

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

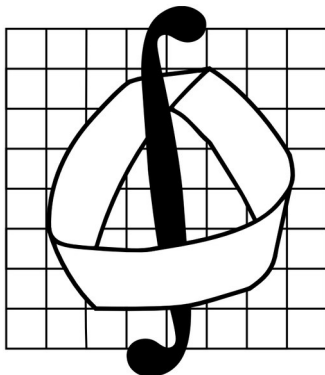


Схема А.Г.Соколова ПЛОТНОСТЬ-СКОРОСТЬ (параллельная)

Оглавление

1	Постановка задачи	3
2	Описание области	3
3	Описание схемы	3
4	Координатная запись уравнений	4
5	Расчет гладкого решения	4
	Постановка задачи	4
	Таблицы ошибок	5
6	Задача протекания	7
7	Сравнение собственной реализации и реализации в пакете <i>LASPACK</i>	36
	Сравнение моментов завершения программы	36

1 Постановка задачи

Приведем систему уравнений, описывающую нестационарное движение баротропного газа в области Ω :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \right] + \nabla p = L \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \\ p = p(\rho), \end{cases} \quad (1)$$

где L есть линейный симметричный положительно определенный оператор. В нашей задаче берем

$$L \mathbf{u} \equiv \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{3} \nabla(\mu \operatorname{div} \mathbf{u})$$

Как и в одномерном случае, через μ обозначаем известную константу (0.1, 0.01 или 0.001), давление газа полагаем равным $p = C\rho$, где $C = 1, 100, 1000$. Вектор внешних сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ считаем заданным.

Поскольку мы рассматриваем двумерную по пространству задачу, то напишем уравнения системы в этом случае:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} = f_0, \\ \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2 u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho f_1 \\ \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho f_2 \end{cases} \quad (2)$$

Неизвестные функции: плотность ρ и вектор скорости \mathbf{u} являются функциями переменных Эйлера $(t, \mathbf{x}) \in Q = [0, T] \times \Omega$

В начальный момент времени задаются функции, значения которых определяют плотность и скорость газа в каждой точке Ω :

$$(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0), \quad x \in \Omega.$$

А так же рассмотрим граничные условия прилипания газа: $u|_{\partial\Omega} = 0$.

2 Описание области

Рассмотрим следующую область Ω :

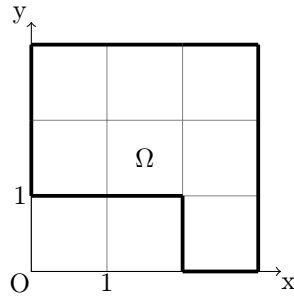


Рис. 1: Область Ω .

3 Описание схемы

$$\begin{cases} H_t + (\sigma_1 \{ \hat{H}, V_{1s_2} \} V_{1s_2})_{x_1} + (\sigma_2 \{ \hat{H}, V_{2s_1} \} V_{2s_1})_{x_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h^{\frac{1}{2}} \\ H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} V_{1t} + H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \delta_1 \{ \hat{V}_1, V_1 \} + H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \delta_2 \{ \hat{V}_1, V_2 \} + p(H_{\bar{s}_2}) \bar{x}_1 = \\ = \mu \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_1)_{x_1 \bar{x}_1} + (\hat{V}_1)_{x_2 \bar{x}_2} \right) + \frac{\mu}{3} (V_2)_{x_1 x_2} + f_1 H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2}, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \neq 0, \\ \hat{V}_1 = 0, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \\ H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} V_{2t} + H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \delta_1 \{ \hat{V}_2, V_1 \} + H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \delta_2 \{ \hat{V}_2, V_2 \} + p(H_{\bar{s}_1}) \bar{x}_2 = \\ = \mu \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_2)_{x_2 \bar{x}_2} + (\hat{V}_2)_{x_1 \bar{x}_1} \right) + \frac{\mu}{3} (V_1)_{x_1 x_2} + f_2 H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2}, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \neq 0, \\ \hat{V}_2 = 0, \quad \text{при } H_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}; \end{cases} \quad (3)$$

4 Координатная запись уравнений

Используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{m_1, m_2}^n &= \frac{H_{m_1, m_2}^n + H_{m_1-1, m_2}^n + H_{m_1, m_2-1}^n + H_{m_1-1, m_2-1}^n}{4}, \\ \tilde{V}_{1, m_1, m_2}^n &= \frac{V_{1, m_1, m_2}^n + V_{1, m_1, m_2+1}^n}{2}, \quad \tilde{V}_{2, m_1, m_2}^n = \frac{V_{2, m_1, m_2}^n + V_{2, m_1+1, m_2}^n}{2}, \\ H_{1, m_1, m_2}^n &= \frac{H_{m_1, m_2}^n + H_{m_1, m_2-1}^n}{2}, \quad H_{2, m_1, m_2}^n = \frac{H_{m_1, m_2}^n + H_{m_1-1, m_2}^n}{2}.\end{aligned}$$

Тогда первое уравнение разностной схемы в координатах выглядит так:

$$\left\{ \begin{aligned} & H_{m_1, m_2}^{n+1} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2h_1} (\tilde{V}_{1, m_1+1, m_2}^n + |\tilde{V}_{1, m_1+1, m_2}^n| - \tilde{V}_{1, m_1, m_2}^n + |\tilde{V}_{1, m_1, m_2}^n|) + \right. \\ & + \frac{1}{2h_2} (\tilde{V}_{2, m_1, m_2+1}^n + |\tilde{V}_{2, m_1, m_2+1}^n| - \tilde{V}_{2, m_1, m_2}^n + |\tilde{V}_{2, m_1, m_2}^n|) \left. \right) + \\ & + H_{m_1-1, m_2}^{n+1} \left(-\frac{V_{1, m_1, m_2}^n + |\tilde{V}_{1, m_1, m_2}^n|}{2h_1} \right) + H_{m_1, m_2-1}^{n+1} \left(-\frac{V_{2, m_1, m_2}^n + |\tilde{V}_{2, m_1, m_2}^n|}{2h_2} \right) + \\ & + H_{m_1+1, m_2}^{n+1} \left(\frac{\tilde{V}_{1, m_1+1, m_2}^n - |\tilde{V}_{1, m_1+1, m_2}^n|}{2h_1} \right) + H_{m_1, m_2+1}^{n+1} \left(\frac{\tilde{V}_{2, m_1, m_2+1}^n - |\tilde{V}_{2, m_1, m_2+1}^n|}{2h_2} \right) = \frac{H_{m_1, m_2}^n}{\tau} + f_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Второе уравнение:

$$\left\{ \begin{aligned} & V_{1, m_1, m_2}^{n+1} \left(\tilde{H}_{m_1, m_2}^n \left(\frac{1}{\tau} + \frac{|V_{1, m_1, m_2}^n|}{h_1} + \frac{|V_{2, m_1, m_2}^n|}{h_2} \right) + \frac{8\mu}{3h_1^2} + \frac{2\mu}{h_2^2} \right) + \\ & + V_{1, m_1-1, m_2}^{n+1} \left(-\frac{\tilde{H}_{m_1, m_2}^n}{2h_1} (|V_{1, m_1, m_2}^n| + V_{1, m_1, m_2}^n) - \frac{4\mu}{3h_1^2} \right) + V_{1, m_1, m_2-1}^{n+1} \left(-\frac{\tilde{H}_{m_1, m_2}^n}{2h_2} (|V_{2, m_1, m_2}^n| + V_{2, m_1, m_2}^n) - \frac{\mu}{h_2^2} \right) + \\ & + V_{1, m_1+1, m_2}^{n+1} \left(-\frac{\tilde{H}_{m_1, m_2}^n}{2h_1} (|V_{1, m_1, m_2}^n| - V_{1, m_1, m_2}^n) - \frac{4\mu}{3h_1^2} \right) + V_{1, m_1, m_2+1}^{n+1} \left(-\frac{\tilde{H}_{m_1, m_2}^n}{2h_2} (|V_{2, m_1, m_2}^n| - V_{2, m_1, m_2}^n) - \frac{\mu}{h_2^2} \right) = \\ & = \frac{\tilde{H}_{m_1, m_2}^n V_{1, m_1, m_2}^n}{\tau} - \frac{p(H_{1, m_1, m_2}^n) - p(H_{1, m_1-1, m_2}^n)}{h_1} + \frac{\mu}{3} \frac{V_{2, m_1-1, m_2-1}^n - V_{2, m_1-1, m_2+1}^n - V_{2, m_1+1, m_2-1}^n + V_{2, m_1+1, m_2+1}^n}{4h_1 h_2} + \\ & + f_{1, m_1, m_2}^{n+1} \tilde{H}_{m_1, m_2}^n \text{ при } \tilde{H}_{m_1, m_2}^n \neq 0, \text{ иначе } V_{1, m_1, m_2}^{n+1} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Третье уравнение:

$$\left\{ \begin{aligned} & V_{2, m_1, m_2}^{n+1} \left(\tilde{H}_{m_1, m_2}^n \left(\frac{1}{\tau} + \frac{|V_{1, m_1, m_2}^n|}{h_1} + \frac{|V_{2, m_1, m_2}^n|}{h_2} \right) + \frac{8\mu}{3h_2^2} + \frac{2\mu}{h_1^2} \right) + \\ & + V_{2, m_1-1, m_2}^{n+1} \left(-\frac{\tilde{H}_{m_1, m_2}^n}{2h_1} (|V_{1, m_1, m_2}^n| + V_{1, m_1, m_2}^n) - \frac{\mu}{h_1^2} \right) + V_{2, m_1, m_2-1}^{n+1} \left(-\frac{\tilde{H}_{m_1, m_2}^n}{2h_2} (|V_{2, m_1, m_2}^n| + V_{2, m_1, m_2}^n) - \frac{4\mu}{3h_2^2} \right) + \\ & + V_{2, m_1+1, m_2}^{n+1} \left(-\frac{\tilde{H}_{m_1, m_2}^n}{2h_1} (|V_{1, m_1, m_2}^n| - V_{1, m_1, m_2}^n) - \frac{\mu}{h_1^2} \right) + V_{2, m_1, m_2+1}^{n+1} \left(-\frac{\tilde{H}_{m_1, m_2}^n}{2h_2} (|V_{2, m_1, m_2}^n| - V_{2, m_1, m_2}^n) - \frac{4\mu}{3h_2^2} \right) = \\ & = \frac{\tilde{H}_{m_1, m_2}^n V_{2, m_1, m_2}^n}{\tau} - \frac{p(H_{2, m_1, m_2}^n) - p(H_{2, m_1, m_2-1}^n)}{h_2} + \frac{\mu}{3} \frac{V_{1, m_1-1, m_2-1}^n - V_{1, m_1-1, m_2+1}^n - V_{1, m_1+1, m_2-1}^n + V_{1, m_1+1, m_2+1}^n}{4h_1 h_2} + \\ & + f_{2, m_1, m_2}^{n+1} \tilde{H}_{m_1, m_2}^n \text{ при } \tilde{H}_{m_1, m_2}^n \neq 0, \text{ иначе } V_{2, m_1, m_2}^{n+1} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

На каждом временном слое будем сначала из первых двух уравнений находить $V_{1, i, j}$ и $V_{2, i, j}$ и далее использовать найденные значения скоростей для нахождения плотности $H_{i, j}$, $i = m_1 - 1, m_1, m_1 + 1$, $j = m_2 - 1, m_2, m_2 + 1$.

5 Расчет гладкого решения

Постановка задачи

Зададим функции:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) e^t, \\ u_2 &= \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) e^{-t}, \\ \rho &= \left(\cos(2\pi x_1) + \frac{3}{2} \right) \left(\sin(2\pi x_2) + \frac{3}{2} \right) e^t; \end{aligned}$$

Определим функции f_0, f_1, f_2 так, чтобы они удовлетворяли нашей системе. Проведя подстановку и соответствующие вычисления найдем эти функции:

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_{1_t} = u_1 \\
u_{1_{x_1}} = 2\pi \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) e^t \\
u_{1_{x_2}} = 2\pi \sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) e^t \\
u_{1_{x_1, x_1}} = u_{1_{x_2, x_2}} = -4\pi^2 u_1 \\
u_{1_{x_1, x_2}} = 4\pi^2 \cos(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) e^t \\
u_{2_t} = -u_2 \\
u_{2_{x_1}} = 2\pi \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) e^{-t} \\
u_{2_{x_2}} = 2\pi \sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) e^{-t} \\
u_{2_{x_1, x_1}} = u_{2_{x_2, x_2}} = -4\pi^2 u_2 \\
u_{2_{x_1, x_2}} = 4\pi^2 \cos(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) e^{-t} \\
\rho_t = \rho \\
\rho_{x_1} = -2\pi \sin(2\pi x_1) (\sin(2\pi x_2) + \frac{3}{2}) e^t \\
\rho_{x_2} = 2\pi (\cos(2\pi x_1) + \frac{3}{2}) \cos(2\pi x_2) e^t \\
f_0 = \rho_t + u_1 \rho_{x_1} + \rho u_{1_{x_1}} + u_2 \rho_{x_2} + \rho u_{2_{x_2}} \\
f_1 = \frac{u_1 \rho_t + \rho u_{1_t} + u_1^2 \rho_{x_1} + 2\rho u_1 u_{1_{x_1}} + u_1 u_2 \rho_{x_2} + u_1 \rho u_{2_{x_2}} + u_2 \rho u_{1_{x_2}} + p_{x_1} - \frac{4}{3} \mu u_{1_{x_1, x_1}} - \mu u_{1_{x_2, x_2}} - \frac{1}{3} \mu u_{2_{x_1, x_2}}}{\rho} \\
f_2 = \frac{u_2 \rho_t + \rho u_{2_t} + u_2^2 \rho_{x_2} + 2\rho u_2 u_{2_{x_2}} + u_1 u_2 \rho_{x_1} + u_1 \rho u_{2_{x_1}} + u_2 \rho u_{1_{x_1}} + p_{x_2} - \frac{4}{3} \mu u_{2_{x_2, x_2}} - \mu u_{2_{x_1, x_1}} - \frac{1}{3} \mu u_{1_{x_1, x_2}}}{\rho}
\end{array} \right. \quad (7)$$

Таблицы ошибок

Приведем примеры таблиц для точного решения, с нормами $\|r\|_C, \|r\|_{L_2}, \|r\|_{W_2}$ и гиперпараметрами $\mu \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$. Решение матричного уравнения $Ax = b$ получим с помощью применения метода *CGS* с параметрами $eps = 10^{-8}$, $iter = 2000$.

Ошибка для H при $\mu = 0.1$ и $C = 1$

$\tau \mid h$	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	1.23304e+00	3.12446e-01	2.73680e-01	3.54384e-01
	1.98323e+00	1.88145e+00	1.09906e+00	1.00232e+00
	3.13585e+00	2.84273e+00	3.32151e+00	4.98637e+00
0.062500	1.61082e+00	1.29111e-01	8.57467e-02	9.43868e-02
	2.35561e+00	3.23110e-01	3.27156e-01	3.21344e-01
	4.14042e+00	6.32521e-01	9.16265e-01	1.16379e+00
0.015625	1.57527e+00	1.24391e-01	2.89192e-02	2.32585e-02
	2.25466e+00	1.78131e-01	7.72718e-02	8.23970e-02
	4.34593e+00	4.84784e-01	2.15262e-01	3.28356e-01
0.003906	1.57934e+00	1.56803e-01	3.09821e-02	nan
	2.43629e+00	2.16042e-01	4.10631e-02	nan
	4.73620e+00	5.24843e-01	1.72627e-01	nan

Ошибка для $V1$ при $\mu = 0.1$ и $C = 1$

$\tau \mid h$	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	6.45386e-01	5.32165e-01	5.13272e-01	5.23629e-01
	1.78388e+00	1.82753e+00	1.57090e+00	1.67759e+00
	2.65479e+00	2.96527e+00	2.65711e+00	2.56782e+00
0.062500	5.50319e-01	2.17217e-01	1.52959e-01	1.57217e-01
	1.22985e+00	5.14329e-01	4.85880e-01	4.89322e-01
	2.13307e+00	9.72894e-01	7.82833e-01	7.67617e-01
0.015625	6.10840e-01	2.12120e-01	6.43269e-02	4.11846e-02
	1.32356e+00	3.49445e-01	1.41291e-01	1.21266e-01
	2.47862e+00	7.53549e-01	2.72941e-01	2.21814e-01
0.003906	6.25246e-01	2.24076e-01	6.26112e-02	nan
	1.23365e+00	3.54507e-01	8.74891e-02	nan
	2.52557e+00	7.52670e-01	2.10234e-01	nan

Ошибка для $V2$ при $\mu = 0.1$ и $C = 1$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	2.42386e-01	1.84660e-01	1.56632e-01	1.63186e-01
	7.51031e-01	5.12387e-01	4.62779e-01	4.62749e-01
	1.33486e+00	9.73831e-01	9.13057e-01	9.02296e-01
0.062500	2.20233e-01	7.94413e-02	5.89311e-02	5.41233e-02
	6.11824e-01	2.43930e-01	1.73505e-01	1.61306e-01
	1.12427e+00	4.62765e-01	3.41481e-01	3.34108e-01
0.015625	2.12137e-01	4.63756e-02	2.07237e-02	1.58620e-02
	5.95817e-01	1.41565e-01	6.28y41e-02	4.71569e-02
	1.20633e+00	2.93123e-01	1.31289e-01	9.81427e-02
0.003906	2.12640e-01	4.10512e-02	1.01753e-02	nan
	5.76315e-01	1.32347e-01	3.24501e-02	nan
	1.04218e+00	2.45276e-01	7.57592e-02	nan

Ошибка для H при $\mu = 0.01$ и $C = 1$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	1.25134e+00	3.42358e-01	3.53437e-01	3.69937e-01
	1.89629e+00	1.11317e+00	1.12131e+00	1.35125e+00
	3.21359e+00	2.51106e+00	4.23005e+00	6.80713e+00
0.062500	1.45233e+00	1.20250e-01	1.03567e-01	1.08707e-01
	2.32522e+00	3.32439e-01	3.94585e-01	3.35398e-01
	3.79446e+00	7.29242e-01	1.10911e+00	1.81719e+00
0.015625	1.69069e+00	1.99019e-01	3.09701e-02	2.84102e-02
	2.50456e+00	2.13512e-01	8.11596e-02	9.16905e-02
	4.43724e+00	6.06762e-01	2.76275e-01	4.38192e-01
0.003906	1.76608e+00	2.21213e-01	4.32911e-02	6.72927e-03
	2.51627e+00	2.37927e-01	4.86938e-02	2.02217e-02
	4.50865e+00	6.95241e-01	2.12165e-01	1.01912e-01

Ошибка для $V1$ при $\mu = 0.01$ и $C = 1$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	6.42956e-01	5.33808e-01	4.92442e-01	4.74130e-01
	1.64682e+00	1.52167e+00	1.45463e+00	1.32545e+00
	2.69313e+00	2.68132e+00	3.12319e+00	3.04179e+00
0.062500	5.61316e-01	2.18037e-01	1.21561e-01	1.23342e-01
	1.34165e+00	5.19014e-01	4.33248e-01	4.21525e-01
	2.48553e+00	1.23021e+00	9.95792e-01	1.14045e+00
0.015625	6.27397e-01	2.16319e-01	6.21071e-02	3.71861e-02
	1.35459e+00	3.57796e-01	1.24335e-01	1.14096e-01
	2.89804e+00	8.70829e-01	3.31184e-01	2.67790e-01
0.003906	6.65804e-01	2.27496e-01	6.95796e-02	1.53736e-02
	1.23496e+00	3.60884e-01	9.63263e-02	3.23752e-02
	2.70885e+00	9.06177e-01	2.41536e-01	8.46714e-02

Ошибка для $V2$ при $\mu = 0.01$ и $C = 1$

τ h	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	3.34192e-01	1.70876e-01	1.57178e-01	1.71869e-01
	9.13040e-01	6.22138e-01	5.71637e-01	5.49575e-01
	1.93713e+00	1.37360e+00	1.44584e+00	1.51752e+00
0.062500	2.76913e-01	7.82123e-02	5.94199e-02	5.64913e-02
	6.82753e-01	2.65141e-01	1.93921e-01	1.89146e-01
	1.29266e+00	5.79463e-01	4.97860e-01	5.21930e-01
0.015625	2.35533e-01	5.09687e-02	2.22171e-02	1.65048e-02
	6.29389e-01	1.49574e-01	6.84751e-02	5.15202e-02
	1.35199e+00	3.45366e-01	1.87241e-01	1.54731e-01
0.003906	2.54965e-01	4.32543e-02	1.45060e-02	6.10822e-03
	6.27802e-01	1.39525e-01	3.98223e-02	1.70136e-02
	1.11897e+00	3.01632e-01	1.10130e-01	4.97165e-02

Ошибка для H при $\mu = 0.001$ и $C = 1$

$\tau \mid h$	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	1.12324e+00	3.23878e-01	3.56719e-01	3.59762e-01
	2.08968e+00	1.16128e+00	1.07153e+00	1.07156e+00
	3.14836e+00	2.46532e+00	4.23092e+00	7.40208e+00
0.062500	1.59517e+00	1.21244e-01	1.08116e-01	nan
	2.31428e+00	3.66379e-01	3.54714e-01	nan
	3.91435e+00	7.13686e-01	1.21350e+00	nan
0.015625	1.70658e+00	1.20997e-01	3.03192e-02	nan
	2.54055e+00	2.13161e-01	8.30992e-02	nan
	4.42137e+00	6.32476e-01	2.89069e-01	nan
0.003906	1.42928e+00	2.43603e-01	4.52185e-02	nan
	2.47627e+00	2.41030e-01	4.91738e-02	nan
	4.59461e+00	7.12824e-01	2.38261e-01	nan

Ошибка для $V1$ при $\mu = 0.001$ и $C = 1$

$\tau \mid h$	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	6.45499e-01	5.63816e-01	5.66832e-01	5.23781e-01
	1.63540e+00	1.50603e+00	1.54650e+00	1.58352e+00
	2.56704e+00	2.78234e+00	4.21845e+00	6.21718e+00
0.062500	5.46543e-01	2.04322e-01	1.67332e-01	nan
	1.43176e+00	4.89189e-01	4.15800e-01	nan
	2.54858e+00	1.01941e+00	1.21235e+00	nan
0.015625	6.43233e-01	2.32048e-01	6.12035e-02	nan
	1.41745e+00	3.82417e-01	1.32535e-01	nan
	2.98415e+00	9.12451e-01	3.51667e-01	nan
0.003906	6.60845e-01	2.51346e-01	6.83504e-02	nan
	1.51493e+00	3.89521e-01	9.57411e-02	nan
	2.89227e+00	9.34723e-01	2.65292e-01	nan

Ошибка для $V2$ при $\mu = 0.001$ и $C = 1$

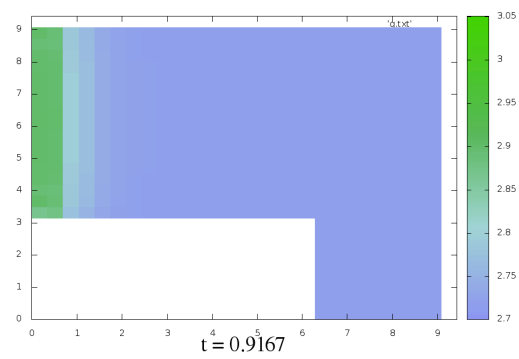
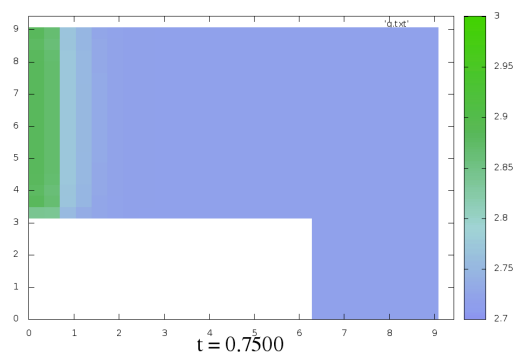
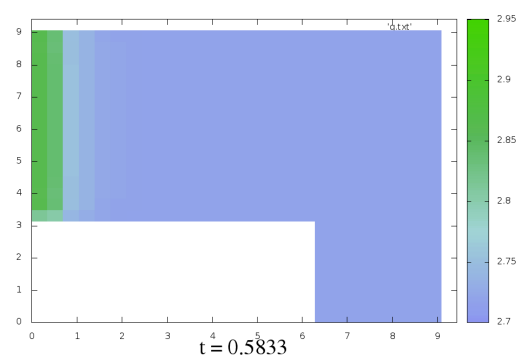
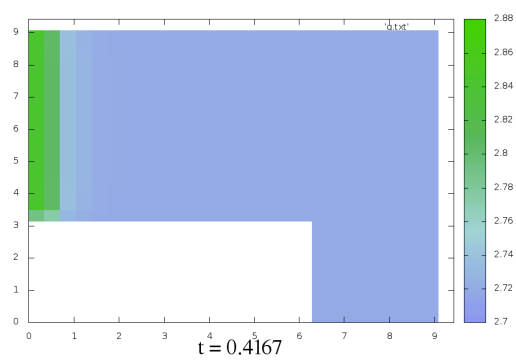
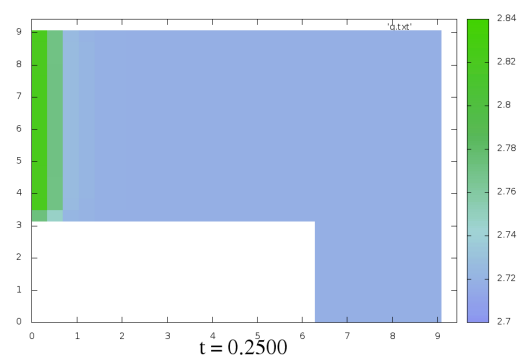
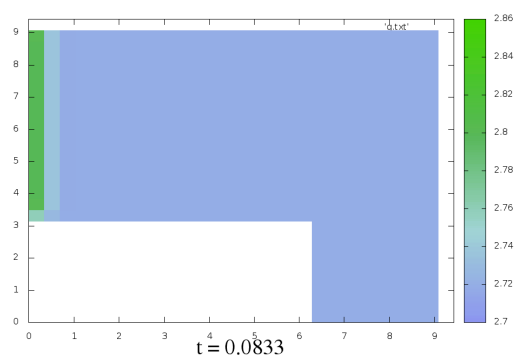
$\tau \mid h$	0.785398	0.392699	0.196350	0.098175
0.250000	3.41539e-01	1.72909e-01	2.35121e-01	2.32102e-01
	9.21088e-01	6.30209e-01	5.82385e-01	5.20791e-01
	1.70969e+00	1.43135e+00	1.60451e+00	2.12647e+00
0.062500	2.76159e-01	7.68506e-02	6.24074e-02	nan
	6.72968e-01	2.50644e-01	2.14596e-01	nan
	1.23169e+00	5.94104e-01	5.18058e-01	nan
0.015625	2.48579e-01	5.19230e-02	2.48397e-02	nan
	6.14621e-01	1.52942e-01	6.28649e-02	nan
	1.21771e+00	3.62534e-01	1.81401e-01	nan
0.003906	2.51365e-01	4.25541e-02	1.55947e-02	nan
	6.35130e-01	1.34672e-01	3.88315e-02	nan
	1.32193e+00	3.24146e-01	1.19084e-01	nan

Анализируя их, можем заметить, что схема сходится с порядком $O(\tau + h^2)$.

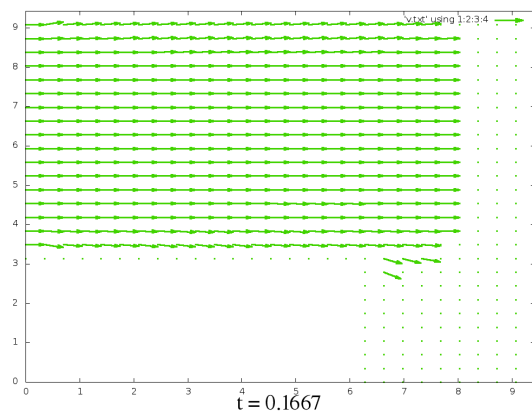
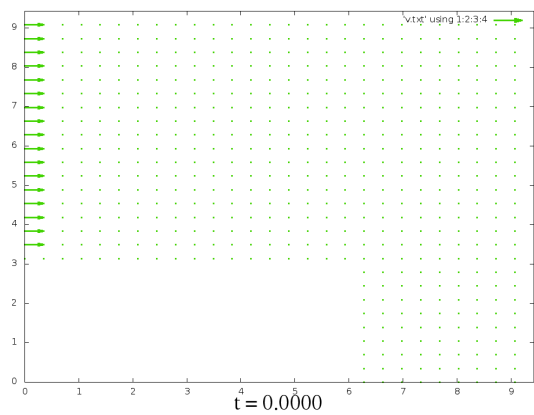
6 Задача протекания

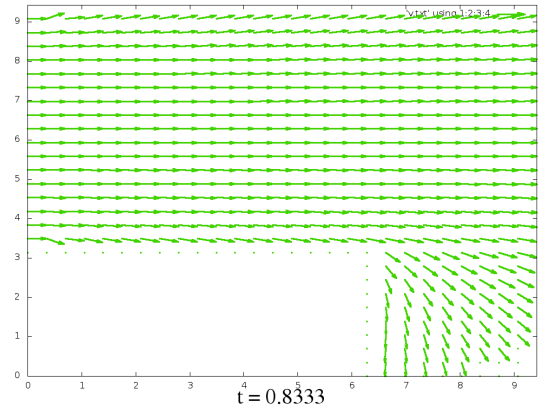
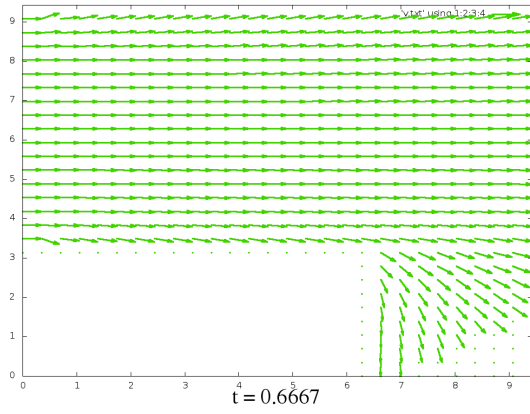
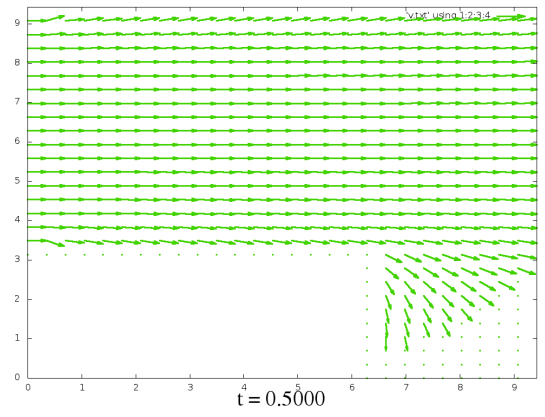
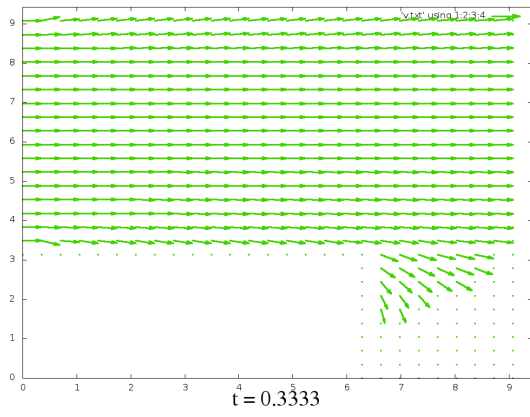
$$\mu = 0.1 \quad M_x = 10; \quad M_y = 10; \quad T = 1$$

Плотность



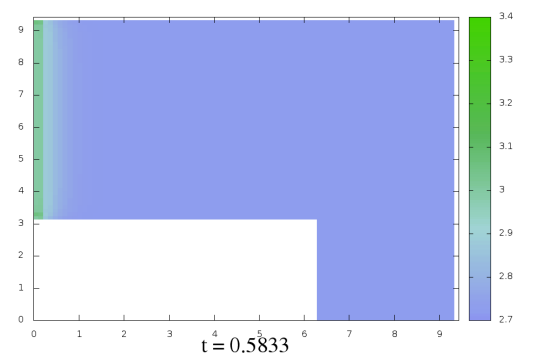
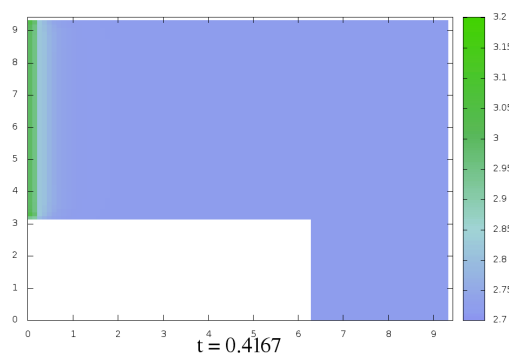
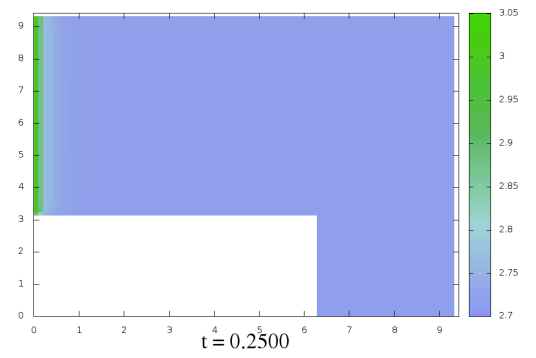
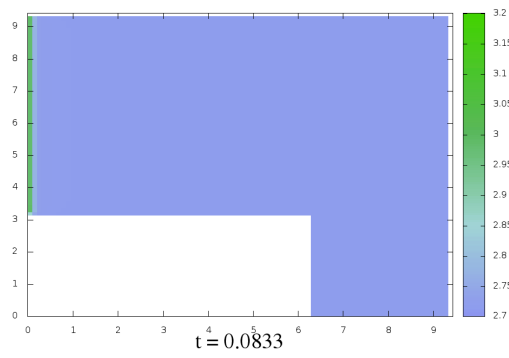
Векторы скорости

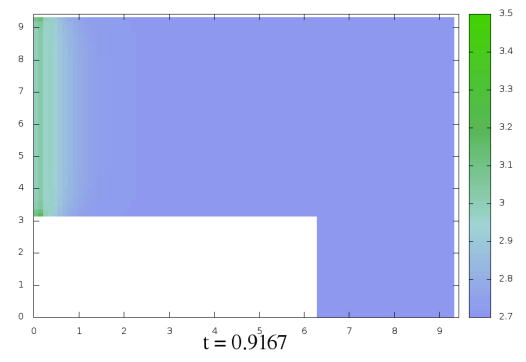
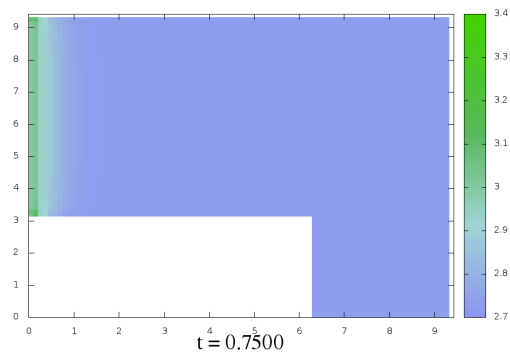




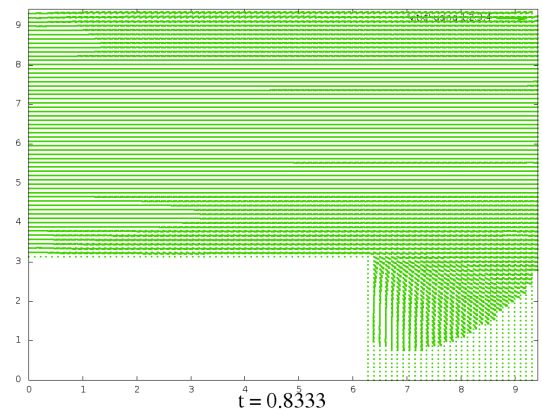
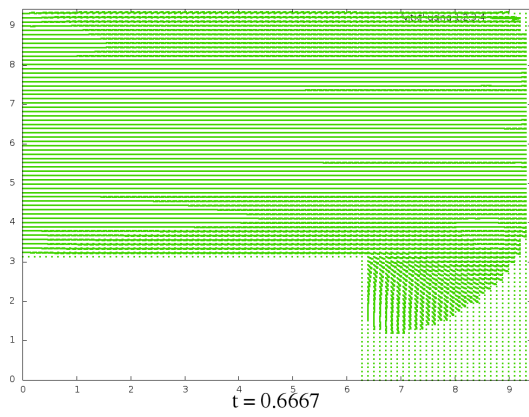
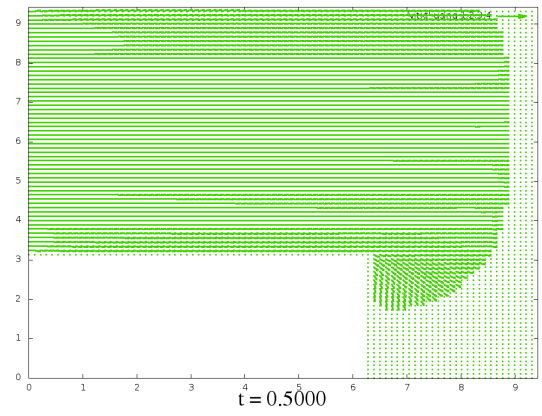
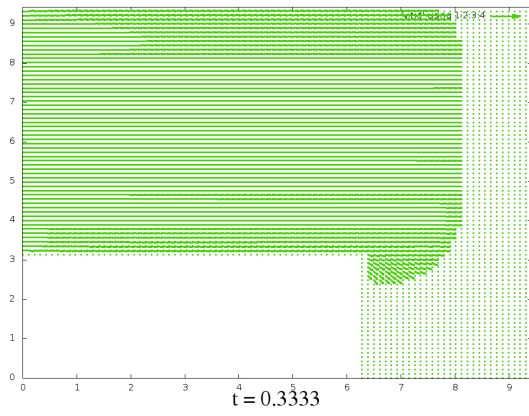
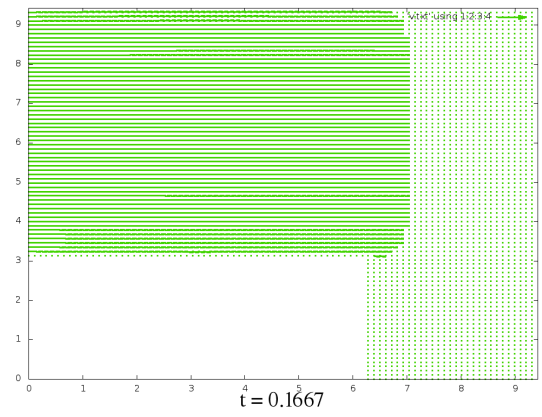
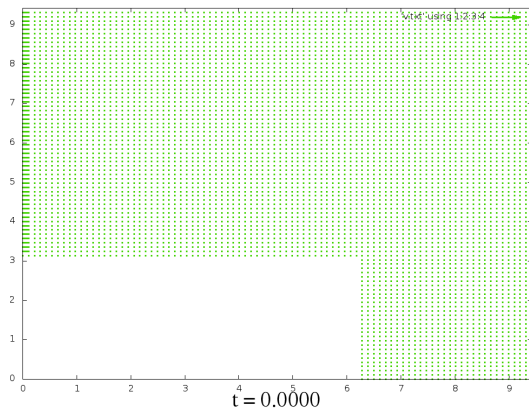
$$\mu = 0.1 \quad M_x = 30; \quad M_y = 30; \quad T = 1$$

Плотность



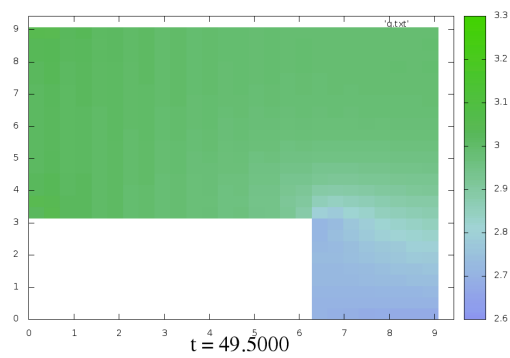
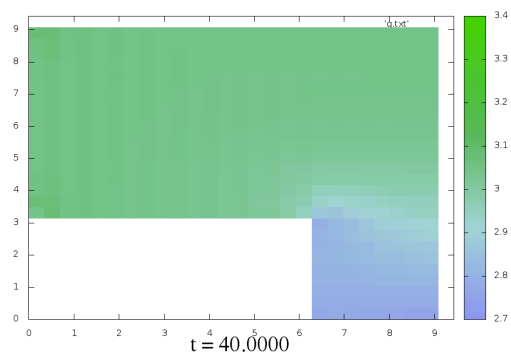
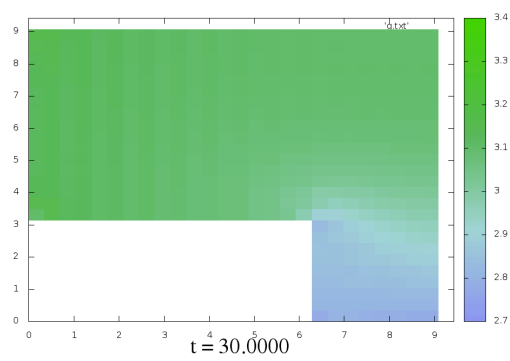
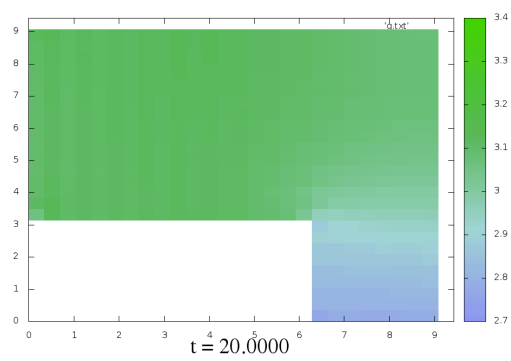
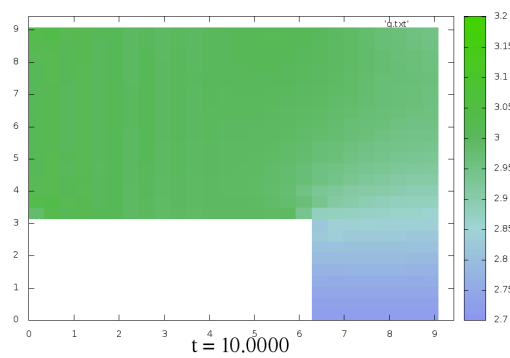
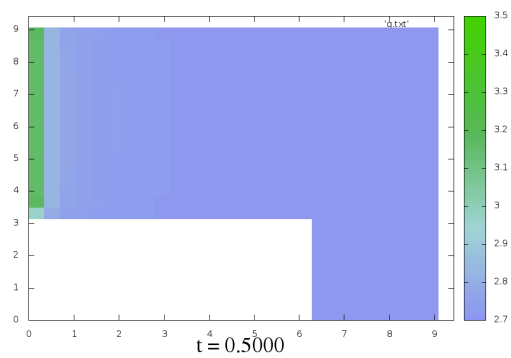


Векторы скорости

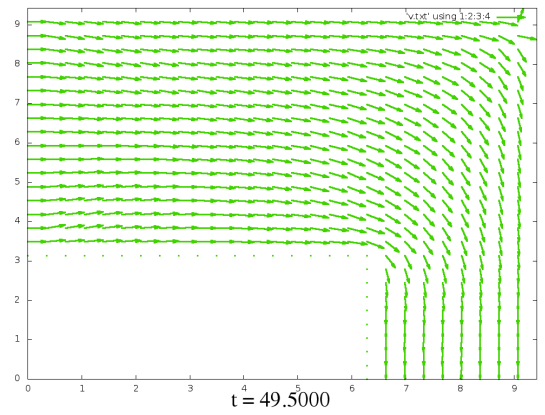
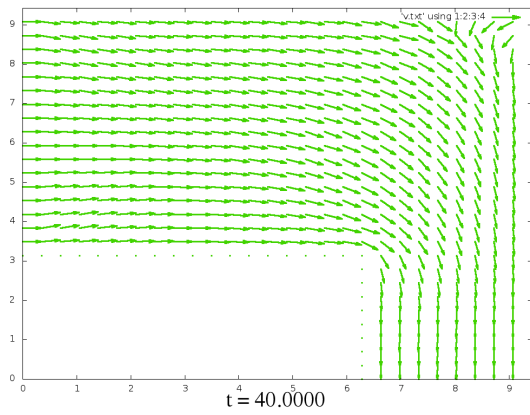
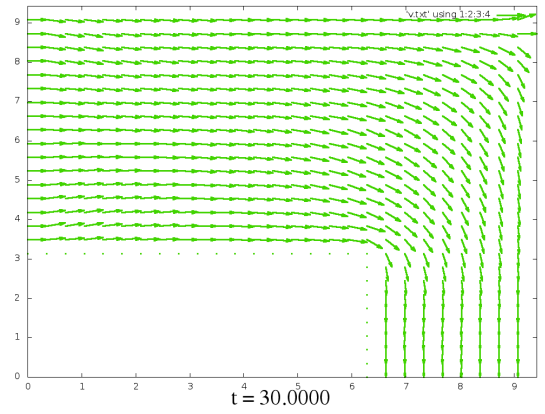
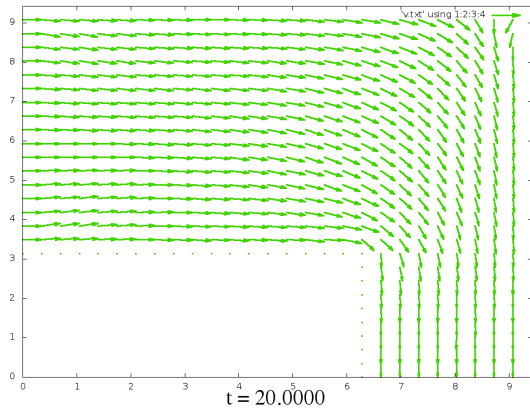
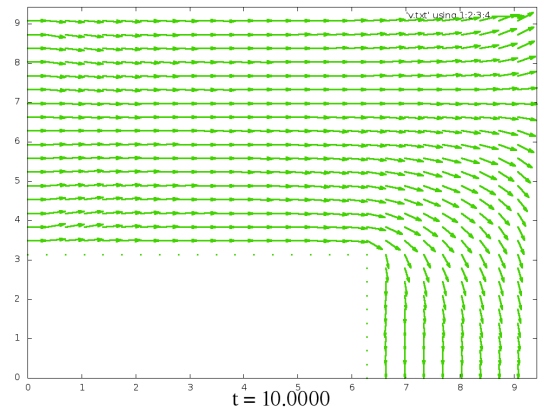
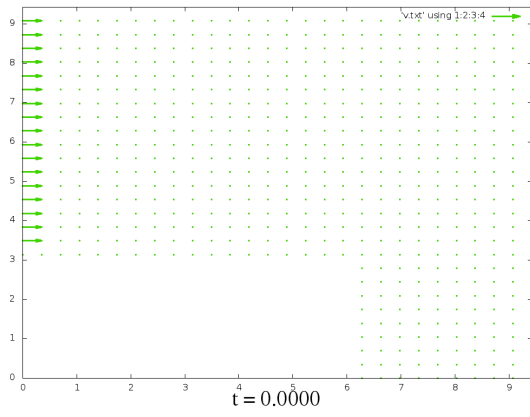


$$\mu = 0.1 \quad M_x = 10; \quad M_y = 10; \quad T = 50$$

Плотность

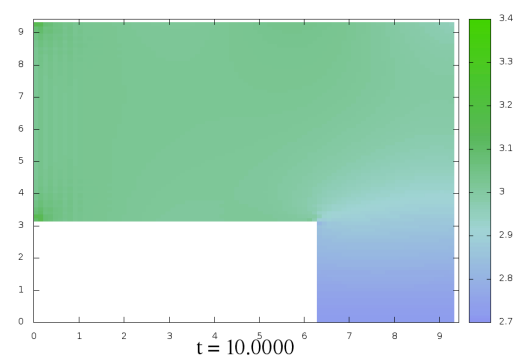
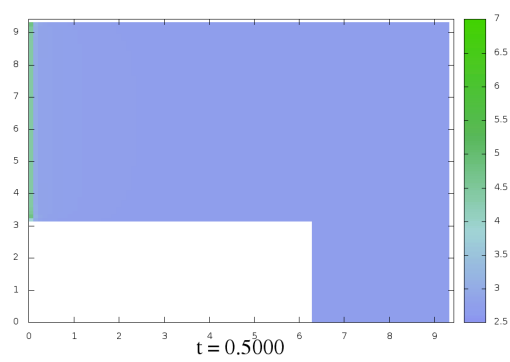


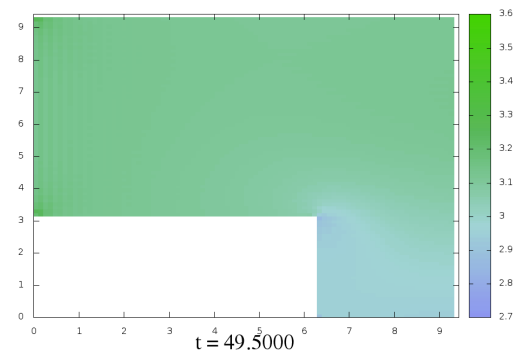
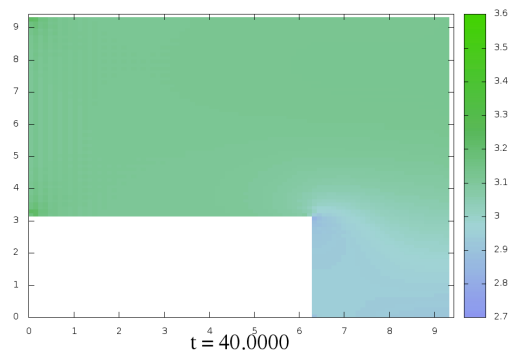
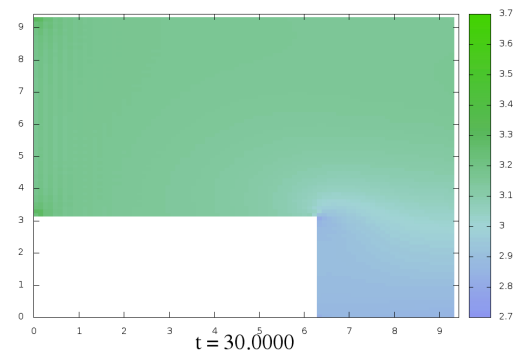
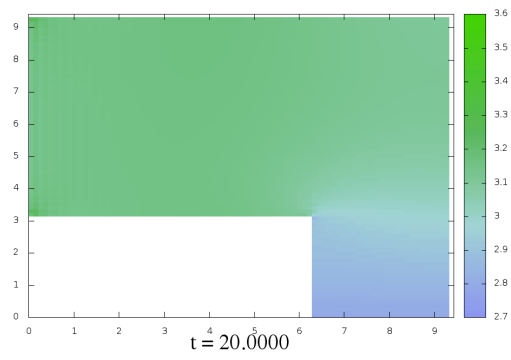
Векторы скорости



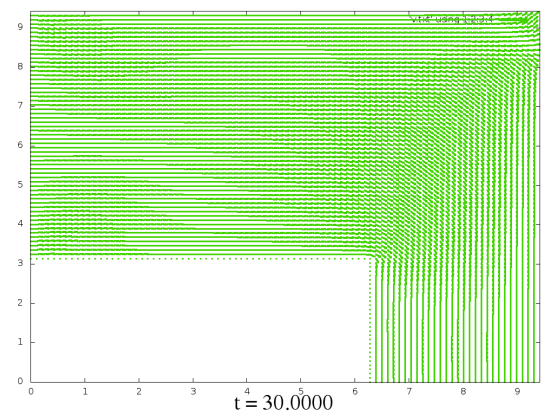
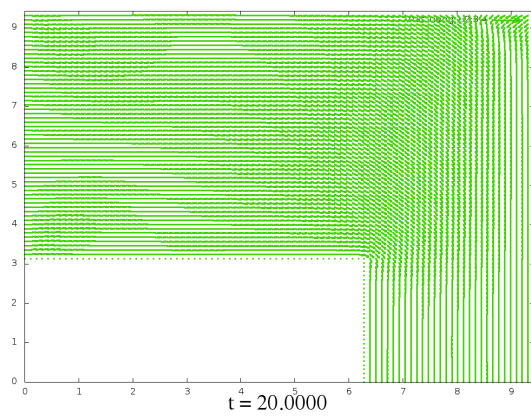
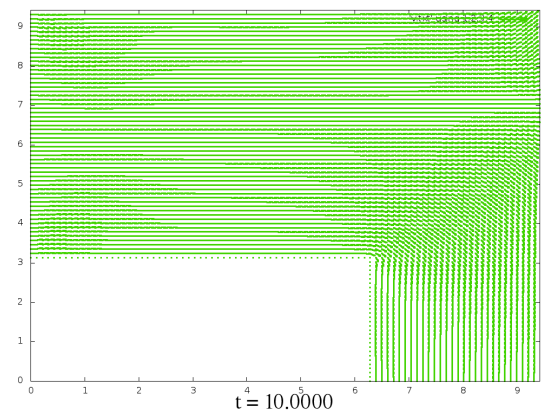
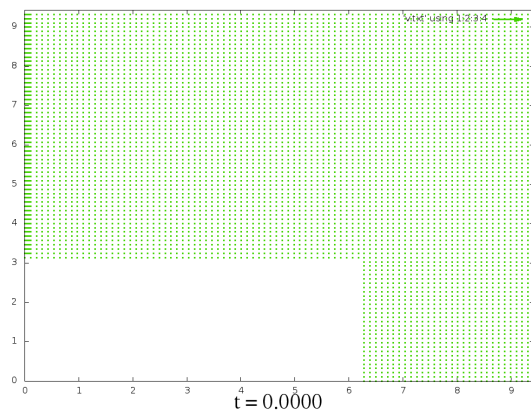
$$\mu = 0.1 \quad M_x = 30; \quad M_y = 30; \quad T = 1$$

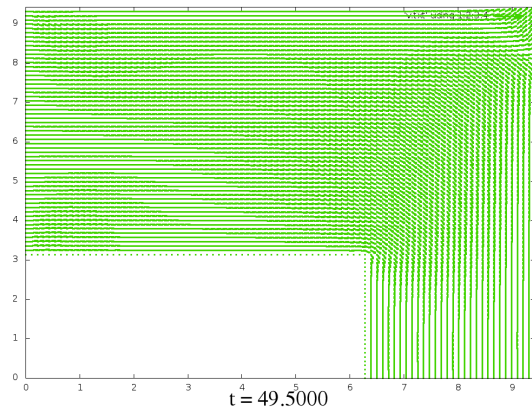
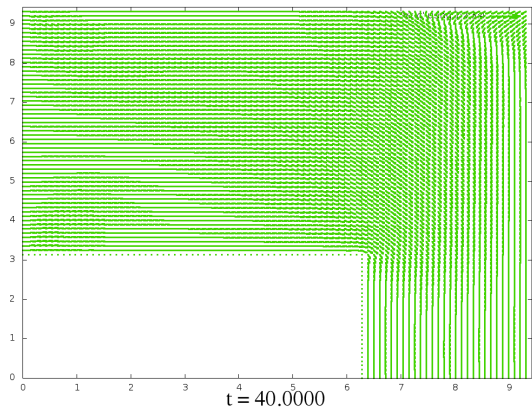
Плотность





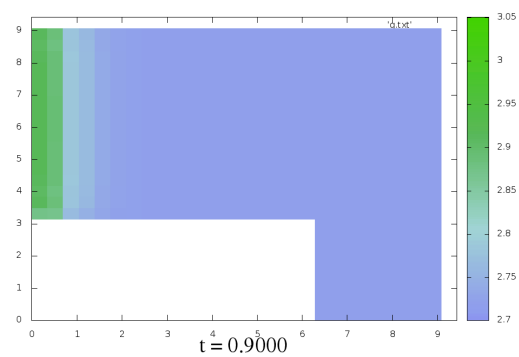
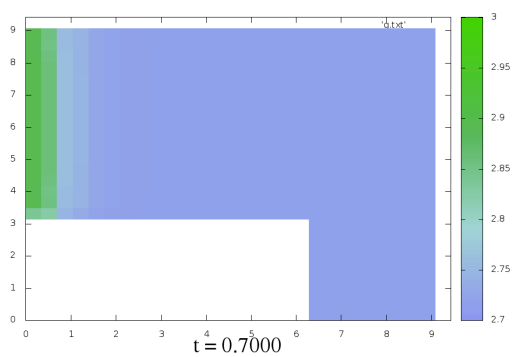
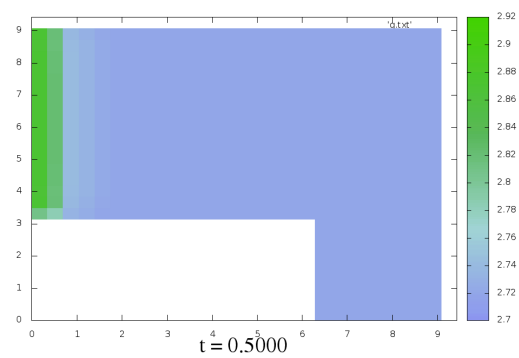
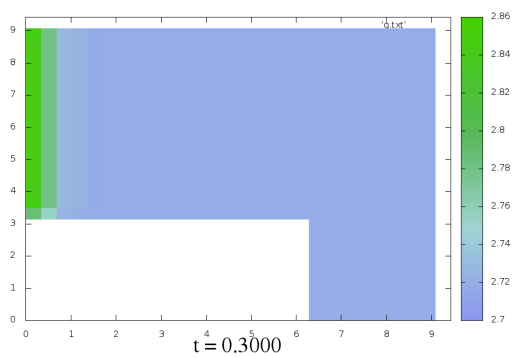
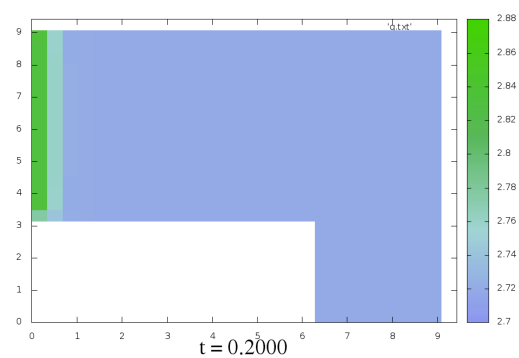
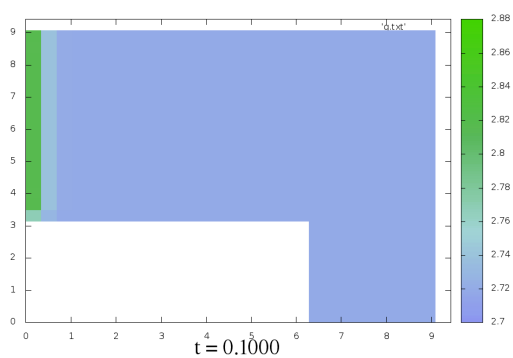
Векторы скорости



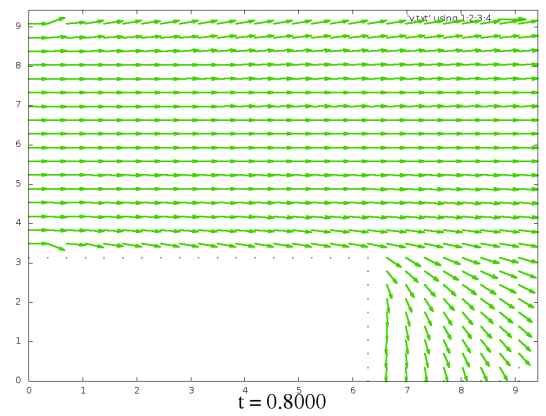
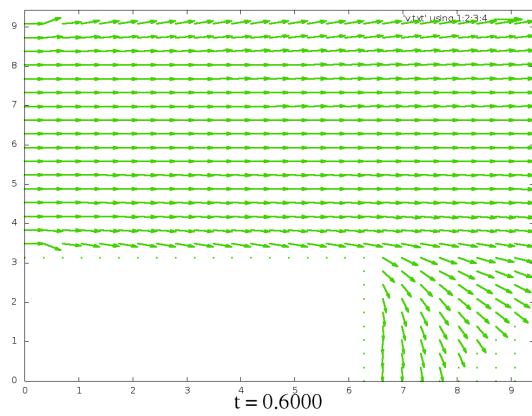
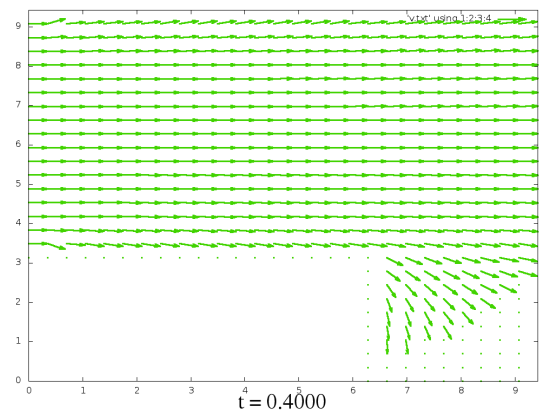
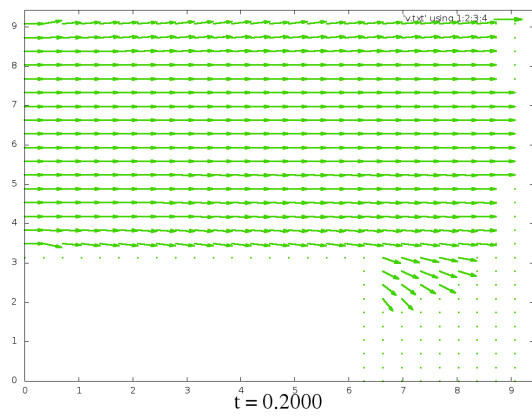
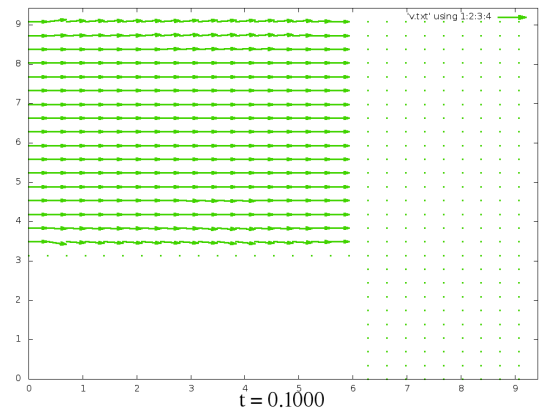
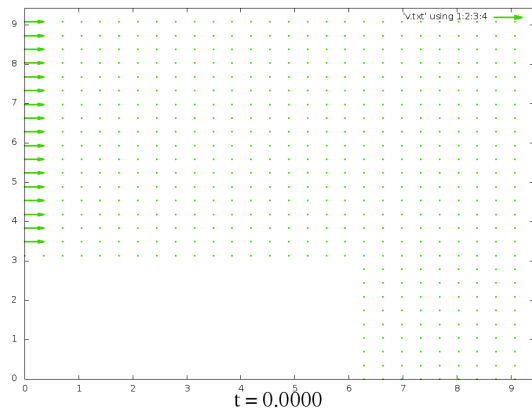


$$\mu = 0.01 \quad M_x = 10; \quad M_y = 10; \quad T = 1$$

Плотность

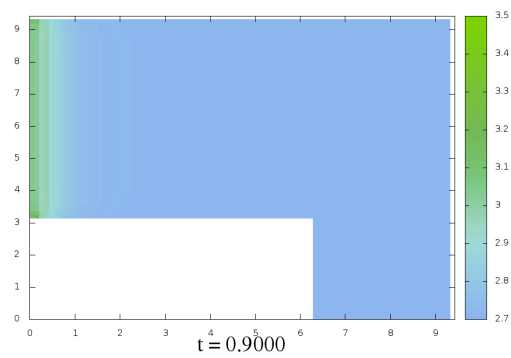
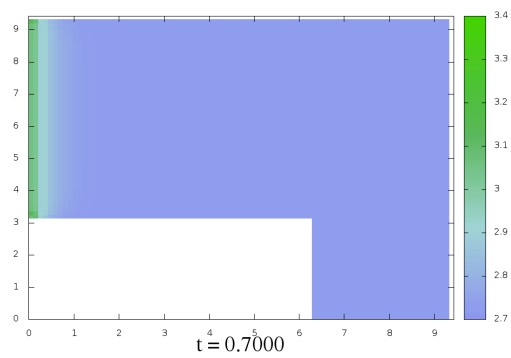
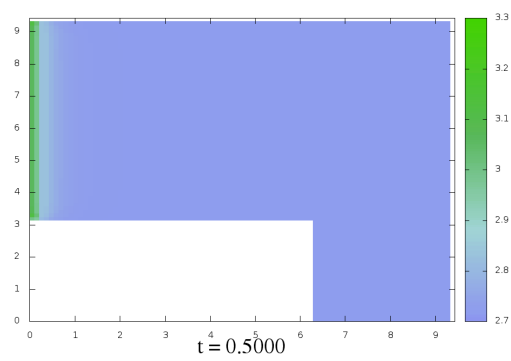
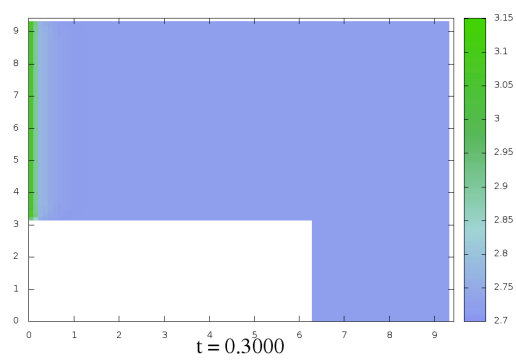
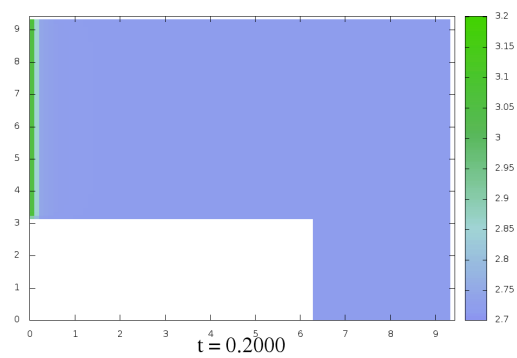
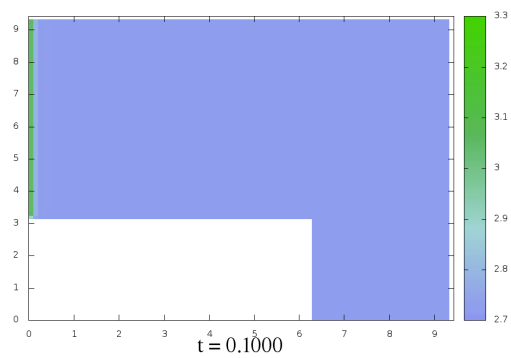


Векторы скорости

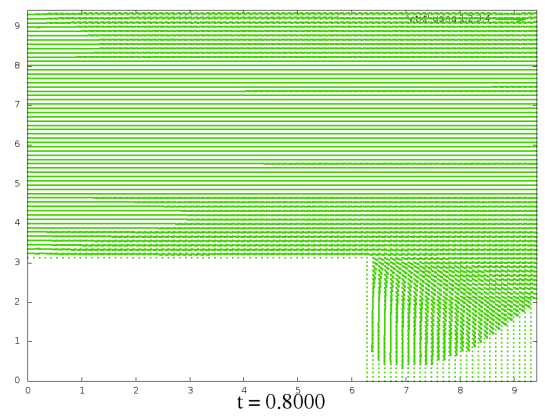
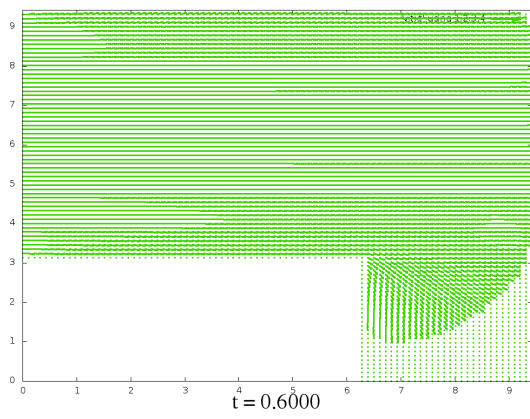
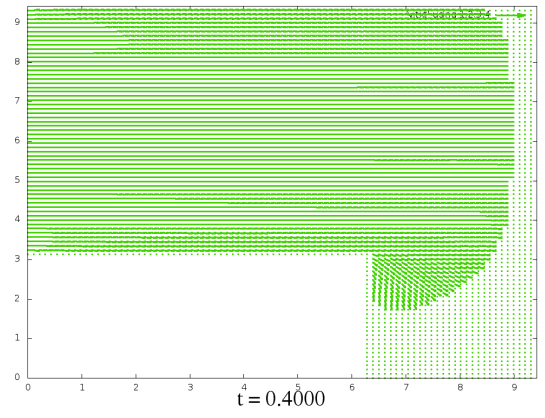
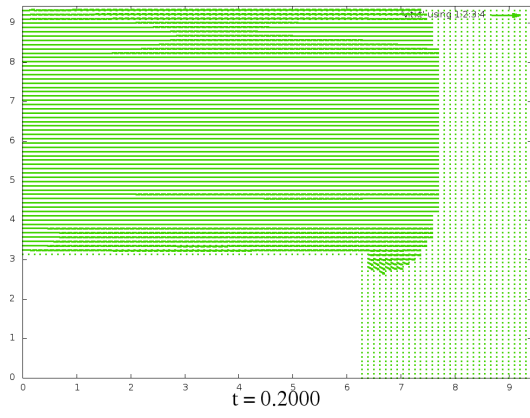
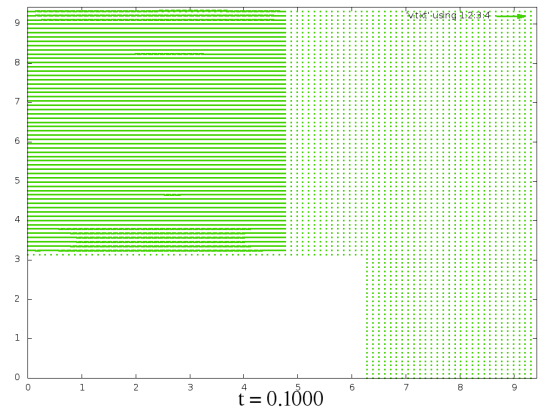
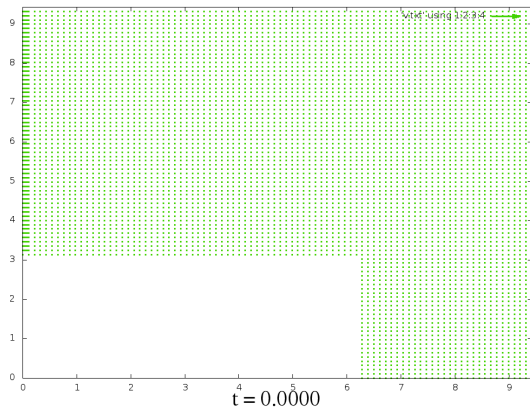


$$\mu = 0.01 \quad M_x = 30; \quad M_y = 30; \quad T = 1$$

Плотность

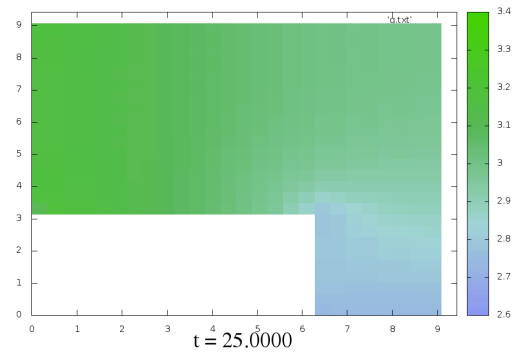
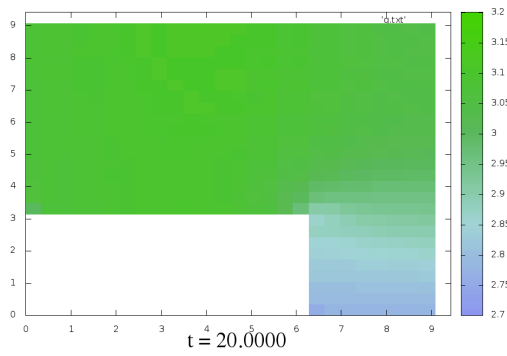
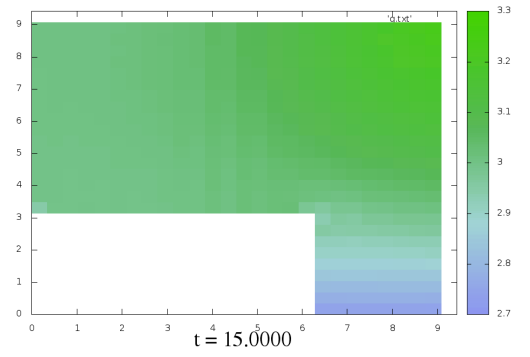
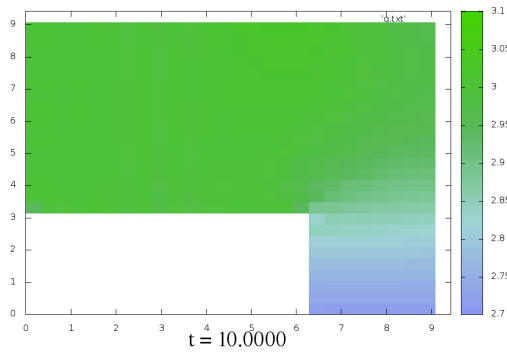
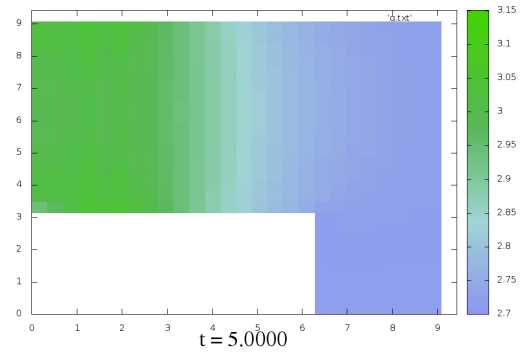
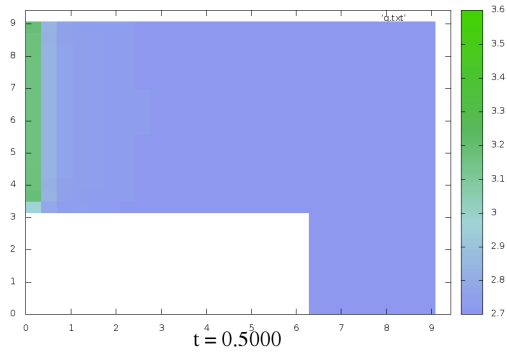


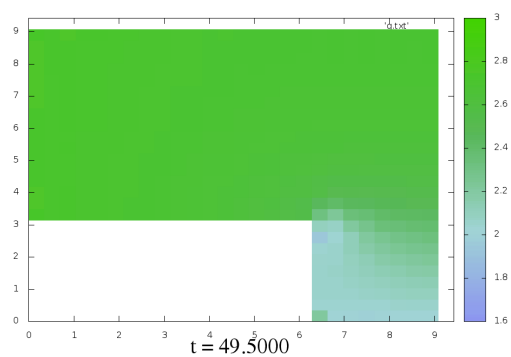
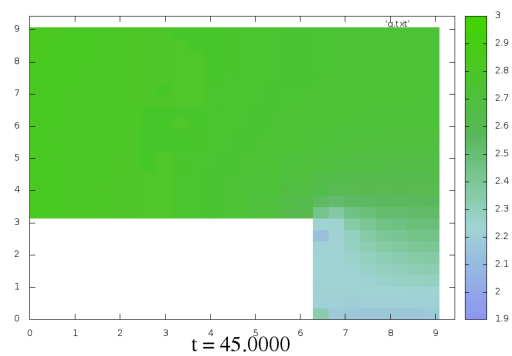
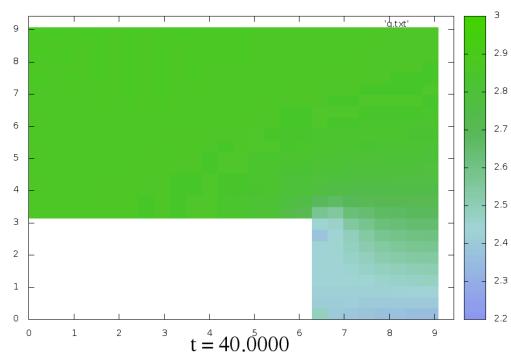
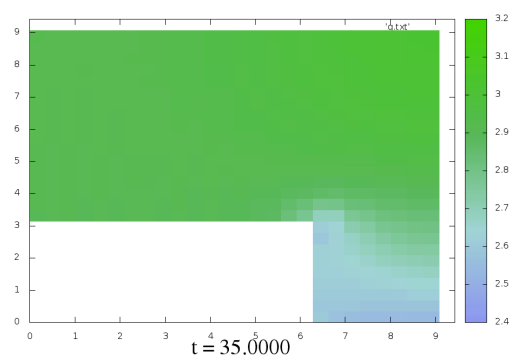
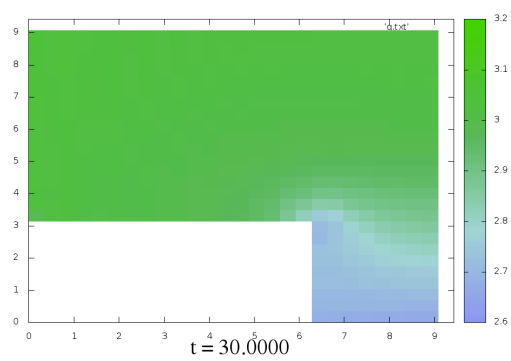
Векторы скорости



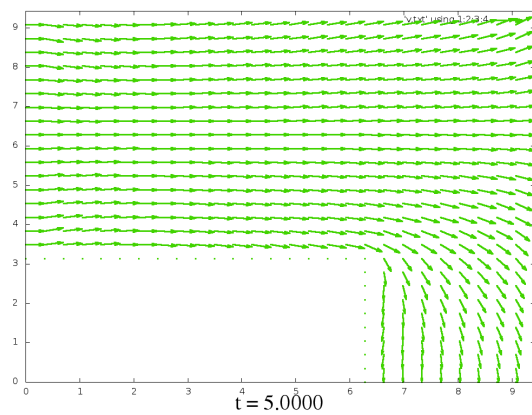
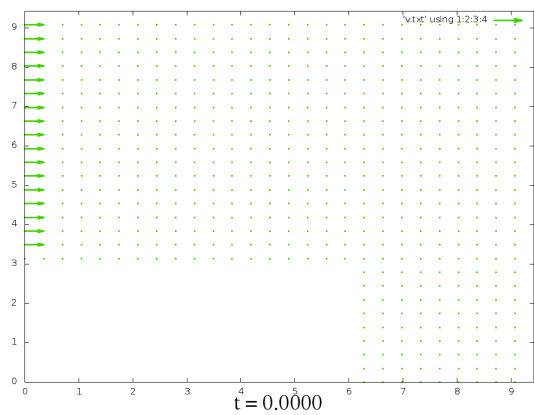
$$\mu = 0.01 \quad M_x = 10; \quad M_y = 10; \quad T = 50$$

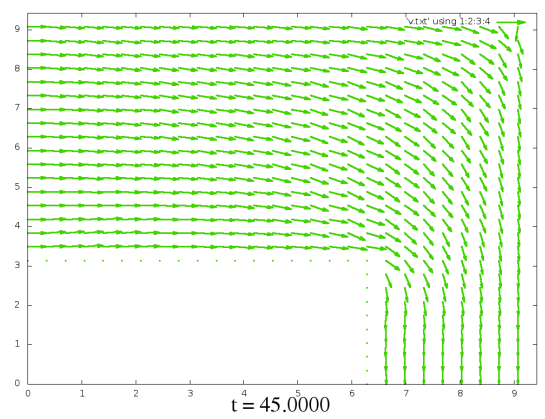
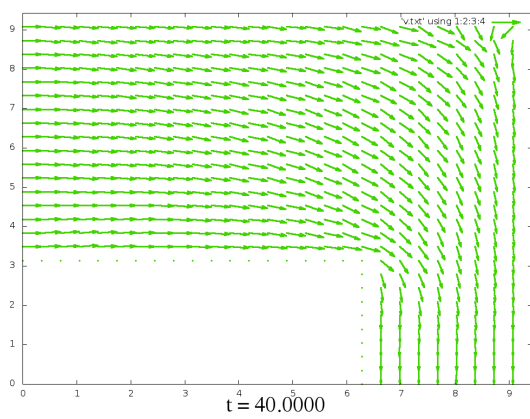
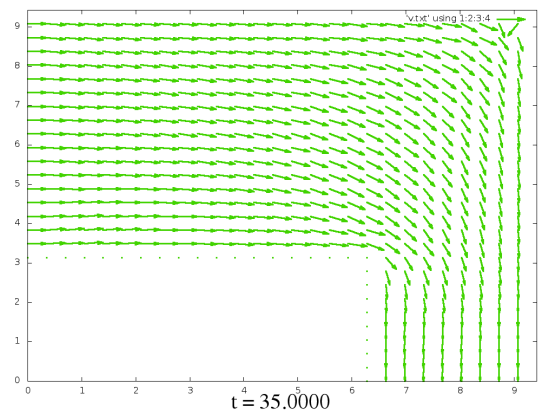
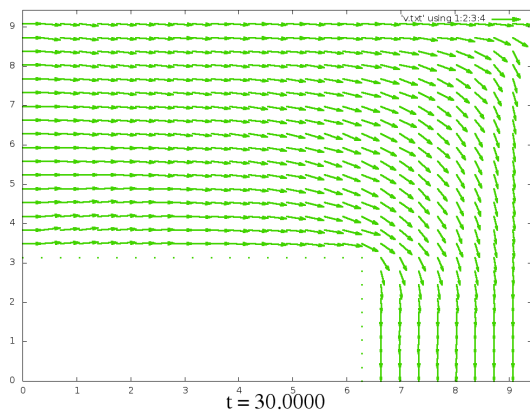
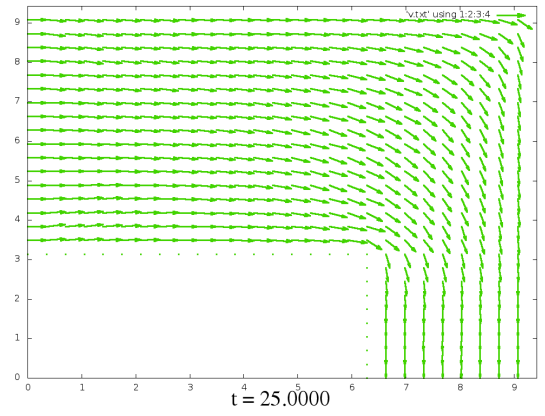
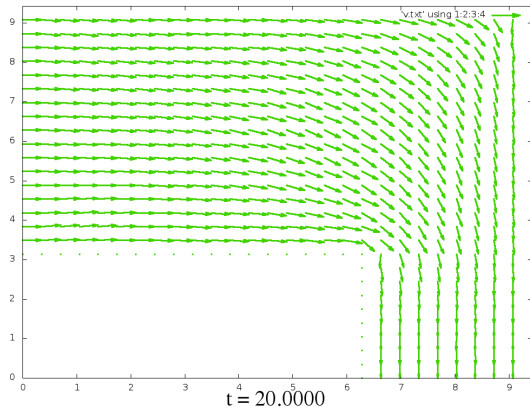
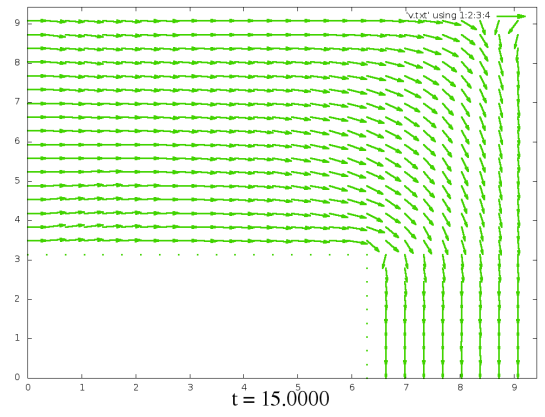
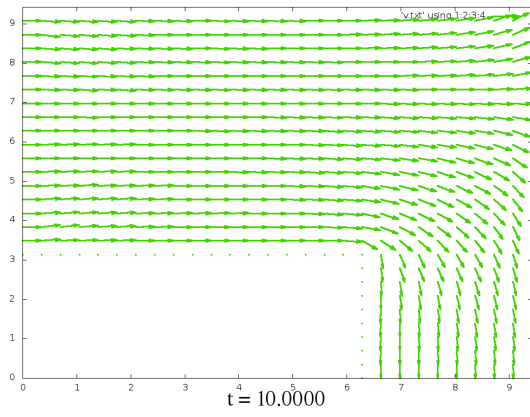
Плотность

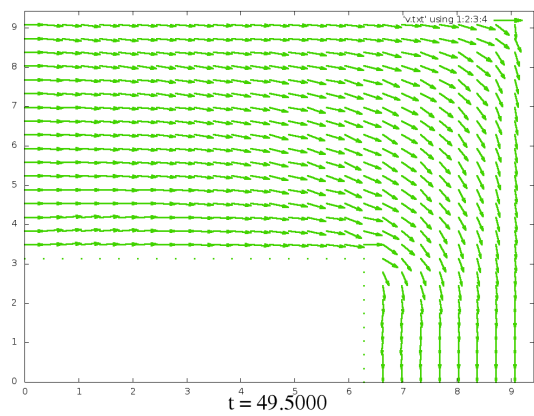




Векторы скорости

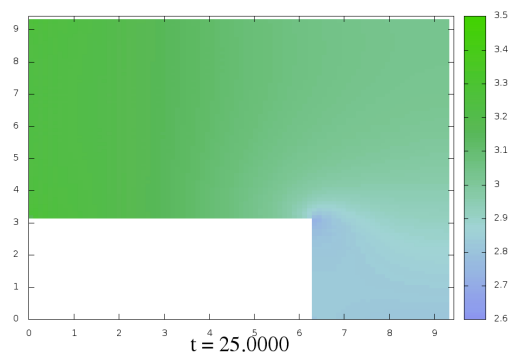
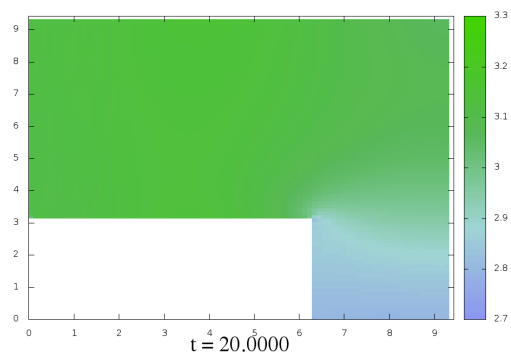
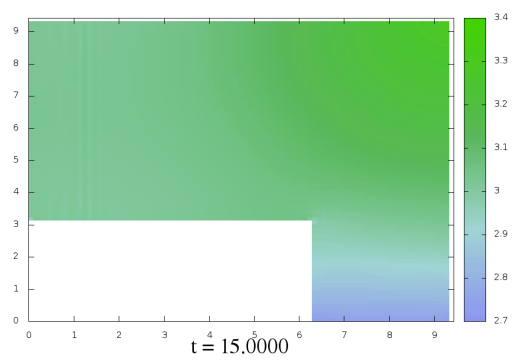
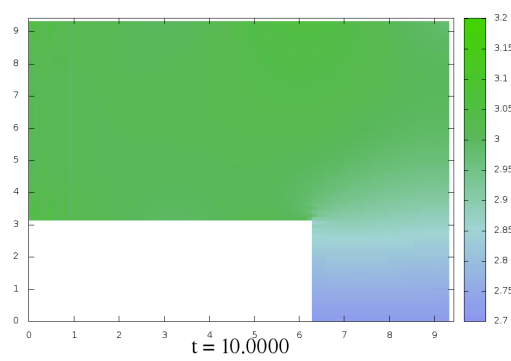
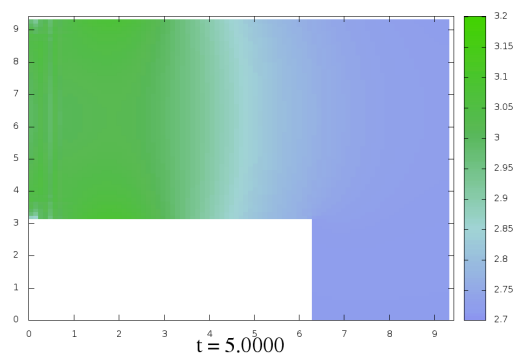
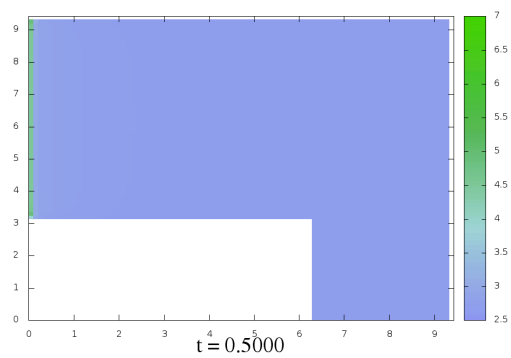


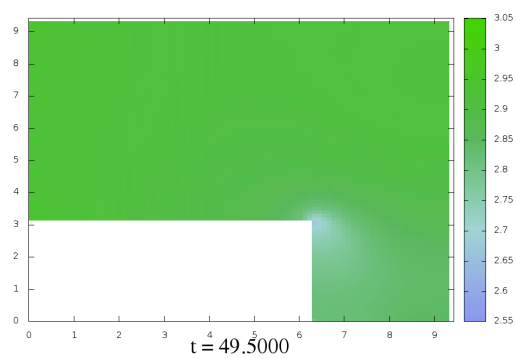
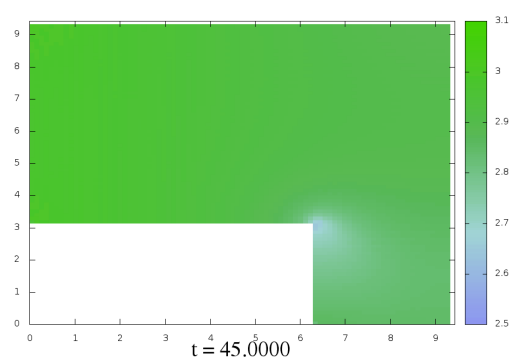
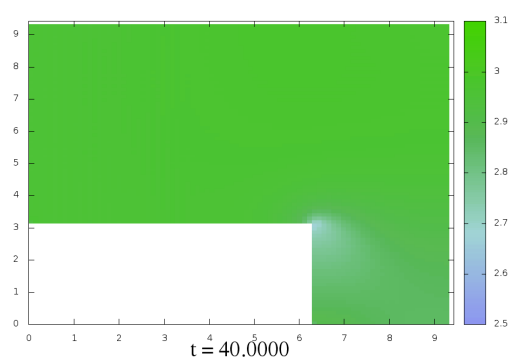
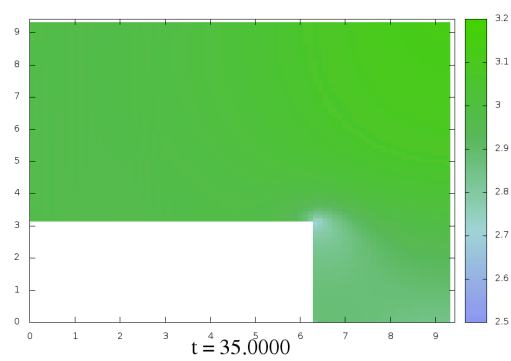
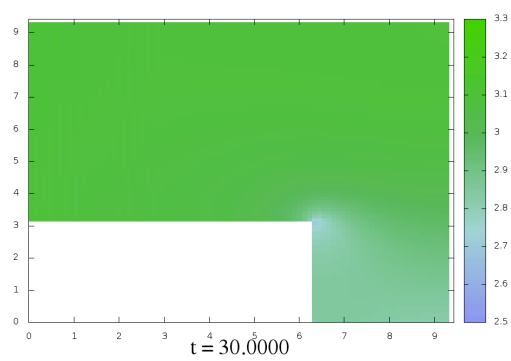




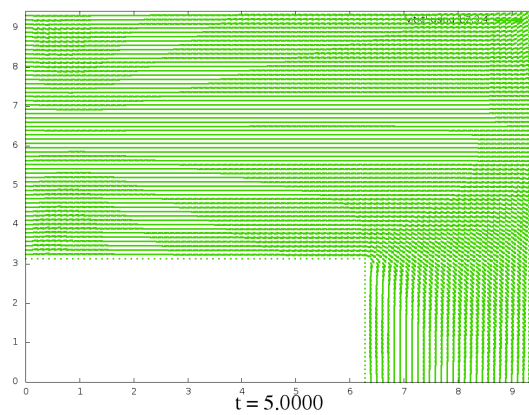
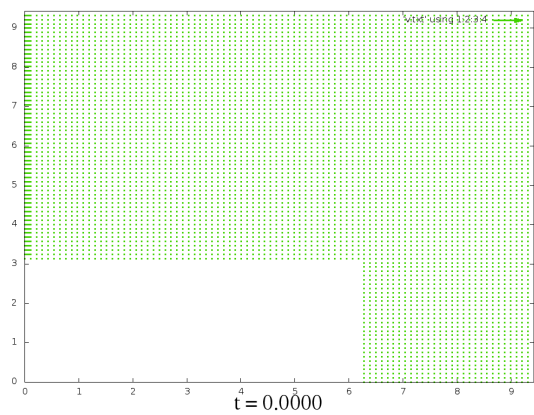
$$\mu = 0.01 \quad M_x = 30; \quad M_y = 30; \quad T = 50$$

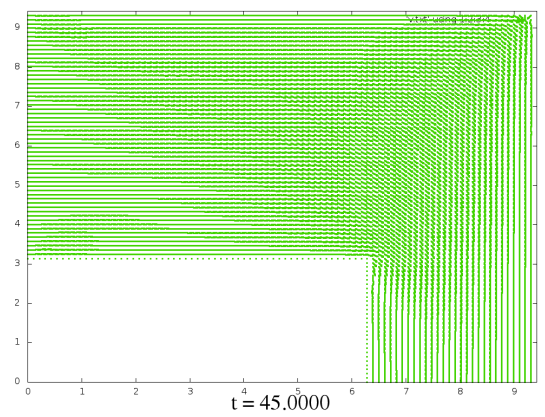
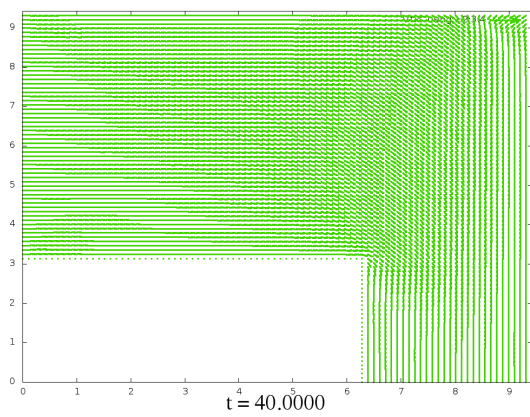
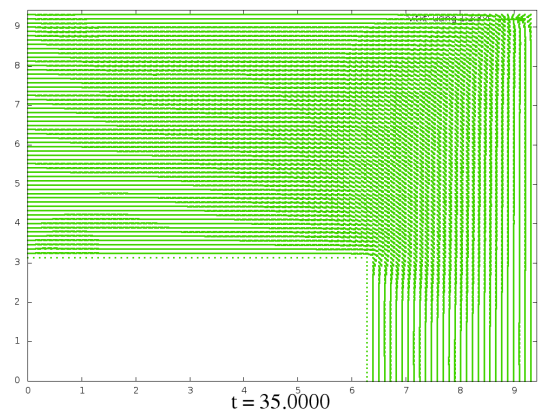
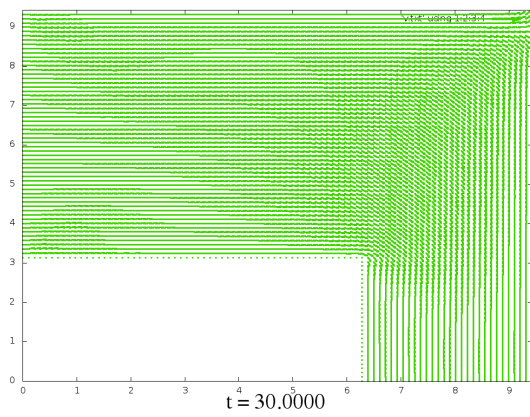
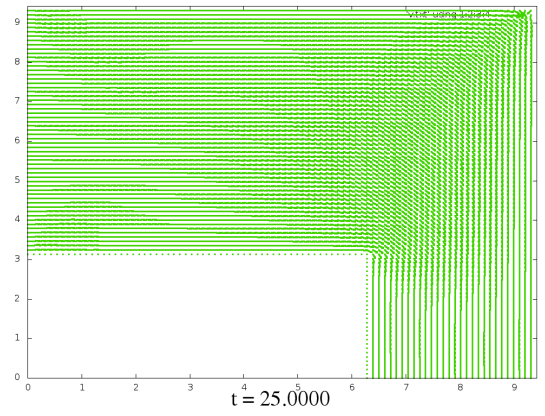
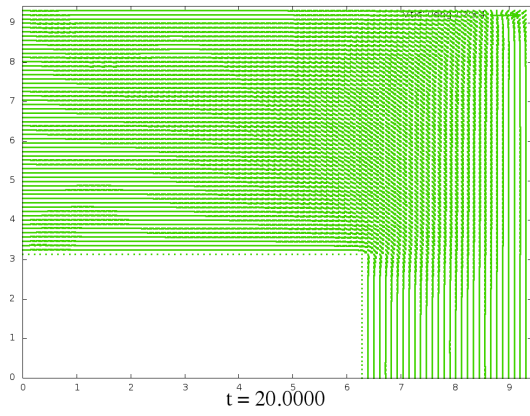
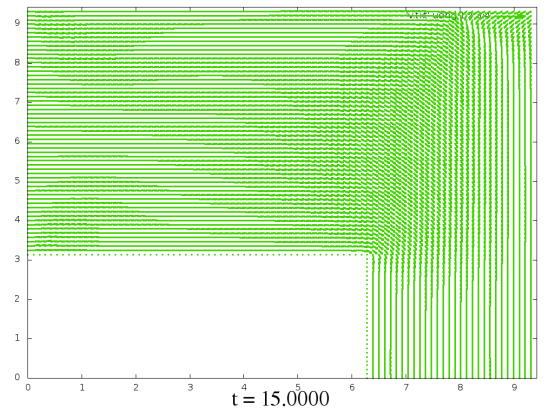
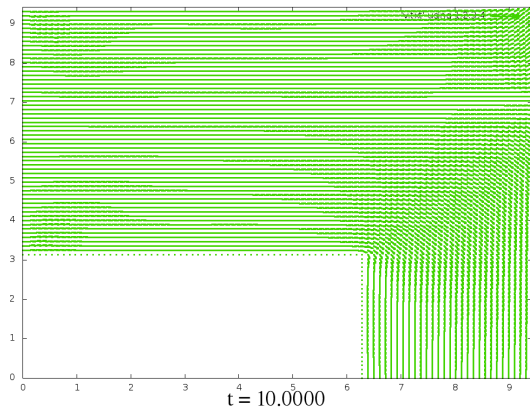
Плотность

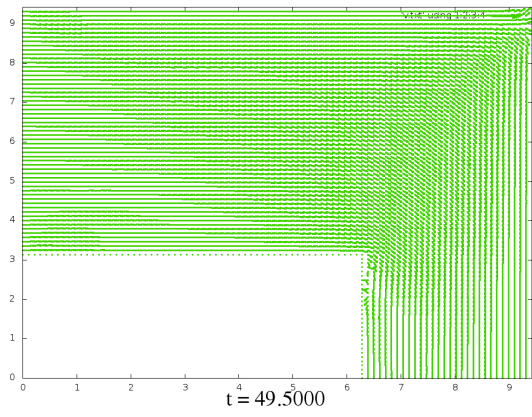




Векторы скорости

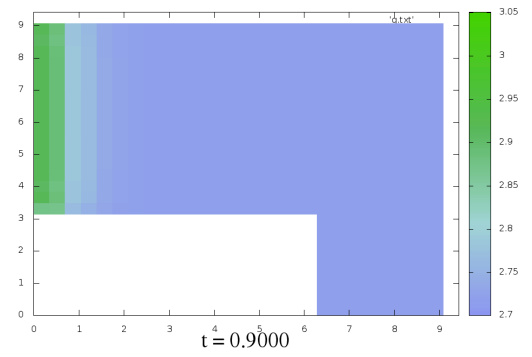
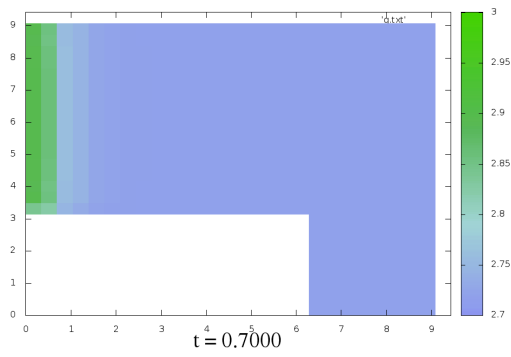
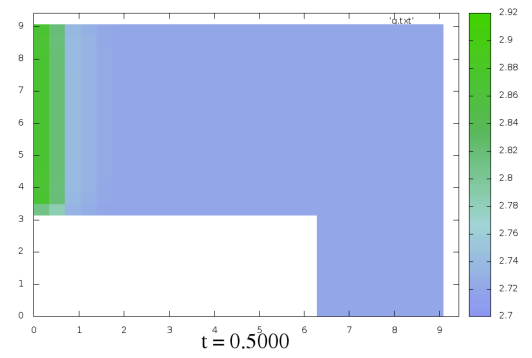
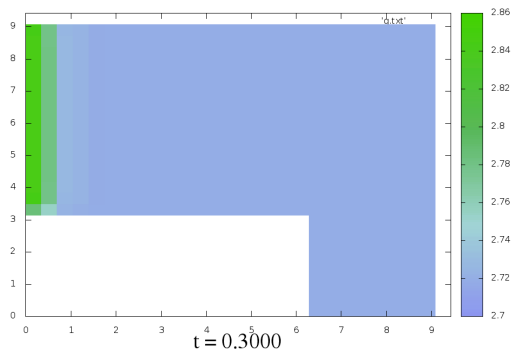
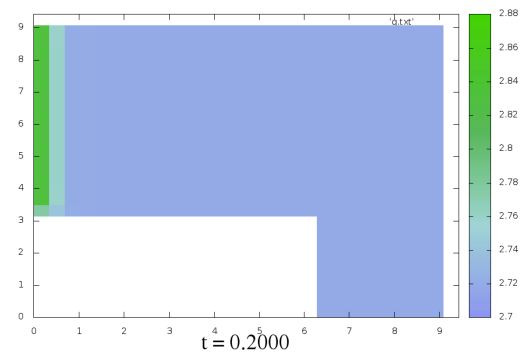
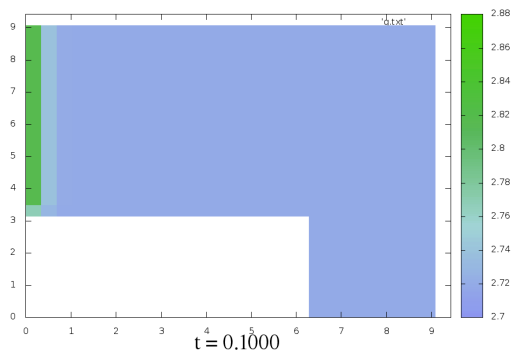




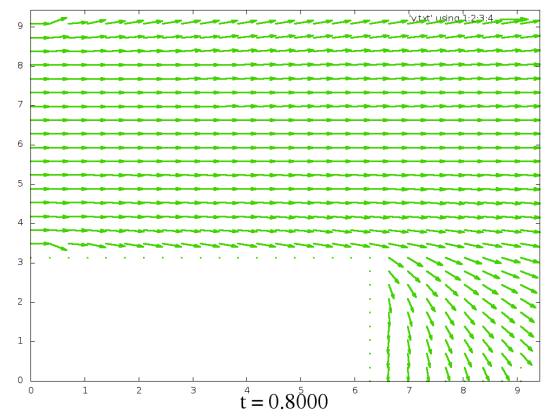
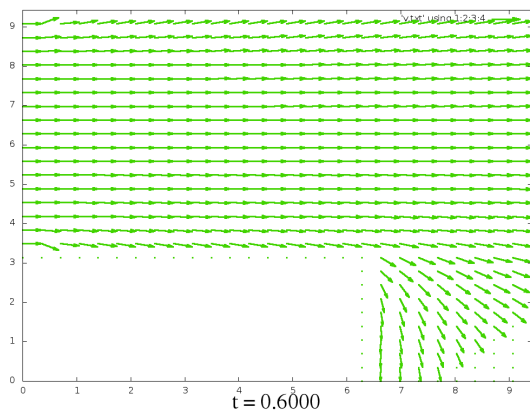
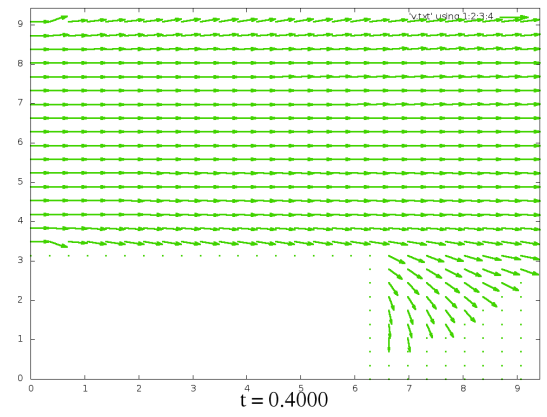
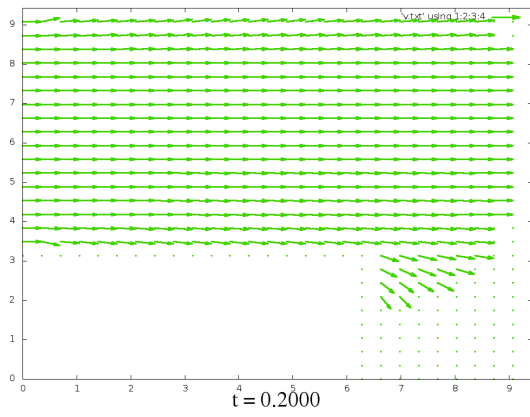
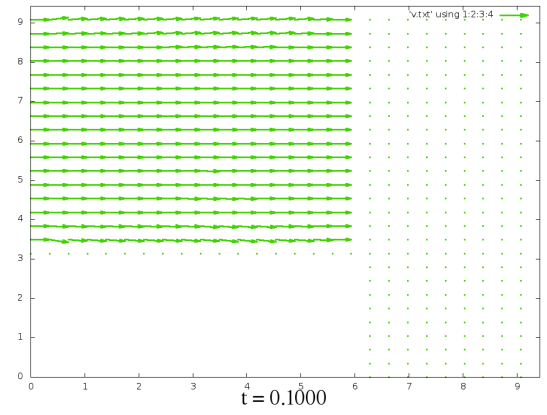
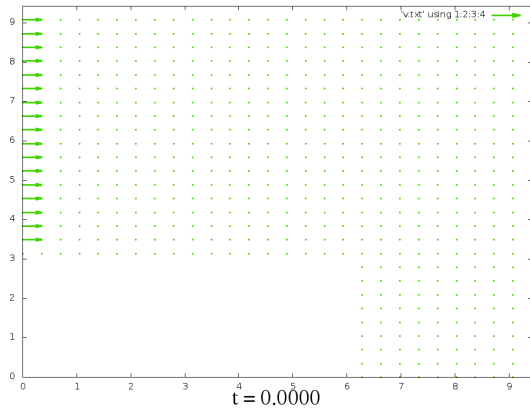


$$\mu = 0.001 \quad M_x = 10; \quad M_y = 10; \quad T = 1$$

Плотность

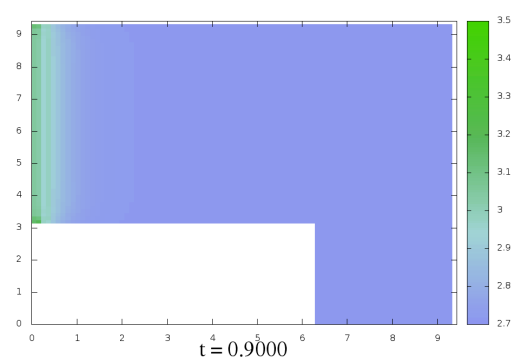
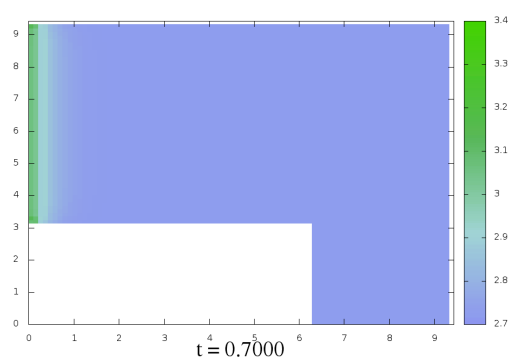
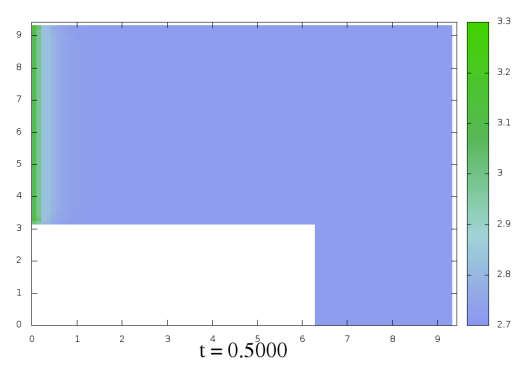
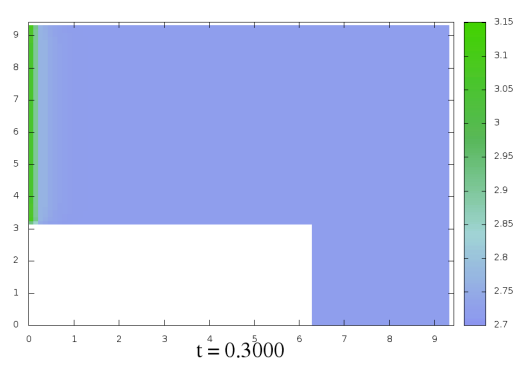
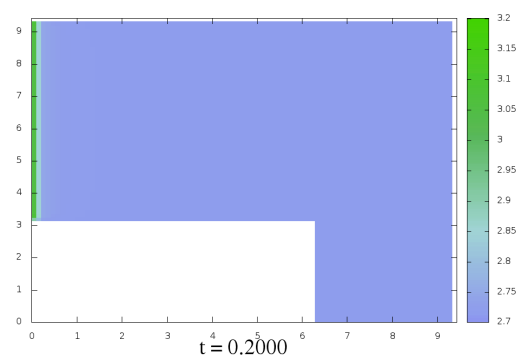
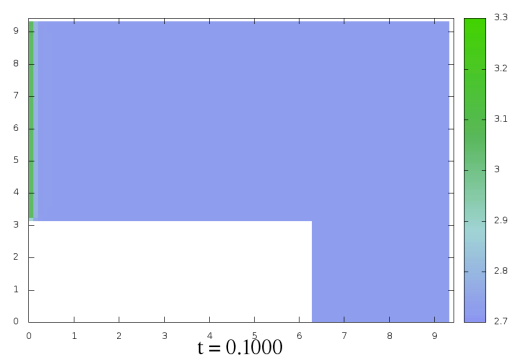


Векторы скорости

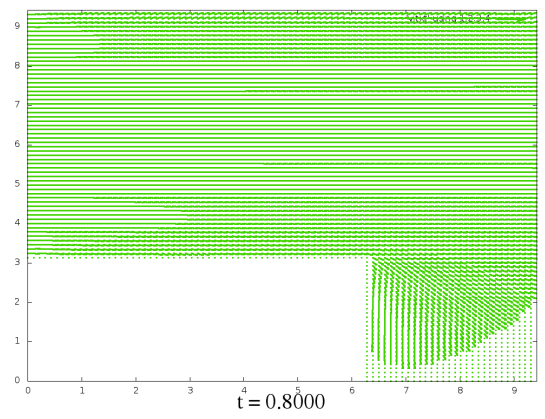
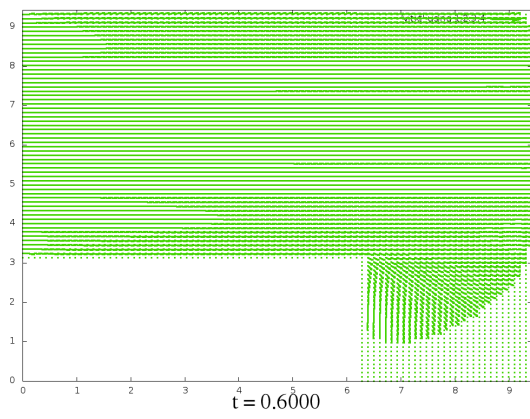
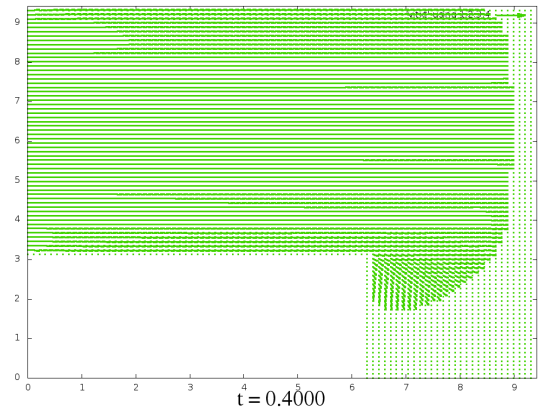
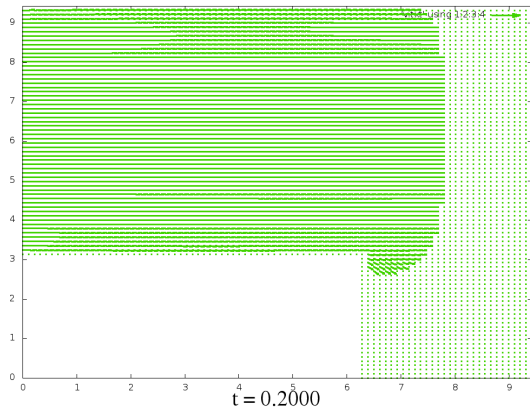
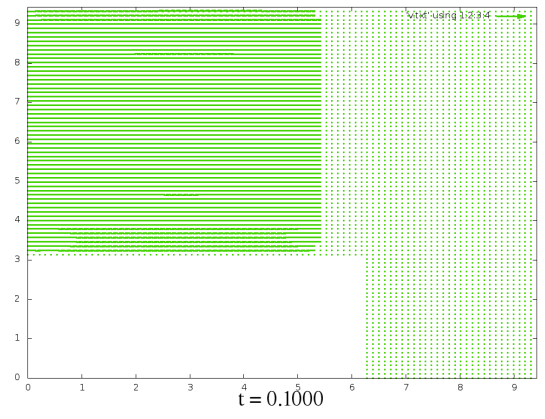
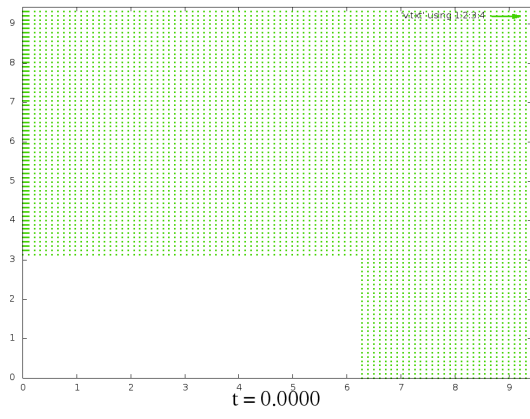


$$\mu = 0.001 \quad M_x = 30; \quad M_y = 30; \quad T = 1$$

Плотность

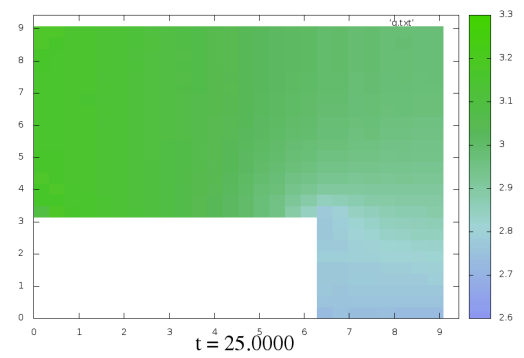
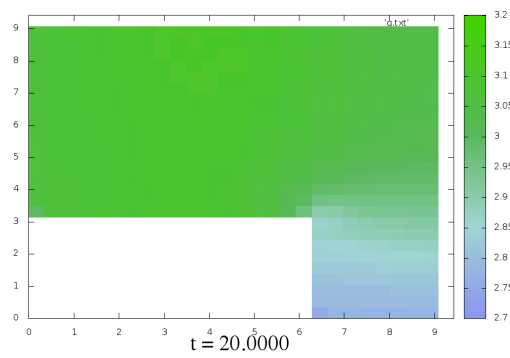
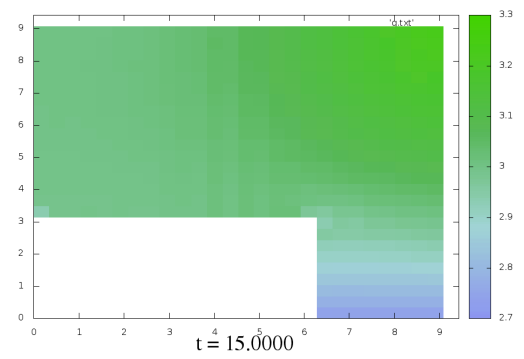
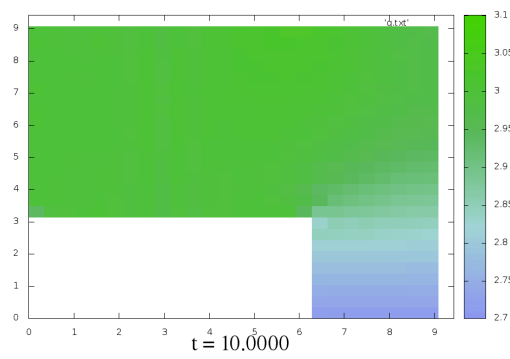
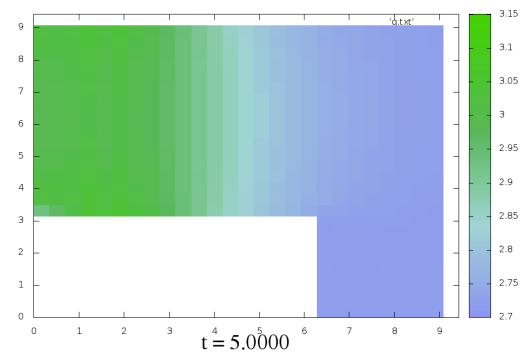
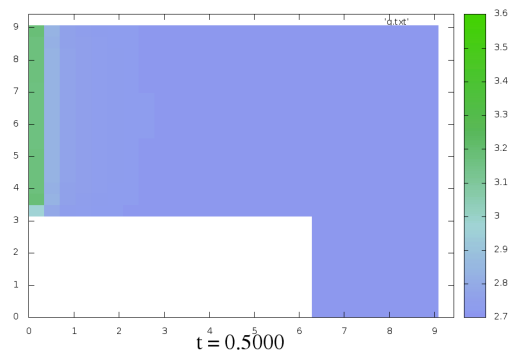


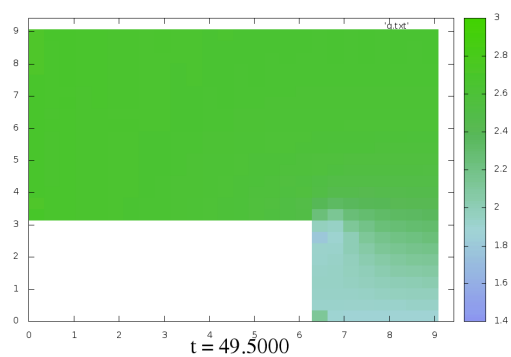
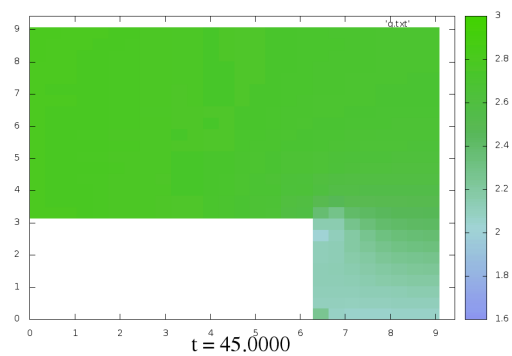
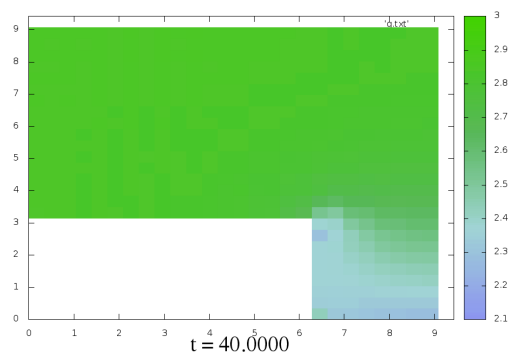
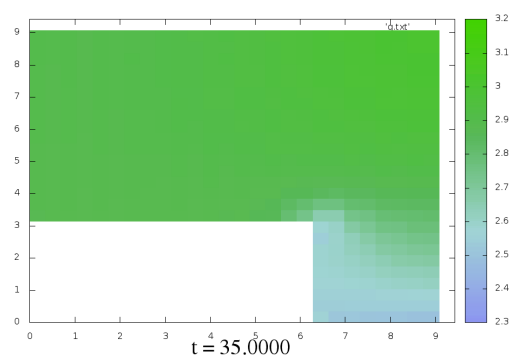
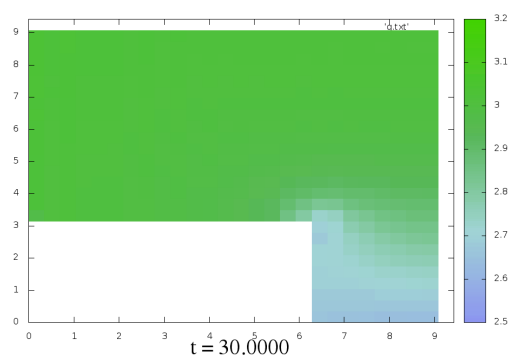
Векторы скорости



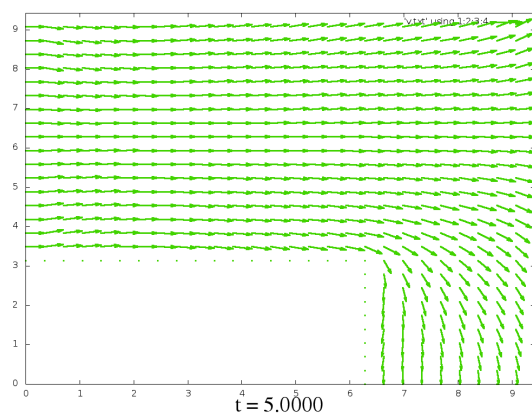
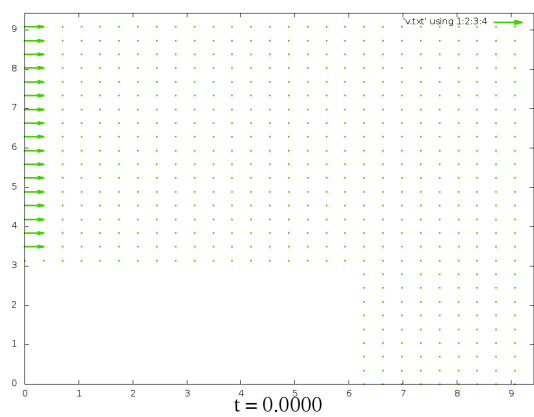
$$\mu = 0.001 \quad M_x = 10; \quad M_y = 10; \quad T = 50$$

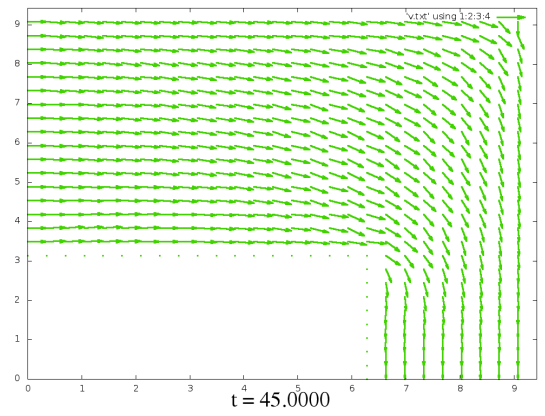
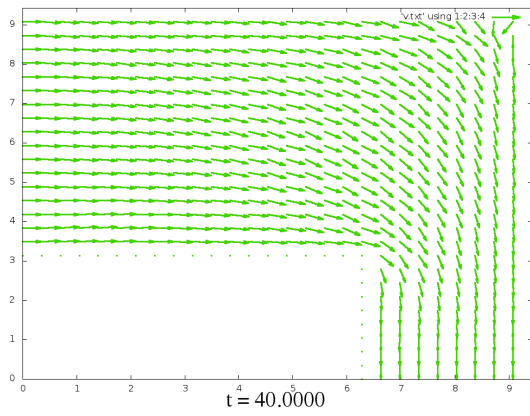
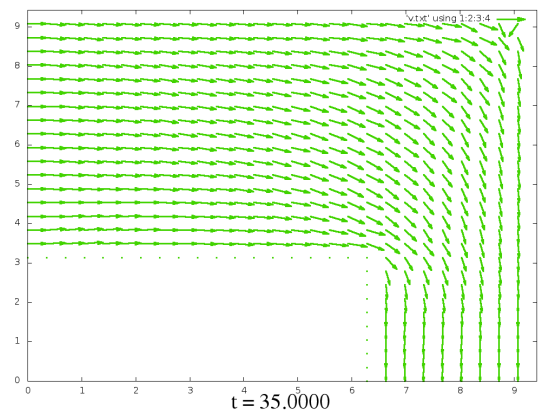
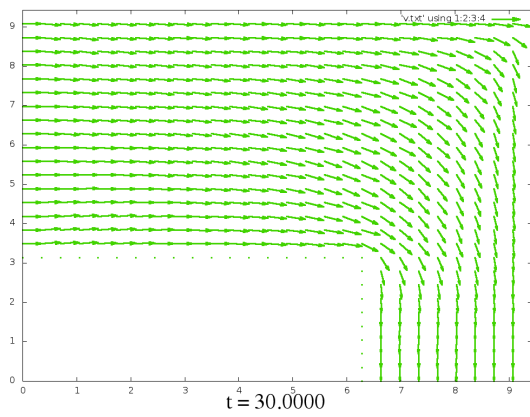
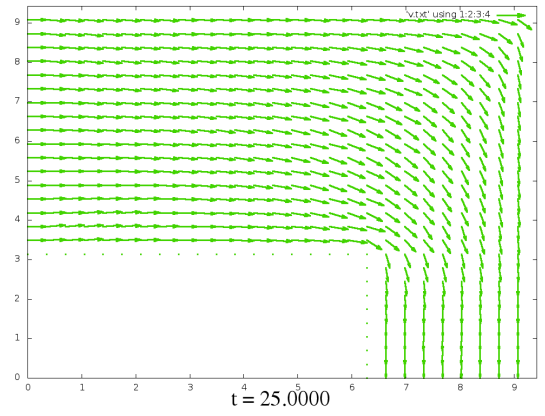
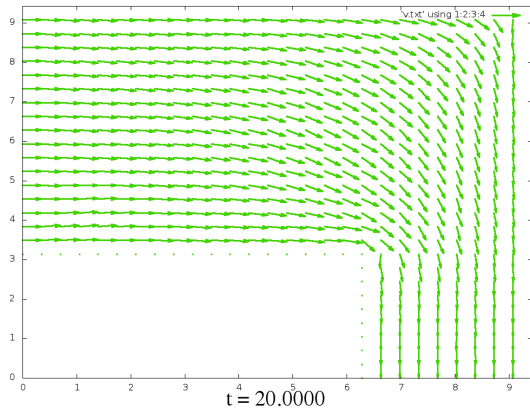
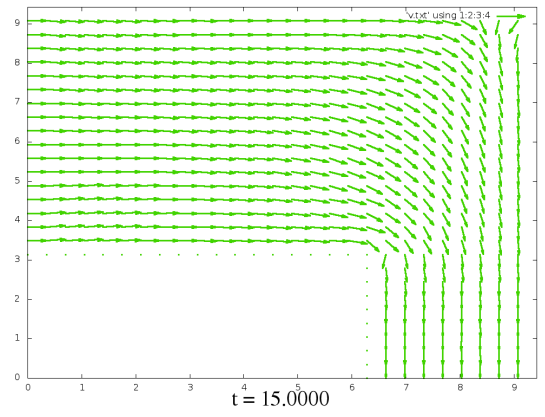
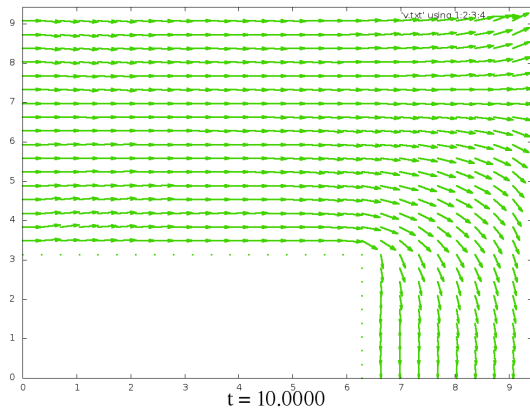
Плотностъ

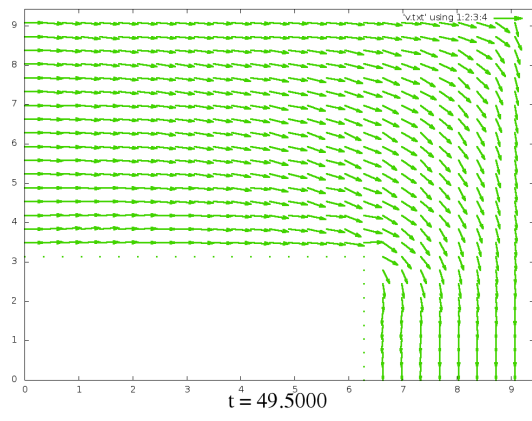




Векторы скорости

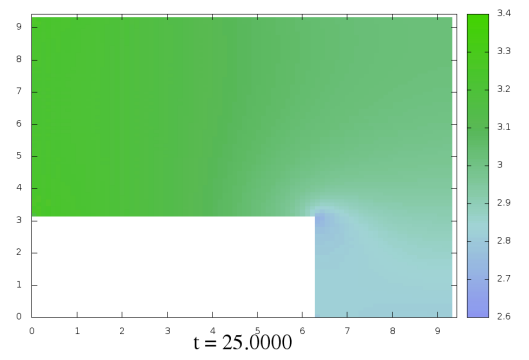
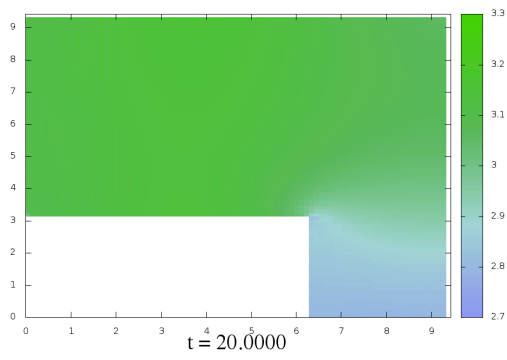
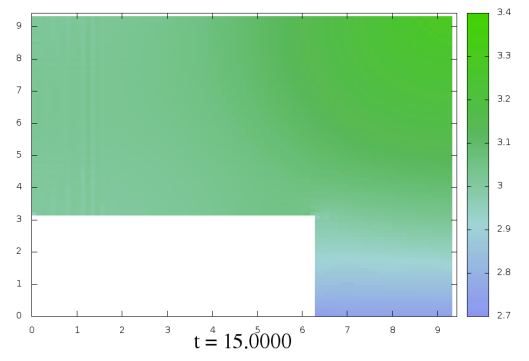
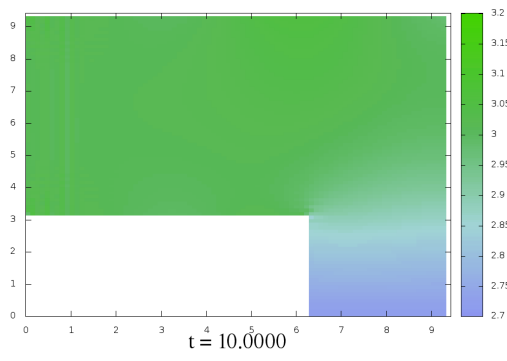
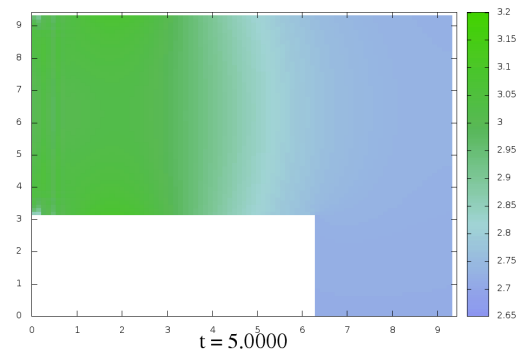
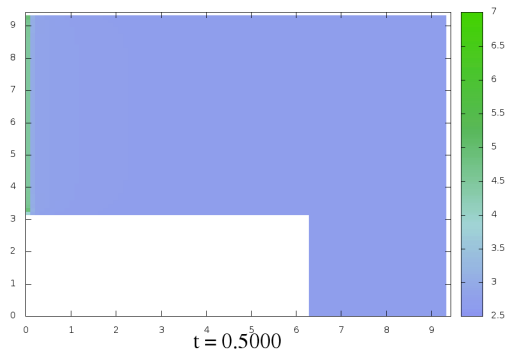


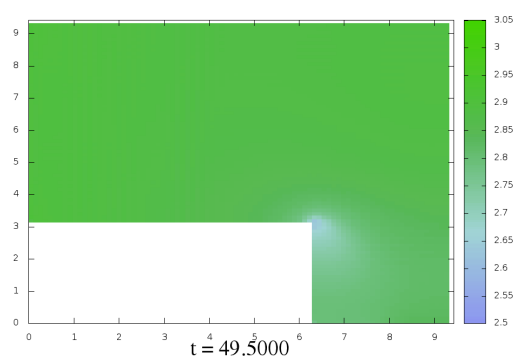
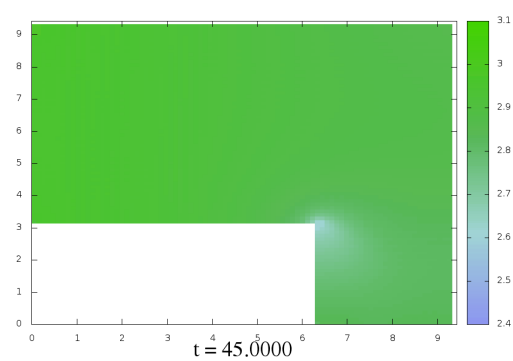
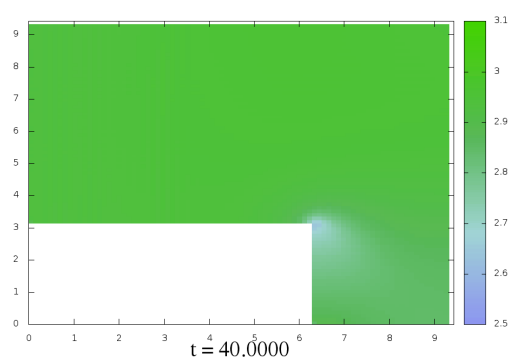
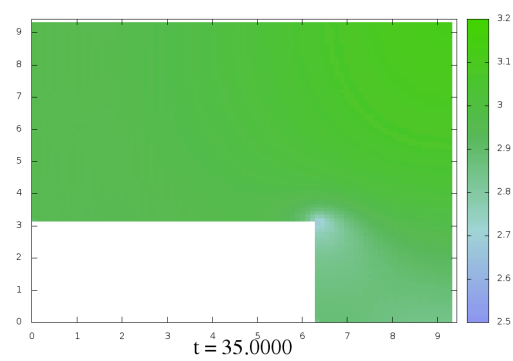
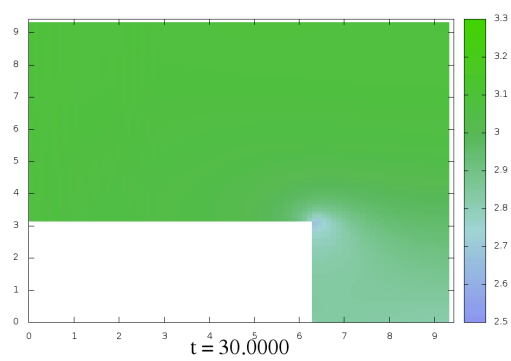




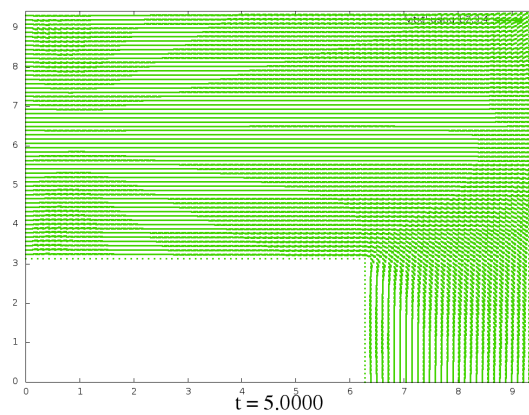
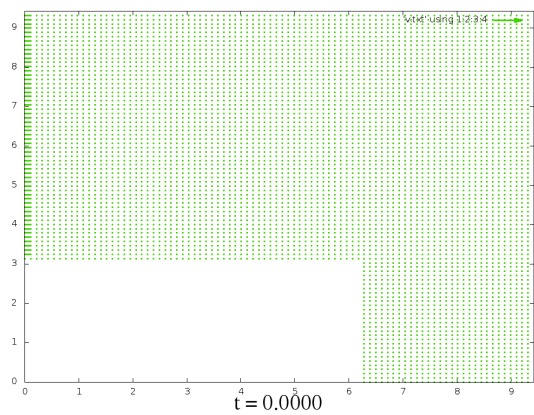
$$\mu = 0.001 \quad M_x = 30; \quad M_y = 30; \quad T = 50$$

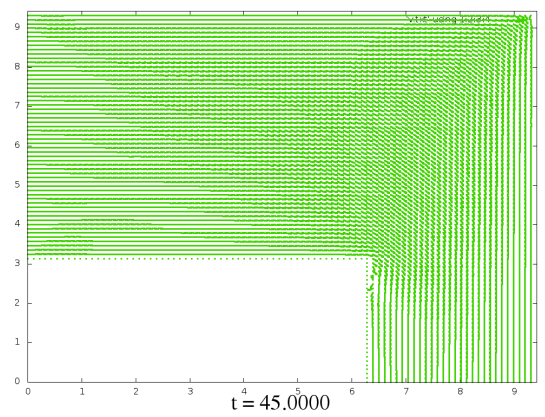
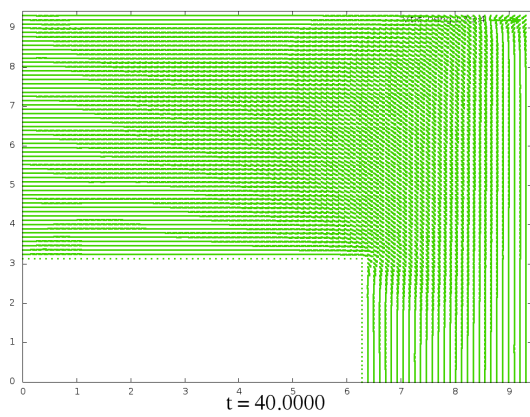
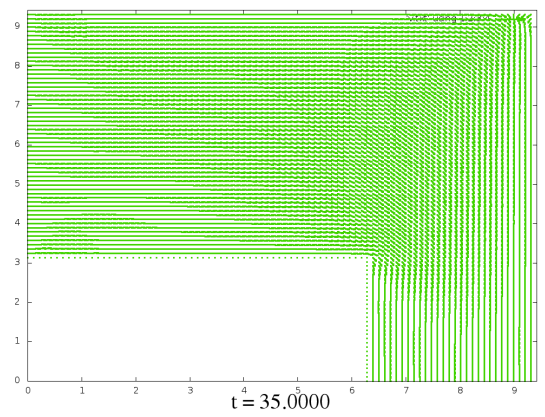
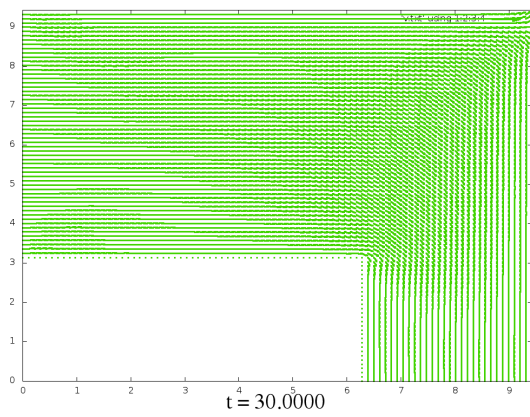
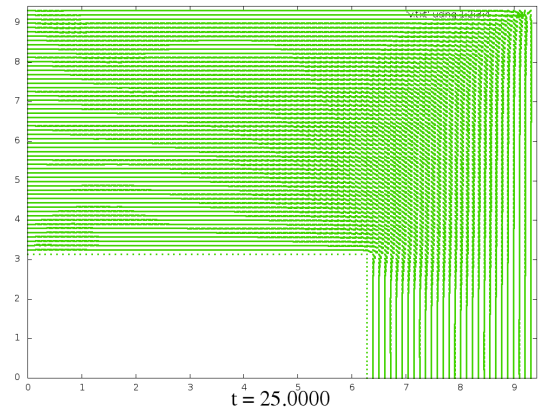
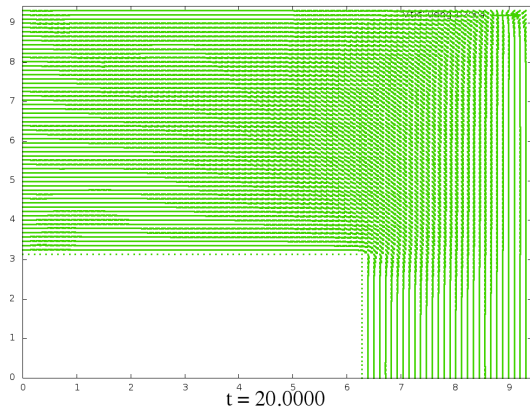
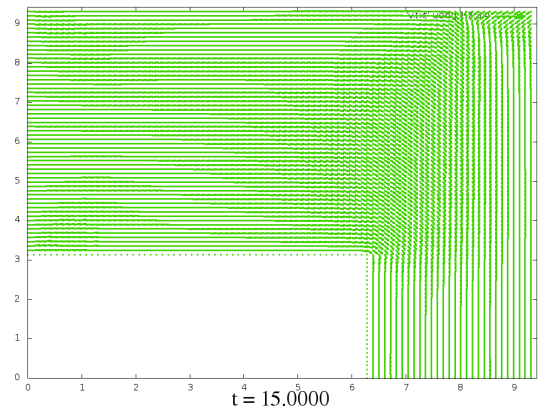
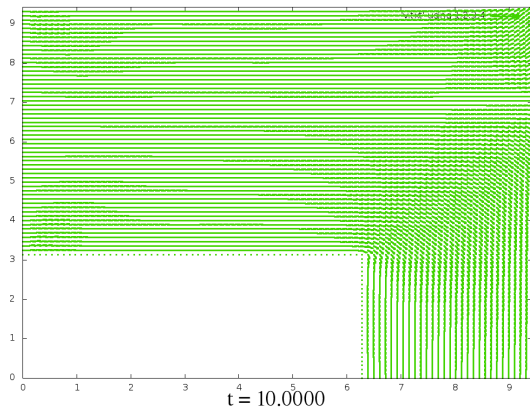
Плотность

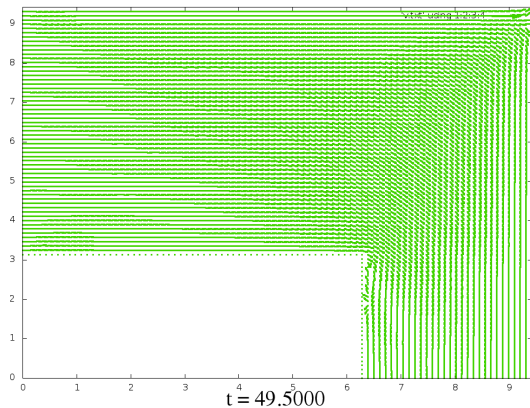




Векторы скорости







7 Сравнение собственной реализации и реализации в пакете *LAPACK*

Все вычисления, проведенные выше, использовали собственную реализацию алгоритма *CGS*. Сравним реальное время работы программ и момент завершения программы собственной реализации с реализацией алгоритма в пакете *LAPACK*.

Первый набор параметров: $h = 0.0500, \tau = 0.0100, \omega = 1, \mu = 0.010, C = 1, \rho_\gamma = 1$

Второй набор параметров: $h = 0.0250, \tau = 0.0050, \omega = 1, \mu = 0.001, C = 1, \rho_\gamma = 1$

Третий набор параметров: $h = 0.0125, \tau = 0.0025, \omega = 1, \mu = 0.100, C = 10, \rho_\gamma = 1$

Сравнение моментов завершения программы

Таблица 1: Моменты завершения задачи протекания

Набор параметров	Собственная реализация	Реализация из LAPACK
1	13.12	13.12
2	14.34	14.34
3	11.96	11.96

То, что время завершение программы совпало, что, скорее всего, означает, что получены одинаковые решения.

Таблица 2: Время работы в секундах

Набор параметров	Собственная реализация	Реализация из LAPACK
1	19.87	13.77
2	115.36	99.52
3	1521.04	1596.21

Таблица 3: Общее количество итераций

Набор параметров	Собственная реализация	Реализация из LAPACK
1	59331	44320
2	99813	91843
3	349831	376590

Таблица 4: Количество итераций в секунду

Набор параметров	Собственная реализация	Реализация из LAPACK
1	2986	3218
2	865	922
3	230	235

Можем видеть, что собственная реализация итерационного солвера CGS менее предпочтительнее реализации, представленной в пакете LAPACK и по времени работы, и по числу итераций, и по количеству итераций в секунду, но с увеличением времени работы программы разница все менее и менее заметна.