

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Е.В. Воронов

НАЧАЛА ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

**для студентов-физиков
с упражнениями
в MATLAB**

*Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению «Прикладные математика и физика»*

**МОСКВА
МФТИ
2010**

УДК 004.383.3(075)
ББК 32.811.3я7
В75

Рецензенты:

Кафедра управления и информатики
Московского энергетического института (государственного университета)
(зав. кафедрой доктор технических наук, профессор *В.М. Беседин*)

Доктор технических наук, профессор *А.А. Щука*

Воронов Е.В.
В75 Начала цифровой обработки сигналов для студентов-
физиков с упражнениями в MATLAB: учеб. пособие. – М.:
МФТИ, 2010. – 160 с.
ISBN 978-5-7417-0304-5

Развитие электроники в целом делает всё более актуальной цифровую часть учебного курса, ориентированного главным образом на регистрацию и обработку данных в физическом эксперименте. Данное пособие должно помочь учащимся освоить основные идеи, относящиеся к дискретизации по времени и по частоте и к принципу цифровой фильтрации.

Самостоятельное выполнение студентами предлагаемых упражнений позволит им получить необходимые навыки работы в системе MATLAB, являющейся мировым стандартом в области научных и технических расчётов.

УДК 004.383.3(075)
ББК 32.811.3я7

ISBN 978-5-7417-0304-5

© Воронов Е.В., 2010
© ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт
(государственный университет)», 2010

Содержание

Предисловие	6
Введение	7

Часть I. Дискретизация по времени и по частоте. Быстрое преобразование Фурье

1.1. Теорема о выборках (Котельникова–Шеннона)	8
1.2. Теорема о выборках вдоль оси частот	13
1.3. Сигнал с N степенями свободы	16
1.4. Дискретное преобразование Фурье	24
1.5. Быстрое преобразование Фурье	26
1.6. Анализ и преобразование сигналов средствами MATLAB: первые сведения	35

Часть II. Цифровые фильтры

2.1. Аналоговые прототипы	37
<i>Идеальный фильтр. Критерий Пэли–Винера</i>	42
2.1.1. Фильтры нижних частот (ФНЧ)	44
<i>Фильтр Баттерворта</i>	44
<i>Фильтр Чебышева 1-го рода</i>	46
<i>Фильтр Чебышева 2-го рода</i>	47
<i>Эллиптический фильтр (Золотарева–Кауэра)</i>	49
2.1.2. Частотные преобразования	52
<i>Преобразование ФНЧ в фильтр верхних частот (ФВЧ)</i> .	53
<i>Преобразование ФНЧ в полосовой фильтр (ПФ)</i>	55
<i>Преобразование ФНЧ в режекторный фильтр (РФ)</i> ...	56
2.1.3. Расчет аналоговых фильтров	59
<i>Способы описания аналоговых линейных систем</i>	59
<i>Функции MATLAB для расчета ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ</i> ...	62

2.2. z-преобразование последовательности чисел	68
Примеры z-преобразования	69
Связь между z-преобразованием и преобразованиями Лапласа и Фурье	70
Свойства z-преобразования	71
Обратное z-преобразование	72
2.3. Описание дискретных систем	73
Функция передачи	74
Импульсная характеристика	74
Частотная характеристика	76
Нули и полюсы	77
Полюсы и вычеты	77
Примеры фильтров 1-го порядка	78
Примеры фильтров 2-го порядка	79
2.4. Рекурсивные фильтры	83
Прямая реализация	83
Каноническая форма	84
Транспонированная схема	88
Последовательное (каскадное) включение	90
Параллельное включение	92
2.5. Проектирование дискретных фильтров по их аналоговым прототипам	93
Метод билинейного z-преобразования	93
Метод инвариантной импульсной характеристики	95
2.6. Функции MATLAB для создания цифровых фильтров и для работы с ними	97
Функции синтеза стандартных фильтров	97
Выбор минимально необходимого порядка фильтра n	98
Переход от одного описания фильтра к другому	99
Частотная, импульсная и переходная характеристики цифрового фильтра	100
Непосредственный переход от аналогового фильтра-прототипа к цифровому фильтру	102

<i>Последовательное (каскадное) включение секций</i>	
2-го порядка	103
<i>Резонаторы 2-го порядка</i>	105
<i>Прохождение произвольного сигнала через</i>	
<i>цифровой фильтр</i>	106
Заключение	107
Комментарий к упражнениям ex_1, ..., ex_7	108
Комментарий к упражнениям ex_8, ..., ex_13	112
Упражнения	
ex_1: <i>Одинокое гармоническое колебание</i>	117
ex_2: <i>Сумма двух амплитудно-модулированных</i>	
<i>колебаний</i>	118
ex_3: <i>Одинокое прямоугольный (видео)импульс</i>	120
ex_4: <i>Несимметричный треугольный импульс</i>	122
ex_5: <i>Одинокое радиоимпульс</i>	124
ex_6: <i>Два радиоимпульса</i>	126
ex_7: <i>Радиоимпульс на фоне синусоидальной помехи</i>	130
ex_8: <i>Прохождение прямоугольного (видео)импульса</i>	
<i>через простейшие ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ</i>	133
ex_9: <i>Прохождение несимметричного треугольного</i>	
<i>импульса через простейшие ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ</i>	136
ex_10: <i>Прохождение одинокое радиоимпульса</i>	
<i>через полосовой фильтр Чебышева 2-го рода</i>	140
ex_11: <i>Два радиоимпульса</i>	142
ex_12a: <i>Одинокое радиоимпульс на фоне синусоидальной</i>	
<i>помехи (подавление помехи)</i>	147
ex_12b: <i>Одинокое радиоимпульс на фоне синусоидальной</i>	
<i>помехи (выделение полезного сигнала)</i>	151
ex_13: <i>Сумма двух амплитудно-модулированных</i>	
<i>колебаний</i>	154
Литература	158
Указатель функций MATLAB	159

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сегодня электроника является существенной, если не главной, составной частью аппаратуры или оборудования, используемых при проведении экспериментальных исследований в любой области. Вот почему учебный курс основ электроники уже на начальной стадии стал неотъемлемым элементом физико-технического образования.

На протяжении последних двух десятилетий в Московском физико-техническом институте получила развитие и продемонстрировала высокую эффективность такая форма обучения, как *лекционно-лабораторные занятия* со студентами младших курсов.

Занятия проводятся с половиной академической учебной группы (8–12 человек) еженедельно в течение учебного года. Одна треть времени, отведенного на занятие (5–6 учебных часов), – это изложение лектором определенного объема теоретических сведений в непосредственном контакте (диалоге) со слушателями, который позволяет лектору убеждаться в доступности материала и первоначальном усвоении его учащимися. Затем студенты выполняют практические лабораторные упражнения на ту же тему, о которой шла речь в первой части занятия. Индивидуальный характер работы каждого студента в лаборатории и большая степень самостоятельности, предусмотренная заданием, обеспечивают одновременно успешное закрепление теории в сознании учащегося и приобретение им необходимых навыков проведения лабораторного эксперимента.

Содержание учебных курсов электроники год от года медленно обновляется, и к настоящему времени почти половина курса бывает посвящена цифровым методам, включая основы цифровой электроники, программирование матричных интегральных схем, логику функционирования и практические применения микроконтроллеров.

Цифровая обработка сигналов – новая тема, рассчитанная на два 6-часовых учебных занятия. Предполагается, что к моменту ее изучения в конце весеннего семестра студентами уже пройдены соответствующие разделы математического анализа и теории функций комплексного переменного.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих случаях бывает желательным проследить за тем, как изменяется во времени тот или иной физический параметр, который преобразуется датчиком в непрерывный электрический сигнал. Запись такого сигнала на бумажную или магнитную ленту для последующего анализа давно ушла в прошлое (за исключением, разве что, электрокардиограмм и тому подобного). Очевидным сегодня и самым естественным является сохранение в электронной памяти значений сигнала в отдельные моменты времени для последующей их обработки программными средствами.

Спрашивается, как часто надо регистрировать значения сигнала, чтобы не потерять в нем ничего существенного?

Ответ на этот вопрос дает так называемая теорема отсчетов, с которой начинается данное пособие. Помимо использования выборочных значений для непосредственного наблюдения временной формы сигнала многое о свойствах сигнала можно узнать из его спектра. Переходу из временной области в частотную в отношении набора числовых значений сигнала посвящена первая часть пособия, где вводится представление о дискретном преобразовании Фурье. Видоизменение спектра сигнала и обратный переход ко времени позволяют реализовать желаемое воздействие на форму сигнала, чтобы обнаружить, выявить или подчеркнуть его особенности.

Альтернативой преобразованию Фурье, которое оперирует каждый раз с совокупностью временных выборок в пределах определенного отрезка времени, является «конвейерный» принцип преобразования сигнала устройством, реагирующим на каждое новое значение входного сигнала выработкой очередного значения сигнала на выходе. Так действуют цифровые фильтры, осуществляющие преобразование временной формы сигнала, эквивалентное тому, которое происходит с непрерывным сигналом при прохождении через аналоговый фильтр-прототип.

Применение дискретного преобразования Фурье и цифровых фильтров оказывается эффективным только тогда, когда можно пренебрегать частью спектра обрабатываемого сигнала за пределами частоты, вдвое меньшей частоты дискретизации.

Часть I

Дискретизация по времени и по частоте. Быстрое преобразование Фурье

1.1. Теорема о выборках (Котельникова–Шеннона)

Утверждение 1.1

Вещественный сигнал $x(t)$ [В], спектр которого $S(j2\pi f)$ [В·с] не содержит частот выше $f_{\text{гр}}$ [Гц], может быть полностью восстановлен по отсчетным значениям (выборкам) сигнала, взятым через промежутки времени, равные $1/(2f_{\text{гр}})$ [с] (рис. 1.1.1; $\omega = 2\pi f$, размерность ω [рад/с]).

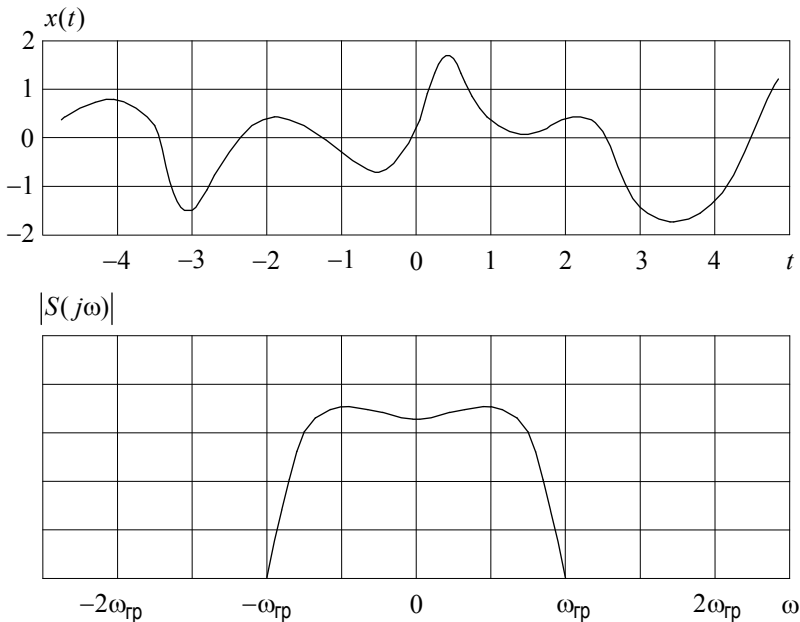


Рис. 1.1.1

Утверждение 1.1 носит название теоремы о выборках, теоремы Котельникова, теоремы Шеннона.

Граничную частоту $f_{\text{гр}}$ ($\omega_{\text{гр}}$) называют также *частотой Найквиста*, а частоту, равную $2f_{\text{гр}}$, – частотой дискретизации по времени.

Прежде чем перейти к доказательству утверждения 1.1, напомним определения, относящиеся к преобразованию Фурье и к рядам Фурье, и условимся в отношении обозначений:

$$S(j\omega) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.1.1)$$

– прямое преобразование Фурье,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.1.2)$$

– обратное преобразование Фурье.

Строго говоря, эти два соотношения справедливы, если сигнал $x(t)$ абсолютно интегрируем и для него выполнены условия Дирихле (на любом конечном интервале времени $x(t)$ не имеет разрывов с уходящими в бесконечность ветвями и число скачков и экстремумов конечно).

Если сигнал $x(t)$ периодический с периодом T , то есть $x(t + m \cdot T) = x(t)$, где m – целое число, и для него выполнены условия Дирихле, то

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t}, \quad (1.1.3)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt. \quad (1.1.4)$$

Доказательство утверждения 1.1

Согласно условию теоремы

$$S(j\omega) = \begin{cases} \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt & \text{при } \omega \in [-\omega_{гр}, \omega_{гр}), \\ 0 & \text{при } \omega < -\omega_{гр} \text{ и } \omega \geq \omega_{гр}. \end{cases}$$

Продолжим $S(j\omega)$ периодически вдоль оси частот ω с периодом $2\omega_{гр}$ (рис. 1.1.2) и представим периодически продолженный спектр $S^\wedge(j\omega)$ в виде ряда Фурье:

$$S^\wedge(j\omega) = \sum_{k=-T}^T D_k e^{jk \frac{2\pi}{2\omega_{гр}} \omega}, \quad (1.1.5)$$

где

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{1}{2\omega_{гр}} \int_{-\omega_{гр}}^{\omega_{гр}} S^\wedge(j\omega) e^{-jk \frac{2\pi}{2\omega_{гр}} \omega} d\omega = \\ &= \frac{2\pi}{2\omega_{гр}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{гр}}^{\omega_{гр}} S(j\omega) e^{j\omega(-k\Delta t)} d\omega = \frac{\pi}{\omega_{гр}} x(-k\Delta t), \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega_{гр}}. \end{aligned}$$

Подставим (1.1.5) в (1.1.2), имея в виду, что в пределах $[-\omega_{гр}, \omega_{гр})$ справедливо равенство $S(j\omega) = S^\wedge(j\omega)$; получим

$$|S^\wedge(j\omega)|$$

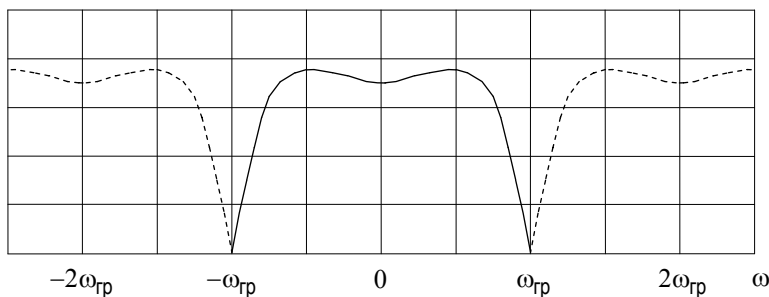


Рис. 1.1.2

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} \sum_{k=-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\pi}{\omega_{\text{rp}}} x(-k\Delta t) e^{+jk\omega\Delta t} e^{j\omega t} d\omega = \\
&= \frac{1}{2\omega_{\text{rp}}} \sum_{k=-\Gamma}^{\Gamma} x(k\Delta t) \int_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} e^{j\omega(t-k\Delta t)} d\omega = \\
&= \frac{1}{2\omega_{\text{rp}}} \sum_{k=-\Gamma}^{\Gamma} x(k\Delta t) \left(\frac{1}{j(t-k\Delta t)} e^{j\omega(t-k\Delta t)} \right) \bigg|_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} = \\
&= \sum_{k=-\Gamma}^{\Gamma} x(k\Delta t) \frac{1}{\omega_{\text{rp}}(t-k\Delta t)} \cdot \frac{e^{j\omega_{\text{rp}}(t-k\Delta t)} - e^{-j\omega_{\text{rp}}(t-k\Delta t)}}{2j} = \\
&= \sum_{k=-\Gamma}^{\Gamma} x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_{\text{rp}}(t-k\Delta t)}{\omega_{\text{rp}}(t-k\Delta t)}. \tag{1.1.6}
\end{aligned}$$

Конец доказательства утверждения 1.1

Комментарий к утверждению 1.1

1. В (1.1.6) сигнал $x(t)$ представлен в виде суммы взвешенных и сдвинутых во времени функций вида $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$; в той точке на оси времени, где одна из этих функций равна 1 (например, при $t = k'\Delta t$), все другие функции (соответствующие $k \neq k'$) равны 0.
2. Интерполяционная формула (1.1.6) позволяет точно восстанавливать значение $x(t)$ **в любой момент времени**, но для этого нужно знать бесконечное число выборочных значений $x(t)$ на всей оси времени от $-\Gamma$ до $+\Gamma$.

3. Условия теоремы выполнены при любом $\Delta t \leq \frac{\pi}{\omega_{\text{гр}}}$;

знак $<$ при этом эквивалентен принятию за границу спектра частоты, большей $\omega_{\text{гр}}$.

4. На практике ни у какого реального физического сигнала $x(t)$ спектр $S(j\omega)$ не бывает ограниченным. Обычно он имеет «хвосты», уходящие на бесконечность (рис. 1.1.3, сплошная линия). Чтобы воспользоваться все же интерполяционной формулой (1.1.6), граничные частоты $-\omega'_{\text{гр}}$ и $\omega'_{\text{гр}}$ назначаются из соображений относительно малой площади под «отбрасываемыми» хвостами. Если теперь брать выборки с интервалом $\Delta t = 1/(2f'_{\text{гр}})$, $f'_{\text{гр}} = \omega'_{\text{гр}}/(2\pi)$, то по формуле (1.1.6) будет восстановлен сигнал $x'(t)$, спектр которого располагается в интервале $[-\omega'_{\text{гр}}, \omega'_{\text{гр}})$ и равен сумме части спектра $S(j\omega)$ исходного сигнала, приходящейся на указанный интервал частот, с попадающими в этот интервал хвостами **всех** копий $S(j\omega)$, возникающих в результате периодического повторения $S(j\omega)$ вдоль оси частот с периодом $2\omega'_{\text{гр}}$ (на рис. 1.1.3 пунктиром показаны части соседних копий слева и справа от основного спектра). В результате сиг-

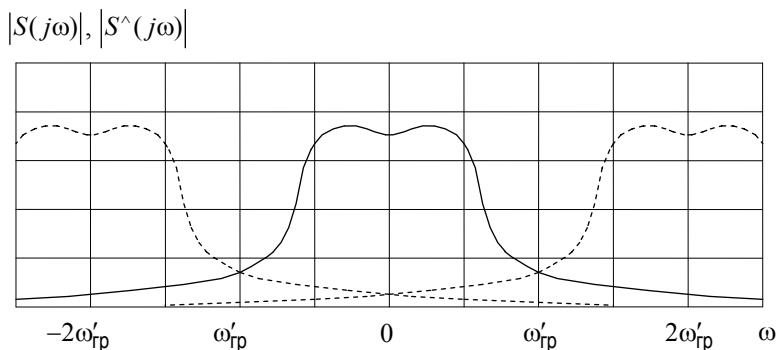


Рис. 1.1.3.

нал $x'(t)$ будет совпадать с $x(t)$ в моменты взятия выборок, но будет отличаться от $x(t)$ на интервалах между моментами взятия выборок. Сигнал $x'(t)$ оказывается «более медленным» (изменяющимся более плавно), поскольку в его спектре нет высокочастотных составляющих сигнала $x(t)$, содержащихся в «отбрасываемых хвостах» спектра $S(j\omega)$. Отличие $x'(t)$ от $x(t)$ тем меньше, чем большей выбирается граничная частота $\omega'_{\text{гр}}$ и чем меньше площадь в отбрасываемых хвостах.

1.2. Теорема о выборках вдоль оси частот

Благодаря известным свойствам симметрии функций $x(t)$ и $S(j\omega)$, образующих пару преобразования Фурье, оказывается справедливым утверждение, аналогичное утверждению 1.1, а именно

Утверждение 1.2

Если сигнал $x(t)$ ограничен во времени интервалом $[0, T)$ (то есть равен нулю вне этого интервала; T — длительность сигнала [с]), то его спектр $S(j\omega)$ может быть полностью восстановлен по отсчетным значениям (выборкам), взятым вдоль оси частот ω через равные промежутки длины $\Delta\omega = 2\pi/T$ [рад/с].

Доказательство этого утверждения может быть проведено формально путем повторения доказательства утверждения 1.1, если в приведенных в 1.1 рассуждениях **одновременно** выполнить замену переменных согласно следующему правилу:

время t [с]	заменяется на	частоту ω [рад/с]
частота ω [рад/с]	заменяется на	время t [с]
интервал частот, в пределах которого спектр сигнала не равен нулю, $2\omega_{\text{гр}}$ [рад/с]	заменяется на	длительность сигнала T [с]
интервал взятия выборок по оси времени $\Delta t = \pi / \omega_{\text{гр}}$ [с]	заменяется на	интервал взятия выборок по оси частот $\Delta \omega = 2\pi / T$ [рад/с]

Результатом является интерполяционная формула

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} S(jn\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}. \quad (1.2.1)$$

Комментарий к утверждению 1.2

- 1) Замечания, сделанные в отношении утверждения 1.1, в принципе приложимы и к утверждению 1.2. Следует особо подчеркнуть, что спектр $S(j\omega)$ сигнала $x(t)$ конечной длительности имеет бесконечную протяженность.
- 2) Вывод соотношения (1.2.1) предполагает периодическое повторение сигнала $x(t)$ вдоль оси времени с периодом, равным длительности сигнала T . Поэтому коэффициенты ряда Фурье, посредством которого представляется это периодическое продолжение, образуют линейчатый спектр, состоящий из гармоник, кратных «основной частоте» $2\pi/T$. Амплитуды гармоник линейчатого спектра с точностью до коэффициента $1/T$ совпадают со значениям выборок $S(jn\Delta\omega)$ сплошного спектра $S(j\omega)$ «оди-

ночного импульса», каким является исходный сигнал $x(t)$, равный нулю за пределами интервала $[0, T)$ (рис. 1.2.1).

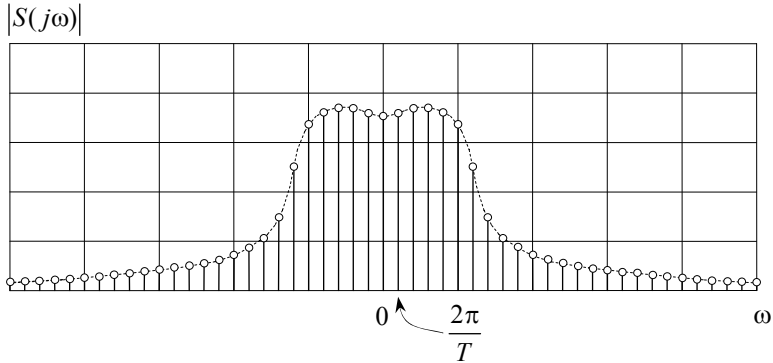


Рис. 1.2.1

Непосредственное доказательство утверждения 1.2

Согласно условию теоремы

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega & \text{при } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right), \\ 0 & \text{при } t < -\frac{T}{2} \text{ и } t \geq \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Продолжим $x(t)$ периодически вдоль оси времени t с периодом T и представим периодически продолженный сигнал $\hat{x}(t)$ в виде ряда Фурье:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} E_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t},$$

где

$$E_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \hat{x}(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j(n\Delta\omega)t} dt = \frac{1}{T} S(n\Delta\omega).$$

Подставляя (1.2.2) в (1.1.1) и имея в виду, что в пределах $[-T/2, T/2]$ справедливо равенство $x(t) = x^\wedge(t)$, получим

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} \frac{1}{T} S(n\Delta\omega) e^{-j(n\Delta\omega)t} e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} S(n\Delta\omega) \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(\omega - n\Delta\omega)t} dt = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} S(n\Delta\omega) \left(-\frac{1}{j(\omega - n\Delta\omega)} e^{-j(\omega - n\Delta\omega)t} \right) \Big|_{-T/2}^{T/2} = \\
 &= \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} S(n\Delta\omega) \left[-\frac{1}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)} \cdot \frac{e^{-j(\omega - n\Delta\omega)\frac{T}{2}} - e^{j(\omega - n\Delta\omega)\frac{T}{2}}}{2j} \right] = \\
 &= \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} S(jn\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}. \tag{1.2.3}
 \end{aligned}$$

Конец доказательства утверждения 1.2

1.3. Сигнал с N степенями свободы

При регистрации и обработке данных в физическом эксперименте всегда приходится иметь дело с сигналом $x(t)$ конечной длительности T . Когда не представляется возможным исследовать спектр $S(j\omega)$ такого сигнала аналитически, приходится на основании тех или иных соображений ограничиться конечным интервалом частот $[-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}]$, пренебрегая частью спектра, лежащей за пределами этого интервала.

Имея в виду применение методов цифровой электроники для регистрации данных и последующую их обработку программны-

ми средствами, естественно выбрать интервал Δt , с которым будут браться выборки сигнала $x(t)$ вдоль оси времени, равным $1/(2f_{\text{гр}}) = \pi/\omega_{\text{гр}}$. Тогда полное число временных выборок будет равно $N = T/\Delta t = 2Tf_{\text{гр}}$. С другой стороны, согласно теореме о выборках вдоль оси частот для описания спектра $S(j\omega)$ сигнала $x(t)$ длительности T достаточно взять выборочные значения спектра $S(j\omega)$, отстоящие одно от другого по оси частот на $\Delta\omega = 2\pi/T$. При этом полное число частотных выборок также равно N :

$$\frac{2\omega_{\text{гр}}}{\Delta\omega} = \frac{\frac{2\pi}{\Delta t}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{\Delta t} = N.$$

Про сигнал, полностью задаваемый N числовыми значениями (во временной или в частотной области), говорят как о сигнале с N степенями свободы.

Ниже речь пойдет о том, как связаны между собой значения выборок, которые берутся вдоль оси времени и вдоль оси частот.

Необходимое уточнение

Совокупность частотных выборок состоит из $2N$ числовых значений, поскольку каждая из частотных выборок представляет собой комплексное число. Однако в случае вещественного сигнала $x(t)$ значения $S(j\omega')$ для $\omega' \in [-\omega_{\text{гр}}, 0)$ являются комплексно-сопряженными по отношению к значениям $S(j\omega'')$ для $\omega'' \in [0, \omega_{\text{гр}})$ при $\omega' = -\omega''$. Поэтому число независимых значений, полностью задающих спектр рассматриваемого сигнала, равно N .

Непосредственный переход от дискретного сигнала
 $x(k\Delta t)$, $k\Delta t \in [0, T)$, **к дискретному спектру**
 $S(jn\Delta\omega)$, $n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{rp}}, \omega_{\text{rp}})$

По условиям задачи

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_{\text{rp}}(t - k\Delta t)}{\omega_{\text{rp}}(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{T}{N} = \frac{1}{2f_{\text{rp}}} = \frac{\pi}{\omega_{\text{rp}}}. \quad (1.3.1)$$

Подставим $x(t)$ в (1.1.1):

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_{\text{rp}}(t - k\Delta t)}{\omega_{\text{rp}}(t - k\Delta t)} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \underbrace{\int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \omega_{\text{rp}}(t - k\Delta t)}{\omega_{\text{rp}}(t - k\Delta t)} e^{-j\omega t} dt}_{I_1} = \dots \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Произведем в I_1 замену переменных: $t - k\Delta t = t^*$, $dt = dt^*$,
 $t = t^* + k\Delta t$. Получим

$$I_1 = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \omega_{\text{rp}} t^*}{\omega_{\text{rp}} t^*} e^{-j\omega t^*} e^{-j\omega k\Delta t} dt^* = e^{-j\omega k\Delta t} \underbrace{\int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \omega_{\text{rp}} t}{\omega_{\text{rp}} t} e^{-j\omega t} dt}_{I_2}. \quad (1.3.3)$$

Чтобы найти I_2 , решим другую задачу. Пусть

$$\tilde{S}(j\omega) = \begin{cases} A \cdot \frac{\pi}{\omega_{\text{rp}}} = A \cdot \Delta t & \text{при } -\omega_{\text{rp}} \leq \omega < \omega_{\text{rp}}, \\ 0 & \text{при } \omega < -\omega_{\text{rp}} \text{ и } \omega \geq \omega_{\text{rp}} \end{cases}$$

(размерность $\tilde{S}(j\omega)$ [В·с]). Тогда

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \tilde{S}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} A \frac{\pi}{\omega_{\text{rp}}} \int_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\omega_{\text{rp}}} \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} = \\
&= A \frac{e^{j\omega_{\text{rp}}t} - e^{-j\omega_{\text{rp}}t}}{2j\omega_{\text{rp}}t} = A \frac{\sin \omega_{\text{rp}}t}{\omega_{\text{rp}}t} \quad (1.3.4)
\end{aligned}$$

(размерность $\tilde{x}(t)$ [В]). В силу взаимной однозначности преобразования Фурье

$$I_2 = \begin{cases} \Delta t & \text{при } \omega \in [-\omega_{\text{rp}}, \omega_{\text{rp}}), \\ 0 & \text{вне интервала } [-\omega_{\text{rp}}, \omega_{\text{rp}}) \end{cases} \quad (1.3.5)$$

(размерность I_2 [с]).

Подставляем (1.3.5) в (1.3.3):

$$I_1 = \Delta t \cdot e^{-j\omega k \Delta t} \text{ при } \omega \in [-\omega_{\text{rp}}, \omega_{\text{rp}}).$$

Следовательно, выкладки, прерванные в (1.3.2), можно продолжить следующим образом:

$$S(j\omega) = \dots = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-j\omega k \Delta t} \text{ при } \omega \in [-\omega_{\text{rp}}, \omega_{\text{rp}}). \quad (1.3.6)$$

$$\text{Для } \omega = n \cdot \Delta\omega, \text{ где } \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t} = \frac{2\pi}{N \cdot [1/(2f_{\text{rp}})]} = \frac{2\omega_{\text{rp}}}{N},$$

$$S(jn\Delta\omega) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jnk \cdot \Delta\omega \cdot \Delta t}, \quad n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{rp}}, \omega_{\text{rp}}). \quad (1.3.7)$$

$$\text{Но } \Delta\omega \cdot \Delta t = \frac{2\omega_{\text{rp}}}{N} \cdot \frac{\pi}{\omega_{\text{rp}}} = \frac{2\pi}{N}, \text{ поэтому}$$

$$S(jn\Delta\omega) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}, \quad n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{rp}}, \omega_{\text{rp}}). \quad (1.3.8)$$

Периодичность $S(jn\Delta\omega)$ по n с периодом N

Пусть $n = n_0 + m \cdot N$, m – целое, тогда

$$\begin{aligned} S(jn\Delta\omega) &= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jk(n_0 \frac{2\pi}{N} + mN \frac{2\pi}{N})} = \\ &= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jkn_0 \frac{2\pi}{N}} \underbrace{e^{-jkm2\pi}}_{=1} = S(jn_0\Delta\omega). \end{aligned}$$

С учетом этого под дискретным спектром в рассматриваемом случае понимают совокупность значений

$$S(jn\Delta\omega) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.3.9)$$

считая по умолчанию, что величины $S(jn\Delta\omega)$ с индексами

$n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1$ отображают часть спектра, относящуюся к отрицательным частотам.

Непосредственный переход от дискретного спектра

$S(jn\Delta\omega)$, $n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}]$, к дискретному сигналу

$x(k\Delta t)$, $k\Delta t \in [0, T)$

По теореме о выборках вдоль оси частот

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}, \quad (1.3.10)$$

где $n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}]$, $\Delta\omega = \frac{2\omega_{\text{гр}}}{N} = \frac{4\pi f_{\text{гр}}}{T / \Delta t} = \frac{2\pi}{T} \underbrace{2f_{\text{гр}}\Delta t}_{=1}$. Подставим

$S(j\omega)$ в (1.1.2):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)} e^{j\omega t} d\omega}_{I'_1} = \dots \quad (1.3.11)
 \end{aligned}$$

Произведем в I'_1 замену переменных: $\omega - n\Delta\omega = \omega^*$, $d\omega = d\omega^*$, $\omega = \omega^* + n\Delta\omega$. Получим

$$\begin{aligned}
 I'_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \omega^* \frac{T}{2}}{\omega^* \frac{T}{2}} e^{j\omega^* t} e^{jn\Delta\omega t} d\omega^* = \\
 &= e^{jn\Delta\omega t} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \omega^* \frac{T}{2}}{\omega^* \frac{T}{2}} e^{j\omega^* t} d\omega^*}_{I'_2}. \quad (1.3.12)
 \end{aligned}$$

Чтобы найти I'_2 , решим другую задачу. Пусть

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} A & \text{при } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}), \\ 0 & \text{при } t < -\frac{T}{2} \text{ и } t \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$

(размерность $\tilde{x}(t)$ [В]). Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{S}(j\omega) &= \int_{-T}^T \tilde{x}(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = AT \frac{e^{-j\omega \frac{T}{2}} - e^{j\omega \frac{T}{2}}}{2 \cdot (-j\omega \frac{T}{2})} = AT \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}}\end{aligned}\quad (1.3.13)$$

(размерность $\tilde{S}(j\omega)$ [В·с]). В силу взаимной однозначности преобразования Фурье

$$I'_2 = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{при } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}), \\ 0 & \text{вне интервала } [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \end{cases}\quad (1.3.14)$$

(размерность I'_2 [с⁻¹]).

Подставляем (1.3.14) в (1.3.12):

$$I'_1 = \frac{1}{T} e^{-jn\Delta\omega t} \text{ при } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}).$$

Следовательно, выкладки, прерванные в (1.3.11), можно продолжить следующим образом:

$$x(t) = \dots = \frac{1}{T} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \text{ при } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$$

и в силу периодичности $S(jn\Delta\omega)$ по n с периодом N

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \text{ при } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}).\quad (1.3.15)$$

Замечание. Вывод соотношения (1.3.15) привел нас к сигналу $x(t)$, отличающемуся от исходного сигнала сдвигом

начала отсчета времени на середину интервала $[0, T)$. Как станет ясно чуть ниже, это оказывается не существенным.

Для $t = k \cdot \Delta t$, где $\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{\pi}{\omega_{\text{гр}}} = \frac{1}{2f_{\text{гр}}}$,

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jnk \cdot \Delta\omega \cdot \Delta t} \text{ при } k\Delta t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right). \quad (1.3.16)$$

Но $\Delta\omega \cdot \Delta t = \frac{2\omega_{\text{гр}}}{N} \cdot \frac{\pi}{\omega_{\text{гр}}} = \frac{2\pi}{N}$, поэтому

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jnk \frac{2\pi}{N}} \text{ при } k\Delta t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right). \quad (1.3.17)$$

Периодичность $x(k\Delta t)$ по k с периодом N

Пусть $k = k_0 + m \cdot N$, m – целое, тогда

$$\begin{aligned} x(k\Delta t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jn(k_0 \frac{2\pi}{N} + mN \frac{2\pi}{N})} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jk_0 n \frac{2\pi}{N}} \underbrace{e^{jnm2\pi}}_{=1} = x(k_0\Delta t). \end{aligned}$$

Из этого следует, что выражение (1.3.17) остается справедливым, если часть значений $x(k\Delta t)$ с $k\Delta t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right)$ «перенести» во вторую половину отрезка $[0, T)$. Другими словами,

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jnk \frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.3.18)$$

так что теперь речь снова идет о временных выборках $x(k\Delta t)$ исходного сигнала $x(t)$, заданного на интервале $[0, T)$.

1.4. Дискретное преобразование Фурье

Результатом рассмотрения свойств сигнала, ограниченного по времени и по частоте, стали соотношения (1.3.9) и (1.3.18), описывающие преобразование совокупности временных выборок $\{x(k\Delta t), k = 0, 1, \dots, N-1\}$ в совокупность частотных выборок $\{S(jn\Delta\omega), n = 0, 1, \dots, N-1\}$ и обратно:

$$S(jn\Delta\omega) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.4.1)$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.4.2)$$

где $\Delta t = \frac{T}{N}$ и $\Delta\omega = \frac{2\omega_{\text{гр}}}{N}$, T – длительность сигнала, а $[-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}]$ – интервал частот, которым ограничен спектр этого сигнала.

Достоинством таких преобразований является их взаимная однозначность. Однако было бы неправильным обойти вниманием их несовершенство.

Как было объяснено в комментарии к утверждению 1.1, знание временных выборок в данном случае позволяет получить лишь приближенное представление о промежуточных значениях непрерывной функции $x(t)$ в точках на оси времени между моментами взятия выборок. Спектр сигнала $x'(t)$, восстанавливаемого по формуле (1.3.1), является суммой части спектра $S(j\omega)$ исходного сигнала $x(t)$, попадающей в интервал $[-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}]$, с отбрасываемыми хвостами всех копий $S(j\omega)$ при периодическом продолжении $S(j\omega)$ влево и вправо вдоль оси частот с периодом $2\omega_{\text{гр}}$.

В еще большей степени нас должно смущать использование выборочных значений $S(jn\Delta\omega)$ спектральной плотности сигнала $x(t)$, поскольку требования, предъявляемые к сигналу (абсолютная интегрируемость и выполнение условий Дирихле), оказываются слишком строгими, и на практике им бывает трудно удовлетворить. Простой пример: пусть $x(t)$ – гармоническое колебание частоты ω , причем на интервале $[0, T)$ укладывается целое число периодов этого колебания; тогда при периодическом повторении сигнала $x(t)$ с периодом T мы имеем на всей оси времени синусоиду частоты ω , и спектральная плотность такого сигнала состоит из двух δ -функций на частотах $-\omega$ и ω ; очевидно, что соотношение (1.4.1) ни при каких обстоятельствах такого результата нам не даст.

Наконец, тот факт, что при дискретизации спектра всегда имеется в виду периодическое повторение сигнала, заданного на интервале $[0, T)$ (см. 1.2), подталкивает нас к тому, чтобы отказаться от обращения к спектральной плотности $S(j\omega)$ в пользу перехода к линейчатому спектру, компоненты которого были бы амплитудами гармоник соответствующего ряда Фурье. Поэтому принято вместо выборочных значений $S(jn\Delta\omega)$ (с размерностью $[B \cdot c]$, или, что то же самое, $[B/Гц]$) использовать отсчеты

$$S_n = \frac{1}{\Delta t} S(jn\Delta\omega)$$

(с размерностью $[B]$), а временные отсчеты переобозначить:

$$x_k = x(k\Delta t).$$

В результате подстановки $S(jn\Delta\omega) = \Delta t \cdot S_n$ равенства (1.4.1) и (1.4.2) переходят в

$$S_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jnk \frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.4.3)$$

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{jnk \frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.4.4)$$

Пара соотношений (1.4.3) и (1.4.4) носит название дискретного преобразования Фурье (ДПФ); совокупностью равенств (1.4.3) задается прямое дискретное преобразование Фурье, а равенствами (1.4.4) – обратное дискретное преобразование Фурье.

В общем случае дискретное преобразование Фурье применяется к произвольным ограниченным числовым наборам $\{x_k, k = 0, 1, \dots, N-1\}$ и $\{S_n, n = 0, 1, \dots, N-1\}$ любой физической природы. Но мы будем по-прежнему считать величины x_k временными выборками сигнала $x(t)$, а S_n – амплитудами гармоник линейчатого спектра этого сигнала (в нашем случае те и другие имеют размерность [В]). Отсутствие в формулах (1.4.3) и (1.4.4) какого-либо реального временного параметра T или Δt (размерности [с]) означает, что частота дискретизации вдоль оси времени, равная $1/\Delta t$, принята равной 1.

Из объяснений, приведенных в 1.3, следует, что выражения для S_n и x_k , задаваемые формулами (1.4.3) и (1.4.4), не теряют смысла при n и/или k , выходящими за пределы интервала от 0 до $N-1$, в силу периодичности S_n и x_k по n и k соответственно с периодом N .

1.5. Быстрое преобразование Фурье

В настоящее время получили большое распространение специальные алгоритмы расчета N -точечного дискретного преобразования Фурье, позволяющие значительно сократить время, занимаемое этой процедурой на компьютере, по сравнению с вычислениями непосредственно по формулам (1.4.3) и (1.4.4). Такого рода вычислительные алгоритмы носят название быстрого преобразования Фурье (БПФ; Fast Fourier Transform, FFT). В частности, в системе MATLAB реализован так называемый принцип «прореживания по времени» («прореживания по частоте»), наиболее эффективный в случае, когда число N равно целой степени 2.

Объясним, в чем заключается этот алгоритм, на примере прямого дискретного преобразования Фурье набора исходных величин $\{x_k, k = 0, 1, \dots, N-1\}$ в результирующие значения $\{X_n, n = 0, 1, \dots, N-1\}$ согласно (1.4.3):

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.5.1)$$

Предполагая число N равным целой степени 2, разобьем **на первом шаге** последовательность x_k на две последовательности: последовательность $\{y_m, m = 0, 1, \dots, (N/2)-1\}$ чисел x_k с четными номерами и последовательность $\{z_m, m = 0, 1, \dots, (N/2)-1\}$ чисел x_k с нечетными номерами:

$$y_m = x_{2m}, \quad z_m = x_{2m+1}, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1.$$

Пусть $\{Y_n, n = 0, 1, \dots, (N/2)-1\}$ и $\{Z_n, n = 0, 1, \dots, (N/2)-1\}$ – прямые $(N/2)$ -точечные ДПФ последовательностей $\{y_m\}$ и $\{z_m\}$ соответственно:

$$\begin{cases} Y_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} y_m e^{-jmn \cdot \frac{2\pi}{N/2}}, & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1; \\ Z_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} z_m e^{-jmn \cdot \frac{2\pi}{N/2}}, & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Введем следующие обозначения:

$$w_0 = e^{-j \frac{2\pi}{N}} \quad (w_0 - \text{корень } N\text{-й степени из } 1!), \quad (1.5.3)$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k w_0^{kn}, \quad (1.5.4)$$

$$Y_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} y_m w_0^{2mn}, \quad (1.5.5)$$

$$Z_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} z_m w_0^{2mn}. \quad (1.5.6)$$

Подчеркнем еще раз, что величины X_n определены в (1.5.4) для $n = 0, 1, \dots, N-1$, а величины Y_n и Z_n определены в (1.5.5) и (1.5.6) только для $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$, поэтому для выражения X_n через Y_n и Z_n при $n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1, \dots, N-1$ нам чуть ниже потребуются дополнительные преобразования:

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} w_0^{2mn} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} w_0^{(2m+1)n} = \\ &= \begin{cases} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_m w_0^{2mn} + w_0^n \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z_m w_0^{2mn} = \\ = Y_n + w_0^n \cdot Z_n, & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1, \\ \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_m w_0^{2mn} + w_0^n \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z_m w_0^{2mn}, \\ n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (1.5.7) \end{aligned}$$

Степени w_0 , фигурирующие в нижней строке соотношения (1.5.7), при $n \geq \frac{N}{2}$ можно представить в виде

$$w_0^n = w_0^{n-\frac{N}{2}} \cdot w_0^{\frac{N}{2}} = w_0^{n-\frac{N}{2}} \underset{=-1}{e^{-j\pi}} = -w_0^{n-\frac{N}{2}}; \quad (1.5.8)$$

$$w_0^{2mn} = (w_0^n)^{2m} = \left(-w_0^{n-\frac{N}{2}} \right)^{2m} = w_0^{2m\left(n-\frac{N}{2}\right)}. \quad (1.5.9)$$

Подставляя (1.5.8) и (1.5.9) в нижнюю строку (1.5.7), получим

$$X_n = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_m w_0^{2mn} + w_0^n \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z_m w_0^{2mn} = \\ = Y_n + w_0^n \cdot Z_n, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_m w_0^{2m\left(n-\frac{N}{2}\right)} - w_0^{n-\frac{N}{2}} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z_m w_0^{2m\left(n-\frac{N}{2}\right)} = \\ = Y_{n-\frac{N}{2}} - w_0^{n-\frac{N}{2}} \cdot Z_{n-\frac{N}{2}}, \quad n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (1.5.10)$$

Рис. 1.5.1 служит графической иллюстрацией того, что делается **на первом шаге** алгоритма «прореживания по времени» согласно (1.5.10): нахождение всей совокупности значений N -точечного ДПФ на этом шаге сводится к выполнению двух $(N/2)$ -точечных ДПФ с входными данными с четными и нечетными номерами и к последующему сложению и вычитанию результатов этих $(N/2)$ -точечных ДПФ. Данные, получаемые на выходе второго из этих ДПФ, умножаются на коэффициент, зависящий от номера n результата последней ДПФ, $n = 0, 1, \dots, (N/2) - 1$; на рис. 1.5.1 значение w равно w_0 . Более точно смысл операции сложения/вычитания, изображенный на рисунке кружком со знаком \pm , объясняется позднее.

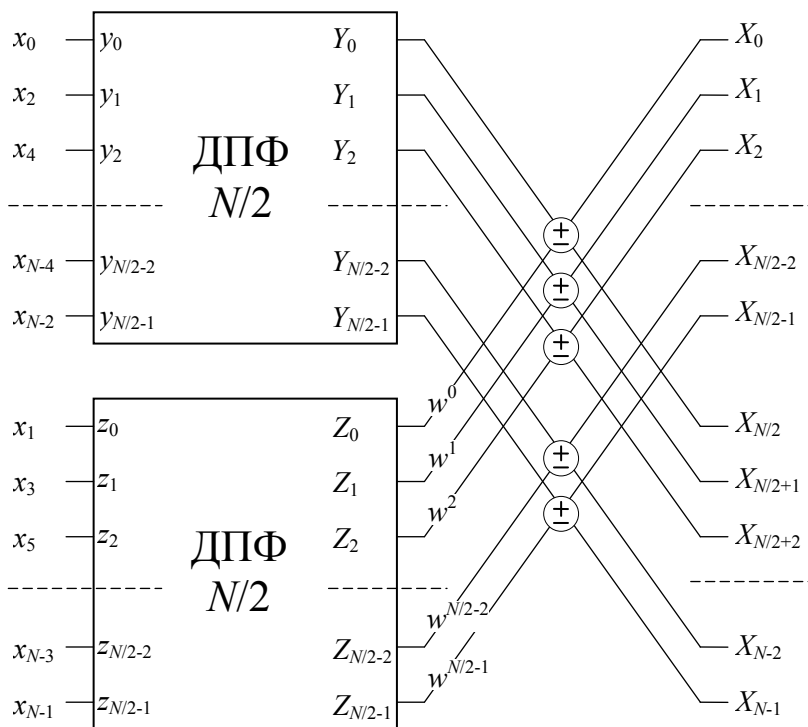


Рис. 1.5.1

На втором шаге осуществляется подобный переход в каждом из блоков, реализующих $(N/2)$ -точечное ДПФ, к двум ДПФ с вдвое меньшим числом точек с последующим сложением/вычитанием результатов последних ДПФ, для чего каждая из последовательностей $\{y_m\}$ и $\{z_m\}$ разбивается на подпоследовательности чисел с четными и нечетными номерами и в отношении этих подпоследовательностей реализуются $(N/4)$ -точечные ДПФ. На рис. 1.5.2 показано на примере одного из $(N/2)$ -точечных ДПФ, возникших на предыдущем шаге, что совокупность действий **на втором шаге** точно совпадает с тем, что

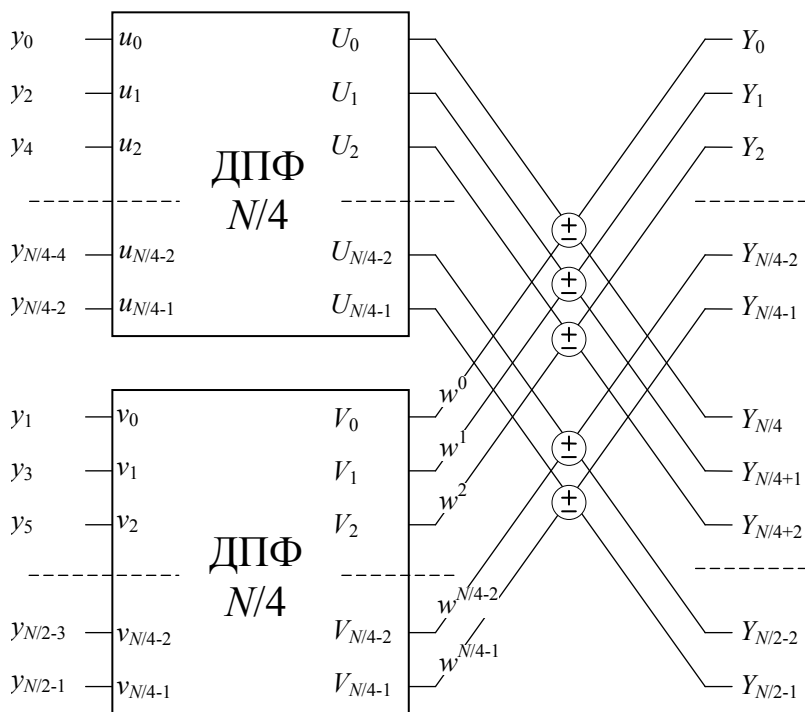


Рис. 1.5.2

делалось ранее, за исключением множителя w , который **на втором шаге** равен $w_1 = w_0^2$:

$$u_m = y_{2l}, \quad v_m = y_{2l+1} \quad (l, m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1),$$

$$U_m = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} u_l e^{-jlm \cdot \frac{2\pi}{(N/4)}} = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} u_l w_0^{4lm} = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} u_l w_1^{2lm}, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1,$$

$$V_m = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} v_l e^{-jlm \cdot \frac{2\pi}{(N/4)}} = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} v_l w_0^{4lm} = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} v_l w_1^{2lm}, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1,$$

$$Y_m = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} u_l w_1^{2lm} + w_1^m \cdot \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} v_l w_1^{2mn} = \\ = U_m + w_1^m \cdot V_m, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1, \\ \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} u_l w_0^{2l\left(m-\frac{N}{4}\right)} - w_1^{m-\frac{N}{4}} \cdot \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} v_l w_1^{2l\left(m-\frac{N}{4}\right)} = \\ = U_{m-\frac{N}{4}} - w_1^{m-\frac{N}{4}} \cdot V_{m-\frac{N}{4}}, \quad m = \frac{N}{4}, \frac{N}{4}+1, \dots, \frac{N}{2}-1. \end{cases} \quad (1.5.11)$$

Целиком «прореживание по времени» (то есть разбиение на последовательности чисел с четными и нечетными номерами и переход к ДПФ со все меньшим числом точек) при N , равном целой степени 2, выполняется за $\log_2 N$ шагов и заканчивается 2-точечным ДПФ. На каждом шаге совершается $N/2$ «элементарных действий» с двумя аргументами и двумя результатами; про одно такое «элементарное действие» говорят, что оно реализуется по принципу «бабочки» (рис. 1.5.3):

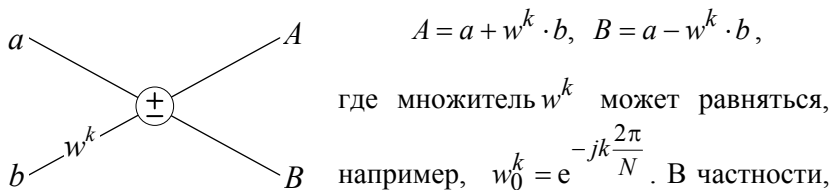
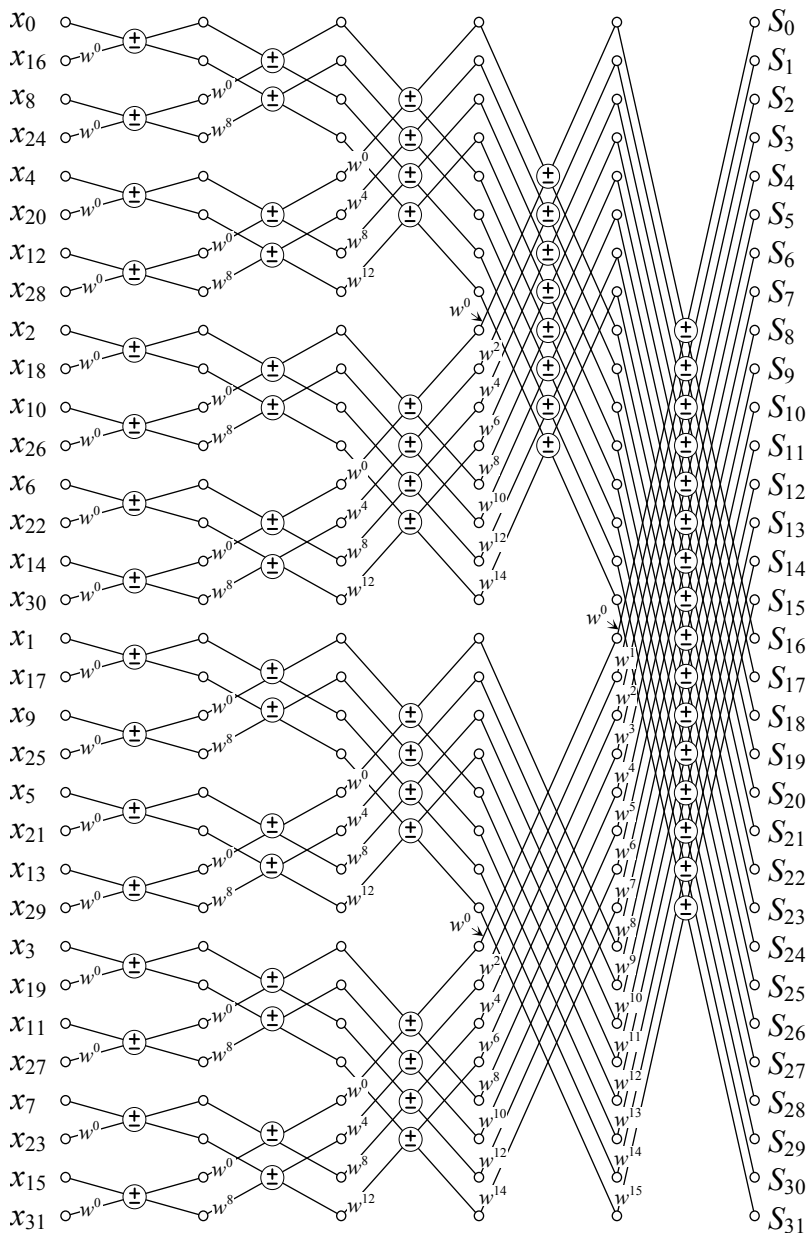


Рис. 1.5.3.

$$X_n = \sum_{k=0}^1 x_k e^{-jkn\pi} = x_0 + e^{-jn\pi} \cdot x_1, \quad n = 0, 1,$$

то есть $X_0 = x_0 + x_1$, $X_1 = x_0 - x_1$ (см. (1.5.1) при $N = 2$).



На рис. 1.5.4 в качестве иллюстрации изображена полностью работа алгоритма «прореживание по времени» для случая $N = 2^5$, где $w = w_0 = \exp(-j \cdot 2\pi / 2^5)$.

Обратное N -точечное БПФ рассчитывается по аналогичному алгоритму «прореживания по частоте». Обратное 2-точечное ДПФ согласно (1.4.4) имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 X_n e^{jkn\pi} = \frac{1}{2} (X_0 + e^{jk\pi} \cdot X_1), \quad k = 0, 1,$$

$$\text{то есть } \frac{1}{2} (X_0 + X_1) = \frac{1}{2} [(x_0 + x_1) + (x_0 - x_1)] = x_0,$$

$$\frac{1}{2} (X_0 - X_1) = \frac{1}{2} [(x_0 + x_1) - (x_0 - x_1)] = x_1.$$

Сравнение ДПФ и БПФ по числу выполняемых арифметических операций

Чтобы вычислить одно значение X_n по формуле (1.5.1), нужно выполнить, грубо говоря, $2N$ арифметических действий (N умножений и N сложений); чтобы найти все N значений $\{X_n\}$, необходимо произвести $2N^2$ таких операций.

Как было объяснено выше, реализация N -точечного БПФ требует осуществления $\log_2 N$ шагов, на каждом из которых производится $N/2$ умножений, $N/2$ сложений и $N/2$ вычитаний, то есть всего $\frac{3}{2} N \log_2 N$ арифметических операций.

При $N = 2^{10}$ требуемое число операций сокращается в $\frac{2N^2}{(3/2) \cdot N \log_2 N} \approx \frac{2 \cdot 10^6}{1.5 \cdot 10^4} \approx 100$ раз.

⇐ Рис. 1.5.4

1.6. Анализ и преобразование сигналов средствами MATLAB

Ниже приводятся краткие сведения о функциях MATLAB, имеющих прямое или косвенное отношение к дискретному преобразованию Фурье и используемых в упражнениях.

$U = \text{fft}(u)$	– одномерное прямое преобразование Фурье: u, U – векторы одинаковой длины
$u = \text{ifft}(U)$	– одномерное обратное преобразование Фурье: u, U – векторы одинаковой длины
$V = \text{fftshift}(U)$	– перестановка: помещение элементов старшей половины вектора U , относящихся к отрицательным частотам, перед элементами его младшей половины так, чтобы точка, соответствующая нулевой частоте, оказывалась в середине массива V
$B = \text{fliplr}(A)$	– B – вектор, состоящий из тех же элементов, что и вектор A , только расположенных в обратном порядке
$B = \text{imag}(A)$	– элементы вектора B являются мнимыми частями соответствующих элементов вектора A
$B = \text{angle}(A)$	– элементы вектора B являются аргументами соответствующих элементов (комплексных чисел) вектора A в радианах
$B = \text{conj}(A)$	– элементы вектора B являются числами, комплексно-сопряженными по отношению к соответствующим элементам вектора A
$A = \text{zeros}(m, n)$	– A – $m \times n$ матрица, заполненная нулями (m строк, n столбцов)

$A = \text{ones}(m, n)$ – A – $m \times n$ матрица, заполненная единицами (m строк, n столбцов)
$\text{stem}(x, y, ' \cdot')$ – вывод на экран линейчатого графика (например, линейчатого спектра) в координатах (x, y) : значение y отмечается вверху соответствующей вертикальной линии символом, указанным в качестве третьего параметра команды (между апострофами)

Часть II

Цифровые фильтры

2.1. Аналоговые прототипы

В аналоговой электронике фильтром называют линейный четырехполюсник, в котором происходит желаемое (или происходящее помимо нашей воли) преобразование спектра сигнала $u_{\text{вх}}(t)$, поступающего на вход этого четырехполюсника.

Термины «фильтрация», «отфильтровать» употребляются в одном из следующих двух значений:

- а) выделить нужные (полезные) составляющие спектра входного сигнала;
- б) подавить мешающие компоненты спектра входного сигнала.

Напомним, что линейный четырехполюсник обладает следующими тремя свойствами, любое из которых можно выбрать в качестве определения линейности, тогда два других будут его следствиями:

- 1) все токи и напряжения в схеме описываются системой линейных алгебраических или дифференциальных уравнений с постоянными, не зависящими от времени, коэффициентами;
- 2) откликом на гармоническое воздействие в установившемся режиме в любом месте схемы (то есть ток в любой ветви или напряжение между любыми двумя точками) также будет гармоническим колебанием той же самой частоты;

- 3) справедлив принцип суперпозиции: откликом на сумму воздействий является сумма откликов на каждое из воздействий порознь.

Воспользуемся первым из этих свойств и представим себе, что все промежуточные токи и напряжения в системе уравнений, следующей из законов Кирхгофа, исключены, так что остаются только входной сигнал $u_{\text{ВХ}}(t)$ и выходной сигнал $u_{\text{ВЫХ}}(t)$. Тогда в самом общем случае сигналы $u_{\text{ВХ}}(t)$ и $u_{\text{ВЫХ}}(t)$ должны быть связаны следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n u_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + a_0 u_{\text{ВЫХ}}(t) = \\ = b_m \frac{d^m u_{\text{ВХ}}(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_{\text{ВХ}}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du_{\text{ВХ}}(t)}{dt} + b_0 u_{\text{ВХ}}(t). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Предположим, что $u_{\text{ВХ}}(t)$ и $u_{\text{ВЫХ}}(t)$ (в установившемся режиме) являются гармоническими колебаниями частоты ω и перейдем от функций времени $u_{\text{ВХ}}(t)$ и $u_{\text{ВЫХ}}(t)$ к комплексной записи входного и выходного сигналов (рис. 2.1.1):

$$u_{\text{ВХ}}(t) \rightarrow U_{\text{ВХ_m}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{ВХ}})} = \tilde{U}_{\text{ВХ_m}} e^{j\omega t},$$

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) \rightarrow U_{\text{ВЫХ_m}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{ВЫХ}})} = \tilde{U}_{\text{ВЫХ_m}} e^{j\omega t},$$

где $\tilde{U}_{\text{ВХ_m}} = U_{\text{ВХ_m}} e^{j\varphi_{\text{ВХ}}}$ и $\tilde{U}_{\text{ВЫХ_m}} = U_{\text{ВЫХ_m}} e^{j\varphi_{\text{ВЫХ}}}$

– комплексные амплитуды входного и выходного колебаний.

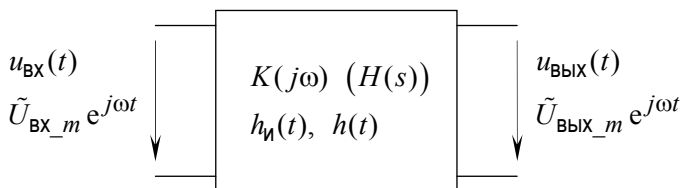


Рис. 2.1.1

Подставляя входной и выходной сигналы в комплексной записи в уравнение (2.1.1), получим

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{Вых}_m}(a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0)e^{j\omega t} = \\ = \tilde{U}_{\text{Вх}_m}(b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0)e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что **комплексный коэффициент передачи** линейного четырехполюсника (в случае цепи с сосредоточенными параметрами) является дробно-рациональной (дробно-линейной) функцией переменной $j\omega$, то есть отношением двух полиномов:

$$\tilde{K} \equiv K(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{U}_{\text{Вых}_m}}{\tilde{U}_{\text{Вх}_m}} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}, \quad m \leq n. \quad (2.1.2)$$

Исследование линейной цепи становится особенно эффективным, когда рассмотрение свойств дробно-линейной функции (2.1.2) распространяется на всю комплексную область, то есть в случае замены в (2.1.2) чисто мнимой переменной $j\omega$ на комплексную переменную s . В результате такой замены мы приходим к так называемой **функции передачи**:

$$H(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (2.1.3)$$

Очевидно, что $K(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$.

Если функцию передачи $H(s)$ определить как отношение преобразования Лапласа выходного сигнала к преобразованию Лапласа входного сигнала, то при выполнении ряда условий ее можно получить из уравнения (2.1.1) так же, как $K(j\omega)$, только путем перехода от напряжений $u_{\text{Вх}}(t)$ и $u_{\text{Вых}}(t)$ не к их комплексным записям, а к преобразованиям Лапласа этих колебаний.

Естественное обобщение принципа, по которому вещественный сигнал представляется в виде суммы элементарных комплексных колебаний вида $e^{j\omega t}$ (например, $\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos \omega t$), заключается в том, что вместо комплексных экспоненциальных сигналов с чисто мнимым показателем вводят в рассмотрение экспоненциальные сигналы вида e^{st} , где s – комплексное число, получившее название *комплексной частоты*. Из двух таких сигналов можно составить вещественный сигнал. Например, если $s = \sigma + j\omega$, а s^* – комплексно-сопряженное число, то

$$\frac{e^{st} + e^{s^*t}}{2} = e^{\sigma t} \cdot \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = e^{\sigma t} \cos \omega t.$$

Пусть сигнал $f(t)$ определен при $t \geq 0$ и $f(t) = 0$ при $t < 0$. Сигнал $f(t)$ называют оригиналом, а функцию

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

– его изображением по Лапласу (условие существования – сходимость интеграла при всех s , для которых $\text{Re } s > a$, где a – положительное число, называемое абсциссой абсолютной сходимости). Обратное преобразование Лапласа имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds,$$

где интегрирование проводится вдоль неограниченно протяженной вертикальной прямой, расположенной правее абсциссы абсолютной сходимости.

Важный пример

Если $f(t) = e^{p_i t}$ при $t \geq 0$, то

$$F(s) = \int_0^{\Gamma} e^{-(s-p_i)t} dt = -\frac{e^{-(s-p_i)t}}{s-p_i} \Big|_{t=0}^{t=\Gamma} = \frac{1}{s-p_i}$$

при $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} p_i$.

Другой важной характеристикой линейного четырехполюсника служит его **импульсная характеристика** $h_{\text{и}}(t)$, являющаяся по определению реакцией рассматриваемой цепи на δ -образное воздействие:

$$h_{\text{и}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} u_{\text{ВЫХ}}(t) \Big|_{u_{\text{ВХ}}(t)=\delta(t)}.$$

(Функции $\delta(t)$ и $h_{\text{и}}(t)$ имеют размерность [Гц] или $[\text{с}^{-1}]$.) Импульсная характеристика и комплексный коэффициент передачи образуют пару преобразования Фурье:

$$\begin{cases} h_{\text{и}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \\ K(j\omega) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} h_{\text{и}}(t) e^{-j\omega t} dt. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

В той мере, в какой свойства преобразования Лапласа схожи со свойствами преобразования Фурье, можно сказать, что функция передачи $H(s)$ является преобразованием Лапласа импульсной характеристики $h_{\text{и}}(t)$.

Наконец, последней из наиболее употребительных характеристик линейного четырехполюсника является его **переходная характеристика** $h(t)$, связанная с импульсной характеристикой соотношением

$$h(t) = \int_0^t h_M(t') dt'.$$

Переходная характеристика $h(t)$ представляет собой реакцию линейного четырехполюсника на единичный скачок

$$\sigma(t) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \delta(t) dt,$$

называемый также *функцией Хевисайда*. (Если входной и выходной сигналы имеют одинаковую размерность, например [В], то функция $h(t)$ безразмерна.)

Идеальный фильтр. Критерий Пэли-Винера

Когда решают задачу о создании подходящего фильтра, бывает так, что речь заходит об *идеальном фильтре* (и.ф.), как о том, к чему надо стремиться. При этом под идеальным понимают такой фильтр, у которого сигнал на выходе в точности совпадает по форме с полезным входным сигналом, а все мешающие сигналы вне полосы частот, занимаемой спектром полезного сигнала, подавляются полностью.

Такой воображаемый фильтр будет обладать желаемым свойством, если его амплитудно-частотная характеристика $|K(j\omega)|$ (четная функция частоты ω , вверху на рис. 2.1.2) окажется константой K_0 в пределах полосы частот (ω_1, ω_2) , занимаемой спектром $S_x(j\omega)$ входного сигнала $x(t)$ (только в этом случае при прохождении сигнала через фильтр сохранится соотношение между амплитудами в спектре сигнала), и будет равна нулю вне указанной полосы частот.

Для требуемой фазочастотной характеристики идеального фильтра (нечетная функция ω , внизу на рис. 2.1.2) достаточно, чтобы сдвиг по фазе φ при прохождении через фильтр гармонического сигнала частоты ω линейно зависел от частоты в пределах полосы (ω_1, ω_2) : $\arg K(j\omega) \equiv d\varphi/d\omega = -\text{const} \cdot \omega$.

При выполнении перечисленных условий сигнал $y(t)$ на выходе идеального фильтра равен

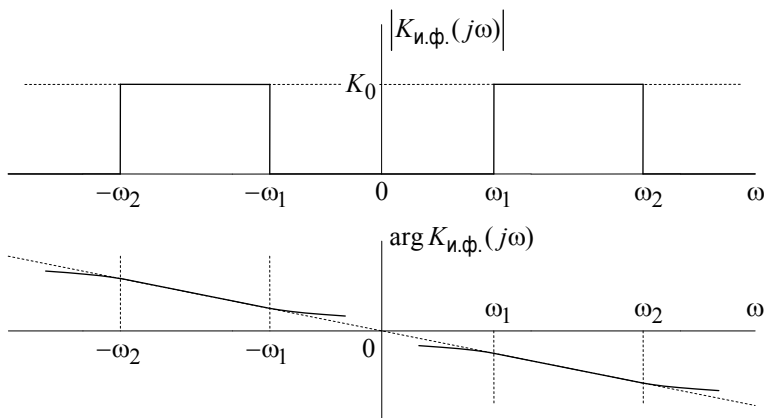


Рис. 2.1.2

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} K_0 e^{-j\omega \cdot \text{const}} S_x(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = K_0 \cdot x(t - \text{const}),$$

то есть является копией входного сигнала $x(t)$, увеличенного в K_0 раз и сдвинутого вдоль оси времени на $\text{const} > 0$ [с] (в сторону более позднего времени).

К сожалению, такой фильтр принципиально построить нельзя согласно так называемому *критерию Пэли–Винера* (R. E. A. C. Paley, N. Wiener; [2]), который гласит, что физически реализуемым является только такой линейный фильтр, чей комплексный коэффициент передачи $K(j\omega)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_0^{\Gamma} \frac{|\ln |K(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty.$$

В последнем утверждении под «физической реализуемостью» понимается выполнение принципа причинности по отношению к импульсной (или переходной) характеристике, которая должна иметь вид функции, равной нулю на половине оси времени (сигнал на выходе не может возникать ранее момента поступления входного воздействия). Другими словами, комплексный

коэффициент передачи как преобразование Фурье от функции времени, равной нулю на половине оси времени, должен удовлетворять приведенному выше неравенству.

Из критерия Пэли–Винера следует, в частности, что $|K(j\omega)|$ не может равняться нулю ни на каком конечном отрезке оси частот, где логарифм этой величины становился бы бесконечно большим по модулю, а также не может расти (или спадать) быстрее, чем $\exp(\pm\omega^2)$, потому что в противном случае интеграл в левой части неравенства расходится.

2.1.1. Фильтры нижних частот (low-pass filters)

В современной теории фильтров принято начинать решение любой задачи с рассмотрения фильтра нижних частот (ФНЧ) в качестве базовой модели и лишь потом по известным правилам переходить к фильтру нужного вида. У фильтра нижних частот полоса пропускания простирается от 0 до так называемой *частоты среза*, за пределами которой в той или иной мере происходит подавление соответствующей части спектра входного сигнала.

Обычно речь идет о фильтре одного из четырех канонических типов: о фильтре Баттерворта, о фильтре Чебышева первого рода, о фильтре Чебышева второго рода или об эллиптическом фильтре (фильтре Золотарева–Кауэра). Фильтры отличаются один от другого гладкостью амплитудно-частотной характеристики и наличием или отсутствием колебаний этой характеристики в пределах полосы пропускания и полосы подавления, а также крутизной перепада амплитудно-частотной характеристики при переходе вдоль оси частот из области пропускания в область подавления. Фильтрами указанных четырех типов более или менее исчерпывается все, что может оказаться нужным на практике.

Фильтр Баттерворта

Модуль комплексного коэффициента передачи фильтра нижних частот Баттерворта имеет вид

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}, \quad (2.1.5)$$

где n – порядок фильтра, а ω_0 – частота среза в рад/с. На частоте среза амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) падает в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с единичным значением коэффициента передачи на нулевой частоте. Говорят, что АЧХ фильтра Баттерворта n -го порядка является максимально плоской в том смысле, что $2n-1$ первых ее производных в точках $\omega=0$ и $\omega=\Gamma$ равны нулю.

На рис. 2.1.3 в качестве примера показана АЧХ такого фильтра 5-го порядка с частотой среза, равной 10^5 Гц. Рисунку предшествует программа `buttaplp(n,f0)`, вычисляющая эту АЧХ. Объяснение функций MATLAB, использованных для расчета частотной характеристики данного фильтра, отложено до раздела 2.1.3, где будут перечислены аналогичные функции для всех фильтров и сделаны необходимые комментарии.

```
function buttaplp(n,f0)
% АЧХ ФНЧ Баттерворта
% n – порядок фильтра;
% f0 – частота среза [Гц];
% Пример: buttaplp(5,10^5);

[z,p,k]=buttap(n);
[b,a]=zp2tf(z,p,k);
w0=2*pi*f0;
[b1,a1]=lp2lp(b,a,w0);
dw=2*pi*f0/100;
w=0:dw:4*w0;
h=freqs(b1,a1,w);
plot(w/(2*pi),abs(h));
ylim([-0.2 k+0.2]); grid on;
xlabel('f [Hz]');
ylabel('abs(K(jw))');
```

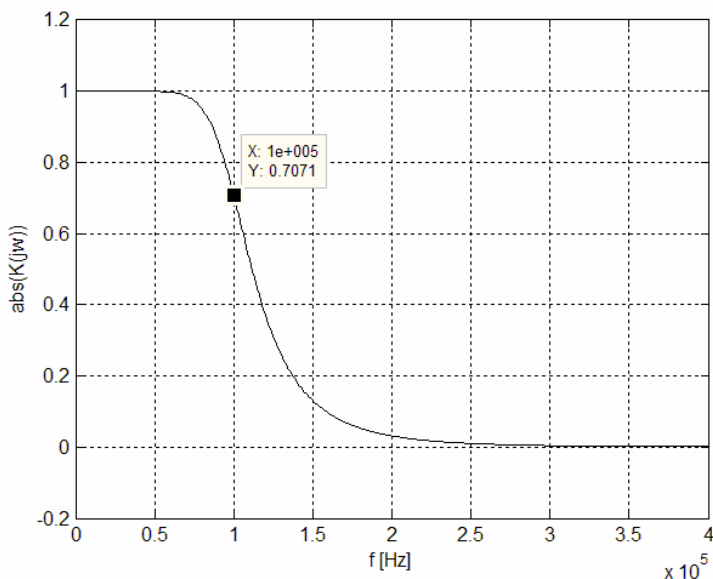


Рис. 2.1.3. Пример: `buttaplp(5, 10^5)`

Фильтр Чебышева первого рода

Модуль комплексного коэффициента передачи фильтра Чебышева первого рода в случае фильтра нижних частот имеет вид

$$K(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega / \omega_0)}}, \quad (2.1.6)$$

где ω_0 – частота среза, $T_n(x)$ – полином Чебышева n -го порядка, а параметр ε показывает, что $|K(j\omega)|$ колеблется в пределах полосы от 0 до ω_0 между уровнями $1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$ и 1. На частоте среза $|K(j\omega_0)| = 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$. В дальнейшем уровень этих пульсаций в пределах полосы пропускания выражается параметром R_p в децибелах:

$$R_p = 20 \lg(\sqrt{1 + \varepsilon^2}) = 10 \lg(1 + \varepsilon^2), \quad (2.1.7)$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1}.$$

Фильтр Чебышева обеспечивает более крутой спад АЧХ при переходе из области пропускания в область подавления, чем фильтр Баттерворта того же порядка.

На рис. 2.1.4 показана АЧХ фильтра Чебышева первого рода для случая фильтра нижних частот со следующими значениями параметров: порядок фильтра n равен 5, частота среза $f_0 = \omega_0 / (2\pi)$ равна 10^5 Гц, а параметр R_p , задающий уровень пульсаций в полосе пропускания, выбран равным 1 дБ.

```
function cheblaplp(n,Rp,f0)
% АЧХ ФНЧ Чебышева 1-го рода
% n - порядок фильтра;
% Rp - уровень пульсаций [дБ]
% f0 - частота среза [Гц];
% Пример: cheblaplp(5,1,10^5);
```

```
[z,p,k]=cheblap(n,Rp);
[b,a]=zp2tf(z,p,k);
w0=2*pi*f0;
[b1,a1]=lp2lp(b,a,w0);
dw=2*pi*f0/100;
w=0:dw:4*w0;
h=freqs(b1,a1,w);
plot(w/(2*pi),abs(h));
ylim([-0.2 1.2]); grid on;
xlabel('f [Hz]');
ylabel('abs(K(jw))');
```

Фильтр Чебышева второго рода

Модуль комплексного коэффициента передачи фильтра Чебышева второго рода в случае фильтра нижних частот имеет вид

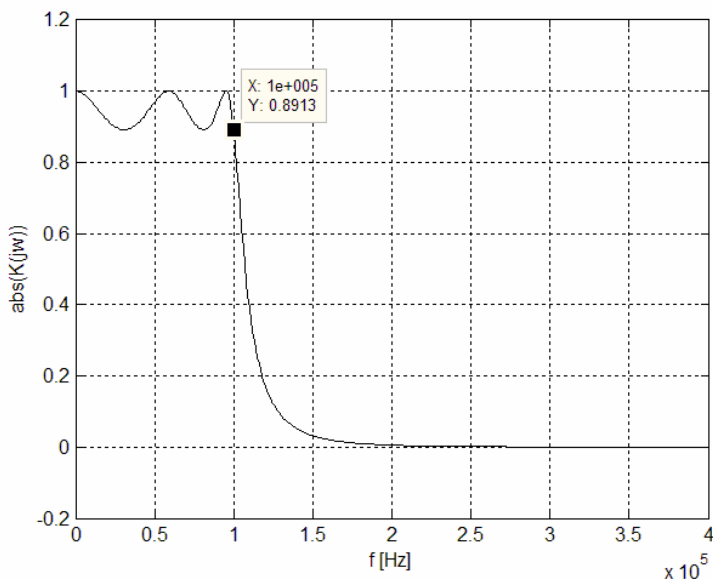


Рис. 2.1.4. Пример: `cheblaplp(5,1,10^5)`

$$K(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{T_n^2(\omega_0/\omega)}}}, \quad (2.1.8)$$

где, как и в случае фильтра Чебышева первого рода, ω_0 – частота среза, $T_n(x)$ – полином Чебышева n -го порядка, а параметр ε на этот раз показывает, что $|K(j\omega)|$ колеблется в пределах полосы от ω_0 до 1 между 0 и уровнем $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$. Частота среза ω_0 у фильтров Чебышева второго рода указывает не границу полосы пропускания, а начало полосы подавления. На частоте среза $|K(j\omega_0)| = 1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$. При расчете АЧХ этого фильтра уровень пульсаций в пределах полосы подавления выражается параметром R_s в децибелах:

$$R_s = 20 \lg(\sqrt{1 + \varepsilon^2}) = 10 \lg(1 + \varepsilon^2), \quad (2.1.9)$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{R_s/10} - 1}.$$

На рис. 2.1.5 показана АЧХ фильтра Чебышева второго рода для случая фильтра нижних частот со следующими значениями параметров: порядок фильтра n равен 5, частота среза $f_0 = \omega_0 / (2\pi)$ равна 10^5 Гц, а параметр R_s , задающий уровень пульсаций в полосе подавления, выбран равным 20 дБ.

```
function cheb2aplp(n,Rs,f0)
% АЧХ ФНЧ Чебышева 1-го рода
% n - порядок фильтра;
% Rs - уровень пульсаций [дБ]
% f0 - частота среза [Гц];
% Пример: cheb2aplp(5,20,10^5);

[z,p,k]=cheb2ap(n,Rs);
[b,a]=zp2tf(z,p,k);
w0=2*pi*f0;
[b1,a1]=lp2lp(b,a,w0);
dw=2*pi*f0/100;
w=0:dw:4*w0;
h=freqs(b1,a1,w);
plot(w/(2*pi),abs(h));
ylim([-0.2 1.2]); grid on;
xlabel('f [Hz]');
ylabel('abs(K(jw))');
```

Эллиптический фильтр

Модуль комплексного коэффициента эллиптического фильтра нижних частот имеет вид

$$K(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\omega / \omega_0, L)}}, \quad (2.1.10)$$

где ω_0 – частота среза, $R_n(\omega / \omega_0, L)$ – рациональная функция Чебышева n -го порядка, а от параметров ε и L зависит, в какой

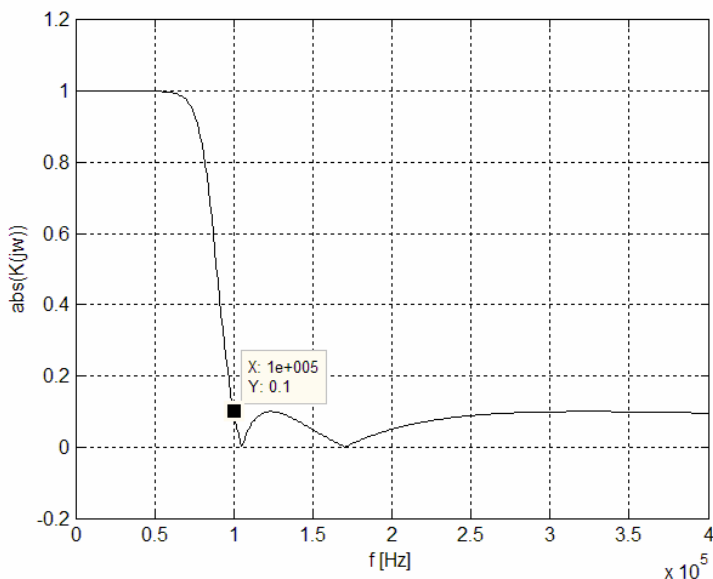


Рис. 2.1.5. Пример: `cheb2aplp(5,20,10^5)`

степени $|K(j\omega)|$ колеблется как в пределах полосы пропускания (от 0 до ω_0), так и в полосе подавления (от ω_0 до Γ). (Относительно функции $R_n(\omega/\omega_0, L)$ в справочной системе *Help* в MATLAB говорится, что алгоритм ее вычисления в общих чертах описан в работе *Parks T.W. and Burrus C.S. Digital Filter Design. John Wiley & Sons, New York, N.Y., 1987. Chapter 7.* См. также *Elliptic rational functions* в Wikipedia.) При практическом обращении к соответствующей функции MATLAB уровни пульсаций АЧХ в полосе пропускания и в полосе подавления определяются параметрами R_p и R_s соответственно.

На рис. 2.1.6 показана АЧХ эллиптического фильтра нижних частот со следующими значениями параметров:

$$n = 5, \quad f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 10^5 \text{ Гц}, \quad R_p = 1 \text{ дБ}, \quad R_s = 20 \text{ дБ}.$$

```
function elliparlp(n,Rp,Rs,f0)
% АЧХ эллиптического ФНЧ
% n - порядок фильтра;
% Rp - уровень пульсаций
% в полосе пропускания [дБ];
% Rs - уровень пульсаций
% в полосе подавления [дБ];
% f0 - частота среза [Гц];
% Пример: elliparlp(5,1,20,10^5);
```

```
[z,p,k]=ellipap(n,Rp,Rs);
[b,a]=zp2tf(z,p,k);
w0=2*pi*f0;
[b1,a1]=lp2lp(b,a,w0);
dw=2*pi*f0/100;
w=0:dw:4*w0;
h=freqs(b1,a1,w);
plot(w/(2*pi),abs(h));
ylim([-0.2 1.2]); grid on;
xlabel('f [Hz]');
ylabel('abs(K(jw))');
```

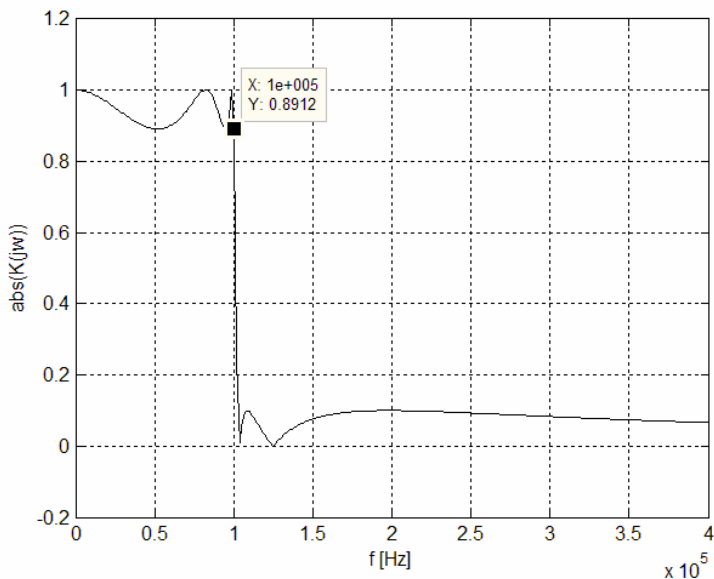


Рис. 2.1.6. Пример: `elliparlp(5,1,20,10^5)`

2.1.2. Частотные преобразования

Под частотными преобразованиями понимают изменение формы амплитудно-частотной характеристики фильтра посредством замены переменной вдоль оси частот. В комплексном коэффициенте передачи $K(j\omega)$ исходного фильтра на место частоты ω подставляется функция преобразования частоты $f_\omega(\omega)$ $[\omega \Rightarrow f_\omega(\omega)]$, либо в функции передачи $H(s)$ исходного фильтра на место комплексной переменной s подставляется некоторая функция $f_s(s)$ $[s \Rightarrow f_s(s)]$.

Функция передачи после подстановки должна оставаться дробно-рациональной функцией, поэтому $f_s(s)$ также должна быть дробно-рациональной.

Поскольку комплексный коэффициент передачи получается из функции передачи подстановкой $s = j\omega$, функция $f_s(s)$ при чисто мнимом аргументе должна давать чисто мнимый результат.

Для этого должно выполняться равенство: $f_\omega(\omega) = \frac{1}{j} f_s(s)$. Коль

скоро функция $f_s(s)$ должна быть дробно-рациональной, выполнение последнего равенства возможно только в том случае, когда числитель и знаменатель функции передачи $H(s)$ являются такими полиномами переменной s , что один из них содержит только четные степени этой переменной, а другой — только нечетные степени s .

Одно из наиболее часто применяемых частотных преобразований — изменение масштаба вдоль частотной оси, или, что то же самое, изменение частоты среза ω_0 . Функции подстановки в $K(j\omega)$ и в $H(s)$ в этом случае являются линейными:

$$f_\omega(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad f_s(s) = \frac{s}{\omega_0}.$$

В результате такого преобразования масштаб вдоль оси частот изменяется линейно, то есть частота среза изменяется в ω_0 раз.

Преобразование ФНЧ в фильтр верхних частот (high-pass filter)

Преобразование фильтра нижних частот в фильтр верхних частот достигается путем инверсии частотной оси:

$$f_{\omega}(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad f_s(s) = \frac{\omega_0}{s}. \quad (2.1.11)$$

В результате такой подстановки точки амплитудно-частотной характеристики, соответствующие значениям частоты 0 и ∞ , меняются местами.

На рис. 2.1.7 показана АЧХ эллиптического фильтра верхних частот со следующими значениями параметров:

$n = 5$, $f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 10^5$ Гц, $R_p = 1$ дБ, $R_s = 20$ дБ.

```
function ellipaphp(n,Rp,Rs,f0)
% АЧХ эллиптического ФВЧ
% n - порядок фильтра;
% Rp - уровень пульсаций
% в полосе пропускания [дБ];
% Rs - уровень пульсаций
% в полосе подавления [дБ];
% f0 - частота среза [Гц];
% Пример: ellipaphp(5,1,20,10^5);

[z,p,k]=ellipap(n,Rp,Rs);
[b,a]=zp2tf(z,p,k);
w0=2*pi*f0;
[b1,a1]=lp2hp(b,a,w0);
dw=2*pi*f0/1000;
w=0:dw:4*w0;
h=freqs(b1,a1,w);
plot(w/(2*pi),abs(h));
ylim([-0.2 1.2]); grid on;
xlabel('f [Hz]');
ylabel('abs(K(jw))');
```

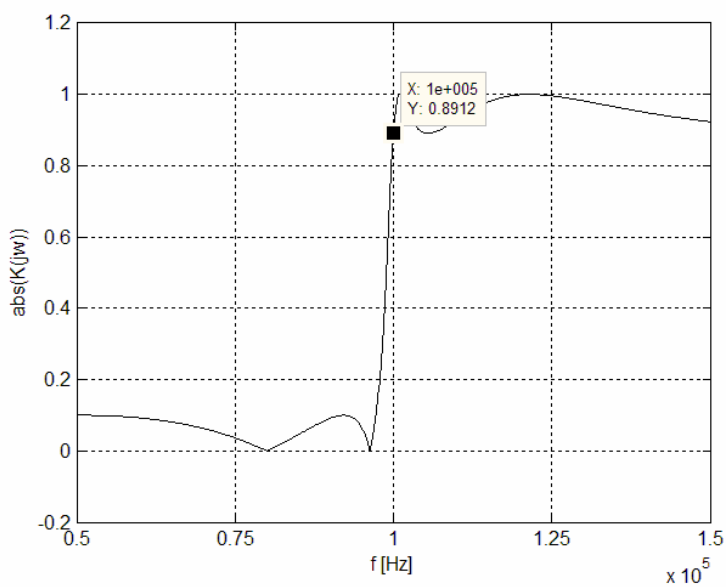
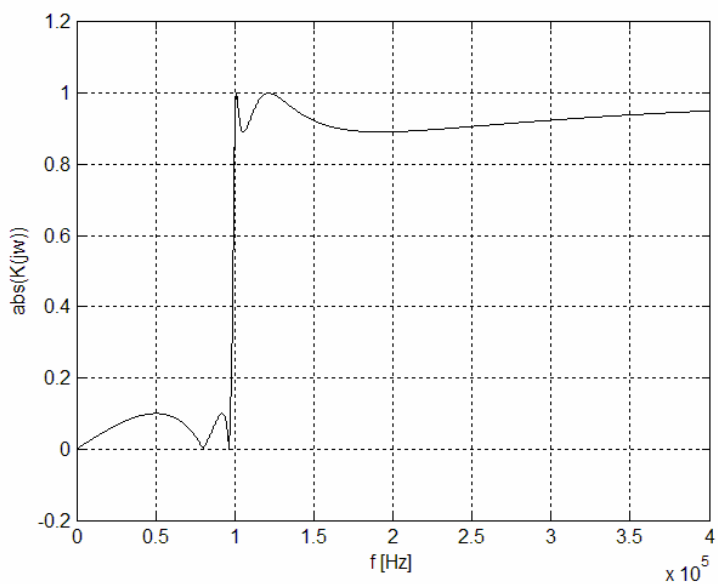


Рис. 2.1.7. Пример: `ellipaphp(5,1,20,10^5)`

Преобразование ФНЧ в полосовой фильтр (band-pass filter)

Простейшая функция $f_{\omega}(\omega)$, обеспечивающая преобразование фильтра нижних частот, взятого в качестве прототипа, в полосовой фильтр (ПФ), имеет вид

$$f_{\omega}(\omega) = a \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega},$$

где параметр a – величина, обратная требуемой полосе пропускания $\Delta\omega$. Действительно, у исходного фильтра прототипа частота среза равна 1, а у получающегося в результате преобразования полосового фильтра функция $f_{\omega}(\omega)$ должна давать 1 на границах полосы пропускания. Поэтому граничные частоты полосового фильтра должны быть решениями уравнения

$$a \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} = 1,$$

откуда (в области положительных частот)

$$\omega_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2\omega_0^2}}{2a}, \quad \omega_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a^2\omega_0^2}}{2a}.$$

Следовательно, $\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = 1/a$ и $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$. Таким образом, окончательные формулы преобразования могут быть представлены в виде

$$f_{\omega}(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\Delta\omega \cdot \omega} = Q \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \cdot \omega}, \quad f_s(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{\Delta\omega \cdot s} = Q \cdot \frac{s^2 + \omega_0^2}{\omega_0 \cdot s}, \quad (2.1.12)$$

где Q – добротность полосового фильтра, принимаемая по определению равной $\omega_0 / \Delta\omega$.

На рис. 2.1.8 приведена в качестве примера АЧХ полосового эллиптического фильтра со следующими значениями параметров: $n = 5$, $f_1 = \omega_1 / (2\pi) = 40$ кГц, $f_2 = \omega_2 / (2\pi) = 250$ кГц,

$f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 100$ кГц, $\Delta f = \Delta\omega / (2\pi) = 210$ кГц ($Q = 0.476$),
 $R_p = 1$ дБ, $R_s = 20$ дБ.

```
function elliparbp(n,Rp,Rs,f1,f2)
% АЧХ эллиптического полосового фильтра
% n - порядок фильтра;
% Rp - уровень пульсаций
% в полосе пропускания [дБ];
% Rs - уровень пульсаций
% в полосе подавления [дБ];
% f1,f2 - граничные частоты [Гц];
% f0=sqrt(f1*f2) [Гц];
% Bf=f2-f1 - полоса пропускания [Гц];
% Пример:
% elliparbp(5,1,20,4*10^4,2.5*10^5);

[z,p,k]=ellipap(n,Rp,Rs);
[b,a]=zp2tf(z,p,k);
f0=sqrt(f1*f2);
Bf=f2-f1;
w0=2*pi*f0;
Bw=2*pi*Bf;
[b1,a1]=lp2bp(b,a,w0,Bw);
dw=2*pi*f0/1000;
w=0:dw:4*w0;
h=freqs(b1,a1,w);
plot(w/(2*pi),abs(h));
ylim([-0.2 1.2]); grid on;
xlabel('f [Hz]');
ylabel('abs(K(jw))');
```

Преобразование ФНЧ в режекторный фильтр (band-stop filter)

Режекторный фильтр (РФ) бывает необходим для того, чтобы подавить часть спектра сигнала в определенной полосе частот, где содержатся нежелательные компоненты (помехи). Преобразование фильтра нижних частот в режекторный фильтр осуществляется подобно тому, как это делается в отношении полосового

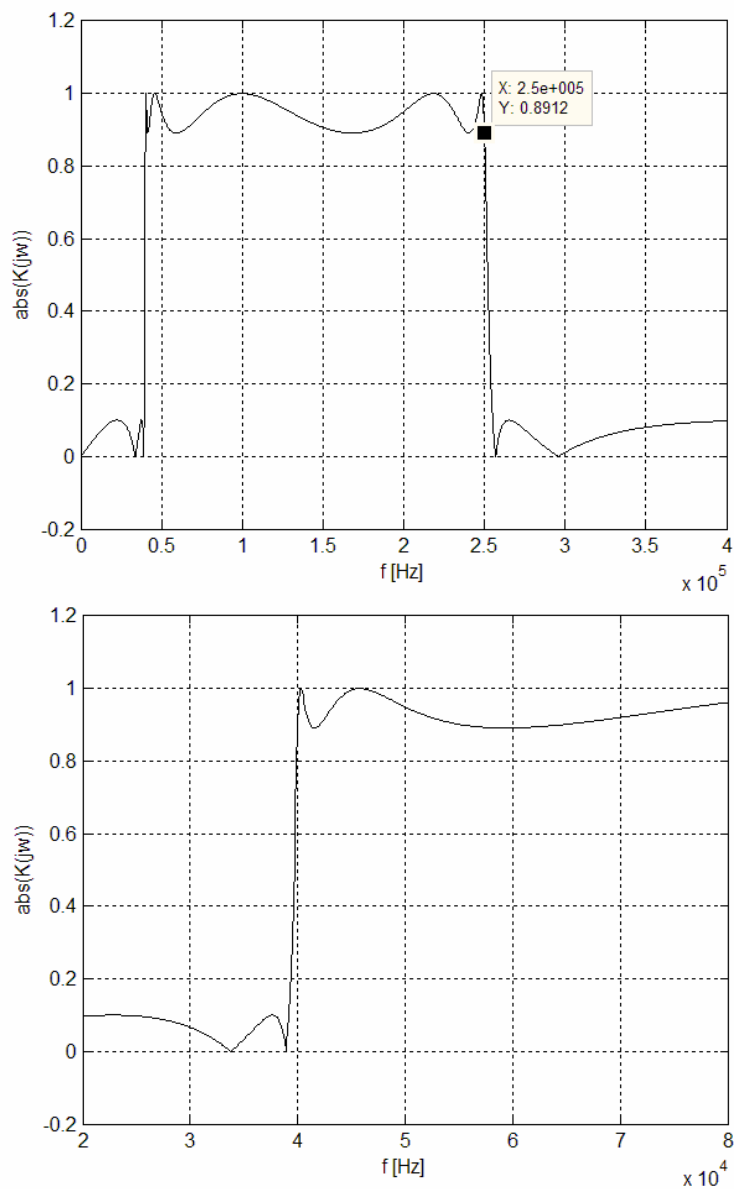


Рис. 2.1.8. Пример: `elliparbp(5,1,20,4*10^4,2.5*10^5)`

фильтра. В данном случае функции преобразования комплексного коэффициента передачи и функции передачи имеют вид

$$f_{\omega}(\omega) = \frac{\Delta\omega \cdot \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{\omega_0 \cdot \omega}{Q \cdot (\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad f_s(s) = \frac{\Delta\omega \cdot s}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0 \cdot s}{Q \cdot (s^2 + \omega_0^2)}, \quad (2.1.13)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$ и $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, а ω_1, ω_2 – граничные частоты.

На рис. 2.1.9 показана АЧХ режекторного фильтра Чебышева второго рода с граничными частотами $f_1 = 80$ кГц и $f_2 = 125$ кГц; у такого фильтра $f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = 100$ кГц, $\Delta f = f_2 - f_1 = 45$ кГц; в этом примере порядок фильтра n выбран равным 5, а параметр R_s , характеризующий уровень пульсаций в полосе подавления, – равным 20 дБ.

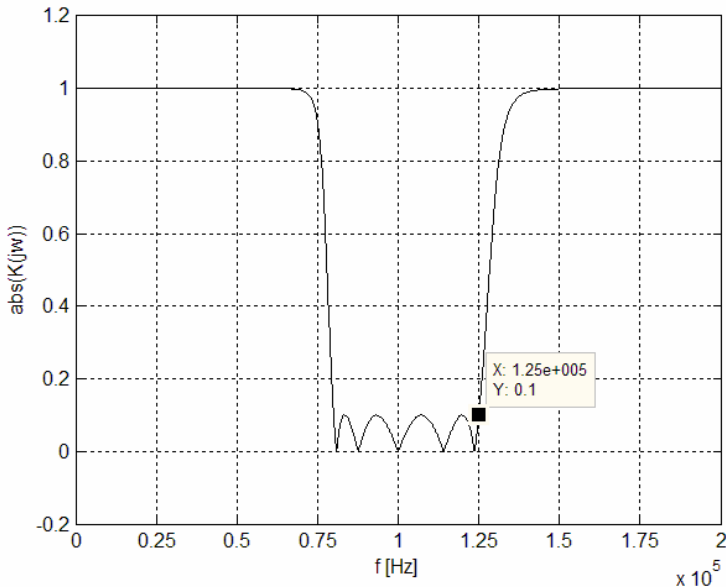


Рис. 2.1.9. Пример: `cheb2apbs(5, 20, 8*10^4, 1.25*10^5)`

```

function cheb2apbs(n,Rs,f1,f2)
% АЧХ режекторного фильтра Чебышева
% второго рода
% n - порядок фильтра;
% Rs - уровень пульсаций
% в полосе подавления [дБ];
% f1,f2 - граничные частоты [Гц];
% f0=sqrt(f1*f2) [Гц];
% Bf=f2-f1 - полоса пропускания [Гц];
% Пример: cheb2apbs(5,20,8*10^4,1.25*10^5);

[z,p,k]=cheb2ap(n,Rs);
[b,a]=zp2tf(z,p,k);
f0=sqrt(f1*f2);
Bf=f2-f1;
w0=2*pi*f0;
Bw=2*pi*Bf;
[b1,a1]=lp2bs(b,a,w0,Bw);
dw=2*pi*f0/1000;
w=0:dw:4*w0;
h=freqs(b1,a1,w);
plot(w/(2*pi),abs(h));
ylim([-0.2 1.2]); grid on;
xlabel('f [Hz]');
ylabel('abs(K(jw))');

```

2.1.3. Функции MATLAB для расчета аналоговых фильтров

Способы описания аналоговых линейных систем

Каждый из полиномов, стоящих в числителе и в знаменателе комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$ и функции передачи $H(s)$, полностью определяется набором его коэффициентов. В рассматриваемом нами случае *вещественных линейных систем* все коэффициенты полиномов являются действительными числами и не зависят от времени. Таким образом, можно говорить, что фильтр полностью описывается двумя векторами b и a , компонентами которых являются эти коэффициенты:

$$\begin{cases} b = [b_m \ b_{m-1} \ \dots \ b_1 \ b_0], \\ a = [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ a_0]. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

Известно, что каждый полином имеет столько корней, какова его степень, и может быть представлен в виде *произведения двучленов*, каждый из которых представляет собой разность между переменной данного многочлена и одним из его корней. В частности, функцию передачи можно представить в виде

$$H(s) = G \cdot \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \dots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \dots (s - p_1)}, \quad (2.1.15)$$

где G — коэффициент усиления, а совокупности корней числителя и знаменателя, называемых соответственно нулями (*zeros*) и полюсами (*poles*), образуют два вектора z и p , которые вместе с коэффициентом G также полностью описывают рассматриваемую линейную систему:

$$\begin{cases} z = [z_m \ z_{m-1} \ \dots \ z_1], \\ p = [p_n \ p_{n-1} \ \dots \ p_1]. \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Компоненты векторов z и p в данном случае являются либо действительными числами, либо комплексно-сопряженными парами чисел.

Еще одним способом описания линейной системы служит представление дробно-рациональной функции передачи в виде *суммы простых дробей*:

$$H(s) = \frac{r_n}{s - p_n} + \frac{r_{n-1}}{s - p_{n-1}} + \dots + \frac{r_1}{s - p_1} + c_0, \quad (2.1.17)$$

где, как и ранее, совокупность $\{p_i, i = n, n-1, \dots, 1\}$ — корни знаменателя функции $H(s)$, то есть ее полюсы, а числа $\{r_i, i = n, n-1, \dots, 1\}$ носят название вычетов (*residues*); c_0 — это целая часть: $c_0 \neq 0$ только при $m = n$. Вычеты, соответствующие комплексно-сопряженным полюсам, также являются комплексно-сопряженными числами. Если i -й полюс является l -кратным, то ему соответствует в таком представлении не одна простая дробь,

а следующая сумма дробей:

$$\frac{r_{i1}}{s - p_i} + \frac{r_{i2}}{(s - p_i)^2} + \frac{r_{i3}}{(s - p_i)^3} + \dots + \frac{r_{il}}{(s - p_i)^l}. \quad (2.1.18)$$

Представление функции передачи в виде суммы простых дробей позволяет непосредственно вычислить *импульсную характеристику* системы, поскольку каждое слагаемое функции передачи вида $r_i / (s - p_i)$ порождает слагаемое импульсной характеристики вида

$$r_i e^{p_i t}, \quad t \geq 0$$

(см. *важный пример* в начале 2.1 в отступлении, посвященном преобразованию Лапласа). Пара комплексно-сопряженных полюсов дает пару слагаемых импульсной характеристики, являющихся в свою очередь парой комплексно-сопряженных экспонент, сумма которых представляет собой синусоиду с экспоненциально меняющейся амплитудой:

$$\begin{aligned} r_i e^{p_i t} + r_i^* e^{p_i^* t} &= \\ &= |r_i| e^{j \arg r_i} e^{(\operatorname{Re} p_i + j \operatorname{Im} p_i) t} + |r_i| e^{-j \arg r_i} e^{(\operatorname{Re} p_i - j \operatorname{Im} p_i) t} = \\ &= |r_i| e^{\operatorname{Re} p_i} \left(e^{j((\operatorname{Im} p_i) \cdot t + \arg r_i)} + e^{-j((\operatorname{Im} p_i) \cdot t + \arg r_i)} \right) = \\ &= 2 |r_i| e^{\operatorname{Re} p_i} \cos((\operatorname{Im} p_i) \cdot t + \arg r_i). \end{aligned}$$

l -кратный полюс p_i дает в импульсной характеристике l слагаемых:

$$r_{i1} e^{p_i t} + r_{i2} t e^{p_i t} + r_{i3} \frac{t^2}{2} e^{p_i t} + \dots + r_{il} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} e^{p_i t}.$$

Линейная система *устойчива*, если $\lim_{t \rightarrow \Gamma} u_{\text{вых}}(t) = 0$ при $u_{\text{вх}}(t) = 0$, или, что то же самое, при условии $\lim_{t \rightarrow \Gamma} h(t) = 0$. Следовательно, все слагаемые вида $r_i e^{p_i t}$ в импульсной характеристике должны затухать при $t \rightarrow \infty$, а это возможно только в том случае, когда $\operatorname{Re} p_i < 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Функции MATLAB для расчета ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ

Ниже приводится синтаксис определения и вызова соответствующих функций MATLAB.

Переход от одного описания фильтра к другому

$$[z, p, G] = \text{tf2zp}(b, a) -$$

нахождение нулей z , полюсов p и коэффициента усиления G по коэффициентам b и a числителя и знаменателя функции передачи (читается: *from transfer function to zeros & poles*); b, a, z, p – векторы, G – скаляр (b и a – векторы строки; z и p – векторы столбцы; $G = b_m / a_n$)

$$[b, a] = \text{zp2tf}(z, p, G) -$$

нахождение коэффициентов b и a числителя и знаменателя функции передачи по значениям нулей z , полюсов p и коэффициента усиления G ; b, a, z, p – векторы, G – скаляр

$$[r, p, c] = \text{residue}(b, a) -$$

нахождение вычетов r , полюсов p и целой части $c = c_0$ функции передачи при представлении ее в виде суммы простых дробей по коэффициентам числителя b и знаменателя a функции передачи; b, a, r, p – векторы, c – частное от деления полинома $b(s)$ на полином $a(s)$

$$[b, a] = \text{residue}(r, p, c) -$$

нахождение коэффициентов числителя b и знаменателя a функции передачи по значениям вычетов r , полюсов p и по целой части $c = c_0$ функции передачи при представлении ее в виде суммы простых дробей; b, a, r, p – векторы, c – частное от деления полинома $b(s)$ на полином $a(s)$

$h = \text{freqs}(b,a)$, $h = \text{freqs}(b,a,w)$, $[h,w] = \text{freqs}(b,a)$ –
нахождение комплексного коэффициента передачи h аналого-
вого фильтра по коэффициентам b и a числителя и знаменате-
ля функции передачи с заданием в качестве входного или воз-
вращением вектора w точек на оси частот, для которых произ-
водится вычисление; b, a, w, h – векторы; элементы вектора w
– в рад/с

Нахождение полюсов p и коэффициента усиления G аналоговых фильтров-прототипов нижних частот

n – порядок фильтра; p – вектор, n, G, R_p, R_s – скаляры
(для фильтра нижних частот фигурирующий ниже вектор нулей
 z всегда пустой)

$[z, p, G] = \text{butter}(n)$ –
расчет фильтра Баттерворта

$[z, p, G] = \text{cheb1ap}(n, R_p)$ –
расчет фильтра Чебышева первого рода, R_p – уровень пульса-
ций в полосе пропускания в дБ

$[z, p, G] = \text{cheb2ap}(n, R_s)$ –
расчет фильтра Чебышева второго рода, R_s – уровень пульса-
ций в полосе подавления в дБ

$[z, p, G] = \text{ellipap}(n, R_p, R_s)$ –
расчет эллиптического фильтра, R_p, R_s – уровни пульсаций в
полосе пропускания и в полосе подавления соответственно в дБ

Частотные преобразования

b, a – коэффициенты полиномов в числителе и знаменателе
функции передачи исходного фильтра нижних частот (ФНЧ),

b_1, a_1 – коэффициенты полиномов в числителе и знаменателе функции передачи фильтра, получающегося в результате преобразования, ω_0 – требуемая частота среза в случае ФНЧ и ФВЧ либо требуемое среднее геометрическое частот среза у ПФ и РФ в рад/с; b, a, b_1, a_1 – векторы, ω_0 – скаляр

$[b_1, a_1] = \text{lp2lp}(b, a, \omega_0)$ – изменение частоты среза ФНЧ (читается: <i>from low-pass to low-pass</i>)
$[b_1, a_1] = \text{lp2hp}(b, a, \omega_0)$ – переход от ФНЧ к фильтру верхних частот (ФВЧ)
$[b_1, a_1] = \text{lp2bp}(b, a, \omega_0, B\omega)$ переход от ФНЧ к полосовому фильтру (ПФ), $B\omega$ – требуемая полоса частот в рад/с
$[b_1, a_1] = \text{lp2bs}(b, a, \omega_0, B\omega)$ – переход от ФНЧ к режекторному фильтру (РФ), $B\omega$ – требуемая полоса частот в рад/с

Одновременный расчет фильтра-прототипа и преобразование его к нужному виду

n – порядок фильтра, ω_0 – частоты среза в рад/с, R_p, R_s – уровни пульсаций в полосе пропускания и в полосе подавления соответственно в дБ, 's' — признак аналогового расчета; b и a – коэффициенты полиномов числителя и знаменателя функции передачи создаваемого фильтра, z и p – нули и полюсы функции передачи создаваемого фильтра, G – его коэффициент усиления; b, a, z, p – векторы; относительно ω_0 см. ниже; остальные величины – скаляры

$[b, a] = \text{butter}(n, w_0, \text{type}, 's')$ $[z, p, G] = \text{butter}(n, w_0, \text{type}, 's')$	Фильтр Баттерворта
$[b, a] = \text{cheby1}(n, R_p, w_0, \text{type}, 's')$ $[z, p, G] = \text{cheby1}(n, R_p, w_0, \text{type}, 's')$	Фильтр Чебышева первого рода
$[b, a] = \text{cheby2}(n, R_p, w_0, \text{type}, 's')$ $[z, p, G] = \text{cheby2}(n, R_p, w_0, \text{type}, 's')$	Фильтр Чебышева второго рода
$[b, a] = \text{ellip}(n, R_p, R_s, w_0, \text{type}, 's')$ $[z, p, G] = \text{ellip}(n, R_p, R_s, w_0, \text{type}, 's')$	Эллиптический фильтр

Вид фильтра	<i>type</i>	w_0
ФНЧ	Отсутствует	Скаляр
ФВЧ	'high'	Скаляр
ПФ	Отсутствует	Вектор $[w_1 \ w_2]$
РФ	'stop'	Вектор $[w_1 \ w_2]$

Выбор минимально необходимого порядка фильтра n

's' – признак аналогового расчета

$[n, wn] = \text{buttord}(wp, ws, Rp, Rs, 's')$	Фильтр Баттерворта
$[n, wn] = \text{cheb1ord}(wp, ws, Rp, Rs, 's')$	Фильтр Чебышева первого рода
$[n, wn] = \text{cheb2ord}(wp, ws, Rp, Rs, 's')$	Фильтр Чебышева второго рода
$[n, wn] = \text{ellipord}(wp, ws, Rp, Rs, 's')$	Эллиптический фильтр

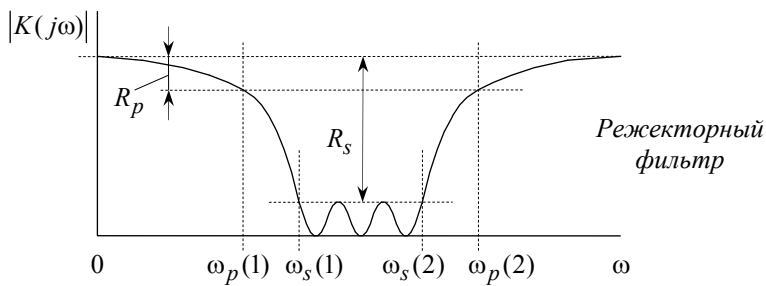
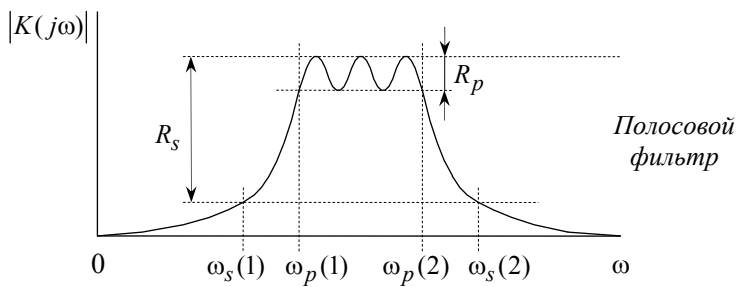
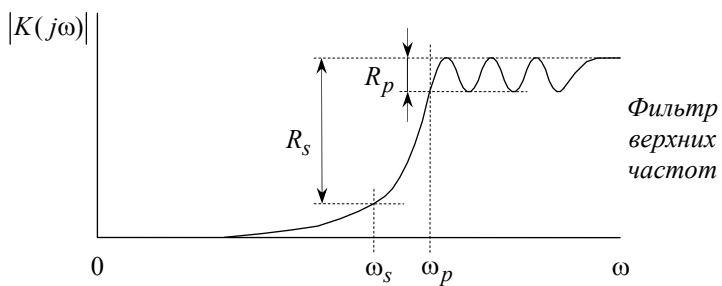
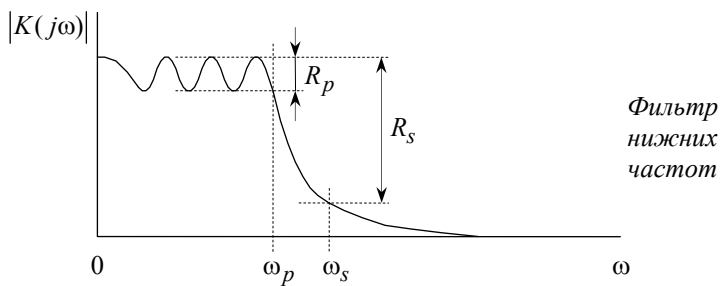


Рис. 2.1.10

Задание входных параметров этих функций поясняется рисунком 2.1.10, где ω_p , ω_s , R_p , R_s – то же самое, что и wp , ws , R_p , R_s : ω_p (wp) – границы полосы пропускания в рад/с, ω_s (ws) – границы полосы подавления в рад/с, R_p (R_p) – допустимая неравномерность в полосе пропускания в дБ, R_s (R_s) – минимально необходимое затухание в полосе подавления в дБ; ω_n (wn) – частота среза в рад/с.

Вид фильтра	Тип переменной wp , ws	Условия, которым должны удовлетворять значения wp , ws
ФНЧ	wp и ws – скаляры	$wp < ws$
ФВЧ	wp и ws – скаляры	$wp > ws$
ПФ	wp и ws – векторы: $wp = [wp(1) \quad wp(2)]$ $ws = [ws(1) \quad ws(2)]$	$ws(1) < wp(1) < wp(2) < ws(2)$
РФ	wp и ws – векторы: $wp = [wp(1) \quad wp(2)]$ $ws = [ws(1) \quad ws(2)]$	$wp(1) < ws(1) < ws(2) < wp(2)$

Тип фильтра	Частота среза wn (ω_n)
Баттерворта	$\omega_n = \frac{\omega_p}{2n \sqrt{10^{R_p/10} - 1}}$, $R_p = 3$ дБ
Чебышева первого рода	$wn = wp$
Чебышева второго рода	$wn = ws$
Эллиптический	$wn = wp$

2.2. z-преобразование последовательности чисел

На вход цифрового фильтра поступает дискретный сигнал, то есть последовательность отсчетов (или выборочных значений) входного сигнала $x_k, k \geq 0$, следующих один за другим, как правило, с определенным шагом (интервалом дискретизации) Δt ; k — номер отсчета (или момента времени, в который берется выборочное значение входного сигнала, $x_k \equiv 0$ при $k < 0$). Подобная последовательность отсчетов $y_k, k \geq 0$, с тем же шагом по оси времени вырабатывается на выходе цифрового фильтра ($y_k \equiv 0$ при $k < 0$). Таким образом, мы имеем дело с последовательностями чисел на входе и на выходе числового фильтра.

Удобным способом описания и анализа числовых последовательностей является так называемое z-преобразование, играющее по отношению к дискретным сигналам такую же роль, какую играют преобразования Фурье и Лапласа по отношению к непрерывным сигналам.

По определению z-преобразованием последовательности чисел $\{x_k, k \geq 0\}$ является функция

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k \cdot z^{-k}, \quad (2.2.1)$$

где z — формальная комплексная переменная. При использовании z-преобразования шаг между соседними числовыми отсчетами считается равным 1.

Примеры z -преобразования

Единичная импульсная функция (эквивалент δ -функции в случае аналоговых сигналов)

$$x_k^0 = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases}; \quad X_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^0 \cdot z^{-k} = 1 \cdot z^0 = 1. \quad (2.2.2)$$

Единичный скачок (эквивалент функции Хевисайда в случае аналоговых сигналов)

$$x_k = 1, k \geq 0; \quad X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot (z^{-1})^k = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (2.2.3)$$

В этом примере и, как правило, далее суммирование производится по правилу нахождения суммы *s* бесконечной убывающей геометрической прогрессии с соответствующими начальным членом a_1 и знаменателем q : $s = a_1 / (1 - q)$. В частности, ряд в (2.2.3) сходится при $|z^{-1}| < 1$, то есть при $|z| > 1$.

Дискретная показательная (экспоненциальная) функция

$$x_k = a^k, k \geq 0;$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\Gamma} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\Gamma} 1 \cdot (az^{-1})^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (2.2.4)$$

(ряд в (2.2.4) сходится при $|az^{-1}| < 1$, то есть при $|z| > |a|$).

Дискретная затухающая синусоида

$$\begin{cases} x_k = a^k \cos(\omega k + \varphi) = a^k \frac{e^{j(\omega k + \varphi)} + e^{-j(\omega k + \varphi)}}{2}, & k \geq 0, \\ X(z) = \frac{e^{j\varphi}}{2} \sum_{k=0}^{\Gamma} \left(a e^{j\omega} z^{-1} \right)^k + \frac{e^{-j\varphi}}{2} \sum_{k=0}^{\Gamma} \left(a e^{-j\omega} z^{-1} \right)^k = \\ = \frac{\cos \varphi - a \cos(\omega - \varphi) z^{-1}}{1 - 2a \cos \omega \cdot z^{-1} + a^2 z^{-2}}. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Связь между z-преобразованием и преобразованиями Лапласа и Фурье

Пусть

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k \cdot \delta(t - k \cdot \Delta t),$$

где Δt – интервал дискретизации, и $X(z)$ – z-преобразование последовательности $\{x_k, k \geq 0\}$:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k \cdot z^{-k}.$$

Преобразование Лапласа сигнала $s(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} S(p) &= \int_0^{\Gamma} s(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=0}^{\Gamma} x(k) \int_0^{\Gamma} \delta(t - k\Delta t) e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k e^{-pk\Delta t} = \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k \left(e^{p\Delta t} \right)^{-k} = X(e^{p\Delta t}), \end{aligned}$$

где роль комплексной переменной z играет выражение $e^{p\Delta t}$. Таким образом,

$$X(z) = S(p) \Big|_{p=\frac{1}{\Delta t} \ln z}.$$

Аналогично для преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} s(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=0}^{\Gamma} x(k) \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \delta(t - k\Delta t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k e^{-j\omega k\Delta t} = \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k \left(e^{j\omega\Delta t} \right)^{-k} = X(e^{j\omega\Delta t}) \end{aligned}$$

и

$$X(z) = S(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{1}{j\Delta t} \ln z}.$$

Свойства z -преобразования

Линейность

$$\{a \cdot x_k^{(1)} + b \cdot x_k^{(2)}\} \Leftrightarrow \{a \cdot X_1(z) + b \cdot X_2(z)\}, \quad (2.2.6)$$

где

$$X_1(z) = \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k^{(1)} \cdot z^{-k} \quad \text{и} \quad X_2(z) = \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k^{(2)} \cdot z^{-k}.$$

Сдвиг на k_0 интервалов дискретизации
в сторону более поздних моментов времени

Пусть $y_k = x_{k-k_0}$, тогда

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\Gamma} y_k z^{-k} = \sum_{k=k_0}^{\Gamma} x_{k-k_0} z^{-k} = \dots$$

(замена переменной: $k - k_0 = k'$, $k = k' + k_0$)

$$\dots = \sum_{k'=0}^{\Gamma} x_{k'} \cdot z^{-(k'+k_0)} = z^{-k_0} \sum_{k'=0}^{\Gamma} x_{k'} \cdot z^{-k'} = z^{-k_0} X(z). \quad (2.2.7)$$

В частности, умножение z -преобразования $X(z)$ последовательности $\{x_k, k \geq 0\}$ на z^{-1} означает сдвиг этой последовательности (ее задержку) на один шаг.

Свертка двух последовательностей

Предположим, что

$$f_n = \sum_{k=0}^n x_k \cdot y_{n-k}, \quad \text{или, что то же самое,} \quad f_n = \sum_{k=0}^n x_{n-k} \cdot y_k.$$

Тогда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\Gamma} f_n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\Gamma} \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\Gamma} \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} z^{-k} \cdot z^{-(n-k)} = \sum_{m=-k}^{\Gamma} \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k z^{-k} \cdot y_m z^{-m} = \dots$$

Последний переход в преобразованиях требует пояснений: а) $y_{n-k} = 0$ при $k > n$, поэтому в сумме по k оказалось возможным заменить верхний предел на 1; б) введена новая переменная $n-k = m$; в) в дальнейшем нижний предел в сумме по m можно заменить на $m = 0$, поскольку при $m < 0$ все $y_m = 0$. В продолжение преобразований получаем

$$F(z) = \dots = \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k z^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{\Gamma} y_m z^{-m} = X(z) \cdot Y(z). \quad (2.2.8)$$

Таким образом, z -преобразование свертки $\{f_n, n \geq 0\}$ равно произведению z -преобразований сворачиваемых числовых последовательностей $\{x_k, k \geq 0\}$ и $\{y_k, k \geq 0\}$.

Обратное z -преобразование

имеет вид

$$x_k = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz,$$

где интеграл берется по произвольному замкнутому контуру в области сходимости $X(z)$, охватывающему все полюсы $X(z)$.

Пример

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Первое слагаемое соответствует скачку с амплитудой, равной 2; второе слагаемое соответствует дискретной показательной функции с основанием $a = 1/2$. Поэтому данная функция $X(z)$ является z -преобразованием последовательности

$$x_k = 2 - \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 0.$$

2.3. Описание дискретных систем

Сигнал y_k , формируемый цифровым фильтром на выходе в k -й момент времени, зависит не только от значения входного сигнала x_k в тот же самый момент времени, но зависит также от предыдущих значений входного сигнала $x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-m}$, а также от того, в каком состоянии оказался к этому времени цифровой фильтр. Состояние фильтра в свою очередь определяется тем, какие значения $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}$ возникали на его выходе ранее. Как и в случае с аналоговыми фильтрами, ограничимся рассмотрением только таких случаев, когда входные и выходные сигналы цифрового фильтра связаны линейным соотношением:

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m} - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots - a_n y_{k-n}, \quad (2.3.1)$$

причем в вещественных системах, о которых здесь идет речь, все коэффициенты $\{b_i, i = 0, 1, \dots, m\}$ и $\{a_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ являются действительными числами и не зависят от времени. Равенство можно переписать в виде

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m}. \quad (2.3.2)$$

Применим z -преобразование к левой и правой частям равенства (2.3.2), умножив обе части этого равенства на z^{-k} и осуществив суммирование по k от 0 до Γ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\Gamma} y_k z^{-k} + a_1 z^{-1} \sum_{k=0}^{\Gamma} y_{k-1} z^{-(k-1)} + a_2 z^{-2} \sum_{k=0}^{\Gamma} y_{k-2} z^{-(k-2)} + \dots + \\ + a_n z^{-n} \sum_{k=0}^{\Gamma} y_{k-n} z^{-(k-n)} = b_0 \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k z^{-k} + b_1 z^{-1} \sum_{k=0}^{\Gamma} x_{k-1} z^{-(k-1)} + \end{aligned}$$

$$+ b_2 z^{-2} \sum_{k=0}^{\Gamma} x_{k-2} z^{-(k-2)} + \dots + b_m z^{-m} \sum_{k=0}^{\Gamma} x_{k-m} z^{-(k-m)}. \quad (2.3.3)$$

С учетом того, что все значения y_i и x_i оказываются равными 0 при $i < 0$, видим, что каждая из сумм в левой части последнего равенства представляет собой z -преобразование $Y(z)$ последовательности сигналов на выходе фильтра, а каждая сумма в правой части (2.3.3) – z -преобразование $X(z)$ последовательности сигналов на входе фильтра. Поэтому

$$\begin{aligned} Y(z) \cdot (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) &= \\ = X(z) \cdot (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Отношение $Y(z)$ к $X(z)$ носит название **функции передачи** цифрового фильтра:

$$H(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (2.3.5)$$

Если $m \neq n$, то **порядком фильтра** называется большее из этих чисел.

В аналоговом случае функция передачи $H(s)$ является преобразованием Лапласа от импульсной характеристики.

Покажем, что функция передачи цифрового фильтра играет ту же роль, какую играет функция передачи аналогового четырехполюсника.

По определению **импульсная характеристика** цифрового фильтра $\{h_0, h_1, \dots, h_k, \dots\} = \{h_k, k \geq 0\}$ – это реакция цифрового

фильтра на единичный импульс $x_k^0 = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases}$:

$$\{h_k, k \geq 0\} \equiv \{y_k, k \geq 0\} \Big|_{\{x, k \geq 0\} = x_k^0}.$$

При произвольном входном сигнале $\{x_k, k \geq 0\}$ сигнал на выходе в n -й момент времени равен

$$y_n = x_0 \cdot h_n + x_1 \cdot h_{n-1} + \dots + x_n \cdot h_0, \quad n \geq 0,$$

или

$$y_n = \sum_{k=0}^n x_k \cdot h_{n-k}, \quad n \geq 0. \quad (2.3.6)$$

Осуществим z -преобразование левой и правой частей равенства (2.3.6). Поскольку z -преобразование свертки равно произведению z -преобразований сворачиваемых последовательностей, получим

$$Y(z) = X(z) \cdot \sum_{k=0}^{\Gamma} h_k z^{-k}.$$

Отсюда следует, что сумма в правой части последнего равенства равна отношению $Y(z)/X(z)$, которое по определению есть функция передачи фильтра:

$$\sum_{k=0}^{\Gamma} h_k z^{-k} = \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z).$$

Таким образом, *функция передачи цифрового фильтра – это z -преобразование его импульсной характеристики.*

У вещественной системы все $\{h_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ – действительные постоянные.

Система *устойчива*, если, начиная с некоторого k , $y_k \rightarrow 0$ при $x_k = 0$, или, другими словами, в случае, когда $\lim_{k \rightarrow \Gamma} h_k = 0$.

В аналоговом случае в результате замены комплексной переменной s на $j\omega$ функция передачи $H(s)$ становится комплексным коэффициентом передачи $K(j\omega)$, который представляет собой преобразованием Фурье от импульсной характеристики рассматриваемой цепи $h_{\Pi}(t)$.

Частотную характеристику цифрового фильтра $K(j\omega)$ (эквивалент комплексного коэффициента передачи в аналоговом случае) можно найти как преобразование Фурье от импульсной характеристики путем замены комплексной переменной z в выражении $H(z)$ в (2.3.5) на $e^{j\omega\Delta t}$ (см. *Связь между z -преобразованием и преобразованиями Лапласа и Фурье* в начале 2.2):

$$K(j\omega) = H(e^{j\omega\Delta t}) = \sum_{k=0}^{\Gamma} h_k e^{-j\omega k\Delta t}. \quad (2.3.7)$$

$K(j\omega)$ является периодической функцией частоты ω с периодом, равным частоте дискретизации $2\pi / \Delta t$.

Спектр входного сигнала (точнее, та часть преобразования Фурье от дискретизированного сигнала $s(t) = \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k \cdot \delta(t - k \cdot \Delta t)$, которая относится к области положительных частот) не должен выходить за пределы рабочего диапазона частот дискретной системы от 0 до $\omega_{\text{гр}}$, где $\omega_{\text{гр}} = \pi / \Delta t$ — граничная частота (частота Найквиста): как и в аналоговом случае, $\omega_{\text{гр}}$ вдвое меньше частоты дискретизации.

При расчете амплитудно-частотной характеристики

в аналоговом случае точка на комплексной плоскости, изображающая аргумент s функции передачи $H(s)$, движется вдоль мнимой оси $s = j\omega$;

в дискретном случае точка на комплексной плоскости, изображающая аргумент z

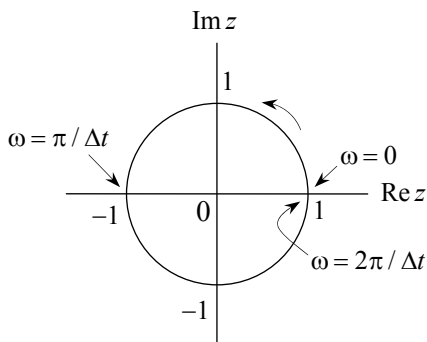


Рис. 2.3.1

функции передачи $H(z)$, движется по единичной окружности $z = e^{j\omega\Delta t}$: $\omega = \pi / \Delta t$ – граничная частота (частота Найквиста), $\omega = 2\pi / \Delta t$ – частота дискретизации (рис. 2.3.1).

Нули $\{z_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ **и полюсы** $\{p_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ функции передачи:

$$H(z) = G \cdot \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \dots (1 - z_m z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_n z^{-1})}, \quad (2.3.8)$$

где G – коэффициент усиления. У вещественной системы коэффициент G – действительное число, а нули и полюсы либо действительные, либо комплексно-сопряженные числа.

Полюсы и вычеты. Поскольку функция передачи $H(z)$ является дробно-рациональной, она может быть представлена в виде суммы простых дробей:

$$H(z) = \frac{r_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{r_n}{1 - p_n z^{-1}} + c, \quad (2.3.9)$$

где $\{p_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, как и ранее, – полюсы функции $H(z)$, $\{r_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ – совокупность вычетов, а целая часть c в случае цифровых фильтров, когда не накладывается ограничения на степени полиномов в числителе и знаменателе функции передачи $H(z)$, при $m \geq n$ имеет вид

$$c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{m-n} z^{-(m-n)}.$$

В случае l -кратного i -го полюса ему соответствует не одна простая дробь в $H(z)$, а следующая сумма дробей:

$$\frac{r_{i1}}{1 - p_i z^{-1}} + \frac{r_{i2}}{(1 - p_i z^{-1})^2} + \dots + \frac{r_{il}}{(1 - p_i z^{-1})^l}. \quad (2.3.10)$$

Из правила, по которому z -преобразование $X(z)$ дискретной показательной функции $\{x_k = a^k, k \geq 0\}$ равно $\frac{1}{1 - az^{-1}}$ (см.

(2.2.4)), следует, что значение импульсной характеристики цифрового фильтра в момент времени $k \geq 0$ представляет собой сумму слагаемых вида $r_i p_i^k$, $i = 1, 2, \dots, n$, каждое из которых соответствует слагаемому $\frac{r_i}{1 - p_i z^{-1}}$ в функции передачи $H(z)$.

Цифровой фильтр *устойчив*, если в импульсной характеристике $\{h_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ все слагаемые вида $r_i p_i^k$ стремятся к 0 при $k \rightarrow \Gamma$, то есть в случае, когда все $|p_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, как это следует из требования, чтобы выполнялось условие $\lim_{k \rightarrow \Gamma} h_k = 0$.

Примеры фильтров 1-го порядка

В общем случае функция передачи цифрового фильтра 1-го порядка имеет вид

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_0 - \frac{b_1}{a_1}}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

Единственный полюс p_1 равен $-a_1$, а единственный нуль z_1 равен $-\frac{b_1}{b_0}$. Система устойчива при $|a_1| < 1$. Импульсную характеристику находим по правилам, следующим из примеров z -преобразования (2.2.2) и (2.2.3):

$$h_k = \begin{cases} \frac{b_1}{a_1} + \left(b_0 - \frac{b_1}{a_1}\right) \cdot (-a_1)^k \Big|_{k=0} = b_0, & k = 0, \\ \left(b_0 - \frac{b_1}{a_1}\right) \cdot (-a_1)^k, & k > 0. \end{cases}$$

Комплексный коэффициент передачи равен

$$K(j\omega) = H(e^{j\omega\Delta t}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega\Delta t}}{1 + a_1 e^{-j\omega\Delta t}},$$

а его модуль дает амплитудно-частотную характеристику:

$$|K(j\omega)| = \left| \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega\Delta t}}{1 + a_1 e^{-j\omega\Delta t}} \right| = \sqrt{\frac{b_0^2 + b_1^2 + 2b_0b_1 \cos(\omega\Delta t)}{1 + a_1^2 + 2a_1 \cos(\omega\Delta t)}}$$

(Δt – интервал дискретизации во временной области).

Выбором конкретных значений коэффициентов b_0, b_1, a_1 можно получить частотные характеристики цифрового фильтра, подобные характеристике *дифференцирующей цепи* (частный случай фильтра верхних частот) или характеристике *интегрирующей цепи* (частный случай фильтра нижних частот).

В частности, функция передачи

$$H(z) = \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+pz^{-1}}, \quad -1 < p < 1$$

(p – полюс), дает возрастающую с частотой АЧХ $|K(j\omega)|$ со значениями 0 на частоте $\omega = 0$ и 1 на граничной частоте $\omega = \pi / \Delta t$; значением p определяется крутизна нарастания АЧХ такого ФВЧ.

Аналогично, функция передачи

$$H(z) = \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-pz^{-1}}, \quad -1 < p < 1,$$

дает убывающую с частотой АЧХ $|K(j\omega)|$ со значениями 1 на частоте $\omega = 0$ и 0 на граничной частоте $\omega = \pi / \Delta t$; значением p определяется скорость спада АЧХ такого ФНЧ.

Примеры фильтров 2-го порядка

В общем случае функция передачи цифрового фильтра 2-го порядка имеет вид

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Система устойчива при

$$\begin{cases} |a_1| < 2, \\ |a_1| - 1 < a_2 < 1. \end{cases}$$

Выбором конкретных значений коэффициентов b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 можно получить частотные характеристики цифрового фильтра, подобные характеристике *резонансного усилителя с колебательным LC-контуром* (частный случай полосового фильтра) или характеристике *усилителя с 2Т-образным мостом в цепи обратной связи* (частный случай режекторного фильтра).

В частности, амплитудно-частотная характеристика $|K(j\omega)|$ фильтра с функцией передачи

$$H(z) = \frac{a_2 - 1}{2} \cdot \frac{1 - z^{-2}}{1 - (a_2 + 1)\cos(\omega_0\Delta t)z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

имеет вид резонансной кривой (рис. 2.3.2) с коэффициентом передачи, равным 1, на резонансной частоте $f_0 = \omega_0 / (2\pi)$: от параметра a_2 зависит ширина полосы пропускания: она тем уже, чем ближе a_2 к 1.

Аналогично, функция передачи

$$H(z) = \frac{a_2 + 1}{2} \cdot \frac{1 - 2\cos(\omega_0\Delta t)z^{-1} + z^{-2}}{1 - (a_2 + 1)\cos(\omega_0\Delta t)z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

соответствует режекторному фильтру (рис. 2.3.3) с коэффициентом передачи, равным 0, на центральной частоте $f_0 = \omega_0 / (2\pi)$; параметром a_2 определяется ширина полосы подавления, которая тем уже, чем ближе a_2 к 1.

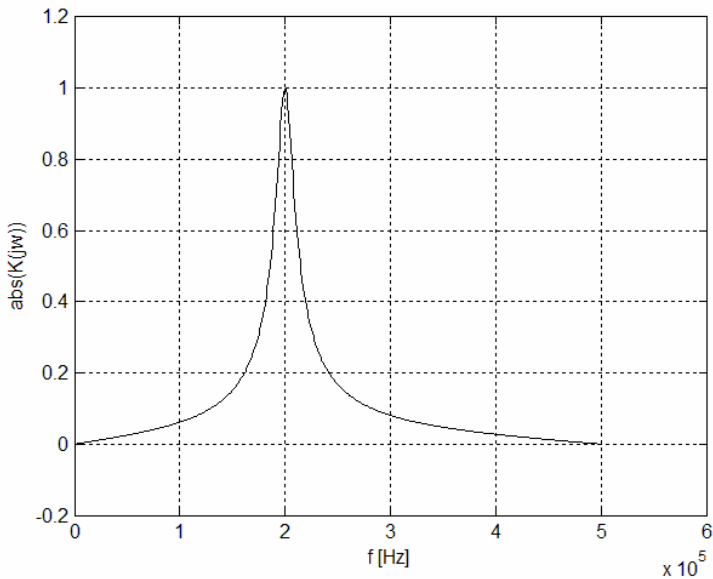


Рис. 2.3.2. Пример: `resonator(10-6, 2*105, 0.9)`

```
function resonator(delta_t,f0,a2)
% Резонатор 2-го порядка
% delta_t - интервал дискретизации
% по оси времени [с];
% f0 - резонансная частота [Гц];
% a2 - параметр, ответственный
% за ширину полосы пропускания;
% Пример обращения:
% resonator(10-6, 2*105, 0.9)

b=(a2-1)/2*[1 0 -1];
a=[1 -(a2+1)*cos(2*pi*f0*delta_t) a2];
dw=pi/511;
w=0:dw:pi;
h=freqz(b,a,w);
plot(w/(2*pi*delta_t),abs(h));
ylim([-0.2 1.2]); grid on;
xlabel('f [Hz]');
ylabel('abs(K(jw))');
```

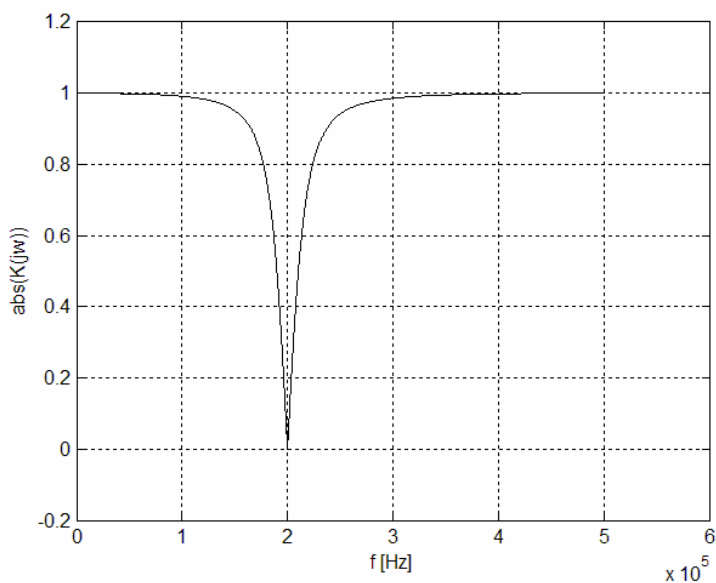


Рис. 2.3.3. Пример: `rejector(10-6, 2*105, 0.7)`

```
function rejector(delta_t,f0,a2)
% Режектор 2-го порядка
% delta_t - интервал дискретизации
% по оси времени [с];
% f0 - центральная частота [Гц];
% a2 - параметр, ответственный
% за ширину полосы подавления;
% Пример обращения:
% rejector(10-6, 2*105, 0.7)
```

```
cosw0dt=cos(2*pi*f0*delta_t);
b=(a2+1)/2*[1 -2*cosw0dt +1];
a=[1 -(a2+1)*cosw0dt a2];
dw=pi/4095;
w=0:dw:pi;
h=freqz(b,a,w);
plot(w/(2*pi*delta_t),abs(h));
ylim([-0.2 1.2]); grid on;
xlabel('f [Hz]');
ylabel('abs(K(jw))');
```

2.4. Рекурсивные фильтры

Прямая реализация

На рис. 2.4.1 показана структурная схема цифрового устройства, напрямую осуществляющего вычисление y_k в k -й момент времени по правилу (2.3.1); здесь ради удобства соотношение (2.3.1) повторено:

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_m x_{k-m} - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots - a_n y_{k-n}. \quad (2.4.1)$$

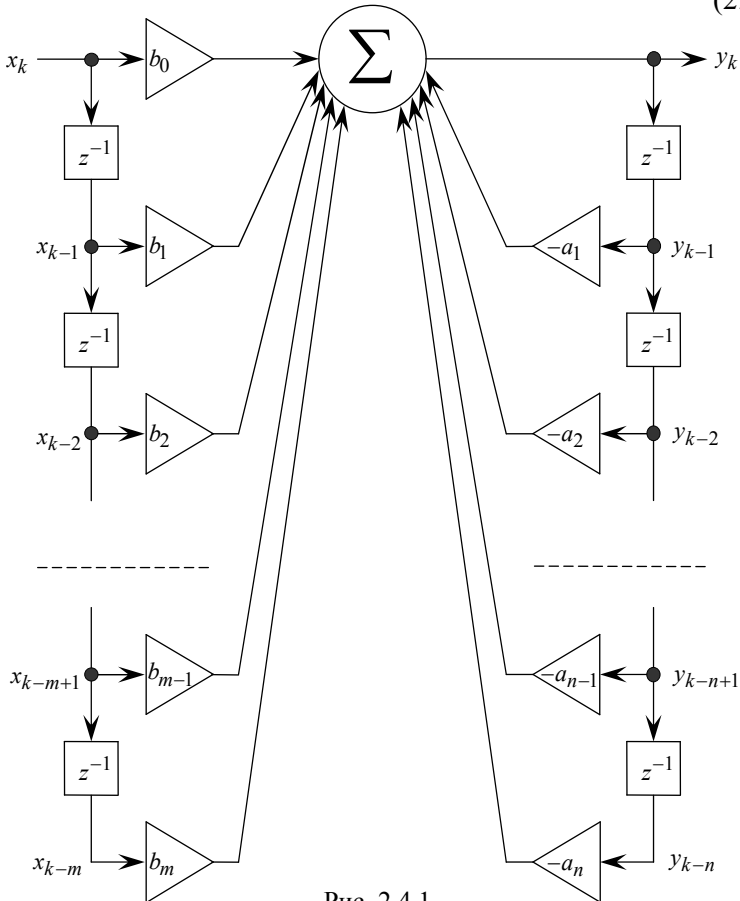


Рис. 2.4.1

По сложившейся традиции блоки, отмеченные на этом рисунке символом z^{-1} , означают задержку на 1 такт (см. (2.2.7)): сигнал на выходе такого блока равен тому, что было на его входе один такт назад. При прохождении сигнала через «усилитель», изображенный в виде треугольника, происходит *умножение* сигнала на указанный коэффициент из числа коэффициентов $\{b_i, i = 0, 1, \dots, m\}$ и $\{a_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ в (2.4.1). На каждом такте происходит сложение сигналов, поступающих на входы сумматора Σ .

Подобный рисунок называют также *сигнальным графом*: надписи вне блоков задержки и «усилителей» указывают значения сигналов в соответствующих точках в k -й момент времени.

На практике к моменту поступления очередного сигнала x_k на вход такого устройства все сигналы $\{x_i, i = k - 1, k - 2, \dots, k - m\}$ и $\{y_i, i = k - 1, k - 2, \dots, k - n\}$ хранятся в определенных ячейках памяти, в k -й момент времени извлекаются оттуда, умножаются на нужный коэффициент и складываются. При переходе к следующему такту достаточно обновить содержимое ячеек памяти, где хранились самые ранние из уже использованных значений x_i и y_j , и начать сканирование используемых участков памяти с ячеек, номера которых на 1 больше (циклически).

Каноническая форма

Путем небольших преобразований структурную схему цифрового устройства можно упростить.

Согласно определению (2.3.5) функция передачи $H(z)$ служит для того, чтобы по z -преобразованию $X(z)$ входного сигнала находить z -преобразование $Y(z)$ выходного сигнала. Если разбить функцию $H(z)$ на два сомножителя $H_1(z)$ и $H_2(z)$, то можно будет считать, что преобразование входной последова-

тельности $\{x_k\}$ в выходную последовательность $\{y_k\}$ осуществляется в два приема, а именно сначала последовательность $\{x_k\}$ преобразуется в промежуточную последовательность $\{w_k\}$, а уже затем эта новая последовательность $\{w_k\}$ преобразуется в последовательность $\{y_k\}$ (рис. 2.4.2):

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot X(z) = \\ = H_2(z) \cdot (H_1(z) \cdot X(z)) = H_2(z) \cdot W(z),$$

где $W(z) = H_1(z) \cdot X(z)$ – z -преобразование промежуточной последовательности $\{w_k\}$.

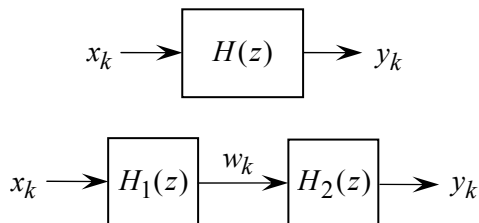


Рис. 2.4.2

Образуем k -е значение промежуточной последовательности $\{w_k\}$ из вновь поступившего входного сигнала x_k и n предыдущих значений $w_i, i = k-1, k-2, \dots, k-n$, по тому же принципу, по которому ранее учитывались предыдущие значения сигнала $y_i, i = k-1, k-2, \dots, k-n$, формируемого устройством на выходе (см. (2.4.1)):

$$w_k = x_k - a_1 w_{k-1} - a_2 w_{k-2} - \dots - a_n w_{k-n}.$$

Перенесем все слагаемые, содержащие $w_i, i = k-1, k-2, \dots, k-n$, из правой части последнего равенства в левую, умножим обе части получающегося равенства на z^{-k} и осуществим слева и справа суммирование по k в пределах от 0 до ∞ , как это было сделано в (2.3.3) и (2.3.4); получим

$$w_k + a_1 w_{k-1} + a_2 w_{k-2} + \dots + a_n w_{k-n} = x_k,$$

$$\sum_{k=0}^{\Gamma} (w_k + a_1 w_{k-1} + a_2 w_{k-2} + \dots + a_n w_{k-n}) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\Gamma} x_k \cdot z^{-k},$$

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}) \cdot W(z) = X(z).$$

Последнее соотношение позволяет найти функцию передачи $H_1(z)$ части устройства, обеспечивающей преобразование входной последовательности $\{x_k\}$ в промежуточную последовательность $\{w_k\}$:

$$H_1(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (2.4.2)$$

Пусть теперь значение y_k выходного сигнала в k -й момент времени формируется по правилу

$$y_k = b_0 w_k + b_1 w_{k-1} + b_2 w_{k-2} + \dots + b_m w_{k-m}.$$

Поступая с последним равенством аналогично выкладкам, приведшим к соотношению (2.4.2), имеем

$$\sum_{k=0}^{\Gamma} y_k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\Gamma} (b_0 w_k + b_1 w_{k-1} + b_2 w_{k-2} + \dots + b_m w_{k-m}) \cdot z^{-k},$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}) \cdot W(z).$$

Следовательно, функция передачи $H_2(z)$ части устройства, обеспечивающей преобразование промежуточной последовательности $\{w_k\}$ в выходную последовательность $\{y_k\}$, равна

$$H_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y(z)}{W(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}. \quad (2.4.3)$$

Таким образом, $H_2(z) \cdot H_1(z) = H(z) = Y(z) / X(z)$, и поэтому устройство, структурная схема которого изображена на рис. 2.4.3, обеспечивает желаемое преобразование входной последователь-

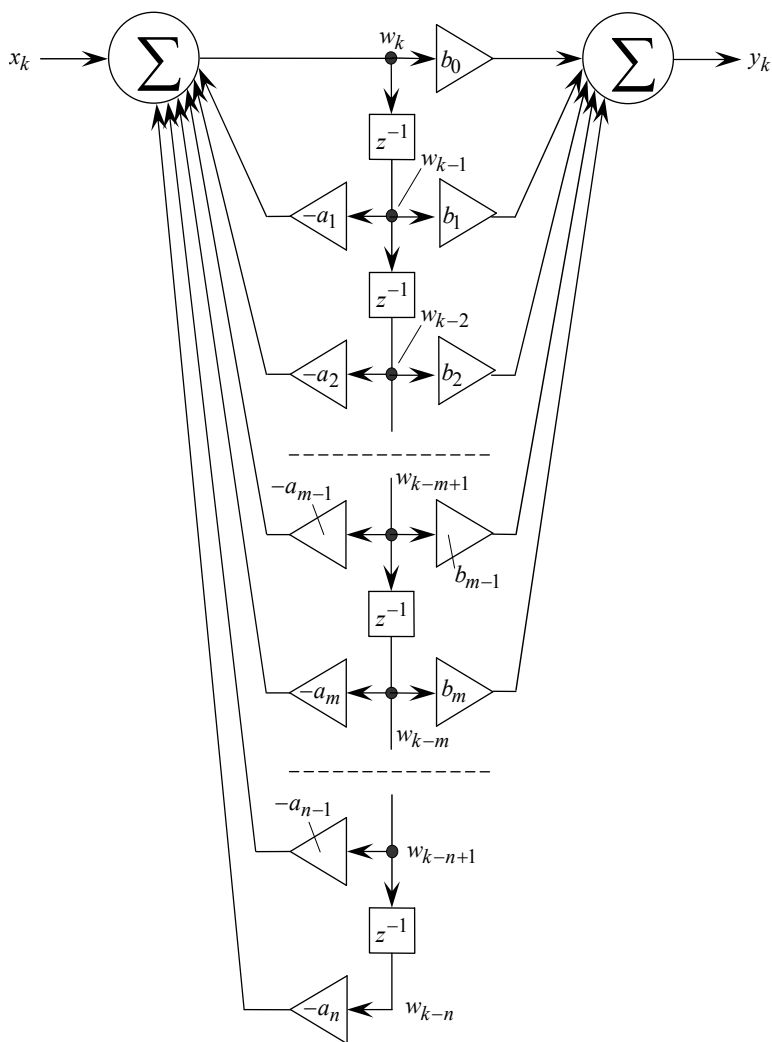


Рис. 2.4.3

ности $\{x_k\}$ в выходную последовательность $\{y_k\}$.

Преимущество канонической формы по сравнению с прямой реализацией заключается в меньшем количестве требуемых блоков задержки (или, что то же, в меньшем необходимом объеме памяти).

Транспонированная схема

Путем пристального разглядывания структурной схемы, приведенной на рис. 2.4.4, нетрудно убедиться в том, что в ней также реализуется алгоритм (2.4.1) вычисления очередного значения y_k выходного сигнала в k -й момент времени.

Достоинство этой схемы состоит в максимальном распараллеливании арифметических действий и малом числе слагаемых у каждого сумматора: задержка между моментом поступления сигнала x_k и моментом готовности выходного сигнала y_k определяется только временем умножения x_k на коэффициент b_0 и временем сложения в верхнем сумматоре; выполнение всех остальных умножений и сложений может занимать практически весь интервал времени между соседними моментами поступления входных сигналов и выработки очередных значений выходного сигнала.

Замечание. Показанная на рис. 2.4.4 структурная схема демонстрирует, в частности, алгоритм, по которому производятся вычисления в функции $y = \text{filter}(b, a, x)$, являющейся в MATLAB основной функцией дискретной фильтрации произвольного сигнала x . Необходимо только уточнить, что всем функциям, относящимся к цифровым фильтрам, в том числе и функции $y = \text{filter}(b, a, x)$, требуется, чтобы длина вектора b , представляющего собой набор коэффициентов полинома-числителя функции передачи $H(z)$, равнялась длине вектора a , являющегося набором коэффициентов полинома-знаменателя функции передачи. Для этого при $m < n$ необходимо дополнить вектор b нулями, что можно сделать, например, с помощью функции $[b1, a1] = \text{eqtflength}(b, a)$ (см. 2.6).

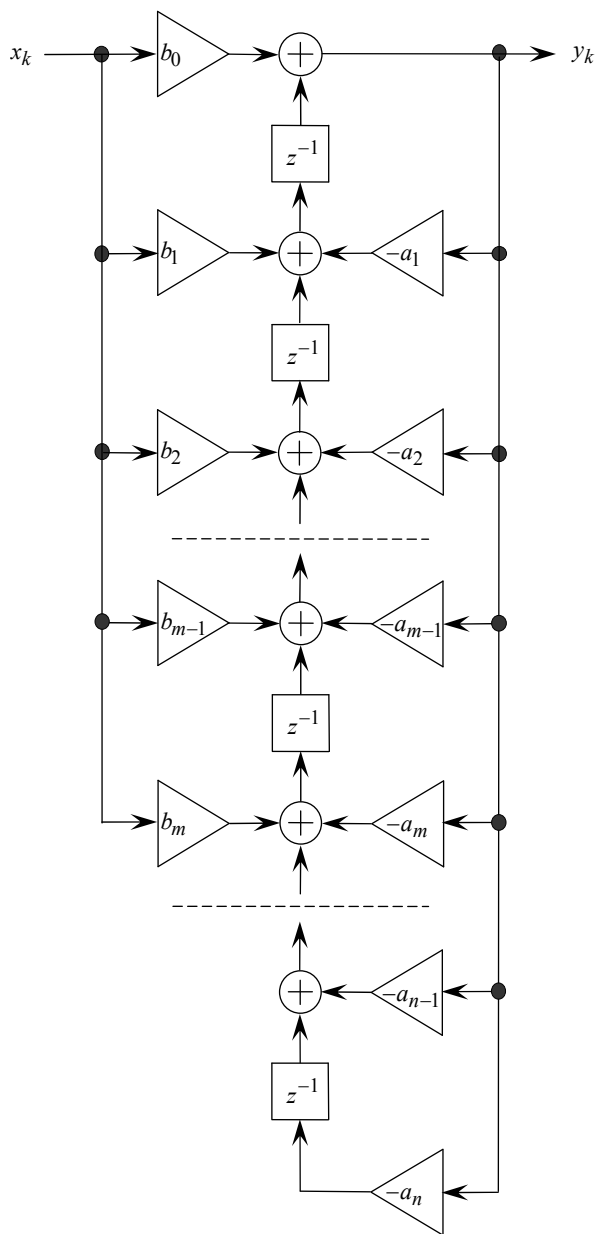


Рис. 2.4.4

Последовательное (каскадное) включение

Отсчеты сигналов и числовые параметры в цифровых фильтрах бывают представлены в определенном формате, то есть с конечной точностью. Вследствие задания коэффициентов числителя и знаменателя функции передачи конечным числом разрядов происходит искажение частотных характеристик. В процессе вычислений может происходить переполнение разрядной сетки. На результате может отрицательно сказаться округление результатов промежуточных вычислений. Анализ этих эффектов лежит вне рамок нашего рассмотрения.

Однако можно ослабить проявление этих эффектов, применяя последовательное или параллельное включение отдельных секций 2-го порядка. Преобразуя полиномы в числителе и знаменателе функции передачи $H(z)$ в произведение сомножителей (см. (2.3.8)) и желая сохранить только вещественные коэффициенты даже при наличии комплексно-сопряженных корней, можно в самом общем случае записать функцию $H(z)$ в виде произведения сомножителей, каждый из которых есть отношение двух трехчленов:

$$H(z) = \prod_{i=1}^l \frac{b_0^{(i)} + b_1^{(i)}z^{-1} + b_2^{(i)}z^{-2}}{1 + a_1^{(i)}z^{-1} + a_2^{(i)}z^{-2}} = \prod_{i=1}^l H_i(z), \quad (2.4.4)$$

где $H_i(z)$ – функция передачи i -й секции 2-го порядка (рис. 2.4.5). Когда в числителе или в знаменателе должны находиться двучлен или константа, достаточно положить равными нулю соответствующие коэффициенты. Если фактическое число сомножителей в числителе и в знаменателе различно, можно недостающие сомножители дополнить единицами.

Располагая такими секциями 2-го порядка с желаемыми функциями передачи $H_i(z)$, можно, включив их последовательно, получить требуемую от фильтра в целом функцию передачи $H(z)$ (рис. 2.4.6).

Последовательная реализация часто используется на практике, обеспечивая заметное уменьшение погрешностей, связанных с ошибками округления.

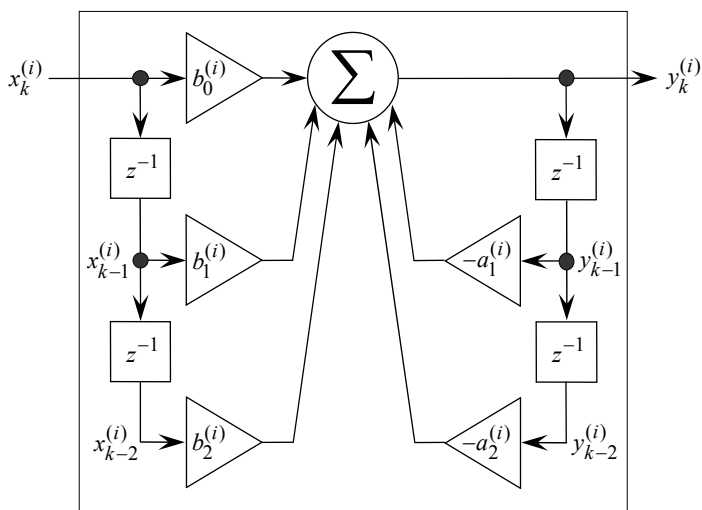


Рис. 2.4.5

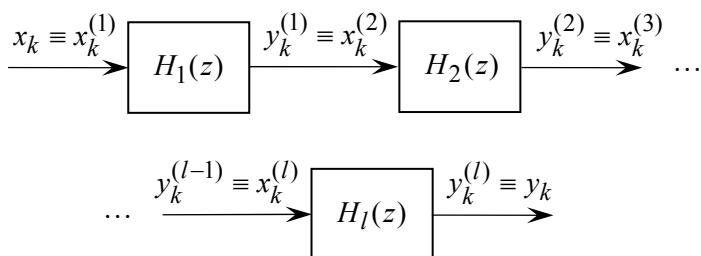


Рис. 2.4.6

Параллельное включение

Представляя функцию передачи в виде простых дробей (см. (2.3.9)) при наличии комплексно-сопряженных полюсов, также можно ограничиться только вещественными коэффициентами, и тогда среди дробей будут такие, у которых в знаменателе сохранится квадратичный трехчлен в отношении переменной z^{-1} . При этом, правда, степень полинома в числителе дроби никогда не будет больше 1. Но ради общности можно представить себе подачу входного сигнала x_k параллельно на входы l секций 2-го порядка с подходящими значениями коэффициентов $b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_1^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}$. Тогда, суммируя выходные сигналы секций 2-го порядка, мы в силу линейности z -преобразования получим желаемый результат y_k на общем выходе (рис. 2.4.7).

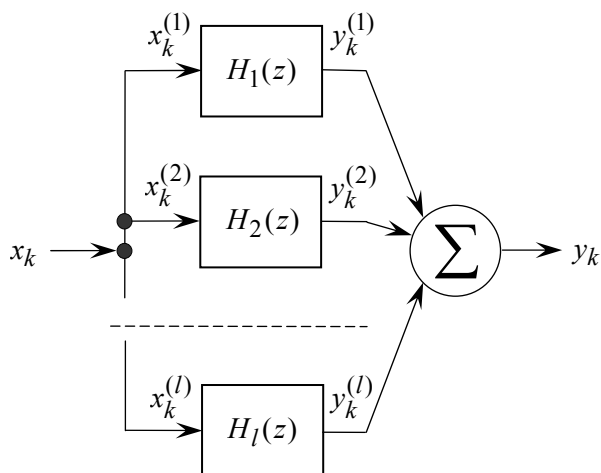


Рис. 2.4.7

2.5. Проектирование дискретных фильтров по их аналоговым прототипам

При проектировании цифрового фильтра по аналоговому прототипу нужно преобразовать функцию передачи аналогового фильтра $H(s)$ в функцию передачи цифрового фильтра $H(z)$, то есть осуществить переход из s -области в z -область. Точного совпадения частотных характеристик ожидать не приходится, поскольку комплексный коэффициент передачи цифрового фильтра является периодической функцией частоты.

Метод билинейного преобразования

Частотные характеристики аналогового фильтра-прототипа и цифрового фильтра будут похожи одна на другую, если в результате замены переменной при переходе из s -области в z -область мнимая ось в s -области будет отображена в единичную окружность в z -области, и при этом область устойчивости (левая полуплоскость в s -области) перейдет внутрь единичной окружности в z -области.

Эти условия оказываются выполненными и при этом сохраняется также дробно-рациональный характер функции передачи при так называемом *билинейном z -преобразовании*:

$$s = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (2.5.1)$$

Задаваемое равенством (2.5.1) правило перехода от переменной s к переменной z позволяет найти связь между частотой ω_a в аналоговом случае и частотой ω_d в дискретном случае. Для этого достаточно подставить в (2.5.1) $s = j\omega_a$ и $z = e^{j\omega_d \Delta t}$:

$$j\omega_a = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega_d \Delta t}}{1 + e^{-j\omega_d \Delta t}} = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{e^{\frac{j\omega_d \Delta t}{2}} - e^{-\frac{j\omega_d \Delta t}{2}}}{e^{\frac{j\omega_d \Delta t}{2}} + e^{-\frac{j\omega_d \Delta t}{2}}} = \frac{2}{\Delta t} \cdot \left(j \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_d \Delta t}{2} \right) \right),$$

откуда

$$\omega_a = \frac{2}{\Delta t} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_d \Delta t}{2} \right) \text{ и } \omega_d = \frac{2}{\Delta t} \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_a \Delta t}{2} \right). \quad (2.5.2)$$

Поэтому для комплексных коэффициентов передачи $K_d(j\omega_d)$ и $K_a(j\omega_a)$ цифрового и аналогового фильтров соответственно выполняются соотношения:

$$\begin{cases} K_d(j\omega_d) = K_a \left(j \frac{2}{\Delta t} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_d \Delta t}{2} \right) \right), \\ K_a(j\omega_a) = K_d \left(j \frac{2}{\Delta t} \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_a \Delta t}{2} \right) \right). \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Рис. 2.5.1 служит иллюстрацией того, как трансформируется ось частот при переходе от аналогового случая к дискретному. В области низких частот амплитудно-частотные характеристики аналогового и цифрового фильтров почти совпадают вследствие того, что $\operatorname{tg}(x) \approx x$ и $\operatorname{arctg}(x) \approx x$ при малых значениях x . Но с увеличением частоты частотная характеристика дискретного фильтра все сильнее сжимается по горизонтали по сравнению с характеристикой аналогового фильтра-прототипа и на граничной частоте, равной $\pi / \Delta t$, принимает то значение, какое у аналоговой характеристики достигается на бесконечности.

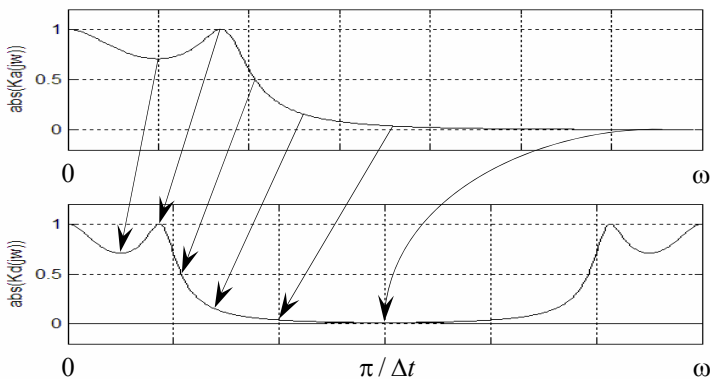


Рис. 2.5.1

Метод инвариантной импульсной характеристики

Другой подход к решению задачи о создании цифрового фильтра, похожего на аналоговый прототип, заключается в попытке построить функцию передачи цифрового фильтра $H(z)$, потребовав, чтобы импульсная характеристика цифрового фильтра была такой же, как у аналогового фильтра-прототипа с точностью до дискретизации.

Как уже отмечалось в 2.1.3 (см. (2.1.18) и далее), импульсная характеристика аналоговой цепи с сосредоточенными параметрами представляет собой сумму слагаемых вида

$$r_i e^{p_i t}, \quad t \geq 0, \quad (2.5.4)$$

в отсутствие кратных корней у полинома в знаменателе функции передачи $H(s)$ (p_i — i -й полюс, r_i — соответствующий ему вычет) и сумму вида

$$r_{i1} e^{p_i t} + r_{i2} t e^{p_i t} + r_{i3} \frac{t^2}{2} e^{p_i t} + \dots + r_{il} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} e^{p_i t} \quad (2.5.5)$$

при наличии l -кратного полюса p_i .

Каждое слагаемое вида (2.5.4) в результате взятия отсчетов с интервалом Δt порождает одну из составляющих желаемой дискретной импульсной характеристики:

$$r_i e^{p_i k \Delta t}, \quad k \geq 0. \quad (2.5.6)$$

z -преобразование последовательности чисел (2.5.6) согласно примеру с дискретной показательной функцией (2.2.4) равно

$$\frac{r_i}{1 - e^{p_i \Delta t} z^{-1}} \quad (2.5.7)$$

и в таком виде должно войти в составляемую функцию передачи цифрового фильтра $H(z)$ в качестве одного из слагаемых.

Дискретизация по времени с интервалом Δt переводит (2.5.5) в сумму слагаемых вида

$$r_{iv} \frac{(k \Delta t)^{v-1}}{(v-1)!} e^{p_i k \Delta t}, \quad v = 1, 2, \dots, l, \quad (2.5.8)$$

каждое из которых порождает свою составляющую дискретной импульсной характеристики (последовательность чисел со значениями $k = 0, 1, 2, \dots$), z -преобразование которой равно

$$r_{iv} \frac{d^{v-1}}{dp_i^{v-1}} \left(\frac{1}{1 - e^{p_i \Delta t} z^{-1}} \right), \quad v = 1, 2, \dots, l. \quad (2.5.9)$$

Перебирая (по i) все полюсы аналогового фильтра-прототипа (и по v в отношении кратных полюсов) и складывая все компоненты вида (2.5.7) и (2.5.9), получим функцию передачи $H(z)$ цифрового фильтра с такой же, как у аналогового фильтра-прототипа, импульсной характеристикой.

Результат построения цифрового фильтра в данном случае будет удовлетворительным, если преобразование Фурье исходной импульсной характеристики аналогового фильтра (его комплексный коэффициент передачи) практически не имеет составляющих за пределами граничной частоты (частоты Найквиста), равной $\pi / \Delta t$. Следовательно, по этому принципу можно строить фильтры нижних частот и полосовые фильтры, но он непригоден для создания фильтров верхних частот и режекторных фильтров.

2.6. Функции MATLAB для создания цифровых фильтров и для работы с ними

Функции синтеза стандартных фильтров

Для расчета цифровых фильтров используются те же функции, что и в случае аналоговых фильтров-прототипов (см. в 2.1.3), за исключением отсутствия признака аналогового расчета 's': n – порядок фильтра; скаляр w_0 и элементы вектора $[w_1 \ w_2]$ (см. ниже) – частоты среза, нормированные по отношению к нормализованной граничной частоте (нормализованной частоте Найквиста), равной π ; скаляры R_p , R_s – уровни пульсаций в полосе пропускания и в полосе подавления соответственно в дБ; b и a – коэффициенты полиномов числителя и знаменателя функции передачи создаваемого фильтра (векторы-строки); z и p – нули и полюсы функции передачи создаваемого фильтра (векторы-столбцы), G – его коэффициент усиления.

Эти функции выполняют расчет цифровых фильтров по аналоговым фильтрам-прототипам методом билинейного z -преобразования.

$[b, a] = \text{butter}(n, w_0, type)$ $[z, p, G] = \text{butter}(n, w_0, type)$	Фильтр Баттерворта
$[b, a] = \text{cheby1}(n, R_p, w_0, type)$ $[z, p, G] = \text{cheby1}(n, R_p, w_0, type)$	Фильтр Чебышева первого рода
$[b, a] = \text{cheby2}(n, R_p, w_0, type)$ $[z, p, G] = \text{cheby2}(n, R_p, w_0, type)$	Фильтр Чебышева второго рода
$[b, a] = \text{ellip}(n, R_p, R_s, w_0, type)$ $[z, p, G] = \text{ellip}(n, R_p, R_s, w_0, type)$	Эллиптический фильтр

Вид фильтра	<i>type</i>	<i>w0</i>
ФНЧ	Отсутствует	Скаляр
ФВЧ	'high'	Скаляр
ПФ	Отсутствует	Вектор [<i>w1 w2</i>]
РФ	'stop'	Вектор [<i>w1 w2</i>]

Выбор минимально необходимого порядка фильтра n

Это те же функции, что и в аналоговом случае (см. в 2.1.3), только отсутствует признак аналогового расчета '*s*'. Задание входных параметров, как и в аналоговом случае, поясняется рисунком 2.1.10, где $\omega_p, \omega_s, R_p, R_s$ – то же самое, что и w_p, w_s, R_p, R_s : $\omega_p (w_p)$ – границы полосы пропускания, $\omega_s (w_s)$ – границы полосы подавления, $\omega_n (wn)$ – частота среза; все частоты в данном случае нормированы по отношению к нормализованной граничной частоте (нормализованной частоте Найквиста), равной π ; $R_p (Rp)$ – допустимая неравномерность в полосе пропускания в дБ, $R_s (Rs)$ – минимально необходимое затухание в полосе подавления в дБ.

$[n, wn] = \text{buttord}(w_p, w_s, R_p, R_s)$	Фильтр Баттерворта
$[n, wn] = \text{cheb1ord}(w_p, w_s, R_p, R_s)$	Фильтр Чебышева первого рода
$[n, wn] = \text{cheb2ord}(w_p, w_s, R_p, R_s)$	Фильтр Чебышева второго рода
$[n, wn] = \text{ellipord}(w_p, w_s, R_p, R_s)$	Эллиптический фильтр

Вид фильтра	Тип переменной wp, ws	Условия, которым должны удовлетворять значения wp, ws
ФНЧ	wp и ws – скаляры	$wp < ws$
ФВЧ	wp и ws – скаляры	$wp > ws$
ПФ	wp и ws –векторы: $wp = [wp(1) \quad wp(2)]$ $ws = [ws(1) \quad ws(2)]$	$ws(1) < wp(1) < wp(2) < ws(2)$
РФ	wp и ws – векторы: $wp = [wp(1) \quad wp(2)]$ $ws = [ws(1) \quad ws(2)]$	$wp(1) < ws(1) < ws(2) < wp(2)$

Тип фильтра	Частота среза ω_n (ω_n)
Баттерворта	$\omega_n = \frac{\omega_p}{2n \sqrt{10^{R_p/10} - 1}}, R_p = 3 \text{ дБ}$
Чебышева первого рода	$\omega_n = wp$
Чебышева второго рода	$\omega_n = ws$
Эллиптический	$\omega_n = wp$

Переход от одного описания фильтра к другому

$$[z, p, G] = \text{tf2zp}(b, a) -$$

нахождение нулей z , полюсов p и коэффициента усиления G по коэффициентам b и a числителя и знаменателя функции передачи (читается: *from transfer function to zeros & poles*); b, a, z, p – векторы, G – скаляр (векторы-строки b и a должны иметь *одинаковую длину* за счет дополнения более короткого вектора нулями, например, с помощью функции $[b1, a1] = \text{eqtlength}(b, a)$; z и p – векторы столбцы; $G = b_0$)

$$[b, a] = \text{zp2tf}(z, p, G) -$$

нахождение коэффициентов b и a числителя и знаменателя функции передачи по значениям нулей z , полюсов p и коэффициента усиления G ; b, a, z, p – векторы, G – скаляр

$$[r, p, c] = \text{residuez}(b, a) -$$

нахождение вычетов r , полюсов p и целой части c функции передачи при представлении ее в виде суммы простых дробей по коэффициентам числителя b и знаменателя a функции передачи; b, a, r, p – векторы, c – частное от деления полинома $b(z)$ на полином $a(z)$

$$[b, a] = \text{residuez}(r, p, c) -$$

нахождение коэффициентов числителя b и знаменателя a функции передачи по значениям вычетов r , полюсов p и по целой части c функции передачи при представлении ее в виде суммы простых дробей; b, a, r, p – векторы, c – частное от деления полинома $b(z)$ на полином $a(z)$

Частотная, импульсная и переходная характеристики цифрового фильтра

(1) $h = \text{freqz}(b, a)$, (2) $[h, w] = \text{freqz}(b, a)$,

(3) $[h, f] = \text{freqz}(b, a, N, fs)$, (4) $h = \text{freqz}(b, a, f, fs)$ –

нахождение *комплексного коэффициента передачи* h цифрового фильтра по коэффициентам b и a числителя и знаменателя функции передачи $H(z)$: в (1, 2) для расчета выбираются 512 точек на оси частот, равномерно распределенных в интервале $[0, \pi]$, w – возвращаемый вектор частот, нормированных по отношению к нормализованной граничной частоте (нормализованной частоте Найквиста), равной π (b и a – векторы-строки, h и w – векторы-столбцы); в (3) fs – частота дискретизации в Гц, расчет производится в N точках, равномерно распределенных в интервале $[0, fs / 2]$, f – вектор-столбец со значениями частоты в Гц в выбранных точках; в (4) f – задаваемый вектор-строка с набором частот в Гц, в которых должно быть вычислено значение h

(1) $h = \text{impz}(b, a)$, (2) $h = \text{impz}(b, a, N)$ –

расчет *импульсной характеристики* по коэффициентам b и a числителя и знаменателя функции передачи: число отсчетов h в (1) выбирается автоматически, в (2) задается параметром N

(1) $g = \text{stepz}(b, a)$, (2) $g = \text{stepz}(b, a, N)$ –

расчет *переходной характеристики* по коэффициентам b и a числителя и знаменателя функции передачи: число отсчетов g в (1) выбирается автоматически, в (2) задается параметром N

Непосредственный переход от аналогового фильтра-прототипа к цифровому фильтру

$$[bz, az] = \text{bilinear}(b, a, fs, fp),$$

$$[zz, pz, Gz] = \text{bilinear}(z, p, G, fs, fp) -$$

синтез цифрового фильтра по произвольному аналоговому фильтру-прототипу *методом билинейного z-преобразования* по коэффициентам b и a числителя и знаменателя функции передачи фильтра-прототипа либо по его нулям z , полюсам p и коэффициенту усиления G (b и a – векторы-строки, z и p – векторы-столбцы), bz, az, zz, pz, Gz – аналогичные характеристики синтезируемого цифрового фильтра; fs – частота дискретизации в Гц; параметр fp может отсутствовать, но если он задан, то на этой частоте (в Гц) комплексные коэффициенты передачи аналогового и цифрового фильтров будут равны

$$[bz, az] = \text{impinvar}(b, a, fs),$$

$$[bz, az] = \text{impinvar}(b, a, fs, tol) -$$

преобразование функции передачи произвольного аналогового фильтра-прототипа в функцию передачи цифрового фильтра *методом инвариантной импульсной характеристики* (b и a – коэффициенты числителя и знаменателя функции передачи фильтра-прототипа, bz и az – те же характеристики синтезируемого цифрового фильтра; fs – частота дискретизации в Гц; tol – порог обнаружения близко расположенных кратных полюсов, которые считаются совпадающими): 1) функция передачи фильтра-прототипа представляется в виде суммы простых дробей, 2) в ней полюсы p заменяются на $\exp(p / fs)$, 3) по вычетам, найденным на 1-м шаге, и по полюсам, найденным на 2-м шаге после произведенной замены, находятся полиномы числителя и знаменателя новой функции передачи

Последовательное (каскадное) включение секций 2-го порядка

$sos = \text{tf2sos}(b, a, 'order', 'scale'),$

$[sos, g] = \text{tf2sos}(b, a, 'order', 'scale') -$

образование набора секций 2-го порядка по коэффициентам b и a числителя и знаменателя функции передачи $H(z)$ преобразуемого фильтра (читается: *from transfer function to second-order sections*; b и a – векторы-строки); sos – матрица с 6-ю столбцами, i -я строка которой вида

$$[b_0^{(i)} \ b_1^{(i)} \ b_2^{(i)} \ 1 \ a_1^{(i)} \ a_2^{(i)}]$$

соответствует одной секции с функцией передачи

$$H_i(z) = \frac{b_0^{(i)} + b_1^{(i)}z^{-1} + b_2^{(i)}z^{-2}}{1 + a_1^{(i)}z^{-1} + a_2^{(i)}z^{-2}},$$

g – общий коэффициент усиления, который может быть опущен при вызове (по умолчанию равен 1); число строк в матрице sos зависит от вида $H(z)$; входные параметры 'order' и 'scale' могут быть опущены (об их значении см. ниже)

$sos = \text{zp2sos}(z, p, G, 'order', 'scale'),$

$[sos, g] = \text{zp2sos}(z, p, G, 'order', 'scale') -$

образование набора секций 2-го порядка по нулям z , полюсам p и коэффициенту усиления G преобразуемого фильтра (z и p – векторы-столбцы, G – скаляр); в остальном – согласно сказанному в предыдущей строке

$[b, a] = \text{sos2tf}(sos, g) -$

преобразование набора секций с функциями передачи $H_i(z)$ и общим коэффициентом усиления g в единый фильтр с функцией передачи $H(z)$, числитель и знаменатель которой b и a – векторы-строки; параметр g может быть опущен (по умолчанию равен 1)

$[z, p, G] = \text{sos2zp}(sos, g)$ – преобразование набора секций с функциями передачи $H_i(z)$ и общим коэффициентом усиления g в единый фильтр с функцией передачи $H(z)$, представляемой ее нулями z , полюсами p и коэффициентом усиления G (z и p – векторы-столбцы, G – скаляр); параметр g может быть опущен (по умолчанию равен 1)

Возможные значения параметра ' <i>order</i> '	Значением входного параметра ' <i>order</i> ' определяется последовательность включения секций
<i>'up'</i>	Строки матрицы <i>sos</i> расположены в порядке приближения полюсов секций к единичной окружности (принято по умолчанию)
<i>'down'</i>	Строки матрицы <i>sos</i> расположены в порядке удаления полюсов секций от единичной окружности

Возможные значения параметра ' <i>scale</i> '	От значения входного параметра ' <i>scale</i> ' зависит, как распределяется между секциями коэффициент усиления g
<i>'none'</i>	Во всех секциях $b_0^{(i)} = 1$, требуемое значение g – в общем множителе (принято по умолчанию)
<i>'inf'</i> , <i>'two'</i>	При ' <i>order</i> ' = ' <i>up</i> ' и ' <i>scale</i> ' = ' <i>inf</i> ' обеспечивается наименьшее значение вероятности переполнения в процессе промежуточных вычислений, при ' <i>order</i> ' = ' <i>down</i> ' и ' <i>scale</i> ' = ' <i>two</i> ' обеспечивается наименьшее максимальное значение шума округления

Резонаторы 2-го порядка

(см. примеры фильтров 2-го порядка в 2.3)

$[b,a] = \text{iirpeak}(w_0, Bw)$, $[b,a] = \text{iirpeak}(w_0, Bw, Ab)$ – расчет функции передачи **резонатора** 2-го порядка $H(z)$ с центральной частотой w_0 и полосой пропускания Bw ; векторы-строки b и a – числитель и знаменатель функции $H(z)$ соответственно; значения w_0 и Bw нормированы по отношению к нормализованной граничной частоте (нормализованной частоте Найквиста), равной π , и измеряются в радианах на отсчет; коэффициент передачи на частоте w_0 равен 1; Ab – уровень в дБ, по которому определяется полоса пропускания (если этот параметр опущен, то его значение по умолчанию принимается равным 3 дБ)

$[b,a] = \text{iirnotch}(w_0, Bw)$, $[b,a] = \text{iirnotch}(w_0, Bw, Ab)$ – расчет функции передачи **режсектора** 2-го порядка $H(z)$ с центральной частотой w_0 и полосой подавления Bw ; векторы-строки b и a – числитель и знаменатель функции $H(z)$ соответственно; значения w_0 и Bw нормированы по отношению к нормализованной граничной частоте (нормализованной частоте Найквиста), равной π , и измеряются в радианах на отсчет; коэффициент передачи на частоте w_0 равен 0; Ab – уровень в дБ, по которому определяется полоса подавления (если этот параметр опущен, то его значение по умолчанию принимается равным 3 дБ)

Прохождение произвольного сигнала через цифровой фильтр

$y = \text{filter}(b, a, x)$, где

x – входной сигнал, y – выходной сигнал: x и y одновременно векторы-строки или векторы-столбцы *одинаковой длины*; векторы-строки b и a – числитель и знаменатель функции передачи фильтра $H(z)$ соответственно; если $a(1)$ (первый элемент вектора a) не равен 1, то b и a делятся на $a(1)$ (при $a(1) = 0$ – ошибка); вычисления производятся по алгоритму, отображаемому структурной схемой рекурсивного фильтра на рис. 2.4.4; примеры:

- 1) $y = \text{filter}(b, a, [1 \text{ zeros}(1, N - 1)])$ – *импульсная характеристика фильтра* с функцией передачи

$$H(z) = b / a : x = x_k^0 - \text{единичный отсчет}$$

($x_k^0 = 1$ при $k = 0$ и $x_k^0 = 0$ при $k > 0$, см. 2.2),

N – желаемая длина вектора y ;

- 2) $y = \text{filter}(b, a, \text{ones}(1, N))$ – *переходная характеристика фильтра* с функцией передачи

$$H(z) = b / a : x - \text{единичный скачок}$$

($x_k = 1$ при $k \geq 0$, см. 2.2),

N – желаемая длина вектора y .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемых упражнениях ради простоты основные идеи цифровой обработки проиллюстрированы на примерах детерминированных сигналов. В действительности больший интерес представило бы рассмотрение того, как преобразуются случайные сигналы, являющиеся собственно носителями информации. Но это уже выходит за рамки начальных представлений.

С рассмотрением случайных процессов и шумов тесно связан вопрос о погрешностях вычислений в цифровых устройствах, фактически не затронутый в данном пособии. А между тем квантование самих данных на входе, представление коэффициентов в конечном формате, округление результатов промежуточных вычислений заслуживают отдельного серьезного анализа и разбора.

За пределами этого пособия остаются многомерные сигналы типа изображений и др. В нашем случае практически повсюду под сигналом понимается всего лишь зависимость напряжения от времени.

Стоит отметить, что овладение основами цифровой обработки вплотную подводит учащегося к овладению идеологией так называемых сигнальных процессоров, где аппаратно реализованы, например, одновременное оперирование четырьмя числовыми значениями в операции «бабочка» при быстром преобразовании Фурье (см. 1.5), а также «сканирование» массива памяти, в котором хранятся значения промежуточной последовательности цифрового фильтра канонической формы (см. 2.4), с циклическим сдвигом начала на единицу в пространстве адресов при переходе к следующему такту.

Для более углубленного изучения принципов цифровой обработки сигнала с одновременным продвижением в части использования возможностей MATLAB можно рекомендовать годовой базовый курс А.Б. Сергиенко [5], книгу А.И. Солониной и С.М. Арбузова [6], ориентированную на MATLAB 7.0, а также учебное пособие Ю.А. Романюка [4], специально посвященное спектральному анализу средствами дискретного преобразования Фурье.

Комментарий к упражнениям ex_1, ..., ex_7

Упражнение ex_1

«Одинокое гармоническое колебание»

Предполагается, что с данного упражнения начинается знакомство с формой представления в MATLAB результатов вычислений. Следует обратить внимание на численные значения задаваемых параметров в примере обращения к программе. В случае, когда частота гармонического колебания точно равна одному из значений вдоль оси частот, для которых вычисляется прямое БПФ, в линейчатом спектре имеется единственная составляющая, абсолютное значение которой равно $N/2$, а само значение этой составляющей является чисто мнимым (значение действительной части не превосходит 4.5×10^{-13} и представляет собой ошибку вычислений). Если же задать частоту колебаний, не равной целому числу интервалов дискретизации вдоль оси частот, то имеет место «растекание спектра» (из-за наличия разрывов при периодическом продолжении данного отрезка сигнала по оси времени), однако при восстановлении сигнала посредством обратного БПФ форма сигнала в точности совпадает с исходной.

В этом и в других упражнениях спектр, как правило, отображается только для положительных частот.

Упражнение ex_2

«Сумма двух амплитудно-модулированных колебаний»

В примере обращения к данной программе частоты АМ-колебаний выбраны так, чтобы спектр одного из них целиком помещался *в нижней половине* полного интервала частот $[-f_{\text{Гр}}, f_{\text{Гр}})$, то есть на отрезке от $-f_{\text{Гр}}/2$ до $f_{\text{Гр}}/2$, а спектр другого АМ-колебания располагался *в верхней половине*

интервала частот, то есть на отрезке от $-f_{гр}$ до $-f_{гр} / 2$ для отрицательных частот и на отрезке от $f_{гр} / 2$ до $f_{гр}$ для положительных частот. Операторами 58, 59 формируются прямоугольные окна, вырезающие спектры каждого из этих колебаний (как в области положительных, так и в области отрицательных частот). В результате взятия обратного БПФ для каждого из вырезанных спектров происходит восстановление порознь обоих АМ-колебаний из их смеси.

Упражнение ex_3

«Одиночный прямоугольный (видео)импульс»

Имитируется прохождение прямоугольного импульса через интегрирующую и дифференцирующую цепи. Спектр входного сигнала, который находится с помощью прямого БПФ, умножается на комплексный коэффициент передачи интегрирующей (дифференцирующей) цепи, и результат умножения подвергается обратному БПФ. Комплексный коэффициент передачи каждой из этих цепей вычисляется по известной формуле для тех точек в области положительных частот, для которых оказывается найденным спектр входного сигнала; к полученному набору значений пристыковывается справа (операция *конкатенации*) другой набор значений, в котором найденные ранее значения комплексного коэффициента передачи следуют в обратном порядке (функция *flip*), причем в каждой точке берется комплексно-сопряженное число (функция *conj*(·)). Указанные действия выполняются операторами 46, 47 для интегрирующей цепи и операторами 62, 63 для дифференцирующей цепи.

В силу принудительного ограничения спектра сигнала результат несколько отличается от того, что имеет место в аналоговом случае.

Упражнение ex_4

«Несимметричный треугольный импульс»

Как и в упражнении ex_3, сигнал «пропускается» через интегрирующую и дифференцирующую цепи. Основное внимание следует уделить тому, как реагируют эти цепи на линейно возрастающее со временем напряжение на их входах. Из-за особенностей взятия преобразования Фурье для ограниченного набора точек результат получается близким к аналоговому случаю лишь на отрезке времени сразу после начала линейного нарастания напряжения на входе (сравните изображения на *Figure 1* и *Figure 2* с учетом масштаба по оси времени).

Упражнение ex_5

«Одиночный радиоимпульс»

Данное упражнение позволяет *сравнить по ширине спектра* два случая: когда огибающая радиоимпульса является прямоугольной и когда во избежание скачков огибающей осуществляется сглаживание радиоимпульса в начале и в конце. Чтобы сравнить между собой эти случаи, следует *дважды запустить* программу: со значением параметра сглаживания a , равным 0, когда сглаживание отсутствует, и со значением a , отличным от нуля.

В данном упражнении осуществляется косинусоидальное сглаживание (при $a \neq 0$) путем умножения отрезка гармонического колебания на так называемое окно Тьюки. Для этого границы отрезка гармонического колебания раздвигаются по сравнению со случаем отсутствия сглаживания: колебания начинаются в момент времени $t_0 - a \cdot tp$ и заканчиваются в момент времени $(t_0 + tp - 1) + a \cdot tp$, где t_0 – момент начала исходного радиоимпульса с прямоугольной огибающей, а tp – его длительность ($t_0 + tp - 1$ – момент окончания импульса).

Само окно составляется из трех компонентов: $win2$, $win3$ и $win4$ (операторы 43–45, 47, 49–50). Компонент $win2$ обеспечивает плавное нарастание амплитуды колебаний в начале по формуле $(1 - \cos \varphi) / 2$, где φ изменяется от $-\pi$ до 0 в пределах интервала времени от $t_0 - a \cdot tp$ до $t_0 + a \cdot tp$. На протяжении отрезка времени от $t_0 + a \cdot tp$ до $(t_0 + tp - 1) - a \cdot tp$ значение окна $win3$ равно 1. Компонент $win4$ обеспечивает плавное спадание амплитуды колебаний в конце по формуле $(1 + \cos \varphi) / 2$, где φ изменяется от 0 до π в пределах интервала времени от $(t_0 + tp - 1) - a \cdot tp$ до $(t_0 + tp - 1) + a \cdot tp$.

Упражнение ex_6 «Два радиоимпульса»

В примере обращения к данной программе предполагается присутствие на одном и том же отрезке времени двух радиоимпульсов одинаковой амплитуды, но с разными частотами заполнения, которые в данном случае считаются известными. Различие спектров этих сигналов позволяет путем вырезания соответствующей компоненты спектра разделить смесь на две составляющие и таким образом решить задачу обнаружения (наличия или отсутствия) сигнала в каждом из «каналов». Вырезание осуществляется путем умножения на прямоугольные окна, центральная частота которых равна частоте несущей (для положительных частот), а ширина окна удвоенной половине частоты несущей (см. *Figure 9*). Окончательное формирование окон в области положительных и отрицательных частот происходит в операторах 123, 126.

В каждом из окон оказывается только часть спектра полезного сигнала, но туда же попадает часть спектра мешающего сигнала. Поэтому сигналы, восстанавливаемые с помощью обратного БПФ, немного отличаются от первоначальных сигналов, входящих в исходную смесь.

Упражнение ex_7

«Радиоимпульс на фоне синусоидальной помехи»

В первых двух примерах обращения к данной программе считается, что частота синусоидальной помехи известна и равна целому числу интервалов дискретизации вдоль оси частот. В этом случае удастся полностью избавиться от помехи, подавляя ее, даже если амплитуда помехи значительно превосходит амплитуду радиоимпульса, когда «полезный сигнал» практически не виден на фоне помехи.

В третьем примере обращения частота помехи не равна целому числу интервалов дискретизации вдоль оси частот. Операторами 90–92 вырезается по 5 составляющих линейчатого спектра помехи по обе стороны от частоты помехи (в области положительных и отрицательных частот). Из результатов работы программы видно, что даже при относительно небольшом (в 3 раза) превышении помехи над сигналом, выделение полезного сигнала из смеси с помехой можно признать удовлетворительным только в том случае, когда известно ожидаемое положение полезного сигнала на оси времени.

Комментарий к упражнениям ex_8, ..., ex_13

Упражнение ex_8

«Прохождение прямоугольного (видео)импульса через простейшие ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ»

В качестве исходного аналогового фильтра-прототипа выбран фильтр нижних частот Баттерворта 1-го порядка (с граничной частотой $\pi / \Delta t$ [рад/с], где Δt – интервал дискретизации по времени [с]). Этот фильтр поочередно преобразуется в аналоговый фильтр нижних частот (ФНЧ) и фильтр верхних частот (ФВЧ) с граничной частотой ω_0 [рад/с], а также в

полосовой фильтр (ПФ) и режекторный фильтр (РФ) с резонансной (центральной) частотой $10 \cdot \omega_0$, каждый из которых затем трансформируется в эквивалентный цифровой фильтр: с помощью функции *bilinear* находятся коэффициенты *bz*, *az* полиномов числителя и знаменателя функции передачи соответствующего цифрового фильтра. Затем функция $y = \text{filter}(bz, az, x)$ четырежды применяется по отношению к входному сигналу $x(t)$, которым в данном случае является прямоугольный импульс. Для каждого из рассматриваемых фильтров последовательно выдаются амплитудно-частотная характеристика и сигнал $y(t)$ на его выходе.

ФНЧ Баттерворта 1-го порядка – обычная интегрирующая цепь с постоянной времени $1/\omega_0$, ФВЧ Баттерворта 1-го порядка – дифференцирующая цепь с той же постоянной времени; простейший ПФ – резонансный усилитель с одним колебательным LC- контуром, настроенным на частоту $10 \cdot \omega_0$ (с равным 1 коэффициентом передачи на резонансной частоте), а простейший РФ – фильтр-пробка, вырезающий составляющую с частотой $10 \cdot \omega_0$ из спектра входного сигнала.

Упражнение ex_9

«Прохождение несимметричного треугольного импульса через простейшие ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ»

Упражнение ex_9 отличается от упражнения ex_8 только тем, что на вход фильтра в качестве входного сигнала $x(t)$ подается не прямоугольный, а треугольный импульс. Целью в данном случае является наблюдение того, как реагируют простейшие ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ на линейно нарастающее напряжение на входе. В остальном справедливы пояснения, сделанные в отношении упражнения ex_8.

Сравнение результатов упражнения ex_9 (для ФНЧ и ФВЧ) с результатами упражнения ex_4 показывает, что прохождение

линейно нарастающего напряжения через цифровой фильтр в точности соответствует аналоговому случаю в отличие от умножения спектра входного сигнала, полученного с помощью БПФ, на комплексный коэффициент передачи четырехполюсника на интервале $[-f_{гр}, f_{гр}]$.

Упражнение ex_10

«Прохождение одиночного радиоимпульса через полосовой фильтр Чебышева 2-го рода»

Если, следуя первому примеру обращения к данной программе, запустить ее дважды – один раз с полосой пропускания bf , равной 4 кГц, а в другой раз с полосой пропускания, равной 8 кГц, – то нетрудно убедиться, что задержка выходного сигнала относительно входного тем меньше, чем шире полоса пропускания фильтра и тем круче нарастание и спадание амплитуды сигнала на выходе. При отклонении «резонансной» частоты фильтра от частоты заполнения радиоимпульса (второй пример обращения к программе) сигнал на выходе фильтра много меньше, чем при точной настройке, а частота колебаний на выходе при малой длительности радиоимпульса не успевает установиться в точности равной частоте несущей входного сигнала (по окончании сигнала на входе частота свободных колебаний на выходе близка к собственной «центральной» частоте фильтра). Третий пример обращения к программе показывает, что аппаратное усложнение цифрового фильтра (увеличение его порядка, приводящее к большей крутизне спада частотной характеристики при переходе из полосы пропускания в полосу подавления) не влияет существенно на форму сигнала на выходе.

В данном упражнении и далее преобразование аналогового фильтра в цифровой осуществляется с помощью функции *impinvar*. При этом частотная характеристика цифрового фильтра может заметно отличаться от частотной характеристики аналогового фильтра-прототипа.

Упражнение ex_11

«Два радиоимпульса»

В данном упражнении создается «двухканальный приемник», обеспечивающий извлечение порознь каждого из двух перекрывающихся радиоимпульсов с различными частотами заполнения подобно тому, как это делалось в упражнении ex_6, только там разделение каналов осуществлялось путем вырезания части спектра смеси сигналов, а здесь смесь сигналов подается на входы двух фильтров, каждый из которых настроен на частоту несущей «своего» радиоимпульса.

Внимание! Аргументы *pulse1*, *pulse2*, *filtr1*, *filtr2* функции *ex_11* являются *векторами*, которые необходимо создать в командном окне MATLAB *до обращения* к данной функции. Сделать это можно, скопировав, например, содержимое строк 24, 25 из текста программы в окне редактора Editor - C:\...\ex_11 (игнорируя символ % в начале строки).

Векторы *pulse1*, *pulse2* описывают сами радиоимпульсы, а векторы *filtr1*, *filtr2* содержат параметры создаваемых полосовых цифровых фильтров. Детальное объяснение значения отдельных элементов векторов *pulse1*, *pulse2*, *filtr1*, *filtr2* см. в комментарии в начале текста программы. В качестве примера выбраны эллиптические фильтры порядка n с уровнями пульсаций R_p и R_s [дБ] в полосе пропускания и в полосе подавления соответственно.

Упражнения ex_12a и ex_12b

«Одиночный радиоимпульс на фоне синусоидальной помехи»

В этих двух программах демонстрируется, к чему приводит попытка извлечения полезного сигнала (радиоимпульса) из смеси с синусоидальной помехой (см. упражнение ex_7). В *ex_12a* применяется цифровой *режекторный* фильтр Чебышева 1-го рода, настроенный на частоту помехи, и преобразование аналогового фильтра-прототипа в цифровой осуществляется с помощью функции *bilinear*. В *ex_12b* сумма радио-

импульса и помехи пропускается через *полосовой* фильтр Чебышева 2-го рода, настроенный на частоту несущей полезного сигнала, а для преобразования аналогового фильтра-прототипа в цифровой применяется функция *impinvar*.

В обоих упражнениях цифровой фильтр представлен в виде последовательно включенных секций 2-го порядка (первый из операторов в строке 124), и на экран выводится форма сигнала на выходе каждой секции (у оси ординат указан номер секции, чей выходной сигнал приведен на данном графике).

К сожалению, при выполнении функции *bilinear* дважды возникает предупреждение о том, что результат может быть плохим (и с этим приходится мириться) из-за того, что матрица, встретившаяся в процессе вычислений, близка к тому, чтобы быть вырожденной или плохо обусловленной.

Упражнение ex_13

«Сумма двух амплитудно-модулированных колебаний»

Два эллиптических полосовых фильтра, настроенных каждый на частоту несущей «своего» амплитудно-модулированного колебания, образуют «двухканальный приемник», осуществляющий разделение сигналов (см. упражнение ex_2). В первом примере обращения к данной программе порядок n фильтров выбран равным 1, а во втором примере – равным 3.

	ex_1.m
1	function ex_1(N,delta_t,f_)
2	% "Одиночное гармоническое колебание"
3	% N - число выборок во временной области (число степеней свободы,
4	% N должно быть целой степенью 2);
5	% delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с];
6	% f_ - частота гармонического колебания, выраженная числом интервалов
7	% дискретизации по оси частот (f_ должно быть в пределах от 0 до N/2-1);
8	% Пример обращения: ex_1(2^10,10^(-6),10)
9	
10	% T - длительность сигнала [с];
11	% delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];
12	% f - частота исследуемого гармонического колебания [Гц];
13	
14	T=N*delta_t;
15	delta_f=1/T;
16	f=f_*delta_f;
17	
18	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
19	z=sin(2*pi*f*k*delta_t); % z - исследуемое колебание с амплитудой 1 В
20	plot(tk,z); grid on;
21	xlabel('t [s]'); ylabel('z [V]'); figure;
22	
23	n=0:N-1; fn=delta_f*n;
24	Z=fft(z);
25	ne=fix(5*f_); if ne>N/2 ne=N/2; end% искусственное растягивание оси x
26	stem(fn(1:ne),abs(Z(1:ne)), 'x'); grid on;
27	xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(fft(z)) [V]'); figure;
28	stem(fn(1:ne),real(Z(1:ne)), 'x'); grid on;
29	xlabel('f [Hz]'); ylabel('real(fft(z)) [V]'); figure;
30	stem(fn(1:ne),imag(Z(1:ne)), 'x'); grid on;
31	xlabel('f [Hz]'); ylabel('imag(fft(z)) [V]'); figure;
32	
33	z_ =ifft(Z);
34	plot(tk,z_); grid on;
35	xlabel('t [s]'); ylabel('ifft(Z) [V]');
36	% figure; plot(tk,imag(z_)); grid on;
37	% xlabel('t [s]'); ylabel('imag(z_), [V]');
38	% figure; plot(tk,abs(z_-z)); grid on;
39	% xlabel('t [s]'); ylabel('abs(z_-z), [V]');

	ex_2.m
1	function ex_2(N,delta_t,fc1,fc2,AMF1,AMF2,m1,m2)
2	% "Сумма двух амплитудно-модулированных колебаний"
3	% N - число выборок во временной области (число степеней свободы,
4	% N должно быть целой степенью 2);
5	% delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с];
6	% fc1, fc2 - частоты несущих, выраженные числом интервалов дискретизации
7	% по оси частот (fc1+AMF1 и fc2+AMF2 должны быть меньше N/2, см. ниже);
8	% AMF1, AMF2 - частоты модулирующих колебаний, выраженные числом
9	% интервалов дискретизации по оси частот (AMF1, AMF2 должны быть много
10	% меньше fc1, fc2);
11	% m1, m2 - коэффициенты (глубина) модуляции;
12	% Пример обращения: ex_2(2^10,10^(-6),150,350,3,2,0.8,0.2)
13	
14	
15	% T - длительность сигнала [с];
16	% delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];
17	% f01, f02 - частоты несущих [Гц];
18	% F1, F2 - частоты модулирующих колебаний [Гц];
19	
20	T=N*delta_t;
21	delta_f=1/T;
22	f01=fc1*delta_f;
23	F1=AMF1*delta_f;
24	f02=fc2*delta_f;
25	F2=AMF2*delta_f;
26	
27	% y1, y2 - огибающие АМ колебаний;
28	% z1, z2 - несущие 1-го и 2-го колебаний с амплитудой 1 В;
29	% u1, u2 - складываемые АМ колебания;
30	% u - сумма двух АМ колебаний;
31	
32	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
33	y1=(1+m1*sin(2*pi*F1*k*delta_t));
34	z1=sin(2*pi*f01*k*delta_t);
35	u1=y1.*z1;
36	y2=(1+m2*sin(2*pi*F2*k*delta_t));
37	z2=sin(2*pi*f02*k*delta_t);
38	u2=y2.*z2;
39	

	ex_2.m
40	u=u1+u2;
41	plot(tk,u); grid on;
42	xlabel('t [s]'); ylabel('u [V]'); figure;
43	
44	n=0:N-1; fn=delta_f*n;
45	V=fft(u);
46	stem(n(1:N/2),abs(V(1:N/2)), 'xm'); grid on;
47	xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(fft(u)) [V]'); figure;
48	stem(n(1:N/2),real(V(1:N/2)), 'xb'); grid on;
49	xlabel('f [Hz]'); ylabel('real(fft(u)) [V]'); figure;
50	stem(n(1:N/2),imag(V(1:N/2)), 'xg'); grid on;
51	xlabel('f [Hz]'); ylabel('imag(fft(z)) [V]'); figure;
52	
53	% w1,w2 - "прямоугольные окна", вырезающие нижнюю и верхнюю половины
54	% спектра суммы двух АМ колебаний в пределах [-cut_off, cut_off),
55	% где cut_off - граничная частота: cut_off=1/(2*delta_t);
56	% V1, V2 - вырезанные части спектра V=fft(u);
57	
58	w1=[ones(1,N/4) zeros(1,N/2) ones(1,N/4)];
59	w2=[zeros(1,N/4) ones(1,N/2) zeros(1,N/4)];
60	V1=V.*w1;
61	V2=V.*w2;
62	
63	% v2, v2 - восстанавливаемые слагаемые суммы двух АМ колебаний
64	% при условии, что fc1+AMF1<=N/4-1 и fc2-AMF2>=N/4;
65	
66	v1=ifft(V1);
67	plot(tk,real(v1),'r'); grid on;
68	xlabel('t [s]'); ylabel('real(ifft(V.*w1)) [V]'); figure;
69	v2=ifft(V2);
70	plot(tk,real(v2),'g'); grid on;
71	xlabel('t [s]'); ylabel('real(ifft(V.*w2)) [V]');

	ex_3.m
1	function ex_3(N,delta_t,t0,tp,tau)
2	% "Одиночный прямоугольный (видео) импульс"
3	% N - число выборок во временной области (число степеней свободы,
4	% N должно быть целой степенью 2);
5	% delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с];
6	% t0 - момент начала импульса, выраженный целым числом delta_t;
7	% tp - длительность импульса, выраженная целым числом delta_t;
8	% значение t0+tp-1 должно быть меньше или равно N;
9	% амплитуда импульса равна 1 В;
10	% tau - постоянная времени интегрирующей (дифференцирующей) цепи, [с];
11	% Пример обращения: ex_3(2^10,10^(-6),201,20,10^(-5));
12	% Пример обращения: ex_3(2^10,10^(-6),201,200,10^(-4));
13	
14	% T - длительность сигнала [с];
15	% delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];
16	
17	T=N*delta_t;
18	delta_f=1/T;
19	
20	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
21	u1=zeros(1,t0-1);
22	u2=ones(1,tp);
23	u3=zeros(1,N-t0-tp+1);
24	u=[u1 u2 u3];
25	
26	plot(tk,u,'b'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;
27	xlabel('t [с]'); ylabel('u [V]'); figure;
28	
29	n=0:N-1; fn=delta_f*n;
30	U=fft(u);
31	stem(fn(1:N/2),abs(U(1:N/2)),'-m'); grid on;
32	xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(U) [V]'); figure;
33	%stem(fn(1:N/2),real(U(1:N/2)),'-xb'); grid on;
34	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('real(U) [V]'); figure;
35	%stem(fn(1:N/2),imag(U(1:N/2)),'-xg'); grid on;
36	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('imag(U) [V]'); figure;
37	
38	%u_ =ifft(U);
39	%plot(tk,real(u_),'r'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;

40	%xlabel('t [s]'); ylabel('real(u) [V]'); figure;
41	
42	% int_cir - частотная характеристика (комплексный коэффициент передачи)
43	% интегрирующей цепи для положительных частот;
44	% conj(fliplr(int_cir) - то же, что int_cir, для отрицательных частот;
45	% int_cir_ - частотная характеристика интегрирующей цепи в целом;
46	int_cir=1./(1+i*2*pi*n(1:N/2)*delta_f*tau);
47	int_cir_=[int_cir conj(fliplr(int_cir))];
48	%plot(fn(1:N/2),abs(int_cir)); grid on;
49	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(int_cir)'); figure;
50	%plot(fn(1:N/2),angle(int_cir)); grid on;
51	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('angle(int_cir) [rad]'); figure;
52	
53	V=int_cir_*U;
54	v=ifft(V);
55	plot(tk,real(v),'r'); grid on;
56	xlabel('t [s]'); ylabel('real(ifft(int_cir_*U)) [V]'); figure;
57	
58	% dif_cir - частотная характеристика (комплексный коэффициент передачи)
59	% дифференцирующей цепи для положительных частот;
60	% conj(fliplr(dif_cir) - то же, что dif_cir, для отрицательных частот;
61	% dif_cir_ - частотная характеристика дифференцирующей цепи в целом;
62	dif_cir=(i*2*pi*n(1:N/2)*delta_f*tau)./(1+i*2*pi*n(1:N/2)*delta_f*tau);
63	dif_cir_=[dif_cir conj(fliplr(dif_cir))];
64	%plot(n(1:N/2),abs(dif_cir)); grid on;
65	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(dif_cir)'); figure;
66	%plot(n(1:N/2),angle(dif_cir)); grid on;
67	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('angle(dif_cir) [rad]'); figure;
68	
69	W=dif_cir_*U;
70	w=ifft(W);
71	plot(tk,real(w),'r'); grid on;
72	xlabel('t [s]'); ylabel('real(ifft(dif_cir_*U)) [V]');

	ex_4.m
1	function ex_4(N,delta_t,t0,tp,A,tau)
2	% "Несимметричный треугольный импульс"
3	% N - число выборок во временной области (число степеней свободы,
4	% N должно быть целой степенью 2);
5	% delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с];
6	% t0 - момент начала импульса, выраженный целым числом delta_t;
7	% tp - длительность импульса, выраженная целым числом delta_t;
8	% значение t0+tp-1 должно быть меньше или равно N;
9	% A - амплитуда импульса [В];
10	% tau - постоянная времени интегрирующей (дифференцирующей) цепи, [с];
11	% Пример обращения: ex_4(2^10,10^(-6),201,200,5,10^(-4));
12	% Пример обращения: ex_4(2^12,10^(-6),101,3072,1,3.33*10^(-4));
13	
14	% T - длительность сигнала [с];
15	% delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];
16	
17	T=N*delta_t;
18	delta_f=1/T;
19	
20	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
21	u1=zeros(1,t0-1);
22	% sl - тангенс угла наклона в интервале значений k от t0 до tp;
23	sl=A/(tp-1);
24	u2=sl*(k(t0:t0+tp-1)-t0);
25	u3=zeros(1,N-t0-tp+1);
26	u=[u1 u2 u3];
27	
28	plot(tk,u,'b'); hold on; %ylim([-0.2 A+0.2]); grid on;
29	xlabel('t [с]');
30	ylabel('u, real(fft(int cir .*U)), real(fft(dif cir .*U)) [V]');
31	%figure;
32	
33	n=0:N-1; fn=delta_f*n;
34	U=fft(u); %W=V; U=abs(V);
35	%stem(n(1:N/2),abs(U(1:N/2)),'-m'); grid on;
36	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(U) [V]','b'); figure;
37	%stem(fn(1:N/2),real(U(1:N/2)),'-xb'); grid on;
38	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('real(U) [V]'); figure;
39	%stem(fn(1:N/2),imag(U(1:N/2)),'-xg'); grid on;

40	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('imag(U) [V]'); figure;
41	
42	%u_ =ifft(U);
43	%plot(tk,real(u_),'r'); ylim([-0.2 A+0.2]); grid on;
44	%xlabel('t [s]'); ylabel('real(u) [V]'); figure;
45	
46	% int_cir - частотная характеристика (комплексный коэффициент передачи)
47	% интегрирующей цепи для положительных частот;
48	% conj(fliplr(int_cir) - то же, что int_cir, для отрицательных частот;
49	% int_cir_ - частотная характеристика интегрирующей цепи в целом;
50	int_cir=1./(1+i*2*pi*n(1:N/2)*delta_f*tau);
51	int_cir_=[int_cir conj(fliplr(int_cir))];
52	%plot(fn(1:N/2),abs(int_cir)); grid on;
53	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(int_cir)'); figure;
54	%plot(fn(1:N/2),angle(int_cir)); grid on;
55	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('angle(int_cir) [rad]'); figure;
56	
57	V=int_cir_*U;
58	v=ifft(V);
59	plot(tk,real(v),'r'); hold on; %grid on;
60	%xlabel('t [s]'); ylabel('real(ifft(int_cir_*U)) [V]'); figure;
61	
62	% dif_cir - частотная характеристика (комплексный коэффициент передачи)
63	% дифференцирующей цепи для положительных частот;
64	% conj(fliplr(dif_cir) - то же, что dif_cir, для отрицательных частот;
65	% dif_cir_ - частотная характеристика дифференцирующей цепи в целом;
66	dif_cir=(i*2*pi*n(1:N/2)*delta_f*tau)./(1+i*2*pi*n(1:N/2)*delta_f*tau);
67	dif_cir_=[dif_cir conj(fliplr(dif_cir))];
68	%plot(n(1:N/2),abs(dif_cir)); grid on;
69	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(dif_cir)'); figure;
70	%plot(n(1:N/2),angle(dif_cir)); grid on;
71	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('angle(dif_cir) [rad]'); figure;
72	
73	W=dif_cir_*U;
74	w=ifft(W);
75	plot(tk,real(w),'g'); ylim([min(real(w))-0.2 max(u)+0.2]); grid on;
76	%xlabel('t [s]'); ylabel('real(ifft(dif_cir_*U)) [V]'); figure;
77	
78	figure; ke=t0+tp/2;

	ex_4.m
79	plot(tk(1:ke),u(1:ke),'b'); hold on; xlabel('t [s]');
80	ylabel('u, real(iffit(int cir .*U)), real(iffit(dif cir .*U)) [V]');
81	plot(tk(1:ke),real(v(1:ke)), 'r'); hold on;
82	plot(tk(1:ke),real(w(1:ke)), 'g'); ylim([-0.2 u(ke)+0.2]); grid on;

	ex_5.m
1	function ex_5(N,delta_t,t0,tp,A,fc,a)
2	% "Одиночный радиоимпульс"
3	% N - число выборок во временной области (число степеней свободы,
4	% N должно быть целой степенью 2);
5	% delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с];
6	% t0 - момент начала импульса, выраженный целым числом delta_t;
7	% tp - длительность импульса, выраженная целым числом delta_t;
8	% значение t0+tp-1 должно быть меньше или равно N;
9	% A - амплитуда импульса [В];
10	% fc - частота несущей, выраженная числом интервалов дискретизации
11	% по оси частот;
12	% a - параметр косинусоидального сглаживания (t0-a*tp должно быть
13	% больше или равно 1, t0+tp-1+a*tp должно быть меньше или равно N);
14	% Пример обращения: ex_5(2^10,10^(-6),201,200,0.33,50,0);
15	
16	% T - длительность сигнала [с];
17	% delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];
18	%fp - частота заполнения радиоимпульса [Гц];
19	
20	T=N*delta_t;
21	delta_f=1/T;
22	fp=fc*delta_f;
23	
24	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
25	% вычисление граничных точек сглаживающих полупериодов косинусоиды
26	% на концах импульса;
27	af=floor(a*tp); t0_b=t0-af; t0_a=t0+af; te_b=t0+tp-1-af; te_a=te_b+2*af;
28	% подготовка несущего колебания carrier для заполнения им видеоимпульса;

```

29 kc=t0_b:te_a; carrier=sin(2*pi*fp*(kc-t0_b)*delta_t);
30
31 % формирование радиопульса и до сглаживания на концах;
32 u1=zeros(1,t0_b-1);
33 u2=A*ones(1,tp+2*af).*carrier;
34 u3=zeros(1,N-te_a);
35 u=[u1 u2 u3];
36
37 plot(tk,u,'b'); grid on;
38 xlabel('t [s]'); ylabel('u [V]'); figure;
39
40 % win - "косинусоидальное окно";
41 win1=zeros(1,t0_b-1);
42 if af~=0
43     dphi=pi/(2*af);
44     kw2=t0_b:t0_a-1;
45     win2=(1-cos((kw2-t0_b)*dphi))/2;
46 end
47 win3=ones(1,te_b-t0_a+1);
48 if af~=0
49     kw4=te_b+1:te_a;
50     win4=(1+cos((kw4-te_b)*dphi))/2;
51 end
52 win5=zeros(1,N-te_a);
53 if af~=0
54     win=[win1 win2 win3 win4 win5];
55 else
56     win=[win1 win3 win5];
57 end
58 plot(tk,win,'k'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;
59 xlabel('t [s]'); ylabel('win'); figure;
60
61 u=u.*win; % умножение исходного радиопульса на "окно";
62 plot(tk,u,'b'); grid on;
63 xlabel('t [s]'); ylabel('u [V]'); figure;
64
65 n=0:N-1; fn=delta_f*n;
66 U=fft(u);
67 stem(fn(1:N/2),abs(U(1:N/2)), 'x--m'); grid on;

```

	ex_5.m
68	xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(U) [V]'); figure;
69	%stem(fn(1:N/2),real(U(1:N/2)),'-xb'); grid on;
70	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('real(U) [V]'); figure;
71	%stem(fn(1:N/2),imag(U(1:N/2)),'-xg'); grid on;
72	%xlabel('f [Hz]'); ylabel('imag(U) [V]'); figure;
73	
74	u_ =ifft(U);
75	plot(tk,real(u_), 'r'); grid on;
76	xlabel('t [s]'); ylabel('real(u) [V]');
77	
78	% av_err - среднеквадратическое расхождение между исходным радиоим-
79	% радиоимпульсом и тем, что получается в результате последовательного
80	% применения прямого и обратного преобразования Фурье;
81	av_err=sqrt(sum(abs(u-u_).^2)/N);

	ex_6.m
1	function ex_6(N,delta_t,t01,tp1,A1,fc1,a1,t02,tp2,A2,fc2,a2)
2	% "Два радиоимпульса"
3	% N - число выборок во временной области (число степеней свободы,
4	% N должно быть целой степенью 2);
5	% delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с];
6	% t01,t02 - моменты начала импульсов, выраженные целым числом delta_t;
7	% tp1,tp2 - длительности импульсов, выраженные целым числом delta_t;
8	% значения t01+tp1-1 и t02+tp2-1 должны быть меньше или равны N;
9	% A1,A2 - амплитуды импульсов [В];
10	% fc1,fc2 - частоты несущих, выраженные числом интервалов дискретизации
11	% по оси частот (четные значения);
12	% a1,a2 - параметры косинусоидального сглаживания (значения t01-a1*tp1 и
13	% t02-a2*tp2 должны быть больше или равны 1, значения t01+tp1-1+a1*tp1 и
14	% t02+tp2-1+a2*tp2 должны быть меньше или равны N);
15	% Пример обращения:
16	% ex_6(2^10,10^(-6),201,200,0.33,20,0,201,200,0.33,60,0.2);
17	
18	% T - длительность сигнала [с];

	ex_6.m
19	% delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];
20	% fp1,fp2 - частоты заполнения радиоимпульсов [Гц];
21	
22	T=N*delta_t;
23	delta_f=1/T;
24	fp1=fc1*delta_f;
25	fp2=fc2*delta_f;
26	
27	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
28	
29	% вычисление граничных точек сглаживающих полупериодов косинусоид
30	% на концах импульсов;
31	af1=floor(a1*tp1);
32	t0_b1=t01-af1; t0_a1=t01+af1;
33	te_b1=t01+tp1-1-af1; te_a1=te_b1+2*af1;
34	af2=floor(a2*tp2);
35	t0_b2=t02-af2; t0_a2=t02+af2;
36	te_b2=t02+tp2-1-af2; te_a2=te_b2+2*af2;
37	
38	% подготовка несущих колебаний carrier1 и carrier2
39	% для заполнения ими видеоимпульсов;
40	kc1=t0_b1:te_a1; carrier1=sin(2*pi*fp1*(kc1-t0_b1)*delta_t);
41	kc2=t0_b2:te_a2; carrier2=sin(2*pi*fp2*(kc2-t0_b2)*delta_t);
42	
43	% формирование радиоимпульсов u1 и u2 до сглаживания на концах;
44	u11=zeros(1,t0_b1-1);
45	u12=A1*ones(1,tp1+2*af1).*carrier1;
46	u13=zeros(1,N-te_a1);
47	u1=[u11 u12 u13];
48	u21=zeros(1,t0_b2-1);
49	u22=A2*ones(1,tp2+2*af2).*carrier2;
50	u23=zeros(1,N-te_a2);
51	u2=[u21 u22 u23];
52	
53	plot(tk,u1,'b'); grid on;
54	xlabel('t [s]'); ylabel('u1 [V]'); figure;
55	plot(tk,u2,'g'); grid on;
56	xlabel('t [s]'); ylabel('u2 [V]'); figure;
57	

	ex_6.m
58	% win1,win2 - "косинусоидальные окна";
59	win11=zeros(1,t0_b1-1);
60	if af1~=0
61	dphi1=pi/(2*af1);
62	kw12=t0_b1:t0_a1-1;
63	win12=(1-cos((kw12-t0_b1)*dphi1))/2;
64	end
65	win13=ones(1,te_b1-t0_a1+1);
66	if af1~=0
67	kw14=te_b1+1:te_a1;
68	win14=(1+cos((kw14-te_b1)*dphi1))/2;
69	end
70	win15=zeros(1,N-te_a1);
71	if af1~=0
72	win1=[win11 win12 win13 win14 win15];
73	else
74	win1=[win11 win13 win15];
75	end
76	plot(tk,win1,'b'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;
77	xlabel('t [s]'); ylabel('win1'); figure;
78	
79	win21=zeros(1,t0_b2-1);
80	if af2~=0
81	dphi2=pi/(2*af2);
82	kw22=t0_b2:t0_a2-1;
83	win22=(1-cos((kw22-t0_b2)*dphi2))/2;
84	end
85	win23=ones(1,te_b2-t0_a2+1);
86	if af2~=0
87	kw24=te_b2+1:te_a2;
88	win24=(1+cos((kw24-te_b2)*dphi2))/2;
89	end
90	win25=zeros(1,N-te_a2);
91	if af2~=0
92	win2=[win21 win22 win23 win24 win25];
93	else
94	win2=[win21 win23 win25];
95	end
96	plot(tk,win2,'g'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;

	ex_6.m
97	xlabel('t [s]'); ylabel('win2'); figure;
98	
99	% умножение каждого радиоимпульса на свое "окно";
100	u1=u1.*win1;
101	plot(tk,u1,'b'); grid on;
102	xlabel('t [s]'); ylabel('u1 [V]'); figure;
103	u2=u2.*win2;
104	plot(tk,u2,'g'); grid on;
105	xlabel('t [s]'); ylabel('u2 [V]'); figure;
106	
107	% u - сумма двух сформированных сигналов u1 и u2;
108	u=u1+u2;
109	subplot(3,1,1); plot(tk,u1,'b'); grid on; ylabel('u1 [V]');
110	subplot(3,1,2); plot(tk,u2,'g'); grid on; ylabel('u2 [V]');
111	subplot(3,1,3); plot(tk,u,'r'); grid on; ylabel('u=u1+u2 [V]');
112	xlabel('t [s]'); figure;
113	
114	% переход в частотную область;
115	n=0:N-1; fn=delta_f*n;
116	U=fft(u);
117	stem(fn(1:N/2),abs(U(1:N/2)),'x--m'); grid on;
118	xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(U) [V]'); figure;
119	
120	% создание "окон" WIN1 и WIN2 для разделения сигналов в частотной облас-
121	
122	WIN11=zeros(1,fc1/2-1); WIN12=ones(1,fc1+1); WIN13=zeros(1,N/2-3*fc1/2);
123	WIN1=[WIN11 WIN12 WIN13 WIN13 WIN12 WIN11];
124	subplot(2,1,1); plot(fn(1:N/2),WIN1(1:N/2),'b');
125	ylabel('WIN1'); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
126	WIN21=zeros(1,fc2/2-1); WIN22=ones(1,fc2+1); WIN23=zeros(1,N/2-3*fc2/2);
127	WIN2=[WIN21 WIN22 WIN23 WIN23 WIN22 WIN21];
128	subplot(2,1,2); plot(fn(1:N/2),WIN2(1:N/2),'g');
129	ylabel('WIN2'); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
130	figure;
131	
132	U1=U.*WIN1; U2=U.*WIN2;
133	subplot(3,1,1);
134	stem(fn(1:N/2),abs(U1(1:N/2)),'--xm'); grid on; ylabel('abs(U) [V]');
135	subplot(3,1,2);

	ex_6.m
136	stem(fn(1:N/2),abs(U1(1:N/2)),'-xb'); grid on; ylabel('abs(U1) [V]');
137	subplot(3,1,3);
138	stem(fn(1:N/2),abs(U2(1:N/2)),'-xg'); grid on; ylabel('abs(U2) [V]');
139	xlabel('f [Hz]'); figure;
140	
141	u_ =ifft(U); u1_ =ifft(U1); u2_ =ifft(U2);
142	subplot(3,1,1); plot(tk,real(u_), 'r'); grid on; ylabel('ifft(U) [V]');
143	subplot(3,1,2); plot(tk,real(u1_), 'b'); grid on; ylabel('ifft(U1) [V]');
144	subplot(3,1,3); plot(tk,real(u2_), 'g'); grid on; ylabel('ifft(U2) [V]');
145	xlabel('t [s]');
146	
147	% av_err1,av_err2 - среднеквадратические расхождения между исходными
148	% радиоимпульсами и тем, что получается в результате их разделения в
149	% частотной области;
150	av_err1=sqrt(sum(abs(u1-u1_).^2)/N);
151	av_err2=sqrt(sum(abs(u2-u2_).^2)/N);

	ex_7.m
1	function ex_7(N,delta_t,t0,tp,Ap,Ai,fcp,fci,a)
2	% "Радиоимпульс на фоне синусоидальной помехи"
3	% N - число выборок во временной области (число степеней свободы,
4	% N должно быть целой степенью 2);
5	% delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с];
6	% t0 - момент начала импульса, выраженный целым числом delta_t;
7	% tp - длительность импульса, выраженная целым числом delta_t;
8	% значение t0+tp-1 должно быть меньше или равно N;
9	% Ap, Ai - амплитуда импульса и амплитуда помехи соответственно [B];
10	% fcp,fci - частота несущей радиоимпульса и частота помехи,
11	% выраженные числом интервалов дискретизации по оси частот;
12	% a - параметр косинусоидального сглаживания (t0-a*tp должно быть
13	% больше или равно 1, t0+tp-1+a*tp должно быть меньше или равно N);
14	% Пример обращения: ex_7(2^10,10^(-6),201,200,0.33,1.0,50,60,0);
15	% Пример обращения: ex_7(2^10,10^(-6),201,200,0.33,33.0,50,60,0.2);
16	% Пример обращения: ex_7(2^10,10^(-6),201,200,0.33,1.0,50,200.5,0);

	ex_7.m
17	
18	% T - длительность сигнала [с];
19	% delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];
20	% fp - частота заполнения радиоимпульса [Гц];
21	
22	T=N*delta_t;
23	delta_f=1/T;
24	fp=fcp*delta_f;
25	fi=fci*delta_f;
26	
27	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
28	% вычисление граничных точек сглаживающих полупериодов косинусоиды
29	% на концах импульса;
30	af=floor(a*tp); t0_b=t0-af; t0_a=t0+af; te_b=t0+tp-1-af; te_a=te_b+2*af;
31	% подготовка несущего колебания carrier для заполнения им видеоимпульса;
32	kc=t0_b:te_a; carrier=sin(2*pi*fp*(kc-t0_b)*delta_t);
33	% образование синусоидальной помехи на всем отрезке отрезке времени
34	interference=Ai*sin(2*pi*fi*tk);
35	
36	% формирование радиоимпульса и до сглаживания на концах;
37	u1=zeros(1,t0_b-1);
38	u2=Ap*ones(1,tp+2*af).*carrier;
39	u3=zeros(1,N-te_a);
40	u=[u1 u2 u3];
41	
42	%plot(tk,u,'b'); grid on;
43	%xlabel('t [с]'); ylabel('u [V]'); figure;
44	
45	% win - "косинусоидальное окно";
46	win1=zeros(1,t0_b-1);
47	if af~=0
48	dphi=pi/(2*af);
49	kw2=t0_b:t0_a-1;
50	win2=(1-cos((kw2-t0_b)*dphi))/2;
51	end
52	win3=ones(1,te_b-t0_a+1);
53	if af~=0
54	kw4=te_b+1:te_a;
55	win4=(1+cos((kw4-te_b)*dphi))/2;

```

56 end
57 win5=zeros(1,N-te_a);
58 if af~=0
59     win=[win1 win2 win3 win4 win5];
60 else
61     win=[win1 win3 win5];
62 end
63 %plot(tk,win,'k'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;
64 %xlabel('t [s]'); ylabel('win'); figure;
65
66 u=u.*win; % умножение исходного радиоимпульса на "окно";
67 plot(tk,u,'b'); grid on;
68 xlabel('t [s]'); ylabel('u [V]'); figure;
69
70 % upi - сумма полезного сигнала (радиоимпульса) и помехи;
71 upi=u+interference;
72 plot(tk,upi,'b'); grid on;
73 xlabel('t [s]'); ylabel('upi [V]'); figure;
74
75 % вычисление спектра суммы полезного сигнала и помехи;
76 n=0:N-1; fn=delta_f*n;
77 UPI=fft(upi);
78 stem(fn(1:N/2),abs(UPI(1:N/2)),'x--m'); grid on;
79 xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(UPI) [V]'); figure;
80 %stem(fn(1:N/2),real(UPI(1:N/2)),'--xb'); grid on;
81 %xlabel('f [Hz]'); ylabel('real(U) [V]'); figure;
82 %stem(fn(1:N/2),imag(UPI(1:N/2)),'--xg'); grid on;
83 %xlabel('f [Hz]'); ylabel('imag(U) [V]'); figure;
84
85 % подавление помехи: UWI - спектр UPI без помехи;
86 UWI=UPI;
87 if mod(fi,delta_f)==0
88     UWI(fci+1)=0; UWI(N-fci+1)=0;
89 else
90     fcif=floor(fci); fcic=ceil(fci);
91     UWI(fcif-3:fcic+5)=0;
92     UWI(N-fcic-3:N-fcif+5)=0;
93 end
94 stem(fn(1:N/2),abs(UWI(1:N/2)),'x--m'); grid on;

```

	ex_7.m
95	xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(UWI) [V]'); figure;
96	
97	% воспроизведение полезного сигнала u_ после извлечения помехи из спек-
98	% UPI суммы полезного сигнала u и помехи interference;
99	u_ =ifft(UWI);
100	plot(tk,real(u_), 'r'); grid on;
101	xlabel('t [s]'); ylabel('real(u) [V]');
102	
103	% av_err - среднеквадратическое расхождение между исходным радиоим-
104	% и тем, что получается в результате последовательного применения прямо-
105	% и обратного преобразования Фурье;
106	av_err=sqrt(sum(abs(u-u_).^2)/N);

	ex_8.m
1	function ex_8(N,delta_t,t0,tp,tau)
2	% "Прохождение прямоугольного (видео) импульса
3	% через простейшие ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ"
4	% N - число точек на оси времени и на оси частоты;
5	% delta_t - интервал дискретизации по оси времени [с];
6	% t0 - момент начала прямоугольного импульса (целое число delta_t);
7	% tp - длительность прямоугольного импульса (целое число delta_t);
8	% значение t0+tp-1 должно быть меньше или равно N;
9	% tau - постоянная времени [с]:
10	% у ФНЧ и ФВЧ tau=1/w0, w0 - граничная частота [рад/с],
11	% у ПФ и РФ tau=1/Bw, Bw - полоса пропускания/подавления [рад/с];
12	% Пример обращения: ex_8(2^10,10^(-6),201,200,10^(-4));
13	
14	% создание входного сигнала x(t) - прямоугольного импульса длительности
15	% tp*delta_t, начинающегося в момент времени tp*delta_t, с амплитудой 1 В
16	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
17	x1=zeros(1,t0-1);
18	x2=ones(1,tp);
19	x3=zeros(1,N-t0-tp+1);
20	x=[x1 x2 x3];

	ex_8.m
21	
22	% fs - частота дискретизации [Гц];
23	fs=1/delta_t;
24	
25	% расчет нулей и полюсов исходного аналогового фильтра-прототипа (фильт-
26	% ра нижних частот Баттерворта 1-го порядка) с граничной частотой 1 рад/с;
27	[z,p,G]=butter(1);
28	% переход от нулей и полюсов к числителю и знаменателю функции передачи
29	% аналогового фильтра;
30	[b,a]=zp2tf(z,p,G);
31	
32	% образование массивов частот w [рад/с] и f=w/(2*pi) [Гц] для ФНЧ и ФВЧ;
33	% w0, f0 - для ФНЧ и ФВЧ граничная частота в рад/с и в Гц соответственно;
34	w0=1/tau; f0=w0/(2*pi);
35	dw=w0/(N-1); % dw - шаг по оси частот для ФНЧ и ФВЧ;
36	w=0:dw:4*w0;
37	f=w/(2*pi);
38	
39	% частотное преобразование исходного аналогового ФНЧ
40	% в аналоговый ФНЧ с граничной частотой w0 [рад/с];
41	[b1,a1]=lp2lp(b,a,w0);
42	%h1=freqs(b1,a1,w); plot(f,abs(h1)); grid on; xlabel('frequency [Hz]');
43	%ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_a_l_p(jw))'); figure;
44	
45	% билинейное преобразование аналогового ФНЧ в цифровой ФНЧ: bz, az -
46	% коэффициенты полиномов в числителе и в знаменателе функции передачи
47	% цифрового фильтра;
48	[bz1,az1]=bilinear(b1,a1,fs);
49	% hz1 - частотная характеристика цифрового ФНЧ;
50	hz1=freqz(bz1,az1,f,fs); plot(f,abs(hz1)); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
51	xlabel('frequency [Hz]'); ylabel('abs(K_d_l_p(jw))'); figure;
52	
53	% y_int - сигнал на выходе цифрового ФНЧ (интегрирующей цепи);
54	y_int=filter(bz1,az1,x);
55	subplot(2,1,1); plot(tk,x); grid on; xlabel('time [s]');
56	ylim([-0.2 1.2]); ylabel('x(t) [V]');
57	subplot(2,1,2); plot(tk,y_int); grid on; xlabel('time [s]');
58	ylim([-0.2 1.2]); ylabel('y_l_p(t) [V]'); figure;
59	

	ex_8.m
60	% частотное преобразование исходного аналогового ФНЧ
61	% в аналоговый ФВЧ с граничной частотой w0 [рад/с];
62	[b2,a2]=lp2hp(b,a,w0);
63	%h2=freqs(b2,a2,w); plot(f,abs(h2)); grid on; xlabel('frequency [Hz]');
64	%ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_a_h_p(jw))'); figure;
65	
66	% билинейное преобразование аналогового ФВЧ в цифровой ФВЧ;
67	[bz2,az2]=bilinear(b2,a2,fs);
68	% hz2 - частотная характеристика цифрового ФВЧ;
69	hz2=freqz(bz2,az2,f,fs); plot(f,abs(hz2)); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
70	xlabel('frequency [Hz]'); ylabel ('abs(K_d_h_p(jw))'); figure;
71	
72	% y_dif - сигнал на выходе цифрового ФВЧ (дифференцирующей цепи);
73	y_dif=filter(bz2,az2,x);
74	subplot(2,1,1); plot(tk,x); grid on; xlabel('time [s]');
75	ylim([-0.2 1.2]); ylabel('x(t) [V]');
76	subplot(2,1,2); plot(tk,y_dif); grid on; xlabel('time [s]');
77	ylim([-1.2 1.2]); ylabel('y_h_p(t) [V]'); figure;
78	
79	% образование массивов частот w_bps [рад/с] и f_bps=w_bps/(2*pi) [Гц]
80	% для ПФ и РФ; w0_bps, f0_bps - "центральная" частота в рад/с и в Гц
81	% соответственно; Bw - полоса пропускания/подавления в рад/с;
82	w0_bps=10*w0; f0_bps=w0_bps/(2*pi); Bw=w0;
83	dw_bps=w0_bps/(N-1); % dw_bps - шаг по оси частот для ПФ и РФ;
84	w_bps=0:dw_bps:4*w0_bps;
85	f_bps=w_bps/(2*pi);
86	
87	% частотное преобразование исходного аналогового ФНЧ в аналоговый ПФ
88	% с "центральной" частотой w0_bps [рад/с] и полосой пропускания Bw [рад/с];
89	[b3,a3]=lp2bp(b,a,w0_bps,Bw);
90	%h3=freqs(b3,a3,w_bps); plot(f_bps,abs(h3)); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
91	%xlabel('frequency [Hz]'); ylabel('abs(K_b_p(jw))'); figure;
92	
93	% билинейное преобразование аналогового ПФ в цифровой ПФ;
94	[bz3,az3]=bilinear(b3,a3,fs);
95	% hz3 - частотная характеристика цифрового ПФ;
96	hz3=freqz(bz3,az3,f_bps,fs); plot(f_bps,abs(hz3)); grid on;
97	xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel ('abs(K_b_p(jw))');
98	figure;

	ex_8.m
99	
100	% y_bp - сигнал на выходе цифрового ПФ;
101	y_bp=filter(bz3,az3,x);
102	subplot(2,1,1); plot(tk,x); grid on; xlabel('time [s]');
103	ylim([-0.2 1.2]); ylabel('x(t) [V]');
104	subplot(2,1,2); plot(tk,y_bp); grid on; xlabel('time [s]');
105	ylabel('y_b_p(t) [V]'); figure;
106	
107	% частотное преобразование исходного аналогового ФНЧ в аналоговый РФ
108	% с "центральной" частотой w0_bps [рад/с] и полосой подавления Bw [рад/с];
109	[b4,a4]=lp2bs(b,a,w0_bps,Bw);
110	%h4=freqs(b4,a4,w_bps); plot(f_bps,abs(h4)); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
111	%xlabel('frequency [Hz]'); ylabel('abs(K_b_s(jw))'); figure;
112	
113	% билинейное преобразование аналогового РФ в цифровой РФ;
114	[bz4,az4]=bilinear(b4,a4,fs);
115	% hz4 - частотная характеристика цифрового РФ;
116	hz4=freqz(bz4,az4,f_bps,fs); plot(f_bps,abs(hz4)); grid on;
117	xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_b_s(jw))');
118	figure;
119	
120	% y_bs - сигнал на выходе цифрового РФ;
121	y_bs=filter(bz4,az4,x);
122	subplot(2,1,1); plot(tk,x); grid on; xlabel('time [s]');
123	ylim([-0.2 1.2]); ylabel('x(t) [V]');
124	subplot(2,1,2); plot(tk,y_bs); grid on; xlabel('time [s]');
125	ylim([-0.2 1.2]); ylabel('y_b_s(t) [V]');

	ex_9.m
1	function ex_9(N,delta_t,t0,tp,A,tau)
2	% "Прохождение несимметричного треугольного импульса
3	% через простейшие ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ"
4	% N - число точек на оси времени и на оси частоты;
5	% delta_t - интервал дискретизации по оси времени [с];

	ex_9.m
6	% t0 - момент начала импульса (целое число delta_t);
7	% tp - длительность (целое число delta_t);
8	% значение t0+tp-1 должно быть меньше или равно N;
9	% A - амплитуда импульса [В];
10	% tau - постоянная времени [с];
11	% у ФНЧ и ФВЧ $\tau = 1/w_0$, w_0 - граничная частота [рад/с],
12	% у ПФ и РФ $\tau = 1/B_w$, B_w - полоса пропускания/подавления [рад/с];
13	% % Пример обращения: ex_9(2^12, 10^(-6), 101, 3072, 1, 3.33*10^(-4));
14	
15	% создание входного сигнала x(t) - треугольного импульса длительности
16	% tp*delta_t, начинающегося в момент времени tp*delta_t, с амплитудой A B
17	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
18	x1=zeros(1,t0-1);
19	% sl - тангенс угла наклона в интервале значений k от t0 до tp;
20	sl=A/(tp-1);
21	x2=sl*(k(t0:t0+tp-1)-t0);
22	x3=zeros(1,N-t0-tp+1);
23	x=[x1 x2 x3];
24	
25	% fs - частота дискретизации [Гц];
26	fs=1/delta_t;
27	
28	% расчет нулей и полюсов исходного аналогового фильтра-прототипа (фильтр-
29	% ра нижних частот Баттерворта 1-го порядка) с граничной частотой 1 рад/с;
30	[z,p,G]=buttap(1);
31	% переход от нулей и полюсов к числителю и знаменателю функции передачи
32	% аналогового фильтра;
33	[b,a]=zp2tf(z,p,G);
34	
35	% образование массивов частот w [рад/с] и f=w/(2*pi) [Гц] для ФНЧ и ФВЧ;
36	% w0, f0 - для ФНЧ и ФВЧ граничная частота в рад/с и в Гц соответственно;
37	w0=1/tau; f0=w0/(2*pi);
38	dw=w0/(N-1); % dw - шаг по оси частот для ФНЧ и ФВЧ;
39	w=0:dw:4*w0;
40	f=w/(2*pi);
41	
42	% частотное преобразование исходного аналогового ФНЧ
43	% в аналоговый ФНЧ с граничной частотой w0 [рад/с];
44	[b1,a1]=lp2lp(b,a,w0);

	ex_9.m
45	%h1=freqs(b1,a1,w); plot(f,abs(h1)); grid on; xlabel('frequency [Hz]');
46	%ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_a_l_p(jw))'); figure;
47	
48	% билинейное преобразование аналогового ФНЧ в цифровой ФНЧ: bz, az -
49	% коэффициенты полиномов в числителе и в знаменателе функции передачи
50	% цифрового фильтра;
51	[bz1,az1]=bilinear(b1,a1,fs);
52	% hz1 - частотная характеристика цифрового ФНЧ;
53	hz1=freqz(bz1,az1,f,fs); plot(f,abs(hz1)); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
54	xlabel('frequency [Hz]'); ylabel('abs(K_d_l_p(jw))'); figure;
55	
56	% y_int - сигнал на выходе цифрового ФНЧ (интегрирующей цепи);
57	y_int=filter(bz1,az1,x);
58	plot(tk,x); hold on; plot(tk,y_int,'r');
59	grid on; xlabel('time [s]'); ylim([-0.2 A+0.2]);
60	ylabel('x(t) (blue), y_l_p(t) (red) [V]'); figure;
61	
62	% частотное преобразование исходного аналогового ФНЧ
63	% в аналоговый ФВЧ с граничной частотой w0 [рад/с];
64	[b2,a2]=lp2hp(b,a,w0);
65	%h2=freqs(b2,a2,w); plot(f,abs(h2)); grid on; xlabel('frequency [Hz]');
66	%ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_a_h_p(jw))'); figure;
67	
68	% билинейное преобразование аналогового ФВЧ в цифровой ФВЧ;
69	[bz2,az2]=bilinear(b2,a2,fs);
70	% hz2 - частотная характеристика цифрового ФВЧ;
71	hz2=freqz(bz2,az2,f,fs); plot(f,abs(hz2)); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
72	xlabel('frequency [Hz]'); ylabel('abs(K_d_h_p(jw))'); figure;
73	
74	% y_dif - сигнал на выходе цифрового ФВЧ (дифференцирующей цепи);
75	y_dif=filter(bz2,az2,x);
76	plot(tk,x); hold on; plot(tk,y_dif,'r');
77	grid on; xlabel('time [s]'); ylim([-A A+0.2]);
78	ylabel('x(t) (blue), y_h_p(t) (red) [V]'); figure;
79	
80	% образование массивов частот w_bps [рад/с] и f_bps=w_bps/(2*pi) [Гц]
81	% для ПФ и РФ; w0_bps, f0_bps - "центральная" частота в рад/с и в Гц
82	% соответственно; Bw - полоса пропускания/подавления в рад/с;
83	w0_bps=10*w0; f0_bps=w0_bps/(2*pi); Bw=w0;

```

84 dw_bps=w0_bps/(N-1); % dw_bps - шаг по оси частот для ПФ и РФ;
85 w_bps=0:dw_bps:4*w0_bps;
86 f_bps=w_bps/(2*pi);
87
88 % частотное преобразование исходного аналогового ФНЧ в аналоговый ПФ
89 % с "центральной" частотой w0_bps [рад/с] и полосой пропускания Bw [рад/с];
90 [b3,a3]=lp2bp(b,a,w0_bps,Bw);
91 %h3=freqs(b3,a3,w_bps); plot(f_bps,abs(h3)); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
92 %xlabel('frequency [Hz]'); ylabel('abs(K_b_p(jw))'); figure;
93
94 % билинейное преобразование аналогового ПФ в цифровой ПФ;
95 [bz3,az3]=bilinear(b3,a3,fs);
96 % hz3 - частотная характеристика цифрового ПФ;
97 hz3=freqz(bz3,az3,f_bps,fs); plot(f_bps,abs(hz3)); grid on;
98 xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_b_p(jw))');
99 figure;
100
101 % y_bp - сигнал на выходе цифрового ПФ;
102 y_bp=filter(bz3,az3,x);
103 subplot(2,1,1); plot(tk,x); grid on; xlabel('time [s]');
104 ylim([-0.2 1.2]); ylabel('x(t) [V]');
105 subplot(2,1,2); plot(tk,y_bp,'r'); grid on; xlabel('time [s]');
106 ylabel('y_b_p(t) [V]'); figure;
107
108 % частотное преобразование исходного аналогового ФНЧ в аналоговый РФ
109 % с "центральной" частотой w0_bps [рад/с] и полосой подавления Bw [рад/с];
110 [b4,a4]=lp2bs(b,a,w0_bps,Bw);
111 %h4=freqs(b4,a4,w_bps); plot(f_bps,abs(h4)); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
112 %xlabel('frequency [Hz]'); ylabel('abs(K_b_s(jw))'); figure;
113
114 % билинейное преобразование аналогового РФ в цифровой РФ;
115 [bz4,az4]=bilinear(b4,a4,fs);
116 % hz4 - частотная характеристика цифрового РФ;
117 hz4=freqz(bz4,az4,f_bps,fs); plot(f_bps,abs(hz4)); grid on;
118 xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_b_s(jw))');
119 figure;
120
121 % y_bs - сигнал на выходе цифрового РФ;
122 y_bs=filter(bz4,az4,x);

```

	ex_9.m
123	subplot(2,1,1); plot(tk,x); grid on; xlabel('time [s]');
124	ylim([-0.2 1.2]); ylabel('x(t) [V]');
125	subplot(2,1,2); plot(tk,y_bs,'r'); grid on; xlabel('time [s]');
126	ylim([-0.2 1.2]); ylabel('y_b_s(t) [V]');

	ex_10.m
1	function ex_10(N,delta_t,t0,tp,A,fc,n,Rs,f0,bf)
2	% "Прохождение одиночного радиоимпульса
3	% через полосовой фильтр Чебышева 2-го рода"
4	% N - число точек на оси времени и на оси частот;
5	% delta_t - интервал дискретизации по оси времени [с];
6	% t0 - момент начала радиоимпульса (целое число delta_t);
7	% tp - длительность радиоимпульса (целое число delta_t);
8	% значение t0+tp-1 должно быть меньше или равно N;
9	% A - амплитуда радиоимпульса [В];
10	% fc - частота несущей (заполнения) радиоимпульса [Гц];
11	% n - порядок фильтра Чебышева 2-го рода;
12	% Rs - уровень пульсаций в полосе подавления [дБ];
13	% f0 - "центральная" частота полосового фильтра [Гц];
14	% bf - полоса пропускания полосового фильтра [Гц];
15	% Примеры обращения:
16	% ex_10(2^10,10^(-6),101,400,1,2*10^4,4,20,2*10^4,4*10^3);
17	% ex_10(2^10,10^(-6),101,400,1,2*10^4,4,20,1.6*10^4,4*10^3);
18	% ex_10(2^10,10^(-6),101,400,1,2*10^4,5,20,2*10^4,4*10^3);
19	
20	% создание входного сигнала x(t) - радиоимпульса длительности tp*delta_t,
21	% начинающегося в момент времени tp*delta_t, с амплитудой A В и частотой
22	% заполнения fc;
23	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
24	x1=zeros(1,t0-1);
25	x2=A*sin(2*pi*fc*(tk(t0:t0+tp-1)-t0));
26	x3=zeros(1,N-t0-tp+1);
27	x=[x1 x2 x3];
28	
29	% fs - частота дискретизации [Гц];

```

30 fs=1/delta_t;
31
32 % расчет нулей и полюсов исходного аналогового фильтра-прототипа
33 % (полосового фильтра Чебышева 2-го рода порядка n с уровнем пульсаций
34 % в полосе подавления Rs [дБ]);
35 [z,p,G]=cheb2ap(n,Rs);
36 % переход от нулей и полюсов к числителю и знаменателю функции передачи
37 % аналогового фильтра;
38 [b,a]=zp2tf(z,p,G);
39
40 % образование массивов частот w [рад/с] и f=w/(2*pi) в рад/с и в Гц
41 % соответственно;
42 w0=2*pi*f0; Bw=2*pi*bf;
43 dw=w0/(N-1); % dw - шаг по оси частот;
44 w=0:dw:4*w0;
45 f=w/(2*pi);
46
47 % частотное преобразование исходного аналогового полосового фильтра
48 % в аналоговый полосовой фильтр с "центральной" частотой w0 [рад/с]
49 % и полосой пропускания Bw [рад/с];
50 [b1,a1]=lp2bp(b,a,w0,Bw);
51 % h - частотная характеристика аналогового полосового фильтра;
52 h=freqs(b1,a1,w); plot(f,abs(h)); grid on; xlabel('frequency [Hz]');
53 ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_a_b_p(jw))'); figure;
54
55 % преобразование аналогового полосового фильтра в цифровой полосовой
56 % фильтр с помощью функцииimpinvar: bz, az -коэффициенты полиномов
57 % в числителе и в знаменателе функции передачи цифрового фильтра;
58 [bz,az]=impinvar(b1,a1,fs);
59 % hz - частотная характеристика цифрового ПФ;
60 hz=freqz(bz,az,f,fs); plot(f,abs(hz)); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
61 xlabel('frequency [Hz]'); ylabel('abs(K_d_b_p(jw))'); figure;
62
63 % y - сигнал на выходе цифрового полосового фильтра;
64 y=filter(bz,az,x);
65 subplot(2,1,1); plot(tk,x); grid on; xlabel('time [s]');
66 ylim([-1.2 1.2]); ylabel('x(t) [V]');
67 subplot(2,1,2); plot(tk,y); grid on; xlabel('time [s]');
68 ylabel('y(t) [V]');

```

1	function ex_11(N,delta_t,pulse1,pulse2,filtr1,filtr2)
2	% "Два радиоимпульса"
3	% N - число точек на оси времени и на оси частот;
4	% delta_t - интервал времени, с которым берутся выборки, [с];
5	% pulse1=[t01,tp1,A1,fc1,a1], pulse2=[t02,tp2,A2,fc2,a2] -
6	% векторы с параметрами 1-го и 2-го импульсов соответственно:
7	% t01,t02 - момент начала импульса, выраженный целым числом delta_t;
8	% tp1,tp2 - длительность импульса, выраженная целым числом delta_t;
9	% значения t01+tp1-1 и t02+tp2-1 должны быть меньше или равны N;
10	% A1,A2 - амплитуда импульса [В];
11	% fc1,fc2 - частота несущей, выраженная числом интервалов дискретизации
12	% по оси частот delta_f=1/(N*delta_t) (fc1,fc2 - четные значения);
13	% a1,a2 - параметр косинусоидального сглаживания (значения t01-a1*tp1 и
14	% t02-a2*tp2 должны быть больше или равны 1, значения t01+tp1-1+a1*tp1 и
15	% t02+tp2-1+a2*tp2 должны быть меньше или равны N);
16	% filtr1=[n1,Rp1,Rs1,f01,bf1], filtr2=[n2,Rp2,Rs2,f02,bf2] - векторы
17	% с параметрами 1-го и 2-го фильтров соответственно:
18	% n1,n2 - порядок фильтров (целые числа);
19	% Rp1,Rp2 - уровень пульсаций в полосе пропускания [дБ];
20	% Rs1,Rs2 - уровень пульсаций в полосе подавления [дБ];
21	% f01,f02 - "центральная" частота полосы пропускания [Гц];
22	% bf1,bf2 - ширина полосы пропускания [Гц];
23	% Пример обращения:
24	% pulse1=[201,200,0.33,20,0]; pulse2=[201,200,0.33,60,0.2];
25	% filtr1=[5,0.5,30,20,10]; filtr2=[5,0.5,30,60,20];
26	% ex_11(2^10,10^(-6),pulse1,pulse2,filtr1,filtr2);
27	
28	% T - длительность сигнала [с];
29	% delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];
30	T=N*delta_t;
31	delta_f=1/T;
32	
33	t01=pulse1(1); tp1=pulse1(2); A1=pulse1(3); fc1=pulse1(4); a1=pulse1(5);
34	t02=pulse2(1); tp2=pulse2(2); A2=pulse2(3); fc2=pulse2(4); a2=pulse2(5);
35	
36	% fp1,fp2 - частоты заполнения радиоимпульсов [Гц];
37	fp1=fc1*delta_f;
38	fp2=fc2*delta_f;
39	

```

40 k=0:N-1; tk=delta_t*k;
41
42 % вычисление граничных точек сглаживающих полупериодов косинусоид
43 % на концах импульсов;
44 af1=floor(a1*tp1);
45 t0_b1=t01-af1; t0_a1=t01+af1;
46 te_b1=t01+tp1-1-af1; te_a1=te_b1+2*af1;
47 af2=floor(a2*tp2);
48 t0_b2=t02-af2; t0_a2=t02+af2;
49 te_b2=t02+tp2-1-af2; te_a2=te_b2+2*af2;
50
51 % подготовка несущих колебаний carrier1 и carrier2
52 % для заполнения ими видеоимпульсов;
53 kc1=t0_b1:te_a1; carrier1=sin(2*pi*fp1*(kc1-t0_b1)*delta_t);
54 kc2=t0_b2:te_a2; carrier2=sin(2*pi*fp2*(kc2-t0_b2)*delta_t);
55
56 % формирование радиоимпульсов u1 и u2 до сглаживания на концах;
57 u11=zeros(1,t0_b1-1);
58 u12=A1*ones(1,tp1+2*af1).*carrier1;
59 u13=zeros(1,N-te_a1);
60 u1=[u11 u12 u13];
61 u21=zeros(1,t0_b2-1);
62 u22=A2*ones(1,tp2+2*af2).*carrier2;
63 u23=zeros(1,N-te_a2);
64 u2=[u21 u22 u23];
65
66 plot(tk,u1,'r'); grid on;
67 xlabel('t [s]'); ylabel('u1 [V]'); figure;
68 plot(tk,u2,'g'); grid on;
69 xlabel('t [s]'); ylabel('u2 [V]'); figure;
70
71 % win1,win2 - "косинусоидальные окна";
72 win11=zeros(1,t0_b1-1);
73 if af1~=0
74     dphi1=pi/(2*af1);
75     kw12=t0_b1:t0_a1-1;
76     win12=(1-cos((kw12-t0_b1)*dphi1))/2;
77 end
78 win13=ones(1,te_b1-t0_a1+1);

```

	ex_11.m
79	if af1~=0
80	kw14=te_b1+1:te_a1;
81	win14=(1+cos((kw14-te_b1)*dphi1))/2;
82	end
83	win15=zeros(1,N-te_a1);
84	if af1~=0
85	win1=[win11 win12 win13 win14 win15];
86	else
87	win1=[win11 win13 win15];
88	end
89	plot(tk,win1,'r'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;
90	xlabel('t [s]'); ylabel('win1'); figure;
91	
92	win21=zeros(1,t0_b2-1);
93	if af2~=0
94	dphi2=pi/(2*af2);
95	kw22=t0_b2:t0_a2-1;
96	win22=(1-cos((kw22-t0_b2)*dphi2))/2;
97	end
98	win23=ones(1,te_b2-t0_a2+1);
99	if af2~=0
100	kw24=te_b2+1:te_a2;
101	win24=(1+cos((kw24-te_b2)*dphi2))/2;
102	end
103	win25=zeros(1,N-te_a2);
104	if af2~=0
105	win2=[win21 win22 win23 win24 win25];
106	else
107	win2=[win21 win23 win25];
108	end
109	plot(tk,win2,'g'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;
110	xlabel('t [s]'); ylabel('win2'); figure;
111	
112	% умножение каждого радиоимпульса на свое "окно";
113	u1=u1.*win1;
114	plot(tk,u1,'r'); grid on;
115	xlabel('t [s]'); ylabel('u1 [V]'); figure;
116	u2=u2.*win2;
117	plot(tk,u2,'g'); grid on;


```

118 xlabel('t [s]'); ylabel('u2 [V]'); figure;
119
120 % u - сумма двух сформированных сигналов u1 и u2;
121 u=u1+u2;
122 subplot(3,1,1); plot(tk,u1,'r'); grid on; ylabel('u1 [V]');
123 subplot(3,1,2); plot(tk,u2,'g'); grid on; ylabel('u2 [V]');
124 subplot(3,1,3); plot(tk,u,'b'); grid on; ylabel('u=u1+u2 [V]');
125 xlabel('t [s]'); figure;
126
127 % fs - частота дискретизации [Гц];
128 fs=1/delta_t;
129
130 n1=filtr1(1); Rp1=filtr1(2); Rs1=filtr1(3); f01=filtr1(4); bf1=filtr1(5);
131 n2=filtr2(1); Rp2=filtr2(2); Rs2=filtr2(3); f02=filtr2(4); bf2=filtr2(5);
132
133 % расчет нулей и полюсов исходных аналоговых фильтров нижних частот
134 % (эллиптических фильтров порядка n с уровнями пульсаций Rp1, Rp2 [дБ]
135 % в полосе пропускания и Rs1,Rs2 [дБ] в полосе подавления);
136 [z1,p1,G1]=ellipap(n1,Rp1,Rs1);
137 [z2,p2,G2]=ellipap(n2,Rp2,Rs2);
138 % переход от нулей и полюсов к числителю и знаменателю функций передачи
139 % аналоговых фильтров нижних частот;
140 [b1,a1]=zp2tf(z1,p1,G1);
141 [b2,a2]=zp2tf(z2,p2,G2);
142
143 % образование массивов частот w [рад/с] и f=w/(2*pi) в рад/с и в Гц
144 % соответственно;
145 w01=2*pi*f01*delta_f; Bw1=2*pi*bf1*delta_f;
146 w02=2*pi*f02*delta_f; Bw2=2*pi*bf2*delta_f;
147 dw=w02/(N-1); % dw - шаг по оси частот;
148 w=0:dw:4*w02;
149 f=w/(2*pi);
150
151 % частотное преобразование исходных аналоговых фильтров нижних частот
152 % в аналоговые полосовые фильтры-прототипы с "центральной" частотой
153 % w01, w02 [рад/с] и полосой пропускания Bw1, Bw2 [рад/с];
154 [b11,a11]=lp2bp(b1,a1,w01,Bw1);
155 [b12,a12]=lp2bp(b2,a2,w02,Bw2);
156 % h1, h2 - частотные характеристики аналоговых полосовых

```

```

157 % фильтров-прототипов;
158 h1=freqs(b11,a11,w); subplot(2,1,1); plot(f,abs(h1),'r'); grid on;
159 xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_a_b_p_1(jw))');
160 h2=freqs(b12,a12,w); subplot(2,1,2); plot(f,abs(h2),'g'); grid on;
161 xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_a_b_p_2(jw))');
162 figure;
163
164 % билинейное преобразование аналоговых полосовых фильтров-прототипов
165 % цифровые полосовые фильтры: bz1, bz2, az1, az2 - коэффициенты полино-
166 % мов в числителе и в знаменателе функций передачи цифровых фильтров;
167 [bz1,az1]=impinvar(b11,a11,fs);
168 [bz2,az2]=impinvar(b12,a12,fs);
169 % hz1, hz2 - частотные характеристики цифровых полосовых фильтров;
170 hz1=freqz(bz1,az1,f,fs); subplot(2,1,1); plot(f,abs(hz1),'r'); grid on;
171 xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_d_b_p_1(jw))');
172 hz2=freqz(bz2,az2,f,fs); subplot(2,1,2); plot(f,abs(hz2),'g'); grid on;
173 xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_d_b_p_2(jw))');
174 figure;
175
176 % y1, y2 - сигналы на выходах цифровых полосовых фильтров;
177 y1=filter(bz1,az1,u);
178 y2=filter(bz2,az2,u);
179 subplot(3,1,1); plot(tk,u,'b'); grid on; xlabel('time [s]');
180 ylabel('u(t) [V]');
181 subplot(3,1,2); plot(tk,y1,'r'); grid on; xlabel('time [s]');
182 ylabel('y1(t) [V]');
183 subplot(3,1,3); plot(tk,y2,'g'); grid on; xlabel('time [s]');
184 ylabel('y2(t) [V]'); figure;
185
186 subplot(2,1,1); plot(tk,u1,'k'); grid on; xlabel('time [s]');
187 ylabel('u1(t) [V]');
188 subplot(2,1,2); plot(tk,y1,'r'); grid on; xlabel('time [s]');
189 ylabel('y1(t) [V]'); figure;
190
191 subplot(2,1,1); plot(tk,u2,'k'); grid on; xlabel('time [s]');
192 ylabel('u2(t) [V]');
193 subplot(2,1,2); plot(tk,y2,'g'); grid on; xlabel('time [s]');
194 ylabel('y2(t) [V]'); figure;
195

```

	ex_11.m
196	plot(tk,u1,'k'); hold on; plot(tk,y1,'r'); grid on;
197	xlabel('time [s]'); ylabel('u1(t) (black), y1(t) (red) [V]'); figure;
198	plot(tk,u2,'k'); hold on; plot(tk,y2,'g'); grid on;
199	xlabel('time [s]'); ylabel('u2(t) (black), y2(t) (green) [V]');

	ex_12a.m
1	function ex_12a(N,delta_t,t0,tp,A,fc,a,Ai,fc,i,n,Rp,ff0,bf)
2	% "Одиночный радиоимпульс на фоне синусоидальной помехи"
3	% N - число точек на оси времени и на оси частот;
4	% delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с];
5	% t0 - момент начала импульса, выраженный целым числом delta_t;
6	% tp - длительность импульса, выраженная целым числом delta_t;
7	% значение t0+tp-1 должно быть меньше или равно N;
8	% A - амплитуда импульса [В];
9	% fc - частота несущей, выраженная числом интервалов дискретизации
10	% по оси частот delta_f=1/(N*delta_t);
11	% a - параметр косинусоидального сглаживания (t0-a*tp должно быть
12	% больше или равно 1, t0+tp-1+a*tp должно быть меньше или равно N);
13	% Ai - амплитуда помехи [В];
14	% fci - частота помехи, выраженная числом интервалов дискретизации
15	% по оси частот delta_f=1/(N*delta_t);
16	% n - порядок режекторного фильтра Чебышева 1-го рода;
17	% Rp - уровень пульсаций в полосе пропускания режекторного фильтра [дБ];
18	% ff0 - "центральная" частота режекторного фильтра, выраженная числом
19	% интервалов дискретизации по оси частот delta_f=1/(N*delta_t);
20	% bf - ширина полосы подавления режекторного фильтра, выраженная чис-
21	% лом интервалов дискретизации по оси частот delta_f=1/(N*delta_t);
22	% Пример обращения:
23	% ex_12a(2^10,10^(-6),201,200,0.33,50,0.1,0.33,60,3,0.5,60,12);
24	
25	% T - длительность сигнала [с];
26	% delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];
27	% fp - частота заполнения радиоимпульса [Гц];
28	

	ex_12a.m
29	T=N*delta_t;
30	delta_f=1/T;
31	fp=fc*delta_f;
32	fi=fci*delta_f;
33	
34	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
35	% вычисление граничных точек сглаживающих полупериодов косинусоиды
36	% на концах импульса;
37	af=floor(a*tp); t0_b=t0-af; t0_a=t0+af; te_b=t0+tp-1-af; te_a=te_b+2*af;
38	% подготовка несущего колебания carrier для заполнения им видеоимпульса;
39	kc=t0_b:te_a; carrier=sin(2*pi*fp*(kc-t0_b)*delta_t);
40	
41	% создание входного сигнала x(t) - радиоимпульса длительности tp*delta_t,
42	% начинающегося в момент времени tp*delta_t, с амплитудой A и частотой
43	% заполнения fc до сглаживания на концах;
44	x1=zeros(1,t0_b-1);
45	x2=A*ones(1,tp+2*af).*carrier;
46	x3=zeros(1,N-te_a);
47	x=[x1 x2 x3];
48	
49	%plot(tk,x,'b'); grid on;
50	%xlabel('time [s]'); ylabel('x(t) [V]'); figure;
51	
52	% win - "косинусоидальное окно";
53	win1=zeros(1,t0_b-1);
54	if af~=0
55	dphi=pi/(2*af);
56	kw2=t0_b:t0_a-1;
57	win2=(1-cos((kw2-t0_b)*dphi))/2;
58	end
59	win3=ones(1,te_b-t0_a+1);
60	if af~=0
61	kw4=te_b+1:te_a;
62	win4=(1+cos((kw4-te_b)*dphi))/2;
63	end
64	win5=zeros(1,N-te_a);
65	if af~=0
66	win=[win1 win2 win3 win4 win5];
67	else

```

68 win=[win1 win3 win5];
69 end
70 %plot(tk,win,'k'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;
71 %xlabel('time [s]'); ylabel('win'); figure;
72
73 x=x.*win; % умножение исходного радиоимпульса на "окно";
74 plot(tk,x,'b'); grid on;
75 xlabel('time [s]'); ylabel('x(t) [V]'); figure;
76
77 % образование синусоидальной помехи на всем отрезке времени [0,T];
78 interference=Ai*sin(2*pi*fi*tk);
79 % сложение сигнала x(t) с синусоидальной помехой;
80 xpi=x+interference;
81 plot(tk,xpi,'b'); grid on;
82 xlabel('time [s]'); ylabel('xpi(t) [V]'); figure;
83
84 % fs - частота дискретизации [Гц];
85 fs=1/delta_t;
86
87 % расчет нулей и полюсов исходного аналогового ФНЧ Чебышева 1-го рода
88 % порядка n с уровнем пульсаций в полосе пропускания Rp [дБ];
89 [z,p,G]=cheb1ap(n,Rp);
90 % переход от нулей и полюсов к числителю и знаменателю функции передачи
91 % аналогового фильтра нижних частот;
92 [b,a]=zp2tf(z,p,G);
93
94 % частотные характеристики создаваемого цифрового РФ в рад/с;
95 f0=ff0*delta_f; Bf=bf*delta_f;
96 w0=2*pi*f0; Bw=2*pi*Bf;
97
98 % образование массивов частот w [рад/с] и f=w/(2*pi) в рад/с и в Гц
99 % соответственно;
100 dw=2*pi*fp/(N-1); % dw - шаг по оси частот;
101 w=0:dw:4*w0;
102 f=w/(2*pi);
103
104 % частотное преобразование исходного аналогового фильтра нижних частот
105 % в аналоговый режекторный фильтр-прототип
106 % с "центральной" частотой w0 [рад/с] и полосой подавления Bw [рад/с];

```

	ex_12a.m
107	[b1,a1]=lp2bs(b,a,w0,Bw);
108	% h - частотная характеристика аналогового режекторного фильтра;
109	h=freqs(b1,a1,w); plot(f,abs(h),'k'); %grid on; xlabel('frequency [Hz]');
110	hold on; %ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_a_b_s(jw))'); figure;
111	
112	% билинейное преобразование аналогового режекторного фильтра
113	% в цифровой режекторный фильтр: bz, az -коэффициенты полиномов
114	% в числителе и в знаменателе функции передачи цифрового фильтра;
115	[bz,az]=bilinear(b1,a1,fs);
116	% hz - частотная характеристика цифрового режекторного фильтра;
117	hz=freqz(bz,az,f,fs); plot(f,abs(hz),'r'); grid on; ylim([-0.2 1.2]);
118	xlabel('frequency [Hz]');
119	ylabel ('abs(K_a_b_s(jw)) (black), abs(K_d_b_s(jw)) (red)');
120	
121	% преобразование цифрового РФ в набор u секций 2-го порядка:
122	% r - число строк в матрице u (число секций);
123	% y(m,:) - сигнал на выходе (m-1)-й секции, y(1,:)=xpi;
124	u=tf2sos(bz,az); [r,c]=size(u); y=zeros(r+1,N); y(1,:)=xpi;
125	for l=1:r
126	y(l+1,:)=filter([u(l,1) u(l,2) u(l,3)],[u(l,4) u(l,5) u(l,6)],y(l,:));
127	figure; subplot(2,1,1); plot(tk,x,'k'); grid on;
128	xlabel('time [s]'); ylabel('x(t) [V]');
129	subplot(2,1,2); plot(tk,y(l+1,:),'r'); grid on;
130	xlabel('time [s]'); ylabel(l);
131	end
132	
133	% y - сигнал на выходе цифрового режекторного фильтра;
134	%y=filter(bz,az,xpi);
135	%figure;
136	%subplot(2,1,1); plot(tk,x,'k'); grid on; xlabel('time [s]');
137	%ylabel('x(t) [V]');
138	%subplot(2,1,2); plot(tk,y,'r'); grid on; xlabel('time [s]');
139	%ylabel('y(t) [V]'); figure;
140	%plot(tk,x,'k'); hold on; plot(tk,y,'r'); grid on;
141	%xlabel('time [s]'); ylabel('x(t) (black), y(t) (red) [V]');

	ex_12b.m
1	function ex_12b(N,delta_t,t0,tp,A,fc,a,Ai,fc_i,n,Rs,ff0,bf)
2	% "Одиночный радиоимпульс на фоне синусоидальной помехи"
3	% N - число точек на оси времени и на оси частот;
4	% delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с];
5	% t0 - момент начала импульса, выраженный целым числом delta_t;
6	% tp - длительность импульса, выраженная целым числом delta_t;
7	% значение t0+tp-1 должно быть меньше или равно N;
8	% A - амплитуда импульса [В];
9	% fc - частота несущей, выраженная числом интервалов дискретизации
10	% по оси частот delta_f=1/(N*delta_t);
11	% a - параметр косинусоидального сглаживания (t0-a*tp должно быть
12	% больше или равно 1, t0+tp-1+a*tp должно быть меньше или равно N);
13	% Ai - амплитуда помехи [В];
14	% fc_i - частота помехи, выраженная числом интервалов дискретизации
15	% по оси частот delta_f=1/(N*delta_t);
16	% n - порядок полосового фильтра Чебышева 2-го рода;
17	% Rs - уровень пульсаций в полосе подавления полосового фильтра [дБ];
18	% ff0 - "центральная" частота полосового фильтра, выраженная числом
19	% интервалов дискретизации по оси частот delta_f=1/(N*delta_t);
20	% bf - ширина полосы пропускания полосового фильтра, выраженная числом
21	% интервалов дискретизации по оси частот delta_f=1/(N*delta_t);
22	% Пример обращения:
23	% ex_12b(2^10,10^(-6),201,200,0.33,50,0.1,0.33,60,3,40,50,16);
24	
25	% T - длительность сигнала [с];
26	% delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];
27	% fp - частота заполнения радиоимпульса [Гц];
28	
29	T=N*delta_t;
30	delta_f=1/T;
31	fp=fc*delta_f;
32	fi=fc_i*delta_f;
33	
34	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
35	% вычисление граничных точек сглаживающих полупериодов косинусоиды
36	% на концах импульса;
37	af=floor(a*tp); t0_b=t0-af; t0_a=t0+af; te_b=t0+tp-1-af; te_a=te_b+2*af;
38	% подготовка несущего колебания carrier для заполнения им видеоимпульса;
39	kc=t0_b:te_a; carrier=sin(2*pi*fp*(kc-t0_b)*delta_t);

```

40
41 % создание входного сигнала x(t) - радиоимпульса длительности tp*delta_t,
42 % начинающегося в момент времени tp*delta_t, с амплитудой A В и частотой
43 % заполнения fc до сглаживания на концах;
44 x1=zeros(1,t0_b-1);
45 x2=A*ones(1,tp+2*af).*carrier;
46 x3=zeros(1,N-te_a);
47 x=[x1 x2 x3];
48
49 %plot(tk,x,'b'); grid on;
50 %xlabel('time [s]'); ylabel('x(t) [V]'); figure;
51
52 % win - "косинусоидальное окно";
53 win1=zeros(1,t0_b-1);
54 if af~=0
55     dphi=pi/(2*af);
56     kw2=t0_b:t0_a-1;
57     win2=(1-cos((kw2-t0_b)*dphi))/2;
58 end
59 win3=ones(1,te_b-t0_a+1);
60 if af~=0
61     kw4=te_b+1:te_a;
62     win4=(1+cos((kw4-te_b)*dphi))/2;
63 end
64 win5=zeros(1,N-te_a);
65 if af~=0
66     win=[win1 win2 win3 win4 win5];
67 else
68     win=[win1 win3 win5];
69 end
70 %plot(tk,win,'k'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;
71 %xlabel('time [s]'); ylabel('win'); figure;
72
73 x=x.*win; % умножение исходного радиоимпульса на "окно";
74 plot(tk,x,'b'); grid on;
75 xlabel('time [s]'); ylabel('x(t) [V]'); figure;
76
77 % образование синусоидальной помехи на всем отрезке времени [0,T);
78 interference=Ai*sin(2*pi*f*tk);

```


	ex_12b.m
79	% сложение сигнала $x(t)$ с синусоидальной помехой;
80	$xpi=x+interference$;
81	$plot(tk,xpi,'b')$; grid on;
82	$xlabel('time [s]')$; $ylabel('xpi(t) [V]')$; figure;
83	
84	% fs - частота дискретизации [Гц];
85	$fs=1/delta_t$;
86	
87	% расчет нулей и полюсов исходного аналогового ФНЧ Чебышева 2-го рода
88	% порядка n с уровнем пульсаций в полосе подавления Rs [дБ];
89	$[z,p,G]=cheb2ap(n,Rs)$;
90	% переход от нулей и полюсов к числителю и знаменателю функции передачи
91	% аналогового фильтра нижних частот;
92	$[b,a]=zp2tf(z,p,G)$;
93	
94	% частотные характеристики создаваемого цифрового ПФ в рад/с;
95	$f0=ff0*delta_f$; $Bf=b*delta_f$;
96	$w0=2*pi*f0$; $Bw=2*pi*Bf$;
97	
98	% образование массивов частот w [рад/с] и $f=w/(2*pi)$ в рад/с и в Гц
99	% соответственно;
100	$dw=2*pi*fp/(N-1)$; % dw - шаг по оси частот;
101	$w=0:dw:4*w0$;
102	$f=w/(2*pi)$;
103	
104	% частотное преобразование исходного аналогового фильтра нижних частот
105	% в аналоговый полосовой фильтр-прототип
106	% с "центральной" частотой w0 [рад/с] и полосой пропускания Bw [рад/с];
107	$[b1,a1]=lp2bp(b,a,w0,Bw)$;
108	% h - частотная характеристика аналогового полосового фильтра;
109	$h=freqs(b1,a1,w)$; $plot(f,abs(h),'k')$; %grid on; $xlabel('frequency [Hz]')$;
110	hold on; %ylim([-0.2 1.2]); $ylabel('abs(K_{a_b_p}(jw))')$; figure;
111	
112	% билинейное преобразование аналогового полосового фильтра
113	% в цифровой полосовой фильтр: bz, az - коэффициенты полиномов
114	% в числителе и в знаменателе функции передачи цифрового фильтра;
115	$[bz,az]=bilinear(b1,a1,fs)$;
116	% hz - частотная характеристика цифрового полосового фильтра;
117	$hz=freqz(bz,az,f,fs)$; $plot(f,abs(hz),'r')$; grid on; ylim([-0.2 1.2]);

	ex_12b.m
118	xlabel('frequency [Hz]');
119	ylabel('abs(K_a_b_p(jw)) (black), abs(K_d_b_p(jw)) (red)');
120	
121	% преобразование цифрового ПФ в набор u секций 2-го порядка:
122	% r - число строк в матрице u (число секций);
123	% y(m,:) - сигнал на выходе (m-1)-й секции, y(1,:)=xpi;
124	u=tf2sos(bz,az); [r,c]=size(u); y=zeros(r+1,N); y(1,:)=xpi;
125	for l=1:r
126	y(l+1,:)=filter([u(l,1) u(l,2) u(l,3)],[u(l,4) u(l,5) u(l,6)],y(l,:));
127	figure; subplot(2,1,1); plot(tk,x,'k'); grid on;
128	xlabel('time [s]'); ylabel('x(t) [V]');
129	subplot(2,1,2); plot(tk,y(l+1,:),'r'); grid on;
130	xlabel('time [s]'); ylabel('y(t) [V]');
131	end
132	
133	% y - сигнал на выходе цифрового полосового фильтра;
134	%y=filter(bz,az,xpi);
135	%figure;
136	%subplot(2,1,1); plot(tk,x,'k'); grid on; xlabel('time [s]');
137	%ylabel('x(t) [V]');
138	%subplot(2,1,2); plot(tk,y,'r'); grid on; xlabel('time [s]');
139	%ylabel('y(t) [V]'); figure;
140	%plot(tk,x,'k'); hold on; plot(tk,y,'r'); grid on;
141	%xlabel('time [s]'); ylabel('x(t) (black), y(t) (red) [V]');

	ex_13.m
1	function ex_13(N,delta_t,f01,f02,F1,F2,m1,m2,n,Rp,Rs)
2	% "Двухканальный приемник": два полосовых фильтра, настроенных каждый
3	% на частоту несущей своего амплитудно-модулированного колебания
4	% N - число точек на оси времени и на оси частот;
5	% delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с];
6	% f01, f02 - частоты несущих [Гц];
7	% F1, F2 - частоты модулирующих колебаний [Гц];
8	% m1, m2 - коэффициенты (глубина) модуляции;

	ex_13.m
9	% n - порядок фильтров;
10	% Rp, Rs - уровни пульсаций в полосе пропускания/подавления [дБ];
11	% Примеры обращения:
12	% ex_13(2^16, 10^(-6)/2^6, 1.5*10^5, 3.5*10^5, 3*10^3, 2*10^3, 0.8, 0.2, 1, 1.0, 20);
13	% ex_13(2^16, 10^(-6)/2^6, 1.5*10^5, 3.5*10^5, 3*10^3, 2*10^3, 0.8, 0.2, 3, 1.0, 20);
14	
15	% T - длительность сигнала [с];
16	% fs - частота дискретизации [Гц];
17	% delta_f - интервал дискретизации вдоль оси частот [Гц];
18	
19	T=N*delta_t;
20	fs=1/delta_t;
21	% delta_f=1/T;
22	
23	% u1, u2 - огибающие АМ колебаний;
24	% v1, v2 - несущие 1-го и 2-го колебаний с амплитудой 1 В;
25	% x1, x2 - складываемые АМ колебания;
26	% x - сумма двух АМ колебаний;
27	
28	k=0:N-1; tk=delta_t*k;
29	W1=2*pi*F1; u1=(1+m1*sin(W1*k*delta_t));
30	w01=2*pi*f01; v1=sin(w01*k*delta_t);
31	x1=u1.*v1;
32	W2=2*pi*F2; u2=(1+m2*sin(W2*k*delta_t));
33	w02=2*pi*f02; v2=sin(w02*k*delta_t);
34	x2=u2.*v2;
35	
36	x=x1+x2;
37	plot(tk,x); grid on;
38	xlabel('time [s]'); ylabel('x(t) [V]'); figure;
39	
40	% расчет нулей и полюсов исходного аналогового фильтра нижних частот
41	% (эллиптического фильтра порядка n с уровнями пульсаций Rp [дБ]
42	% в полосе пропускания и Rs [дБ] в полосе подавления);
43	[z,p,G]=ellipap(n,Rp,Rs);
44	% переход от нулей и полюсов к числителю и знаменателю функции передачи
45	% исходного аналогового фильтра нижних частот;
46	[b,a]=zp2tf(z,p,G);
47	

```

48 % частотное преобразование исходного аналогового фильтра нижних частот
49 % в аналоговые полосовые фильтры-прототипы с "центральной" частотой
50 % w01, w02 [рад/с] и полосой пропускания Bw1, Bw2 [рад/с];
51 Bw1=4*W1; Bw2=4*W2;
52 [b1,a1]=lp2bp(b,a,w01,Bw1);
53 [b2,a2]=lp2bp(b,a,w02,Bw2);
54
55 % массив частот для расчета и визуализации амплитудно-частотных
56 % характеристик аналоговых и цифровых фильтров;
57 %fn=delta_f*k(1:N/2); wn=2*pi*fn;
58 dw=w02/(N-1); % dw - шаг по оси частот;
59 w=0:dw:2*w02;
60 f=w/(2*pi);
61
62 % h1, h2 - частотные характеристики аналоговых полосовых
63 % фильтров-прототипов;
64 h1=freqs(b1,a1,w); subplot(2,1,1); plot(f,abs(h1),'r'); grid on;
65 xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_a_b_p_1(jw))');
66 h2=freqs(b2,a2,w); subplot(2,1,2); plot(f,abs(h2),'g'); grid on;
67 xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_a_b_p_2(jw))');
68 figure;
69
70 % билинейное преобразование аналоговых полосовых фильтров-прототипов
71 % цифровые полосовые фильтры: bz1, bz2, az1, az2 - коэффициенты полино-
72 % мов в числителе и в знаменателе функций передачи цифровых фильтров;
73 [bz1,az1]=impinvar(b1,a1,fs);
74 [bz2,az2]=impinvar(b2,a2,fs);
75
76 % hz1, hz2 - частотные характеристики цифровых полосовых фильтров;
77 hz1=freqz(bz1,az1,f,fs); subplot(2,1,1); plot(f,abs(hz1),'r'); grid on;
78 xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_d_b_p_1(jw))');
79 hz2=freqz(bz2,az2,f,fs); subplot(2,1,2); plot(f,abs(hz2),'g'); grid on;
80 xlabel('frequency [Hz]'); ylim([-0.2 1.2]); ylabel('abs(K_d_b_p_2(jw))');
81 figure;
82
83 % y1, y2 - сигналы на выходах цифровых полосовых фильтров;
84 y1=filter(bz1,az1,x);
85 y2=filter(bz2,az2,x);
86 subplot(3,1,1); plot(tk,x,'b'); grid on; xlabel('time [s]');

```

87	ylabel('u(t) [V]');
88	subplot(3,1,2); plot(tk,y1,'r'); grid on; xlabel('time [s]');
89	ylabel('y1(t) [V]');
90	subplot(3,1,3); plot(tk,y2,'g'); grid on; xlabel('time [s]');
91	ylabel('y2(t) [V]'); figure;
92	
93	subplot(2,1,1); plot(tk,x1,'k'); grid on; xlabel('time [s]');
94	ylabel('u1(t) [V]');
95	subplot(2,1,2); plot(tk,y1,'r'); grid on; xlabel('time [s]');
96	ylabel('y1(t) [V]'); figure;
97	
98	subplot(2,1,1); plot(tk,x2,'k'); grid on; xlabel('time [s]');
99	ylabel('u2(t) [V]');
100	subplot(2,1,2); plot(tk,y2,'g'); grid on; xlabel('time [s]');
101	ylabel('y2(t) [V]'); figure;
102	
103	plot(tk,x1,'k'); hold on; plot(tk,y1,'r'); grid on;
104	xlabel('time [s]'); ylabel('u1(t) (black), y1(t) (red) [V]'); figure;
105	plot(tk,x2,'k'); hold on; plot(tk,y2,'g'); grid on;
106	xlabel('time [s]'); ylabel('u2(t) (black), y2(t) (green) [V]');

Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2005.
2. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1964.
3. Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. – М.: Высшая школа, 1982.
4. Манаев Е.И. Основы радиоэлектроники. – 3-е изд. – М.: Радио и связь, 1990.
5. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. – М.: МФТИ, 2007.
6. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2007.
7. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.

Указатель функций MATLAB

angle 35	ones 36
bilinear 102	residue 62
buttap 63	residuez 100
butter 65, 97	sos2tf 103
buttord 65, 98	sos2zp 104
cheblap 63	stem 36
cheblord 65, 98	stepz 101
chep2ap 63	tf2sos 103
cheb2ord 65, 98	tf2zp 62, 100
cheby1 65, 97	zeros 35
cheby2 65, 97	zp2sos 103
conj 35	zp2tf 62, 100
ellip 65, 97	
ellipap 63	
ellipord 65, 98	
eqtflength 88, 100	
fft 35	
fftshift 35	
filter 88, 106	
fliplr 35	
freqs 63	
freqz 101	
ifft 35	
iirnotch 105	
iirpeak 105	
imag 35	
impinvar 102	
impz 101	
lp2bp 64	
lp2bs 64	
lp2hp 64	
lp2lp 64	

Учебное издание

Евгений Валентинович ВОРОНОВ

НАЧАЛА
ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ
для студентов-физиков
с упражнениями
в MATLAB

Редактор *Л.В. Себова*. Корректор *В.А. Дружинина*
Подписано в печать 18.01.2010. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,0. Уч.- изд. л. 9,7. Тираж 250 экз.
Заказ № ф-009.

Государственное образовательное учреждение
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9