

Работа 2.1.3
Сибгатуллин Булат, Б01-007

Определение C_p/C_v по скорости звука в газе

Цель работы: 1) измерение частоты колебаний и длины волны при резонансе звуковых колебаний в газе, заполняющем трубу; 2) определение показателя адиабаты с помощью уравнения состояния идеального газа.

В работе используются: звуковой генератор ГЗ; электронный осциллограф ЭО; микрофон; телефон; раздвижная труба; теплоизолированная труба, обогреваемая водой из термостата; баллон со сжатым углекислым газом; газгольдер.

Скорость распространения звуковой волны в газах зависит от показателя адиабаты γ . На измерении скорости звука основан один из наиболее точных методов определения показателя адиабаты.

Скорость звука в газах определяется формулой:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}},$$

где R - газовая постоянная, T - температура газа, а μ - его молярная масса. Преобразовав эту формулу, найдем

$$\gamma = \frac{\mu}{RT} c^2 \quad (1)$$

Звуковая волна, распространяющаяся вдоль трубы, испытывает многократные отражения от торцов. Звуковые колебания в трубе являются наложением всех отраженных волн и, вообще говоря, очень сложны. Картина упрощается, если длина трубы L равна целому числу полуволен, то есть когда

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad (2)$$

где λ - длина волны звука в трубе, а n - любое целое число. Если условия (2) выполнено, то волна, отраженная от торца трубы, вернувшись к её началу и вновь отраженная, совпадает по фазе с падающей. Совпадающие по фазе волны усиливают друг друга. Амплитуда звуковых колебаний при этом резко возрастает - наступает резонанс.

При звуковых колебаниях слои газа, прилегающие к торцам трубы, не испытывают смещения (*узел смещения*). Узлы смещения повторяются по всей длине трубы через $\lambda/2$. между узлами находятся максимумы смещения (*пучности*).

Скорость звука c связана с его частотой f и длиной волны λ соотношением

$$c = \lambda f. \quad (3)$$

1. При неизменной частоте f звукового генератора (а следовательно и неизменной длине звуковой волны λ) можно изменять длину трубы L . Для этого применяется раздвижная труба. Длина раздвижной трубы постепенно увеличивается, и наблюдается ряд последовательных резонансов. Возникновение резонанса легко наблюдать на осциллографе по резкому увеличению амплитуды колебаний. Для последовательных резонансов имеем

$$L_{n+k} = n \frac{\lambda}{2} + k \frac{\lambda}{2},$$

т.е. $\lambda/2$ равно угловому коэффициенту графика, изображающего зависимость длины трубы L от номера резонанса k . Скорость звука находится по формуле (3).

2. При постоянной длине трубы можно изменять частоту звуковых колебаний. В этом случае следует плавно изменять частоту f звукового генератора, а следовательно, и длину звуковой волны λ . Для последовательных резонансов получим

$$L = \frac{\lambda_1}{2}n = \dots = \frac{\lambda_{k+1}}{2}(n+k). \quad (4)$$

Из (3) и (4) имеем

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2L}n, \quad f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{c}{2L}(n+1) = f_1 + \frac{c}{2L}, \quad \dots, \quad (5)$$

$$f_{k+1} = \frac{c}{\lambda_{k+1} = \frac{c}{2L}(n+k) = f_1 + \frac{c}{2L}k}.$$

Скорость звука, деленная на $2L$, определяется, таким образом, по угловому коэффициенту графика зависимости частоты от номера резонанса.

1. Проведем измерения на 1 установке для углекислого газа и воздуха.

Для углекислого газа:

$f_1 = 2909 \Gamma_{\text{ц}}$	$f_2 = 2096 \Gamma_{\text{ц}}$	$f_3 = 2506 \Gamma_{\text{ц}}$	$f_4 = 3038 \Gamma_{\text{ц}}$
$\Delta L, \text{ мм}$	$\Delta L, \text{ мм}$	$\Delta L, \text{ мм}$	$\Delta L, \text{ мм}$
3	0	5	6
47	58	52	51
96	117	105	96
146	181	157	140
196	240	208	185

При помощи МНК посчитаем коэффициенты для уравнения вида $y = a + bx$. Все вычисления находятся в документе с названием вычисления-2.1.3. Построим графики:

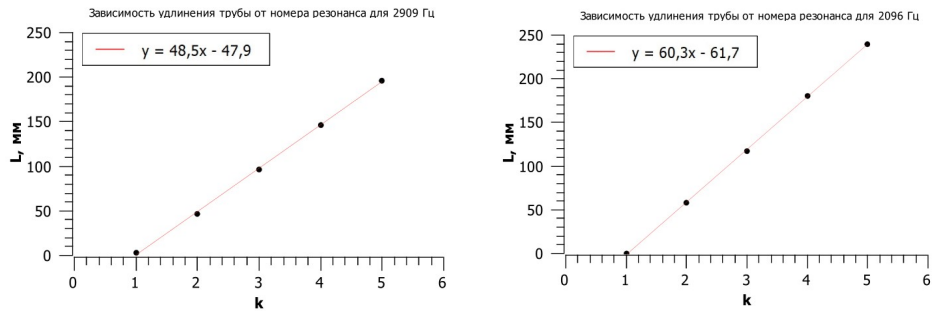


Рис. 1. Графики для углекислого газа

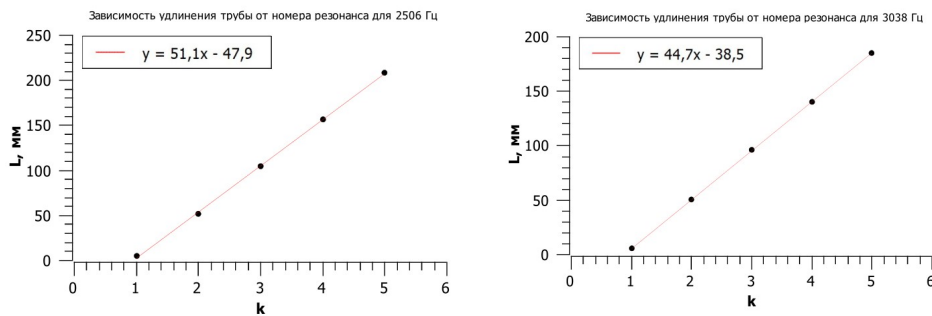


Рис. 2. Графики для глекислого газа

В качестве погрешностей будем учитывать только погрешность коэффициента в МНК, так как погрешности измерений достаточно малы:

$$\sigma_L = 0,5 \text{ мм} \quad \varepsilon_L = \sigma_L / L = 0,5 / 700 = 0,07\%$$

$$\sigma_f = 1 \text{ Гц} \quad \varepsilon_{f-\max} = \sigma_f / f = 1/3000 = 0,03\%$$

В таком случае погрешность определения скорости звука будет определяться только погрешностью коэффициента b . Посчитаем скорость звука, для каждого графика:

$$c_{2909} = 2 \cdot b_{2909} \cdot f_1 / 1000 = 2 \cdot 48,5 \cdot 2909 / 1000 = 282,2 \text{ м/с}$$

$$c_{2096} = 2 \cdot b_{2096} \cdot f_2 / 1000 = 2 \cdot 60,3 \cdot 2096 / 1000 = 252,8 \text{ м/с}$$

$$c_{2506} = 2 \cdot b_{2506} \cdot f_3 / 1000 = 2 \cdot 51,1 \cdot 2506 / 1000 = 256,1 \text{ м/с}$$

$$c_{3038} = 2 \cdot b_{3038} \cdot f_4 / 1000 = 2 \cdot 44,7 \cdot 3038 / 1000 = 271,6 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{2909}} = 0,54 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{2096}} = 0,44 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{2506}} = 0,43 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{3038}} = 0,08 \text{ м/с}$$

Аналогично построим таблицу для воздуха:

$f_1 = 3474 \text{ Гц}$	$f_2 = 4052 \text{ Гц}$	$f_3 = 5111 \text{ Гц}$	$f_4 = 2890 \text{ Гц}$
$\Delta L, \text{ мм}$	$\Delta L, \text{ мм}$	$\Delta L, \text{ мм}$	$\Delta L, \text{ мм}$
5	0	05	0
48	40	34	40
99	81	69	81
148	120	101	120
198	160	135	160

При помощи МНК посчитаем коэффициенты для уравнения вида $y = a + bx$. Построим графики:

Погрешность, аналогично вычислениям для углекислого газа, будет вычисляться только по погрешности МНК. Посчитаем скорость звука, для каждого графика:

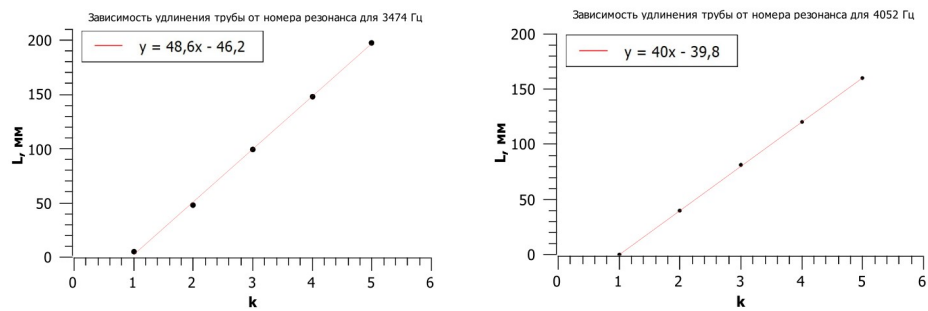


Рис. 3. Графики для воздуха

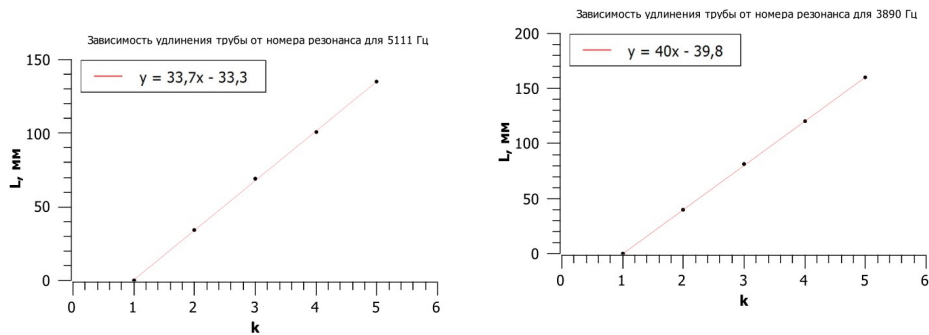


Рис. 4. Графики для воздуха

$$c_{3474} = 2 \cdot b_{3474} \cdot f_1 / 1000 = 2 \cdot 48,6 \cdot 3474 / 1000 = 337,7 \text{ м/с}$$

$$c_{4052} = 2 \cdot b_{4052} \cdot f_2 / 1000 = 2 \cdot 40,0 \cdot 4052 / 1000 = 324,2 \text{ м/с}$$

$$c_{5111} = 2 \cdot b_{5111} \cdot f_3 / 1000 = 2 \cdot 33,7 \cdot 5111 / 1000 = 344,5 \text{ м/с}$$

$$c_{3890} = 2 \cdot b_{3890} \cdot f_4 / 1000 = 2 \cdot 40,0 \cdot 3890 / 1000 = 311,2 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{3474}} = 0,59 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{4052}} = 0,13 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{5111}} = 0,19 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{3890}} = 0,13 \text{ м/с}$$

Значения полученные для скорости воздуха с высокой точностью совпадают с табличными. Для воздуха верно значение 340 м/с, а для углекислого газа 260 м/с. Определим среднее значение скорости звука из наших измерений:

$$c_{CO2cp} = \frac{282,2 + 252,8 + 256,1 + 271,6}{4} = 265,7 \text{ м/с}$$

$$c_{Vcp} = \frac{337,7 + 324,4 + 344,5 + 311,2}{4} = 329,5 \text{ м/с}$$

За погрешность возьмем максимальное значение погрешности для каждого газа:

$$\sigma_{c_{CO2}} = 0,54 \text{ м/с}$$

$$\sigma_V = 0,59 \text{ м/с}$$

Теперь, по формуле (1) посчитаем значение показателя адиабаты в зависимости от температуры:

$$\gamma = \frac{\mu}{RT} c^2$$

μ_V возьмем равным 29 г/моль, μ_{CO2} возьмем равным 44 г/моль, а R равным 8,31 Дж/(моль·К). Все измерения до этого момента проводились при температуре $T = 295,6 \text{ К}$, погрешность измерения температуры определяется характеристиками термометра и составляет: $\sigma_T = 0,1 \text{ К}$.

$$\gamma_{V-mv} = \frac{\mu_V}{RT_{295,6}} c_V^2 = \frac{0,029}{8,31 \cdot 295,6} \cdot 329,5^2 = 1,29$$

$$\sigma_{\gamma_{V-mv}} = \gamma_{V-mv} \sqrt{\left(\frac{\sigma_T}{T_{295,6}}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sigma_{c_V}}{c_V}\right)^2} = 1,29 \sqrt{0,0003^2 + 0,0017^2} = 0,0022$$

$$\gamma_{CO2-mv} = \frac{\mu_{CO2}}{RT_{295,6}} c_{CO2}^2 = \frac{0,044}{8,31 \cdot 295,6} \cdot 265,7^2 = 1,26$$

$$\sigma_{\gamma_{CO2-mv}} = \gamma_{CO2-mv} \sqrt{\left(\frac{\sigma_T}{T_{295,6}}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sigma_{c_{CO2}}}{c_{CO2}}\right)^2} = 1,26 \sqrt{0,0003^2 + 0,002^2} = 0,0025$$

Полученный показатель адиабаты для углекислого газа и воздуха отличаются от табличных значений на 7%, такое отличие, как я считаю, обусловлено трудностью поймать момент резонанса, когда каждый, даже малейший поворот ручки сдвигает значение частоты на значимую величину. В целом отличие от табличных значений не слишком большое, но измерение показателя адиабаты с более высокой точностью, по моему мнению, требует либо другого метода, либо оборудования лишенного вышеуказанного недостатка.

2. Проведем измерения для неподвижной трубы, длина трубы равна $L = 570$ мм. Таблица для

$f, \text{Гц}$	1071	1280	1501	1712	1922	2312	2998	2805
k	6	7	8	9	10	12	14	15

$f, \text{Гц}$	1003	1322	1501	1673	1803	2350	2505	3159
k	5	7	8	9	10	12	13	17

По полученным данным при помощи МНК построим графики:

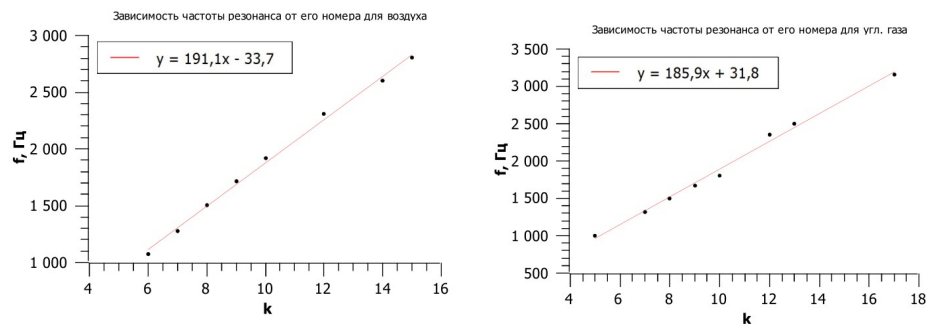


Рис. 5. Зависимость частоты резонанса от его номера для двух газов

По формуле (5) можем найти скорость звука, умножив угловой коэффициент прямой (он посчитан в файле с вычислениями) на 2 длины трубы. Выпишем длину трубы и угловые коэффициенты:

$$L = 700 \text{ мм}, \quad \sigma_L = 5 \text{ мм}$$

$$k_V = 191,1 \text{ Гц}, \quad \sigma_{k_V} = 4,2 \text{ Гц}$$

$$k_{CO_2} = 185,9 \text{ Гц}, \quad \sigma_{k_{CO_2}} = 5,3 \text{ Гц}$$

И наконец найдем значение для скорости звука:

$$c_V = 2L \cdot k_V = 2 \cdot 0,7 \cdot 191,1 = 267,5 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_V} = c_V \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{k_V}}{k_V}\right)^2} = 267,5 \sqrt{0,007^2 + 0,022^2} = 6,18 \text{ м/с}$$

$$c_{CO_2} = 2L \cdot k_V = 2 \cdot 0,7 \cdot 185,9 = 260,3 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{CO_2}} = c_{CO_2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{k_{CO_2}}}{k_{CO_2}}\right)^2} = 260,3 \sqrt{0,007^2 + 0,029^2} = 7,76 \text{ м/с}$$

Заметим, что значение скорости звука для воздуха не совпадает с табличным и больше похоже на значение скорости звука для углекислого газа. Это может быть вызвано тем, что труба не была хорошо прочищена после того, как на ней поработали с воздухом. Следовательно этому значению не стоит доверять.

Данные углекислого газа совпадают с полученными ранее данными и табличным значением. Погрешность также не очень велика и составляет около 3% от полученной величины.

Так как данные измерения проводились лишь для проверки того, насколько точно была измерена скорость звука, для полученных значений показатель адиабаты я находить не буду (к тому же в следующих опытах будет получен показатель адиабаты по схожему методу).

3. Теперь пересядем на 2 установку и будем измерять скорость звука, оставляя постоянной длину трубы, но меняя температуру газа и частоту звукового генератора. Запишем измеренные данные в таблицу, всего таблицу.

k	$f, \Gamma_u (303,2 K)$	$f, \Gamma_u (313,2 K)$	$f, \Gamma_u (323,2 K)$	$f, \Gamma_u (333,2 K)$
1	256	267	270	275
2	502	514	520	524
3	752	768	773	780
4	1005	1024	1034	1027
5	1246	1280	1283	1301

При помощи МНК построим графики:

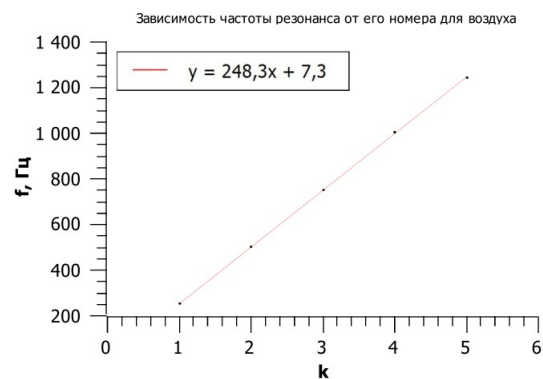


Рис. 6. $T = 303,2 K$

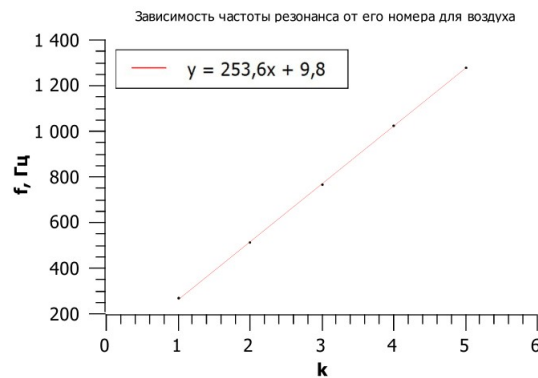


Рис. 7. $T = 313,2 K$

Взяв посчитанные коэффициенты из документа с вычислениями, посчитаем по формуле (5) значение скорости звука:

$$L = 700 \text{ мм}, \quad \sigma_L = 5 \text{ мм}$$

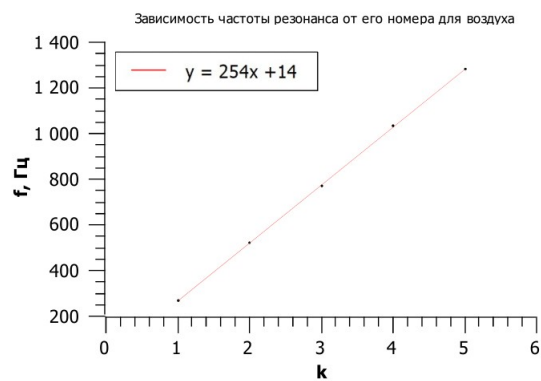


Рис. 8. $T = 323,2 \text{ K}$

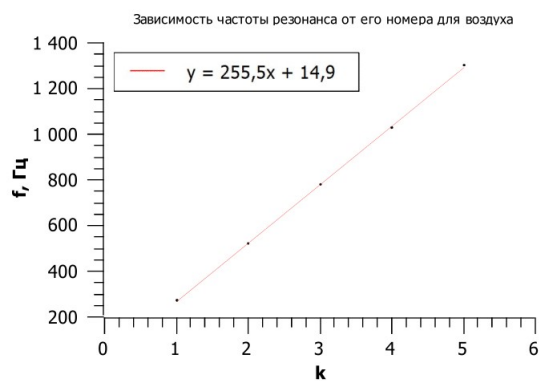


Рис. 9. $T = 333,2 \text{ K}$

$$k_{303,2} = 248,3 \text{ Гц}, \quad \sigma_{k_{303,2}} = 0,79 \text{ Гц}$$

$$k_{313,2} = 253,6 \text{ Гц}, \quad \sigma_{k_{313,2}} = 0,82 \text{ Гц}$$

$$k_{323,2} = 254,0 \text{ Гц}, \quad \sigma_{k_{323,2}} = 0,83 \text{ Гц}$$

$$k_{333,2} = 255,5 \text{ Гц}, \quad \sigma_{k_{353,2}} = 1,99 \text{ Гц}$$

$$\lambda_{303,2} = 2L \cdot k_{303,2} = 2 \cdot 0,7 \cdot 248,3 = 347,6 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{303,2}} = c_{303,2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{k_{303,2}}}{k_{303,2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2} = 347,6 \cdot \sqrt{0,003^2 + 0,007^2} = 2,65 \text{ м/с}$$

$$_{313,2} = 2L \cdot k_{313,2} = 2 \cdot 0,7 \cdot 253,6 = 355,0 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{313,2}} = c_{313,2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{k_{313,2}}}{k_{313,2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2} = 355,0 \cdot \sqrt{0,003^2 + 0,007^2} = 2,7 \text{ м/с}$$

$$_{323,2} = 2L \cdot k_{323,2} = 2 \cdot 0,7 \cdot 254,0 = 355,6 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{323,2}} = c_{323,2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{k_{323,2}}}{k_{323,2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2} = 355,6 \cdot \sqrt{0,003^2 + 0,007^2} = 2,71 \text{ м/с}$$

$$_{333,2} = 2L \cdot k_{333,2} = 2 \cdot 0,7 \cdot 255,5 = 357,7 \text{ м/с}$$

$$\sigma_{c_{333,2}} = c_{333,2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{k_{333,2}}}{k_{333,2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2} = 357,7 \cdot \sqrt{0,008^2 + 0,007^2} = 3,8 \text{ м/с}$$

В результате получились вполне правдоподобные значения. Также можно заметить, что с увеличением температуры, скорость звука также увеличивается, этот факт совпадает с теорией.

Теперь, по формуле (1) посчитаем значение показателя адиабаты в зависимости от температуры:

$$\gamma = \frac{\mu}{RT} c^2$$

μ возьмем равным 29 г/моль, а R равным 8,31 Дж/(моль·К).

$$\gamma_{303,2} = \frac{\mu}{RT_{303,2}} c_{303,2}^2 = \frac{0,029}{8,31 \cdot 303,2} \cdot 347,6^2 = 1,39$$

$$\sigma_{\gamma_{303,2}} = \gamma_{303,2} \sqrt{\left(\frac{\sigma_T}{T_{303,2}}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sigma_{c_{303,2}}}{c_{303,2}}\right)^2} = 1,39 \sqrt{0,0003^2 + 0,015^2} = 0,021$$

$$\gamma_{313,2} = \frac{\mu}{RT_{313,2}} c_{313,2}^2 = \frac{0,029}{8,31 \cdot 313,2} \cdot 355^2 = 1,4$$

$$\sigma_{\gamma_{313,2}} = \gamma_{313,2} \sqrt{\left(\frac{\sigma_T}{T_{313,2}}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sigma_{c_{313,2}}}{c_{313,2}}\right)^2} = 1,4 \sqrt{0,0003^2 + 0,015^2} = 0,021$$

$$\gamma_{323,2} = \frac{\mu}{RT_{323,2}} c_{323,2}^2 = \frac{0,029}{8,31 \cdot 323,2} \cdot 355,6^2 = 1,38$$

$$\sigma_{\gamma_{323,2}} = \gamma_{323,2} \sqrt{\left(\frac{\sigma_T}{T_{323,2}}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sigma_{c_{323,2}}}{c_{323,2}}\right)^2} = 1,38 \sqrt{0,0003^2 + 0,015^2} = 0,021$$

$$\gamma_{333,2} = \frac{\mu}{RT_{333,2}} c_{333,2}^2 = \frac{0,029}{8,31 \cdot 333,2} \cdot 357,7^2 = 1,37$$

$$\sigma_{\gamma_{333,2}} = \gamma_{333,2} \sqrt{\left(\frac{\sigma_T}{T_{333,2}}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{\sigma_{c_{333,2}}}{c_{333,2}}\right)^2} = 1,37 \sqrt{0,0003^2 + 0,021^2} = 0,029$$

Получившиеся значения довольно близки к табличным, что показывает, что данный метод немного точнее первого. Вообще можно считать, что табличные значения совпали с измеренными нами, так как они находятся в пределах погрешности наших измерений.

Вывод. Мы смогли с высокой точностью определить скорость звука и показатель адиабаты двумя различными методами в которых используется звуковой генератор. В целом второй метод мне показался чуть более точным и удобным, так как там вероятность пропустить момент резонанса меньше, что снижает вероятность моей ошибки.

Контрольные вопросы.

1. Запишем волновое уравнение и его решение для одномерного, плоского распространения звуковой волны в воздухе. При этом величина смещения бесконечно малого элемента среды (воздуха), заключенного между координатой x и координатой $x + \Delta x$, $u(x, t)$, в волне будет зависеть от двух переменных: пространственной координаты x и времени t .

Вводя плотность среды ρ_0 и изменение плотности в волне $\Delta\rho$, из условия сохранения массы элемента получаем

$$\rho_0 \Delta x = (\rho_0 + \Delta \rho)[x + \Delta x + u(x + \Delta x, t) - x - u(x, t)].$$

Разлагая смещение в ряд Тейлора, имеем

$$\rho_0 \Delta x = (\rho_0 + \Delta \rho)[\Delta x + (\partial u / \partial x) \Delta x].$$

Отсюда, так как $\Delta \rho \ll \rho$ и, следовательно, $(\partial u / \partial x) \ll 1$,

$$\Delta \rho \approx -\rho_0 (\partial u / \partial x).$$

Второй закон Ньютона для элемента даеь

$$\rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x, t) - p(x + \Delta x, t) \approx -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$$

Предполагая, что процесс изменения плотности в волне происходит быстро и теплообмен не успевает произойти, т.е. предполагая, что процесс распространения звука является адиабатическим, имеем

$$\Delta p = (\partial p / \partial \rho)_{ad} \Delta \rho = c_{зв} \Delta \rho$$

Следовательно:

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

Заменим в уравнении Пуассона $PV^\gamma = const$ объем на плотность $\rho = m/V$, после чего получим $P = const \cdot \rho^\gamma$.

$$\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{адиаб} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

2. В выбранном диапазоне температур показатель адиабаты не зависит от температуры, так как теплоемкость газа при постоянном объеме и давлении на данном участке практически не меняются.

3. Вообще нет, так как при температуре в 1000 градусов по Цельсию начнется переход газа в состояния называемое плазмой. Но в целом, изменение показателя адиабаты воздуха по сравнению с комнатной температурой нельзя будет назвать значительным. По табличным данным, показатель адиабаты изменится менее, чем на 3%.