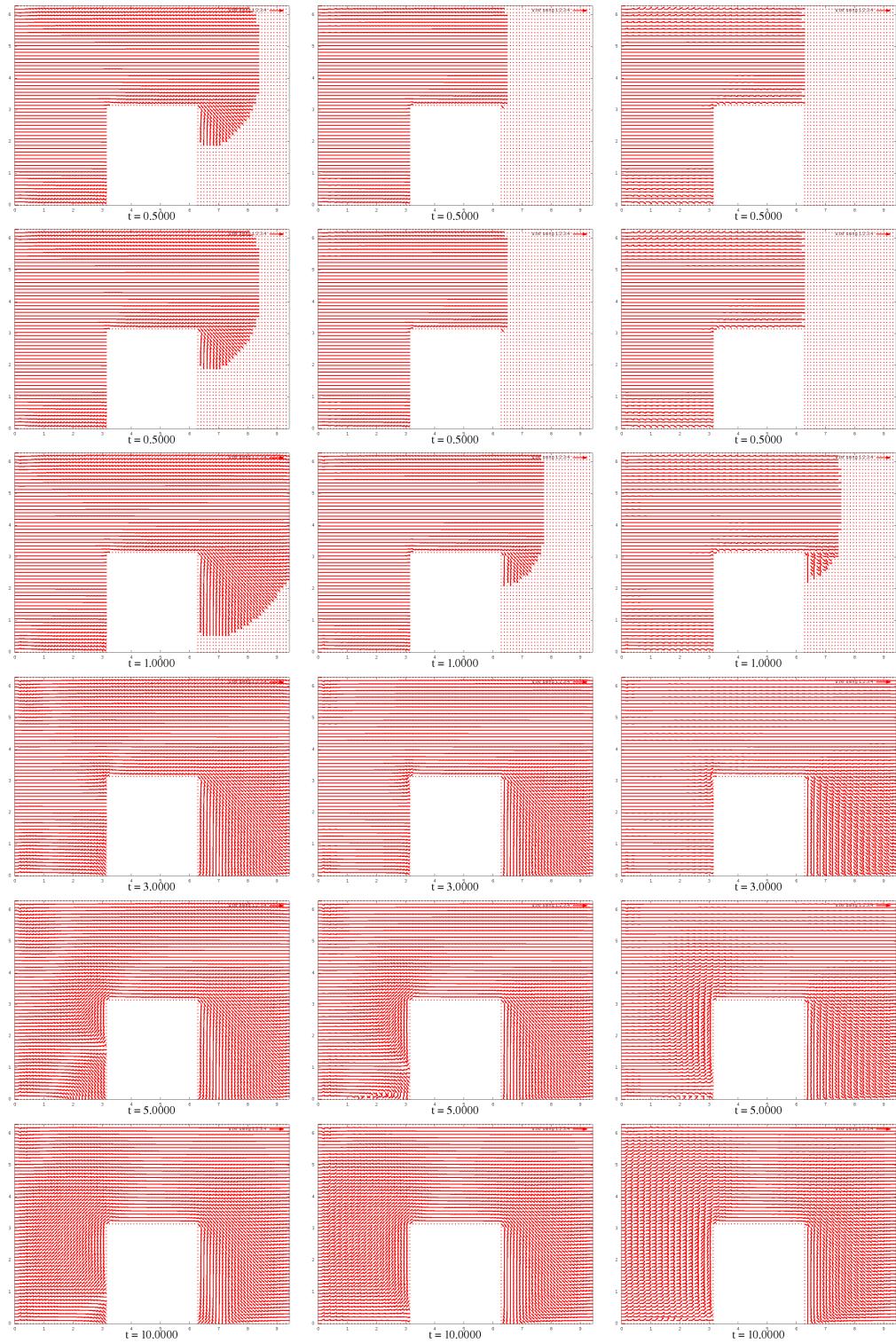
$$\omega = 0.1; \quad \{T, N, M\} = \{300, 2400, 30\}$$

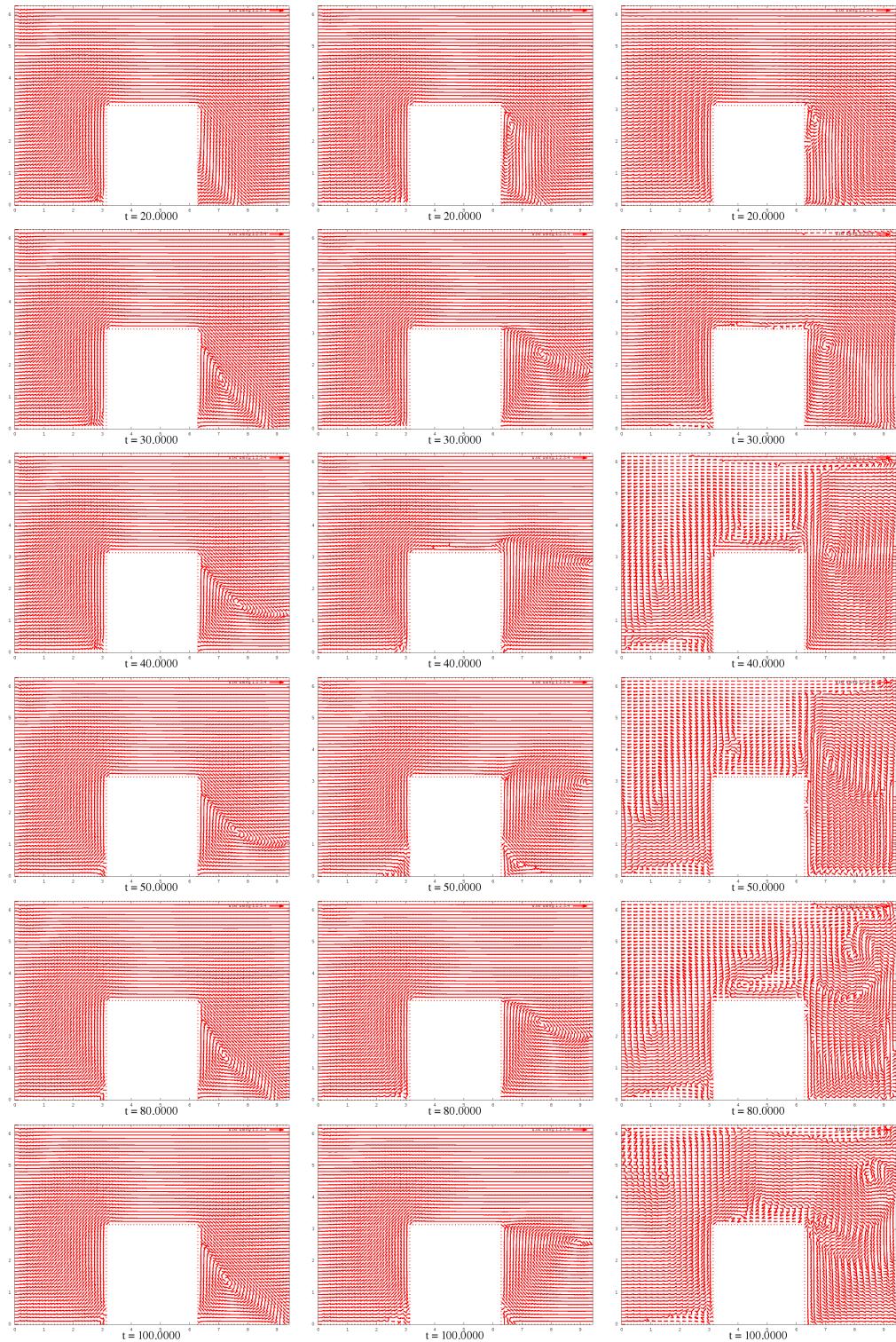
$$\mu = 0.1$$

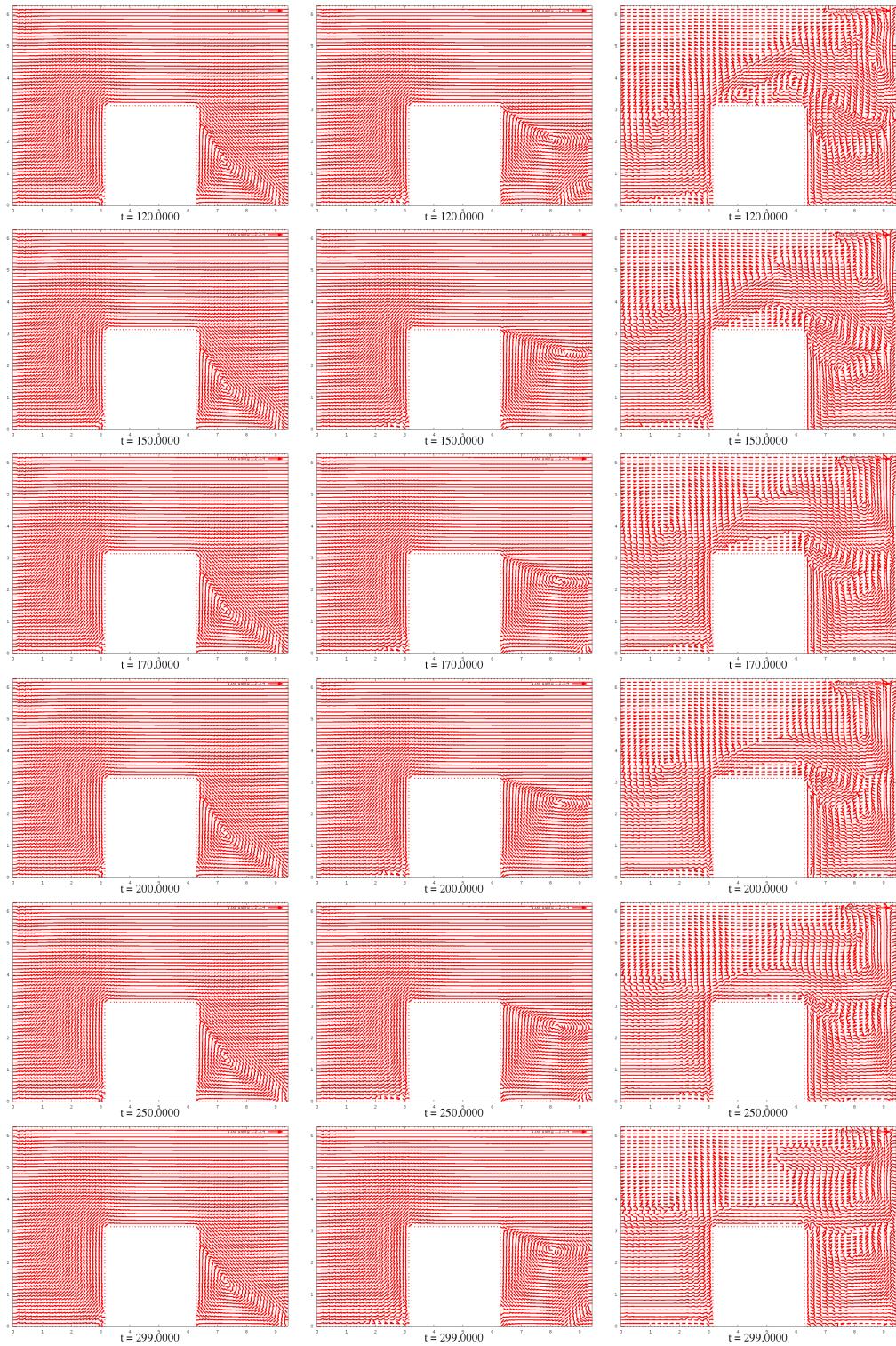
$$\mu = 0.01$$

$$\mu = 0.001$$









5 Выводы

1. Была подтверждена сходимость схемы к решению с порядком $\tau + h^2$.
2. Показана зависимость решения и поведения схемы от таких параметров, как коэффициент вязкости (μ) и скорости втекания газа в область (ω). Если скорость достаточно велика (см. $\omega = 1$), то начиная с некоторого момента времени схема перестаёт считать правильно. Так, при $\mu = 0.001$ схема перестаёт работать при $t \approx 15$, при $\mu = 0.01$ $t \approx 5$. При максимальном же $\mu = 0.1$ схема работает стablyно.
3. От параметра μ зависит образование завихрений в течении газа, их расположение в области. При μ , равном 0.1 и 0.01, завихрения устойчивы, то есть в течение долгого времени практически не меняют своего местоположения и не исчезают; при $\mu = 0.001$ нельзя выделить постоянных участков завихрения.
4. Чем больше параметр μ и меньше скорость течения газа, тем быстрее поток газа стабилизируется (т.е. скорость практически перестаёт меняться).

Результаты (условие стабилизации: $|Vi_OLD - Vi|_2^1 < 1e - 03$, $i = 1, 2$):

ω	0.1			0.05	0.01
μ	dif V1	dif V2	time	time	time
0.1	9.93e-04	4.39e-04	47.375	25.375	6.375
0.01	9.97e-04	6.48e-04	110	81.625	27.25
0.001	9.96e-04	8.68e-04	250.375	196.75	171.625