

Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Работа 4.3.4.

Сибгатуллин Булат, ФРКТ

Цель работы:

Определить размеры щели, определить периоды сеток; исследовать изображение щели.

В работе используются:

Гелий-неоновый лазер, кассета с набором сеток разного периода, щель с микрометрическим винтом, линзы, экран, линейка.

Теоретическая часть

Рассмотрим дифракцию плоской монохроматической волны на синусоидальной амплитудной решётке. Пусть решётка с периодом d расположена в $t = 0$, а её штрихи ориентированы вдоль OY . Тогда функция пропускания:

$$t(x) = \beta + \alpha \cos(ux) = \beta + \alpha \frac{e^{iux} + e^{-iux}}{2},$$

где $\alpha, \beta = \text{const}, u = \frac{2\pi}{d}$.

Если на решётку падает плоская моно волна вдоль OZ :

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - kz)},$$

то на выходе получим три плоских волны:

$$E_1 = \beta E_0 e^{-i(\omega t - kz)};$$

$$E_2 = \frac{\alpha}{2} E_0 e^{-i(\omega t - ux - \sqrt{k^2 - u^2} z)};$$

$$E_3 = \frac{\alpha}{2} E_0 e^{-i(\omega t + ux - \sqrt{k^2 - u^2} z)},$$

где ω — круговая частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновой вектор, E_0 — амплитуда. Каждая из этих трёх волн фокусируется линзой в точку в задней фокальной плоскости. Волна E_1 (вдоль OZ) фокусируется в начало координат, волны E_2 и E_3 (распространяются в направлении $\sin \theta = \pm \frac{u}{k}$) фокусируются в точке $x_1 = \pm \frac{Fu}{k} = \pm F\lambda d$, где F — фокусное расстояние линзы.

Теорема Фурье в комплексной форме:

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inux},$$

сумма бесконечного множества канонических составляющих, имеющие кратные частоты. Картина, наблюдаемая в фурье-плоскости, представляет собой эквидистантный набор точек с координатами и амплитудами, пропорциональными C_n :

$$x_n = \frac{Fu}{k} = \frac{F\lambda}{d} n.$$

При освещении транспаранта плоской моно волной картина, наблюдаемая в задней фокальной плоскости линзы, установленной за транспарантом, представляет собой фурье-образ функции пропускания транспаранта. Для того, чтобы найти фурье-образ функции пропускания, достаточно определить только пространственные частоты и соотношение между амплитудами плоских волн на выходе. Для амплитудной синусоидальной решётки

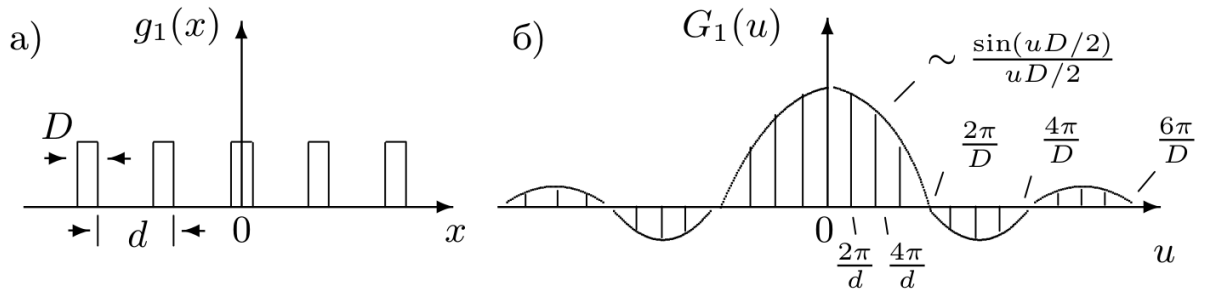


Рис. 1: а) функция пропускания дифракционной решётки (последовательности прозрачных и непрозрачных полос);
б) $G_1(u)$ — спектр функции пропускания дифракционной решётки

получаем три плоских волны с частотами $0, +u, -u$ и амплитудами, пропорциональными $\beta, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}$. Пространственное преобразование Фурье может осуществляться и в свободном пространстве при наблюдении дифракции Фраунгофера. Если размеры дифракционной решётки неограничены, то дифракционные максимумы бесконечно узки. Чем меньше размер решётки (полное число щелей), тем шире каждый отдельный максимум.

Направление на главные максимумы $\theta_n = \frac{un}{k} = \frac{\lambda n}{d}$ (N — целое число) определяется периодом решётки d , а распределение амплитуд в спектре — фурье-образом функции пропускания отдельного штриха:

$$g_2(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{D}{2} \leq x \leq \frac{D}{2} \\ 0, & -\frac{D}{2} > x > \frac{D}{2} \end{cases}$$

Вследствие неперерывности $g_2(x)$, её фурье-образ представляется непрерывным множеством точек и определяется интегральным преобразованием Фурье:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{iux} du,$$

$$G(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-iux} dx.$$

В таком виде $g(x)$ и $G(u)$ представляют собой пару преобразований Фурье: $G(u)$ — спектр или фурье-образ функции $g(x)$.

$$G_2(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x) e^{-iux} dx = \int_{-D/2}^{+D/2} e^{-iux} dx = D \frac{\sin \frac{uD}{2}}{\frac{uD}{2}}.$$

Введём понятие протяженности функции пропускания транспоранта (Δx) и ширины её спектра (Δu), тогда соотношение неопределённости принимает вид:

$$\Delta x \cdot \Delta u = \frac{2\pi}{D} \cdot D = 2\pi.$$

Размер же малого объекта можно рассчитать, увеличив его изображение с помощью линзы.

Метод Аббе Рассмотрим схему образования изображения. Пусть предмет расположен от линзы на большем расстоянии, чем фокусное, тогда существует сопряжённая предметной плоскости плоскость, где образуется изображение. Аббе предложил рассматривать схему прохождения в два этапа: сначала рассматривается первичное изображение (спектр в задней фокальной плоскости), затем это изображение рассматривается как источник волн, создающий изображение в другой плоскости (вторичное изображение). Этот подход опирается на принцип Гюйгенса-Френеля, согласно которому любой участок волнового фронта можно рассматривать как источник излучения. Под словами «линза дважды осуществляет преобразование Фурье» подразумевается следующее: сначала в задней фокальной плоскости линзы получается световое поле, соответствующее фурье-образу функции пропускания предмета (с точностью до фазы), а затем на промежутке между фокальной плоскостью и плоскостью изображения осуществляется обратное преобразование Фурье, в результате чего восстанавливается изображение предмета.

Определение ширины щели с помощью линзы

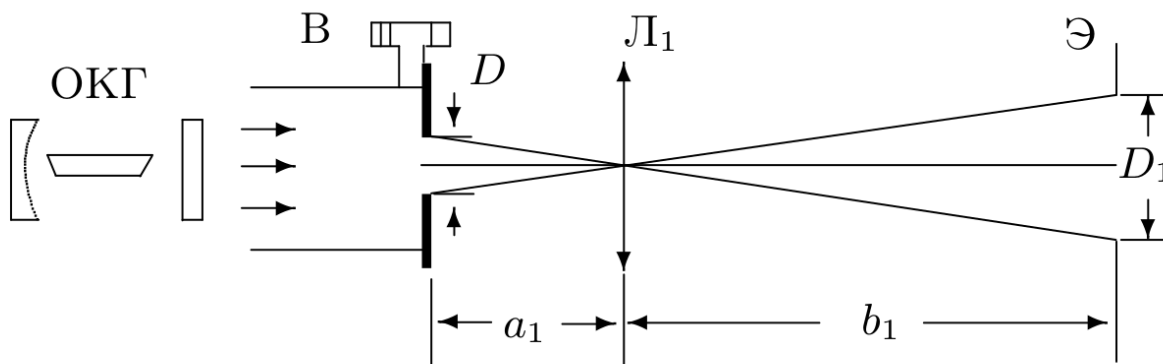


Рис. 2: Схема для определения ширины щели с помощью линзы

Ход работы

Определение ширины щели

Определение ширины щели с помощью линзы

1. Соберем установку показанную на рис. 2 и включим в сеть блок питания лазера.
2. С помощью короткофокусной линзы L_1 ($F = 38$ мм) получим на экране увеличенное изображение щели.
3. Меняя ширину щели от 50 до 500 мкм снимем зависимость размера изображения D_1 от ширины щели D . Данные запишем в таблицу:

D , мкм	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
D_1 , мм	3	4	6	7	9	10	11	12	13	14

Погрешности измерений:

$$\sigma_D = 5 \text{ мкм} \quad \sigma_{D_1} = 0,5 \text{ мм}$$

4. По измеренным данным построим график зависимости $D_1(D)$:

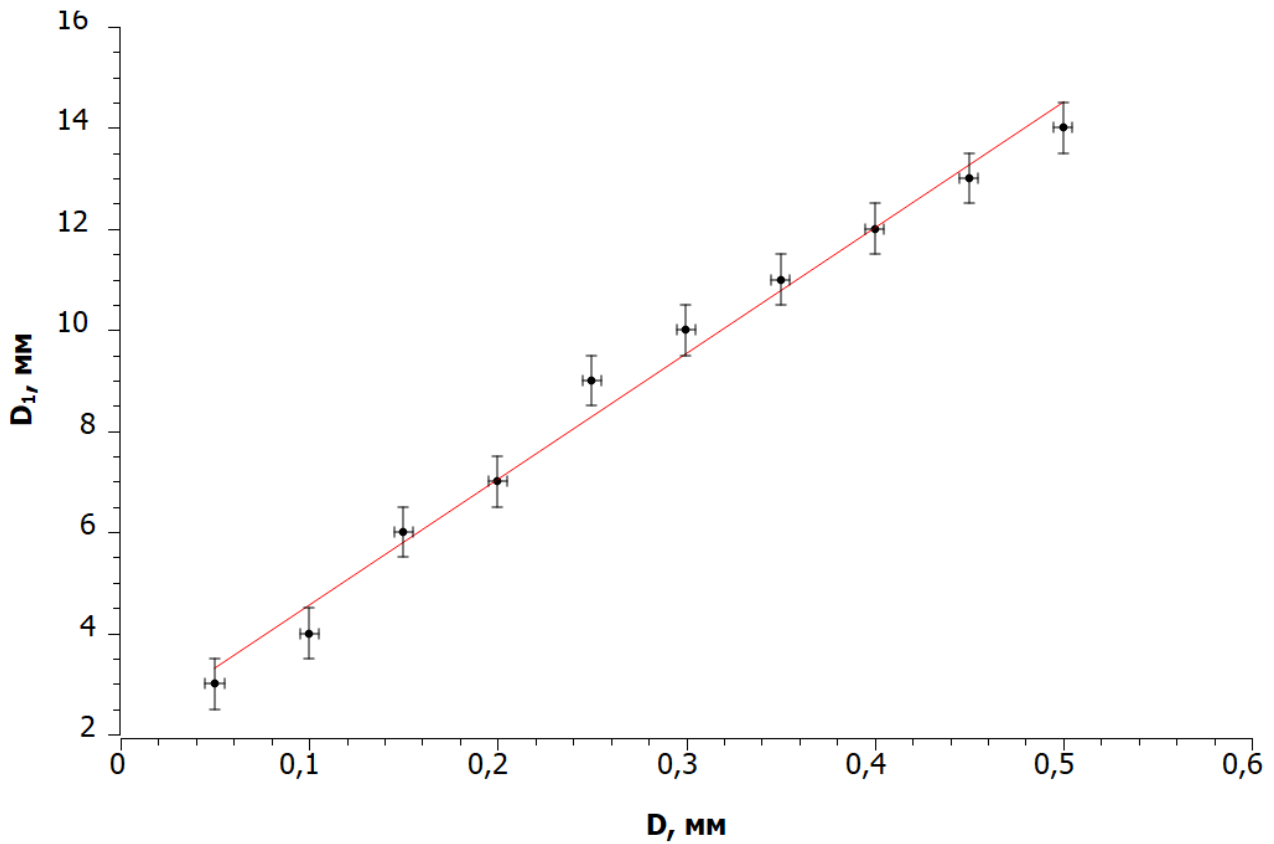


Рис. 3: График зависимости размера изображения от ширины щели

Получим зависимость вида $y = ax + b$ - $a = 24,8 \pm 1,0$, $b = 2,07 \pm 0,30$. Следовательно:

$$\Gamma = \frac{D_1}{D} = a = 24,8 \pm 1,0$$

5. Измерим расстояния a_1 и b_1 :

$$a_1 = 40 \pm 1 \text{ мм} \quad b_1 = 1080 \pm 1 \text{ мм}$$

По ним получим:

$$\Gamma = \frac{b_1}{a_1} = 27,0 \pm 0,7$$

6. Видим, что полученные значения немного отличаются, это может быть связано с неточностью определения ширины щели из-за люфта микрометра.

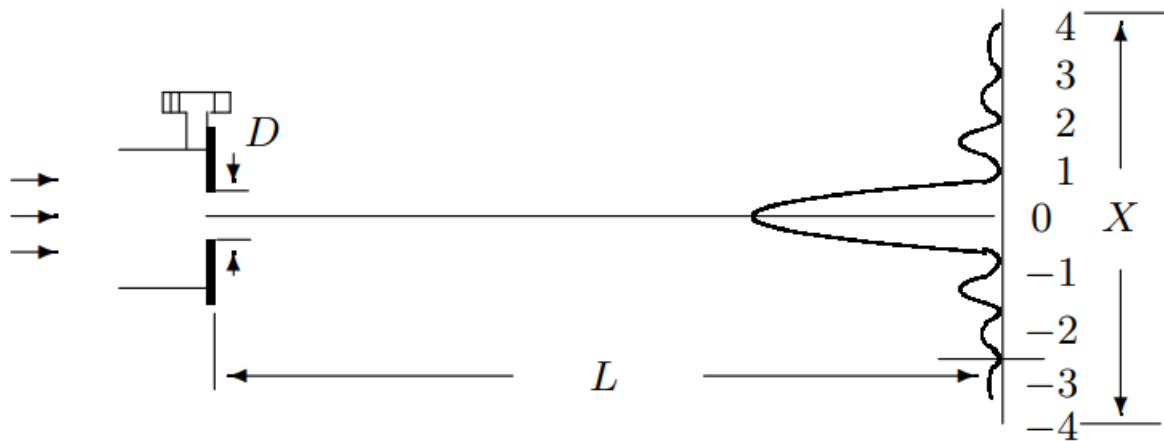


Рис. 4: Схема для определения ширины щели по спектру

Определение ширины щели по ее спектру

1. Соберем схему показанную на рис. 4.
2. Проведем серию измерений $X(m)$, где m - порядок минимума, меняя ширину щели. Запишем данные в таблицу:

X , мм	145	132	110	97	108	99	90	108	85	77
m	2	4	5	6	8	8	9	13	11	11
D , мкм	30	50	70	90	100	120	140	100	180	200

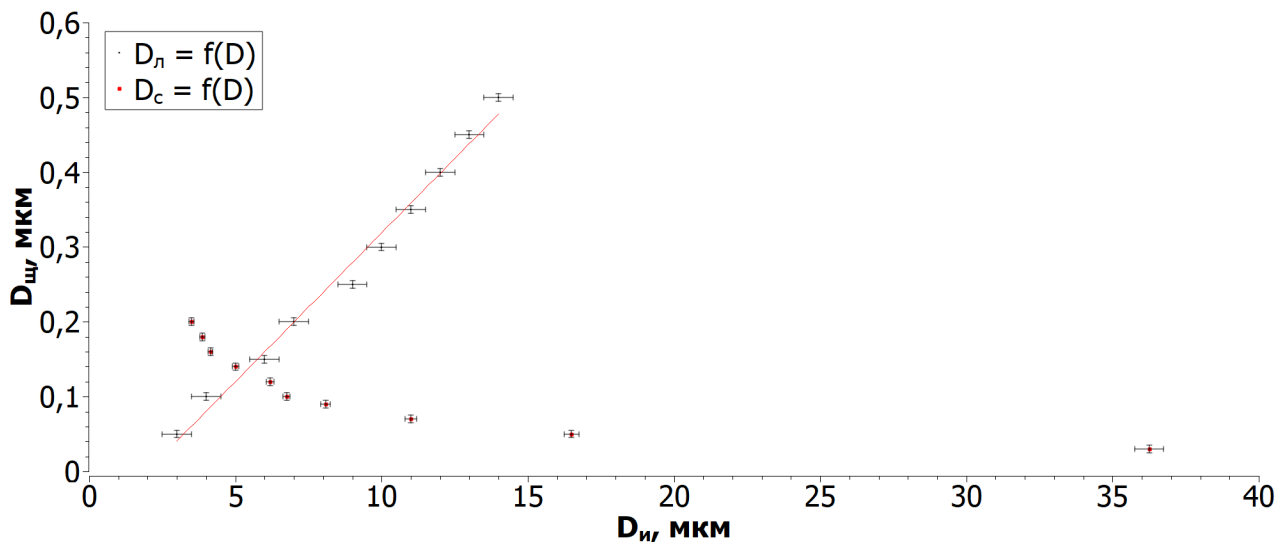
Погрешности измерений:

$$\sigma_X = 1 \text{ мм} \quad \sigma_D = 5 \text{ мкм}$$

3. По результатам измерения спектра рассчитаем ширину щели D_c («с» - по спектру) используя соотношения:

$$\Delta X = \frac{X}{2m} = \frac{\lambda}{D_c} L,$$

где $\lambda = 632,8 \text{ нм}$. Построим на одном листе графики $D_{\text{л}} = f(D)$ («л» - по линзе) и $D_c = f(D)$:

Рис. 5: $D_{\text{л}} = f(D)$ и $D_{\text{с}} = f(D)$

Определение периода решеток

Определение периода по спектру на удаленном экране

1. Поставим кассету с двумерными сетками вплотную к выходному окну лазера. Для каждой сетки измерим расстояние X , между m -ми максимумами и отметим m = порядок максимума (получившуюся картину можно наблюдать на рис. 6). Запишем полученные данные в таблицу:

№	1	2	3	4	5
m	3	4	4	5	8
X_m , мм	217	192	96	60	78

Погрешность измерения X_m составила:

$$\sigma_{X_m} = 1 \text{ мм}$$

2. Рассчитаем расстояния ΔX для каждой решетки между соседними максимумами и определим период каждой решетки $d_c = f()$ используя соотношение:

$$\Delta X = \frac{X}{2m} = \frac{\lambda}{d_c} L, \quad (1)$$

где L - расстояние от кассеты до экрана и $L = 132,0 \pm 0,1$ см. Запишем полученные данные в таблицу:

№	ΔX , мм	$\sigma_{\Delta X}$, мм	d_c , мкм	σ_{d_c} , мкм
1	72,3	0,3	11,5	0,1
2	48,0	0,3	17,4	0,1
3	24,0	0,3	34,8	0,4
4	12,0	0,2	69,6	1,2
5	9,8	0,1	85,7	1,1

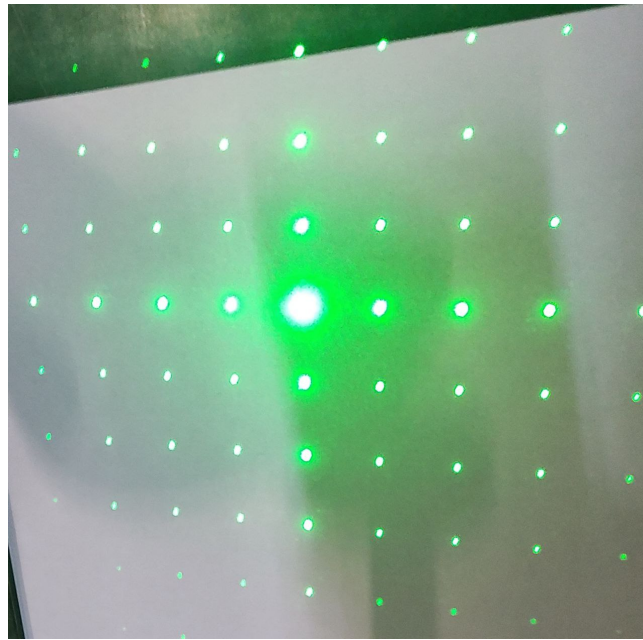


Рис. 6: Картина получившаяся для решетки с номером 2

Определение периода решеток по увеличенному изображению спектра

1. Соберем схему показанную на рис. 7. Линзу \mathcal{L}_2 с максимальным фокусом ($F_2 \simeq 10$ см) поставим на расстоянии $\simeq F_2$ от кассеты. В плоскости Φ линза \mathcal{L}_2 дает фрье-образ сетки - её спектр, а короткофокусная линза \mathcal{L}_3 ($F_3 \simeq 2,5$ см) создаёт на экране увеличенное изображение этого спектра.

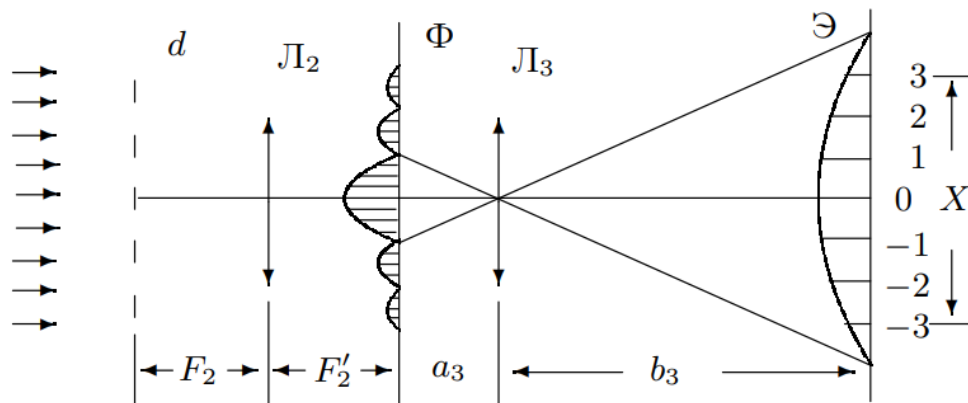


Рис. 7: Схема определения периода решетки по увеличенному изображению спектра

2. Измерим X и m для всех сеток, где это возможно. Запишем данные в таблицу:

№	2	3	4	5
m	1	2	4	5
X_m , мм	192	190	192	178

Погрешность измерения X_m составила:

$$\sigma_{X_m} = 1 \text{ мм}$$

3. Запишем чему равно a_3 , b_3 , F_2 и F_3 :

$$F_2 = 110 \text{ мм} \quad F_3 = 25 \text{ мм}$$

$$a_3 = 25 \pm 1 \text{ мм} \quad b_3 = 1080 \text{ мм}$$

4. Зная увеличение линзы \mathcal{L}_3 ($\Gamma_3 = b_3/a_3$), можно рассчитать расстояние между максимумами Δx в плоскости Φ , а затем период сетки $d_{\text{л}}$ по формуле:

$$\Delta x = \frac{\Delta X}{\Gamma_3} = \frac{\lambda}{d_{\text{л}}} F_2 \quad (2)$$

5. Рассчитаем нужные значения и запишем их в таблицу:

№	Δx , мм	$\sigma_{\Delta x}$, мм	$d_{\text{л}}$, мкм	$\sigma_{d_{\text{л}}}$, мкм
2	4,44	0,18	15,7	0,6
3	2,20	0,09	31,7	1,3
4	1,11	0,04	62,6	2,5
5	0,82	0,03	84,5	3,4

Мультиплицирование

1. Снова поставим тубус со щелью к окну лазера (рис. 8) и найдем на экране резкое изображение щели с помощью линзы \mathcal{L}_2 ($F_2 = 110$, мм). В фокальной плоскости линзы поставим кассету с сетками.

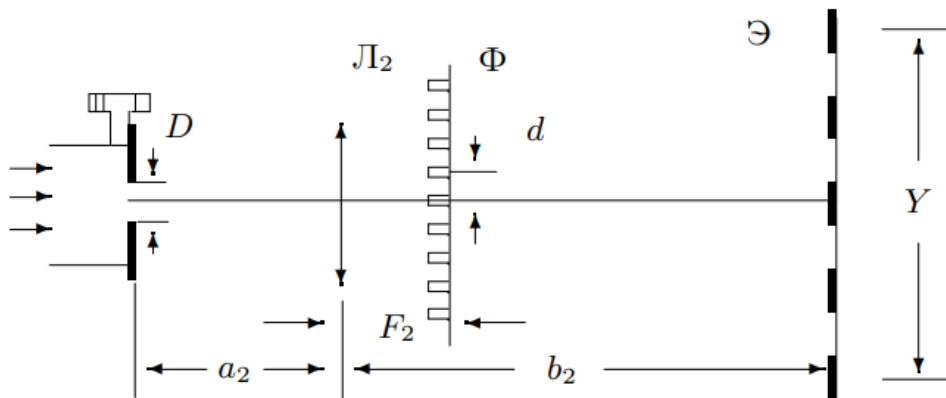


Рис. 8: Схема для наблюдения мультиплицирования

2. Подберем такую ширину входной щели D , чтобы на экране можно было наблюдать мультиплицированное изображение для всех сеток ($D = 80 \pm 5$, мкм). Измерим расстояния a_2 и b_2 :

$$a_2 = 140 \pm 1 \text{ мм} \quad b_2 = 1100 \pm 1 \text{ мм}$$

3. Снимем зависимость Y (расстояние между удаленными изображениями щели) и K (число промежутков между изображениями) от № (номера сетки):

№	1	2	3	4	5
Y , мм	171	151	71	65	50
K	3	4	4	7	7

4. Рассчитаем периоды «фиктивных» решёток, которые дали бы такую же периодичность на экране: $\Delta y = \Delta Y / \Gamma_2$, где $\Delta Y = Y / K$. Также рассчитаем d_c - периоды решёток, определенных по спектру. Зависимость должна быть линейной, поскольку:

$$\frac{\lambda}{\Delta y} F_2 = d_c$$

Запишем результаты расчетов в таблицу:

№	Δy , мм	$\sigma_{\Delta y}$, мм	$1/d_c$, 1/мкм	σ_{1/d_c} , 1/мкм
1	7,25	0,05	0,0866	0,0004
2	4,80	0,03	0,0575	0,0003
3	2,26	0,02	0,0287	0,0003
4	1,18	0,01	0,0144	0,0002
5	0,91	0,01	0,0117	0,0001

5. Построим график зависимости $\Delta y = f(1/d_c)$.

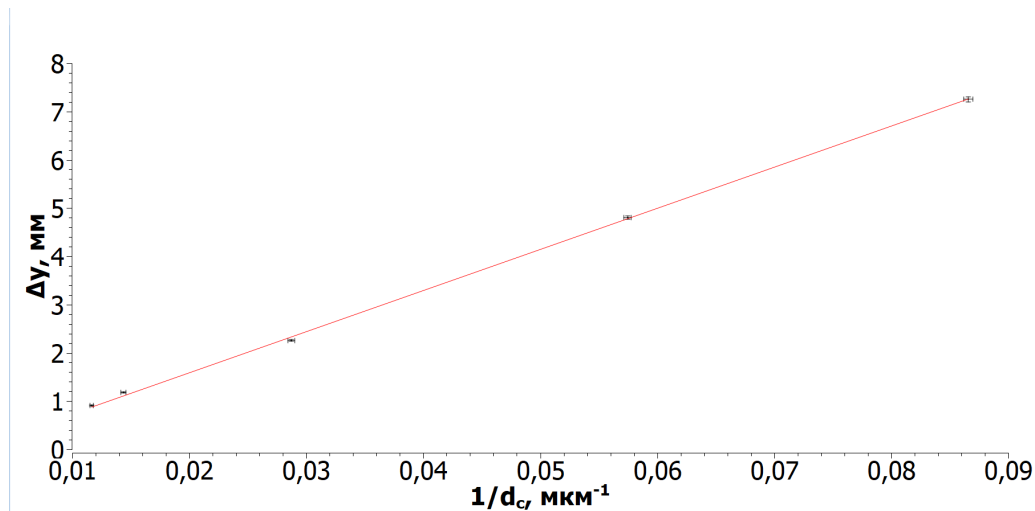


Рис. 9: График зависимости $\Delta y = f(1/d_c)$

Зависимость имеет вид $y = ax + b$, где:

$$a = (85,2 \pm 0,2) \cdot 10^3 \text{ мкм}^2 \quad b = -0,117 \pm 0,017 \text{ мм}$$

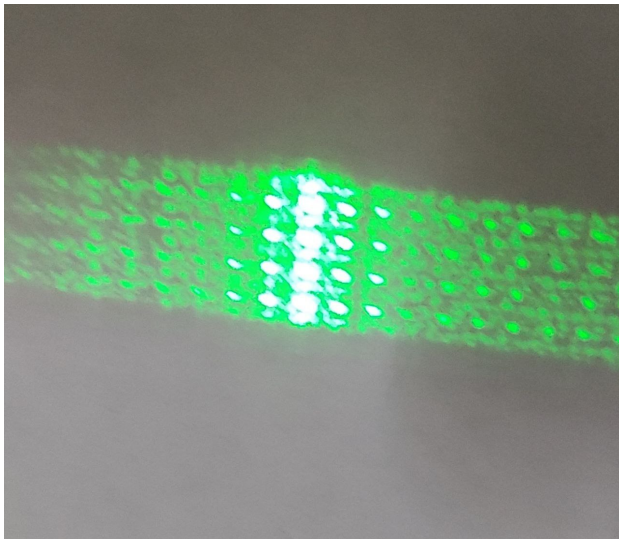


Рис. 10: Изображение щели на экране

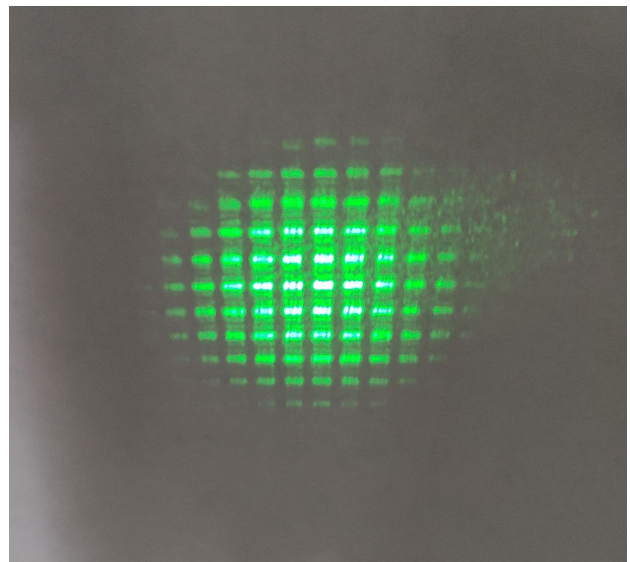


Рис. 11: Увеличенное изображение спектра

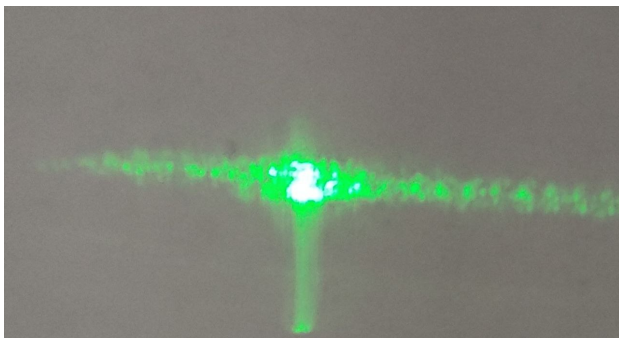


Рис. 12: Изображение узкой щели на экране

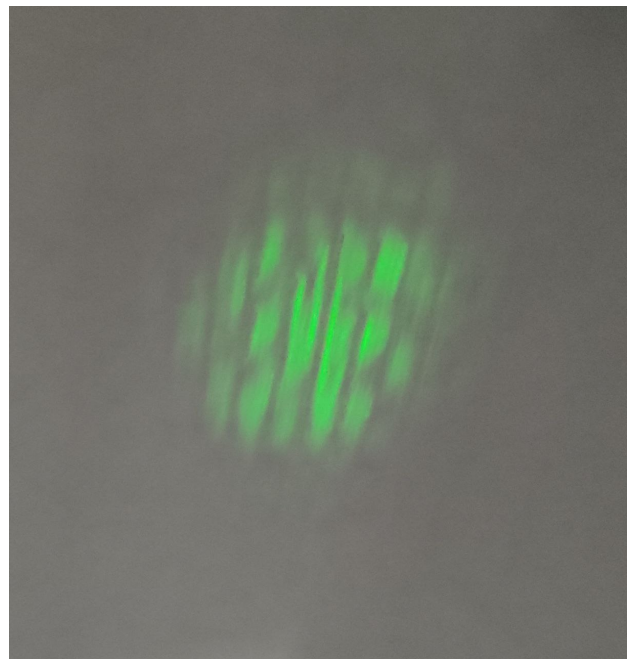


Рис. 13: Увеличенное изображение спектра для узкой щели

Влияние щелевой диафрагмы на изображение сетки

1. Вертикальная и горизонтальная щели. 1 спектр - картина не разрешается, 2 и более, картина разрешается.
2. Щель под углом в 45° . 2 спектра - картина не разрешается, 3 и более разрешается.

Вывод

Мы научились исследовать параметры паттернов через порождающие дифракционные картины с помощью разложения в ряд Фурье. В частности мы проанализировали поведение щели и двумерных решеток. В экспериментах мы получили различные числовые значения, подтверждающие друг друга.