

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра радиотехники и систем управления

ДЕМОДУЛЯЦИЯ В ШУМАХ

Методические указания
к лабораторной работе

по курсу *Нелинейные преобразования
и прием радиосигналов*

Составитель А. А. Григорьев

МОСКВА
МФТИ
2016

УДК 621.396.6

Р ецензент
Кандидат технических наук *А. Л. Ларин*

Демодуляция в шумах: методические указания к лабораторной работе по курсу *Нелинейные преобразования и прием радиосигналов* / сост. А. А. Григорьев. – М.: МФТИ, 2016. – 44 с.

Цель работы состоит в том, чтобы уяснить принципы цифровой модуляции и приобрести навыки исследования радиоканалов с шумами моделированием в среде Simulink пакета Matlab.

УДК 621.396.6

- © Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2016
- © Григорьев А. А., составление, 2016

Содержание

| | |
|---|-----------|
| 1. Предмет исследования | 4 |
| 2. Комплексный радиоканал | 4 |
| 3. Передача символа | 7 |
| 4. Передача созвездия | 12 |
| 5. Многомерный канал | 16 |
| 6. Линейная модуляция | 18 |
| 7. Частотная модуляция | 20 |
| 8. Ортогональная модуляция | 21 |
| 9. Задание | 22 |
| 9.1. Приступая к работе | 22 |
| 9.2. Канал с двоичной фазовой модуляцией | 24 |
| 9.3. Канал с двоичной ортогональной модуляцией | 27 |
| 9.4. Канал с двоичной амплитудной модуляцией | 28 |
| 9.5. Канал с квадратурной модуляцией QPSK | 30 |
| 9.6. Каналы с M-ичной модуляцией | 32 |
| 9.7. Линейная модуляция с прямоугольным импульсом | 34 |
| 9.8. Корень из приподнятого косинуса | 37 |
| 9.9. Двоичная частотная модуляция | 39 |
| 9.10. Модуляция с минимальным частотным сдвигом | 41 |
| Литература | 43 |

1. Предмет исследования

Цель работы состоит в том, чтобы, уяснив принципы передачи цифровых данных по радиоканалу с аддитивным шумом, экспериментально исследовать зависимости вероятностей ошибок от уровня шума при различных способах цифровой модуляции. Исследования проводятся моделированием в среде Simulink пакета Matlab. Исследуются как простые модели дискретных каналов, так и более сложные baseband-модели, пригодные для анализа спектров мощности сигналов цифровой модуляции.

2. Комплексный радиоканал

Унифицированный подход к обсуждению принципов цифровой модуляции дает концепция *комплексного радиоканала*, структурная схема которого показана на рис. 1.

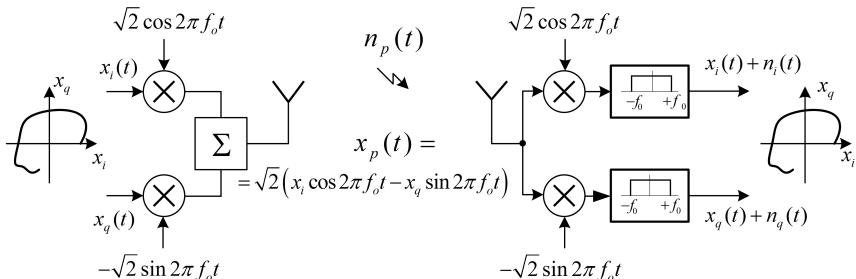


Рис. 1. Структура комплексного канала

Комплексный канал воспроизводит на стороне приема передаваемую *комплексную огибающую* $x(t) = x_i(t) + jx_q(t)$ – траекторию движения точки в комплексной плоскости. Квадратурный модулятор передатчика преобразует огибающую (*baseband signal*) в вещественный полосовой сигнал (*passband signal*)

$$x_p(t) = \sqrt{2}\operatorname{Re}(x(t)e^{j2\pi f_0 t}) = \sqrt{2}(x_i(t) \cos 2\pi f_0 t - x_q(t) \sin 2\pi f_0 t)$$

со спектром в окрестности несущей частоты f_0 , который и передается по радиоканалу. Вещественная и мнимая части огибаю-

щей переносятся косинусной и синусной квадратурными компонентами полосового сигнала.

На стороне приема переданную огибающую восстанавливает квадратурный смеситель – пара перемножителей на косинусную и синусную версии несущего колебания и пара фильтров нижних частот с полосами пропускания $[-f_0, f_0]$. Фильтры подавляют возникающие при перемножении компоненты на удвоенной несущей частоте $2f_0$. К примеру, на выходе перемножителя косинусного плеча смесителя получается

$$\begin{aligned} x_p(t)\sqrt{2}\cos 2\pi f_0 t &= 2\left(x_i(t)\cos 2\pi f_0 t - x_q(t)\sin 2\pi f_0 t\right)\cos 2\pi f_0 t = \\ &= x_i(t) + x_i(t)\cos 4\pi f_0 t - x_q(t)\sin 4\pi f_0 t. \end{aligned}$$

После подавления фильтром слагаемых на частоте $2f_0$ остается как раз $x_i(t)$.

Фазы опорных гармонических колебаний, используемых модулятором передатчика и смесителем приемника, должны быть синхронизованы. При наличии ошибки θ в фазе опорной несущей смесителя на его выходе получится траектория $x'(t) = x(t)e^{j\theta}$, отличающаяся от переданной поворотом на угол θ . Если совпадение фаз несущих на сторонах передачи и приема так или иначе обеспечено, комплексный канал называют *когерентным*. В *некогерентном* канале специальных мер по синхронизации фаз не принимается. Тогда принятая огибающая может отличаться от переданной поворотом на неконтролируемый угол, так что на стороне приема остается доступным только модуль огибающей, не меняющейся при поворотах.

В радиоканале к полосовому сигналу $x_p(t)$ добавляется белый гауссовский шум $n_p(t)$ с двухсторонней спектральной плотностью $n_p^2(f) = \frac{N_0}{2}$ и функцией корреляции $n_p^2(t) = \langle n_p, n_p \rangle(t) = \frac{N_0}{2}\delta(t)$. Как и всегда, корреляция и спектральная плотность связаны преобразованиями Фурье:

$$n_p^2(t) = \frac{N_0}{2}\delta(t) \Leftrightarrow \frac{N_0}{2} = n_p^2(f).$$

Прохождение этого шума через косинусное и синусное плечи смесителя дает на выходе комплексный шум $n(t) = n_i(t) + jn_q(t)$.

Начнем с обсуждения комплексного шума $w(t)$ на выходах пары перемножителей смесителя:

$$w(t) = \sqrt{2}n_p(t) \cos 2\pi f_0 t - j\sqrt{2}n_p(t) \sin 2\pi f_0 t = \sqrt{2}n_p(t)e^{-j2\pi f_0 t}.$$

Видно, что этот шум можно рассматривать как результат умножения вещественного шума $n_p(t)$ на комплексную гармоническую функцию. Его функция корреляции

$$\langle w, w \rangle(t) = \left\langle \sqrt{2}n_p e^{-j2\pi f_0 t}, \sqrt{2}n_p e^{-j2\pi f_0 t} \right\rangle(t) = 2e^{-j2\pi f_0 t} \langle n_p, n_p \rangle(t)$$

также оказывается результатом умножения функции корреляции шума n_p на $2e^{-j2\pi f_0 t}$. Но умножение функции на комплексную гармонику эквивалентно сдвигу ее фурье-образа – спектральной плотности. Поэтому

$$w^2(f) = 2n_p^2(f_0 + f) = \mathcal{N}_0.$$

Таким образом, шум $w(t)$ на выходах перемножителей – это белый шум со спектральной плотностью \mathcal{N}_0 , равной односторонней плотности вещественного шума $n_p(t)$. В свою очередь, шум $n(t)$ – это результат фильтрации $w(t)$ фильтром с полосой $[-f_0, f_0]$. Его плотность равна \mathcal{N}_0 в этой полосе и нулю – вне ее.

В реальности несущие частоты настолько велики по сравнению с полосами полезных сигналов, что их можно считать бесконечными. Поэтому шум $n(t) \simeq w(t)$ на выходе смесителя также можно считать комплексным белым шумом с плотностью \mathcal{N}_0 и функцией корреляции $n^2(t) = \mathcal{N}_0\delta(t)$.

Выразим корреляцию комплексного шума $n(t) = n_i(t) + jn_q(t)$ через корреляции его квадратурных компонент:

$$\begin{aligned} \langle n, n \rangle &= (\langle n_i, n_i \rangle + \langle n_q, n_q \rangle) + j(\langle n_q, n_i \rangle - \langle n_i, n_q \rangle) = \\ &= (\langle n_i, n_i \rangle + \langle n_q, n_q \rangle) + 2j \langle n_q, n_i \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Это совпадает с $\mathcal{N}_0\delta(t)$, если $\langle n_i, n_i \rangle(t) = \langle n_q, n_q \rangle(t) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(t)$ и $\langle n_q, n_i \rangle(t) = 0$.

Таким образом, вещественная и мнимая части комплексного белого шума с плотностью \mathcal{N}_0 – это некоррелированные между собой вещественные белые шумы с плотностями $\frac{\mathcal{N}_0}{2}$ каждый. На самом деле мы сталкиваемся здесь с проявлением фундаментального свойства *нормальности* шумов в области комплексных

огибающих, см. [1], глава 6. Нормальный комплексный шум отличает совпадение корреляций вещественной и мнимой частей и нечетность взаимной корреляции между ними:

$$\langle n_i, n_i \rangle (t) = \langle n_q, n_q \rangle (t); \quad \langle n_q, n_i \rangle (-t) = -\langle n_q, n_i \rangle (t).$$

Важные для дальнейшего представления о комплексном канале сведены на рис 2. По каналу можно передать произвольную комплексную огибающую $x(t)$. Когерентный канал ($\theta = 0$) воспроизводит ее на выходе без изменения. На выходе некогерентного канала воспроизведенная огибающая отличается поворотом на неконтролируемый угол θ . Добавляющийся в канале вещественный белый шум $n_p(t)$ с плотностью $\frac{N_0}{2}$ «просачивается» на выход как комплексный белый шум $n(t)$ с плотностью N_0 – по $\frac{N_0}{2}$ на вещественное и мнимое измерение.

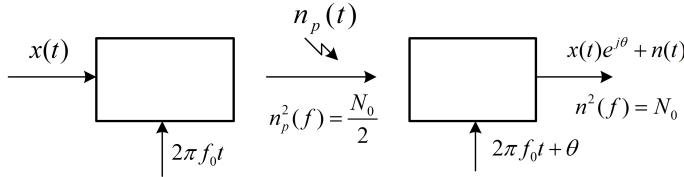


Рис. 2. Комплексный канал

3. Передача символа

Начнем с передачи по комплексному каналу одиночного символа – комплексного числа C . Будем передавать этот символ амплитудой некоторого опорного импульса $p(t)$, посыпая по каналу огибающую $x(t) = Cp(t)$. Энергию импульса разумно выбрать единичной:

$$\langle p, p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |p^2(u)| du = 1.$$

Тогда затраченная на передачу энергия оказывается равной $E_c = \langle x, x \rangle = |C|^2$, а модуль C приобретает смысл корня из энергии: $|C| = \sqrt{E_c}$. Сам импульс $p(t)$ принимает в этой нормировке размерность $\left[\frac{1}{\sqrt{T}}\right]$, а его спектр $p(f)$ – размерность $[\sqrt{T}]$.

На выходе когерентного канала получим огибающую

$$y(t) = x(t) + n(t) = Cp(t) + n(t),$$

искаженную добавлением комплексного белого шума $n(t)$ с плотностью \mathcal{N}_0 .

Приемник найдет проекцию принятой реализации $y(t)$ на известный ему опорный импульс $p(t)$, вычислив скалярное произведение

$$Y = \langle y, p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(u)p^*(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} [Cp(u) + n(u)]p^*(u) du = C + W,$$

где

$$W = \langle n, p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} n(u)p^*(u) du.$$

Процедуру вычисления скалярного произведения принятой реализации на опорный импульс называют *согласованной фильтрацией*. Ее результатом оказывается переданный символ C , искаженный случайной шумовой добавкой W .

Статистические свойства шумовой добавки нам помогут понять представления из теории линейной фильтрации шумов. Заметим, что скалярное произведение $W = \langle n, p \rangle$ – это значение в нуле функции корреляции

$$\langle n, p \rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(u)p^*(u-t) du = \int_{-\infty}^{\infty} n(u)h(t-u) du = (n * h)(t),$$

которая заменой $p^*(-t) = h(t)$ преобразуется в свертку. В результате оказывается, что W – это выборочное значение шума $W(t)$ на выходе линейного фильтра с импульсной реакцией $h(t)$, на входе которого действует белый гауссовский шум $n(t)$.

Результат линейной фильтрации гауссовского шума непременно гауссов, а плотность вероятностей гауссовского шума вполне определяется единственным параметром – дисперсией. Так что для нахождения плотности вероятностей распределения случайной величины W достаточно найти дисперсию шума на выходе фильтра.

В свою очередь, дисперсия шума – это интеграл от его спектральной плотности. Плотность же шума на выходе фильтра можно найти, умножив плотность \mathcal{N}_0 входного шума на квадрат модуля комплексного коэффициента передачи – фурье-образа импульсной реакции:

$$K(jf) = h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} p^*(-t)e^{-j2\pi ft} dt = p^*(f).$$

Видно, что этот коэффициент передачи совпадает с сопряженным спектром $p(f)$ опорного импульса $p(t)$. Окончательно для дисперсии шума W все это дает

$$E[|W|^2] = 2\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_0 |K(jf)|^2 df = \mathcal{N}_0 \int_{-\infty}^{\infty} |p(f)|^2 df = \mathcal{N}_0.$$

Здесь использовано тождество Парсеваля, которое выражает факт совпадения единичной энергии сигнала $p(t)$ с энергией его спектра $p(f)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |p(t)|^2 dt = 1.$$

Таким образом, результатом передачи символа C по радиоканалу с плотностью вещественного шума $\frac{\mathcal{N}_0}{2}$ в окрестности несущей f_0 оказывается отсчет на выходе согласованного фильтра

$$Y = C + W,$$

где $W = W_i + jW_q$ – выборочное значение комплексного гауссовского шума с дисперсией $2\sigma^2 = \mathcal{N}_0$, распределенное с плотностью вероятностей

$$G_{\sigma}(W) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|W|^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{W_i^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{W_q^2}{2\sigma^2}}.$$

Это распределение имеет форму «шапочки» с максимумом (центром) в нуле. Оно является произведением двух гауссовых распределений для вещественной W_i и мнимой W_q компонент комплексного шума. Эти компоненты статистически независимы и обладают дисперсией $\sigma^2 = \frac{\mathcal{N}_0}{2}$ каждая. Полная дисперсия комплексного шума равна сумме дисперсий компонент и составляет $2\sigma^2 = \mathcal{N}_0$.

В дальнейшем критически важную роль будет играть **отношение сигнал/шум**, которое вводится естественным образом как отношение квадрата модуля отсчета (энергии сигнала) к дисперсии шума:

$$\mu_c = \frac{|C|^2}{2\sigma^2} = \frac{E_c}{\mathcal{N}_0}.$$

Традиционно это отношение выражают в децибелах:

$$snr = 10 \lg \mu_c = 10 \lg \frac{E_c}{N_0}.$$

Обычно под отношением сигнал/шум понимают несколько иное – в расчет берется отношение мощности сигнала P_s к дисперсии шума в полосе F_s , занимаемой спектром сигнала: $\mu = \frac{P_s}{N_0 F_s}$. Чтобы сопоставить эти определения, нужно каким-то образом ввести понятие эффективной мощности сигнала $Cp(t)$ с конечной энергией $E_c = |C|^2$. Это можно сделать, введя эффективную длительность T импульса $p(t)$ через площадь под кривой его корреляции:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \langle p, p \rangle (t) dt = |p(f)|^2|_{f=0} = |p(0)|^2.$$

Заодно эта длительность оказывается равной квадрату модуля коэффициента передачи согласованного фильтра на нулевой частоте. Теперь отношение сигнал/шум можно привести к отношению эффективной мощности сигнала $P_c = \frac{E_c}{T}$ к дисперсии шума в шумовой полосе F_n согласованного фильтра:

$$\mu_c = \frac{E_c}{N_0} = \frac{E_c}{\int N_0 |p(f)|^2 df} = \frac{E_c/T}{N_0 \int \frac{|p(f)|^2}{|p(0)|^2} df} = \frac{P_c}{N_0 F_n}.$$

Кривая $|p(f)|^2$ задает одновременно и форму квадрата модуля коэффициента передачи согласованного фильтра, и закон распределения по частотам энергии сигнала. На тех частотах, где доля энергии сигнала мала, согласованный фильтр пропорционально подавляет плотность шума. Тем самым оказывается, что он аккумулирует всю энергию сигнала, «собирая» при этом минимально возможное количество шума.

Чтобы убедиться в оптимальности согласованного фильтра по отношению сигнал/шум на выходе, рассмотрим скалярное произведение сигнала $Cp(t)$ на иной опорный импульс $q(t) \neq p(t)$. Энергию этого импульса $\langle q, q \rangle$, как и раньше, можем принять равной единице. Тогда дисперсия шума на выходе по-прежнему составит N_0 , а для отношения сигнал/шум получим

$$\mu = \frac{|C|^2 |\langle p, q \rangle|^2}{N_0} \leq \frac{|C|^2}{N_0} \langle p, p \rangle \langle q, q \rangle = \mu_c.$$

Здесь было использовано неравенство Коши–Шварца, [1], с. 16, $|\langle p, q \rangle|^2 \leq \langle p, p \rangle \langle q, q \rangle$, которое выполняется со знаком равенства, только когда q пропорционально p . Поскольку оба эти импульса нормированы на единичную энергию, μ достигает предельного значения μ_c , только когда $q = p$, то есть при согласованной фильтрации.

Удобно ввести **стандартную калибровку** комплексной плоскости отсчетов на выходе согласованного фильтра, нормировав ее оси на σ . В этой калибровке отсчет $y = Y/\sigma$ предстает в виде

$$y = c + w,$$

где модуль сигнала $|c| = |C|/\sigma = \sqrt{\frac{E_c}{N_0/2}} = \sqrt{2\mu_c}$ оказывается равным корню из удвоенного отношения сигнал/шум, а шум $w = W/\sigma$ становится стандартным комплексным гауссовским шумом с дисперсией 2 – по единице на вещественное и мнимое измерение:

$$G(w) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|w|^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_i^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_q^2}{2}}.$$

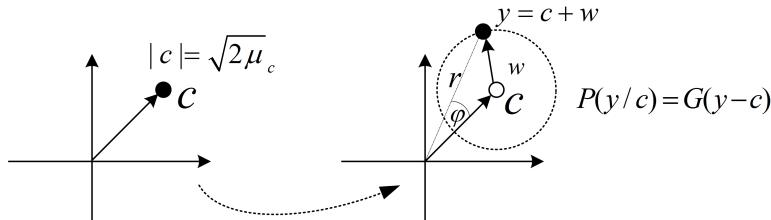


Рис. 3. Передача символа

Окончательно канал передачи символа принимает вид, показанный на рис 3. Для передачи выбирается желаемое отношение сигнал/шум μ_c и передается сигнальная точка c с $|c| = \sqrt{2\mu_c}$. На это затрачивается энергия $E_c = \mu_c N_0$. На приеме получается точка y , сдвинутая на выборочное значение w стандартного гауссовского шума с дисперсией 2. Положение этой точки случайно и распределено с плотностью

$$P(y/c) = G(y - c) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|y-c|^2}{2}}.$$

Заметим, что эта картина совершенно не зависит от формы выбранного для передачи опорного импульса $p(t)$. Во всем бесконечномерном линейном пространстве сигналов, которые можно передать по комплексному каналу, нами используется сейчас ровно одно измерение – одномерное подпространство, натянутое на опорный импульс. Причем, как именно это подпространство выбрано, – не имеет значения.

В случае некогерентного канала для измерения доступен только модуль $r = |y|$ вектора y . Распределение модуля можно найти, проинтегрировав распределение $G(y - c)$ по углу φ , см. рис. 3. Это приводит к распределению Релея–Райса:

$$R_{|c|}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{(r \cos \varphi - |c|)^2 + r^2 \sin^2 \varphi}{2}} r d\varphi = r e^{-\frac{r^2 + |c|^2}{2}} I_0(|c|r),$$

где

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x \cos \varphi} d\varphi$$

– модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. При $c = 0$ (отсутствие сигнала) получается более простое распределение Релея – распределение модуля стандартного комплексного гауссовского шума:

$$R_0(r) = r e^{-\frac{r^2}{2}}.$$

4. Передача созвездия

Передача единственного символа безальтернативна – не переносит информации. Чтобы организовать передачу данных, требуется несколько символов, скажем, M штук. Такую систему символов-точек называют *созвездием*. Передатчик выбирает одну из M альтернатив, закладывая в этот выбор $R_b = \log_2 M$ битов информации. Четыре символа созвездия на рис. 4 занумерованы двухбитовыми блоками. Выбор для передачи одного из них переносит $R_b = \log_2 4 = 2$ бита данных. Параметр R_b известен как *кодовая скорость* системы модуляции – число битов на комплексное измерение.

На передачу данного символа c затрачивается энергия $E_c = \mu_c \mathcal{N}_0$. Энергетику созвездия в целом характеризуют средней энергией символа или, что то же самое, средним значением

отношения сигнал/шум:

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_{c_m}; \quad \mu_s = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mu_{c_m} = \frac{E_s}{\mathcal{N}_0}.$$

Среднее отношение сигнал/шум (отношение сигнал/шум на одно комплексное измерение) просто связано со средним квадратом модуля точки созвездия:

$$2\mu_s = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |c_m|^2.$$

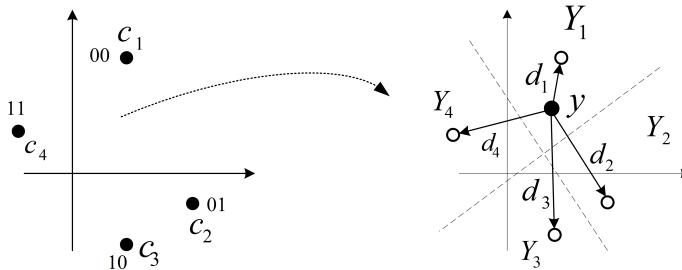


Рис. 4. Передача созвездия символов

Задача приемника – идентифицировать переданный символ по полученному отсчету y на выходе согласованного фильтра. Это называют *жесткой демодуляцией* созвездия. В отсутствие шума y совпадает с переданным символом c . Тогда идентификация безошибочна. При наличии шума сигнальная точка y может отличаться от всех символов созвездия. Тогда переданный символ не может быть указан достоверно. Возможны ошибки демодуляции.

Надежность демодуляции характеризуют вероятностными категориями. Детальное описание предполагает задание набора условных вероятностей $P(n|m)$ принятия жесткого решения в пользу символа c_n при условии, что передавался символ c_m . При известном априорном распределении $Q(m)$ вероятностей символов на входе ограничиваются обсуждением кумулятивных характеристик надежности, таких как *средняя вероятность ошибки*

на символ:

$$P_e = \sum_m \sum_{n \neq m} Q(m)P(n/m)$$

или средняя вероятность правильного решения относительно переданного символа:

$$1 - P_e = \sum_m Q(m)P(m/m).$$

При равномерном распределении на входе, когда $Q(m) = 1/M$, оптимален простой критерий принятия решений **по минимуму расстояния**: демодулятор вычисляет расстояния $d_m = |y - c_m|$ от отсчета y до всех символов созвездия, рис. 4, и выносит решение \hat{m} в пользу того символа, до которого это расстояние минимально. Формально это записывается так:

$$\hat{m} = \arg \min_m |y - c_m|.$$

Известно, что критерий минимума расстояния эквивалентен критерию максимального правдоподобия, который минимизирует среднюю вероятность ошибки при равномерном распределении входов, см. [1], раздел 7.1.

Выбор решающего правила задает разбиение плоскости значений отсчета согласованного фильтра на *области принятия решений* Y_n . Область Y_n включает те точки y , по которым демодулятор выносит решение в пользу точки c_n :

$$Y_n = \{y : \arg \min_m |y - c_m| = n\}.$$

Разбиение плоскости по критерию минимума расстояния до заданной системы точек известно как *разбиение Вороного*. На рис. 4 границы четырех областей Вороного показаны пунктиром.

Задача вычисления вероятностей ошибок сводится к вычислению мер областей Вороного по условным распределениям вероятностей. Пусть, к примеру, был передан символ c_m . Тогда вероятность $P(n/m)$ принять решение в пользу символа c_n равна мере области Y_n по распределению $P(y/c_m) = G(y - c_m)$:

$$P(n/m) = \int_{Y_n} G(y - c_m) dS = \frac{1}{2\pi} \int_{Y_n} e^{-\frac{|y - c_m|^2}{2}} dS,$$

где dS – элемент площади.

Вероятности ошибок когерентной демодуляции выражаются через Q -функцию

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Значение $Q(x)$ – это площадь под стандартной гауссовой кривой единичной дисперсии на интервале $[x, \infty)$. Ясно, что

$$Q(-\infty) = 1; \quad Q(0) = 1/2; \quad Q(+\infty) = 0; \quad Q(x) + Q(-x) = 1.$$

Важное значение имеет верхняя граница для $Q(x)$:

$$Q(x) \leq B(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad x \geq 0,$$

выполняющаяся с равенством при $x = 0$. Функция $B(x)$ появляется в задачах вычисления вероятностей ошибок при некогерентной демодуляции. Связано это с тем, что через нее выражается площадь «хвоста» релеевского распределения:

$$\int_x^\infty R_0(r) dr = \int_x^\infty e^{-r^2/2} r dr = 2B(x).$$

Значения вероятностей ошибок удается выразить через Q -функцию, когда области Вороного имеют прямоугольную форму.

Вычисление меры прямоугольной области Y по распределению $P(z/c) = G(z - c)$ иллюстрирует рис. 5. В координатных осях (x, y) положение прямоугольника задается четырьмя расстояниями (a, b, u, v) . Для вероятности попадания точки $z = c + w$ внутрь прямоугольника Y имеем

$$\begin{aligned} P(Y/c) &= \int_a^b dx \int_{-u}^v dy G(x + jy) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b dx \int_{-u}^v dy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \\ &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_a^\infty - \int_b^\infty \right) e^{-x^2/2} dx \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-u}^\infty - \int_v^\infty \right) e^{-y^2/2} dy \right\} = \\ &= \{Q(a) - Q(b)\} \{Q(-u) - Q(v)\}. \end{aligned}$$

Эта формула универсальна. Расстояния (a, b, u, v) в ней могут быть положительными, отрицательными и бесконечными. От отрицательных расстояний позволяет избавляться тождество $Q(-d) = 1 - Q(d)$. Рис. 5б,с иллюстрируют вывод формул для мер двух полуплоскостей и четырех квадрантов комплексной плоскости по распределению относительно точки c . Со многими примерами вычисления вероятностей ошибок мы столкнемся в ходе работы.

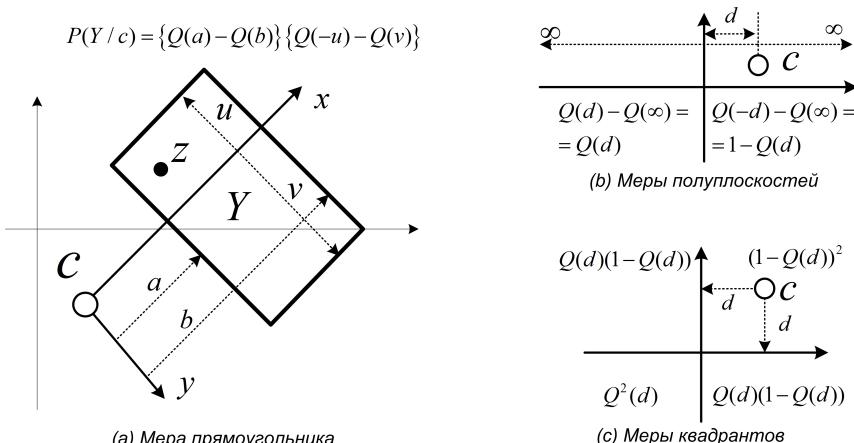


Рис. 5. К вычислению мер областей Вороного

5. Многомерный канал

По одномерному каналу с созвездием из M символов можно передать $\log_2 M$ битов информации. Как быть, если нам нужно передавать больше? Ответ очевиден: нужно подключить другие размерности, которые бесконечномерный комплексный канал предоставляет во множестве. Иными словами, наряду с опорным импульсом $p_1(t) = p(t)$ следует задействовать большое число N опорных сигналов $p_n(t)$, образующих ортонормированную систему:

$$\langle p_n, p_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(u) p_k^*(u) du = \delta_{n,k}.$$

Передаваемый сигнал будет при этом иметь вид аддитивной смеси:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N C_n p_n(t).$$

Но это не создаст проблем. Ортогональность опорных сигналов позволит оценить на стороне приема каждый из символов C_n точно так же, как если бы он передавался в одиночку. Вычисление скалярного произведения принятой реализации $y(t) = x(t) + n(t)$ на опорный сигнал $p_k(t)$ даст

$$Y_k = \langle y, p_k \rangle = \sum_{n=1}^N C_n \langle p_n, p_k \rangle + \langle n, p_k \rangle = \sum_{n=1}^N C_n \delta_{n,k} + W_k = C_k + W_k.$$

Видно, что отсчет Y_k на выходе k -го согласованного фильтра имеет ту же форму, что и в одномерном канале, и «ничего не знает» о параллельном существовании других каналов. Более того, ортогональность опорных сигналов гарантирует, что шумы W_k некоррелированы, а следовательно, будучи гауссовскими, и статистически независимы.

Подключение N комплексных измерений приводит к векторному каналу, по которому в качестве «макросимволов» передаются N -блоки $c = (c_1, \dots, c_N)$. На выходе получаются N -блоки $y = (y_1, \dots, y_N)$ отсчетов согласованных фильтров. Шенноновская теория информации ([1], раздел 7.5) гарантирует, что для векторного канала можно построить «большое» созвездие из M «макросимволов» – блоков со средним отношением сигнал/шум μ_s на символ (на одно комплексное измерение), которое обеспечит стремление к нулю при $N \rightarrow \infty$ средней вероятности ошибки демодуляции блока, если скорость передачи $R_b = \frac{\log_2 M}{N}$ удовлетворяет границе

$$R_b < \log_2(1 + \mu_s) \quad \text{или} \quad \mu_s > 2^{R_b} - 1.$$

Мощность $M = 2^{NR_b}$ такого созвездия, разумеется, экспоненциально велика. Шенноновская теория дает следующий рецепт его построения. Так или иначе, реализуем датчик случайных комплексных чисел, распределенных по гауссовскому закону с дисперсией $2\mu_s$, и произвольным образом распределим набор из MN выданных им чисел по N -блокам. Получим случайное созвездие из M блоков. Гарантируется, что при

$\log_2 M < N \log_2(1 + \mu_s)$ усредненная по всем таким случайным созвездиям вероятность ошибки демодуляции блока $P_e(N)$ стремится к нулю по N . А это означает, что во множестве всех случайных созвездий существуют экземпляры, для которых эта вероятность не превышает средней и также стремится к нулю.

Переход к средней энергии на бит $E_b = \frac{E_s}{R_b}$ и отношению сигнал/шум на бит $\mu_b = \frac{\mu_s}{R_b} = \frac{E_s}{R_b N_0} = \frac{E_b}{N_0}$ дает фундаментальную границу Шеннона для отношения сигнал/шум на бит, минимально необходимого для надежной передачи при сколь угодно малой скорости:

$$\mu_b = \frac{E_b}{N_0} = \frac{\mu_s}{R_b} \geq \frac{2^{R_b} - 1}{R_b} \geq \ln 2 = -1.59 \text{ dB}.$$

Принципиальное значение для теории связи имеет вопрос о наибольшем числе N ортогональных сигналов, которые можно построить при заданных ограничениях на полосу канала F_s и время его использования T_s . Известно, см. [1], раздел 3.5, что это число конечно и не превышает *базы канала*: $N \leq F_s T_s$. Качество конкретной системы ортогональных сигналов характеризует *спектральная эффективность* $\rho = \frac{N}{F_s T_s} \leq 1$ – число ортогональных комплексных измерений в секунду (бод) на Герц полосы. При разработке схем модуляции стремятся к достижению высокой спектральной эффективности, особенно когда полоса канала лимитирована.

6. Линейная модуляция

Простейший способ построить систему из большого числа ортогональных сигналов состоит в том, чтобы разнести их по времени с некоторым шагом T , выбрав $p_n(t) = p(t - nT)$. Это приводит к линейной модуляции с огибающей

$$x(t) = \sum_n C_n p(t - nT),$$

а условие ортогональности принимает форму условия отсутствия межсимвольной интерференции

$$\langle p(u - nT), p(u - kT) \rangle = \langle p, p \rangle ((n - k)T) = \delta_{n,k}.$$

Видно, что отсутствие интерференции эквивалентно обращению в нуль автокорреляции $\langle p, p \rangle(t)$ в точках $t = kT$, $k \neq 0$.

Сигнал $x(t)$ можно сформировать, пропустив поток взвешенных δ -импульсов

$$x^\delta(t) = \sum_n C_n \delta(t - nT)$$

через линейный фильтр с импульсной реакцией $p(t)$. Отсюда слово «линейная» в названии. В наши дни такой фильтр обычно реализуют в цифровом виде.

Условие отсутствия интерференции автоматически выполняется для компактного по времени импульса $p(t)$, равного нулю вне интервала $[0, T]$. Простейший пример – прямоугольный импульс длительности T . Однако спектры компактных импульсов некомпактны на оси частот, что создает проблемы со спектральной эффективностью. Применяют и некомпактные по времени импульсы с компактным спектром. Ключ к их построению дает критерий Найквиста отсутствия межсимвольной интерференции, [1], с. 156. Примем шаг T за единицу измерения времени. Согласно Найквисту, условие отсутствия интерференции $\langle p, p \rangle(k) = \delta_{k,0}$ равносильно следующему:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |p(f - m)|^2 = 1.$$

Интерференция отсутствует, если и только если репликация энергетического спектра $|p(f)|^2$ импульса $p(t)$ равномерно покрывает ось частот.

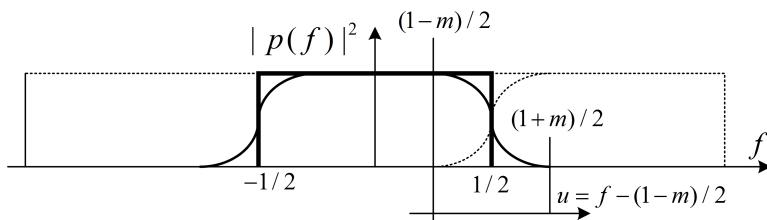


Рис. 6. Конструкция импульса «корень из приподнятого косинуса»

На рис. 6 показан энергетический спектр импульса Найквиста $p(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ – единичный прямоугольник на интервале $[-1/2, 1/2]$. Репликация этого спектра равномерно покрывает частотную ось, что говорит об отсутствии интерференции. И в самом деле, автокорреляция импульса Найквиста сама является импульсом Найквиста ($\langle \text{sinc}, \text{sinc} \rangle(t) = \text{sinc}(t)$) и обращается в нуль в целых точках. К тому же импульс Найквиста оптимален по спектральной эффективности, обеспечивая передачу N ортогональных измерений за N секунд в единичной полосе частот. Проблема в том, что его корреляция крайне медленно спадает – как $1/t$. Чтобы повысить скорость спада, разрывы спектра сглаживают по закону «приподнятый косинус» без нарушения условия отсутствия интерференции, как показано на рис. 6.

В окрестности точки $1/2$ сглаженный фронт спектра описывается формулой $\frac{1+\cos(\pi u/m)}{2} = \cos^2(\pi u/2m)$, $u = f - (1-m)/2$. Фактор $m = [0, 1]$ (*roll-off factor*) определяет степень сглаживания. При $m = 0$ сглаживание отсутствует, при $m = 1$ оно максимально, но эффективная двухсторонняя полоса сигнала $(1+m)$ достигает значения 2. Импульс со сглаженным таким образом энергетическим спектром известен как корень из приподнятого косинуса (*root of raised cosine*). Его временную форму удается найти аналитически обратным преобразованием Фурье от корня из энергетического спектра.

7. Частотная модуляция

Альтернативный способ построения системы ортогональных сигналов дает переход от сдвигов по времени к сдвигам по частоте. Элементарно проверяется, что набор гармонических сигналов $p_n(t) = e^{j2\pi n t}$ с целыми частотами n образует ортонормированную систему на временном интервале $t = [0, 1]$. Этот базис ведет к схемам частотной модуляции с огибающей

$$x(t) = \sum_n C_n e^{j2\pi n t}; \quad t = [0, 1].$$

При частотной модуляции символы C_n передаются импульсами, ортогонально сдвинутыми по частоте, подобно тому как при линейной они передаются импульсами, сдвинутыми по времени.

8. Ортогональная модуляция

Частотная модуляция – это распространенный способ построения систем ортогональной модуляции, в которых отличный от нуля символ передается в одном и только одном из M ортогональных каналов:

$$x_k(t) = \sum_{m=0}^{M-1} C_m e^{j2\pi nt}; \quad C_m = C\delta_{m,k}.$$

Выбор номера сигнального канала обеспечивает передачу $\log_2 M$ битов, что отвечает скорости $R_b = \frac{\log_2 M}{M}$ битов на комплексное измерение.

Обработка сигнала $x_k(t)$ системой из M согласованных фильтров дает M -блок отсчетов (y_1, \dots, y_M) , $y_m = c_m + w_m$, в котором равны нулю все c_m , кроме одного: $c_k = c = \sqrt{2\mu_s}$. Задача демодулятора – указать номер k канала, в котором присутствует сигнал.

Решение максимального правдоподобия в этой ситуации выносится по максимуму вещественной части отсчета ([1], с. 278):

$$k = \arg \max_m \operatorname{Re}(y_m).$$

Но чаще используется более простая некогерентная демодуляция по максимуму модуля отсчета:

$$k = \arg \max_m |y_m|.$$

Переданный в канале k символ демодулируется верно, если отсчет y в сигнальном канале превышает отсчеты во всех прочих $M - 1$ «шумовых» каналах. Поэтому

$$1 - P_e = \int_{-\infty}^{\infty} P(y/c) \left\{ \int_{-\infty}^y P(x/0) dx \right\}^{M-1} dy.$$

При когерентной демодуляции здесь $P(y/c)$ – это гауссовская плотность $G(y - c)$, а при некогерентной $P(y/c) = R_c(y)$ – распределение Релея–Райса, а $P(y/0) = R_0(y)$ – распределение Релея.

В частном случае $M = 2$ это сводится к

$$P_e = \int_{-\infty}^{\infty} P(y/c) \left\{ \int_y^{\infty} P(x/0) dx \right\} dy.$$

Упрощение этих интегралов, см. [1], с. 312, дает следующие компактные формулы для вероятностей ошибок при когерентной ($P_e^{[c]}$) и некогерентной ($P_e^{[nc]}$) демодуляции сигнала двоичной ортогональной модуляции:

$$P_e^{[c]} = Q\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right) = Q(\sqrt{\mu_s}); \quad P_e^{[nc]} = B\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right) = B(\sqrt{\mu_s}) = \frac{1}{2}e^{-\mu_s/2}.$$

В общем случае вероятность ошибки можно оценить сверху суммой вероятностей ошибочного решения в пользу одного из $M - 1$ «шумовых» каналов:

$$P_e \leq (M - 1)P_e^{[nc]} < \frac{M}{2}e^{-\mu_s/2} = \frac{1}{2}2^{(\log_2 M - \frac{\mu_s \log_2 e}{2})}.$$

При фиксированном отношении сигнал/шум μ_s на измерение вероятность ошибки растет с ростом M . Однако при фиксированном отношении сигнал/шум на бит $\mu_b = \frac{\mu_s}{\log_2 M}$ она стремится к нулю по M :

$$P_e \leq \frac{1}{2}2^{-\log_2 M(\frac{\mu_b}{2 \ln 2} - 1)},$$

если $\mu_b > 2 \ln 2$ ($snr > 1.42$ dB). Это всего вдвое хуже фундаментальной границы Шеннона $\mu_b > \ln 2$ ($snr > -1.59$ dB). Известно ([1], с. 325), что при когерентной демодуляции фундаментальная граница достигается. В этой связи ортогональная модуляция интересна как схема передачи данных, достигающая границы Шеннона в области предельно малых скоростей $R_b \rightarrow 0$.

9. Задание

9.1. Приступая к работе

Работа выполняется в среде Simulink пакета Matlab. Окно команд Matlab используется лишь в качестве калькулятора. Модели для всех пунктов задания подготовлены в .mdl-файлах. Полный комплект этих файлов нужно скопировать в Вашу рабочую папку.

Запускаем Matlab. Устанавливаем формат рабочего стола через меню *Desktop/Desktop Layout/Command Window Only*. Инструментом *Current Directory* устанавливаем путь на рабочую

папку. Содержимое этой папки можно показать в отдельном окне, установив флажок *Desktop/Current Directory*. Тогда файлы можно будет открывать щелчком в этом окне. Все готово к работе.

Нужные навыки работы в окне команд Matlab приобрести несложно. Для расчетов вероятностей ошибок подготовлены две полезные функции. Первая

$$\text{qerr}(\text{snr}, m) = Q(\sqrt{m\mu_s}); \quad \text{snr} = 10 \lg \mu_s$$

дает значение Q -функции от корня из заданного в децибелах отношения сигнал/шум $\mu_s = 10^{\text{snr}/10}$ с масштабным фактором \sqrt{m} . Аргумент m можно опускать. Тогда считается, что $m = 1$. Вторая функция – $\text{berr}(\text{snr}) = \frac{1}{2}e^{-\mu_s/2}$, $\mu_s = 10^{\text{snr}/10}$ – дает значение верхней границы $B(x)$ для функции $Q(x)$.

Наберите для пробы в командной строке Matlab `qerr(3)`. Получите значение 0.078896 для вероятности ошибки когерентной демодуляции ортогональных сигналов при отношении сигнал/шум $\text{snr} = 3 \text{ dB}$. (Чтобы значение выводилось именно в такой форме, наберите: `format short g`). Набрав `qerr(0, 2)`, получите примерно то же значение для вероятности ошибки демодуляции противоположных сигналов при $\text{snr} = 0 \text{ dB}$. Значение `berr(3) = 0.18438` дает вероятность ошибки некогерентной демодуляции ортогональных сигналов при $\text{snr} = 3 \text{ dB}$. Наконец, набрав `2 * qerr(3) - qerr(3)^2`, получите значение 0.15157 для вероятности ошибки демодуляции символа QPSK при 3 dB .

Можно выводить целые таблицы результатов вычислений. Зададим для этого столбец snr значений отношения сигнал/шум, набрав `snr = (0 : 0.5 : 9)'`. Символ ' здесь – это знак транспонирования вектор-строки. Результат сразу же будет выведен на экран. Теперь выведем таблицу, набрав, к примеру, `[snr, qerr(snr), berr(snr)]`. Когда в формуле для элементов столбца таблицы есть умножения или возведения в степень, нужно пользоваться (точечными) dot-операциями над компонентами векторов. К примеру, `[snr, qerr(snr). * qerr(snr)]` или `[snr, qerr(snr).^2]`. Список введенных ранее команд можно «листать» стрелками вверх/вниз.

Чтобы приобрести опыт, проверьте качество границы $B(x)$ для $Q(x)$, сравнив значения `qerr(snr)` и `berr(snr)` в ди-

пазоне $snr = (-50 : 5 : 10)'$. Убедитесь в том, что $qerr(snr) \simeq qerr(snr - 3, 2)$. Подумайте над природой этого явления.

Перейдем к среде Simulink. Откройте, к примеру, модель bpsk.mdl. Появится окно Simulink с заголовком «bpsk». Модель состоит из блоков, соединенных линиями – связями. Двойной щелчок на блоке открывает диалог настройки его параметров. Вникать в тонкости настроек пока не обязательно. Связь можно выделить щелчком, удалить клавишей *Delete* и задать, начав «тянуть» курсором линию от входа блока.

Все модели работают по тактам – в дискретном времени. Удобно считать, что длительность такта составляет 1 секунду или одну единицу любой условной шкалы времени. Процесс моделирования запускается клавишей ► на панели инструментов. В любой момент его можно остановить клавишей ■ или приостановить клавишей II. В окошке справа от ■ можно задать момент автоматической остановки моделирования. К примеру, при значении 20 моделирование автоматически завершится после 20-го такта. При задании значения **inf** моделирование продолжается неограниченно или до останова по некоторому внутреннему событию в модели. Во всех наших моделях событие останова моделирования может порождать только блок счетчика ошибок *Error Rate*. Для этого в его диалоге настройки нужно установить флагок *Stop Simulation* и задать значения полей *Target Number of Errors* и *Maximum Number of Symbols*.

С работой блоков будем знакомиться по мере их появления в наших моделях. Курсивом в тексте заданий выделены те места, которые *предполагают фиксацию полученных результатов в отчете*.

9.2. Канал с двоичной фазовой модуляцией

Модуляция BPSK (*Binary Phase Shift Keying*) использует созвездие на рис. 7 с двумя противоположными символами, которое выделено среди прочих свойством минимальности средней энергии символа при заданном расстоянии между ними. На этом же рисунке показана граница областей принятия решений и приведена формула для средней вероятности ошибки на символ.

Начнем с обсуждения представленных в модели блоков.

Блок *Random Bit* – это источник передаваемых данных. Он порождает случайный битовый поток со скоростью 1 бит за такт моделирования. В его настройках интерес представляет только поле *Initial Seed* – начальное состояние датчика псевдослучайных чисел.

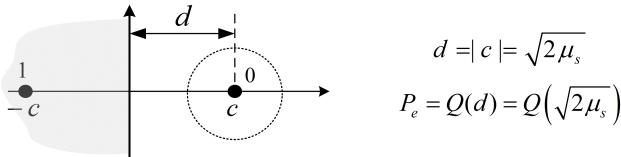


Рис. 7. Созвездие BPSK

BPSK Modulator преобразует входной битовый поток в поток комплексных чисел со значениями ± 1 из созвездия BPSK.

Блок *AWGN (Additive White Gaussian Noise)* добавляет к каждому из комплексных чисел на выходе выборочное значение комплексного гауссовского шума с дисперсией $2\sigma^2 = N_0$ – по $\sigma^2 = N_0/2$ на вещественное и мнимое измерения.

И сейчас, и в дальнейшем важно уяснить, каким образом этот блок определяет значение дисперсии добавляемого им шума. Без всяких установок он «знает» число N выборок, поступающих на его вход на одном такте моделирования. В принципе, это число может превышать 1. В поле *Symbol Period (s)* ему задается число M тактовых интервалов (секунд), приходящееся на один символ. Он определяет число MN выборок на символ и вычислят энергию символа $E_s = MNP$, руководствуясь заданием средней мощности P выборки (квадрата ее модуля) в поле *Input Signal Power*. Зная среднюю энергию символа E_s , блок выбирает дисперсию шума $2\sigma^2$ согласно установке отношения сигнал/шум $\frac{E_s}{N_0}$ (dB) = $snr = 10 \lg \frac{E_s}{2\sigma^2}$. В нашей модели $N = M = P = 1$, $E_s = 1$, так что $2\sigma^2 = 1$ при $snr = 0$ dB.

BPSK Demodulator по каждому из принятых на вход «зашумленных» комплексных выборочных значений выносит жесткое решение 0/1 о переданном бите. Логика его работы проста – принимается решение 0, если принятое число лежит в правой комплексной полуплоскости, и решение 1 – если в левой. Ошибка возникает, когда шум «перебрасывает» точку из одной полуплоскости в другую.

Прочие блоки модели обеспечивают наблюдение за ее работой. Имеется два двухлучевых осциллоскопа *Bit Scope* и *Symbols Scope*. Первый позволяет сравнивать передаваемый и принимаемый битовые потоки, второй – потоки вещественных частей символов на входе и выходе канала. Блок *Scatter Plot* выводит диаграмму рассеяния принятых сигнальных точек шумом. Назначение счетчика ошибок пояснений не требует.

ЗАДАНИЕ 1. Файл `bpsk.mdl`

1. Установить интервал моделирования в 20 тактов и «выключить» шум, установив в блоке *AWGN* $snr = \frac{E_s}{N_0}$ (dB) = 100 dB. Запустить модель. Освоиться с осциллоскопами. Окна осциллоскопов открываются по двойному щелчку на блоках, в них имеются инструменты масштабирования по горизонтали и вертикали, кнопка «бинокль» активирует установки по умолчанию, правая кнопка мыши в области вертикальной оси открывает меню с полезным пунктом *Axes properties...* Посмотреть, как изменяются осциллограммы, если поменять установку *Initial Seed* в блоке *Random Bit*.
2. Установить $snr = 0$ dB. Запустить модель. Счетчик покажет некоторое число ошибок. По осциллограммам найти положения этих ошибок и выявить причины их возникновения.
3. Установить бесконечный (**inf**) интервал моделирования. Запустить модель и открыть диаграмму рассеяния двойным щелчком на блоке *Scatter Plot*. Уяснить зависимость наблюдаемой картины от отношения сигнал/шум. (Можно включить автоматическое открытие окна диаграммы при запуске, установив флажок *Open Scope at Start* на закладке *Figure Properties* диалога настройки блока. Однако постоянное присутствие этого окна не только раздражает, но и заметно замедляет процесс.)
4. Снять зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум в диапазоне $snr = (0 : 1 : 8)'$ dB. И сейчас, и в дальнейшем результаты измерений фиксировать «без фанатизма» – интерес представляют первые две значащие цифры. Сравнить результаты с теорией. Чтобы вывести таблицу значений $Pe = Q(\sqrt{2\mu_s})$, в командной строке набрать `[snr, qerr(snr, 2)]`, предварительно задав диапазон *snr*.

5. При $snr \simeq 6$ dB исследовать влияние на вероятность ошибки поворота созвездия на угол $\pi/4$. Поворот задается в поле *Phase offset* диалога модулятора в форме $pi/4$. Убедиться в том, что такой поворот эквивалентен снижению *snr* на 3 dB.

Мнимая компонента добавляемого в канале комплексного шума не влияет на демодуляцию BPSK, вызывая перенос сигнальной точки параллельно вертикальной границе областей принятия решений. Так что для BPSK-канала можно ограничиться реализацией только косинусных плеч модулятора-смесителя.

BPSK обеспечивает передачу данных со скоростью $R_b = 1$ бит на комплексное измерение. Шенноновский предел $\mu_s > 2^{R_b} - 1$ гарантирует возможность сколь угодно надежной передачи с этой скоростью при $\mu_s > 1$, то есть при $snr > 0$ dB. Наши экспериментальные результаты убедительно демонстрируют актуальность помехоустойчивого кодирования – при $P_e \simeq 10^{-4}$ мы «проигрываем Шенону» по *snr* около 8.4 dB.

9.3. Канал с двоичной ортогональной модуляцией

Этот канал использует созвездие из двух символов, один из которых лежит на вещественной оси, а второй – на мнимой, рис. 8.

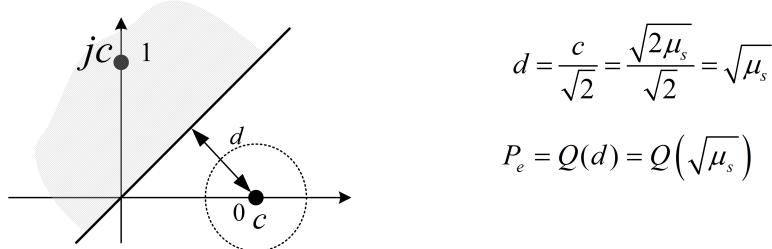


Рис. 8. Созвездие двоичной ортогональной модуляции

Структурно модель воспроизводит предыдущую. Только осциллоскоп *Symbols Scope* четырехканальный – он показывает как вещественные, так и мнимые части символов на входе и выходе канала.

ЗАДАНИЕ 2. Файл **borth.mdl**

1. Уяснить структуру модели. Провести вызывающие любопытство ознакомительные эксперименты.
2. Снять зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум в диапазоне $snr = (2 : 1 : 11)' \text{dB}$. Сравнить результаты с теорией. Для вывода таблицы значений $P_e = Q(\sqrt{\mu_s})$ набрать $[snr, \text{qerr}(snr)]$.
3. При $snr \simeq 6 \text{dB}$ исследовать влияние на вероятность ошибки поворота созвездия на угол $\pi/8$. Зафиксировать вероятности ошибки до и после поворота. Оценить, насколько нужно поднять snr , чтобы скомпенсировать влияние поворота. Поворот задается в поле *Signal constellation* диалога модулятора добавлением после квадратных скобок множителя $\exp(i * pi/8)$.

Созвездие из пары ортогональных символов уступает BPSK примерно 3 dB, поскольку при той же средней энергии оно дает в $\sqrt{2}$ меньшее расстояние между точками. При $P_e \simeq 10^{-4}$ это созвездие «проигрывает» Шенону целых 11.4 dB.

9.4. Канал с двоичной амплитудной модуляцией

Как видно из рис. 9, при когерентной демодуляции созвездие 2ASK дает ту же зависимость $P_e = Q(\sqrt{\mu_s})$ вероятности ошибки от отношения сигнала/шума, что и созвездие из пары ортогональных сигналов: проигрыш в расстоянии d (не $c/\sqrt{2}$, а $c/2$) компенсируется выигрышем в средней энергии (не c^2 , а $\frac{c^2+0^2}{2} = \frac{c^2}{2}$).

Замечательная особенность этого созвездия состоит в том, что его символы можно различать некогерентно, анализируя только модуль комплексного отсчета. При передаче символа 0 модуль отсчета принимает значения (распределенные по закону Релея) в окрестности нуля на положительной полуоси. При передаче символа c значения распределены в его окрестности по закону Релея–Райса. В [1], с. 310, приводится следующая оценка для средней вероятности ошибки некогерентной демодуляции:

$$P_e^{[nc]} \simeq \frac{1}{2}Q(\sqrt{\mu_s}) + B(\sqrt{\mu_s}),$$

неплохая при высоких отношениях сигнал/шум.

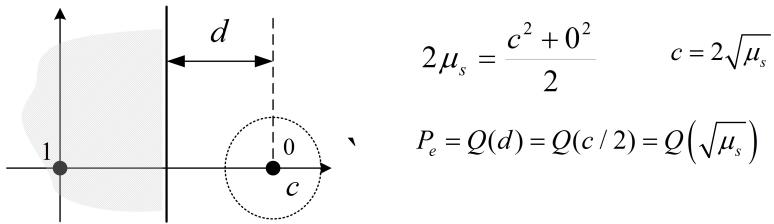


Рис. 9. Созвездие 2ASK

В модели созвездие 2ASK реализовано переносом точек созвездия BPSK на единицу вправо (блок *Add*). Этот перенос дает пару точек 0 и 2 со средней энергией $E_s = \frac{0^2+2^2}{2} = 2$. Соответственно в блоке *AWGN Channel* параметр *Input Signal Power* установлен равным 2.

Модель включает два тракта демодуляции. В тракте когерентной демодуляции (сверху) созвездие 2ASK просто преобразуется обратно в BPSK вычитанием единичной константы. Далее работает обычный BPSK-демодулятор. В тракте некогерентной демодуляции «честно» вычисляется модуль комплексного отсчета (блок *Abs*). К результату добавляется нулевая мнимая часть (блок *Re + j Im*). Это формальность, требуемая для приведения вещественного типа данных к комплексному. Получившееся созвездие с точками 0 и 2 обрабатывается затем как и в когерентном тракте – перенос на единицу влево и BPSK-демодулятор. Каждый из трактов демодуляции имеет свой анализатор диаграммы рассеяния и счетчик ошибок.

ЗАДАНИЕ 3. Файл bask.mdl

1. Уяснить структуру модели.
2. Проанализировать диаграммы рассеяния в трактах когерентной и некогерентной демодуляции при разных *snr*. Уяснить их различие.
3. Снять зависимости вероятностей ошибок в трактах когерентной и некогерентной демодуляции от отношения сигнала/шум в диапазоне $snr = (0 : 1 : 9)'$ dB. Сравнить результаты с теорией. Для вывода таблицы значений $P_e, P_e^{[nc]}$ набрать $[snr, qerr(snr), 0.5 * qerr(snr) + berr(snr)]$.

При когерентной демодуляции мнимая компонента комплексного шума не влияет на результат, когда сдвигает сигнальную

точку параллельно границе областей принятия решения. При некогерентной же демодуляции мнимый шум добавляется к вещественному на этапе вычисления модуля комплексного отсчета. Это дает рост вероятности ошибки, особенно заметный при малых отношениях сигнал/шум. Явление это известно с давних пор как эффект подавления сигнала шумом при некогерентной обработке. При $P_e \simeq 10^{-4}$ некогерентный канал проигрывает когерентному примерно в 1 dB.

9.5. Канал с квадратурной модуляцией QPSK

Этот канал использует созвездие из 4-х символов, рис. 10. На рисунке показаны два варианта их нумерации 2-битовыми блоками – *Gray* (*Binary*). Вероятность ошибки демодуляции символа 00 можно оценить как сумму вероятности $Q(d)$ попадания сигнальной точки в левую полуплоскость и такой же вероятности ее попадания в нижнюю полуплоскость. Это дает $2Q(d)$. Но при этом вероятность $Q^2(d)$ попадания в левый нижний квадрант оказывается учтеною дважды. Ее вычитание и дает приведенную на рисунке формулу для средней вероятности ошибки на символ.

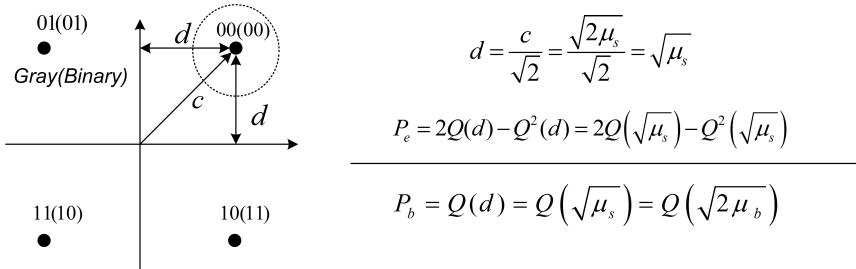


Рис. 10. Созвездие QPSK

Если символы созвездия занумерованы по Грею (*Gray*), то ошибка в левом бите происходит только тогда, когда сигнальная точка совершает скачок из верхней полуплоскости в нижнюю, то есть с вероятностью $P_b = Q(d)$. То же справедливо и для правого бита. Если отношение сигнал/шум пересчитать на бит $\mu_b = \frac{\mu_s}{2}$, то для вероятности ошибки в бите получится: $P_b = Q(\sqrt{\mu_s}) = Q(\sqrt{2\mu_b})$. Это совпадает с формулой для веро-

ятности ошибки BPSK, только теперь речь идет о вероятности ошибки и отношении сигнал/шум не на символ, а на бит.

Модель для исследования QPSK отличается от предыдущих тем, что она векторная (*frame based*). По каналам в ней передаются не потоки чисел, а потоки 2-битовых блоков. Источник *Random Bit* порождает не один, а два бита за такт моделирования. Буфер *Buffer* преобразует скалярный битовый поток в поток 2-битовых блоков, по одному блоку за такт. Модулятор QPSK отображает блоки на точки созвездия. Предусмотрены два варианта отображения *Binary* и *Gray* – см. лист-боксы *Constellation ordering* в настройках модуляторов и демодулятора. В остальном все стандартно, только счетчиков ошибок имеется два. Верхний принимает на входы 2-битовые блоки и считает число битов и количество ошибок в них. На входы нижнего счетчика поступают символы – комплексные числа, совпадающие с точками созвездия. Поток передаваемых символов берется непосредственно с выхода модулятора, а поток принимаемых – формируется искусственно вспомогательным модулятором *Blocks to Symbols*. Этот счетчик оценивает вероятность ошибки на символ.

ЗАДАНИЕ 4. Файл `qpsk.mdl`

1. Установить интервал моделирования в 20 тактов и выключить шум ($snr = 100$ dB). Запустив модель, посмотреть осциллограммы вещественной и мнимой компонент сигнала. Обратить внимание на то, что верхний счетчик ошибок насчитал 42 бита,

а нижний – 21 символ.

2. При бесконечном (**inf**) интервале моделирования посмотреть диаграмму рассеяния при разных отношениях сигнал/шум.

3. Установить нумерацию *Gray* в обоих модуляторах и демодуляторе. Снять зависимости вероятностей на бит и на символ от отношения сигнал/шум в диапазоне $snr = (3 : 1 : 12)'$ dB. Сравнить результаты с теорией. Для вывода таблицы значений

$$P_e = 2Q(\sqrt{\mu_s}) - Q^2(\sqrt{\mu_s}); \quad P_b = Q(\sqrt{\mu_s}) = Q(\sqrt{2\mu_b})$$

набрать $[snr, 2 * \text{qerr}(snr) - \text{qerr}(snr), \hat{2}, \text{qerr}(snr)]$.

4. Перейти на нумерацию *Binary*. Снять зависимость P_b от отношения сигнал/шум в диапазоне

$snr = (3 : 1 : 12)'$ dB. Проверить, что при этой нумерации $P_b = \frac{3}{2}Q(\sqrt{\mu_s}) - Q^2(\sqrt{\mu_s}) > Q(\sqrt{\mu_s})$.

5. *Оценить выигрыш в отношении сигнал/шум*, который нумерация Грея дает при $P_b \simeq 10^{-3}$. Для этого установить $snr = 10$ dB и оценить вероятность P_b ошибки на бит при *Binary*-нумерации. Затем перейти на нумерацию Грея и прогрессивно снижать отношение сигнал/шум до достижения той же вероятности ошибки.

QPSK-канал эквивалентен паре независимых BPSK-каналов в единой полосе частот, использующих косинусное и синусное плечи комплексного канала. Скорость передачи в каждом из субканалов составляет $R_b = 1$ при вероятности ошибки $P_b = Q(\sqrt{2\mu_b})$, как и в канале BPSK. Полная скорость составляет $R_b = 2$ бита на измерение. При этой скорости граница Шеннона гарантирует сколь угодно малую вероятность ошибки на символ при $\mu_s > 2^2 - 1 = 3$, $snr \simeq 4.8$ dB. При $P_e = 10^{-4}$ QPSK «проигрывает» Шеннону» около 7 dB.

9.6. Каналы с M -ичной модуляцией

Распространенные типы созвездий для каналов с M -ичной модуляцией показаны на рис. 11 вместе с формулами для средних вероятностей ошибок на символ. Элементарный по существу, но слегка утомительный вывод этих формул можно найти в [1], с. 318.

ЗАДАНИЕ 5. Файлы `mpsk.mdl`, `mask.mdl`, `mqam.mdl`

1. *Снять зависимости $P_e(snr)$ для 8PSK и 8ASK в диапазоне $snr = (12 : 1 : 22)'$ dB. Обе модели `mpsk.mdl`, `mask.mdl` можно открыть одновременно в разных окнах. Сравнить результаты с теорией.* При расчетах удобно предварительно задать константы $mp = 2 * (\sin(pi/8))^2$ и $ma = 6/63$, а затем набрать $[snr, 2 * qerr(snr, mp), 14/8 * qerr(snr, ma)]$. *Оценить, насколько 8ASK проигрывает 8PSK по отношению сигнал/шум при $P_e \simeq 10^{-4}$.*

2. Исследовать влияние замирания в канале на демодуляцию 8PSK и 8ASK. Для 8PSK установить $snr = 14$ dB, зафиксировать P_e , а затем ввести затухание $Gain=0.95$. *Оценить, насколько*

ко нужно поднять snr , чтобы достичь того же уровня P_e . Проделать то же для 8ASK при $snr = 19$ dB.

3. Выяснить, насколько нужно увеличить snr , чтобы сохранить уровень $P_e \simeq 10^{-4}$ при переходе от 8ASK к 16ASK. Для перехода к 16PSK в модели mask.mdl заменить значение *M-ary number* в источнике, модуляторе и демодуляторе с 8 на 16. Сопоставить результат со скоростью роста по M границы Шеннона:

$$snr = 10 \lg \mu_s > 10 \lg(2^{\log_2 M} - 1) \simeq (10 \lg 2) \log_2 M \simeq 3 \log_2 M.$$

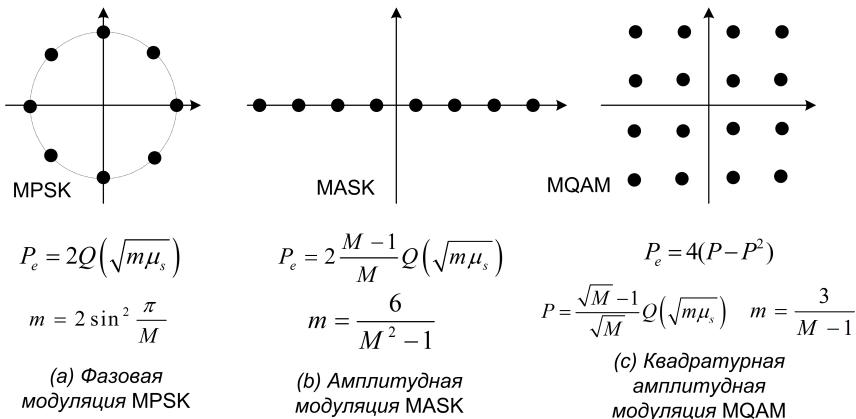


Рис. 11. M -точечные созвездия

4. Снять зависимости $P_e(snr)$ для 16ASK (mask.mdl) и 16QAM (mqam.mdl) в диапазоне $snr = (12 : 1 : 22)'$ dB. Сравнить результаты с теорией. Для этого задать $ma = 6/63$, $mq = 3/15$ и вывести таблицу:

$$[snr, (30/16) * \text{qerr}(snr, ma), 3 * \text{qerr}(snr, mq) - (9/4) * \text{qerr}(snr, mq).^2].$$

Оценить, насколько 16ASK проигрывает 16QAM по snr при $P_e \simeq 10^{-4}$. Оценить проигрыш 16QAM границе Шеннона $10 \lg 15 = 11.8$ dB при $P_e \simeq 10^{-4}$.

5. Выяснить, насколько нужно увеличить snr , чтобы сохранить уровень $P_e \simeq 10^{-4}$ при переходе от 16QAM к 32QAM. Для

перехода к 32QAM в модели mqam.mdl заменить *M-ary number* в источнике, модуляторе и демодуляторе с 16 на 32. Сопоставить это с ростом по *M* границы Шеннона.

С ростом *M* граница Шеннона растет как $3 \log_2 M$ – по 3 dB на каждое удвоение числа точек, дающее рост скорости $R_b = \log_2 M$ на единицу. Созвездия типа ASK и PSK, точки которых сосредоточены на одномерной линии в плоскости, проигрывают 6 dB при удвоении *M*. С ростом *M* их «проигрыш Шеннону» неограниченно растет. Выход в плоскость – к созвездиям QAM – снимает эту проблему.

9.7. Линейная модуляция с прямоугольным импульсом

Файл *bpsk_rect* содержит модель канала линейной модуляции с прямоугольным импульсом $p(t) = \text{rect}_{[0,1]}(t)$. Для простоты в ней выбрано созвездие BPSK.

Как и раньше, источник данных порождает битовый поток со скоростью один бит на такт. Модулятор отображает биты на символы BPSK-созвездия.

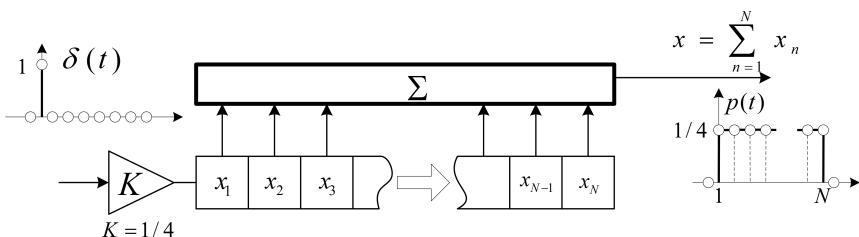


Рис. 12. Фильтр с прямоугольной импульсной реакцией

В аналоговой системе линейной модуляции поток символов $x^\delta(t) = \sum c_n \delta(t - n)$ преобразуется в сигнал $x(t) = \sum c_n p(t - n)$ фильтром с импульсной реакцией $p(t)$. В модели этот фильтр (*Rectangular Pulse Filter*) реализован в цифровом виде, как показано на рис. 12.

Фильтр содержит массив из $N = 16$ ячеек памяти, организованный по принципу сдвигового регистра. Его выходной сигнал x является суммой содержимых x_n всех ячеек. Частота тактирования фильтра в $N = 16$ раз превышает частоту следования сим-

волов на входе. Поступивший на вход фильтра ненулевой символ в течение N микротактов бежит слева направо вдоль регистра. Это и порождает на выходе y прямоугольный импульс длительностью в N микротактов или в один символьный такт.

Усилитель с $K = \frac{1}{4}$ нормирует энергию импульса на единицу: импульс – это $N = 16$ отсчетов с амплитудой $\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{4}$ каждый. Полная энергия импульса E_s , равная сумме квадратов отсчетов, составляет как раз единицу.

Согласованный фильтр приемника – блоки *Gain* и *Windowed Integrator* – это точная копия фильтра передатчика. Блок *Gain* с $K = \frac{1}{4}$ нормирует на единицу энергию импульсной реакции фильтра. Такой фильтр правильно оценивает единичную энергию сигнала на входе как сумму 16-ти выборок с уровнем $\frac{1}{16}$ каждая. Блок *Sampling* с коэффициентом пересчета $N = 16$ передает на выход каждый 16-й отсчет, понижая частоту тактирования до частоты следования символов. Формируемый на выходе этого блока поток оценок символов созвездия поступает на обычный BPSK-демодулятор, который преобразует его в поток принятых битов.

В реальном канале к сигналу добавляется комплексный белый шум. В модели за добавление шума отвечает все тот же блок *AWGN Channel*. Блок настроен так, что заданное в нем значение $\frac{E_s}{N_0}$ (dB) определяет отношение сигнал/шум не на выходе канала, а непосредственно на выходе согласованного фильтра с нормированной на единицу энергией импульсной реакции. В установках параметров блока заданы мощность сигнала $P = 1/16$ и длительность символа $M = 1$. Блок «знает», что на его вход поступает $N = 16$ выборок за такт. По этим данным он правильно оценивает энергию символа E_s как $NMP = 1$. Соответственно, при задании $\frac{E_s}{N_0}$ (dB) равным 0 dB блок добавляет шум с единичной дисперсией $2\sigma^2 = N_0$. То же единичное значение дисперсии шума наблюдается при этом и на выходе согласованного фильтра. В самом деле, блок *Gain* с $K = 1/4$ снижает значение дисперсии выборки с единицы до $\frac{1}{16}$. Шумовой отсчет на выходе согласованного фильтра – это сумма $N = 16$ независимых выборок с дисперсией $\frac{1}{16}$ каждая. Дисперсия этой суммы равна 1. Так что, как и должно быть, при $snr = 0$ dB дисперсия шума совпадает с энергией сигнала.

Помимо уже привычных осциллоскопов и диаграммы рас-
сения, в модели представлены анализатор спектра мощно-
сти *Spectrum Scope* и формирователь глазковой диаграммы
Eye Diagram. Отдельно стоит вспомогательный генератор δ -им-
пульса.

ЗАДАНИЕ 6. Файл `bpsk_rect.mdl`

1. Исследовать импульсные реакции тракта линейной модуля-
ции. Для этого подать на вход фильтра передатчика δ -импульс,
установив в поле *Goto Tag* диалога настройки клеммы *Channel
Input* имя *PULSE* выходной клеммы генератора δ -импульса. Вы-
ключить шум ($snr = 100$ dB) и установить интервал моделирова-
ния в 5 тактов. Проанализировать осциллограммы на выходах
фильтров передатчика и приемника (блок *Scope*). Обратить вни-
мание, что фильтр передатчика вносит задержку на один такт.
Корреляция, наблюдаемая на выходе фильтра приемника, обра-
щается в нуль в ненулевых целых точках, что служит призна-
ком отсутствия межсимвольной интерференции. Изучить влия-
ние шума на выход фильтра приемника.

2. Исследовать работу тракта модуляции. Подать на вход
фильтра передатчика сигнал с выхода модулятора, установив в
поле *Goto Tag* клеммы *Channel Input* имя *BPSK*, и задать интер-
вал в 20 тактов. Проанализировать битовый поток (*Bit Scope*) и
осциллограммы на выходах фильтров (*Scope*). Изучить влияние
шума.

3. Установить бесконечный (**inf**) интервал и выключить шум.
Запустив модель, открыть глазковую диаграмму. Вы увидите на
ней осциллограммы выходного сигнала согласованного фильтра
длительностью в два такта, синхронизованные по границе сим-
вольного интервала. Среди инженеров эта картинка известна как
«глаз демодулятора». «Открытие глаза» говорит о правильной
работе системы символьной синхронизации приемника – в ее от-
сутствие на глазковой диаграмме наблюдается хаос. Решения о
переданных символах ± 1 выносятся по отсчетам в точке $t = 0.5$.
Стабильность значений этих отсчетов служит критерием отсут-
ствия межсимвольной интерференции. Добавляя шум, посмот-
реть как он «закрывает глаза» демодулятора.

4. Включить анализатор спектра мощности *Spectrum Scope*. Окно анализатора открывается только на этапе запуска моделирования, если на закладке *Display Properties* его диалога настройки установлен флажок *Open scope at start of simulation*. Анализатор оценивает спектр мощности усреднением квадрата модуля спектра по последним 40 окнам из 2048 выборок каждое. Поэтому картинка на нем стабилизируется не сразу. Правильный масштаб спектра по вертикали устанавливается через меню *Axes/Autoscale*. *Измерив двухстороннюю ширину главного лепестка спектра, оценить спектральную эффективность BPSK-модуляции с прямоугольным импульсом* (бит в секунду на герц полосы). *Оценить относительные уровни первого и второго внеполосных максимумов спектра* ($|x(f)|^2 \sim \frac{\sin^2 \pi f}{(\pi f)^2}$, см. [1], с. 161) *и сравнить их с теорией*: $20 \lg \frac{2}{3\pi} \simeq -13 \text{ dB}$ и $20 \lg \frac{2}{5\pi} \simeq -18 \text{ dB}$. Изучить зависимость спектра мощности от уровня шума.

5. *Измерить вероятность ошибки демодуляции при $snr = 6 \text{ dB}$ и сравнить это с результатами первого задания*. Если окно спектронализатора мешает, его открытие можно отменить.

Входящий в состав нашей модели тракт амплитудной модуляции – от входа фильтра передатчика до выхода фильтра приемника – универсален. Его можно задействовать для передачи любого созвездия. С другой стороны, модель тракта легко приспособить к любой иной форме опорного импульса $p(t)$ – достаточно заменить в ней фильтры передатчика и приемника другими фильтрами с единичной энергией импульсной реакции.

9.8. Корень из приподнятого косинуса

Модель для этого задания воспроизводит предыдущую с единственным отличием – прямоугольный импульс заменен в ней импульсом $p(t)$ в форме корень из приподнятого косинуса. При нулевом значении параметра сглаживания $m = [0, 1]$ это просто импульс Найквиста $p(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$, при ненулевом – похож на него.

В отличие от прямоугольного, этот импульс не компактен во времени и не удовлетворяет принципу причинности – отклик на выходе фильтра с импульсной реакцией $h(t) = p(t)$ появляется

раньше воздействия. Однако при цифровой реализации это не создает непреодолимых препятствий. Просто длину регистра сдвига фильтра делают достаточно большой, а выполнения принципа причинности достигают ценой задержки выходного сигнала.

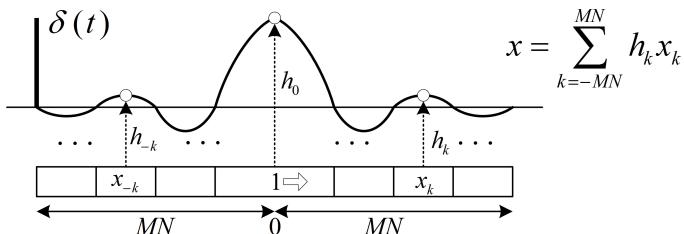


Рис. 13. Фильтр «корень из приподнятого косинуса»

В нашей модели, рис. 13, задержка M выбрана равной 4 тактам – символьным интервалам. При этом полное число ячеек сдвигового регистра составляет $2MN + 1$ – по $N = 16$ выборок на каждом из M символьных интервалов слева и справа от выборки номер нуль. Фильтр суммирует хранящиеся в ячейках выборочные значения с весами h_k , пропорциональными значениям импульсной реакции $h(t)$, в соответствующие дискретные моменты времени. При поступлении на его вход δ -импульса в регистр слева попадает единица. По мере того как она бежит слева направо вдоль регистра, на выходе фильтра воспроизводится последовательность выборочных значений импульсной реакции. Импульсные реакции фильтров передатчика и приемника нормированы на единичную энергию: сумма квадратов коэффициентов h_k равна единице. Значение параметра сглаживания $m = [0, 1]$ устанавливается в поле *Rolloff factor* диалогов настройки фильтров и определяет форму их импульсных реакций $h(t)$.

ЗАДАНИЕ 7. Файл bpsk_cos.mdl

1. Исследовать импульсные реакции тракта. На вход фильтра передатчика подать δ -импульс, выключить шум и установить интервал моделирования в 12 тактов. Проанализировать осциллограммы на выходах фильтров передатчика и приемника. Обратить внимание, что фильтр передатчика вносит задержку на один такт. Проанализировать поведение этих осциллограмм при

изменении фактора сглаживания (*Rolloff factor*) $m = 0.1; 0.5; 0.9$ в фильтрах передатчика и приемника. Убедиться в том, что корреляция, наблюдаемая на выходе фильтра приемника, обращается в нуль в ненулевых целых точках, что служит признаком отсутствия межсимвольной интерференции.

2. Исследовать работу тракта модуляции. Подключить вход фильтра к выходу модулятора и задать интервал моделирования в 20 тактов. Выключить шум. Анализируя битовый поток и осцилограммы на выходах фильтров при $m = 0.5$, оценить уровни сигнала на выходе фильтра приемника, по которым демодулятор выносит решения относительно переданных битов. Учесть, что из-за задержек решение по поводу первого символа выносится им на такте номер 9. Повторить все это при отношении $snr = 0 \text{ dB}$.

3. Установить бесконечный (*inf*) интервал моделирования и выключить шум. Изучить глазковую диаграмму и диаграмму рассеяния при $m = 0.1; 0.5; 0.9$. Обратить внимание, что при $m = 0.1$ наблюдается заметная межсимвольная интерференция – точки на диаграмме рассеяния и уровни глазковой диаграммы в момент $t = 0.5$ принятия решения флюктуируют. Это обусловлено несовершенством наших фильтров – медленно спадающая при $m = 0.1$ импульсная реакция «обрезана» слева и справа слишком рано – всего лишь на удалении в $M = 4$ символьных интервала. Посмотреть, как шум «закрывает глаза» демодулятора.

4. Включить анализатор спектра мощности *Spectrum Scope*. При $m = 0.1; 0.5; 0.9$ измерить двухстороннюю ширину главного лепестка спектра и относительные уровни внеполосной мощности на частотах 1.5; 2.5. Оценить спектральные эффективности – бит в секунду на герц полосы. При $m = 0.5$ изучить зависимость спектра мощности от уровня шума.

5. Измерить вероятности ошибки при $snr = 6 \text{ dB}$ и $m = 0.1; 0.9$. Выяснить, насколько нужно поднять snr , чтобы при заметной межсимвольной интерференции ($m = 0.1$) получить ту же вероятность ошибки, что и при $m = 0.9$.

9.9. Двоичная частотная модуляция

Двоичная частотная модуляция – это простейший пример ортогональной модуляции. Она использует не один, а два импульса

$p_{\pm}(t) = e^{\pm j\pi t}$ с частотами $\pm\frac{1}{2}$. Эти импульсы ортогональны на интервале $t \in (0, 1)$:

$$\langle p_+, p_+ \rangle = \langle p_-, p_- \rangle = 1; \quad \langle p_+, p_- \rangle = 0.$$

Единичный бит передается импульсом p_+ , нулевой – импульсом p_- . При передаче единицы сигнальная точка на рис. 14 – мгновенное значение комплексной огибающей – равномерно движется по окружности против часовой стрелки, совершая ровно половину оборота. При передаче нуля она совершает те же пол-оборота в противоположную сторону.

На стороне приема вычисляются скалярные произведения принятой реализации на опорные импульсы $e^{\pm j\pi t}$. В отсутствие шума получается пара отсчетов $(1, 0)$ – передана единица или пара $(0, 1)$ – передан нуль. Задача демодулятора – различать эти пары в условиях, когда к их компонентам добавлены независимые выборки комплексного шума.

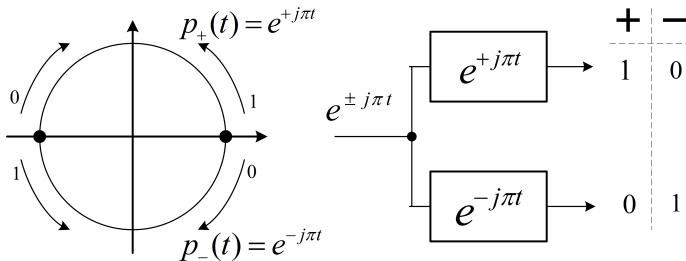


Рис. 14. Ортогональная частотная модуляция

Когерентная демодуляция с решением по максимуму вещественной части отсчета приводит к вероятности ошибки $P_e^{[c]} = Q(\sqrt{\mu_s})$, типичной для ортогональной модуляции. Некогерентная демодуляция по максимуму модуля отсчета дает несколько худший результат: $P_e^{[nc]} = B(\sqrt{\mu_s})$.

ЗАДАНИЕ 8. Файл bfsk.mdl

1. Установить интервал моделирования в 20 тактов и выключить шум. Проанализировать осциллограммы битового потока и квадратурных составляющих сигнала модулятора. Проследить, как эти осциллограммы связаны с движением сигнальной точки по окружности. Объяснить, почему вещественная компонента

сигнала оказывается чисто гармонической – не зависит от передаваемых данных. Посмотреть, как выглядят эти осциллограммы при $snr = 10$ dB.

2. При бесконечном интервале моделирования (**inf**) проанализировать влияние шума с $snr = 100, 30, 20, 10$ dB на траекторию движения точки в плоскости комплексной огибающей (блок *Signal Trajectory*).

3. Снять зависимости от $snr = (0 : 1 : 8)'$ dB вероятностей ошибок когерентной и некогерентной демодуляции. Сравнить результаты с теорией, выведя таблицу значений $P_e^{[c]}, P_e^{[nc]}$ строкой $[snr, qerr(snr), berr(snr)]$.

4. Включить анализатор спектра мощности. Изучить спектр мощности сигнала в отсутствие шума – $|x(f)|^2 \sim \frac{\cos^2 \pi f}{(1-4f^2)^2}$, см. [1], с. 185. Измерить двухстороннюю ширину главного лепестка и относительные уровни первых двух внеполосных максимумов. Оценить спектральную эффективность в битах в секунду на герц полосы. Объяснить присутствие выраженных пиков («рожек») на частотах $\pm \frac{1}{2}$. Проанализировать зависимость спектра от уровня шума.

9.10. Модуляция с минимальным частотным сдвигом

Модуляция MSK (*Minimal Shift Keying*) использует пару импульсов $p_{\pm}(t) = e^{\pm j \frac{\pi}{2} t}$, $t \in [0, 1]$ с частотами $\pm \frac{1}{4}$, различающиеся не на единицу, как при ортогональной модуляции, а всего на $\frac{1}{2}$. Эти импульсы ортогональны только когерентно – в нуль обращается лишь вещественная часть скалярного произведения: $\langle p_+, p_- \rangle = j \frac{2}{\pi}$. Легко понять, что $(f_1 - f_2) = \frac{1}{2}$ – это минимальное значение сдвига по частоте, при котором достигается когерентная ортогональность гармонических сигналов с частотами f_1, f_2 :

$$\langle e^{j2\pi f_1 t}, e^{j2\pi f_2 t} \rangle = \int_0^1 e^{j2\pi(f_1 - f_2)t} dt = e^{j\pi(f_1 - f_2)} \frac{\sin \pi(f_1 - f_2)}{\pi(f_1 - f_2)}.$$

Сигнальная точка по-прежнему движется по окружности. Но теперь в течение единичного символьного интервала она проходит всего четверть оборота в направлении, зависящем от очередного передаваемого бита, рис. 15. При случайном битовом потоке

получается нечто вроде броуновского блуждания между четырьмя состояниями (j^0, j^1, j^2, j^3) .

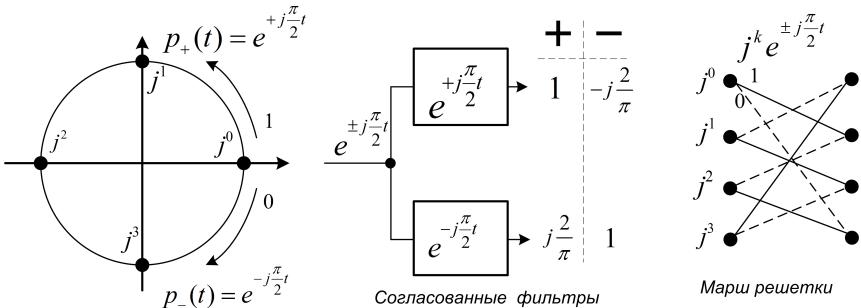


Рис. 15. Модуляция с минимальным частотным сдвигом

MSK – это классический пример решетчатой модуляции. Ее отличает то, что форма сигнала на данном символном интервале зависит не только от передаваемого бита, но и от состояния j^k , из которого передача начинается. Один маршрут решетчатой диаграммы переходов показан на рис. 15. Имеется восемь ребер-переходов между четырьмя узлами-состояниями. Каждому ребру отвечает передача вполне определенного сигнала $p_{\pm}^k(t) = j^k e^{\pm j\frac{\pi}{2}t}$, и для каждого из ребер форма этого сигнала уникальна.

Движение точки из состояния $j^0 = 1$ в двух возможных направлениях порождает на выходах пары согласованных фильтров (на рис. 15) пару комплексных отсчетов (y_+, y_-) со значениями $(1, j\frac{2}{\pi})$ или $(-j\frac{2}{\pi}, 1)$. Задача демодулятора – различить эти пары в ситуации, когда к их компонентам добавлены выборки комплексного шума. Простейший вариант – просто проигнорировать мнимые части отсчетов. Тогда все сводится к демодуляции ортогональных сигналов (различию пар $(1, 0)$ и $(0, 1)$) с известной вероятностью ошибки $P_e = Q(\sqrt{\mu_s})$. Но этот вариант не оптимален. Известно, что учет мнимых частей позволяет достичь вероятности ошибки $P_e \simeq 2Q(\sqrt{2\mu_s})$, которая лишь вдвое превышает вероятность ошибки демодуляции BPSK.

Положение осложняется тем, что на самом деле пара отсчетов (y_+, y_-) зависит также и от начального состояния j^k .

Поэтому для демодуляции MSK применяют алгоритм Витерби. На каждом такте вычисляется восемь расстояний $d^2(y, p_{\pm}^k) = \langle y - p_{\pm}^k, y - p_{\pm}^k \rangle$ от принятой в шуме реализации $y(t)$ до всех возможных опорных сигналов $p_{\pm}^k(t) = j^k e^{\pm \frac{\pi}{2} t}$. Полученные восемь чисел присваиваются соответствующим ребрам решетчатой диаграммы в качестве реберных метрик. Далее работает алгоритм Витерби, [1], раздел 5.3, который строит на решетке путь минимальной длины – с наименьшим значением суммы реберных метрик. Этим достигается вероятность ошибки вплоть до $2Q(\sqrt{2\mu_s})$.

ЗАДАНИЕ 9. Файл mfsk.mdl

1. На интервале в 20 тактов проанализировать осциллограммы битового потока и квадратурных составляющих сигнала модулятора. Понять, как эти осциллограммы связаны с движением по окружности сигнальной точки. Посмотреть, как выглядят осциллограммы при $snr = 10$ dB.
 2. Проанализировать влияние шума с $snr = 100, 30, 20, 10$ dB на траекторию *Signal Trajectory* движения сигнальной точки в плоскости комплексной огибающей.
 3. Снять зависимость от $snr = (0 : 1 : 8)'$ dB вероятности ошибки демодуляции по Витерби. Сравнить результаты с теорией, выведя таблицу значений P_e строкой $[snr, 2 * qerr(snr, 2)]$.
 4. Изучить спектр мощности сигнала в отсутствие шума – $|x(f)|^2 \sim \frac{\cos^2 2\pi f}{(1-16f^2)^2}$. Измерить двухстороннюю ширину главного лепестка и относительные уровни и частоты первых двух вне-полосных максимумов. Оценить спектральную эффективность в битах в секунду на герц полосы. Проанализировать зависимость спектра от уровня шума.
-

Литература

1. Григорьев А.А. Лекции по теории сигналов. – М.: МФТИ, 2013.

Учебное издание

ДЕМОДУЛЯЦИЯ В ШУМАХ

Методические указания
к лабораторной работе

по курсу *Нелинейные преобразования
и прием радиосигналов*

Составитель **Григорьев** Александр Алексеевич

Редактор *Н. Е. Кобзева*. Корректор *Л. В. Себова*
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*

Подписано в печать 24.02.2016. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 2,75. Уч.-изд.л. 2,5. Тираж 120 экз. Заказ №.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования «Московский
физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru