

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра радиотехники

Цепи с распределенными параметрами

Лабораторная работа
по курсам:
Электронные методы физических исследований
Введение в электронику

МОСКВА 2007

Составитель Е.В. Воронов

Цепи с распределенными параметрами: Лабораторная работа по курсам: *Электронные методы физических исследований, Введение в электронику* / Сост. Е. В. Воронов. – М: МФТИ, 2007. – 32 с.

Отличительным признаком, характеризующим новизну работы, является одновременное использование общефизической методологии рассмотрения темы и акцент на взаимодействии изучаемого объекта с внешним миром (входные и выходные характеристики, коэффициент передачи), как это принято в профессиональной электронике.

Цель работы – формирование у студентов навыков и знаний, обеспечивающих квалифицированное и эффективное решение информационно-технологических задач, связанных с регистрацией и обработкой данных современными средствами. Предполагается изучение в домашних условиях теоретического материала по данному описанию без привлечения других источников и большая степень самостоятельности учащегося при выполнении измерений в лаборатории.

Содержание

Исходные соотношения.....	4
Длинная линия при синусоидальном воздействии	7
Линия без потерь	9
Разомкнутая линия.....	10
Короткозамкнутая линия	10
Линия, нагруженная на сопротивление, равное волновому	11
Полуволновая линия.....	12
Четвертьволновая линия.....	12
Короткозамкнутый четвертьволновой отрезок линии с потерями в качестве колебательного контура	14
Падающая, отраженная, стоячая и бегущая волны.....	16
Переходные процессы в длинной линии.....	18
Первоначальная реакция линии со стороны ее входа на скачкообразное воздействие	19
Распределение напряжения и тока вдоль линии.....	21
Зависимость от времени напряжения на входе линии.....	24
Задание.....	27
А. Длинная линия при синусоидальном воздействии	27
В. Переходные процессы в длинной линии	31
Список литературы	31

Когда частота сигнала f настолько мала, что соответствующая ей длина волны λ существенно больше геометрических размеров рассматриваемого устройства, справедливо считать электрические свойства этого устройства сосредоточенными в точке ($\lambda = v/f$, v — скорость распространения сигнала). В этом случае говорят, что имеют дело с цепью с сосредоточенными параметрами.

Если указанное условие не выполнено, то нельзя пренебрегать тем обстоятельством, что электрические свойства данного объекта — потери, способность создавать магнитное поле и накапливать заряд — имеют протяженный характер, то есть так или иначе распределены в пространстве. Простейшим примером подобной *цепи с распределенными параметрами* является линия, образованная двумя близко расположенными параллельными проводниками, или отрезок коаксиального кабеля длины l , когда значение l сравнимо с длиной волны λ или превосходит ее; такую одномерную цепь с распределенными параметрами называют *длинной линией*.

Здесь речь пойдет только об однородных длинных линиях, то есть о линиях, электрические свойства которых равномерно распределены по длине.

Исходные соотношения

На рис. 1а представлена двухпроводная линия длины l с источником сигнала ($e_{\text{и}}, z_{\text{и}}$) на входе и нагрузкой $z_{\text{н}}$ на выходе. Выделим малый отрезок этой линии длины dx вблизи точки с пространственной координатой x и введем обозначения для мгновенных значений напряжений и токов на входе и выходе этого отрезка, как показано на рисунке. Электрической моделью этого отрезка может служить схема, приведенная на рис. 1б, где R_0 , G_0 , L_0 и C_0 — удельные (погонные, приходящиеся на еди-

ницу длины) сопротивление, проводимость, индуктивность и емкость.

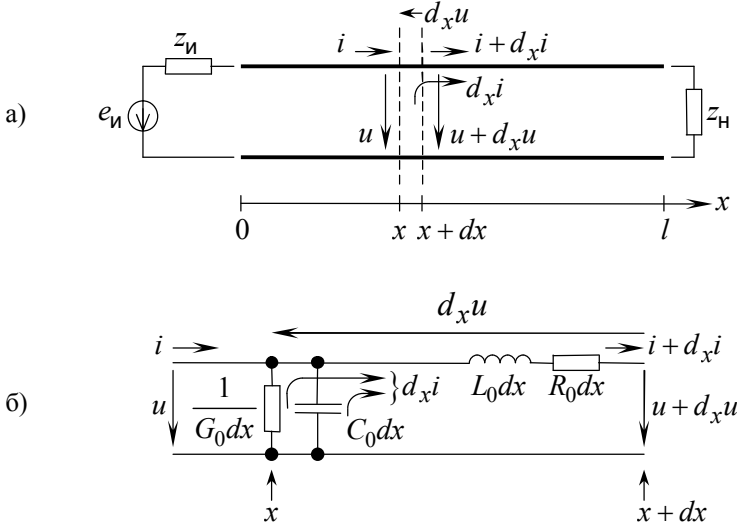


Рис. 1. Длинная линия с источником сигнала на входе и нагрузкой на выходе (а) и эквивалентная схема отрезка линии (б)

Согласно рис. 1б, пренебрегая малыми второго порядка, имеем

$$(R_0 dx) \cdot i + (L_0 dx) \cdot \frac{\partial i}{\partial t} = -d_x u, \quad (1a)$$

$$(G_0 dx) \cdot u + (C_0 dx) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -d_x i. \quad (1б)$$

Следовательно, напряжение u и ток i , являющиеся функциями двух переменных x и t , должны быть решениями системы уравнений:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (2a)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2б)$$

Если потери в линии отсутствуют или ими можно пренебречь, то $R_0 = 0$, $G_0 = 0$, и для напряжения u (точно так же для тока i) справедливо так называемое волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \quad (4)$$

решение которого имеет вид волны

$$f\left(t \mp \frac{x}{v}\right), \quad (5)$$

распространяющейся в сторону увеличения или уменьшения x без изменения формы со скоростью v .

Подобное распространение волны без изменения ее формы возможно и при наличии потерь, когда параметры линии R_0 , G_0 , L_0 , C_0 удовлетворяют так называемому условию Хевисайда:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}. \quad (6)$$

Правда, при этом волна затухает со временем. Если обозначить отношение R_0 к L_0 (или G_0 к C_0) через q (q – параметр затухания) и искать решение системы уравнений (2) для напряжения u в виде

$$u = u^\circ \cdot e^{-qt}, \quad (7)$$

то для u° вновь оказывается справедливым волновое уравнение вида (3).

Длинная линия при синусоидальном воздействии

Пусть на входе линии действует гармонический сигнал $e_{\text{и}}(t) = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ или – в комплексном виде – $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{и}} = \mathcal{E}_m e^{j\omega t}$. В этом случае решение системы уравнений (2) в отношении напряжения $u(x, t)$ и тока $i(x, t)$ ищут в виде $\tilde{U}(x)e^{j\omega t}$ и $\tilde{I}(x)e^{j\omega t}$ с $\tilde{U}(x) = U(x)e^{j\varphi_u(x)}$ и $\tilde{I}(x) = I(x)e^{j\varphi_i(x)}$ соответственно. Подставляя эти выражения на место u и i в уравнения (2а) и (2б) и дифференцируя по времени, получим

$$-\frac{d\tilde{U}}{dx} = (R_0 + j\omega L_0) \cdot \tilde{I}, \quad (8a)$$

$$-\frac{d\tilde{I}}{dx} = (G_0 + j\omega C_0) \cdot \tilde{U}. \quad (8б)$$

Отсюда следует, что комплексная амплитуда напряжения $\tilde{U}(x)$ должна быть решением уравнения

$$\frac{d^2\tilde{U}}{dx^2} - \gamma^2\tilde{U} = 0, \quad (9)$$

где

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} \quad (10)$$

– постоянная распространения. Аналогичное уравнение справедливо для комплексной амплитуды тока $\tilde{I}(x)$.

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\tilde{U}(x) = \tilde{A} \cdot e^{-\gamma x} + \tilde{B} \cdot e^{\gamma x}, \quad (11a)$$

где \tilde{A} и \tilde{B} – постоянные интегрирования. Подставляя $\tilde{U}(x)$, записанное в таком виде, в любое из равенств (8а) или (8б), имеем

$$\tilde{I}(x) = \frac{\tilde{A}}{w} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\tilde{B}}{w} \cdot e^{\gamma x}, \quad (11б)$$

где

$$w = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \quad (12)$$

– волновое сопротивление. Постоянные интегрирования \tilde{A} и \tilde{B} можно найти из граничных условий. Например, считая известными напряжение \tilde{U}_l и ток \tilde{I}_l на нагрузке [$\tilde{U}_l \equiv \tilde{U}(l)$, $\tilde{I}_l \equiv \tilde{I}(l)$; $\tilde{U}_l / \tilde{I}_l = z_H$, z_H – сопротивление нагрузки] и подставляя $x = l$ в каждое из равенств (11а) и (11б), находим \tilde{A} и \tilde{B} . Тогда

$$\tilde{U}(x) = \frac{\tilde{U}_l + w\tilde{I}_l}{2} \cdot e^{\gamma l} \cdot e^{-\gamma x} + \frac{\tilde{U}_l - w\tilde{I}_l}{2} \cdot e^{-\gamma l} \cdot e^{\gamma x}, \quad (13а)$$

$$\tilde{I}(x) = \frac{1}{w} \left\{ \frac{\tilde{U}_l + w\tilde{I}_l}{2} \cdot e^{\gamma l} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\tilde{U}_l - w\tilde{I}_l}{2} \cdot e^{-\gamma l} \cdot e^{\gamma x} \right\}. \quad (13б)$$

С учетом того, что для произвольного $z = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Im} z$ справедливы равенства $(e^z + e^{-z})/2 = \operatorname{ch} z$ и $(e^z - e^{-z})/2 = \operatorname{sh} z$, имеем

$$\tilde{U}(x) = \tilde{U}_l \operatorname{ch} \gamma(l-x) + w\tilde{I}_l \operatorname{sh} \gamma(l-x), \quad (14а)$$

$$\tilde{I}(x) = \tilde{I}_l \operatorname{ch} \gamma(l-x) + \frac{\tilde{U}_l}{w} \operatorname{sh} \gamma(l-x). \quad (14б)$$

Пусть напряжение и ток на входе линии (при $x = 0$) равны $\tilde{U}_0 \equiv \tilde{U}(0)$ и $\tilde{I}_0 \equiv \tilde{I}(0)$ соответственно. Тогда из соотношений (14) следует, что

$$\tilde{K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{U}_l}{\tilde{U}_0} = \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma l + \frac{w}{z_H} \operatorname{sh} \gamma l}, \quad (15)$$

$$z_{\text{BX}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0} = \frac{1 + \frac{w}{z_{\text{H}}} \operatorname{th} \gamma l}{1 + \frac{z_{\text{H}}}{w} \operatorname{th} \gamma l} \cdot z_{\text{H}}, \quad (16)$$

$$\tilde{K}_e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{U}_l}{\tilde{\mathcal{E}}_{\text{и}}} = \frac{z_{\text{BX}}}{z_{\text{и}} + z_{\text{BX}}} \cdot \tilde{K}, \quad (17)$$

где \tilde{K} – коэффициент передачи длинной линии, z_{BX} – ее входное сопротивление, \tilde{K}_e – коэффициент передачи по отношению к эдс источника сигнала, $z_{\text{и}}$ – выходное сопротивление источника.

Линия без потерь

Если $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$, то волновое сопротивление становится действительной величиной, а постоянная распространения – чисто мнимой:

$$w = \sqrt{L_0 / C_0}, \quad \gamma = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = j\alpha; \quad (18)$$

α – фазовая постоянная (волновое число):

$$\alpha = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (19)$$

λ – длина волны.

В этом случае соотношения (14) можно переписать в виде

$$\tilde{U}(x) = \tilde{U}_l \cos \alpha(l - x) + jw\tilde{I}_l \sin \alpha(l - x), \quad (20a)$$

$$\tilde{I}(x) = \tilde{I}_l \cos \alpha(l - x) + j \frac{\tilde{U}_l}{w} \sin \alpha(l - x), \quad (20б)$$

а для коэффициента передачи и входного сопротивления справедливы выражения

$$\tilde{K} = \frac{1}{\cos \alpha l + j \frac{w}{z_H} \sin \alpha l}, \quad (21)$$

$$z_{\text{вх}} = \frac{1 + j \frac{w}{z_H} \operatorname{tg} \alpha l}{1 + j \frac{z_H}{w} \operatorname{tg} \alpha l} \cdot z_H, \quad (22)$$

Следующие 5 частных случаев представляют особый интерес.

Разомкнутая линия

Если $z_H = \infty$, то $\tilde{I}_l = 0$. В линии возникают стоячие волны напряжения и тока, причем распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии, как это следует из (20), имеет вид

$$\tilde{U}(x) = \tilde{U}_l \cos \alpha(l - x), \quad \tilde{I}(x) = j \frac{\tilde{U}_l}{w} \sin \alpha(l - x). \quad (23)$$

Коэффициент передачи и входное сопротивление, очевидно, равны:

$$\tilde{K} = \frac{1}{\cos \alpha l}, \quad z_{\text{вх}} = -jw \operatorname{ctg} \frac{2\pi l}{\lambda}. \quad (24)$$

Следует обратить внимание на то, что входное сопротивление является чисто реактивным и может иметь как индуктивный ($z_{\text{вх}}/j > 0$), так и емкостной ($z_{\text{вх}}/j < 0$) характер в зависимости от длины линии и частоты подаваемого сигнала.

Короткозамкнутая линия

Если $z_H = 0$, то $\tilde{U}_l = 0$. Поэтому

$$\tilde{U}(x) = jw\tilde{I}_l \sin \alpha(l-x), \quad \tilde{I}(x) = \tilde{I}_l \cos \alpha(l-x) \quad (25)$$

и

$$\tilde{K} = 0, \quad z_{\text{BX}} = jw \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda}. \quad (26)$$

Справедливы замечания, аналогичные сделанным в отношении разомкнутой линии.

Линия, нагруженная на сопротивление, равное волновому

При $z_{\text{H}} = w$ амплитуды напряжения и тока вдоль линии остаются постоянными и равными \tilde{U}_l и \tilde{I}_l соответственно.

Коэффициент передачи

$$\tilde{K} = \frac{1}{\cos \alpha l + j \frac{w}{w} \sin \alpha l} = 1 \cdot e^{-j\alpha l} \quad (27)$$

по модулю равен 1, так что линия в целом только вносит сдвиг по фазе:

$$\varphi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \tilde{K} = -\alpha l = -\omega \cdot \frac{l}{v}, \quad \frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{l}{v}. \quad (28)$$

Величина $\tau = -d\varphi/d\omega$ — задержка во времени; в данном случае она не зависит от частоты, поэтому сигнал произвольной формы проходит по линии без искажений с задержкой, равной времени перемещения волны на расстояние l при распространении со скоростью v .

Независимо от длины линии и частоты подаваемого сигнала входное сопротивление линии в рассматриваемом случае остается постоянным и равным волновому сопротивлению:

$$z_{\text{BX}} = \frac{1 + j \frac{w}{w} \operatorname{tg} \alpha l}{1 + j \frac{w}{w} \operatorname{tg} \alpha l} \cdot w = w. \quad (29)$$

Полуволновая линия

Пусть $l = \lambda/2$, тогда $\alpha l = \pi$; подставляя это значение в (17), (18) и (22), получим

$$\tilde{K} = -1, \quad z_{\text{BX}} = z_{\text{H}}, \quad \tilde{K}_e = -\frac{z_{\text{H}}}{z_{\text{И}} + z_{\text{H}}}. \quad (30)$$

Полуволновой линией можно воспользоваться для поворота фазы сигнала на π , имея в виду, что при фиксированном l это справедливо для сигнала с частотой $f = v/(2l)$.

Четвертьволновая линия

Если длина линии и частота сигнала таковы, что $l = \lambda/4$, то $\alpha l = \pi/2$. Следовательно,

$$\tilde{K} = \frac{1}{\cos \alpha l + j \frac{w}{z_{\text{H}}} \sin \alpha l} = -j \frac{z_{\text{H}}}{w}, \quad (31)$$

$$z_{\text{BX}} = \frac{1 + j \frac{w}{z_{\text{H}}} \operatorname{tg} \alpha l}{1 + j \frac{z_{\text{H}}}{w} \operatorname{tg} \alpha l} \cdot z_{\text{H}} = \frac{\frac{w}{z_{\text{H}}}}{\frac{z_{\text{H}}}{w}} \cdot z_{\text{H}} = \frac{w^2}{z_{\text{H}}}, \quad (32)$$

$$\tilde{K}_e = \frac{z_{\text{BX}}}{z_{\text{И}} + z_{\text{BX}}} \cdot \tilde{K} = -\frac{jw}{z_{\text{И}} + \frac{w^2}{z_{\text{H}}}}. \quad (33)$$

В частности, при $z_{\text{И}} = \infty$:

$$\tilde{K} = \infty, \quad z_{\text{BX}} = 0, \quad \tilde{K}_e = -j \frac{w}{z_{\text{И}}}. \quad (34)$$

Отметим, что напряжение на входе разомкнутой четвертьволновой линии равно 0; другими словами, подключение такой линии приводит к замыканию накоротко входных клемм источника сигнала. Однако результат прохождения сигнала от эдс источника сигнала до выхода линии оказывается ненулевым.

При $z_H = 0$:

$$\tilde{K} = \tilde{K}_e = 0, \quad z_{BX} = \infty. \quad (35)$$

Свойство, выражаемое последним равенством, может быть использовано для изготовления изоляторов из проводящего материала.

Четвертьволновой линией со специально выбранным значением ее волнового сопротивления w^* можно воспользоваться для согласования произвольной нагрузки R_H с волновым сопротивлением w_0 линии, к выходу которой необходимо подключить данную нагрузку (рис. 2а). Действительно, если выбрать

$$w^* = \sqrt{w_0 R_H}, \quad (36)$$

то согласно (32) сопротивление R_{BX}^* со стороны входа четвертьволнового отрезка будет равно волновому сопротивлению линии, согласовываемой с данной нагрузкой:

$$R_{BX}^* = \frac{(w^*)^2}{R_H} = w_0. \quad (37)$$

Аналогично могут быть согласованы волновые сопротивления разных линий на стыке (рис. 2б) или сопротивление источника сигнала с нагрузкой с целью получения в нагрузке наибольшей мощности сигнала (рис. 2в).

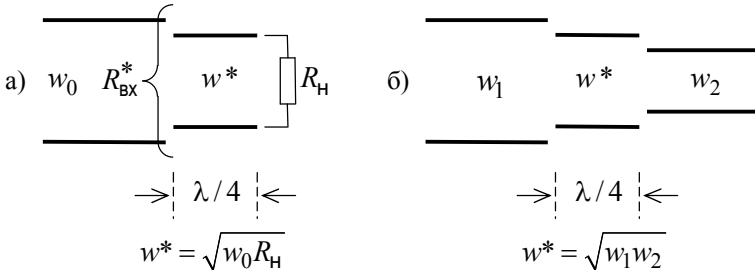


Рис. 2. Согласование сопротивлений с помощью четвертьволновой линии [рис. 2в) на следующей странице]

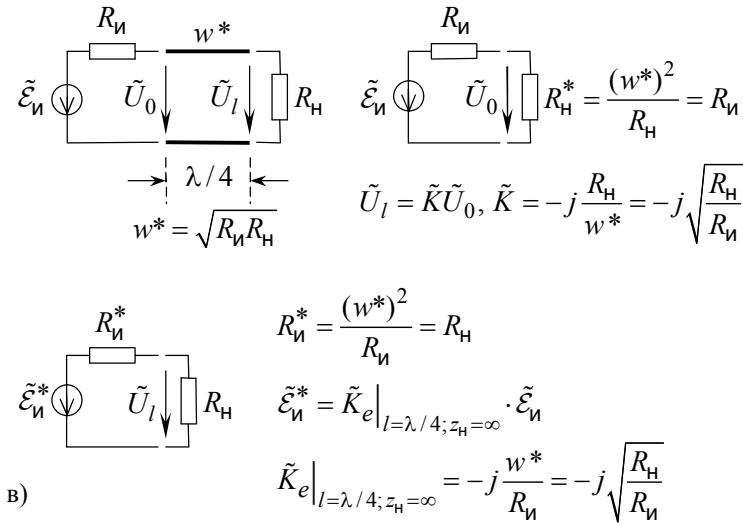


Рис. 2 (окончание)

Короткозамкнутый четвертьволновой отрезок линии с потерями в качестве колебательного контура

Пусть длина линии с потерями равна l . Рассмотрим окрестность такой частоты ω_0 , для которой эта линия является четвертьволновым отрезком, то есть длина волны λ_0 равна $4l$:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda_0/v} = \frac{2\pi}{4l/v} = \frac{\pi v}{2l}. \quad (38)$$

Пусть также $z_Н = 0$. В этом случае согласно (16) имеем

$$z_{\text{вх}} = \frac{1 + \frac{w}{z_Н} \operatorname{th} \gamma l}{1 + \frac{z_Н}{w} \operatorname{th} \gamma l} \cdot z_Н \bigg|_{z_Н=0} = w \operatorname{th} \gamma l. \quad (39)$$

Будем предполагать, что выполнено условие Хевисайда (6). Тогда:

$$w = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0(q + j\omega)}{C_0(q + j\omega)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \quad (40)$$

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{L_0 C_0 (q + j\omega)^2} = \beta + j\alpha, \quad (41)$$

где, как и ранее, параметр затухания q равен $R_0/L_0 = G_0/C_0$, а $\beta = q/\nu$.

Вблизи частоты ω_0 :

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega, \quad \alpha = \frac{\omega}{\nu} = \alpha_0 + \Delta\alpha, \quad \alpha_0 = \frac{\omega_0}{\nu}, \quad \Delta\alpha = \frac{\Delta\omega}{\nu}, \quad (42a)$$

$$\gamma = \Delta\gamma + j\alpha_0, \quad \Delta\gamma = \beta + j\Delta\alpha, \quad (42b)$$

$$\gamma l = \Delta\gamma \cdot l + j\alpha_0 l, \quad \alpha_0 l = \frac{\omega_0}{\nu} l = \frac{1}{\nu} \frac{\pi \nu}{2l} l = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma l = \Delta\gamma \cdot l + j\frac{\pi}{2}. \quad (42b)$$

Поэтому

$$z_{\text{BX}} = w \tanh \gamma l = w \cdot \frac{e^{\Delta\gamma \cdot l} \cdot e^{j\pi/2} - e^{-\Delta\gamma \cdot l} \cdot e^{-j\pi/2}}{e^{\Delta\gamma \cdot l} \cdot e^{j\pi/2} + e^{-\Delta\gamma \cdot l} \cdot e^{-j\pi/2}} = w \cdot \frac{j e^{\Delta\gamma \cdot l} + j e^{-\Delta\gamma \cdot l}}{j e^{\Delta\gamma \cdot l} - j e^{-\Delta\gamma \cdot l}}. \quad (43)$$

Если потери малы (с уменьшением потерь $\beta \rightarrow 0$) и $\Delta\omega \ll \omega_0$, то $|\Delta\gamma| \cdot l \ll 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} z_{\text{BX}} &= w \cdot \frac{(1 + \Delta\gamma \cdot l + \dots) + (1 - \Delta\gamma \cdot l + \dots)}{(1 + \Delta\gamma \cdot l + \dots) - (1 - \Delta\gamma \cdot l + \dots)} \approx \\ &\approx w \cdot \frac{1}{\Delta\gamma \cdot l} = \frac{w}{\beta l + j \cdot \Delta\alpha \cdot l} = \frac{\frac{w}{\beta l}}{1 + j \frac{\Delta\omega}{\nu \beta}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Сравнивая выражение, полученное для z_{BX} , с сопротивлением Z параллельного LC -контура большой добротности Q

$$z \approx \frac{R_{\text{ЭКВ}}}{1 + jQ \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}}, \quad (45)$$

видим, что короткозамкнутый отрезок длинной линии обладает резонансными свойствами вблизи частоты, для которой он является четвертьволновым, то есть ведет себя со стороны входа как параллельный колебательный контур с эквивалентным сопротивлением

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{w}{\beta l} = \frac{w}{(q/\nu) \cdot l} = \frac{w}{(R_0/w) \cdot l} = \frac{w^2}{R_0 l} \quad (46)$$

и с добротностью

$$Q = \frac{\pi}{\beta \lambda_0} = \frac{\pi w}{R_0 \lambda_0} = \frac{\pi}{4} \frac{R_{\text{ЭКВ}}}{w}. \quad (47)$$

Аналогичные резонансы имеют место вблизи тех частот, для которых на длине данного отрезка линии укладывается нечетное число четвертей длин волн, а именно вблизи частот $\omega_0^{(n)} = 2\pi\nu/\lambda_0^{(n)}$ со значениями $\lambda_0^{(n)}$, удовлетворяющими условию

$$l = \frac{2n+1}{4} \lambda_0^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (48)$$

Падающая, отраженная, стоячая и бегущая волны

Первое слагаемое в правых частях равенств (11а) и (13а) является комплексной амплитудой колебания, носящего название *падающей* волны напряжения. По своему физическому смыслу эта составляющая описывает распространение колебания вдоль линии слева направо на рис. 1. Действительно, беря квадратный корень в (10) со знаком «плюс», имеем: $\text{Re } \gamma > 0$ и $\text{Im } \gamma > 0$; поэтому выражение

$$e^{-\gamma x} \cdot e^{j\omega t} = e^{-(\text{Re } \gamma)x} \cdot e^{j[\omega t - (\text{Im } \gamma)x]}$$

представляет собой гармоническое колебание в точке x_2 , ослабленное по амплитуде и сдвинутое по фазе в сторону более позднего времени по сравнению с колебанием в точке x_1 при $x_2 > x_1$.

По тем же самым причинам второе слагаемое в правых частях равенств (11а) и (13а) описывает волну напряжения, переменяющуюся в обратном направлении (в сторону уменьшения x), которую принято называть *отраженной* волной.

Отраженная волна $\tilde{U}_{\text{отр}}$ возникает в результате отражения падающей волны $\tilde{U}_{\text{пад}}$ от конца линии. Отношение отраженной волны напряжения к падающей волне напряжения в точке $x = l$ называется коэффициентом отражения напряжения k_u ; из (13а) следует, что

$$k_u \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\tilde{U}_{\text{отр}}}{\tilde{U}_{\text{пад}}} \right|_{x=l} = \frac{\tilde{U}_l - w\tilde{I}_l}{\tilde{U}_l + w\tilde{I}_l} = \frac{z_H - w}{z_H + w}, \quad (50)$$

где $z_H = \tilde{U}_l / \tilde{I}_l$ – сопротивление нагрузки. Для разомкнутой линии ($z_H = \infty$) $k_u = 1$; для короткозамкнутой линии ($z_H = 0$) $k_u = -1$; для линии, нагруженной на сопротивление, равное волновому ($z_H = w$), $k_u = 0$.

Аналогично волнам напряжения вдоль линии распространяются падающая и отраженная волны тока $\tilde{I}_{\text{пад}}$ и $\tilde{I}_{\text{отр}}$: $\tilde{U}_{\text{пад}} / \tilde{I}_{\text{пад}} = w$, $\tilde{U}_{\text{отр}} / \tilde{I}_{\text{отр}} = -w$ [см. (11б), (13б)]. Коэффициент отражения тока равен:

$$k_i \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\tilde{I}_{\text{отр}}}{\tilde{I}_{\text{пад}}} \right|_{x=l} = -k_u. \quad (51)$$

Применительно к длинным линиям справедлив принцип суперпозиции: напряжение (ток) в любой точке линии в произвольный момент времени есть сумма падающей и отраженной

волн. При синусоидальном воздействии это приводит к возникновению *стоячих* волн, характеризующихся тем, что результирующие амплитуды напряжения и тока меняются вдоль линии от точки к точке, но остаются при этом одними и теми же во времени. Когда амплитуды падающей и отраженной волн одинаковы, как это имеет место, например, в случае разомкнутой и короткозамкнутой линий, у результирующего распределения напряжения (тока) имеются пучности (точки, в которых суммарная амплитуда максимальна) и узлы (точки, в которых суммарная амплитуда равна 0), которые чередуются вдоль линии с интервалом $\lambda/4$ [см. (23), (25)]; пучности и узлы напряжения сдвинуты вдоль оси x относительно пучностей и узлов тока (в упомянутых случаях – на $\lambda/4$).

Если амплитуда отраженной волны меньше амплитуды падающей волны, то в образовании стоячей волны участвует только часть падающей волны с амплитудой, равной амплитуде отраженной волны: другая часть падающей волны, некомпенсированная отраженной волной, носит название *бегущей* волны. С бегущей волной связана передача мощности сигнала от источника, подключенного ко входу линии, к нагрузке. Когда сопротивление нагрузки равно волновому сопротивлению линии ($k_u = k_i = 0$), отраженные волны напряжения и тока равны нулю, стоячие волны отсутствуют и имеются только бегущие волны с равномерным распределением амплитуд вдоль линии. Говорят, что в этом случае имеет место согласование нагрузки с линией; если одновременно выполняется равенство $R_u = w$, то осуществляется максимальная отдача мощности в нагрузку.

Переходные процессы в длинной линии

Под откликом линии на синусоидальное воздействие понимают распределение амплитуд и фаз в установившемся режиме. Знание переходного процесса, то есть реакции линии на мгновенный скачок напряжения (тока), позволяет составить более наглядное представление о том, как именно могут меняться

во времени напряжение и ток в различных точках линии под воздействием сигналов произвольной формы.

В этом разделе будут рассматриваться только линии без потерь.

Первоначальная реакция линии со стороны ее входа на скачкообразное воздействие

Пусть ко входу линии подключен источник сигнала с эдс

$$e_{\text{и}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ E_{\text{и}} & \text{при } t \geq 0 \end{cases} \quad (52)$$

($E_{\text{и}}$ — константа) и выходным сопротивлением $R_{\text{и}}$ (рис. 3). Предполагается, что до момента $t = 0$ в линии отсутствуют какие бы то ни было токи и напряжения.

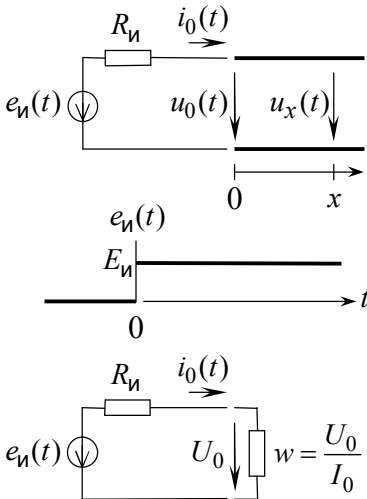


Рис. 3. Длинная линия с источником скачкообразно изменяющейся эдс на входе

Положим, что в момент $t = 0$ на входе линии напряжение изменяется скачком от 0 до U_0 ; это предположение не нарушает общности, в крайнем случае потом окажется, что $U_0 = 0$.

Тогда согласно (5), начиная с момента $t = 0$, по линии распространяются падающие волны напряжения и тока. Это означает, в частности, что в какой-то момент скачок напряжения U_0 возникает в точке x , а спустя малое время Δt — в точке $x + \Delta x$, где $\Delta x = v \cdot \Delta t$. Пренебрегая возможным изменением напряжения в точке x за время Δt , видим, что за этот ко-

роткий отрезок времени на участке линии длины Δx происходит заряд емкости

$$\Delta C = C_0 \cdot \Delta x = C_0 \cdot v \cdot \Delta t \quad (53)$$

до напряжения U_0 . Для этого необходимо, чтобы за то же время в линию поступил со стороны источника сигнала заряд

$$\Delta Q = \Delta C \cdot U_0 = C_0 \cdot v \cdot U_0 \cdot \Delta t, \quad (54)$$

для чего, в свою очередь, требуется, чтобы ток $i_0(t)$, втекающий в линию на протяжении интервала времени Δt , имел значение

$$I_0 = \Delta Q / \Delta t = v \cdot C_0 \cdot U_0 \quad (55)$$

Из того, что I_0 не зависит от времени, следует, что с течением времени процесс заряда линии сохраняет свой характер по крайней мере до тех пор, пока падающая волна не достигнет конца линии. Следовательно в течение всего этого времени входное напряжение должно оставаться постоянным и равным

$$U_0 = E_{\text{и}} - I_0 \cdot R_{\text{и}} \quad (56)$$

или

$$U_0 = E_{\text{и}} - v \cdot C_0 \cdot R_{\text{и}} \cdot U_0. \quad (57)$$

Решая уравнение (57) относительно U_0 , находим

$$U_0 = \frac{E_{\text{и}}}{1 + v C_0 R_{\text{и}}}. \quad (58)$$

Но

$$v C_0 = \frac{C_0}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} = \frac{1}{w}. \quad (59)$$

Поэтому

$$U_0 = \frac{E_{\text{и}}}{1 + \frac{R_{\text{и}}}{w}} = \frac{w}{w + R_{\text{и}}} \cdot E_{\text{и}}. \quad (60)$$

Соотношение (60) означает, что в течение некоторого времени после включения скачка длинная линия ведет себя со стороны входа как резистор с сопротивлением, равным волновому сопротивлению линии w , независимо от ее длины; другими словами, в пределах определенного отрезка времени для входной цепи справедлива эквивалентная схема, указанная внизу на рис. 3.

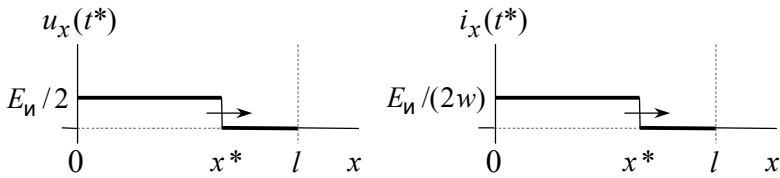
Из общефизических соображений следует, что такое поведение линии со стороны входа должно сохраняться по меньшей мере в течение времени двукратного прохождения волной всей длины линии, поскольку никакие обстоятельства, связанные с возможным отражением волны от конца линии, не могут проявиться на входе, пока отраженная волна не достигнет начала линии.

Распределение напряжения и тока вдоль линии

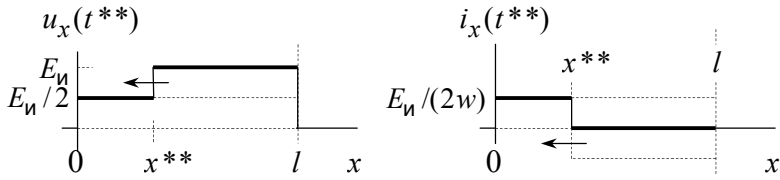
Рассмотрим случай разомкнутой линии в предположении, что $R_{\text{и}} = w$. В этих условиях, как непосредственно следует из предыдущих рассуждений, распределение напряжения вдоль линии $u_x(t)$ в пределах интервала времени $(0, l/v)$ имеет вид, указанный на рис. 4а слева: фронт падающей волны перемещается слева направо со скоростью v . Точно таким же является распределение тока $i_x(t)$, так как отношение падающей волны напряжения к падающей волне тока в любой точке линии равно w . (Ранее это было показано для гармонических колебаний; поскольку в случае линии без потерь w не зависит от частоты, данный вывод справедлив для волны произвольной формы, рассматриваемой как суперпозиция отдельных гармонических составляющих.)

В момент $t = l/v$ падающие волны напряжения и тока достигают конца линии, и в результате их отражения от разомкнутого конца возникают и начинают перемещаться в обратном направлении отраженные волны напряжения и тока. Поскольку в

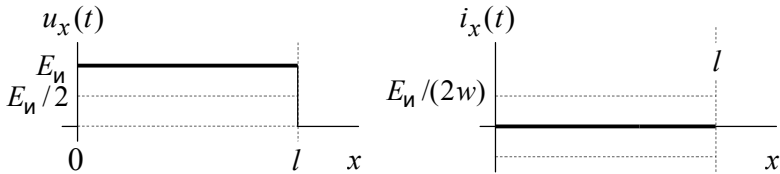
данном случае (при $z_{\text{н}} = \infty$) коэффициенты отражения напряжения k_u и тока k_i не зависят от частоты ($k_u = 1$, $k_i = -1$), отраженные волны напряжения и тока имеют ту же форму скачка, что и падающие волны (со знаком «плюс» для напряжения и со знаком «минус» для тока). Из сказанного следует, что в результате суперпозиции падающих и отраженных волн с момента $t = l/v$ на линии со стороны ее конца начинают устанавливаться удвоенное (по сравнению со значением в падающей волне) напряжение и нулевой ток (рис. 4б).



а) $0 < t^* < l/v$; $x^* = v \cdot t^*$



б)



в) $t \geq 2l/v$

0

Рис. 4. Распределение напряжения и тока вдоль разомкнутой линии без потерь при $R_{\text{н}} = w$; стрелки указывают направление движения: а) падающей волны, б) отраженной волны

Удвоение напряжения на линии по мере перемещения влево отраженных волн напряжения и тока имеет простое энергетическое объяснение. Пусть U_0 и I_0 — значения напряжения и тока в падающей волне, а U_{γ} — результат суперпозиции отраженной волны с падающей в интервале времени между l/v и $2l/v$. Тогда энергия электрического поля, запасаемая в конденсаторе с емкостью $C_0 \cdot \Delta x$ за время Δt перемещения отраженной волны на расстояние $\Delta x = v \cdot \Delta t$, должна быть равна

$$\frac{(C_0 v \Delta t) \cdot (U_{\gamma})^2}{2} = \frac{(C_0 v \Delta t) \cdot (U_0)^2}{2} + \frac{(L_0 v \Delta t) \cdot (I_0)^2}{2} + U_0 I_0 \Delta t, \quad (61)$$

где первое слагаемое в правой части — энергия электрического поля, запасенная на данном отрезке линии длины Δx до напоявления на него отраженной волны; второе — энергия магнитного поля в том же отрезке до исчезновения тока в нем за время Δt ; третье — энергия, поставленная в линию за это время со стороны ее входа источником сигнала. Принимая во внимание (4), (59) и тот факт, что $I_0 = U_0 / w$, находим из (61): $U_{\gamma} = 2U_0$.

Распределение напряжения и тока вдоль линии до момента $t = 2l/v$ имеет характер, указанный на рис. 4а и 4б, независимо от соотношения между $R_{\text{и}}$ и w (при $R_{\text{и}} \neq w$ будут другими значения напряжения и тока в падающей и отраженной волнах). Нов момент $t = 2l/v$, когда отраженная волна достигает начала линии, значение $R_{\text{и}}$ оказывается существенным: если $R_{\text{и}} \neq w$, то произойдет отражение волны, двигавшейся справа налево, от начала линии и возникнет новая волна, распространяющаяся в направлении больших значений x . Ничего этого не происходит при $R_{\text{и}} = w$: когда имеет место согласование источника сигнала с линией, начиная с момента $t = 2l/v$, напряжение вдоль всей разомкнутой линии постоянно и равно $E_{\text{и}}$, а ток по линии не течет (рис. 4в).

В случае короткозамкнутой линии распределения напряжения и тока вдоль линии в различные моменты времени подоб-

ны только что рассмотренным, необходимо лишь диаграммы для напряжений и токов поменять местами. В частности, при $t \geq 2l/v$ ток, текущий в короткозамкнутую линию, при $R_{\text{и}} = w$ равен $E_{\text{и}}/w$.

Зависимость от времени напряжения на входе линии

Рассматривая распределение напряжения $u_x(t)$ в различные моменты времени, видим, в частности, что при $R_{\text{и}} = w$ зависимость от времени напряжения на входе разомкнутой линии имеет вид, представленный на рис. 5 вверху слева. На этом рисунке \hat{u}_0 и \hat{t} – нормированные входное напряжение и время:

$$\hat{u}_0 = \frac{u_0(t)}{E_{\text{и}}}, \hat{t} = \frac{t}{(2l/v)}. \quad (62)$$

Из аналогичных рассуждений следует, что на входе короткозамкнутой линии формируется прямоугольный импульс с длительностью, равной удвоенному времени пробега волны вдоль линии (рис. 5 вверху слева).

Если $R_{\text{и}} \neq w$, то в момент достижения волной, перемещающейся в направлении уменьшения x , начала линии происходит отражение этой волны от начала линии, в результате чего возникает новая волна, движущаяся в сторону больших значений x . Коэффициент отражения (напряжения), равный по определению отношению вновь возникшей волны к отраженной волне в момент достижения ею границы линии в точке $x = 0$, можно найти подобно тому, как это делается в отношении коэффициента отражения от конца линии [см. (50)]; роль нагрузки при этом играет выходное сопротивление источника сигнала:

$$k_u|_{x=0} = \frac{R_{\text{и}} - w}{R_{\text{и}} + w}. \quad (63)$$

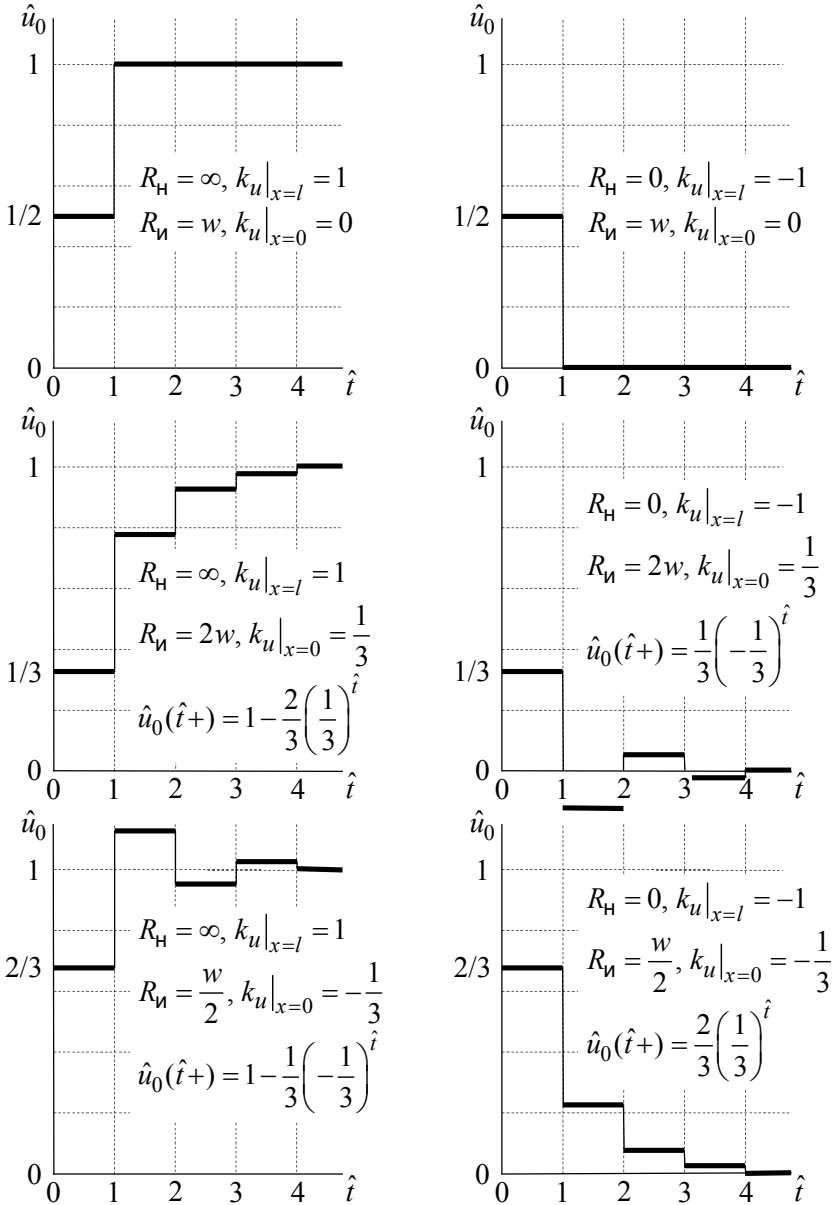


Рис. 5. Примеры переходных процессов на входе длинной линии

При $R_{\text{и}} > w$ волна, отраженная от начала линии, имеет тот же знак, что и волна, перемещавшаяся перед этим справа налево (поскольку в этом случае $k_u|_{x=0} > 0$), при $R_{\text{и}} < w$ — обратный знак ($k_u|_{x=0} < 0$). Как показывают временные диаграммы для этих случаев, представленные в середине и внизу на рис. 5 соответственно, суперпозиция волн порождает напряжение на входе линии сложной формы, при этом установление конечного значения происходит лишь асимптотически. Другими словами, в указанных условиях в результате первоначального скачкообразного воздействия в линии возбуждается волна, многократно отражающаяся от границ линии и перемещающаяся поочередно слева направо и справа налево, причем амплитуда движущейся волны с течением времени стремится к нулю.

Перебирая последовательные возвращения волны к началу линии и имея в виду, что каждый очередной скачок напряжения \hat{u}_0 есть результат суперпозиции волны, подошедшей к началу линии справа, и волны, отразившейся от начала, найдем значение $\hat{u}_0(\hat{t}+)$, принимаемое входным напряжением в момент \hat{t} дискретного времени, $\hat{t} = 1, 2, 3 \dots$:

для разомкнутой линии

($R_{\text{н}} = \infty$, временные диаграммы слева на рис. 5)

$$\begin{aligned} \hat{u}_0(\hat{t}+) &= \\ &= \frac{w}{R_{\text{и}} + w} \left[\underbrace{1 + 1 + k_0}_1 + \underbrace{k_0 + k_0^2}_2 + \underbrace{k_0^2 + k_0^3}_3 + \dots + \underbrace{k_0^{m-1} + k_0^m}_{\substack{\text{Скачок} \\ \text{в } m\text{-й} \\ \text{момент} \\ \text{времени}}} + \dots + \underbrace{k_0^{\hat{t}-1} + k_0^{\hat{t}}}_{\hat{t}} \right], \end{aligned} \quad (64)$$

для короткозамкнутой линии

($R_{\text{н}} = 0$, временные диаграммы справа на рис. 5)

$$\hat{u}_0(\hat{t}+) = \frac{w}{R_{\text{и}} + w} \left[\underbrace{1 - 1 - k_0}_1 + \underbrace{k_0 + k_0^2}_2 - \underbrace{k_0^2 - k_0^3}_3 + \dots + \right] \quad (65)$$

$$+ \underbrace{(-1)^m (k_0^{m-1} + k_0^m)}_{\substack{\text{Скачок} \\ \text{в } m\text{-й} \\ \text{момент} \\ \text{времени}}} + \dots + \underbrace{(-1)^{\hat{t}} k_0^{\hat{t}-1} + k_0^{\hat{t}}}_{\hat{t}}$$

[В формулах (64), (65) $k_0 = k_u|_{x=0} = (R_{\text{н}} - w) / (R_{\text{н}} + w)$; $w / (R_{\text{н}} + w)$ – величина скачка \hat{u}_0 в момент $\hat{t} = 0$]. Обобщая на случай произвольной нагрузки $R_{\text{н}}$ с коэффициентом отражения напряжения от конца линии $k_l = k_u|_{x=l} = (R_{\text{н}} - w) / (R_{\text{н}} + w)$ и суммируя, получим

$$\hat{u}_0(\hat{t}+) = \frac{w}{R_{\text{н}} + w} \cdot \frac{1 + k_l - k_l(1 + k_0)(k_0 k_l)^{\hat{t}}}{1 - k_0 k_l}. \quad (66)$$

Задание

А. Длинная линия при синусоидальном воздействии

Эта часть задания выполняется на отрезке коаксиального кабеля с контактными приспособлениями на концах, позволяющими студенту подключить кабель к своей макетной плате, как показано на рис. 6. «Внутренние» контакты (нижние на рис. 6) соединены с оплеткой кабеля и должны быть заземлены. На «внешние» контакты (верхние на рис. 6) выведены концы центральной жилы кабеля.

При выполнении измерений между источником сигнала и входом «длинной линии» (слева на рис. 6) нужно включать резистор с сопротивлением, указанным в задании. Сами измерения необходимо производить измерительным прибором, предназначенным для измерения переменных напряжений высокой частоты с большим входным сопротивлением и малой входной емкостью.

1. Определить длину l имеющегося отрезка кабеля.

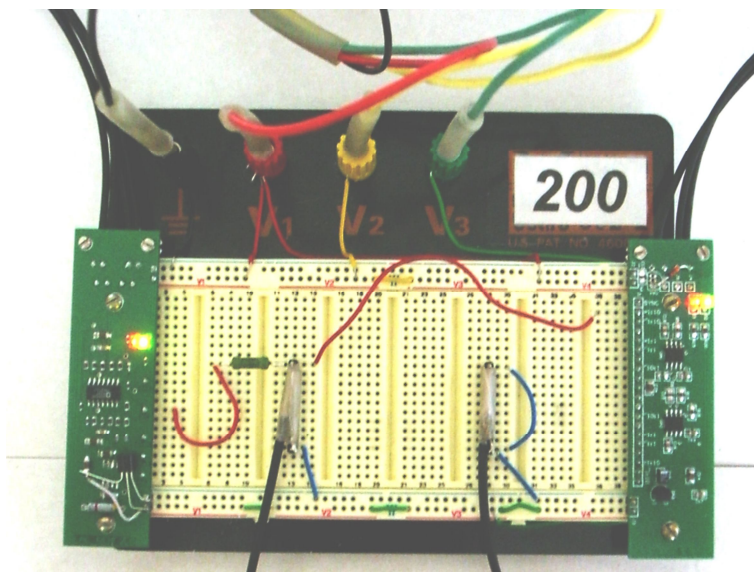
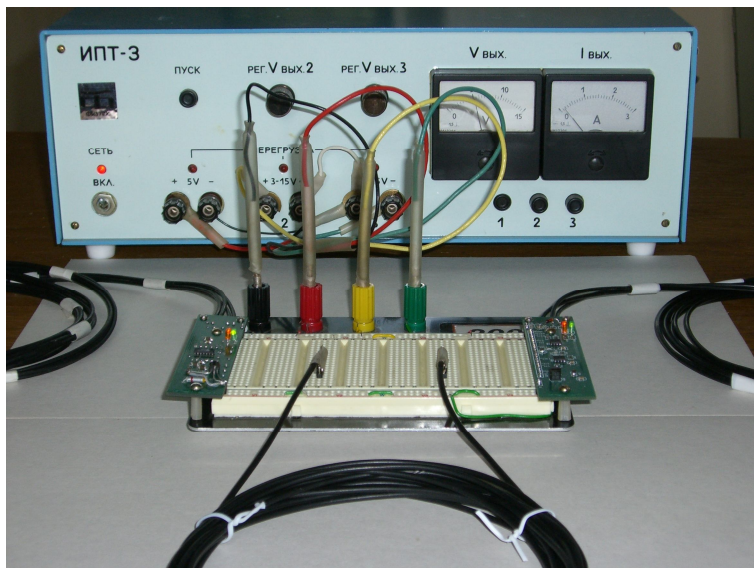
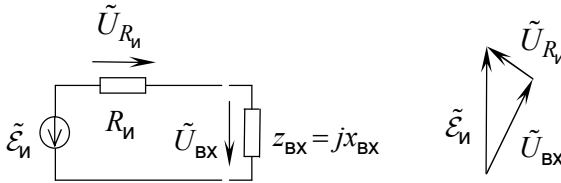


Рис. 6. Подключение коаксиального кабеля

2. Измерить входные сопротивления $z_{\text{вх}}$ для разомкнутого и короткозамкнутого отрезка кабеля на частоте f порядка 1...2 МГц.

Указания.

При проведении этих измерений предполагается, что потерями в линии можно пренебречь. Тогда в обоих случаях – при $z_{\text{н}} = \infty$ и $z_{\text{н}} = 0$ – входные сопротивления являются чисто реактивными [см. (24), (26)]. Поэтому, подавая сигнал $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{и}}$ от лабораторного генератора через резистор с известным сопротивлением $R_{\text{и}}$, измеряя $\mathcal{E}_{\text{и}} = |\tilde{\mathcal{E}}_{\text{и}}|$ и $U_{\text{вх}} = |\tilde{U}_{\text{вх}}|$ и принимая во внимание, что сдвиг по фазе между $\tilde{U}_{\text{вх}}$ и $\tilde{U}_{R_{\text{и}}}$ равен $\pi/2$, можно найти $|x_{\text{вх}}|$ как отношение $U_{\text{вх}}$ к $I_{\text{вх}}$, где $I_{\text{вх}} = U_{R_{\text{и}}} / R_{\text{и}}$, $U_{R_{\text{и}}} = \sqrt{\mathcal{E}_{\text{и}}^2 - U_{\text{вх}}^2}$.



Величину $\mathcal{E}_{\text{и}}$ следует установить равной примерно 1 В. В случае разомкнутой линии сопротивление резистора $R_{\text{и}}$ нужно взять равным 240...300 Ом, а в случае короткозамкнутой линии – 43...51 Ом.

3. По известным входным сопротивлениям $z_{\text{вх}}|_{z_{\text{н}}=\infty}$ и $z_{\text{вх}}|_{z_{\text{н}}=0}$ найти волновое сопротивление линии w [см. (24), (26)]:

$$w = \sqrt{z_{\text{вх}}|_{z_{\text{н}}=\infty} \cdot z_{\text{вх}}|_{z_{\text{н}}=0}}. \quad (67)$$

4. Зная w , l и частоту f , на которой проводились измерения входных сопротивлений, по любому из значений $z_{\text{вх}}$ определить скорость v распространения волн вдоль линии. Например [см. (19), (26)]:

$$\nu = \frac{2\pi f \cdot l}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{w} \left| z_{\text{ВХ}} \right|_{z_{\text{Н}}=0} \right)}. \quad (68)$$

5. По известным w и ν найти приходящиеся на единицу длины L_0 и C_0 [см. (4), (18)]:

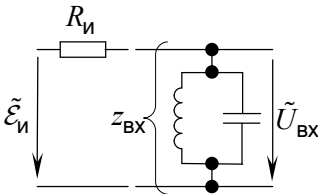
$$L_0 = w/\nu, \quad C_0 = 1/(w \cdot \nu). \quad (69)$$

6. Определить время τ , затрачиваемое волной на прохождение линии в одном направлении: $\tau = l/\nu$.

7. При $z_{\text{Н}} = 0$ найти экспериментально частоту f_0 , для которой имеющийся кабель является четвертьволновым отрезком длинной линии, и определить $R_{\text{ЭКВ}}$ и Q эквивалентного колебательного контура.

Указания.

Вблизи частоты f_0 [см. (38), $f_0 = \omega_0/(2\pi)$] зависимость $U_{\text{ВХ}} \equiv |\tilde{U}_{\text{ВХ}}|$ от частоты f имеет резонансный характер и достигает максимума при $f = f_0$. Зная $U_{\text{ВХ}}(f_0)$ и $\mathcal{E}_{\text{И}} = |\tilde{\mathcal{E}}_{\text{И}}|$, находят



входное сопротивление линии на частоте резонанса $R_{\text{ЭКВ}}$. Далее измеряют ширину $2\Delta f_{0,7}$ резонансной кривой $U_{\text{ВХ}}(f)$ на уровне $1/\sqrt{2}$ от максимального значения и определяют добротность $Q^* = f_0/(2\Delta f_{0,7})$ эквива-

лентного колебательного контура, шунтированного сопротивлением источника $R_{\text{И}}$; значение собственной добротности Q отрезка кабеля находят из равенства

$$\frac{R_{\text{ЭКВ}}}{Q} = \frac{R_{\text{ЭКВ}} \parallel R_{\text{И}}}{Q^*}. \quad (70)$$

При проведении этих измерений сопротивление $R_{\text{и}}$ следует взять равным порядка 1,5 кОм.

8. Путем расчета по формулам (46) и (47) найти значения удельного сопротивления R_0 и сравнить их между собой; из условия Хевисайда (6) определить удельную проводимость G_0 : $G_0 = R_0 / w^2$.

В. Переходные процессы в длинной линии

Переходные процессы на входе и на выходе длинной линии следует изучить путем моделирования на компьютере в программной среде **Micro-Cap**, где роль длинной линии играет компонент **TLine**, при вызове которого (Component → Analog Primitives → Passive Components → TLine) в окне **Value** необходимо задать значения параметров, найденные в результате измерений при выполнении части А задания; синтаксис и пример возникают внизу в окне, всплывающем при вызове компонента TLine, если указатель мыши подвести к строке Value=.

Импеданс источника сигнала $z_{\text{и}}$ и нагрузка $z_{\text{н}}$ задаются преподавателем. Выбрав подходящее время наблюдения, необходимо надлежащим образом отредактировать временные параметры импульсного источника (Pulse Source), подключаемого ко входу длинной линии.

Список литературы

1. Бонч-Бруевич А.М. Радиозлектроника в экспериментальной физике. – М.: Наука, 1966.
2. Манаев Е.И. Основы радиозлектроники. – М.: Радио и связь, 1990.

Лабораторная работа
по курсам
Электронные методы физических исследований
Введение в электронику

ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Составитель ***ВОРОНОВ Евгений Валентинович***

Редактор *И.А. Волкова*. Корректор *О.П. Котова*

Подписано в печать 25.06.2007. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 100 экз.
Заказ № ф-303

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Отдел автоматизированных издательских систем
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9