Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Работа 4.7.1.

Сибгатуллин Булат, ФРКТ

Цель работы:

изучение зависимости показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кристалле; определение главных показателей преломления n_o и n_e – необыкновенной волны в кристалле; наблюдение эффекта полного отражения.

В работе используются:

гелий-неновый лазер, вращающийся столик с неподвижным лимбом, призма из исландского шпата, поляроид.

Описание работы

При падении световой волны на границу изотропной среды в этой среде от границы распространяется одна волна. Если среда анизотропна, то в ней в общем случае возникают две волны, распространяющиеся от границы в разных направлениях и с разными скоростями. Это явление называется *двойным лучепреломлением.*

Плаские волны в кристаллах. В кристаллических средах в отсутствие электрических зарядов и токо справделивы уравнения Максвелла:

$$rot\overrightarrow{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}, \quad rot\overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{1}$$

Если среды прозрачны и однородны, то в них могут распространяться плоские монохроматические волны. Запишем такую волну в комплексном виде:

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\overrightarrow{r})}); \quad \overrightarrow{B} = \overrightarrow{H} = \overrightarrow{H}_0 e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\overrightarrow{r})}); \quad \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D}_0 e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\overrightarrow{r}}$$

Тогда уравнения (1) можем записать в виде:

$$rot\overrightarrow{H} = -i[\overrightarrow{k}\overrightarrow{H}]$$

и аналогично для $rot\overrightarrow{E}$. В результате (1) перейдут в

$$[\overrightarrow{k}\overrightarrow{H}] = -\frac{\omega}{c}\overrightarrow{D}; \quad [\overrightarrow{k}\overrightarrow{E}] = \frac{\omega}{c}\overrightarrow{D}$$

Для характеристики оптических свойств анизотропной среды требуется девять величин ε_{ij}, образующих тензор диэлектрической проницаемости. Он вводится посредством соотношени:

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \quad (i, j = x, y, z). \tag{2}$$

Благодаря тензорной связи между $\overrightarrow{D}$ и $\overrightarrow{E}$ направления этих векторов в кристаллах. Зададим за $\overrightarrow{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\overrightarrow{E}\overrightarrow{H}\right]$ вектор Пойнтинга. Четыре вектора $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{S}$ лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору $\overrightarrow{H}$.

Оптически одноосные кристаллы. Всю совокупность возможных значений тензора диэлектрической проницаемости можно представить при помощи трехосного эллипсоида. Значение диэлектрической проницаемости для любого направления выражается длиной радиуса-вектора эллипсоида, проведенного по этому направлению. Три значения диэлектрической проницаемости $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, соответствующие осям эллипсоидв, называются *главными значениями диэлектрической проницаемости* и соответственно $\sqrt{\varepsilon_x}, \sqrt{\varepsilon_y}, \sqrt{\varepsilon_z}$ *— главными показателями преломления.*

В системе координат, оси которой совпадают с главными осями эллипсоида, тензор диэлектрической проницаемости приводится к диагональному виду, и проекции векторов D и E на оси координат связаны простыми соотношениями:

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_z E_z.$$

В оптически одноосном кристалле, каковым является исландский шпат, эллипсоид диэлектрической проницаемости представляет собой эллипсоид вращения. В нём оптическая ось совпадает с осью вращения эллипсоида диэлектрических проницаемостей. Для главных значений диэлектрических проницаемостей приняты обозначения $\varepsilon_z = \varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_\perp$. В дальнейшем нам потребуется связь между проекциями векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$ на оптическую ось кристалла ($\vec{D}_\parallel$ и $\vec{E}_\parallel$) и на плоскость, перпендикулярную оси ($\vec{D}_\perp$ и $\vec{E}_\perp$):

$$\vec{D}_\parallel = \varepsilon_\parallel \vec{E}_\parallel, \quad \vec{D}_\perp = \varepsilon_\perp \vec{E}_\perp. \tag{3}$$

Волну, распространяющуюся в одноосном кристалле, можно разделить на две линейно поляризованные волны: обыкновенную, вектор электрической индукции $\vec{D}_o$ которой перпендикулярен главному сеению, и необыкновенную, с вектором электрической индукции $\vec{D}_e$, лежащим в главном сечении (рис. 2) *Главным сечением кристалла* называется плоскость, в которой лежит оптическая ось кристалла и нормаль к фронту волны.

Рассмотрим вначале обыкновенную волну, которой вектор $\vec{D}_o$ перпендикулярен главному сечению. Тогда $D_{oz} = 0$, и из условия $D_z = \varepsilon_z E_z$ следует, что $E_{oz} = 0$. Кроме того, так как $D_{oy} = \varepsilon_\perp E_{oy}$ и $D_{ox} = \varepsilon_\perp E_{ox}$, то можно записать

$$\vec{D}_o = \varepsilon_\perp \vec{E}_o. \tag{4}$$

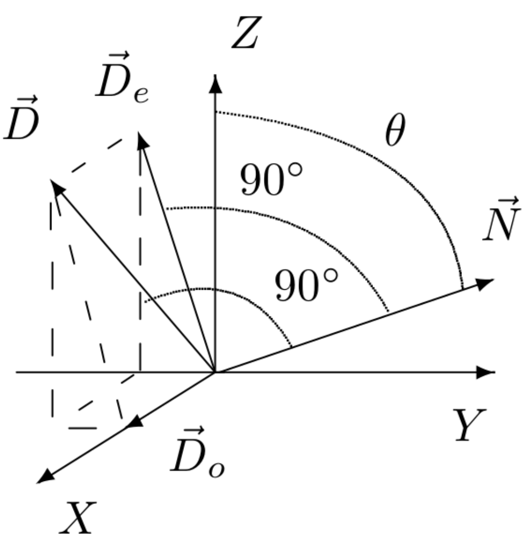

Рис. 1: Расположение векторов $\vec{N}$ и $\vec{D}$ в анизотропной среде: ($\vec{D} = \vec{D}_o + \vec{D}_e; \vec{D}_o \perp \vec{D}_e; \vec{D} \perp \vec{N}$); $\vec{N}$ и $\vec{D}_e$ лежат в плоскости (Z, Y); $\vec{D}_o$ перпендикулярен плоскости (Z, Y)

Таким образом, для обыкновенной волны материальное уравнение имеет такой же вид, как и в изотропной среде. Найдем с помощью этого уравнения скорость распространения обыкновенной волны и соответ- ствующий показатель преломления. Из (2) имеем

$$D_o = \frac{c}{v_o} H_o, \quad H_o = \frac{c}{v_o} E_o$$

или, учитывая (5),

$$\varepsilon_\perp E_o = \frac{c}{v_o} H_o, \quad H_o = \frac{c}{v_o} E_o,$$

откуда

$$v_o = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp}} \quad \text{и} \quad n_o = \frac{c}{v_o} = \sqrt{\varepsilon_\perp}.$$

Таким образом, скорость распространения обыкновенной волны и ее показатель преломления не зависят от направления распространения.

У необыкновенной волны вектор $\vec{D}_e$ не параллелен $\vec{E}_e$, и связь между ними сложнее, чем в (5).

Для того чтобы найти скорость распространения v и показатель преломления нобыкновенной волны $n = c/v$, достаточно найти связь между вектором электрической индукции этой волны $\vec{D}_e$ и проекцией на него вектора электрического поля волны E_{eD}. Тогда, подставляя $D_e = \varepsilon E_{eD}$ в (2), приходим к соотношения

$$\varepsilon E_{eD} = \frac{c}{v} H_e; \quad H_e = \frac{c}{v} E_{eD},$$

формально тождественным с соотношениями для обыкновенной волны. Роль величины $\varepsilon_\perp$ тперь играет величина ε, а показатель преломления необыкновеной волны равен $\sqrt{\varepsilon}$.

Найдём связь между D_e и E_{eD}. Для этого разложим векторы $\vec{D}_e$ и $\vec{E}_e$ на составляющие, параллельные и перпендикулярные оси кристалла:

$$\vec{D}_e = \vec{D}_{e\|} + \vec{D}_{e\perp}.$$

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{e\|} + \vec{E}_{e\perp}.$$

Учитывая (4), находим

$$E_{eD} = \frac{\vec{E}_e \vec{D}_e}{D_e} = \frac{E_{e\|} D_{e\|} + E_{e\perp} D_{e\perp}}{D_e} = \frac{D_{e\|}^2/\varepsilon_\| + D_{e\perp}^2/\varepsilon_\perp}{D_e}$$

или

$$E_{eD} = D_e \left(\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_\|} + \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp} \right) = \frac{D_e}{\varepsilon},$$

где θ — угол между оптической осью Z и волновой нормалью N:

$$\sin\theta = \frac{D_{e\|}}{D_e}, \quad \cos\theta = \frac{D_{e\perp}}{D_e}. \tag{5}$$

Таким образом, ε и соответственно скорость распространения и показатель преломления необыкновенной волны зависят от угла между оптической осью кристалла и направлением распространения волны.

Выпишем выражение для показателя преломления необыкновенной волны $n = \sqrt{\varepsilon}$ через главные показатели преломления n_o, n_e и угол θ:

$$\frac{1}{[n(\theta)]^2} = \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2\theta}{n_o^2}. \tag{6}$$

При $n_o - n_e \ll n_o$ и n_e (для исландского шпата $n_o = 1,655, n_e = 1,485$ для $\lambda = 0,63$ мкм) (7) можно упростить:

$$n(\theta) \approx n_e + (n_o - n_e)\cos^2\theta. \tag{7}$$

Двойное лучепреломление в призме из исландского шпата. Рассмотрим, как по преломлению лучей в кристаллической призме можно определить показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны. В работе исследуется одна из двух призм, составляющих поляризатор (рис. 3). В исследуемой призме ось кристалла лежит в плоскости, параллельной верхней грани призмы, причем она параллельна входной грани призмы (длинному катету). При этом в обыкновенной волне вектор $\vec{D}_o$ пендикулярен верхней грани призмы, а в необыкновенной волне вектор $\vec{D}_e$ параллелен верхней грани.

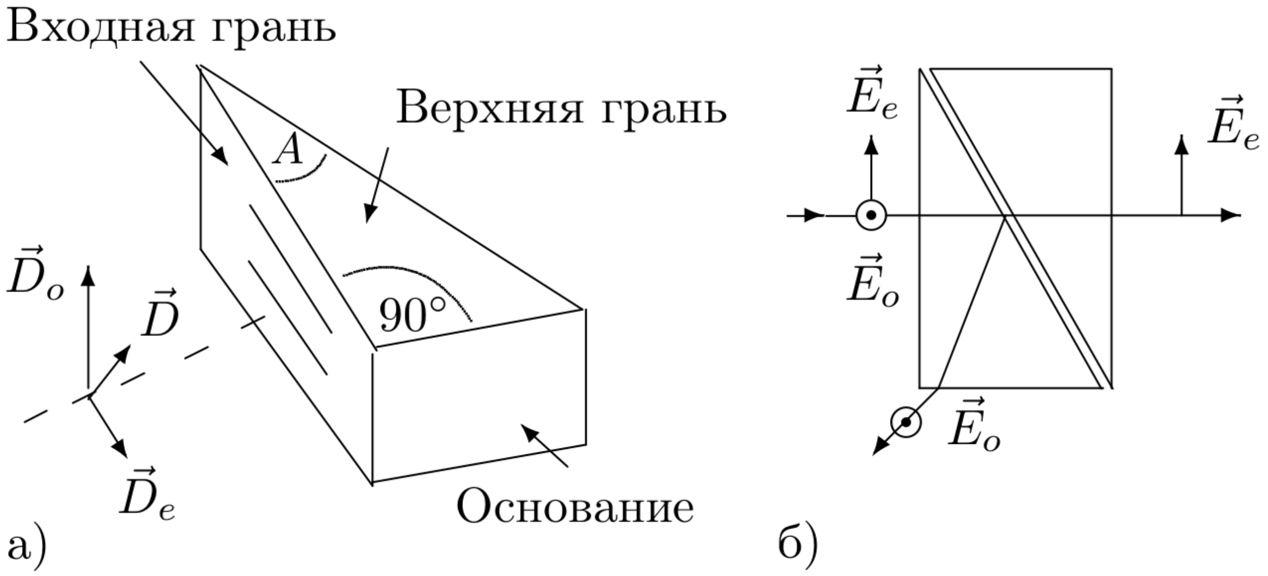

Рис. 2: а) Исследуемая призма из исландского шпата. Штриховкой указано направление оптической оси кристалла. б) Ход лучей в поляризационной призме

Волну, падающую на входную грань призмы, можно представить в виде суммы двух ортогональных линейно поляризованных волн. Преломление этих двух волн на грани призмы можно рассматривать независимо. Волна, в которой вектор $\vec{D}$ направлен вертикально (перпендикулярно верхней грани и оси кристалла), внутри кристалла будет распространяться как обыкновенная. Для этой волны выполняется закон Снеллиуса, а показатель преломления призмы для нее равен n_o. Волна, в которой вектор $\vec{D}$ направлен горизонтально, в кристалле будет распространяться как необыкновенная. Для этой волны также будет выполняться закон Снеллиуса, но с тем отличием, что показатель преломления призмы для нее будет зависеть от угла между осью кристалла и волновой нормалью.

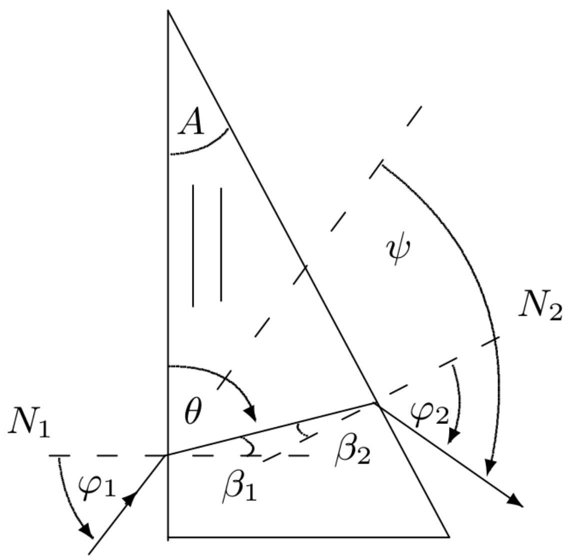

Рис. 3: Ход лучей в призме

Значение показателя преломления и угол, под которым преломилась волна в призме, можно найти, измерив угол падения на входную грань призмы ϕ_1 и угол ϕ_2 на выходе призмы (рис. 4). Запишем закон Снеллиуса для одной из волн применительно к первой и второй граням призмы:

$$\sin\phi = n\sin\beta_1;$$

$$\sin\phi_2 = n\sin\beta_2 = n\sin(A-\beta_1).$$

При этом мы выразили угол падения на вторую грань призмы β_2 через угол преломления на первой грани призмы β_1 и угол при вершине призмы A. Как видно из рис. 4, эти углы связаны простым соотношением $A = \beta_1 + \beta_2$. Учитывая, что угол преломления β_1 связан с углом θ между осью кристалла и волновой нормалью $\vec{N}$ соотношением $\theta + \beta_1 = \pi/2$, находим n и θ:

$$n = \frac{1}{\sin A}\sqrt{\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 + 2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos A}; \tag{8}$$

$$\cos\theta = \frac{\sin\varphi_1}{n}.$$

Для обыкновенной волны n не будет зависеть от угла θ, а для необыкновенной волны зависимость n от θ должна описываться выражением (7).

Показатель преломления призмы из изотропного материала удобно находить по углу нименьшего отклонения луча от первоначального направления. Угол отклонения луча призмой (ψ на рис. 4) минимален для симметричного хода лучей, то есть когда $\varphi_1 = \varphi_2$. Тогда показатель преломления можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\psi_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}, \tag{9}$$

где ψ_m — угол наименьшего отклонения.

Если призма неизотропна, то этой формулой, строго говоря, можно воспользоваться только для обыкновенной волны, которая, как это было показано ранее, распространяется так же, как и в изотропной среде. Но если учесть, что угол при вершине призмы мал, и при угле наименьшего отклонения преломлённый луч в призме распространяется под углом к оси кристалла близким к $\pi/2$, то в качестве оценки формулу (10) можно использовать для определения n_e.