Отчет по заданию "Решение системы нелинейных уравнений"

Сибгатуллин Артур, 208 учебная группа

21 Мая, 2020

Содержание

1 Введение

В курсе предмета "Работа на ЭВМ и программирование"перед нами была поставлена задача: численно решить систему нелинейных уравнений методом **"Сжимающих отображений"**, с использованием языка C++.

2 Исходные данные

Система нелинейных уравнений (№ 8 в списке задач). Небходимо найти решение $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{\not{2}}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (1+\alpha^2)x = e^{-(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+cos(y)-1)^2} \\ \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}} + 3y + \frac{1}{1+y^2} = 0 \end{cases}$$

3 Теоретическая часть

Для численного решения данной системы воспользуемся итеррационным методом "Сжимающие отображения". Определим необходимый нам набор фактов:

- ***Определение:*** *Пусть на метрическом пространстве* $(\mathbb{M}, \rho)$ *определён оператор* $\mathbf{A} : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$. *Он называется сжимающим на* $\mathbb{M}$, *если существует такое неотрицательное число* $\alpha < 1$, *что* $\forall x, y \in \mathbb{M}$ *выполняется неравенство* $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha * \rho(x, y)$.

- ***Определение:*** *Матричной нормой* $\|A\|_1$ *матрицы размером* $m \times n$ *назовем число* $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

- ***Теорема(Банах-Каччиопполи):*** *Пусть*

  1. X *– полное пространство с нормой* $\| \circ \|$
  2. $\Omega \subset X$, *где* $\Omega -$ *замкнутое множество*
  3. Ω *- выпуклое множество*
  4. *Задано отображение* $F : \Omega \times A \to \Omega$
  5. $\forall \bar{x} \in \Omega \ \exists \ \frac{\partial F(\bar{x}, \alpha)}{\partial \bar{x}}$
  6. $\forall \bar{x} \in \Omega \ F(\bar{x}, \alpha)$ *- непрерывное по* α
  7. $\forall \bar{x} \in \Omega \ \forall \alpha \in A$ *верно, что* $\|\frac{\partial F}{\partial \bar{x}}\| \leq q < 1$

  Тогда:

  1. F *является сжимающим отображением на* Ω

2. *Существует единственное решение* $\bar{x}_0 = \bar{x}_0(\alpha)$ *уравнения* $F(\bar{x}) = \bar{x}$

3. *Последовательность* $\{\bar{x}_k\}_{n=1}^{\infty}$, *где* $\bar{x}_i = \bar{x}_i(\alpha)$ $\bar{x}_{k+1} = F(\bar{x}_k, \alpha_0)$, *сходится к* $\bar{x}_0 = \bar{x}_0(\alpha)$ *- решение уравнения* $F(\bar{x}) = \bar{x}$,

4. *При* $0 \leq q < 1$ *мы можем оценить скорость сходимости последовательности* $\{\bar{x}_k\}_{n=1}^{\infty}$.
   $\|\bar{x}_k - \bar{x}_0\| \leq \frac{q^k}{1-q} * \|\bar{x}_0 - \bar{x}_1\|$

Таким образом мы можем представить нашу систему:

$$\begin{cases} (1+\alpha^2)x = e^{-(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + cos(y) - 1)^2} \\ \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}} + 3y + \frac{1}{1+y^2} = 0 \end{cases}$$

в виде

$$\begin{cases} \widetilde{F_1}(x,y,\alpha) = x \\ \widetilde{F_2}(x,y,\alpha) = y \end{cases}$$

и показать, что все условия **Теоремы(Банах-Каччиопполи)** выполняются. Далее с помощью итеррационного процесса описанного в пункте 3 найти решение нашей системы для заданного α.

4 Практическая часть

Приведем систему

$$\begin{cases}(1+\alpha^2)x = e^{-(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+cos(y)-1)^2} \\ \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}+3y+\frac{1}{1+y^2}=0\end{cases} \qquad (1)$$

к виду (2), выразив x из 1 уравнения и y из 2.

$$\begin{cases}\widetilde{F_1}(x,y,\alpha)=x \\ \widetilde{F_2}(x,y,\alpha)=y\end{cases} \qquad (2)$$

. Получили (3)

$$\begin{cases}x = \frac{e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\cos(y)-1\right)^2}}{\alpha^2+1} \\ y = -\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{y^2+1}\right)\end{cases} \qquad (3)$$

Составим матрицу Якоби ($J_{\widetilde{F}(x,y,\alpha)}$) и оценим ее $\|A\|_1$-норму.

$$J_{\widetilde{F}(x,y,\alpha)} = \begin{pmatrix}\frac{\partial\widetilde{F_1}(x,y,\alpha)}{\partial x} & \frac{\partial\widetilde{F_1}(x,y,\alpha)}{\partial y} \\ \frac{\partial\widetilde{F_2}(x,y,\alpha)}{\partial x} & \frac{\partial\widetilde{F_2}(x,y,\alpha)}{\partial y}\end{pmatrix}$$

Таким образом получаем, что матрица Якоби имеет вид.

$$\begin{pmatrix} -\frac{2e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\cos(y)-1\right)^2}\left(\sqrt{x^2+1}\cos(y)-\sqrt{x^2+1}+x\right)}{(\alpha^2+1)(x^2+1)^2} & \frac{e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\cos(y)-1\right)^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\cos(y)-1\right)2\sin(y)}{\alpha^2+1} \\ -\frac{x\left(x^2+2\right)}{6(x^2+1)^{3/2}} & \frac{2y}{3(y^2+1)^2}\end{pmatrix}$$

Оценим модули всех элементов матрицы Якоби:

- $|J_{11}| = |-\frac{2e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\cos(y)-1\right)^2}\left(\sqrt{x^2+1}\cos(y)-\sqrt{x^2+1}+x\right)}{(\alpha^2+1)(x^2+1)^2}| \leq |\frac{2\left(\sqrt{x^2+1}\cos(y)-\sqrt{x^2+1}+x\right)}{(\alpha^2+1)(x^2+1)^2}| \leq$
  $\leq |\frac{2\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+1}+x\right)}{(\alpha^2+1)(x^2+1)^2}| \leq \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ (4).
  Найдем максимум выражения (4):
  $\frac{|2x|}{(x^2+1)^2}' = \frac{2}{(x^2+1)^2}-\frac{8x^2}{(x^2+1)^3}$.
  Корни уравнения $\frac{2}{(x^2+1)^2}-\frac{8x^2}{(x^2+1)^3}=0$ равны $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
  Максимум в точке $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и он равен $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

- $|J_{21}| = |-\frac{x\left(x^2+2\right)}{6(x^2+1)^{3/2}}| \le |\frac{x\left(x^2+2\right)}{(x^2+1)^{3/2}}|(5)$.
  Найдем максимум выражения (5):
  $\frac{|x|\left(x^2+2\right)'}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{2-x^2}{(x^2+1)^{5/2}}$
  Корни уравнения $\frac{2-x^2}{(x^2+1)^{5/2}} = 0$ равны $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.
  Максимум в точке $x_1 = -\sqrt{2}$ и он равен $\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{9}$

  Таким образом сумма элементов 1 столбца матрицы Якоби равна $\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{9} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.85$

- $|J_{12}| = |\frac{2\sin(y)e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\cos(y)-1\right)^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\cos(y)-1\right)\sin(y)}{\alpha^2+1}| \le |\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\cos(y)-1\right)\sin(y)}{\alpha^2+1}| \le$
  $\le |2\sin(y)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\cos(y)-1\right)| \le |2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\cos(y)-1\right)| \le |2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)|$
  Заметим что $\lim\limits_{x\to\infty} |2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)| = 2$, максимум достигается только на ∞.

- $|J_{22}| = |\frac{2y}{3(y^2+1)^2}|$ (6) Найдем максимум выражения (6):
  $|\frac{2y}{3(y^2+1)^2}|' = \frac{2-6y^2}{3(y^2+1)^3}$
  Корни уравнения $\frac{2-6y^2}{3(y^2+1)^3} = 0$, в точках $y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Максимуму в точке $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и он равен $\frac{\sqrt{3}}{8}$

  Как можно сумма модулей элементов столбца 2 может стать больше 1 на $\mathbb{R}^2$, поэтому определим Ω так, чтобы норма оставалась меньше 1. Пусть $\Omega = [-0.4; 0.4] \times \mathbb{R}$, при ней сумма модулей элементова столбца $2 \approx 0.95$

Таким образом $q = 0.95 < 1$, заметим что все остальные условия Теоремы(Банаха-Каччиопполи) тоже выполняются, поэтому можем найти решение системы (1) с помощью принципа **"Сжимающих отображений"**.
Оценим количество шагов иттерационного метода с помощью 4 вывода из Теоремы(Банаха-Каччиопполи): $q = 0.05$, точность необходимая нам в расчетах $\epsilon = \|\bar{x}_0 - \bar{x}_k\|$ из 4 вывода имеем: $k \ge \log_q \frac{\epsilon(1-q)}{\|\bar{x}_0-\bar{x}_1\|}$.
За начальную точку возьмем $(0;0)$, тогда $\bar{x}_0 = \{\frac{1}{\alpha^2+1}, \frac{-1}{3}\}$, $\bar{x}_1 = \widetilde{F}(x_0, y_0, \alpha) =$

$$= \left\{ \frac{e^{-\left(\frac{1}{(a^2+1)\sqrt{\frac{1}{(a^2+1)^2}+1}}-1+\cos\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2}}{a^2+1}, \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2(a^2+1)\sqrt{\frac{1}{(a^2+1)^2}+1}} - \frac{9}{10}\right) \right\}$$

$\|\bar{x}_0 - \bar{x}_1\| =$

$$= \| \left\{ \frac{-1+e^{-\left(\frac{1}{(a^2+1)\sqrt{\frac{1}{(a^2+1)^2}+1}}-1+\cos\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2}}{a^2+1}, \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2(a^2+1)\sqrt{\frac{1}{(a^2+1)^2}+1}} - \frac{19}{10}\right) \right\} \|$$

$$\|\bar{x}_0 - \bar{x}_1\| \leq \sqrt{\frac{1}{9}\left(\frac{19}{10} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \left(e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1+\cos\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2} - 1\right)^2} \approx 0.6$$

Оценка на k:
$k \geq \log_{0.95}(\frac{\epsilon * 0.05}{0.6})$