

Цепи с распределенными параметрами

Весь необходимый теоретический материал по данной теме изложен в описании лабораторной работы № 79 (2007). Текст описания этой лабораторной работы в электронном виде находится в C:/Labworks/Lab_79. В дальнейшем отсылки к этому описанию будут помечены как [1].

В этом конспекте содержатся дополнительные сведения, проливающие свет на процессы в длинной линии. Упоминаемые в конспекте программы вычислений в MATLAB находятся в C:/References/Lab_79.

1. Волновое уравнение

- 1.1. Условие Хевисайда 2
- 1.2. Установившиеся (постоянные) токи и напряжения в линии с потерями как реакция на скачок напряжения \mathcal{E} на ее входе при $t \rightarrow \infty$ и произвольных (омических) сопротивлениях источника $R_{\text{и}}$ и нагрузки $R_{\text{н}}$ 3

2. Длинная линия при синусоидальном воздействии

- 2.1. Распределение комплексных амплитуд напряжения и тока в линии при заданном значении напряжения $\tilde{U}(0) \equiv \tilde{U}_0$ на ее входе..... 7
- 2.2. Падающая, отраженная и стоячая волны при наличии потерь 10

3. Переходные процессы в длинной линии

- 3.1. Скачки напряжения на входе и на выходе линии без потерь 13
- 3.2. Скачки напряжения на входе и на выходе линии с потерями..... 15
- 3.3. Реакция длинной линии на единичный скачок напряжения на ее входе при $R_{\text{и}} = 0$ 17
- 3.4. Постоянное напряжение (при $t \rightarrow \infty$) на выходе разомкнутой линии с потерями при подключении к ее входу идеального источника постоянного напряжения \mathcal{E} [В] 19

1. Волновое уравнение

1.1. Условие Хевисайда

Доказательство утверждения, касающегося условия Хевисайда

$$u = u^0 e^{-qt}$$

$$q = \frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}; \quad R_0 = qL_0, \quad G_0 = qC_0$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right| - \frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2a) \rightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_0 \frac{\partial i}{\partial x} + L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} \quad (*)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2b) \rightarrow -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u^0 e^{-qt} + C_0 \cdot \left(\frac{\partial u^0}{\partial t} e^{-qt} - q u^0 e^{-qt} \right) \quad (**)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right| - \frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u^0 e^{-qt} + C_0 \cdot \left(\frac{\partial u^0}{\partial t} e^{-qt} - q u^0 e^{-qt} \right)$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = G_0 \cdot \left(\frac{\partial u^0}{\partial t} e^{-qt} - q u^0 e^{-qt} \right) + C_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} e^{-qt} - q \frac{\partial u^0}{\partial t} e^{-qt} - q \frac{\partial u^0}{\partial t} e^{-qt} + q^2 u^0 e^{-qt} \right) \quad (***)$$

u в (*) заменяется на $u^0 e^{-qt}$, $\frac{\partial i}{\partial x}$ подставляется в (*) из (**), а $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$ – из (***):

$$-\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} e^{-qt} = -R_0 \cdot \left[G_0 u^0 e^{-qt} + C_0 \cdot \left(\frac{\partial u^0}{\partial t} e^{-qt} - q u^0 e^{-qt} \right) \right] -$$

$$-L_0 \cdot \left[G_0 \cdot \left(\frac{\partial u^0}{\partial t} e^{-qt} - q u^0 e^{-qt} \right) + C_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} e^{-qt} - q \frac{\partial u^0}{\partial t} e^{-qt} - q \frac{\partial u^0}{\partial t} e^{-qt} + q^2 u^0 e^{-qt} \right) \right]$$

Множитель e^{-qt} по обе стороны равенства сокращается:

$$-\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} = -R_0 G_0 u^0 - R_0 C_0 \frac{\partial u^0}{\partial t} + q R_0 C_0 u^0 -$$

$$-L_0 G_0 \frac{\partial u^0}{\partial t} + q L_0 G_0 u^0 - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} + q L_0 C_0 \frac{\partial u^0}{\partial t} + q L_0 C_0 \frac{\partial u^0}{\partial t} - q^2 L_0 C_0 u^0$$

В правой части последнего равенства повсеместно R_0 заменяется на qL_0 , а G_0 – на qC_0 :

$$-\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} = -q^2 L_0 C_0 u^0 - q L_0 C_0 \frac{\partial u^0}{\partial t} + q^2 L_0 C_0 u^0 -$$

$$-q L_0 C_0 \frac{\partial u^0}{\partial t} + q^2 L_0 C_0 u^0 - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} + q L_0 C_0 \frac{\partial u^0}{\partial t} + q L_0 C_0 \frac{\partial u^0}{\partial t} - q^2 L_0 C_0 u^0$$

$$-\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} = -L_0 C_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} = 0,$$

$$\text{где } v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

1.2. Установившиеся (постоянные) токи и напряжения в линии с потерями как реакция на скачок напряжения \mathcal{E} на ее входе при $t \rightarrow \infty$ и произвольных (омических) сопротивлениях источника $R_{\text{и}}$ и нагрузки $R_{\text{н}}$

Из (1а) и (1б) в [1] при $t \rightarrow \infty$, когда $\frac{\partial i}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$:

$$(1.2.1) \quad R_0 dx \cdot i = -d_x u \quad \text{или} \quad -\frac{du}{dx} = R_0 \cdot i$$

$$(1.2.2) \quad G_0 dx \cdot u = -d_x i \quad \text{или} \quad -\frac{di}{dx} = G_0 \cdot u$$

Дифференцируя (1.2.1) по x и подставляя di/dx из (1.2.2), получим:

$$(1.2.3) \quad -\frac{d^2 u}{dx^2} = R_0 \cdot \frac{di}{dx} \Rightarrow -\frac{d^2 u}{dx^2} = -R_0 G_0 u \Rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} - R_0 G_0 u = 0$$

Аналогично из (1.2.2) с учетом (1.2.1):

$$(1.2.4) \quad -\frac{d^2 i}{dx^2} = G_0 \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow -\frac{d^2 i}{dx^2} = -R_0 G_0 i \Rightarrow \frac{d^2 i}{dx^2} - R_0 G_0 i = 0$$

Из условия Хевисайда (6) в [1] $q = \frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$, следовательно, $\frac{R_0}{L_0} \cdot \frac{G_0}{C_0} = q^2$ и $\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}$:

$$(1.2.5) \quad w = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{\frac{R_0}{L_0} + j\omega}{\frac{G_0}{C_0} + j\omega}} \cdot \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$$

$$(1.2.6) \quad \sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{q^2 L_0 C_0} = \frac{q}{v}, \quad \text{где} \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Общее решение уравнения (1.2.3):

$$(1.2.7) \quad u = A e^{-\sqrt{R_0 G_0} x} + B e^{\sqrt{R_0 G_0} x} :$$

Подставляем (1.2.7) в (1.2.1):

$$(1.2.8) \quad i = -\frac{1}{R_0} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{R_0} A (-\sqrt{R_0 G_0}) e^{-\sqrt{R_0 G_0} x} - \frac{1}{R_0} B (\sqrt{R_0 G_0}) e^{\sqrt{R_0 G_0} x} = \\ = A \sqrt{\frac{G_0}{R_0}} e^{-\sqrt{R_0 G_0} x} - B \sqrt{\frac{G_0}{R_0}} e^{\sqrt{R_0 G_0} x} = \frac{A}{w} e^{-\sqrt{R_0 G_0} x} - \frac{B}{w} e^{\sqrt{R_0 G_0} x}$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий.

При $x = 0$ согласно (1.2.7) и (1.2.8):

$$(1.2.9) \quad u_0 = A + B, \quad i_0 = \frac{A}{w} - \frac{B}{w} \quad \text{и} \quad R_{\text{вх}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_0}{i_0} = \frac{A + B}{\frac{A}{w} - \frac{B}{w}} = \frac{A + B}{\frac{A - B}{w}} \cdot w ;$$

но должно иметь место равенство

$$(1.2.10) \quad u_0 = \frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{и}} + R_{\text{вх}}} \cdot \mathcal{E},$$

поэтому

$$(1.2.11) \quad A + B = \frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{и}} + R_{\text{вх}}} \cdot \mathcal{E} \Rightarrow A + B = \frac{\frac{A+B}{A-B} \cdot w}{R_{\text{и}} + \frac{A+B}{A-B} \cdot w} \cdot \mathcal{E} \Rightarrow A + B = \frac{(A+B) \cdot w}{(A-B) \cdot R_{\text{и}} + (A+B) \cdot w} \cdot \mathcal{E},$$

откуда

$$(1.2.12) \quad (A-B) \cdot R_{\text{и}} + (A+B) \cdot w = w \cdot \mathcal{E} \Rightarrow (R_{\text{и}} + w) \cdot A - (R_{\text{и}} - w) \cdot B = w \cdot \mathcal{E} \Rightarrow A - \frac{R_{\text{и}} - w}{R_{\text{и}} + w} \cdot B = \frac{w}{R_{\text{и}} + w} \cdot \mathcal{E}.$$

При $x = l$ согласно (1.2.7) и (1.2.8) и принимая во внимание, что $\sqrt{R_0 G_0} \cdot l = \frac{ql}{v} = q\tau$, где $\tau \stackrel{\text{def}}{=} l/v$:

$$(1.2.13) \quad u_l = Ae^{-q\tau} + Be^{q\tau} \text{ и } i_l = \frac{A}{w}e^{-q\tau} - \frac{B}{w}e^{q\tau};$$

но должно выполняться равенство

$$(1.2.14) \quad i_l = \frac{u_l}{R_{\text{н}}},$$

поэтому

$$(1.2.15) \quad \frac{A}{w}e^{-q\tau} - \frac{B}{w}e^{q\tau} = \frac{Ae^{-q\tau} + Be^{q\tau}}{R_{\text{н}}} \Rightarrow R_{\text{н}} \cdot (A - Be^{2q\tau}) = w \cdot (A + Be^{2q\tau}) \Rightarrow (R_{\text{н}} - w) \cdot A = (R_{\text{н}} + w) \cdot Be^{2q\tau}$$

и

$$(1.2.16) \quad A = \frac{R_{\text{н}} + w}{R_{\text{н}} - w} \cdot Be^{2q\tau}.$$

Подставляя A из (1.2.16) в (1.2.12), имеем:

$$(1.2.17) \quad \frac{R_{\text{н}} + w}{R_{\text{н}} - w} \cdot Be^{2q\tau} - \frac{R_{\text{и}} - w}{R_{\text{и}} + w} \cdot B = \frac{w}{R_{\text{и}} + w} \cdot \mathcal{E}$$

$$(1.2.18) \quad B = \frac{1}{\frac{R_{\text{н}} + w}{R_{\text{н}} - w} \cdot e^{2q\tau} - \frac{R_{\text{и}} - w}{R_{\text{и}} + w}} \cdot \frac{w}{R_{\text{и}} + w} \cdot \mathcal{E} =$$

$$= \frac{(R_{\text{н}} - w) \cdot w}{(R_{\text{н}} + w) \cdot (R_{\text{и}} + w) \cdot e^{2q\tau} - (R_{\text{и}} - w) \cdot (R_{\text{н}} - w)} \cdot \mathcal{E}.$$

Подставляем B из (1.2.18) в (1.2.16):

$$(1.2.19) \quad A = \frac{R_{\text{н}} + w}{R_{\text{н}} - w} \cdot \frac{(R_{\text{н}} - w) \cdot w \cdot e^{2q\tau}}{(R_{\text{н}} + w) \cdot (R_{\text{и}} + w) \cdot e^{2q\tau} - (R_{\text{и}} - w) \cdot (R_{\text{н}} - w)} \cdot \mathcal{E} =$$

$$= \frac{(R_{\text{н}} + w) \cdot w \cdot e^{2q\tau}}{(R_{\text{н}} + w) \cdot (R_{\text{и}} + w) \cdot e^{2q\tau} - (R_{\text{и}} - w) \cdot (R_{\text{н}} - w)} \cdot \mathcal{E}.$$

Введем обозначение:

$$(1.2.20) \quad p = 1 / \left[(R_{\text{н}} + w) \cdot (R_{\text{и}} + w) \cdot e^{2q\tau} - (R_{\text{и}} - w) \cdot (R_{\text{н}} - w) \right],$$

тогда

$$(1.2.21) \quad A = p w (R_{\text{н}} + w) e^{2q\tau} \mathcal{E},$$

$$(1.2.22) \quad B = p w (R_{\text{н}} - w) \mathcal{E}.$$

В результате подстановки этих A и B в (1.2.7) и (1.2.8) с учетом (1.2.6) получим:

$$(1.2.23) \quad u = p w \left[(R_{\text{н}} + w) e^{q(2\tau - x/v)} + (R_{\text{н}} - w) e^{qx/v} \right] \mathcal{E},$$

$$(1.2.24) \quad i = p \left[(R_{\text{н}} + w) e^{q(2\tau - x/v)} - (R_{\text{н}} - w) e^{qx/v} \right] \mathcal{E},$$

а также

$$(1.2.25) \quad R_{\text{вх}} = \frac{A+B}{A-B} \cdot w = \frac{p w (R_{\text{н}} + w) e^{2q\tau} \mathcal{E} + p w (R_{\text{н}} - w) \mathcal{E}}{p w (R_{\text{н}} + w) e^{2q\tau} \mathcal{E} - p w (R_{\text{н}} - w) \mathcal{E}} \cdot w = \frac{(R_{\text{н}} + w) e^{2q\tau} + (R_{\text{н}} - w)}{(R_{\text{н}} + w) e^{2q\tau} - (R_{\text{н}} - w)} \cdot w.$$

Ниже приведен текст *m*-файла программы (для MATLAB), реализующей вычисления $u(x)$ и $i(x)$ согласно (1.2.23) и (1.2.24) и результаты работы этой программы для двух указанных наборов значений параметров.

Программа *heviside_2.m* находится в C:/References/Lab_79.

```
function [v,w,q,r0]=heviside_2(rs,l,L0,C0,R0,rl)
% Распределение (постоянных) тока и напряжения вдоль линии с потерями
% при подаче на её вход единичного скачка э.д.с.
% в установившемся режиме (при t, стремящемся к бесконечности)
% в предположении, что выполнено условие Хевисайда,
% при произвольных (омических) сопротивлениях источника rs и нагрузки rl;
% размерности: rs, rl, w, r0 - [Ом]; l - [м]; L0 - [Гн/м]; C0 - [Ф/м];
% R0 - [Ом/м]; v - [м/с]; q - [1/с].

% Примеры обращения:
% heviside_2(0,6,0.4e-6,7e-11,0.5,7.5e9);
% heviside_2(7.5,6,0.4e-6,7e-11,0.5,750);

v=1/sqrt(L0*C0); w=sqrt(L0/C0); q=R0/L0;
tau=l/v; b=exp(2*q*tau);
p=1/((rl+w)*(rs+w)*b-(rl-w)*(rs-w));
A=p*w*(rl+w)*b;
B=p*w*(rl-w);

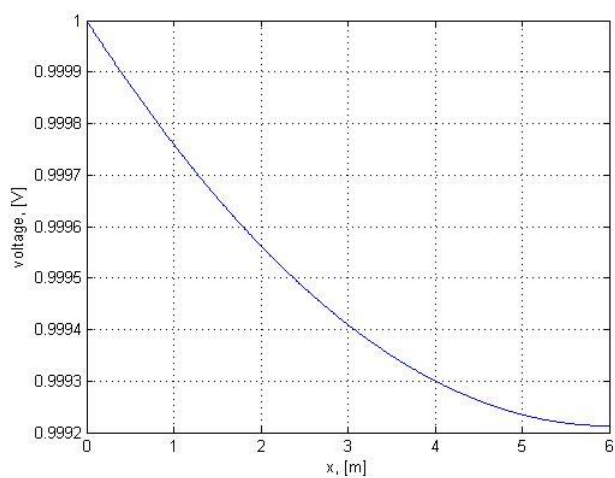
% r0 -входное сопротивление
r0=((rl+w)*b+(rl-w))*w/((rl+w)*b-(rl-w));

x=0:0.01:l; % x - расстояние вдоль линии от её начала, м
u=p*w*((rl+w)*b*exp(-q*x/v)+(rl-w)*exp(q*x/v));
i=p*((rl+w)*b*exp(-q*x/v)-(rl-w)*exp(q*x/v));

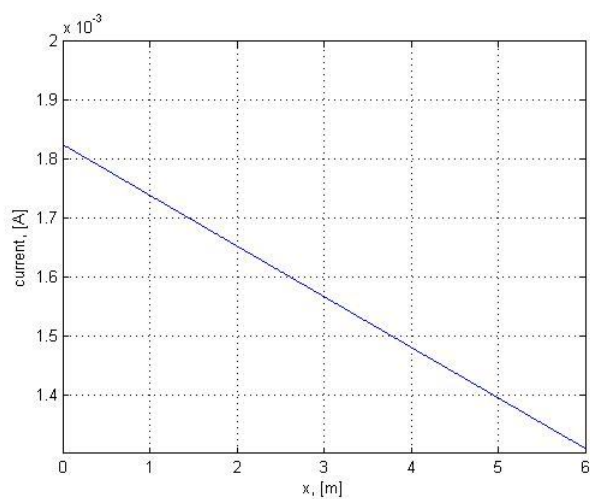
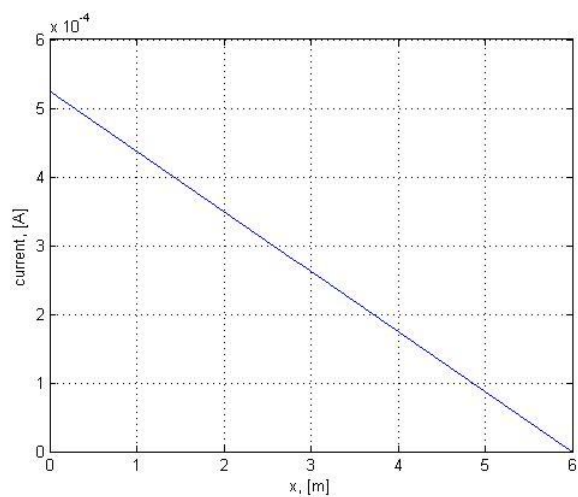
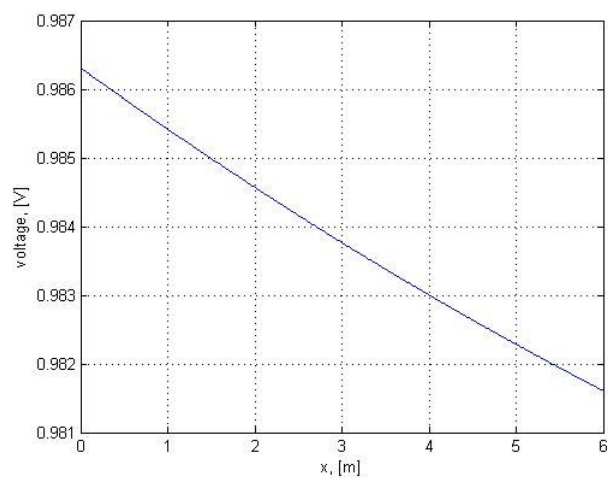
figure; plot(x,u); grid on;
xlabel('x, [m]');
ylabel('voltage, [V]');
figure; plot(x,i); grid on;
xlabel('x, [m]');
ylabel('current, [A]');

o=o;
```

heviside_2(0,6,0.4e-6,7e-11,0.5,7.5e9)



heviside_2(7.5,6,0.4e-6,7e-11,0.5,750)



2. Длинная линия при синусоидальном воздействии

2.1. Распределение комплексных амплитуд напряжения и тока в линии при заданном значении напряжения $\tilde{U}(0) \equiv \tilde{U}_0$ на ее входе

$$(9) \text{ в [1]} \quad \frac{d^2 \tilde{U}}{dx^2} - \gamma^2 \tilde{U} = 0,$$

$$(10) \text{ в [1]} \quad \gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

$$(11a) \text{ в [1]} \quad \tilde{U}(x) = \tilde{A} \cdot e^{-\gamma x} + \tilde{B} \cdot e^{\gamma x},$$

$$(11б) \text{ в [1]} \quad \tilde{I}(x) = \frac{\tilde{A}}{w} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\tilde{B}}{w} \cdot e^{\gamma x},$$

$$(12) \text{ в [1]} \quad w = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

$$(2.1.1) \quad \tilde{U}(0) = \tilde{A} + \tilde{B}$$

$$(2.1.2) \quad \tilde{I}(0) = \frac{\tilde{A}}{w} - \frac{\tilde{B}}{w}$$

$$(2.1.3) \quad \tilde{U}(0) + w \cdot \tilde{I}(0) = 2\tilde{A}, \quad \tilde{A} = \frac{\tilde{U}(0) + w \cdot \tilde{I}(0)}{2}$$

$$(2.1.4) \quad \tilde{U}(0) - w \cdot \tilde{I}(0) = 2\tilde{B}, \quad \tilde{B} = \frac{\tilde{U}(0) - w \cdot \tilde{I}(0)}{2}$$

Обозначения: $\tilde{U}(0) \equiv \tilde{U}_0, \tilde{I}(0) \equiv \tilde{I}_0$

$$(2.1.5) \quad \tilde{U}(x) = \frac{\tilde{U}_0 + w\tilde{I}_0}{2} \cdot e^{-\gamma x} + \frac{\tilde{U}_0 - w\tilde{I}_0}{2} \cdot e^{\gamma x}$$

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} \tilde{U}(x) &= \tilde{U}_0 \cdot \frac{e^{-\gamma x} + e^{\gamma x}}{2} + w\tilde{I}_0 \cdot \frac{e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}}{2} \\ &= \tilde{U}_0 \cdot \operatorname{ch} \gamma x - w\tilde{I}_0 \cdot \operatorname{sh} \gamma x - \text{эквивалент (14a) в [1]} \end{aligned}$$

$$(2.1.7) \quad \tilde{I}(x) = \frac{1}{w} \left\{ \frac{\tilde{U}_0 + w\tilde{I}_0}{2} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\tilde{U}_0 - w\tilde{I}_0}{2} \cdot e^{\gamma x} \right\}$$

$$(2.1.8) \quad \begin{aligned} \tilde{I}(x) &= \frac{\tilde{U}_0}{w} \cdot \frac{e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}}{2} + \tilde{I}_0 \cdot \frac{e^{-\gamma x} + e^{\gamma x}}{2} \\ &= -\frac{\tilde{U}_0}{w} \cdot \operatorname{sh} \gamma x + \tilde{I}_0 \cdot \operatorname{ch} \gamma x - \text{эквивалент (14б) в [1]} \end{aligned}$$

При $x = l$:

$$(2.1.9) \quad \tilde{U}(l) = \tilde{U}_0 \cdot \operatorname{ch} \gamma l - w\tilde{I}_0 \cdot \operatorname{sh} \gamma l$$

$$(2.1.10) \quad \tilde{I}(l) = -\frac{\tilde{U}_0}{w} \cdot \operatorname{sh} \gamma l + \tilde{I}_0 \cdot \operatorname{ch} \gamma l$$

Обозначения: $\tilde{U}(l) \equiv \tilde{U}_l, \tilde{I}(l) \equiv \tilde{I}_l$

$\tilde{U}_l / \tilde{I}_l = z_H$ – сопротивление нагрузки

$\tilde{U}_0 / \tilde{I}_0 = z_{вх}$ – входное сопротивление

Проверки: входное сопротивление z_{BX} и коэффициент передачи $\tilde{K} = \tilde{U}_l / \tilde{U}_0$:

$$(2.1.11) \quad z_{\text{H}} = \frac{\tilde{U}_l}{\tilde{I}_l} = \frac{\tilde{U}_0 \cdot \text{ch } \gamma l - w \tilde{I}_0 \cdot \text{sh } \gamma l}{-\frac{\tilde{U}_0}{w} \cdot \text{sh } \gamma l + \tilde{I}_0 \cdot \text{ch } \gamma l} = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0} \cdot \frac{\text{ch } \gamma l - \frac{w}{\tilde{U}_0 / \tilde{I}_0} \cdot \text{sh } \gamma l}{-\frac{\tilde{U}_0 / \tilde{I}_0}{w} \cdot \text{sh } \gamma l + \text{ch } \gamma l} = z_{\text{BX}} \cdot \frac{1 - \frac{w}{z_{\text{BX}}} \cdot \text{th } \gamma l}{-\frac{z_{\text{BX}}}{w} \cdot \text{th } \gamma l + 1}$$

$$(2.1.12) \quad z_{\text{H}} - z_{\text{BX}} \cdot \frac{z_{\text{H}}}{w} \cdot \text{th } \gamma l = z_{\text{BX}} - w \cdot \text{th } \gamma l$$

$$(2.1.13) \quad z_{\text{H}} \cdot \left(1 + \frac{w}{z_{\text{H}}} \cdot \text{th } \gamma l \right) = z_{\text{BX}} \cdot \left(1 + \frac{z_{\text{H}}}{w} \cdot \text{th } \gamma l \right)$$

$$(2.1.14) \quad z_{\text{BX}} \left(\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0} \right) = \frac{1 + \frac{w}{z_{\text{H}}} \text{th } \gamma l}{1 + \frac{z_{\text{H}}}{w} \text{th } \gamma l} \cdot z_{\text{H}} - \text{эквивалент (16) в [1]}$$

$$(2.1.15) \quad \tilde{K} \left(\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{U}_l}{\tilde{U}_0} \right) = \frac{\tilde{U}_0 \cdot \text{ch } \gamma l - w \tilde{I}_0 \cdot \text{sh } \gamma l}{U_0} = \text{ch } \gamma l - \frac{w}{z_{\text{BX}}} \cdot \text{sh } \gamma l = \text{ch } \gamma l \cdot \left(1 - \frac{w}{1 + \frac{w}{z_{\text{H}}} \text{th } \gamma l} \cdot \text{th } \gamma l \right) \cdot \frac{z_{\text{H}}}{1 + \frac{z_{\text{H}}}{w} \text{th } \gamma l}$$

$$= \text{ch } \gamma l \cdot \frac{\left(1 + \frac{w}{z_{\text{H}}} \text{th } \gamma l \right) \cdot z_{\text{H}} - w \cdot \left(1 + \frac{z_{\text{H}}}{w} \text{th } \gamma l \right) \cdot \text{th } \gamma l}{\left(1 + \frac{w}{z_{\text{H}}} \text{th } \gamma l \right) \cdot z_{\text{H}}} = \text{ch } \gamma l \cdot \frac{z_{\text{H}} + w \cdot \text{th } \gamma l - w \cdot \text{th } \gamma l - z_{\text{H}} \cdot \text{th}^2 \gamma l}{z_{\text{H}} + w \cdot \text{th } \gamma l} = \frac{\text{ch}^2 \gamma l - \text{sh}^2 \gamma l}{\text{ch } \gamma l + \frac{w}{z_{\text{H}}} \cdot \text{sh } \gamma l}$$

$$= \frac{1}{\text{ch } \gamma l + \frac{w}{z_{\text{H}}} \cdot \text{sh } \gamma l} - \text{эквивалент (15) в [1]}$$

В отсутствие потерь $\gamma = j\alpha$, $\alpha = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}$ и $w = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$

$$(2.1.16) \quad \tilde{U}(x) = \tilde{U}_l \cos \alpha(l-x) + j \frac{w}{R_{\text{H}}} \tilde{U}_l \sin \alpha(l-x) - \text{эквивалент (20a) в [1]}$$

$$= \tilde{U}_l \sqrt{\cos^2 \alpha(l-x) + \left(\frac{w}{R_{\text{H}}} \right)^2 \sin^2 \alpha(l-x)} \cdot e^{j \arctg \left[\frac{w}{R_{\text{H}}} \text{tg } \alpha(l-x) \right]}$$

$$(2.1.17) \quad |\tilde{U}(x)| = U_l \sqrt{\left[1 - \left(\frac{w}{R_{\text{H}}} \right)^2 \right] \cos^2 \alpha(l-x) + \left(\frac{w}{R_{\text{H}}} \right)^2}$$

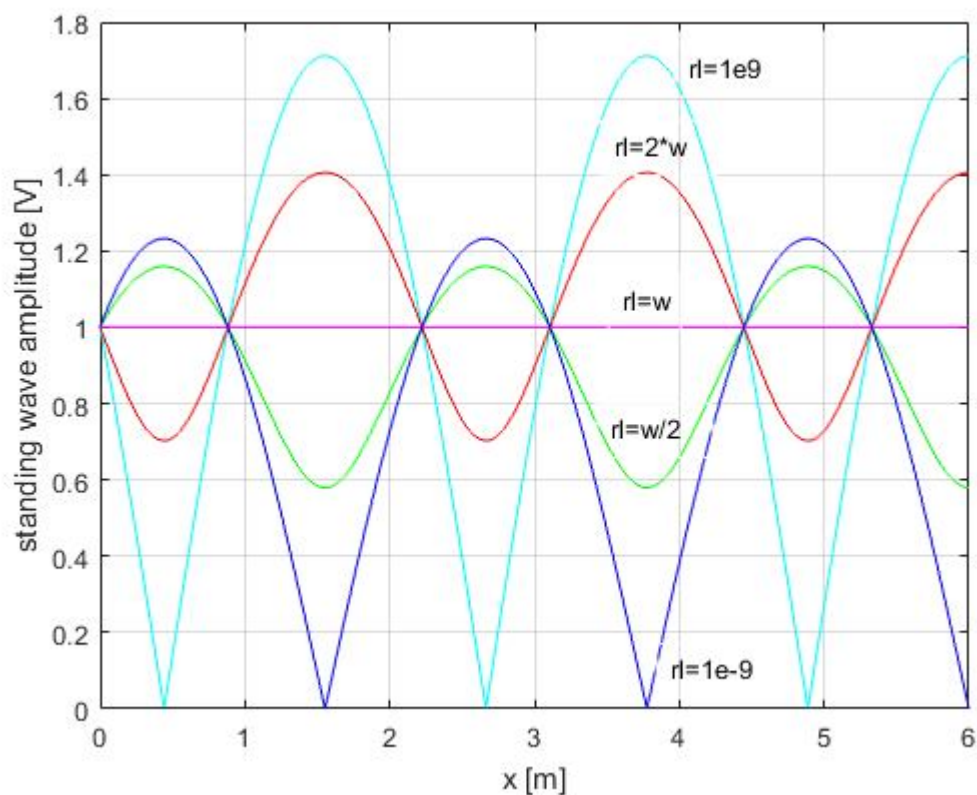
$$\text{Из (2.1.16)} \quad \tilde{U}(x) = \tilde{U}_l \cdot \left[\cos \alpha(l-x) + j \frac{w}{R_{\text{H}}} \sin \alpha(l-x) \right] = \tilde{K} \tilde{U}_0 \cdot \left[\cos \alpha(l-x) + j \frac{w}{R_{\text{H}}} \sin \alpha(l-x) \right]$$

$$(21) \text{ в [1]} \quad \tilde{K} = \frac{1}{\cos \alpha l + j \frac{w}{R_{\text{H}}} \sin \alpha l}$$

$$(2.1.18) \quad \tilde{U}(x) = \tilde{U}_0 \frac{\cos \alpha(l-x) + j \frac{w}{R_{\text{H}}} \sin \alpha(l-x)}{\cos \alpha l + j \frac{w}{R_{\text{H}}} \sin \alpha l}$$

Программа *standing_waves.m* находится в C:/References/Lab_79.

```
function standing_waves(l,f,L0,C0)
% Стоячие волны напряжения в линии без потерь при различных нагрузках rl
% Пример обращения: standing_waves(6,4.25e7,0.4e-6,7e-11)
v=1/sqrt(L0*C0);
w=sqrt(L0/C0);
a=2*pi*f/v;
x=(0:0.001:1)*l;
figure;
rl=1e9;
u=(cos(a*(l-x))+j*w*sin(a*(l-x))/rl)./(cos(a*l)+j*w*sin(a*l)/rl);
plot(x,abs(u),'c'); hold on;
rl=2*w;
u=(cos(a*(l-x))+j*w*sin(a*(l-x))/rl)./(cos(a*l)+j*w*sin(a*l)/rl);
plot(x,abs(u),'r'); hold on;
rl=w;
u=(cos(a*(l-x))+j*w*sin(a*(l-x))/rl)./(cos(a*l)+j*w*sin(a*l)/rl);
plot(x,abs(u),'m'); hold on;
rl=w/2;
u=(cos(a*(l-x))+j*w*sin(a*(l-x))/rl)./(cos(a*l)+j*w*sin(a*l)/rl);
plot(x,abs(u),'g'); hold on;
rl=1e-9;
u=(cos(a*(l-x))+j*w*sin(a*(l-x))/rl)./(cos(a*l)+j*w*sin(a*l)/rl);
plot(x,abs(u),'b'); grid on;
xlabel('x [m]'); ylabel('standing wave amplitude [V]');
o=o;
```



2.2. Падающая, отраженная и стоячая волны при наличии потерь

Согласно объяснениям, приведенным в разделе *Падающая, отраженная, стоячая и бегущая волны* в [1], правые слагаемые в (11а) в [1] и в (2.1.5) представляют собой волну напряжения, распространяющуюся вдоль линии вправо, то есть в сторону больших значений x (падающую волну напряжения), а левые слагаемые – волну напряжения, перемещающуюся влево, в сторону меньших значений x (отраженную волну напряжения). Их сумма в каждой точке x образует стоячую волну напряжения, комплексная амплитуда которой равна

$$\tilde{U}(x) = \frac{\tilde{U}_0 + w\tilde{I}_0}{2} \cdot e^{-\gamma x} + \frac{\tilde{U}_0 - w\tilde{I}_0}{2} \cdot e^{\gamma x} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \tilde{U}_0 \cdot \left(1 + \frac{w}{z_{\text{вх}}}\right) \cdot e^{-\gamma x}}_{\text{падающая волна напряжения}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \tilde{U}_0 \cdot \left(1 - \frac{w}{z_{\text{вх}}}\right) \cdot e^{\gamma x}}_{\text{отраженная волна напряжения}},$$

где $\tilde{U}(0) \equiv \tilde{U}_0$ – заданное напряжение на входе линии, а $z_{\text{вх}}$ – сопротивление линии со стороны ее входа [см. (2.1.14)]:

$$z_{\text{вх}} \left(\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0} \right) = \frac{1 + \frac{w}{z_{\text{н}}} \operatorname{th} \gamma l}{1 + \frac{z_{\text{н}}}{w} \operatorname{th} \gamma l} \cdot z_{\text{н}}.$$

Программа *lw79_9.m* позволяет графически отобразить распределение модуля комплексной амплитуды падающей, отраженной и стоячей волн напряжения вдоль длинной линии в общем случае и сравнить стоячие волны напряжения в отсутствие и при наличии потерь.

Программа *lw79_9.m* находится в C:/References/Lab_79.

```
function lw79_9(L0,C0,R0,f,l,zs,zl)
% Линия с потерями потерь (выполнено условие Хевисайда):
% стоячие волны напряжения при любых zs и zl

% L0 – погонная индуктивность, Гн/м
% C0 – погонная емкость, Ф/м
% R0 – погонное сопротивление, Ом/м
% G0 – погонная проводимость: G0=(C0/L0)*R0, 1/(Ом*м)
% f – частота, Гц
% l – длина линии, м
% zs – сопротивление источника сигнала, Ом
% zl – нагрузка, Ом

% ЭДС источника сигнала предполагается равной 1 В

% q=R0/L0=G0/C0 – параметр затухания, 1/с
% v – скорость распространения: v=1/sqrt(L0*C0), м/с
% gamma – постоянная распространения:
% gamma=sqrt((R0+j*2*pi*f*L0)*(G0+j*2*pi*f*C0)), 1/м
% gamma=beta+j*alpha: beta=q/v, alpha=2*pi*f/v=2*pi/lambda
% beta – постоянная затухания, 1/м
% alpha – фазовая постоянная (волновое число), рад/м
% lambda – длина волны: lambda=v/f, м
% w – волновое сопротивление:
% w=sqrt((R0+j*2*pi*f*L0)/(G0+j*2*pi*f*C0)), Ом;
% коль скоро выполняется условие Хевисайда, w=sqrt(L0/C0)

% Пример обращения:
% lw79_9(0.4e-6,7e-11,5,1.7e7,18,0,1e10);

n=1000; % n – число точек вдоль линии
x=0:l/n:l;

% U0 – амплитуда напряжения на входе (при x=0), В
% Ux – амплитуда напряжения в точке x, В
% U1 – амплитуда напряжения на нагрузке (при x=l), В
% K – коэффициент передачи
% z0 – входное сопротивление, Ом
```

```

% Вычисление gamma, w, z0 и U0 в отсутствие потерь:

gamma=sqrt((0+j*2*pi*f*L0)*(0+j*2*pi*f*C0));
w=sqrt((0+j*2*pi*f*L0)/(0+j*2*pi*f*C0));

% Выделение случаев короткозамкнутой и разомкнутой линии:

eps_=1e-9;
if abs(zl) < eps_
    K=0;
    z0=w*tanh(gamma*l);
elseif abs(1/zl) < eps_
    K=1/cosh(gamma*l);
    z0=w/tanh(gamma*l);
else
    K=1/(cosh(gamma*l)+w*sinh(gamma*l)/zl);
    z0=((1+w*tanh(gamma*l)/zl)/(1+zl*tanh(gamma*l)/w))*zl;
end
U0=z0/(zs+z0);

Uxll=U0*(cosh(gamma*x)-w*sinh(gamma*x)/z0);
% Uxll - стоячая волна в отсутствие потерь (no loss)

% Вычисление gamma, w, z0, U0 и других параметров с учетом потерь:

G0=(C0/L0)*R0;
q=R0/L0;
v=1/sqrt(L0*C0);
gamma=sqrt((R0+j*2*pi*f*L0)*(G0+j*2*pi*f*C0));
beta=q/v;
alpha=2*pi*f/v;
lambda=v/f;
w=sqrt((R0+j*2*pi*f*L0)/(G0+j*2*pi*f*C0));

% Выделение случаев короткозамкнутой и разомкнутой линии:

f abs(zl) < eps_
    K=0;
    z0=w*tanh(gamma*l);
elseif abs(1/zl) < eps_
    K=1/cosh(gamma*l);
    z0=w/tanh(gamma*l);
else
    K=1/(cosh(gamma*l)+w*sinh(gamma*l)/zl);
    z0=((1+w*tanh(gamma*l)/zl)/(1+zl*tanh(gamma*l)/w))*zl;
end
U0=z0/(zs+z0);

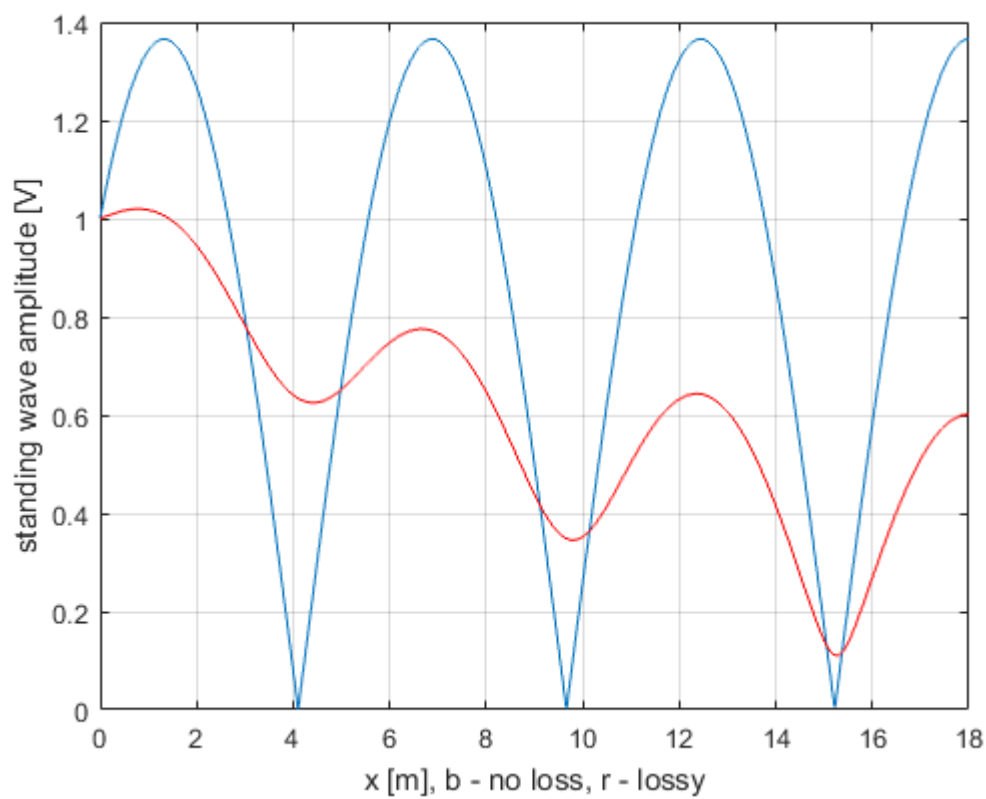
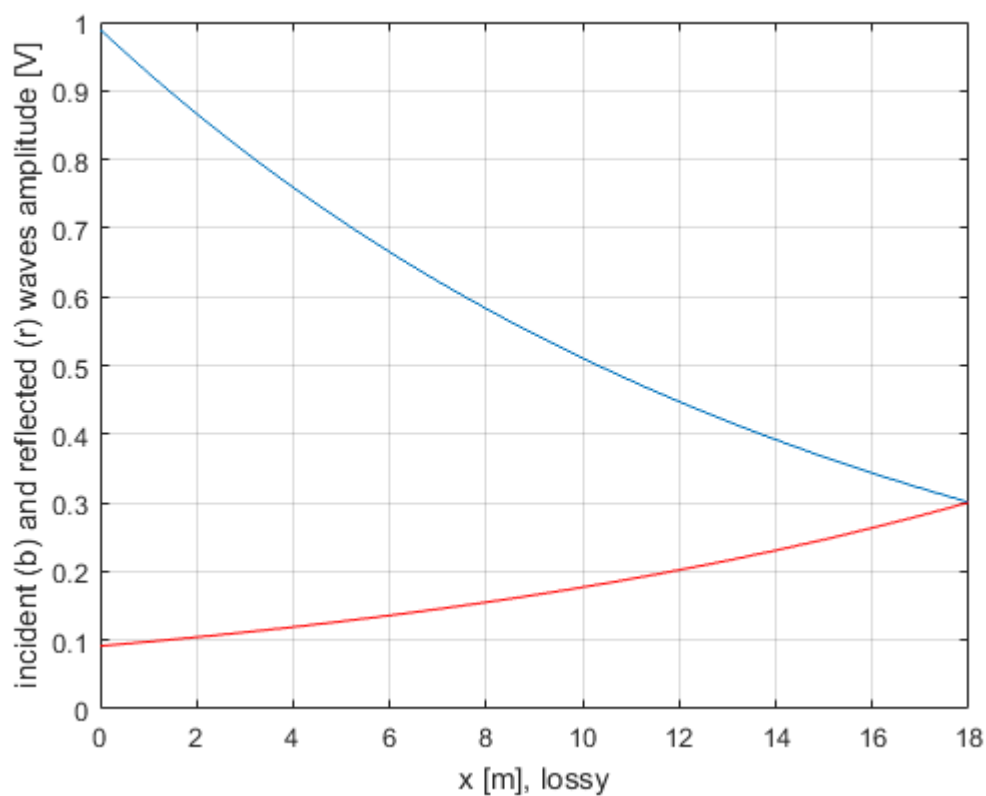
A=1/2*U0*(1+w/z0)*exp(-gamma*x); % A - падающая волна
B=1/2*U0*(1-w/z0)*exp(gamma*x); % B - отраженная волна

figure; plot(x,abs(A)); grid on; hold on;
plot(x,abs(B),'r'); grid on;
xlabel('x [m], lossy');
ylabel('incident (b) and reflected (r) waves amplitude [V]');

figure; plot(x,abs(Uxll)); grid on; hold on;
Uxwl=U0*(cosh(gamma*x)-w*sinh(gamma*x)/z0);
% Uxwl - стоячая волна при наличии потерь (lossy)
plot(x,abs(Uxwl),'r'); grid on;
xlabel('x [m], b - no loss, r - lossy');
ylabel('standing wave amplitude [V]');

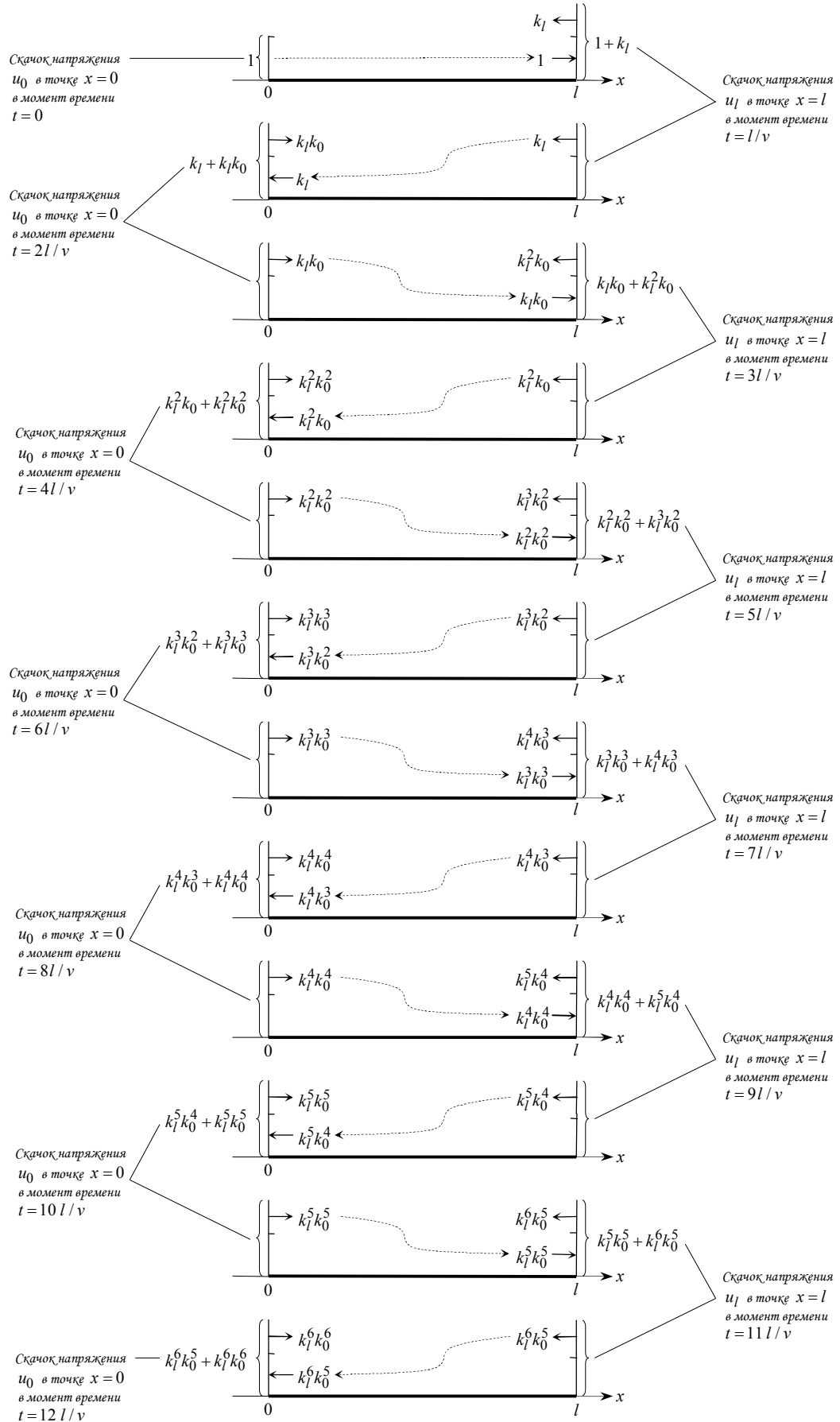
o=0;

```

$1w79_9(0.4e-6, 7e-11, 5, 1.7e7, 18, 0, 1e10)$


3. Переходные процессы в длинной линии

3.1. Скачки напряжения на входе и на выходе линии без потерь



Геометрическая прогрессия:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n; \quad a_i = a_1 \cdot q^{i-1}; \quad s_n(gef) = \sum_{i=1}^n a_i; \quad s_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Вывод формулы (66) для напряжения u_0 и ее эквивалента для напряжения u_l

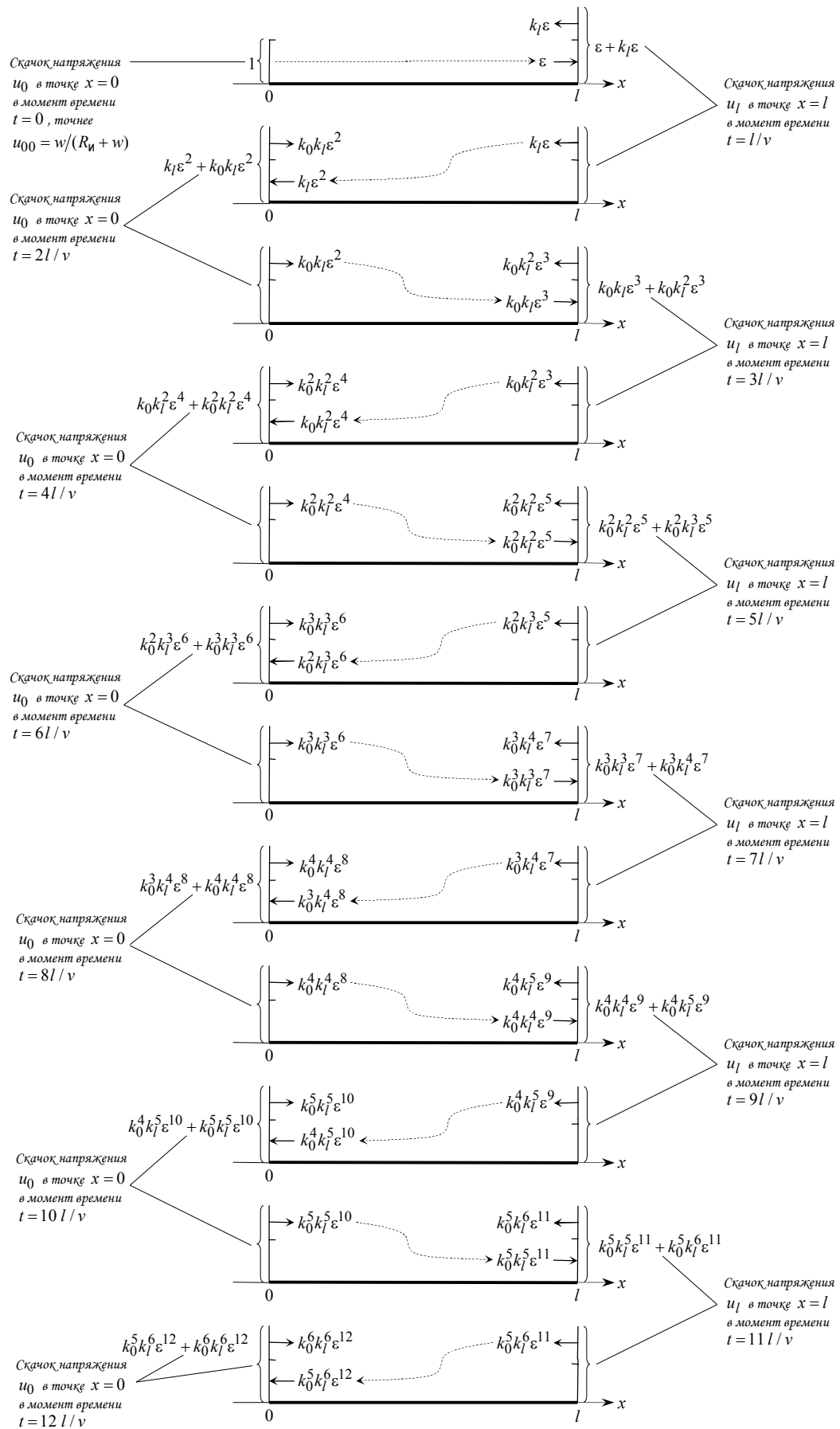
$$x = 0 \quad [n = 0, 1, 2, \dots; \quad t = n \cdot (2l / \nu)]:$$

$$\begin{aligned} & 1 + \underbrace{k_l + k_l k_0}_1 + \underbrace{k_l^2 k_0 + k_l^2 k_0^2}_2 + \underbrace{k_l^3 k_0^2 + k_l^3 k_0^3}_3 + \underbrace{k_l^4 k_0^3 + k_l^4 k_0^4}_4 + \dots = \\ & = 1 + \underbrace{k_l k_0}_{a_1} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) + \underbrace{k_l^2 k_0^2}_{a_2} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) + \underbrace{k_l^3 k_0^3}_{a_3} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) + \underbrace{k_l^4 k_0^4}_{a_4} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) + \dots + \underbrace{k_l^n k_0^n}_{a_n} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) = \\ & = 1 + \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) \cdot \frac{k_l k_0 \cdot [1 - (k_l k_0)^n]}{1 - k_l k_0} = \frac{1 - k_l k_0 + k_l \cdot (1 + k_0) \cdot [1 - (k_l k_0)^n]}{1 - k_l k_0} = \\ & = \frac{1 - k_l k_0 + k_l + k_l k_0 - k_l \cdot (1 + k_0) \cdot (k_l k_0)^n}{1 - k_l k_0} = \frac{1 + k_l - k_l \cdot (1 + k_0) \cdot (k_l k_0)^n}{1 - k_l k_0} \end{aligned}$$

$$x = l \quad [m = 0, 1, 2, \dots; \quad t = (2m + 1) \cdot (l / \nu)]:$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 + k_l}_{m=0} + \underbrace{k_l k_0 + k_l^2 k_0}_{m=1} + \underbrace{k_l^2 k_0^2 + k_l^2 k_0^2}_{m=2} + \underbrace{k_l^3 k_0^3 + k_l^4 k_0^3}_{m=3} + \underbrace{k_l^4 k_0^4 + k_l^5 k_0^4}_{m=4} + \dots = \\ & = 1 + k_l + (1 + k_l) \cdot \left[\underbrace{k_l k_0}_{a_1} + \underbrace{(k_l k_0)^2}_{a_2} + \underbrace{(k_l k_0)^3}_{a_3} + \dots + \underbrace{(k_l k_0)^m}_{a_m} \right] = \\ & = 1 + k_l + (1 + k_l) \cdot \frac{k_l k_0 \cdot [1 - (k_l k_0)^m]}{1 - k_l k_0} = (1 + k_l) \cdot \left\{ 1 + \frac{k_l k_0 \cdot [1 - (k_l k_0)^m]}{1 - k_l k_0} \right\} = \\ & = (1 + k_l) \cdot \frac{1 - k_l k_0 + k_l k_0 \cdot [1 - (k_l k_0)^m]}{1 - k_l k_0} = (1 + k_l) \cdot \frac{1 - k_l k_0 + k_l k_0 - k_l k_0 \cdot (k_l k_0)^m}{1 - k_l k_0} = \\ & = \frac{(1 + k_l) \cdot [1 - (k_l k_0)^{m+1}]}{1 - k_l k_0} \end{aligned}$$

3.2. Скачки напряжения на входе и на выходе линии с потерями



$$k_0 = (R_{\text{н}} - w) / (R_{\text{н}} + w)$$

$$k_l = (R_{\text{л}} - w) / (R_{\text{л}} + w)$$

$$u_{00} = w / (R_{\text{н}} + w)$$

Обозначение: $e^{-ql/v} = \varepsilon$

Геометрическая прогрессия:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n; \quad a_i = a_1 \cdot q^{i-1}; \quad s_n(\text{def}) = \sum_{i=1}^n a_i; \quad s_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Для напряжения u_0/u_{00} в точке $x = 0$ в момент времени $t = n \cdot (2l/v)$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} & 1 + \underbrace{(k_l + k_l k_0) \varepsilon^2}_{n=1} + \underbrace{(k_l^2 k_0 + k_l^2 k_0^2) \varepsilon^4}_{n=2} + \underbrace{(k_l^3 k_0^2 + k_l^3 k_0^3) \varepsilon^6}_{n=3} + \underbrace{(k_l^4 k_0^3 + k_l^4 k_0^4) \varepsilon^8}_{n=4} + \dots = \\ & = 1 + \underbrace{k_l k_0 \varepsilon^2}_{a_1} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) + \underbrace{k_l^2 k_0^2 \varepsilon^4}_{a_2} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) + \underbrace{k_l^3 k_0^3 \varepsilon^6}_{a_3} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) + \underbrace{k_l^4 k_0^4 \varepsilon^8}_{a_4} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) + \dots + \underbrace{k_l^n k_0^n \varepsilon^{2n}}_{a_n} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) = \\ & = 1 + \left(\frac{1}{k_0} + 1 \right) \cdot \frac{k_l k_0 \varepsilon^2 \cdot [1 - (k_l k_0 \varepsilon^2)^n]}{1 - k_l k_0 \varepsilon^2} = \frac{1 - k_l k_0 \varepsilon^2 + k_l \varepsilon^2 \cdot (1 + k_0) \cdot [1 - (k_l k_0 \varepsilon^2)^n]}{1 - k_l k_0 \varepsilon^2} = \\ & = \frac{1 - k_l k_0 \varepsilon^2 + k_l \varepsilon^2 + k_l k_0 \varepsilon^2 - k_l \varepsilon^2 \cdot (1 + k_0) \cdot (k_l k_0 \varepsilon^2)^n}{1 - k_l k_0 \varepsilon^2} = \frac{1 + k_l \varepsilon^2 - k_l \varepsilon^2 \cdot (1 + k_0) \cdot (k_l k_0 \varepsilon^2)^n}{1 - k_l k_0 \varepsilon^2} \end{aligned}$$

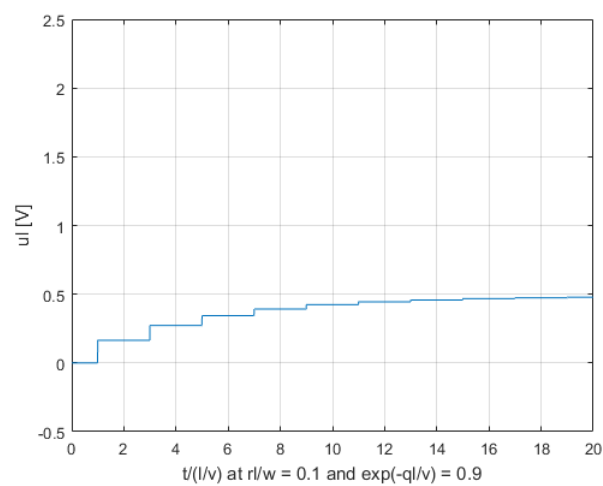
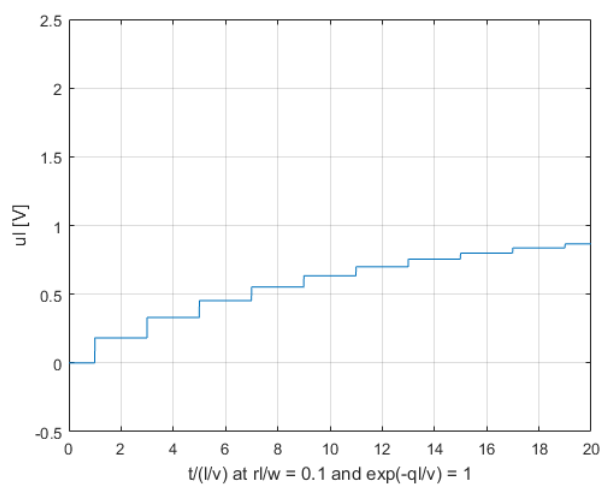
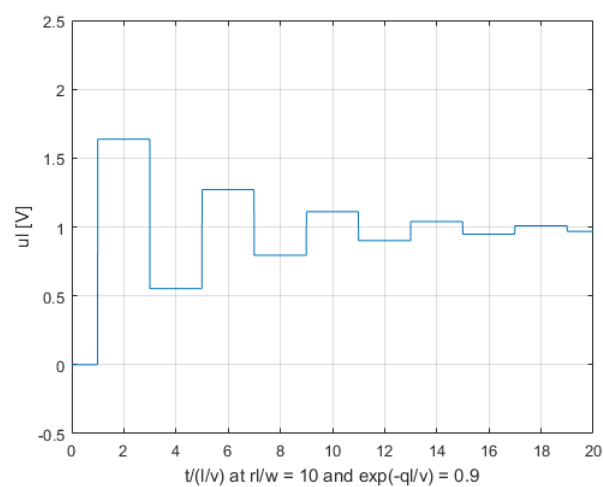
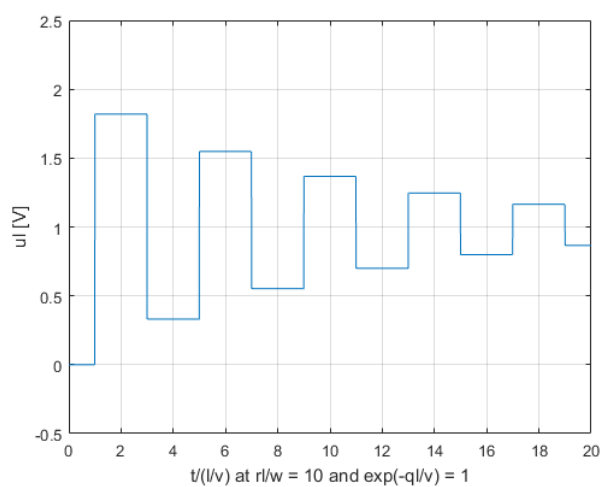
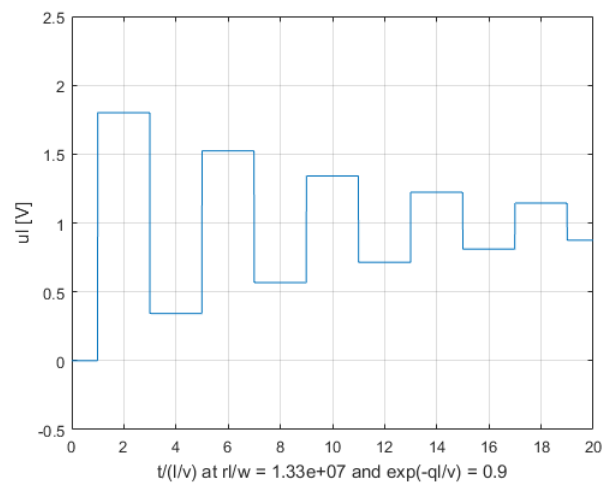
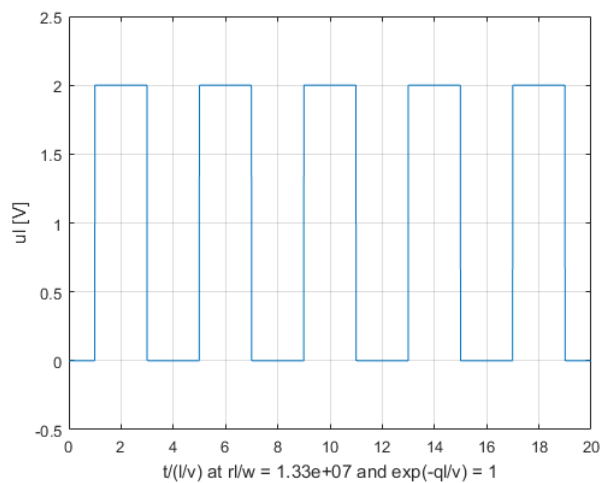
Для напряжения u_l/u_{00} в точке $x = l$ в момент времени $t = (2m+1) \cdot (l/v)$, $m = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(1 + k_l) \varepsilon}_{m=0} + \underbrace{(k_l k_0 + k_l^2 k_0) \varepsilon^3}_{m=1} + \underbrace{(k_l^2 k_0^2 + k_l^3 k_0^2) \varepsilon^5}_{m=2} + \underbrace{(k_l^3 k_0^3 + k_l^4 k_0^3) \varepsilon^7}_{m=3} + \underbrace{(k_l^4 k_0^4 + k_l^5 k_0^4) \varepsilon^9}_{m=4} + \dots = \\ & = \varepsilon \cdot \left\{ 1 + k_l + (1 + k_l) \cdot \left[\underbrace{k_l k_0 \varepsilon^2}_{a_1} + \underbrace{(k_l k_0 \varepsilon^2)^2}_{a_2} + \underbrace{(k_l k_0 \varepsilon^2)^3}_{a_3} + \dots + \underbrace{(k_l k_0 \varepsilon^2)^m}_{a_m} \right] \right\} = \\ & = \varepsilon \cdot \left\{ 1 + k_l + (1 + k_l) \cdot \frac{k_l k_0 \varepsilon^2 \cdot [1 - (k_l k_0 \varepsilon^2)^m]}{1 - k_l k_0 \varepsilon^2} \right\} = (1 + k_l) \cdot \varepsilon \cdot \left\{ 1 + \frac{k_l k_0 \varepsilon^2 \cdot [1 - (k_l k_0 \varepsilon^2)^m]}{1 - k_l k_0 \varepsilon^2} \right\} = \\ & = (1 + k_l) \cdot \varepsilon \cdot \frac{1 - k_l k_0 \varepsilon^2 + k_l k_0 \varepsilon^2 \cdot [1 - (k_l k_0 \varepsilon^2)^m]}{1 - k_l k_0 \varepsilon^2} = (1 + k_l) \cdot \varepsilon \cdot \frac{1 - k_l k_0 \varepsilon^2 + k_l k_0 \varepsilon^2 - k_l k_0 \varepsilon^2 \cdot (k_l k_0 \varepsilon^2)^m}{1 - k_l k_0 \varepsilon^2} = \\ & = \frac{(1 + k_l) \cdot \varepsilon \cdot [1 - (k_l k_0 \varepsilon^2)^{m+1}]}{1 - k_l k_0 \varepsilon^2} \end{aligned}$$

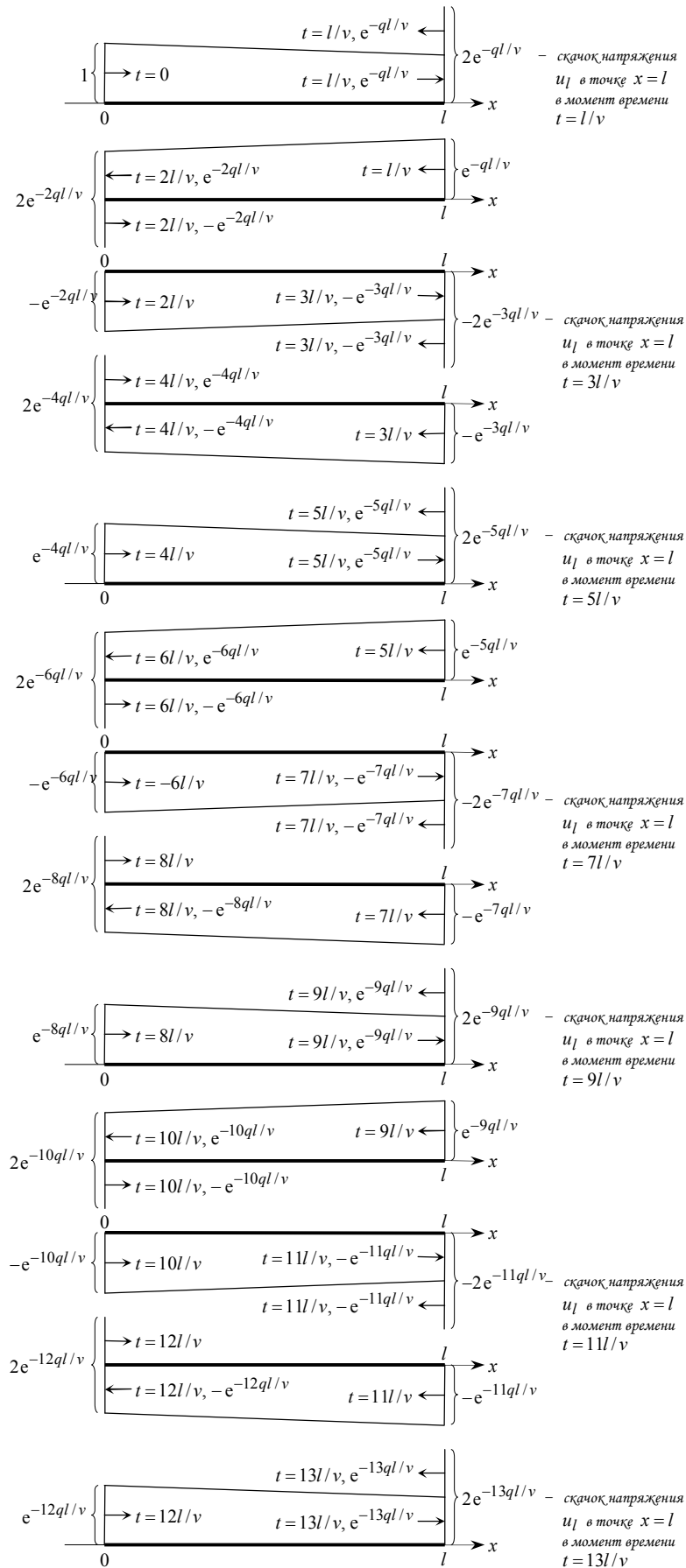
3.3. Реакция длинной линии на единичный скачок напряжения на ее входе при $R_{\text{н}} = 0$

Программа *ul_rl.m* находится в C:/References/Lab_79.

```
function ul_rl(w,rl,eps)
% Напряжение на выходе линии с волновым сопротивлением w [Ом],
% с сопротивлением нагрузки rl [Ом] и коэффициентом ослабления
%  $\exp(-ql/v)$ , равном eps < 1 при наличии потерь как отклик
% на скачок напряжения 1 В на входе линии в момент времени t = 0;
% в отсутствие потерь eps = 1; l - длина линии [м],
% v - скорость распространения волны [м/с].
% Пример обращения: ul_rl(75,1e9,1)
n=1:2001;
ul=zeros(1,2001);
l=101:200:2001; l(11)=2002;
k0=-1; kl=(rl-w)/(rl+w);
for m=0:9
    ul(l(m+1))=(1+kl)*eps*(1-(kl*k0*eps^2)^(m+1))/(1-kl*k0*eps^2);
    ul(l(m+1)+1:l(m+2)-1)=ul(l(m+1));
end
figure; plot((n-1)/100,ul); grid on; ylim([-0.5 2.5]);
xlabel(['t/(l/v) at rl/w = ',num2str(rl/w,3),...
    ' and exp(-ql/v) = ',num2str(eps,3)]);
ylabel('ul [V]');
o=o;
```



3.4. Постоянное напряжение (при $t \rightarrow \infty$) на выходе разомкнутой линии с потерями при подключении к ее входу идеального источника постоянного напряжения \mathcal{E} [В]



$$R_{\text{н}} = 0, R_{\text{н}} = \infty, \mathcal{E} = 1$$

$$k_u|_{x=l} = 1, k_u|_{x=0} = -1$$

Скачки в точке $x = l$:

$$2e^{-ql/v}, -2e^{-3ql/v}, 2e^{-5ql/v}, -2e^{-7ql/v}, \dots$$

– убывающая геометрическая прогрессия с первым членом $\alpha_1 = 2e^{-ql/v}$ и знаменателем $\chi = -e^{-2ql/v}$, $|\chi| < 1$.

При $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} u_l &= \frac{\alpha_1}{1-\chi} = \frac{2e^{-ql/v}}{1+e^{-2ql/v}} = \\ &= \frac{2e^{-ql/v}}{e^{-ql/v}(e^{ql/v} + e^{-ql/v})} = \frac{1}{\operatorname{ch}(ql/v)} \end{aligned}$$

Тот же результат можно найти согласно

$$(1.2.23) \quad u = p w \left[(R_{\text{н}} + w) e^{q(2\tau - x/v)} + (R_{\text{н}} - w) e^{qx/v} \right] \mathcal{E} \quad \text{при } x = l,$$

подставляя в качестве множителя p

$$(1.2.20) \quad p = 1 / \left[(R_{\text{н}} + w) \cdot (R_{\text{н}} + w) \cdot e^{2q\tau} - (R_{\text{н}} - w) \cdot (R_{\text{н}} - w) \right]$$

и имея в виду, что $\tau \stackrel{\text{def}}{=} l/v$:

$$u_l = \frac{w \cdot (R_{\text{н}} + w) \cdot \left(e^{ql/v} + \frac{R_{\text{н}} - w}{R_{\text{н}} + w} \cdot e^{ql/v} \right) \cdot \mathcal{E}}{(R_{\text{н}} + w) \cdot \left[(0 + w) \cdot e^{2ql/v} - (0 - w) \cdot \frac{R_{\text{н}} - w}{R_{\text{н}} + w} \right]} \xrightarrow{w=\infty} \frac{2 \cdot e^{ql/v}}{e^{2ql/v} + 1} \cdot \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{\operatorname{ch}(ql/v)}.$$

Наконец, еще один способ получения того же результата заключается в решении задачи о подключении в момент $t = 0$ источника постоянного напряжения \mathcal{E} с сопротивлением $R_H = w$ ко входу разомкнутой длинной линии при наличии потерь:

при $t = 0$

$$u|_{x=0} = \frac{\mathcal{E}}{2};$$

к моменту $t = l/v$ конца линии с $x = l$ достигает волна напряжения величиной $\frac{\mathcal{E}}{2} \cdot e^{-ql/v}$

и напряжение в точке $x = l$ удваивается, так как $R_H = \infty$:

$$u|_{x=l} = 2 \cdot \left(\frac{\mathcal{E}}{2} e^{-ql/v} \right);$$

одновременно с этим возникает волна напряжения величиной $\frac{\mathcal{E}}{2} e^{-ql/v}$, движущаяся в сторону меньших значений x ;

к моменту времени $t = 2l/v$ эта волна с амплитудой $\frac{\mathcal{E}}{2} e^{-2ql/v}$ достигает начала линии с $x = 0$

и на этом все процессы в линии заканчиваются, поскольку $k_u|_{x=0} = 0$ вследствие того, что $R_H = w$;

таким образом, в момент $t = 2l/v$ напряжение на входе линии становится равным

$$u|_{x=0} = \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} e^{-2ql/v};$$

отсюда следует, что при $t \geq 2l/v$ отношение напряжений $u|_{x=l}/u|_{x=0}$ остается неизменным и равным

$$K|_{t \geq 2l/v} = \frac{2 \cdot \left(\frac{\mathcal{E}}{2} e^{-ql/v} \right)}{\frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} e^{-2ql/v}};$$

поэтому результатом подачи постоянного напряжения \mathcal{E} непосредственно на вход линии (когда $R_H = 0$)

при $t \geq 2l/v$ напряжение на ее выходе будет равным

$$u|_{x=l} = K|_{t \geq 2l/v} \cdot \mathcal{E} = \frac{2 \cdot \left(\frac{\mathcal{E}}{2} e^{-ql/v} \right)}{\frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} e^{-2ql/v}} \cdot \mathcal{E} = \frac{2 \cdot e^{-ql/v}}{1 + e^{-2ql/v}} \cdot \mathcal{E} = \frac{2}{e^{ql/v} + e^{-ql/v}} \cdot \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{\operatorname{ch}(ql/v)}.$$