

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е. В. Воронов

СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ И ШУМЫ

Моделирование в среде MATLAB

*Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению «Прикладные математика и физика»*

МОСКВА
МФТИ
2012

УДК 621.37.01(05)
ББК 32.965я73
В75

Рецензенты:

Кафедра физики колебаний физического факультета
Московского государственного университета
(и. о. зав. кафедрой докт. физ.-мат. наук, проф. *С. П. Вятчанин*)

Докт. физ.-мат. наук, проф. *В. Т. Долгополов*

Воронов, Е. В.

В75 Случайные сигналы и шумы. Моделирование в среде
MATLAB : учеб. пособие. – М. : МФТИ, 2012. – 124 с.
ISBN 978-5-7417-0390-8

Проблемы, возникающие при работе со случайными сигналами и шумами, рассматриваются с точки зрения их преобразования в электронных устройствах различного назначения. Особое внимание обращено на обнаружение полезного сигнала в смеси с шумом, в частности, путем синхронного детектирования, когда его осуществление возможно.

Предназначено для студентов, специализирующихся в области общей и прикладной физики.

УДК 621.37.01(05)
ББК 32.965я73

ISBN 978-5-7417-0390-8

© Воронов Е. В., 2012
© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)», 2012

«...мы хотим не только производить вычисления на физические темы, но также, — что важнее для будущего физика и вместе с тем гораздо труднее, — научиться *физически мыслить*.»

Г. С. Горелик. Колебания и волны ([5], с. 542)

«Во многих случаях для понимания и решения... задач ⟨требующих применения теории случайных процессов⟩ достаточна некоторая предварительная подготовка... На этой стадии можно... освободить изложение от множества математических фактов, от педантизма в тех доказательствах, которые целесообразно сохранить, и от многих доказательств вообще. В результате остается скорее не изложение, а *о п и с а н и е* математической теории. Именно поэтому особенно важно иллюстрировать ее утверждения и даже постановку рассматриваемых в ней вопросов конкретными примерами, заимствованными из различных областей радиофизики. Это позволяет создать известный запас наглядных физических представлений, без сомнения, полезных и для последующего...»

С. М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику ([14], с. 9)

В 1953–1957 гг. профессор Габриэль Семенович ГОРЕЛИК (1906–1957) заведовал кафедрой общей физики МФТИ и читал студентам 1-го и 2-го курсов лекции по физике.

С 1947 г. и практически до конца жизни один из классиков отечественной и мировой науки член-корреспондент АН СССР (РАН) профессор Сергей Михайлович РЫТОВ (1908–1996) работал в МФТИ сначала на кафедре общей физики, а затем на кафедре радиофизики, которой заведовал с 1953 по 1978 годы. В течение многих лет он блистательно читал в МФТИ поставленный им курс лекций по статистической радиофизике.

Оглавление

Предисловие	6
Введение	7
Список специализированных программ-функций на компакт-диске ..	8
1. Математическое описание	10
1.1. Ансамбль реализаций. Формальное задание случайного процесса. Стационарность	10
1.2. Характеристики мгновенных значений	12
1.3. Развитие процесса во времени: корреляционная функция, интервал корреляции	13
1.4. Стационарность в узком смысле и в широком смысле ...	15
1.5. Усреднение по времени. Эргодичность процесса. Пример неэргодического процесса	15
1.6. Теорема Винера–Хинчина. Спектральная плотность мощности	16
1.7. «Белый» шум	20
1.8. Пуассоновский процесс с непрерывным временем	21
2. Цифровое моделирование случайных процессов	23
2.1. «Белый» шум	23
2.2. «Усреднение по ансамблю»	24
2.3. Точность приближения (эмпирические данные)	25
3. Физическое описание	31
3.1. Тепловой шум	31
3.2. Преобразование линейных электрических цепей с источниками теплового шума	33
3.3. Дробовой шум	37
3.4. Шумы в полупроводниках	39
3.5. $1/f$ -шум	42

4. Прохождение случайного процесса через линейную систему .	44
4.1. Мощность шума на выходе	44
4.2. Примеры	47
4.3. Эффективная шумовая полоса	52
4.4. Корреляционная функция выходного процесса при «белом» шуме на входе	54
4.5. Распределение мгновенных значений процесса на выходе линейного устройства	58
4.6. Простейший узкополосный фильтр	60
4.7. Согласование «шумящего» источника сигнала с входной цепью «шумящего» усилителя. Коэффициент шума	70
5. Узкополосный гауссовский случайный процесс	80
5.1. Гауссовские случайные величины и процессы: основные определения и свойства	80
5.2. Разложение на квадратурные составляющие	84
5.3. Огибающая и фаза узкополосного гауссовского процесса	92
6. Обнаружение полезного сигнала в смеси полезного сигнала с шумом	97
6.1. Статистические свойства суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума	97
6.2. Асинхронное (диодное) детектирование. Подавление слабого сигнала шумом	109
6.3. Синхронное детектирование	113
7. Пример регистрации сигналов в физическом эксперименте ..	116
Заключение	122
Литература	123

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Случайные сигналы и шумы» — последняя тема в годовом учебном курсе, назначение которого заключается в том, чтобы познакомить студентов, специализирующихся в области общей и прикладной физики, с основными идеями радиоэлектроники.

У пособия в целом две равноправные тесно переплетающиеся составные части: (1) текст, в котором последовательно вводятся ключевые понятия и сообщаются самые важные сведения, и (2) совокупность примеров, полученных путем моделирования в системе MATLAB. На прилагаемом компакт-диске приведены в виде готовых М-файлов все упоминаемые в пособии специально написанные с этой целью программы-функции.

Предполагается, что учащийся имеет возможность параллельно с чтением пособия обращаться к компьютеру и разглядывать как сами программы, о которых идет речь в тексте, так и результаты их исполнения. К готовым программам следует относиться как к отправной точке, к тому, от чего нужно отталкиваться в стремлении лучше усвоить те немногие факты и закономерности, на которые обращено внимание в пособии. Желательно, чтобы студенту хотелось по ходу дела лишний раз обратиться к соответствующей функции с другими числовыми значениями параметров, нежели это сделано в исходном примере. Будет совсем замечательно, если у студента пробудится желание самостоятельно в большей или меньшей степени изменить готовую программу по существу и посмотреть, что получится. Студент сам может судить о достигнутом успехе, если он оказывается в состоянии предвидеть и/или объяснить полученные им новые результаты вычисления или моделирования.

Автор считает своим долгом обратиться со словами благодарности к коллегам Ю. В. Денисову, Л. П. Куклеву, А. Л. Ларину, В. В. Рождественскому, Л. В. Стрыгину и другим. В процессе многолетней совместной работы с ними — в атмосфере доброжелательности и готовности к сотрудничеству — сложилось представление автора о том, чему и как нужно учить студентов в физико-техническом институте. Это представление и нашло свое отражение в данном пособии.

Наверное, не удалось избежать досадных опечаток, промахов и утверждений, корректность которых может быть поставлена под сомнение. Наперед спасибо всем, кто сочтет возможным сообщить о замеченных недостатках по адресу ev.voronov@gmail.com. При обращении по тому же адресу можно получить список уже отмеченных ошибок и необходимых исправлений.

ВВЕДЕНИЕ

Случайные процессы являются предметом изучения в разных областях знания, в частности в математике, в общей физике и в электронике. Хотя язык и методы рассмотрения в этих областях существенно различаются, имеет место тесное переплетение того, что там делается, в отношении постановки решаемых задач и получаемых результатов.

Изложению материала, который составляет содержание глав 4 – 6 и может быть назван «электронно-техническим подходом к проблеме случайных сигналов и шумов», предпослано краткое математическое и физическое описание случайных (стохастических) процессов с единственной целью продемонстрировать связь между различными подходами к сходным по существу проблемам и познакомить с терминологией, являющейся более или менее общей для упомянутых областей.

Демонстрируемый здесь взгляд на проблему в целом ближе всего к тому, что принято называть «статистической радиофизикой» (см. В. Б. Давенпорт и В. Л. Рут [6]. С. М. Рытов [14]), а конкретные примеры, приводимые в данном пособии, подробно рассмотрены повсюду, где речь идет о так называемой «статистической радиотехнике» (см., например, Л. П. Куклев [9], гл. 7, Е. И. Манаев [10] и др.).

Компьютерное моделирование – это эксперимент.

Целью любого эксперимента является проверка вывода, полученного в той или иной мере посредством индукции, а также того, что в принятой модели учтены все существенные детали и обстоятельства; иногда посредством эксперимента убеждаются в справедливости аксиом, служащих основанием развитой теории.

Моделирование представляет собой исключительный случай, когда полностью и исчерпывающим образом описаны условия проведения эксперимента. Они – в тексте программы. В предположении, конечно, что надежным является используемое программное обеспечение. При моделировании случайных процессов самым уязвимым местом являются датчики случайных чисел. Датчики *rand* и *randn* в системе MATLAB вполне годятся, по крайней мере, для наших целей. Хороший студент не преминет сам в какой-то момент проверить и убедиться, что выдаваемые этими датчиками очередные значения можно считать некоррелированными и что они имеют соответственно равномерное и нормальное распределение с желаемыми числовыми параметрами.

Список специализированных программ-функций на компакт-диске

- rayleigh_U** Распределение Рэлея для огибающей узкополосного гауссовского шума
- rice_phi** Распределение Райса для фазы суммы гармонического сигнала и гауссовского узкополосного шума
- rice_U** Распределение Райса (обобщенное рэлеевское распределение) для огибающей суммы гармонического сигнала и гауссовского узкополосного шума
- rsn_00** Гауссовский «белый» шум на входе интегрирующей цепи и сигнал на ее выходе, представление об ансамбле реализаций
- rsn_01** Определение спектральной плотности мощности гауссовского «белого» шума при моделировании (усреднение по M отрезкам длины N)
- rsn_10** Интегрирующая цепь с «белым» гауссовским шумом на входе: спектральная плотность мощности и корреляционная функция сигнала на выходе интегрирующей цепи
- rsn_11** «Нормализация» случайного процесса в результате прохождения через линейное устройство (интегрирующая цепь со случайным телеграфным сигналом на входе)
- rsn_20** Резонансный усилитель с гауссовским «белым» шумом на входе: спектральная плотность мощности шума на выходе
- rsn_21** Резонансный усилитель с гауссовским «белым» шумом на входе: корреляционная функция сигнала на выходе резонансного усилителя
- rsn_30** Ансамбль реализаций шума на выходе резонансного усилителя с гауссовским «белым» шумом на его входе
- rsn_31** Разложение узкополосного гауссовского случайного процесса на квадратурные составляющие

rsn_32	Огибающая и фаза узкополосного гауссовского случайного процесса
rsn_40	Огибающая и фаза суммы узкополосного гауссовского случайного процесса (шума) и детерминированного гармонического сигнала
rsn_50	Асинхронное (диодное) обнаружение (детектирование) радиоимпульса на фоне узкополосного гауссовского шума, подавление слабого сигнала шумом; синхронное детектирование
rsn_60	Проверка статистических гипотез: обнаружение детерминированного гармонического сигнала на фоне узкополосного гауссовского шума
tr_gauss	Проверка того, что распределение мгновенных значений является нормальным
tr_poisson	Проверка того, что распределение мгновенных значений является экспоненциальным
tr_rayleigh	Проверка того, что распределение мгновенных значений является распределением Рэлея
tr_rice_phi	Проверка того, что распределение мгновенных значений фазы является распределением Райса
tr_rice_U	Проверка того, что распределение мгновенных значений огибающей является обобщенным рэлеевским распределением (распределением Райса)
tr_uniform	Проверка того, что распределение мгновенных значений является равномерным

Принятые сокращения

д. с. п. м. — двусторонняя спектральная плотность мощности
 о. с. п. м. — односторонняя спектральная плотность мощности

1. Математическое описание

1.1. Ансамбль реализаций.

Формальное задание случайного процесса.

Стационарность

Можно сказать, что случайный процесс — это функция $x(t)$, значения которой при любом возможном t являются случайными величинами.

Мы ограничимся только одномерными действительными случайными процессами, у которых аргумент t — время, и в большинстве случаев под функцией $x(t)$ будем понимать напряжение, которое можно наблюдать в какой-то точке электрической или электронной схемы, например, с помощью осциллографа. Будем считать, что время t имеет размерность [с], а величина x измеряется в вольтах, то есть имеет размерность [В] (кроме тех мест, где речь будет идти об электрическом токе).

Первым примером может служить интегрирующая RC -цепь (рис. 1.1) с гауссовским «белым» шумом $x(t)$ на входе и результирующим случайным процессом $y(t)$ на выходе. Изображенные на рис. 1.2 сигналы «выведены на экран» программой **rsn_00** (*rsn* — *Random Signals & Noise*). Комментарий в программе позволяет в деталях проследить, как именно порождается сигнал $x(t)$ и как он преобразуется в сигнал $y(t)$. Рис. 1.2 получен в результате запуска данной программы со значениями параметров, указанными в *Примере обращения*; t_0 — середина интервала времени длительности $T = N \cdot dt$, в пределах которого осуществляется моделирование (N — число выборок по оси времени, dt — интервал дискретизации по времени, $dt = 1/fs$ [с], fs — частота дискретизации [Гц]).

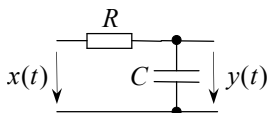


Рис. 1.1. Интегрирующая цепь

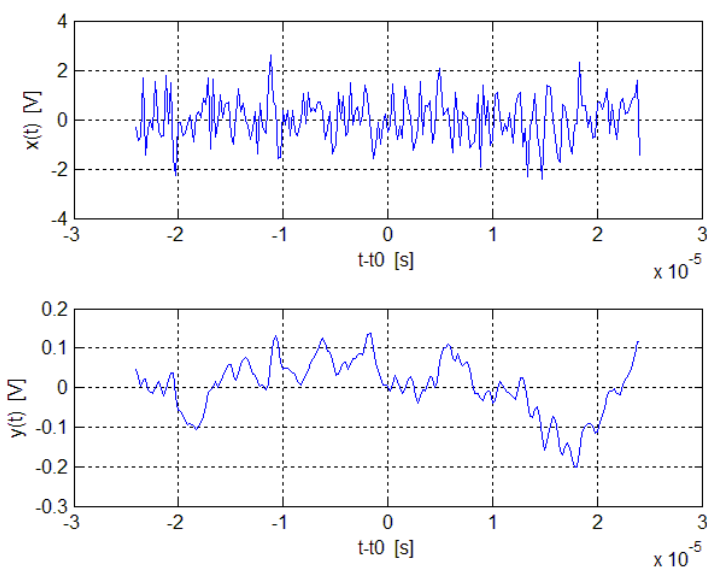


Рис. 1.2. Пример случайных процессов на входе и на выходе интегрирующей цепи

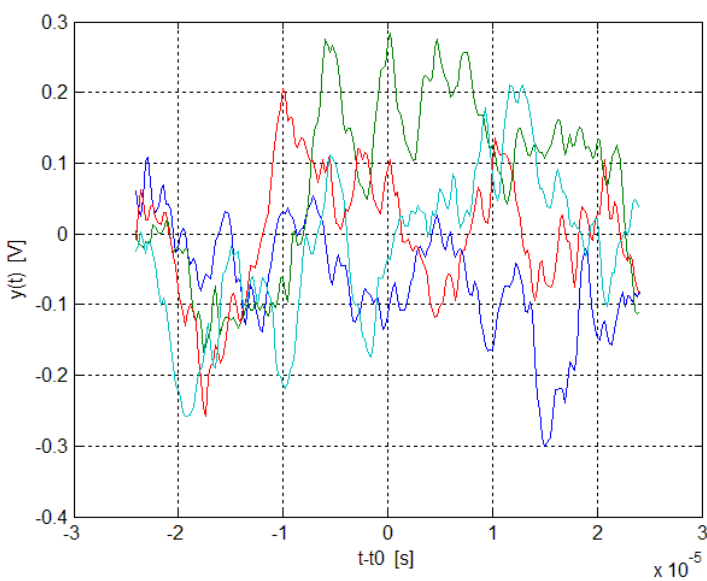


Рис. 1.3. Иллюстрация к представлению об ансамбле реализаций

Центральное понятие теории случайных процессов – представление об *ансамбле реализаций* $\{x(t)\}$ как о совокупности всех возможных реализаций $x(t)$, каждая из которых есть некоторая функция времени t на интервале $-\infty < t < \infty$. Для каждой отдельной реализации имеет место однозначность по t .

На рис. 1.3 показаны отрезки четырех независимых реализаций случайного процесса на выходе интегрирующей цепи. Программа **rsn_00** позволяет последовательно выводить другие примеры реализаций, как указано во вступительном комментарии.

Пусть x может принимать любые действительные значения. Тогда процесс задан (полностью описан), если для любого целого $n \geq 1$ и для любых моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ определена плотность вероятности $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$. Величина $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) dx_{t_1} dx_{t_2} \dots dx_{t_n}$ представляет собой вероятность того, что в моменты t_1, t_2, \dots, t_n реализация данного процесса пройдет в пределах узких интервалов $(x_{t_1} + dx_{t_1}), (x_{t_2} + dx_{t_2}), \dots, (x_{t_n} + dx_{t_n})$.

Случайный процесс *стационарен*, если $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ не зависит от сдвига всего набора точек t_1, t_2, \dots, t_n по оси времени. Другими словами, у стационарного процесса $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ зависит только от разностей $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_n - t_1$.

1.2. Характеристики мгновенных значений

а) *Среднее значение*. По определению

$$\overline{x_t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_t p(x_t) dx_t ,$$

где горизонтальная черта сверху означает *усреднение по ансамблю (реализаций)*. Для стационарного процесса $p(x_t) \equiv p(x)$:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx ;$$

\bar{x} – среднее значение процесса в точке. Плотность вероятности $p(x)$ имеет размерность, обратную размерности случайной величины x , так что величина $p(x)dx$ безразмерна.

б) Среднее значение квадрата стационарного процесса в точке:

$$\overline{x^2} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx.$$

в) **Дисперсия.** Для стационарного процесса

$$\sigma_x^2 \equiv \sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx = \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

При $\bar{x} = 0$ дисперсия – это то же, что средний квадрат: $\sigma^2 = \overline{x^2}$.

Величину σ^2 называют **мощностью**, рассеиваемой на сопротивлении 1 Ом; применительно к случайным процессам в нашем случае размерность мощности $[B^2]$ (или $[A^2]$).

σ – это среднеквадратическое (эффективное) значение случайного процесса (шума).

1.3. Развитие процесса во времени: корреляционная функция, интервал корреляции

а) **Корреляционная функция** $R(t, \tau)$ – простейший способ охарактеризовать развитие процесса во времени:

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &\stackrel{\text{def}}{=} \overline{(x_t - \bar{x}_t)(x_{t+\tau} - \bar{x}_{t+\tau})} = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} (x_t - \bar{x}_t)(x_{t+\tau} - \bar{x}_{t+\tau}) p(x_t, x_{t+\tau}) dx_t dx_{t+\tau}. \end{aligned}$$

У стационарного процесса $R(t, \tau)$ не зависит от t : $R(t, \tau) = R(\tau)$. Далее речь пойдет только о стационарных процессах.

б) $R(\tau)$ – четная функция τ , в чем можно убедиться путем замены переменной τ на $\tau' = -\tau$.

в) $R(0) = \overline{(x - \bar{x})^2}$. Если $\bar{x} = 0$, то

$$R(0) = \overline{x^2} = \sigma^2 \geq |R(\tau)| \Big|_{\text{при } \tau \neq 0},$$

как это следует из неравенства

$$\overline{(x_t \pm x_{t+\tau})^2} = \underbrace{\overline{x_t^2}}_{\sigma^2} \pm 2 \overline{x_t x_{t+\tau}} + \underbrace{\overline{x_{t+\tau}^2}}_{\sigma^2} \geq 0.$$

г) $R(\tau)$ – это мера продолжительности последствия, характеристика статистической связи между значениями процесса, разнесенными на τ по оси времени.

д) **Интервал корреляции:**

$$\tau_{\text{кorr}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau}{R(0)}.$$

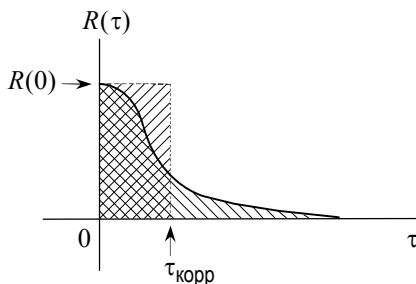


Рис. 1.4. К определению интервала корреляции

При $R(\tau) = \text{const} \cdot \delta(\tau)$ говорят, что речь идет о δ -коррелированном случайном процессе (см. ниже).

1.4. Стационарность в узком смысле и в широком смысле

Принято называть процесс стационарным *в узком смысле*, когда все $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ не зависят от сдвига по времени.

Процесс стационарен *в широком смысле*, когда от времени не зависят только \bar{x} , $\overline{x^2}$ и $R(\tau)$.

1.5. Усреднение по времени. Эргодичность процесса. Пример неэргодического процесса

Пусть $\mathcal{F}(x(t))$ – некоторый оператор над $x(t)$. Тогда по определению среднее по времени равно

$$\overline{\mathcal{F}(x(t))}^T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(x(t)) dt,$$

где горизонтальная черта сверху с символом T справа от нее как раз и означает *усреднение по времени*.

Стационарный процесс называется *эргодическим*, если

$$\overline{\mathcal{F}(x(t))}^T \rightarrow \overline{\mathcal{F}(x(t))} \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

Другими словами, с течением времени в одной реализации проявляются все статистические свойства процесса. В частности, при $\bar{x} = 0$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t - \tau) dt \quad (\text{В. Б. Давенпорт и В. Л. Рут [6], с. 127}).$$

Условие эргодичности сводится к тому, что с течением времени должна пропадать связь между мгновенными значениями процесса, то есть должно выполняться следующее предельное соотношение:

$$|R(\tau)| \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty.$$

Точнее, достаточно, чтобы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |R(\tau)| d\tau = 0 .$$

Пример неэргодического процесса – электрические флуктуации в контрольной точке у не всегда исправно работающей аппаратуры. В этом случае ансамбль реализаций случайного процесса, наблюдаемого в контрольной точке, может состоять из нескольких непересекающихся подансамблей, и сколь угодно длительное наблюдение за одной реализацией не позволяет составить представление о процессе в целом.

1.6. Теорема Винера–Хинчина. Спектральная плотность мощности

[Норберт Винер (Norbert Wiener), 1894–1964; Александр Яковлевич Хинчин, 1894–1959]

Дальнейшее рассмотрение основано на применении преобразования Фурье к реализациям случайного процесса (С. И. Баскаков [1]), и прежде чем приступить к этому, необходимо сделать ряд предварительных замечаний.

Предварительные замечания

Согласно классическому анализу функцию $x(t)$ можно представить в виде

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega , \quad (1.1)$$

где

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt , \quad (1.2)$$

если функция $x(t)$ абсолютно интегрируема и удовлетворяет так называемым условиям Дирихле.

Однако представления (1.1) и (1.2) сохраняют свой смысл и в том случае, когда упомянутые ограничения не соблюдены, как это часто имеет место в отношении реализаций случайного процесса, если только допус-

тить, чтобы функция $S(j\omega)$ могла состоять из обобщенных функций типа δ -функции или содержать такие обобщенные функции.

Полагая последнее замечание выполненным, будем считать, что всегда соотношение (1.1) можно трактовать как представление $x(t)$ в виде суммы бесконечного числа бесконечно близких по частоте гармонических составляющих $e^{j\omega t}$ с амплитудами $\frac{1}{2\pi} S(j\omega) d\omega$, где $S(j\omega)$ – из (1.2).

Если $x(t)$ – напряжение, то размерность $S(j\omega)$ [В·с] или [В/Гц].

Случайный процесс над осью частот

С учетом сказанного каждой реализации $x(t)$ случайного процесса $\{x(t)\}$ над осью времени соответствует некоторая вполне определенная комплекснозначная функция частоты $S(j\omega)$. Перебирая различные временные реализации процесса $\{x(t)\}$, мы переходим от одной реализации $S(j\omega)$ ансамбля возможных реализаций $\{S(j\omega)\}$ над осью частот к другой. Случайный процесс $\{x(t)\}$ над осью времени порождает соответствующий случайный процесс $\{S(j\omega)\}$ над осью частот.

Каждой реализации $x(t)$ соответствует своя реализация $S(j\omega)$, поэтому усреднение по ансамблю над осью времени [перебор всех возможных реализаций $x(t)$] в точности эквивалентно усреднению по ансамблю над осью частот [перебору всех возможных реализаций $S(j\omega)$]. В частности,

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega.$$

$$\overline{x_t} = 0 \text{ при любом } t \text{ только в том случае, если } \overline{S(j\omega)} = 0.$$

Корреляционная функция стационарного процесса

Пусть, как и ранее, $x(t)$ – действительный стационарный случайный процесс и $\bar{x} = 0$. Употребляемый при выкладках знак комплексного сопряжения * существен только в том случае, когда он относится к комплексным значениям $S(j\omega)e^{j\omega t}$:

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \overline{x_t^* \cdot x_{t+\tau}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \overline{S^*(j\omega) \cdot S(j\omega')} e^{-j\omega t} e^{j\omega'(t+\tau)} d\omega d\omega' = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega'\tau} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S^*(j\omega) \cdot S(j\omega')} e^{j(\omega'-\omega)t} d\omega. \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

У стационарного процесса $R(\tau)$ не зависит от t , а это возможно только тогда, когда

$$\overline{S^*(j\omega) \cdot S(j\omega')} = \underbrace{2\pi}_{\text{рад}} \cdot \underbrace{G(\omega)}_{B^2/\Gamma_{\text{ц}}=B^2 \cdot \text{с}} \cdot \underbrace{\delta(\omega-\omega')}_{1/(\text{рад/с})}. \quad (1.4)$$

Размерности:

Подставляя (1.4) в (1.3), имеем

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega') e^{j\omega'\tau} d\omega'. \quad (1.5)$$

Из (1.4) следует, что случайный процесс $\{S(j\omega)\}$ над осью частот является δ -коррелированным, то есть отсутствует какая-либо статистическая связь между случайными величинами $S(j\omega)$ и $S(j\omega')$, сколь бы ни были близки значения ω и ω' .

Спектральная плотность мощности

Функция $G(\omega)$, появившаяся в (1.4) в качестве размерного коэффициента при δ -функции, носит название ***спектральной плотности мощности стационарного случайного процесса***. Ее размерность $[B^2/\Gamma_{\text{ц}}]$ или $[B^2 \cdot \text{с}]$.

Соотношение (1.5) представляет собой обратное преобразование Фурье функции $G(\omega)$ с действительными значениями. Преобразование Фурье взаимно однозначно, поэтому

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.6)$$

Равенства (1.5) и (1.6) составляют утверждение ***теоремы Винера–Хинчина***: корреляционная функция и спектральная плотность мощности стационарного процесса образуют пару преобразования Фурье.

Приведем без доказательства другое выражение для спектральной плотности мощности $G(\omega)$ стационарного случайного процесса $x(t)$, которое часто применяется на практике.

Берется отрезок $x_T(t)$ реализации $x(t)$ длительности T :

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } t \in (0, T), \\ 0 & \text{вне этого интервала,} \end{cases}$$

и пусть $S^{(T)}(j\omega)$ – преобразование Фурье от $x_T(t)$. Тогда

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{|S^{(T)}(j\omega)|^2}. \quad (1.7)$$

Доказательство можно найти в (В. Б. Давенпорт и В. Л. Рут [6]).

Следствия теоремы Винера–Хинчина

Если $\bar{x} = 0$, то

$$R(0) = \sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G(2\pi f) df = \int_0^{\infty} G^+(2\pi f) df, \quad (1.8)$$

где f – частота в [Гц], $G(\omega)$ – **двусторонняя** спектральная плотность мощности, являющаяся для действительного случайного процесса $x(t)$ четной функцией ω [это следует из того, что $R(-\tau) = R(\tau)$]. $G^+(\omega)$ – **односторонняя** спектральная плотность мощности:

$$G^+(\omega) = 2 G(\omega) \text{ при } \omega \geq 0.$$

Иногда одностороннюю спектральную плотность мощности как функцию частоты f обозначают буквой N : $G^+(2\pi f) \equiv N(f)$.

Поскольку σ^2 – это мощность случайного процесса (шума) в целом, из (1.8) следует, что по своему физическому смыслу функция $G^+(f)$ показывает, как мощность этого шума распределена вдоль оси частот. Интегрирование в (1.8) означает, что мощность шума в целом **складывается** из бесконечного числа бесконечно близких по частоте бесконечно малых мощностей $G^+(f) df$, с которыми естественно связать элементарные со-

ставляющие процесса, чей спектр сосредоточен в полосе df вблизи точки f на оси частот.

Другими словами, ничему не противоречит предположение о том, что стационарный случайный процесс (шум) $x(t)$ в целом представляет собой суперпозицию элементарных составляющих $\Delta x_f(t)$, сосредоточенных вблизи отдельных значений f :

$$x(t) \sim \sum_f \Delta x_f(t); \quad (1.9)$$

при этом мощность каждой из элементарных составляющих равна

$$\overline{[\Delta x_f(t)]^2} = G^+(f) \Delta f,$$

и такое представление должно быть справедливо в предположении, что $\Delta f \rightarrow 0$.

Более того, δ -коррелированность случайного процесса $\{S(j\omega)\}$ над осью частот, порожденного исходным действительным стационарным случайным процессом $\{x(t)\}$ над осью времени, подталкивает нас к мысли, что элементарные составляющие $\Delta x_f(t)$, относящиеся к разным значениям частоты, скорее всего, являются **независимыми** элементарными случайными процессами (бесконечно малой мощности). Это становится еще более правдоподобным, поскольку равенство (1.8) означает, что дисперсии элементарных составляющих $G^+(f) df$ суммируются, образуя дисперсию σ^2 процесса в целом, как если бы речь шла о нахождении дисперсии суммы независимых случайных величин.

1.7. «Белый» шум

Если $G^+(f)$ – константа, равная, скажем, N_0 [В²/Гц], то, согласно (1.5), $R(0) = \sigma^2 = (N_0 / 2) \cdot \delta(0) = \infty$, причем функция $\delta(\tau)$ имеет размерность [1/с].

1.8. Пуассоновский процесс с непрерывным временем

Наблюдение целого ряда физических явлений сводится к регистрации последовательности событий, возникающих в случайные моменты времени независимо одно от другого. Один из возможных примеров – вылет α - или β -частиц из радиоактивного вещества. С математической точки зрения такая последовательность является процессом, носящим название пуассоновского, относительно которого чаще всего интересуются распределением числа событий, которые могут произойти в пределах заданного отрезка времени.

Но определенный интерес представляет также и другая характеристика такого процесса, а именно плотность вероятности для интервала времени между соседними событиями. Сам процесс с событиями, происходящими в отдельные моменты времени, иногда называют импульсным.

Предположим, что для рассматриваемого процесса выполнены следующие условия:

- произойдет или не произойдет событие в момент времени t , не зависит от истории событий, предшествующих моменту t ;
- вероятность того, что отдельное событие произойдет в пределах малого интервала времени Δt , возрастает пропорционально длительности этого интервала; другими словами, вероятность возникновения отдельного события на малом промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ равна $\mu \cdot \Delta t$;
- вероятность того, что за тот же промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ произойдет два или большее число событий, пренебрежимо мала.

Пусть момент начала наблюдения на оси времени $t = 0$ совпадает с моментом, когда произошло предыдущее событие. Спрашивается, какова вероятность $p(t) \cdot dt$ того, что следующее событие произойдет на интервале времени $(t, t + dt)$?

Разобьем отрезок времени $(0, t)$ на $N \gg 1$ отрезков времени длительности Δt : в дальнейшем устремим N к бесконечности, а Δt – к нулю.

При конечном $N = t/\Delta t$ вероятность того, что на первых $(N-1)$ -м отрезках длительности Δt очередное событие не произойдет, а на последнем таком интервале событие наступит, согласно сделанным предположениям, очевидно, равна

$$p(t) \cdot dt \approx (1 - \mu \Delta t)^{N-1} \cdot \mu \Delta t. \quad (1.10)$$

Рассмотрим натуральный логарифм первого сомножителя в последнем выражении. Поскольку $N \gg 1$, пренебрежем 1 в показателе степени, а логарифм выражения, заключенного в скобки, — в силу малости $\mu\Delta t$, — заменим первым членом в разложении логарифма в ряд:

$$\ln\left[(1-\mu\Delta t)^{N-1}\right] \approx N \cdot \ln\left[(1-\mu\Delta t)\right] \approx N \cdot (-\mu\Delta t) = -\mu \cdot N\Delta t = -\mu t;$$

следовательно,

$$(1-\mu\Delta t)^{N-1} \approx e^{-\mu t}.$$

Подставляя этот результат в приближенное выражение (1.10) для вероятности того, что интервал между соседними событиями окажется равным t , и устремляя Δt к нулю (то есть заменяя Δt на dt), получим

$$p(t) \cdot dt = \mu e^{-\mu t} \cdot dt.$$

Таким образом,

$$p(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

Чтобы прояснить физический смысл параметра μ , найдем среднее значение случайной величины t :

$$\int_0^{\infty} t \cdot \mu e^{-\mu t} dt = - \int t \cdot d(e^{-\mu t}) = - \left[t e^{-\mu t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\mu t} dt \right] = - \frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\mu}.$$

Отсюда следует, что μ — это величина, обратная среднему времени между событиями.

В литературе среднее значение времени между событиями часто обозначают символом λ , и поэтому окончательно

$$p(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-t/\lambda}. \quad (1.11)$$

Стоит обратить внимание на тот факт, что, согласно логике вывода выражения (1.11) для $p(t)$, в оговоренных условиях плотность вероятности для *времени ожидания первого события, начиная с произвольного момента времени*, также равняется $p(t)$.

2. Цифровое моделирование случайных процессов

Как станет ясно в дальнейшем, в электронике на каждом шагу возникает вопрос: велик ли шум на входе или на выходе какого-то устройства? Чтобы ответить на него, часто нужно знать, как мощность шума распределена по частоте, то есть необходимы сведения о его спектральной плотности мощности.

Нахождение или задание спектральной плотности мощности случайного процесса при дискретном представлении самого случайного сигнала и его спектра требуют определенной аккуратности.

Одиночная реализация случайного процесса $x(t)$ при моделировании всегда бывает представлена набором из N временных выборок x_0, x_1, \dots, x_{N-1} , следующих друг за другом с интервалом $\Delta t = 1/f_s$, где f_s – частота дискретизации. Предполагается, что спектр процесса не выходит за пределы полосы частот $(-f_{гр}, f_{гр})$, причем $f_{гр} \leq f_s/2$.

Значения временных выборок $\{x_k, k = 0, 1, \dots, N-1\}$ либо вырабатываются подходящим датчиком случайных чисел, либо возникают в результате того или иного преобразования исходного случайного процесса. В общем случае необходимо осуществить наблюдение довольно большого числа реализаций одного и того же процесса, чтобы вынести обоснованное суждение о его спектральной плотности мощности.

Прежде чем рассмотреть такой общий случай, покажем, что иногда ответить на вопрос о спектральной плотности мощности оказывается довольно просто.

2.1. «Белый» шум

Пусть N временных выборок возникают в результате обращения к датчику случайных чисел с одной и той же дисперсией $\sigma^2 [B^2]$ при частоте дискретизации f_s [Гц]. Если выполнено условие независимости чисел, вырабатываемых датчиком, это эквивалентно тому, что процесс, выраженный таким набором, является δ -коррелированным, и, значит, его спектральная плотность мощности должна быть константой в пределах полосы частот $(-f_{гр}, f_{гр})$, занимаемой данным сигналом. Естественно

предполагать, что такой случайный сигнал занимает всю возможную в этих условиях полосу, то есть что $f_{\text{гр}} = f_s / 2$.

В результате мощность процесса σ^2 должна быть равномерно распределена по частоте, и поэтому двусторонняя спектральная плотность мощности (д. с. п. м.) $G(f)$ равна $\sigma^2 / (2f_{\text{гр}}) = \sigma^2 / f_s$ [В²/Гц]. Следовательно, односторонняя спектральная плотность мощности (о. с. п. м.) имеет значение $N_0 \equiv G^+(f) = 2 G(f) = 2 \sigma^2 / f_s$ на интервале $(0, f_{\text{гр}})$ и, в частности, в точках $f = n \cdot \Delta f$, $n = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$, где $\Delta f = 1/T$, а $T = N \cdot \Delta t$ – длительность рассматриваемого отрезка реализации (размерность Δf и f [Гц], размерность Δt и T [с]).

2.2. «Усреднение по ансамблю»

Возможно, приведенное выше рассуждение кому-то не покажется убедительным. Ниже мы вернемся к дискретному «белому» шуму как к частному случаю общего подхода к проблеме нахождения спектральной плотности мощности случайного процесса.

Этот общий подход базируется на выражении (1.7) для спектральной плотности мощности, которое ради удобства здесь повторено:

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{\left| S^{(T)}(j\omega) \right|^2}, \quad (2.1)$$

где $S^{(T)}(j\omega)$ – преобразование Фурье отрезка $x_T(t)$ реализации случайного процесса $x(t)$ длительности T .

При моделировании отрезками реализации $x_T(t)$ оказываются те самые наборы временных выборок x_0, x_1, \dots, x_{N-1} , занимающие T [с] на оси времени, $T = N \cdot \Delta t = N/f_s$.

Частотные выборки $S^{(T)}(j2\pi f)$ для значений частоты $n \cdot \Delta f$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, должны быть получены из отсчетов S_n , которыми нас обеспечивает дискретное преобразование Фурье (ДПФ), имея в виду известную связь между $S^{(T)}(jn2\pi\Delta f)$ и S_n (см. «Начала...» [4], с. 24–25), а именно:

$$S^{(T)}(jn2\pi\Delta f) = \Delta t \cdot S_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.2)$$

Наконец, усреднение по ансамблю возможных реализаций означает на практике перебор достаточно большого конечного числа M независимых наборов временных выборок $\{x_k, k = 0, 1, \dots, N-1\}$, для каждого из которых осуществляется ДПФ с последующим почленным возведением в квадрат по модулю. Складывая получаемые таким образом значения $|S^{(T)}(jn2\pi\Delta f)|^2$ в каждой точке $f_n = n \cdot \Delta f, n = 0, 1, \dots, N-1$, и деля результат на T и на M , мы получаем приближенные значения д. с. п. м. $G^{(M)}(2\pi f_n)$, которые, очевидно, будут тем ближе к истинным значениям д. с. п. м., чем больше $T = N \cdot \Delta t$ и чем больше M :

$$G^{(M)}(2\pi f_n) = \frac{(\Delta t)^2 \cdot \overline{|S_n|^2}^{\{M\}}}{N \cdot \Delta t} = \frac{\overline{|S_n|^2}^{\{M\}}}{N \cdot f_s}, \quad (2.3)$$

где горизонтальной чертой с символом $\{M\}$ справа от нее обозначено усреднение по M реализациям $\{x_k, k = 0, 1, \dots, N-1\}$ отсчетов ДПФ S_n для n -й точки f_n на оси частот $[f_n = n \cdot \Delta f, \Delta f = 1/T = 1/(N \cdot \Delta t)]$, взятых по модулю и возведенных в квадрат.

2.3. Точность приближения (эмпирические данные)

О качестве оценки спектральной плотности мощности при моделировании дает представление следующий пример.

В программе **rsn_01** гауссовский «белый» шум создается стандартным датчиком случайных чисел с нормальным распределением, среднеквадратическое значение которого задается, а среднее полагается равным нулю.

На рис. 2.1 – 2.4 на небольшом интервале по оси частот продемонстрированы различные стадии «усреднения по ансамблю» согласно правилу (2.3). При этом число временных выборок в каждой реализации было выбрано равным $N = 2^{20}$ (чуть больше 10^6), дисперсия шума равнялась $\sigma^2 = 1 \text{ В}^2$, а частота дискретизации – $f_s = 2^{22}$ (около 4 МГц). На рис. 2.1 приведены деленные на N и на f_s значения квадрата модуля ДПФ для одиночной реализации [параметр M в (2.3) равен 1]. Следующие рисунки показывают, с какой скоростью результаты усреднения по независимым реализациям сходятся к некоторой определенной оценке.

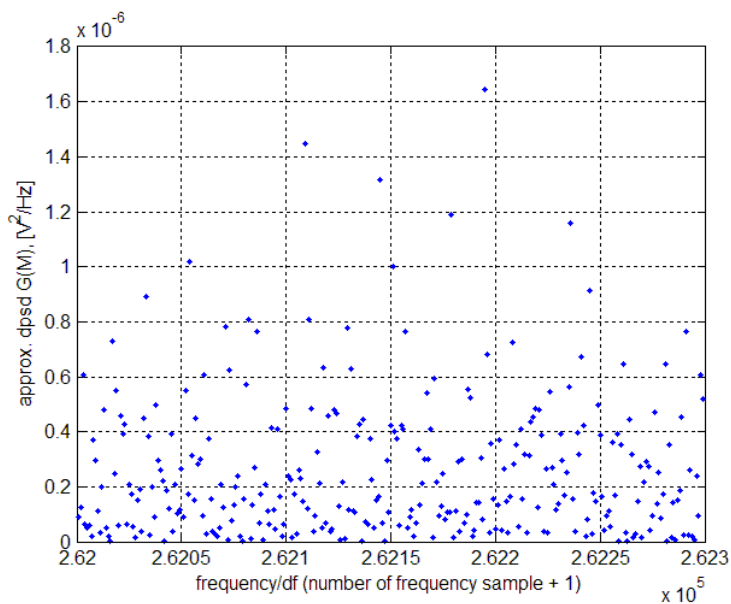


Рис. 2.1. Первый шаг «усреднения по ансамблю» (нет усреднения, $M = 1$)

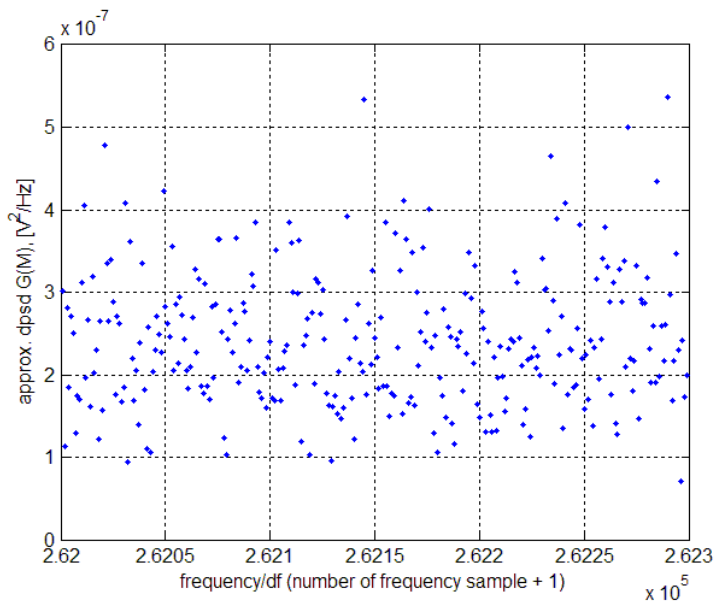


Рис. 2.2. Усреднение по 10 независимым реализациям ($M = 10$)

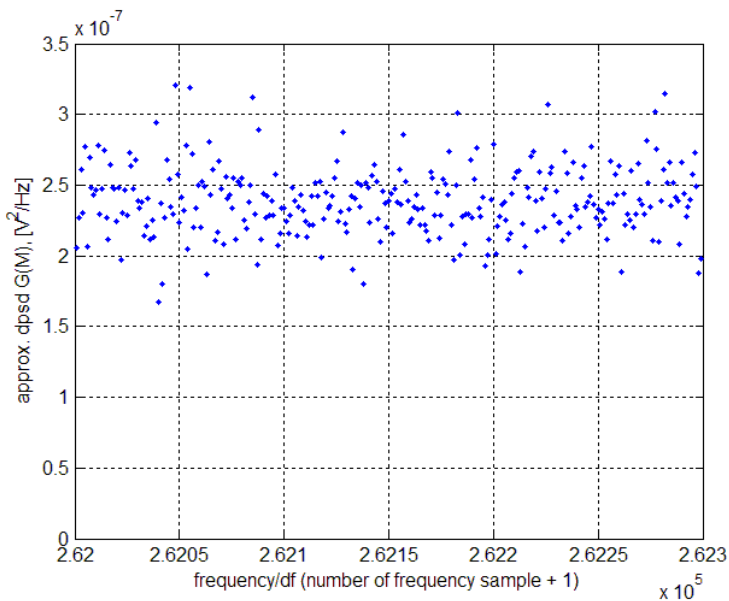


Рис. 2.3. Усреднение по 100 независимым реализациям ($M = 100$)

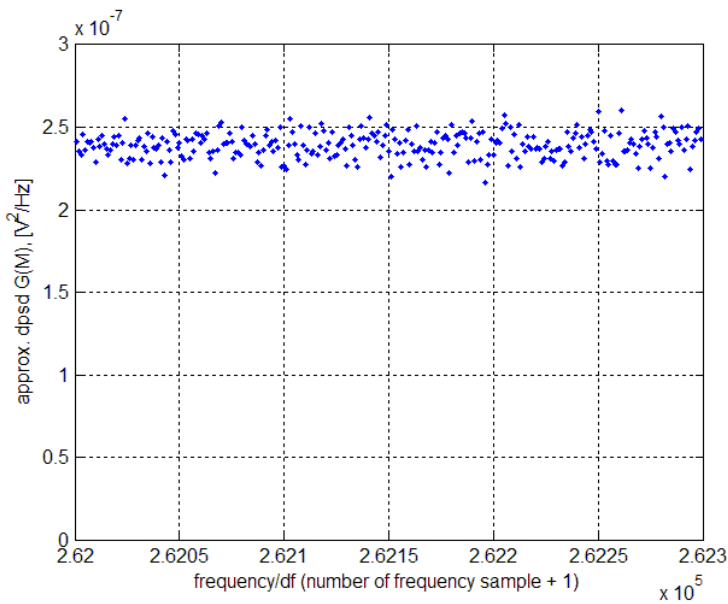


Рис. 2.4. Усреднение по 1000 независимых реализаций ($M = 1000$)

Рис. 2.5 является итоговым по отношению к усреднению по 1000 реализаций: здесь $N0(f_n) = 2G^{(1000)}(f_n)$ – значения односторонней спектральной плотности мощности для $f_n = n\Delta f$, $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$, где $\Delta f = f_s/N$ (в данном случае $\Delta f = 4$ Гц). Горизонтальной красной линией указано среднее значение $N0$, оказавшееся в этом эксперименте равным $4.7686 \cdot 10^{-7}$.

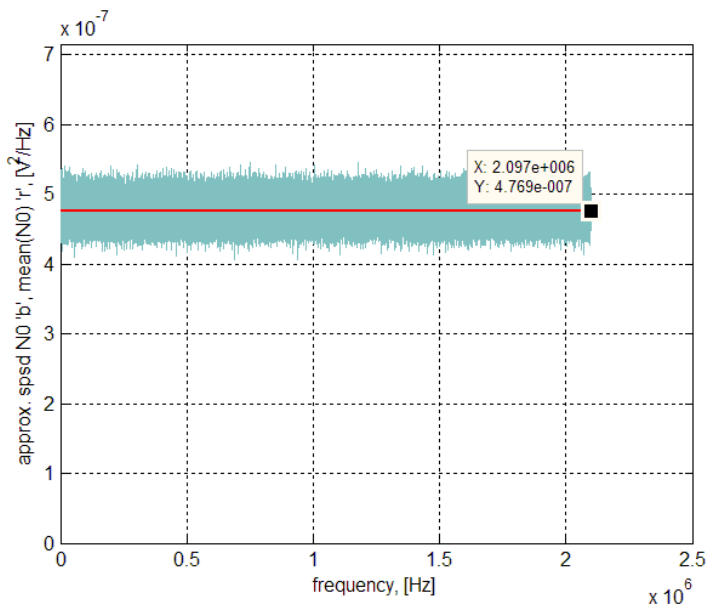


Рис. 2.5. Односторонняя спектральная плотность мощности как результат усреднения по 1000 реализаций

Отметим сразу, что согласно приведенным в п. 2.1 рассуждениям ожидаемое значение постоянной для «белого» шума односторонней спектральной плотности мощности на интервале от 0 до $f_{\text{гп}} = f_s/2$ должно равняться $2\sigma^2/f_s$. Выполненное вручную сравнение в принятых в программе обозначениях дало следующий результат:

$$(\text{mean}(N0) - 2 \cdot \text{var_n} / f_s) / (2 \cdot \text{var_n} / f_s) = 2.8978e-006.$$

При разглядывании графика на рис. 2.5 может сложиться впечатление, что разброс значений $N0(f_n)$ по отношению к среднему значению $N0$ велик. На самом деле это не совсем так. Сравнивая рис. 2.4 и 2.5, относящиеся к одним и тем же результатам усреднения по 1000 реализаций, нужно кажущуюся большой ширину полосы по обе стороны горизонтальной красной линии признать чисто визуальным эффектом, связанным с очень плотным размещением на рис. 2.5 полумиллиона точек, когда редкие большие отклонения от среднего искажают общую картину. В действительности количественная оценка степени разброса значений спектральной плотности мощности, полученных путем моделирования, имеет вид:

$$\text{sqrt}(\text{var}(N0 - \text{mean}(N0))) / \text{mean}(N0) = 3.1688\text{e-}002,$$

то есть чуть больше 3%.

Наконец, очень важной проверкой того, можно ли доверять спектральной плотности мощности, полученной путем моделирования, служит попытка «проинтегрировать» ее по всей области частот, занимаемой этим случайным процессом, с целью определения мощности процесса. В непрерывном случае справедливо соотношение (1.8), которое при дискретном задании спектральной плотности мощности в отдельных точках на оси частот можно приближенно выразить в виде суммы:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} G^+(f) df \approx \sum_{n=0}^{N/2-1} G^+(f_n) \cdot \Delta f, \quad (2.4)$$

где предполагается, что значение $G^+(f_n)$ односторонней спектральной плотности мощности остается одним и тем же на всем малом по величине интервале Δf в окрестности точки f_n .

Правило (2.4) определения σ^2 по значениям $G^+(f_n)$ должно в принципе давать неплохой результат в любом случае, то есть при любой зависимости G^+ от частоты, если только N достаточно велико, а Δf мало. Заканчивая разбор нашего конкретного примера, применим это правило к рассматриваемому гауссовскому «белому» шуму, для которого $G^+(f_n) \equiv N0(n)$, $n = 0, 1, \dots, N/2-1$. Не выходя из програм-

мы в режиме отладки и производя соответствующие вычисления в командном окне MATLAB, находим оценку дисперсии шума:

```
sum(N0*df) = 1.0000e+000
```

с погрешностью по отношению к заданной нами дисперсии σ^2 (var_n), равной 1,

```
(sum(N0*df)-var_n)/var_n = 2.8978e-006.
```

Из этого следует, в частности, что в условиях, близких к тем, в каких проводился наш эксперимент, 3%-й разброс в значениях $N0(n)$ практически не сказывается на точности оценки суммарной мощности процесса.

3. Физическое описание

3.1. Тепловой шум

В результате броуновского движения электронов в резисторе при температуре, не равной абсолютному нулю, на его концах возникает хаотически меняющееся напряжение, называемое тепловым шумом или шумом Джонсона (J. B. Johnson), впервые наблюдавшего этот случайный процесс, или шумом Найквиста (H. Nyquist), который нашел его спектральную плотность мощности (Г. С. Горелик [5], гл. X, XI; Ф. Рейф [12]).

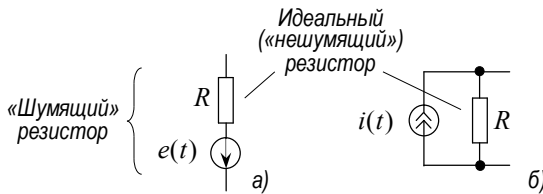


Рис. 3.1. Эквивалентные схемы «шумящего» резистора

Принято считать, что «шумящий» резистор справедливо представлять в виде эквивалентной схемы, приведенной на рис. 3.1а.

Следуя рассуждениям, содержащимся в п. 1.6 и приводящим к соотношению (1.9), можно считать, что ЭДС теплового шума $e(t)$ является суперпозицией элементарных составляющих $\Delta e_f(t)$, относящихся к отдельным частотам:

$$e(t) \sim \sum_f \Delta e_f(t).$$

Согласно Найквисту

$$\overline{[\Delta e_f(t)]^2} = G_e^+(f) \cdot \Delta f = 4kTR \cdot \Delta f, \quad (3.1)$$

где $G_e^+(f) \equiv G_e^+ = 4kTR$ [В²/Гц] – односторонняя спектральная плотность мощности для ЭДС теплового шума: $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура [К], R – сопротивление резистора [Ом].

В соответствии с теоремой об эквивалентном генераторе справедливо также представление в виде, указанном на рис. 3.1б:

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} \sim \sum_f \Delta i_f(t), \quad \Delta i_f(t) = \frac{\Delta e_f(t)}{R},$$

$$\overline{[\Delta i_f(t)]^2} = \frac{[\overline{\Delta e_f(t)}]^2}{R^2} = 4kT \frac{1}{R} \cdot \Delta f = 4kTG \cdot \Delta f = G_i^+(f) \cdot \Delta f,$$

где $G = 1/R$ – проводимость резистора R , а $G_i^+(f) \equiv G_i^+ = 4kTG$ – односторонняя спектральная плотность мощности для шумового тока $i(t)$.

Сама по себе формула Найквиста (3.1) описывает тепловой шум как «белый» шум, поскольку указанная в ней спектральная плотность мощности равна константе на всех частотах.

Более поздние исследования показали, что на достаточно больших частотах f [Гц] и при очень низких температурах T [К] спектральная плотность мощности теплового шума уже не остается постоянной:

$$G_e^+(f) = 4R \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \quad (3.2)$$

(Ф. Н. Х. Робинсон [13]), где $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Заметное отличие от значений, задаваемых формулой (3.1), происходит начиная с частоты, на которой выполняется приближенное равенство $hf \approx kT$, то есть (при комнатной температуре) начиная с частоты порядка $6 \cdot 10^{12}$ Гц (что соответствует длине волны $\lambda = c/f \approx 0.05$ мм). Согласно (3.2) $G_e^+(f) \rightarrow 4kTR$ при $f \rightarrow 0$, когда $e^{hf/kT} \approx 1 + hf/kT$.

Другое ограничение, с которым приходится считаться, возникает при попытке воспользоваться соотношением (3.1) применительно к резисторам с достаточно большим сопротивлением R . Действительно, при $R \rightarrow \infty$ мощность теплового шума в пределах ограниченной полосы частот Δf становится бесконечно большой. Но это противоречит здравому смыслу: при $R = \infty$ между выводами резистора *ничего не включено*, имеет место разрыв, нет никаких носителей электрического заряда, так

что нечему совершать броуновское движение. Выход из этого парадокса принято находить в том, что при $R \rightarrow \infty$ нельзя пренебрегать емкостью между выводами резистора. Вот тогда отмеченное противоречие снимается; подробнее этот случай рассмотрен в 4.2.

Распределение мгновенных значений x_t теплового шума, ограниченного полосой частот Δf , является гауссовским с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 4kTR \cdot \Delta f$:

$$p(x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_t^2}{2\sigma^2}}.$$

3.2. Преобразование линейных электрических цепей с источниками теплового шума

При наличии нескольких независимых источников теплового шума энергетическая характеристика их совместного действия сводится к сложению мощностей отдельных составляющих по принципу сложения дисперсий независимых случайных величин. Традиционно считается, что реактивные элементы не шумят.

Последовательное и параллельное включение резисторов

Очевидно, что при последовательном включении шумящих резисторов R_1 и R_2 (рис. 3.2) напряжение $e_{AB}(t)$ между выводами \mathcal{A} и \mathcal{B} в любой момент времени равно сумме значений ЭДС $e_1(t)$ и $e_2(t)$ в тот же самый момент времени. Поэтому из представления каждой из этих шумовых ЭДС в виде суперпозиции элементарных составляющих, относящихся к различным значениям частоты f :

$$e_1(t) \sim \sum_f \Delta e_{1f}(t), \quad e_2(t) \sim \sum_f \Delta e_{2f}(t), \quad e_{AB}(t) \sim \sum_f \Delta e_{ABf}(t),$$

следует, что

$$\Delta e_{ABf}(t) = \Delta e_{1f}(t) + \Delta e_{2f}(t),$$

и, значит, в силу независимости случайных величин $\Delta e_{1f}(t)$ и $\Delta e_{2f}(t)$

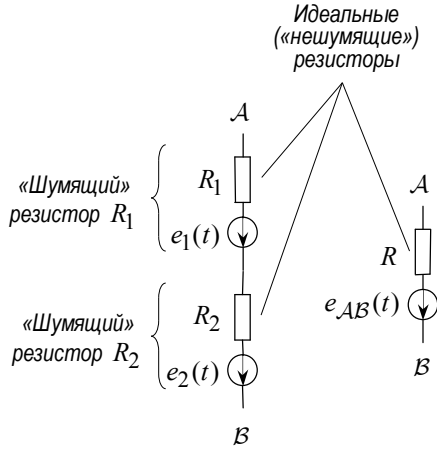


Рис. 3.2. Последовательное включение «шумящих» резисторов: $R = R_1 + R_2$

$$\begin{aligned} \overline{[\Delta e_{ABf}(t)]^2} &= \overline{[\Delta e_{1f}(t)]^2} + \overline{[\Delta e_{2f}(t)]^2} = \\ &= 4kTR_1 \cdot \Delta f + 4kTR_2 \cdot \Delta f = 4kT(R_1 + R_2) \cdot \Delta f. \end{aligned}$$

Другими словами, $G_{e_{AB}}^+ = 4kTR$, где $R = R_1 + R_2$.

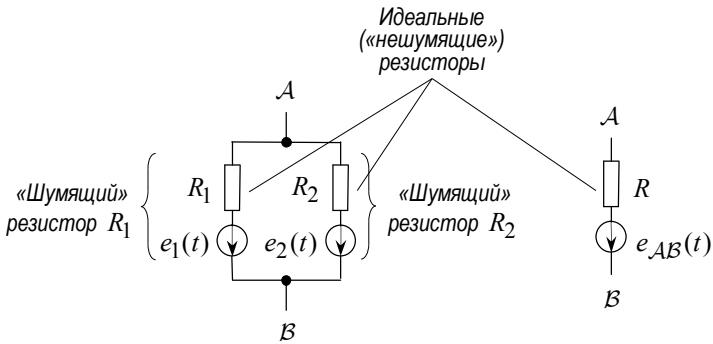


Рис. 3.3. Параллельное включение «шумящих» резисторов: $R = R_1 \parallel R_2$

При параллельном включении «шумящих» резисторов (рис. 3.3)

$$\begin{aligned}
 e_{AB}(t) &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot e_1(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot e_2(t), \\
 \Delta e_{ABf}(t) &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \Delta e_{1f}(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \Delta e_{2f}(t), \\
 \overline{[\Delta e_{ABf}(t)]^2} &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 \cdot \overline{[\Delta e_{1f}(t)]^2} + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 \cdot \overline{[\Delta e_{2f}(t)]^2} = \\
 &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 \cdot 4kTR_1 \cdot \Delta f + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 \cdot 4kTR_2 \cdot \Delta f = 4kT \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \Delta f = \\
 &= 4kT (R_1 \parallel R_2) \cdot \Delta f,
 \end{aligned}$$

откуда следует, что в данном случае $G_{e_{AB}}^+ = 4kTR$, где $R = R_1 \parallel R_2$.

Таким образом, при наличии последовательно и/или параллельно включенных ветвей, содержащих источники теплового шума, можно вначале выполнить обычное преобразование электрической цепи по правилам Кирхгофа без учета шумовых ЭДС, сведя схему к одному единственному резистору, и только потом последовательно с ним включить источник шумовой ЭДС со спектральной плотностью мощности по формуле Найквиста, в которой должно быть указано сопротивление резистора, являющегося результатом выполненного преобразования.

Параллельный колебательный LC-контур

Один из самых распространенных способов учитывать потери в колебательном LC-контуре состоит в том, что для анализа свойств контура в целом последовательно с одним из реактивных элементов включается резистор с подходящим сопротивлением r (рис. 3.4а). Обычно считается, что именно этот резистор является единственным источником шума в контуре с односторонней спектральной плотностью $4kTr$.

Комплексное сопротивление Z_{AB} между выводами A и B (рис. 3.4а) можно представить в виде суммы активного сопротивления R и реактивного сопротивления jX , зависящих от частоты:

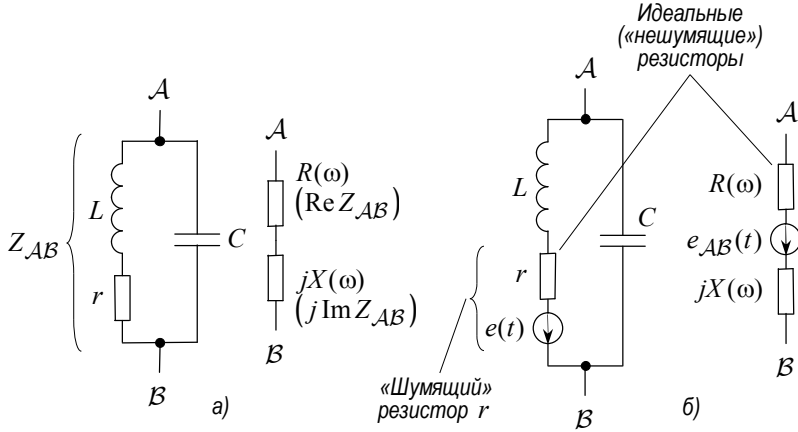


Рис. 3.4. Параллельный колебательный LC-контур:

$$R(\omega) = \frac{r}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (r\omega C)^2}$$

$$\begin{aligned} Z_{AB} &= \frac{(r + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{r + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + jr\omega C} = \\ &= \frac{(r + j\omega L) \cdot [(1 - \omega^2 LC) - jr\omega C]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (r\omega C)^2} = \\ &= \frac{r}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (r\omega C)^2} + j \frac{\omega L \cdot (1 - \omega^2 LC) - r^2 \omega C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (r\omega C)^2} = \\ &= \text{Re } Z_{AB} + j \text{Im } Z_{AB} = R(\omega) + jX(\omega). \end{aligned}$$

В схеме справа на рис. 3.4б источником теплового шума, эквивалентного шуму резистора r , является резистор с сопротивлением $R(\omega)$, поэтому для шумовой ЭДС $e_{AB}(t)$ между выводами A и B справедливы соотношения

$$e_{AB}(t) \sim \sum_f \Delta e_{ABf}(t),$$

$$\overline{[\Delta e_{ABf}(t)]^2} = 4kT \frac{r}{[1 - (2\pi f)^2 LC]^2 + [r(2\pi f)C]^2} \cdot \Delta f.$$

Следовательно, в данном случае односторонняя спектральная плотность мощности шума между выводами \mathcal{A} и \mathcal{B} является функцией частоты:

$$G_{e_{AB}}^+ = 4kTR(2\pi f), \quad (3.3)$$

где

$$R(2\pi f) = \frac{r}{[1 - (2\pi f)^2 LC]^2 + [(2\pi f)rC]^2}. \quad (3.4)$$

Ниже (в 4.2) этот вывод будет подкреплён и другими рассуждениями.

3.3. Дробовой шум

Электрический ток — это, конечно, движение носителей заряда (электронов) под действием электрического поля. Однако это движение — по причинам различной физической природы — не является вполне упорядоченным. Поэтому число электронов, в единицу времени пересекающих воображаемую границу раздела, не остается строго постоянным, а колеблется около некоторого среднего значения. Следовательно, величину тока $i(t)$ нужно считать состоящей из постоянной составляющей I_0 и флуктуирующей переменной составляющей $\delta i(t)$:

$$i(t) = I_0 + \delta i(t).$$

Второе слагаемое представляет собой шум, называемый *дробовым*: своим наличием он обязан дискретности заряженных частиц и случайному характеру их движения.

Классическим примером дробового шума является анодный ток лампового диода, работающего в режиме насыщения (рис. 3.5). В этом режиме к аноду прикладывается достаточно большое постоянное положительное напряжение относительно катода, чтобы все испускаемые разогретым катодом электроны устремлялись к аноду под действием электрического

поля. (В режиме насыщения вблизи катода нет облака электронов, в котором устанавливалось бы равновесие между электронами, испускаемыми раскаленным катодом, и электронами, попадающими на катод вследствие хаотического движения в облаке и оседающими на катоде.)

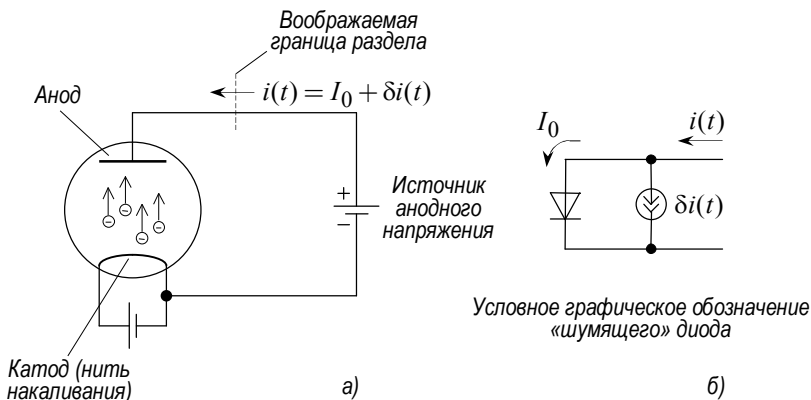


Рис. 3.5. Схема включения лампового диода (а) и ее эквивалентная схема (б)

Электроны вылетают с раскаленного катода в случайные моменты времени независимо один от другого. Их поступление на анод представляет собой пуассоновский поток событий. Постоянная составляющая анодного тока I_0 зависит от среднего числа электронов, испускаемых катодом в единицу времени, то есть определяется температурой катода. Для флуктуирующей части анодного тока $\delta i(t)$ справедливы следующие соотношения:

$$\delta i(t) \sim \sum_f \Delta \delta i_f(t), \quad \overline{[\Delta \delta i_f(t)]^2} = G_{\delta i}^+(f) \cdot \Delta f = 2q_e I_0 \cdot \Delta f,$$

где $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ [Кл] – заряд электрона (В. Б. Давенпорт и В. Л. Рут [6]).

Формула для односторонней спектральной плотности дробового шума $G_{\delta i}^+(f) = 2q_e I_0$ носит название *формулы Шоттки*; размерность $G_{\delta i}^+(f)$ [А²/Гц].

Формула Шоттки для спектральной плотности мощности дробового шума справедлива в диапазоне частот от 0 герц до частот порядка величины, обратной времени пролета электронов от катода к аноду (несколько

сотен мегагерц). Измерительные приборы с ламповыми диодами можно использовать в качестве эталонных источников шума.

3.4. Шумы в полупроводниках и полупроводниковых приборах

Флуктуации в полупроводниках весьма разнообразны по своей физической природе, а изучение шумовых свойств полупроводниковых приборов не поспевает за усовершенствованием технологии их изготовления и возникновением новых конструкций.

Здесь кратко описаны лишь самые существенные из очевидных источников шумов.

Шум генерации–рекомбинации

Основное электрическое свойство полупроводника — его способность проводить электрический ток — зависит от того, как много в нем свободных носителей заряда.

Представим себе образец полупроводника с донорной примесью, у которого свободными носителями заряда служат электроны. Из-за тепловых колебаний его кристаллической решетки число носителей в единице объема в отдельные моменты времени $n(t)$ является случайной величиной. Оно может увеличиваться в результате разрыва связи между одним из валентных электронов и остальной частью атома исходного полупроводника, служащего основой; при этом происходит возникновение (генерация) пары свободных носителей электрон–дырка. С другой стороны, значение $n(t)$ может уменьшаться, если в процессе случайного блуждания по кристаллической решетке электрон заполняет собой «вакантное место», переставая быть свободным носителем; говорят, что при этом имеет место рекомбинация электрона и дырки.

Пусть n_0 — среднее число носителей (в единице объема) при данной температуре в состоянии равновесия, когда среднее число рождающихся в единицу времени свободных носителей $g(n_0)$ (скорость генерации) равно среднему числу носителей $r(n_0)$, исчезающих за то же время вследствие рекомбинации (скорость рекомбинации). Для $\delta n(t) = n(t) - n_0$ принято считать, что односторонняя спектральная плотность мощности имеет вид

$$G_{\delta n}^+ = 4 \cdot \overline{[\delta n(t)]^2} \cdot \frac{\tau_{\delta n}}{1 + (\omega \tau_{\delta n})^2},$$

где «мощность» флуктуаций числа носителей $\overline{[\delta n(t)]^2}$ определяется концентрацией примеси и температурой полупроводника, а $\tau_{\delta n}$ – среднее время жизни носителей.

Последняя величина по определению представляет собой константу в показателе экспоненты, возникающей согласно следующему рассуждению: рассматривается подансамбль флуктуаций числа носителей $\delta n(t)$ с начальным (в момент $t = 0$) отклонением от нулевого среднего ($\overline{\delta n} = 0$), равным $\delta n(0)$; тогда, спустя время t ,

$$\overline{\delta n(t)} = \delta n(0) \cdot e^{-t/\tau_{\delta n}},$$

где символ усреднения (горизонтальная черта сверху) в данном случае означает усреднение по указанному подансамблю. Постоянная времени $\tau_{\delta n}$ определяется значением

$$\left(\frac{dr(n)}{dn} - \frac{dg(n)}{dn} \right) \Big|_{n=n_0},$$

то есть тем, как резко скорости генерации и рекомбинации зависят от концентрации свободных носителей в окрестности точки равновесия при $n = n_0$.

Дробовой шум

Дискретность значений электрического тока, кратных заряду электрона (дырки), по меньшей мере двояко проявляется в полупроводниковых приборах. Проще всего это объяснить на примере биполярного n – p – n -транзистора, схематически изображенного («в разрезе») на рис. 3.6а.

Эмиттерный ток образуют те электроны левого на рисунке n -слоя, которые, совершая хаотическое блуждание по кристаллической решетке, попадают на границу обедненного слоя и оказываются в состоянии преодолеть потенциальный барьер, остающийся в результате приложения извне отпирающего смещения $U_{БЭ}$. Преодоление отдельными электронами потенциального барьера на стыке эмиттер–база – той же самой физической природы, что и испускание электронов нагретым катодом в ламповом диоде. Поэтому для спектральной плотности мощности флуктуаций эмиттерного тока справедлива формула Шоттки (см. 3.3).

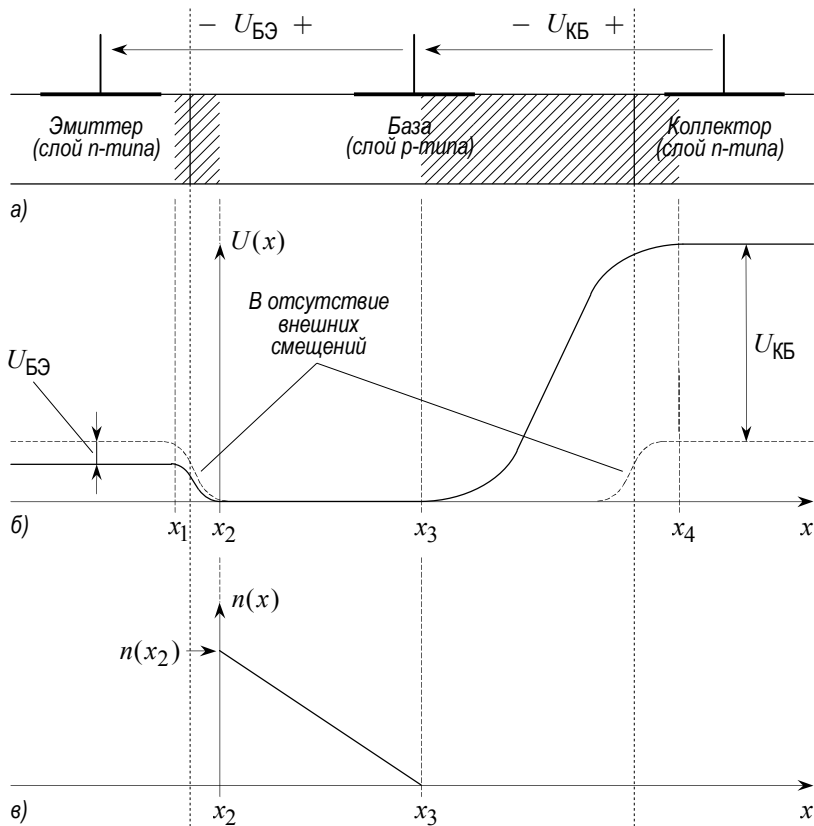


Рис. 3.6. Схематическое изображение биполярного n - p - n -транзистора (а), распределение электрического потенциала вдоль оси, проведенной перпендикулярно границам раздела между слоями с проводимостью типа n и p , (б) и зависимость концентрации неосновных носителей в базе от пространственной координаты x (в)

Другая разновидность дробового шума — это добавление к коллекторному току носителей, возникающих в результате случающихся время от времени разрывов соответствующих связей и образования пар электрон–дырка в заштрихованном на рис. 3.6а объединенном слое по обе стороны границы между базой и коллектором. Электрическое поле в этой области с напряженностью $dU(x)/dx \neq 0$ (рис. 3.6б) обеспечивает сравнительно быстрое удаление этих носителей влево и вправо по оси x , так что здесь они уже не могут участвовать в процессах рекомбинации.

Шум тока диффузии

В базе на интервале (x_2, x_3) (рис. 3.6б) электрического поля нет, но электроны, инжектированные из эмиттера в базу в точке x_2 , в конце концов достигают коллекторного перехода в точке x_3 и затягиваются в коллектор. Происходит это по той простой причине, что в любой точке между x_2 и x_3 свободных носителей (в данном случае электронов) слева больше, чем справа, и поэтому в результате их хаотического блуждания пересечение ими воображаемой границы раздела в этой точке слева направо происходит чаще, чем в обратном направлении. Это — диффузия.

Среднее значение тока диффузии определяется градиентом плотности носителей $dn(x)/dx$ (рис. 3.6в). Однако, поскольку сам по себе процесс диффузии носит статистический характер, в коллекторном токе будут иметь место флуктуации.

1/f-шум

Низкочастотный 1/f-шум, о котором чуть подробнее говорится ниже в п. 3.5, наблюдается во всех экспериментах с полупроводниками и полупроводниковыми приборами и во всех приложениях с их использованием. Однако общепринятого объяснения механизма возникновения такого шума в полупроводниках пока нет.

Количественное соотношение между отдельными составляющими шума в полупроводниковом приборе может быть различным. Доля каждой разновидности шума в шуме в целом, а также распределение мощности шума по частоте в очень сильной степени зависят от условий наблюдения (в частности, от режима полупроводникового прибора по постоянному току) и от особенностей его конструкции.

3.5. 1/f-шум

Так называемый 1/f-шум — это шум, односторонняя спектральная плотность мощности которого на частотах ниже, грубо говоря, 1 кГц по мере уменьшения частоты f ведет себя как функция $1/f$. В литературе можно встретить другие названия этого шума (фликкер-шум, шум мерцания), но теперь они встречаются реже.

1/f-шум наблюдается практически во всех физических системах и вызывает много вопросов, например: (1) почему в совершенно разных физи-

ческих системах шум имеет так много общего и почему низкочастотные спектры таких шумов столь похожи? (2) если поведение спектральной плотности по закону $1/f$ сохраняется вплоть до нулевой частоты, то интеграл от нее расходится и мощность шума оказывается бесконечной, — как разрешить этот парадокс? Эта проблема имеет самый общий характер и до конца не решена. За исключением нескольких частных случаев сама физическая причина возникновения $1/f$ -шума остается не понятной, хотя имеющиеся данные позволяют считать, что механизм его возникновения в различных случаях совершенно разный.

Вот наглядный пример. Одно время самым распространенным типом резисторов в электронных схемах были так называемые угольные резисторы: слой графита необходимой толщины наносился на керамическую трубочку и на ее торцы насаживались осевые выводы. Рассматривая такой резистор под микроскопом, можно увидеть, что графит состоит из большого числа гранул (зерен). Внутри каждой из гранул электрическая проводимость высокая, а в сравнительно большом сопротивлении резистора в целом проявляется несовершенство электрических контактов между отдельными гранулами (между их поверхностями). При отличной от нуля температуре каждая из гранул может медленно поворачиваться или может немного меняться ее форма, так что изменяется взаимное расположение гранул, в результате чего сопротивление резистора флуктуирует. При пропускании через него постоянного тока на концах резистора (в дополнение к обычному тепловому шуму) как раз и наблюдается $1/f$ -шум. (В настоящее время при изготовлении резисторов используются другие, в том числе новые, материалы, но все они в большей или меньшей степени «шумят» по закону $1/f$.)

В общем случае $1/f$ -шум связывают с наличием в реальных твердых телах тех или иных неупорядоченностей и широким спектром времен релаксации у флуктуаций, имеющих место в процессах переноса заряда. (*Время релаксации — примерное время, которое требуется системе, чтобы из неравновесного состояния перейти в состояние равновесия.* Ф. Рейф [12], с. 61.) $1/f$ -шум обусловлен суперпозицией процессов с различными временами релаксации.

Измерения, в которых наблюдался рост спектральной плотности шума с понижением частоты обратно пропорционально частоте, проводились вплоть до $3 \cdot 10^{-7}$ Гц (Физическая энциклопедия, т. 5. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1998, с. 325). При таких измерениях серьезной становится проблема поддержания неизменными условий проведения эксперимента. Но уже в тех случаях, когда механизм $1/f$ -шума понятен, минимальная его частота настолько мала (меньше величины, обратной времени существования Вселенной), что попытки ее измерения не имеют смысла.

4. Прохождение случайного процесса через линейную систему

4.1. Мощность шума на выходе

Пусть $x(t)$ — какая-то одна конкретная реализация случайного процесса $\{x(t)\}$ на входе линейного четырехполюсника с комплексным коэффициентом передачи $K(j\omega)$ (рис. 4.1) и $x_T(t)$ — отрезок этой реализации длительности T :

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } t \in (0, T), \\ 0 & \text{вне этого интервала,} \end{cases}$$

а $y_T(t)$ — отклик данного линейного четырехполюсника на $x_T(t)$.

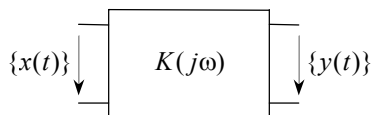


Рис. 4.1. Линейный четырехполюсник

Если

$$S_x^{(T)}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

и

$$S_y^{(T)}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_T(t) e^{-j\omega t} dt ,$$

то в соответствии со спектральным подходом к проблеме прохождения сигнала через линейный четырехполюсник

$$S_y^{(T)}(j\omega) = K(j\omega) \cdot S_x^{(T)}(j\omega).$$

Возводя в квадрат обе части последнего равенства, усредняя по ансамблю реализаций, деля на T и устремляя T к ∞ , получим

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{|S_y^{(T)}(j\omega)|^2} = |K(j\omega)|^2 \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{|S_x^{(T)}(j\omega)|^2}.$$

Но предел в правой части согласно (1.7) представляет собой не что иное, как (двустороннюю) спектральную плотность мощности $G_x(\omega)$ входного процесса $\{x(t)\}$, а предел в левой части – подобную ей спектральную плотность мощности $G_y(\omega)$ выходного процесса $\{y(t)\}$. Следовательно,

$$G_y(\omega) = |K(j\omega)|^2 \cdot G_x(\omega). \quad (4.1)$$

В частности, мощность процесса (шума) на выходе равна

$$\sigma_y^2 = \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 G_x^+(\omega) \frac{1}{2\pi} d\omega. \quad (4.2)$$

На рис. 4.2 синим цветом приведена односторонняя спектральная плотность мощности шума на выходе интегрирующей цепи, когда на ее вход поступает белый гауссовский шум (программа **rsn_10**). Красная кривая **redcurve** – это квадрат модуля комплексного коэффициента передачи интегрирующей цепи

$$\left| \frac{1}{1 + j \cdot f/f_b} \right|^2,$$

умноженный на одностороннюю спектральную плотность мощности шума на входе $N_0 = 2\sigma^2/f_s$, равную в рассматриваемом примере $9.5367 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2/\text{Гц}$; частота, на которой значение **redcurve** вдвое меньше ее значения в нуле, – граничная частота интегрирующей цепи f_b , указанная в подписи под горизонтальной осью.

Полученная здесь спектральная плотность мощности шума на выходе интегрирующей цепи есть результат усреднения по 1000 реализаций длиной 2^{20} (около 10^6) временных отсчетов в каждой при мощности входного шума **var_n**, равной 2 В^2 и частоте дискретизации $f_s \approx 4 \text{ МГц}$.

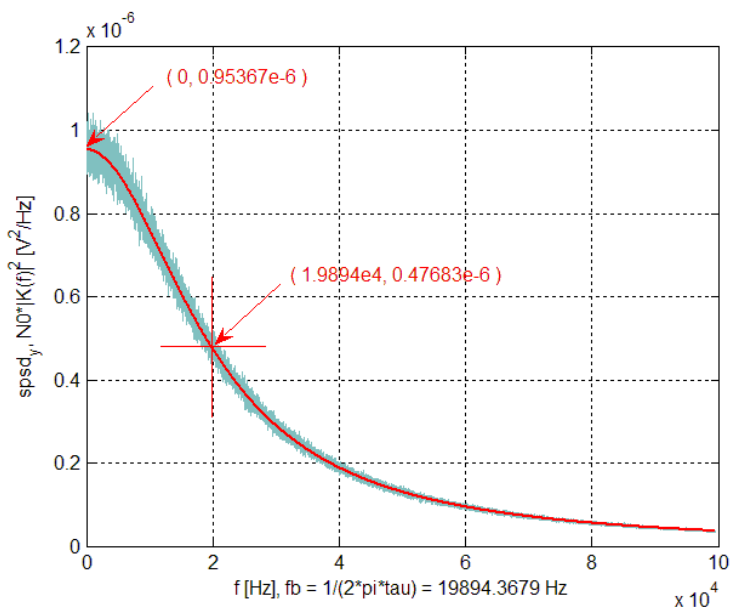


Рис. 4.2. Односторонняя спектральная плотность мощности отклика интегрирующей цепи на «белый» гауссовский шум на входе мощностью 2 В^2

Мощность шума на выходе $\text{var}(y)$, найденная непосредственно по последней из 1000 реализаций y , оказалась равной $2.9096 \cdot 10^{-2} \text{ В}^2$, тогда как результат «интегрирования» по экспериментально наблюдаемой о. с. п. м. $\text{sum}(\text{spstd_y} * \text{df})$ [см. (2.4)] составил $2.9365 \cdot 10^{-2} \text{ В}^2$. Ниже в п. 4.3 будет получена еще одна оценка для мощности шума на выходе интегрирующей цепи, относящаяся к условиям данного примера, основанная на значении так называемой эффективной шумовой полосы.

Мы еще вернемся к программе **rsn_10**, когда речь пойдет о корреляционной функции сигнала на выходе интегрирующей цепи.

4.2. Примеры

«Шумящий» резистор и конденсатор, включенные параллельно

Пусть «шумящий» резистор с сопротивлением R представлен в виде эквивалентной схемы согласно физическому описанию тепловых шумов в п. 3.1, а конденсатор имеет емкость C (рис. 4.3). Перерисовывая схему,

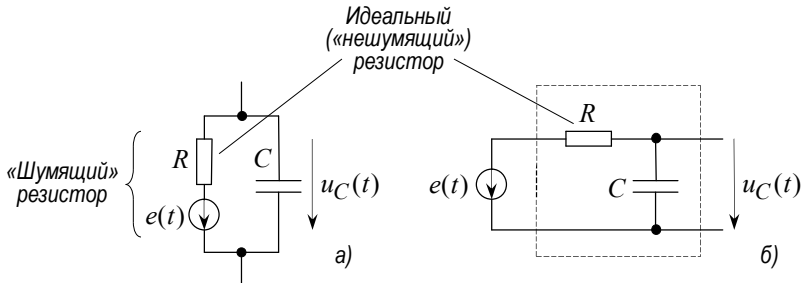


Рис. 4.3. Напряжение на конденсаторе — это результат прохождения теплового шума через интегрирующую цепь

убеждаемся, что шумовое напряжение на конденсаторе $u_C(t)$ является результатом прохождения теплового шума $e(t)$ через интегрирующую цепь, состоящую из идеального («нешумящего») резистора R и конденсатора C .

Повторяя вновь рассуждения, содержащиеся в п. 1.6 и приводящие к соотношению (1.9), можно считать, что ЭДС тепловых шумов $e(t)$ складывается из независимых элементарных составляющих $\Delta e_f(t)$, относящихся к отдельным частотам:

$$e(t) \sim \sum_f \Delta e_f(t),$$

причем согласно Найквисту

$$\overline{[\Delta e_f(t)]^2} = G_e^+ \cdot \Delta f = 4kTR \cdot \Delta f,$$

где $G_e^+ = 4kTR$ – односторонняя спектральная плотность мощности для ЭДС тепловых шумов.

Поскольку интегрирующая цепь является линейным четырехполюсником, шум на выходе $u_C(t)$ должен быть суммой откликов $\Delta u_{C,f}(t)$ на элементарные составляющие шума на входе:

$$u_C(t) \sim \sum_f \Delta u_{C,f}(t).$$

Мощность каждой элементарной составляющей выходного шума в соответствии с (4.1) равна

$$\overline{\Delta u_{C,f}^2} = G_{u_C}^+ \cdot \Delta f = 4kTR \cdot \left| \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right|^2 \cdot \Delta f = \frac{4kTR}{1 + (\omega RC)^2} \cdot \Delta f,$$

где

$$G_{u_C}^+ = \frac{4kTR}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

– односторонняя спектральная плотность мощности шума на конденсаторе.

В результате получаем следующее выражение для мощности теплового шума на параллельно включенных резисторе и конденсаторе¹⁾:

$$\overline{u_C^2} = \int_0^\infty G_{u_C}^+ df = 4kTR \cdot \frac{1}{2\pi RC} \cdot \int_0^\infty \frac{d(2\pi fRC)}{1 + (2\pi fRC)^2} = \frac{2kT}{\pi C} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{kT}{C}.$$

Если $C = 100$ пФ и $T = 300$ К ($k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К), то $\sqrt{\overline{u_C^2}} = 6.5$ мкВ.

¹⁾ $\int_0^\infty \frac{d\kappa}{1 + \kappa^2} = \arctg \kappa \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2};$

κ – греческая буква ‘каппа’ (‘карра’), не x , не χ (не ‘хи’, ‘chi’).

Параллельный колебательный LC-контур

В п. 3.2 показано, что в результате представления параллельного LC-контура в виде последовательно включенных элементов с активным и реактивным сопротивлениями односторонняя спектральная плотность мощности теплового шума между выводами A и B должна иметь вид

$$G_{e_{AB}}^+ = 4kT \frac{r}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega r C)^2}. \quad (4.3)$$

Здесь тот же результат будет получен двумя другими способами рассуждения.

На рис. 4.4 схема параллельного LC-контура с «шумящим» резистором r перерисована таким образом, что последовательно включенные «нешумящий» резистор, катушка индуктивности и конденсатор образуют (обведенный пунктиром) четырехполюсник, на входе которого оказывается включенным источник шумовой ЭДС $e(t)$ с односторонней спектральной плотностью мощности $G_e^+ = 4kTr$, а выходом служат выводы A и B . Комплексный коэффициент передачи такого четырехполюсника, очевидно, равен

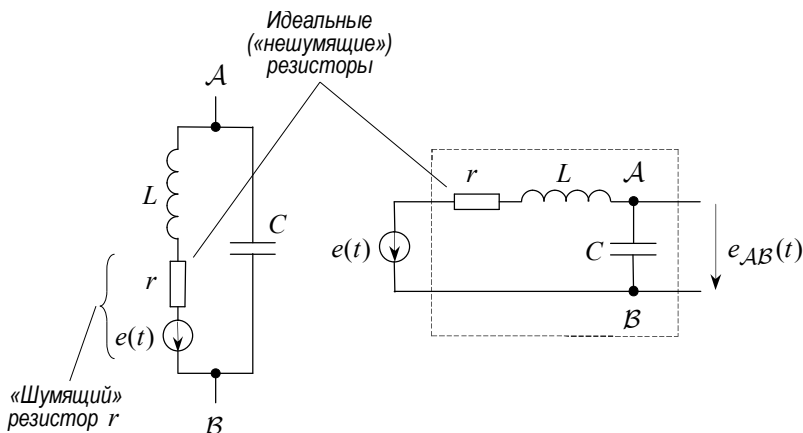


Рис. 4.4. К определению спектральной плотности мощности ЭДС тепловых шумов на выводах параллельного LC-контура по правилу прохождения шума через линейный четырехполюсник

$$K(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + jr\omega C}.$$

Поэтому, согласно п. 4.1,

$$G_{e_{AB}}^+ = |K(j\omega)|^2 \cdot G_e^+ = \frac{4kTr}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega rC)^2},$$

что совпадает с (4.3).

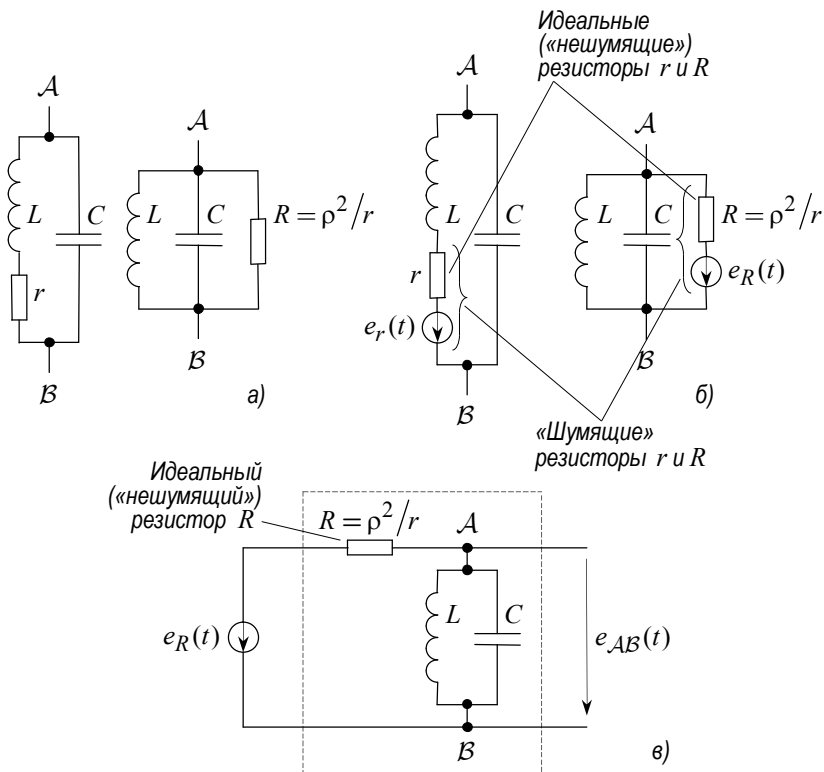


Рис. 4.5. К определению спектральной плотности мощности ЭДС тепловых шумов на выводах А и В с использованием «параллельной схемы замещения» параллельного LC-контура с добротностью $Q \gg 1$

Наконец, когда добротность Q параллельного колебательного LC -контура много больше 1, можно воспользоваться его «параллельной схемой замещения» (рис. 4.5а), где потери отображаются резистором R , включенным параллельно тем же самым реактивным элементам L и C , с сопротивлением, равным ρ^2/r , где $\rho = \sqrt{L/C}$. В этом случае тепловые шумы обусловлены этим «параллельным выразителем потерь» и их спектральная плотность мощности $G_{e_R}^+$ по формуле Найквиста равна $4kT\rho^2/r$ (рис. 4.5б). Поступая аналогично тому, как это было сделано выше (см. рис. 4.4), можно считать, что шум $e_R(t)$ проходит через четырехполосник, состоящий из «нешумящего» резистора R и параллельно включенных катушки индуктивности L и конденсатора C (рис. 4.5в), с комплексным коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = \frac{(j\omega L) \left\| \frac{1}{j\omega C} \right\|}{R + (j\omega L) \left\| \frac{1}{j\omega C} \right\|} = \frac{\frac{\rho^2}{j\omega L + 1/(j\omega C)}}{\frac{\rho^2}{r} + \frac{\rho^2}{j\omega L + 1/(j\omega C)}} = \frac{r}{r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Следовательно,

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{r^2(\omega C)^2}{(r\omega C)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}$$

и

$$G_{e_{AB}}^+ = |K(j\omega)|^2 \cdot G_{e_R}^+ = \frac{r^2(\omega C)^2}{(r\omega C)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2} \cdot 4kT \frac{\rho^2}{r}.$$

Но при $Q \gg 1$ и $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

$$\omega C \approx \omega_0 C = 1/\rho,$$

и мы снова приходим (в данном случае приближенно) к выражению (4.3) для односторонней спектральной плотности $G_{e_{AB}}^+$ теплового шума на выводах параллельного колебательного LC -контура.

4.3. Эффективная шумовая полоса

Когда спектральная плотность мощности шума G_x^+ на входе линейного четырехполюсника не зависит от частоты, для определения мощности шума на выходе достаточно знать

$$\int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega,$$

поскольку постоянную величину G_x^+ можно вынести за пределы интегрирования [см. (4.2)]. Другими словами, не важно, какой именно функцией частоты является зависимость комплексного коэффициента передачи, а достаточно располагать интегрированной количественной характеристикой частотных свойств четырехполюсника.

По определению эффективная шумовая полоса B_n линейного устройства равна

$$B_n = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega}{\left[\max_{\omega} |K(j\omega)| \right]^2}$$

(рис. 4.6); размерность B_n [Гц].

При известном значении B_n

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_x^+ |K(j\omega)|^2 d\omega = G_x^+ \cdot \left[\max_{\omega} |K(j\omega)| \right]^2 \cdot B_n.$$

В случае интегрирующей цепи

$$B_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1 + (\omega\tau)^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} f_{\text{гр}} = \frac{1}{4\tau}. \quad (4.4)$$

Возвращаясь к числовому примеру, разобранным в п. 4.1, видим, что для тех значений параметров, какие были заданы при обращении к программе **rsn_10**, мощность шума на выходе интегрирующей цепи должна равняться-

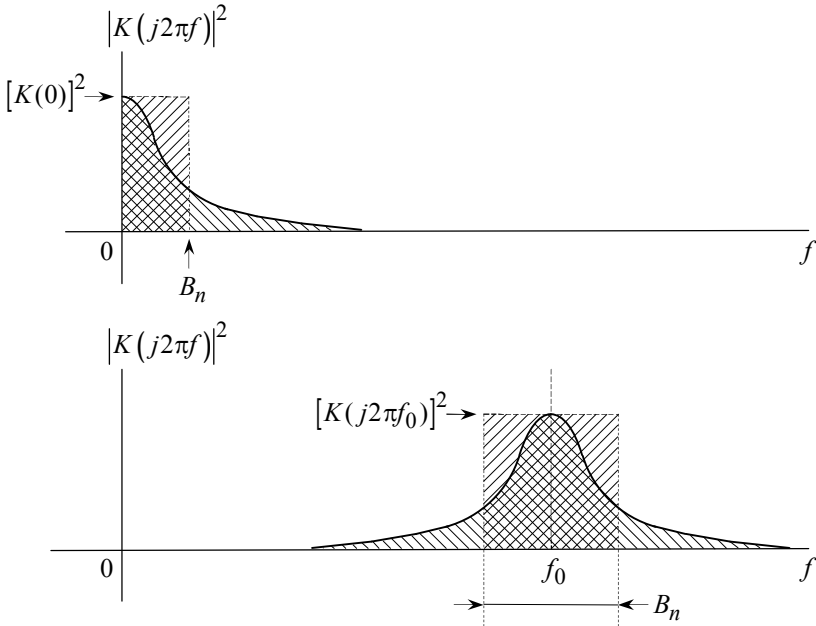


Рис. 4.6. К определению эффективной шумовой полосы

ся $N0 / (4 \cdot \tau) = 2.9802 \cdot 10^{-2} \text{ В}^2$, что находится в приемлемом соответствии с двумя другими числовыми значениями, приведенными ранее.

У однокаскадного резонансного усилителя с добротностью $Q \gg 1$ амплитудно-частотная характеристика практически симметрична относительно резонансной частоты f_0 , поэтому

$$B_n = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \left(Q \frac{2\Delta f}{f_0} \right)^2} d(\Delta f) = 2 \cdot \frac{f_0}{2Q} \cdot \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{1 + \kappa^2} = \frac{\pi}{2} \cdot 2\Delta f_{1/\sqrt{2}},$$

где $\overset{\text{def}}{\Delta f} = f - f_0$, а $2\Delta f_{1/\sqrt{2}} = f_0/Q$ – ширина резонансной кривой $|K(j2\pi f)|$ на уровне $1/\sqrt{2}$ по отношению к значению коэффициента усиления на частоте f_0 . В п. 4.6 прохождение «белого» шума через резонансный усилитель рассматривается подробнее.

4.4. Корреляционная функция выходного процесса при «белом» шуме на входе

Как отмечалось в п. 1.6, в случае действительного случайного процесса корреляционная функция $R(\tau)$ и двусторонняя спектральная плотность мощности $G(\omega)$ являются четными функциями своих аргументов. Поэтому из теоремы Винера–Хинчина нетрудно вывести следующие очевидные соотношения между односторонней спектральной плотностью мощности $G^+(\omega) = 2 \cdot G(\omega)$ (для $\omega \geq 0$) и значениями $R(\tau)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \\ G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \frac{e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}}{2} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \\ G(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G^+(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \\ G^+(\omega) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \end{array} \right.$$

При «белом» шуме на входе линейного четырехполосника $G_x^+(\omega) \equiv G_x^+(0)$, поэтому

$$G_y^+(\omega) = |K(j\omega)|^2 \cdot G_x^+(0),$$

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} G_x^+(0) \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 \cos \omega \tau d\omega.$$

Для интегрирующей RC-цепи с постоянной времени $\tau_{\text{цепи}} = RC$ ²⁾

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{G_x^+(0)}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega \tau}{1 + (\omega \tau_{\text{цепи}})^2} d\omega = \frac{G_x^+(0)}{2\pi} \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{\tau}{\tau_{\text{цепи}}} x}{1 + x^2} dx = \\ &= \frac{G_x^+(0)}{2\pi} \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\tau}{\tau_{\text{цепи}}}} = G_x^+(0) \frac{1}{4\tau_{\text{цепи}}} e^{-\frac{\tau}{\tau_{\text{цепи}}}} = \underbrace{G_x^+(0) \cdot B_n}_{R(0) = \sigma_y^2} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_{\text{цепи}}}} \quad (4.5) \end{aligned}$$

(рис. 4.7).

Интервал корреляции на выходе интегрирующей цепи (см. п. 1.3):

$$\begin{aligned} \tau_{\text{корр}} &= \frac{\int_0^{\infty} |R_y(\tau)| d\tau}{R_y(0)} = \frac{G_x^+(0) \cdot \frac{1}{4\tau_{\text{цепи}}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\tau_{\text{цепи}}}} d\tau}{G_x^+(0) \cdot \frac{1}{4\tau_{\text{цепи}}}} = \\ &= -\tau_{\text{цепи}} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_{\text{цепи}}}} \Big|_0^{\infty} = \tau_{\text{цепи}}. \end{aligned}$$

При «шумящем» резисторе R в интегрирующей цепи и в отсутствие какого-либо сигнала на ее входе $R_y(0) = kT / C$.

$$2) \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$$

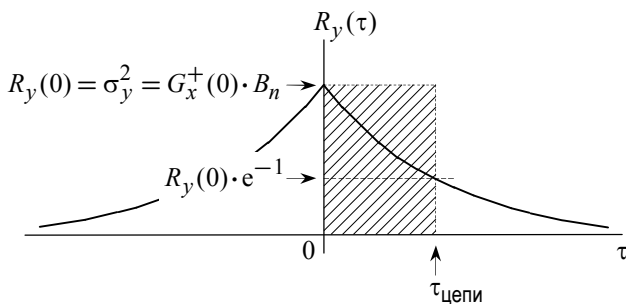


Рис. 4.7. Корреляционная функция шума на выходе интегрирующей цепи при «белом» шуме на входе

Замечание

При наличии δ -коррелированного «белого» шума на входе интегрирующей цепи корреляционная функция $R_y(\tau)$ на ее выходе похожа на импульсную характеристику этой цепи (отклик на δ -образное воздействие) :

$$h_{\text{и}}(t) = \frac{1}{\tau_{\text{цепи}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{цепи}}}}.$$

Во второй части программы **rsn_10** в тех же условиях, что и раньше, находится корреляционная функция процесса на выходе интегрирующей цепи путем усреднения вдоль одной реализации произведения мгновенных значений, отстоящих одно от другого на $\tau = m \cdot \Delta t$ с, $m = 0, 1, 2, \dots$. Результаты представлены на рис. 4.8 и 4.9.

На первом из этих рисунков синим цветом показана эмпирически найденная корреляционная функция. На том же графике красным цветом нанесена теоретическая корреляционная функция (4.5). То обстоятельство, что эти кривые по большей части сливаются (особенно на интервале малых значений τ), свидетельствует в пользу надежности получения корреляционной функции путем моделирования.

На рис. 4.9 приведены результаты восстановления спектральной плотности мощности по корреляционной функции в соответствии с теоремой Винера–Хинчина [см. (1.6)]. Здесь снова воспроизведена уже использованная ранее (см. рис. 4.2) теоретическая зависимость от частоты односторонней спектральной плотности шума (о. с. п. м.) на выходе инте-

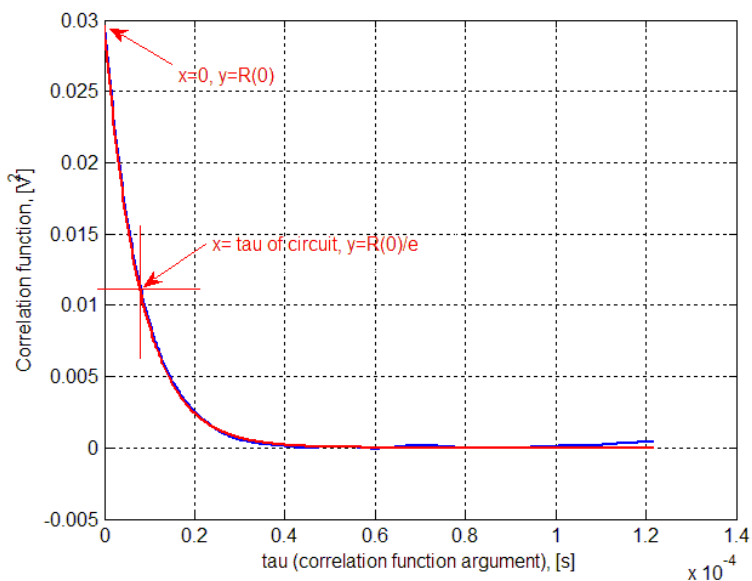


Рис. 4.8. Корреляционная функция шума на выходе интегрирующей цепи

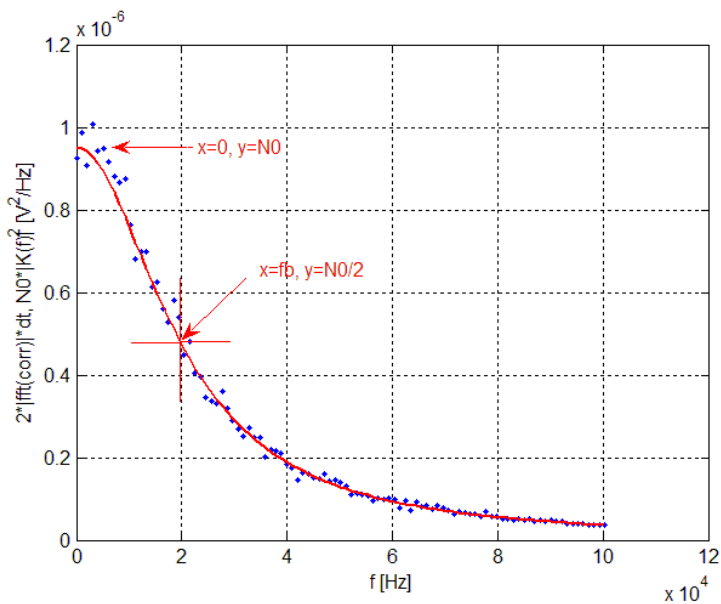


Рис. 4.9. Восстановление о. с. п. м. по корреляционной функции

гирующей цепи (красная кривая *redcurve*). Значения о. с. п. м., найденные по отсчетам ДПФ согласно (2.2), отмечены точками синего цвета. Как видно из графика, результаты восстановления вполне удовлетворительны на относительно больших частотах, тогда как при малых значениях частоты имеет место заметный разброс. Последнее объясняется тем, что в программе ради экономии времени получена корреляционная функция, усеченная сравнительно небольшим отрезком значений τ . Именно эта усеченная корреляционная функция подвергается преобразованию Фурье, поэтому отсутствие данных о значениях корреляционной функции для больших значений τ не позволяет получить надежную оценку о. с. п. м. на низких частотах.

4.5. Распределение мгновенных значений процесса на выходе линейного устройства

Мгновенное значение сигнала на выходе работающего линейного устройства всегда является суперпозицией откликов на воздействия, поступавшие на его вход ранее, то есть взвешенной суммой этих воздействий с весовыми коэффициентами, зависящими от того, насколько давно они поступили на вход и каков по форме отклик устройства на каждое из них. Другими словами, выходной сигнал $y(t)$ связан с входным сигналом $x(t)$ интегралом Дюамеля:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot h_{\text{и}}(t - \tau) d\tau,$$

где $h_{\text{и}}(t)$ — импульсная характеристика данного четырехполюсника (реакция на δ -образное воздействие).

Насколько далеко по времени распространяется зависимость выходного сигнала от предшествующих значений входного сигнала, зависит от инерционности устройства.

При случайном процессе на входе происходящее на выходе суммирование приводит к тому, что распределение мгновенных значений сигнала на выходе приближается к нормальному даже в тех случаях, когда распределение мгновенных значений входного сигнала далеко не гауссовское. Это ожидаемое явление. Оно косвенно связано со справедливостью центральной предельной теоремы теории вероятностей, утверждающей, что распределение суммы независимых одинаково распределенных слу-

чайных величин становится все ближе к гауссовскому с ростом числа слагаемых (см. В. Феллер [15]). В данном случае ни о какой независимости «слагаемых» не может идти речи, да и распределения у отдельных «слагаемых» вовсе не одинаковы, тем не менее при прохождении случайного процесса через линейное устройство наблюдается «нормализация» выходного сигнала.

Следующий пример наглядно демонстрирует этот факт. В программе **rsn_11** на вход интегрирующей цепи подается так называемый случайный телеграфный сигнал *rts* (random telegraph signal), принимающий только два значения – положительное или отрицательное. Моменты скачков случайны.

Для создания такого сигнала в программе сначала создается массив из логических '0' и '1', в котором эти значения выбираются с помощью датчика случайных чисел *rand* с равномерным распределением в интервале (0, 1), причем '1' возникают редко с заданной вероятностью *p_p*. Затем производится проверка того, в какой мере такая последовательность '0' и '1' является пуассоновский потоком. Для этого с помощью вспомогательной программы **tr_poisson** строится гистограмма распределения интервалов между соседними '1' по длине. График на рис. 4.10 по-

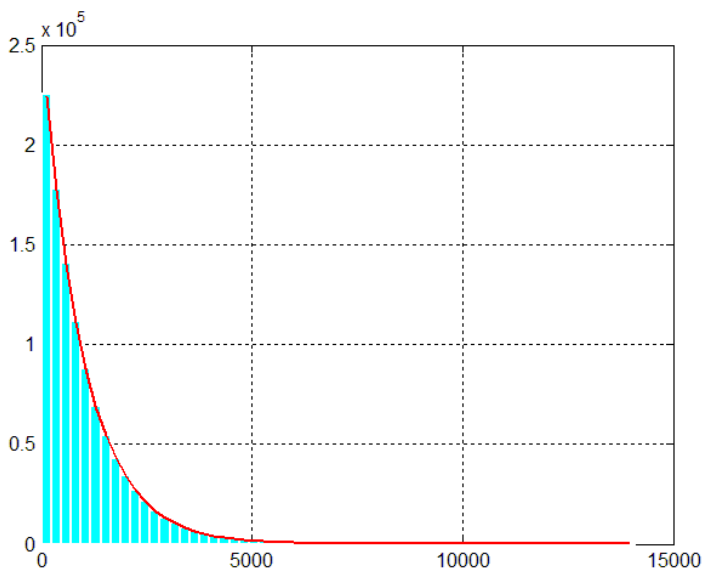


Рис. 4.10. Распределение длин интервалов между событиями в пуассоновском потоке

казывает, что это распределение с высокой точностью является экспоненциальным. Это говорит о том, что наш поток '0' и '1' вполне можно считать пуассоновским. (Красная кривая на рис. 4.10 проведена по правилу

$$law = \exp(-c/mean_y) / mean_y,$$

где c — массив значений абсциссы в середине интервальчиков, на которые разбита гистограмма, а $mean_y$ — здесь среднее значение массива случайных величин, для которого построена гистограмма.)

Созданный массив логических '0' и '1' используется для того, чтобы сформировать случайный телеграфный сигнал заданной амплитуды так, чтобы скачки в нем происходили в моменты, отмеченные логическими '1' в исходном массиве. На рис. 4.11 вверху показан отрезок такого сигнала.

После прохождения через интегрирующую цепь с постоянной времени τ , много большей среднего расстояния dt/p_p между скачками во входном сигнале (в рассматриваемом числовом примере $\tau = 1.6 \cdot 10^{-3}$, а $dt/p_p = 5.96 \cdot 10^{-5}$), сигнал y на выходе изменяется сравнительно медленно (рис. 4.11 внизу), а распределение его мгновенных значений, построенное с помощью вспомогательной программы **tr_gauss**, оказывается очень близким к нормальному (рис. 4.12). (Красная кривая на рис. 4.12 проведена по правилу

$$law = \exp(-0.5 * (c - mean_y)^2 / var_y) / \sqrt{2 * \pi * var_y},$$

где c — массив значений абсциссы в середине интервальчиков, на которые разбита гистограмма, а $mean_y$ и var_y — здесь среднее и дисперсия массива случайных величин, для которого построена данная гистограмма.)

4.6. Простейший узкополосный фильтр

То, что было сказано в общем случае в пп. 4.1 и 4.4 о спектральной плотности мощности и о корреляционной функции процесса на выходе линейного четырехполосника, наглядно проявляется в результатах моделирования узкополосного фильтра с «белым» шумом на входе.

В аналоговой электронике простейшим узкополосным линейным устройством является однокаскадный резонансный усилитель (рис. 4.13) с параллельным LC -контуром в качестве нагрузки в коллекторной цепи. При большой добротности ($Q \gg 1$) его частотная характеристика в окрестности резонансной частоты ($|f - f_0| \ll f_0$) имеет вид

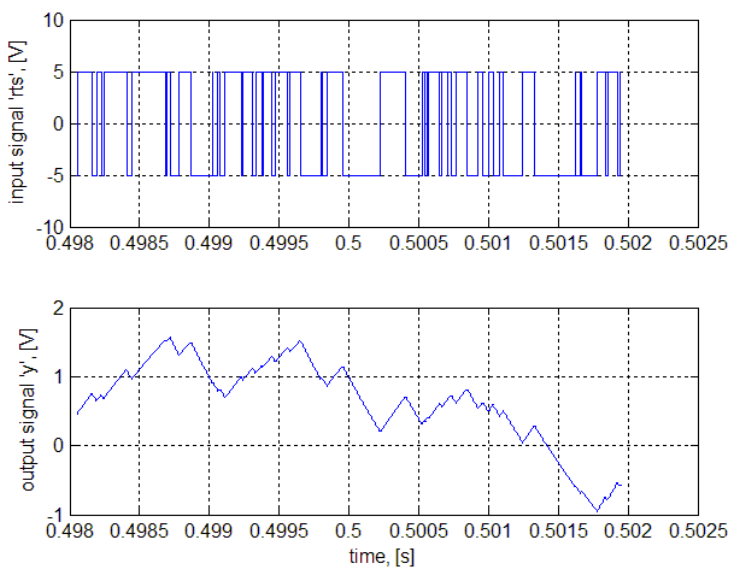


Рис. 4.11. Сигналы на входе и на выходе интегрирующей цепи

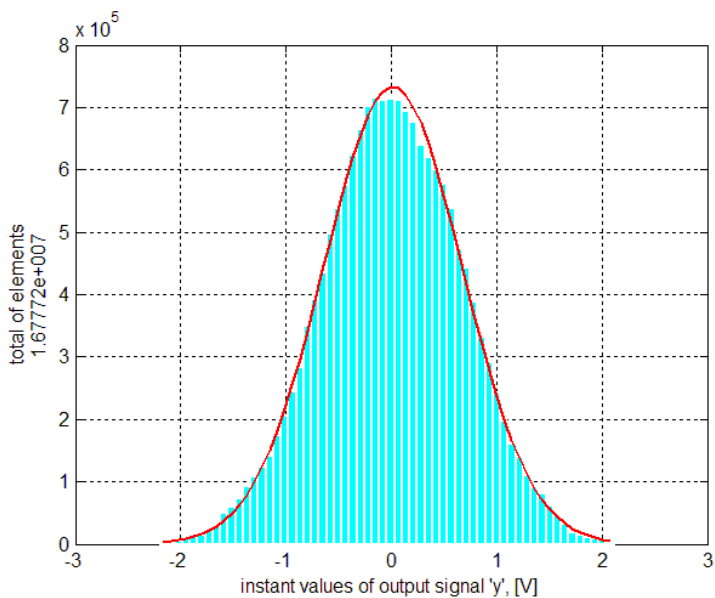


Рис. 4.12. Распределение мгновенных значений сигнала на выходе интегрирующей цепи

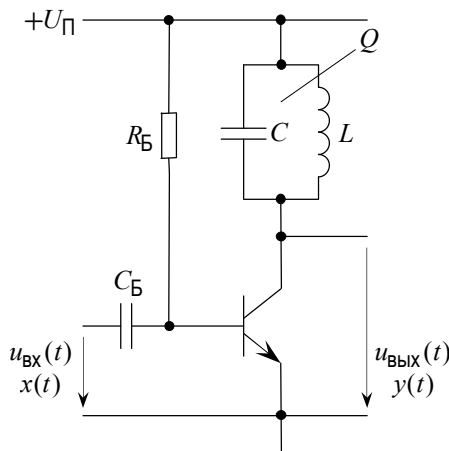


Рис. 4.13. Резонансный усилитель

$$K(j2\pi f) \approx \frac{K_0}{1 + jQ \frac{2(f - f_0)}{f_0}}.$$

Именно такой характеристикой (с точностью до постоянного коэффициента K_0 , который мы ради удобства будем полагать равным 1) обладает аналоговый полосовой фильтр Баттерворта 1-го порядка, служащий прототипом для цифрового фильтра, созданного в моделирующей программе **rsn_20**.

В разбираемом здесь примере резонансная частота f_0 выбрана равной примерно 1 МГц, а полоса пропускания — порядка 20 кГц, так что $Q \approx 50$. На рис. 4.14 приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) аналогового фильтра прототипа и цифрового фильтра, которые практически сливаются. На рис. 4.15 амплитудно-частотная характеристика цифрового фильтра повторена в другом масштабе по оси частот (синим цветом), и одновременно на том же графике (красным цветом) изображена зависимость $|K(j\omega)|^2$ для данного цифрового фильтра, которая представляет собой ожидаемое поведение двусторонней спектральной плотности мощности шума на выходе резонансного усилителя при «белом» шуме на его входе. (Значение АЧХ цифрового фильтра, созданного в этой программе средствами MATLAB, на резонансной частоте чуть больше 1.)

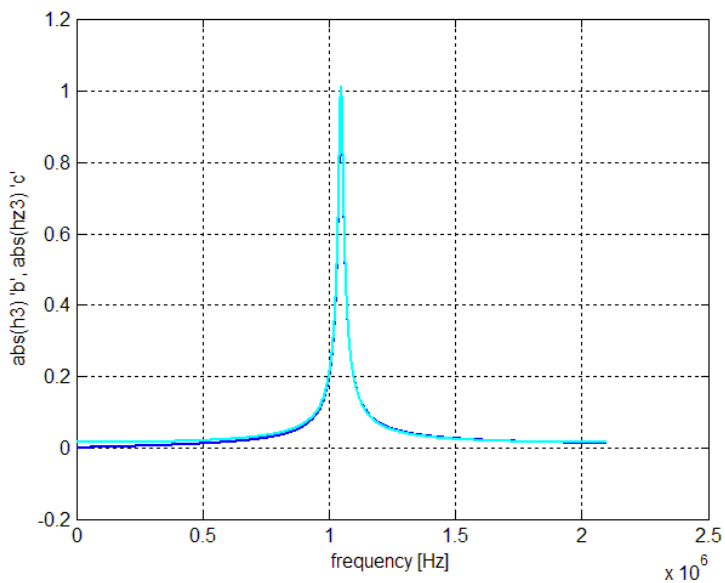


Рис. 4.14. АЧХ аналогового и цифрового узкополосных фильтров

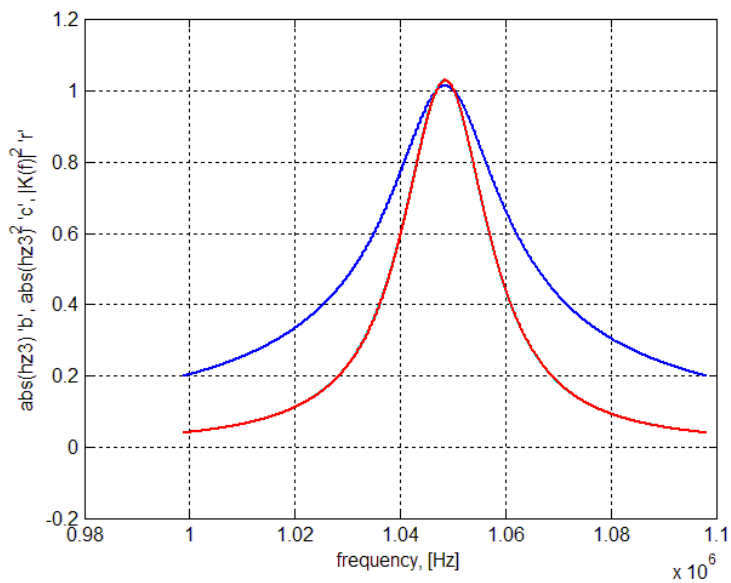


Рис. 4.15. АЧХ цифрового фильтра и результат ее возведения в квадрат

Показанная на рис. 4.16 синим цветом односторонняя спектральная плотность мощности шума на выходе резонансного усилителя является результатом усреднения по ~ 1000 отрезков независимых реализаций длиной $\sim 10^6$ временных выборок. Красная кривая – та же, что и на предыдущем рисунке, только здесь она умножена на одностороннюю спектральную плотность мощности «белого» шума на входе N_0 , равную $2\sigma^2/f_s$ (см. п. 2.1; в данном примере σ^2 и f_s были выбраны равными 2 В^2 и $\sim 4 \text{ МГц}$ соответственно, при этом $N_0 = 9.5367 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2/\text{Гц}$).

Мощность шума на выходе резонансного усилителя, посчитанная тремя разными способами, в этом компьютерном эксперименте такова:

$$\text{var}(y) = 3.0834 \cdot 10^{-2} \text{ В}^2,$$

$$N_0 * (\text{pi}/2) * \text{dfb} = 2.9802 \cdot 10^{-2} \text{ В}^2,$$

$$\text{sum}(\text{spsd_y} * \text{df}) = 3.0693 \cdot 10^{-2} \text{ В}^2,$$

где $\text{var}(y)$ – дисперсия временных отсчетов в последней реализации выходного сигнала длиной $\sim 10^6$ точек, второе значение получено по эффективной шумовой полосе [см. (4.4)], а третье – результат «интегрирования» односторонней спектральной плотности мощности выходного шума, полученной путем «усреднения по ансамблю».

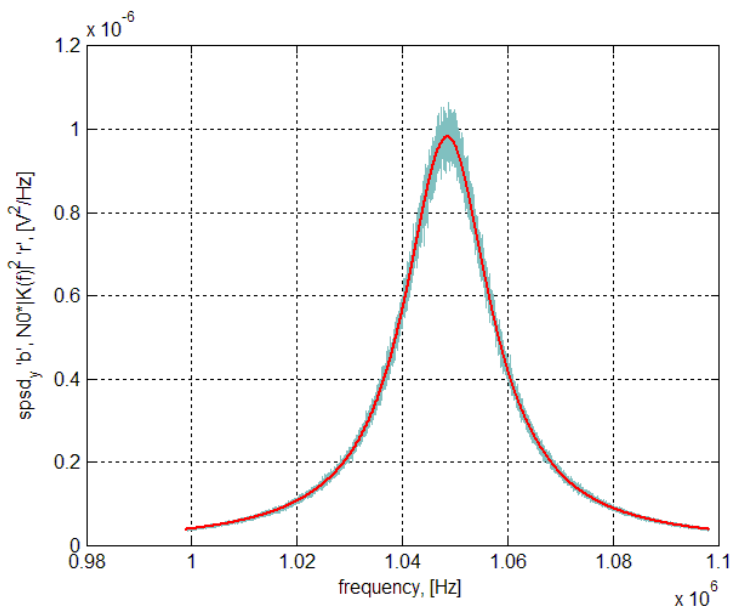


Рис. 4.16. Односторонняя спектральная плотность мощности шума на выходе узкополосного фильтра

Относительное среднеквадратическое отклонение того, что получено путем моделирования (изображенного синим цветом на рис. 4.16), от значений, предсказываемых теоретически (красная кривая), было найдено по правилу

$$\text{sqrt}(\text{var}(\text{spsd_y}(\text{n1:n2}) - \text{N0} * \text{redcurve}) ./ (\text{N0} * \text{redcurve}))$$

и на интервале частот, отображенном на рис. 4.16, составило чуть больше 3 %.

Если на входе простейшего узкополосного фильтра действует «белый» шум с односторонней спектральной плотностью мощности N_0 , то корреляционная функция шума на его выходе равна

$$R_y(\tau) \approx N_0 \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi f \tau)}{1 + \left(Q \frac{2(f - f_0)}{f_0} \right)^2} df \approx N_0 \frac{\pi f_0}{2Q} e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{контура}}}} \cos(2\pi f_0 \tau), \quad (4.6)$$

где f_0 – резонансная частота, Q – добротность и

$$\tau_{\text{контура}} = \frac{1}{2\pi \cdot \frac{f_0}{2Q}}$$

– постоянная времени одиночного параллельного LC -контура ($f_0/2Q$ – половина ширины полосы резонансной кривой $|K(j\omega)|$ на уровне $1/\sqrt{2}$).

Вывод формулы (4.6)

Под знаком интеграла в (4.6) произведем замену переменных

$$Q \frac{2(f - f_0)}{f_0} = \varkappa, \quad f = \frac{f_0}{2Q} \varkappa + f_0, \quad df = \frac{f_0}{2Q} d\varkappa$$

и представим его в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi f \tau)}{1 + \left(Q \frac{2(f - f_0)}{f_0} \right)^2} df = \frac{f_0}{2Q} \int_{-2Q}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi f_0 \tau}{2Q} \varkappa + 2\pi f_0 \tau\right)}{1 + \varkappa^2} d\varkappa =$$

$$= \frac{f_0}{2Q} \cdot \left[\int_{-2Q}^0 \frac{1}{1+\varkappa^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi f_0 \tau}{2Q} \varkappa + 2\pi f_0 \tau\right) d\varkappa + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\varkappa^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi f_0 \tau}{2Q} \varkappa + 2\pi f_0 \tau\right) d\varkappa \right].$$

В первом из этих двух интегралов интегрирование осуществляется по диапазону частот, относящемуся к левой половине резонансной кривой, а во втором — по диапазону частот, относящемуся к правой половине резонансной кривой (рис. 4.17).

Но при достаточно большой добротности Q ($Q \gg 1$) множитель $1/(1+\varkappa^2)$ при $\cos[2\pi f_0 \tau \varkappa / (2Q) + 2\pi f_0 \tau]$ в первом интеграле становится практически равным нулю задолго до того, как переменная \varkappa , по которой производится интегрирование, принимает значение $-2Q$. Поэтому в том приближении, в каком решается эта задача, нижний предел интегрирования в первом интеграле вполне можно заменить на $-\infty$, и оба интеграла при этом объединить.

Тогда в результате тригонометрических преобразований получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi f \tau)}{1 + \left(Q \frac{2(f-f_0)}{f_0}\right)^2} df \approx \frac{f_0}{2Q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[2\pi f_0 \tau \varkappa / (2Q) + 2\pi f_0 \tau]}{1 + \varkappa^2} d\varkappa = \\ = \frac{f_0}{2Q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[2\pi f_0 \tau \varkappa / (2Q)] \cdot \cos(2\pi f_0 \tau) - \sin[2\pi f_0 \tau \varkappa / (2Q)] \cdot \sin(2\pi f_0 \tau)}{1 + \varkappa^2} d\varkappa = \\ = \frac{f_0}{2Q} \left\{ \cos(2\pi f_0 \tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi f_0 \tau}{2Q} \varkappa\right)}{1 + \varkappa^2} d\varkappa - \sin(2\pi f_0 \tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi f_0 \tau}{2Q} \varkappa\right)}{1 + \varkappa^2} d\varkappa \right\}.$$

Второй из интегралов в фигурных скобках равен нулю, поскольку под знаком интеграла стоит нечетная функция. Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi f \tau)}{1 + \left(Q \frac{2(f-f_0)}{f_0}\right)^2} df \approx \frac{f_0}{2Q} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi f_0 \tau}{2Q} \varkappa\right)}{1 + \varkappa^2} d\varkappa =$$

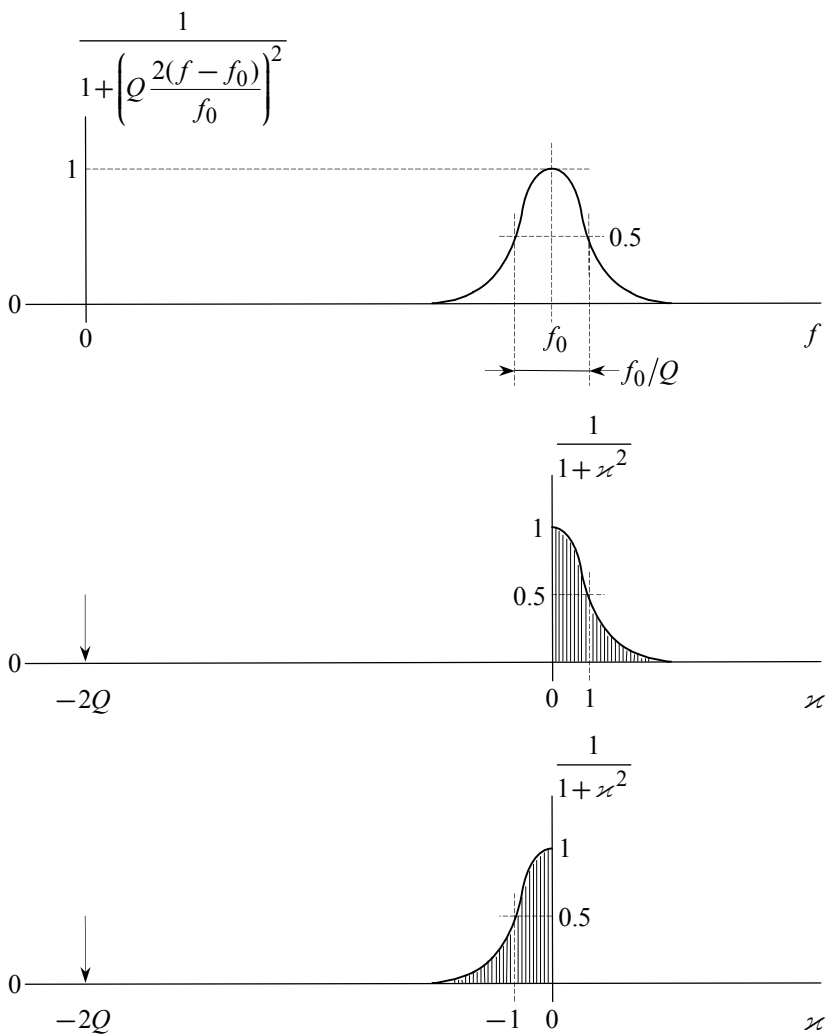


Рис. 4.17. К выводу формулы (4.6)

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_0}{2Q} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau) \cdot 2 \int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{2\pi f_0 \tau}{2Q} \chi\right)}{1 + \chi^2} d\chi = \frac{f_0}{Q} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \frac{\pi}{2} e^{-\frac{|2\pi f_0 \tau|}{2Q}} = \\
&= \frac{\pi f_0}{2Q} e^{-\frac{|\tau|}{Q/(\pi f_0)}} \cos(2\pi f_0 \tau).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$R(\tau) \approx N_0 \frac{\pi f_0}{2Q} e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{контура}}}} \cos(2\pi f_0 \tau), \quad \tau_{\text{контура}} = \frac{Q}{\pi f_0}.$$

[Конец вывода формулы (4.6).]

Отметим, что множитель перед экспонентой в выражении для $R(\tau)$ является произведением односторонней спектральной плотности мощности входного шума N_0 на эффективную шумовую полосу простейшего узкополосного фильтра, и это произведение равно дисперсии шума (мощности шума) на выходе фильтра.

В моделирующей программе **rsn_21** корреляционная функция шума на выходе узкополосного фильтра считается непосредственно по отрезку реализации этого шума длиной $\sim 4 \times 10^6$ временных отсчетов. Вычисления производятся для сравнительно небольшого числа точек по оси τ (τ – аргумент корреляционной функции) практически в тех же условиях, в каких в программе **rsn_20** находилась односторонняя спектральная плотность мощности шума на выходе такого фильтра путем «усреднения по ансамблю»; единственное отличие заключалось в выборе значительно большей частоты дискретизации fs .

Результаты работы программы **rsn_21** представлены на рис. 4.18 – 4.20. Первые два рисунка показывают, что при добротности Q порядка 50 приближение, которое дает формула (4.6), оказывается довольно точным, а из рис. 4.20 следует, что получение хорошей оценки для спектральной плотности мощности путем обратного преобразования Фурье корреляционной функции является проблематичным.

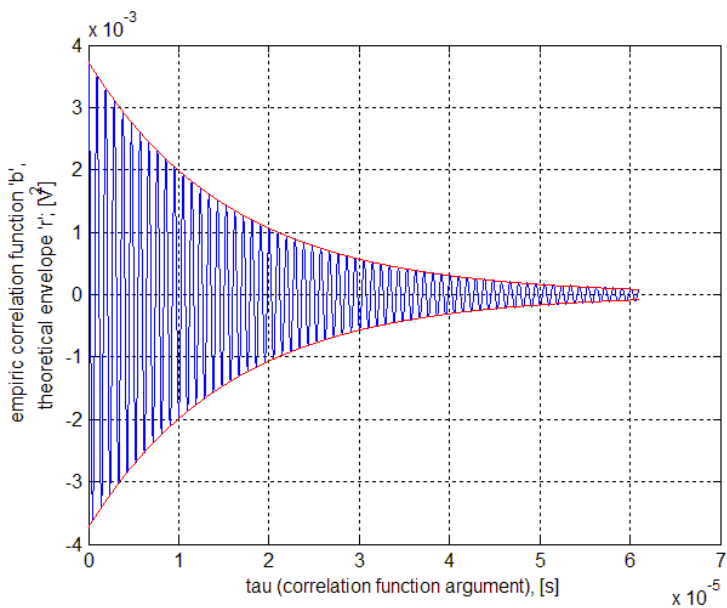


Рис. 4.18. Корреляционная функция шума на выходе узкополосного фильтра

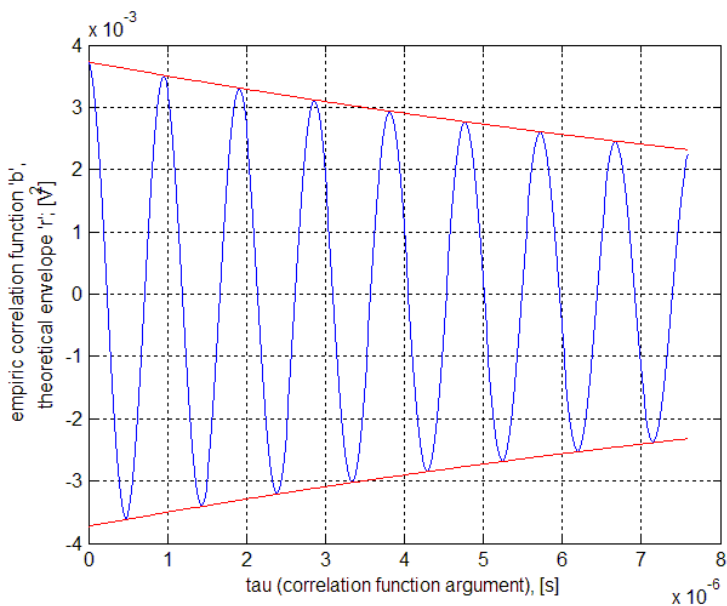


Рис. 4.19. Начальный участок корреляционной функции шума на выходе узкополосного фильтра в растянутом масштабе по оси времени

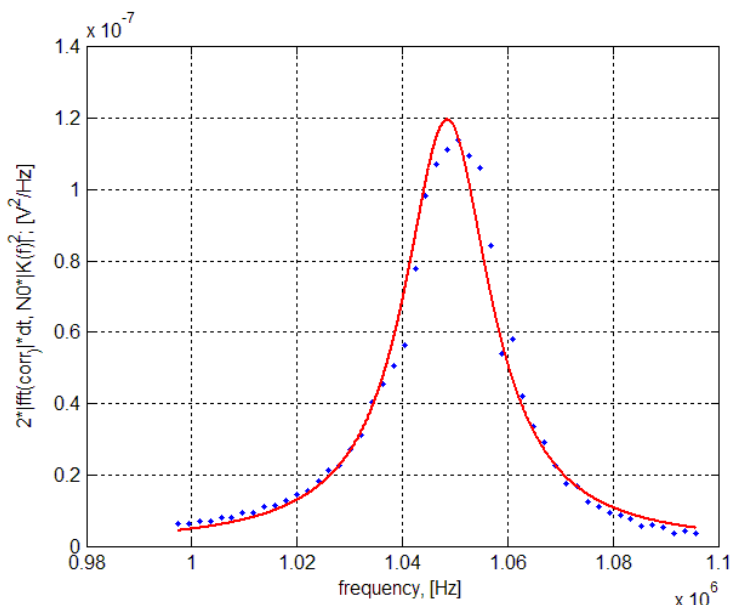


Рис. 4.20. Восстановление о. с. п. м. по корреляционной функции

4.7. Согласование «шумящего» источника сигнала с входной цепью «шумящего» усилителя.

Коэффициент шума

Сигнал, который бывает нужно усилить, всегда возникает внутри какой-то физической системы либо преобразуется ею в электрическое колебание (как это делают, например, антенна или микрофон). Но внутри любой физической системы непременно имеют место электрические флуктуации, поэтому полезному сигналу на выходе источника сигнала всегда сопутствует некоторый шум.

Целью *согласования по шуму* является достижение таких условий, когда в результате усиления к тому, что поступает от источника сигнала, добавляется, возможно, меньше шума.

Предварительные замечания

1. На практике согласование источника сигнала с входной цепью усилителя проще всего осуществить с помощью трансформатора. Однако трансформатор должен быть таким, чтобы он не только «не шумел» сам, но и не вносил никаких заметных искажений.

Рассматриваемое здесь согласование по шуму непосредственно применимо лишь в случае усилителей нижних частот, например, таких, какие применяются по большей части для регистрации сигналов в биологии или медицине. Тогда при преобразовании сигнала трансформатором бывает можно пренебречь рассеянием, то есть считать, что все магнитные силовые линии, создаваемые током, текущем в первичной обмотке, пронизывают все витки вторичной обмотки и наоборот, а индуктивность первичной обмотки равна бесконечности.

2. Большое распространение получил принцип, согласно которому считается, что собственный шум источника сигнала, то есть шум, сопровождающий полезный сигнал, носит характер теплового шума и обусловлен потерями, имеющими место в самом источнике сигнала; при этом выражением потерь, как всегда, служит выходное сопротивление источника $R_{\text{и}}$. Другими словами, чаще всего считается, что источник «шумит» как его выходное сопротивление, то есть спектральная плотность мощности ЭДС собственного шума источника сигнала равна $4kT_{\text{и}}R_{\text{и}}$, где $T_{\text{и}}$ – температура источника сигнала.

В этом параграфе под спектральной плотностью мощности (с. п. м.) имеется в виду односторонняя спектральная плотность мощности.

Трансформаторное подключение «шумящего» источника сигнала ко входу усилителя

На рис. 4.21а источник сигнала представлен по теореме об эквивалентном генераторе в виде идеального источника тока и включенного параллельно с ним выходного сопротивления. В свою очередь источник тока разбит на два параллельно включенных источника, первый из которых $i_{\text{сигн}}(t)$ является источником тока полезного сигнала, а второй $i_{\text{ш_и}}(t)$ – источником тока собственного шума источника сигнала. В дальнейшем источник тока полезного сигнала не принимается во внимание.

В этой схеме $g_{\text{и}} = 1/R_{\text{и}}$ – выходная проводимость источника сигнала, w_1 и w_2 – число витков в первичной и во вторичной обмотках трансформатора, а $n = w_2/w_1$ – коэффициент трансформации.

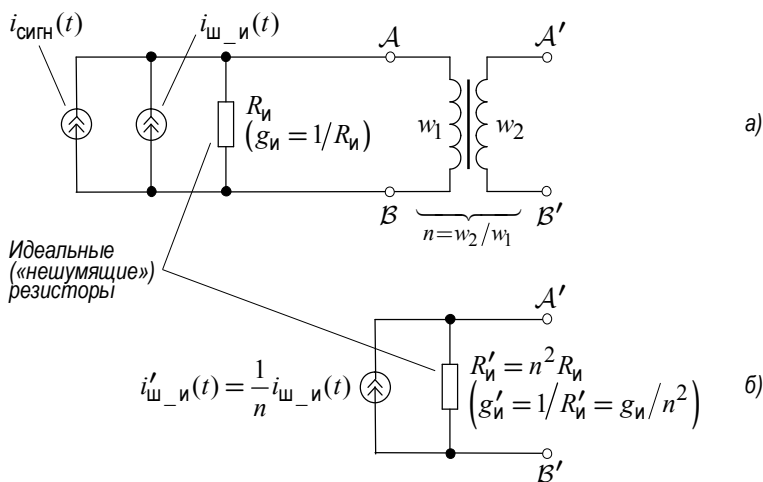


Рис. 4.21. Преобразование источника шума, поступающего вместе с полезным сигналом, к выходным клеммам вторичной обмотки трансформатора

Полагая, что

$$i_{\text{ш_и}}(t) \sim \sum_f \Delta i_{\text{ш_и},f}(t),$$

где $\Delta i_{\text{ш_и},f}(t)$ – элементарная составляющая тока собственного шума источника на частоте f с

$$\overline{\Delta i_{\text{ш_и},f}^2} = 4kT_{\text{и}}R_{\text{и}}^{-1}\Delta f = 4kT_{\text{и}}g_{\text{и}}\Delta f,$$

и переходя от точек \mathcal{AB} к точкам $\mathcal{A'B'}$ (рис. 4.21б), получим

$$i'_{\text{ш_и}}(t) \sim \sum_f \Delta i'_{\text{ш_и},f}(t),$$

$$\Delta i'_{\text{ш_и}}(t) = \frac{1}{n} \Delta i_{\text{ш_и},f}(t),$$

$$\overline{(\Delta i'_{\text{ш_и},f})^2} = \frac{1}{n^2} \overline{\Delta i_{\text{ш_и},f}^2} = \frac{1}{n^2} 4kT_{\text{и}}g_{\text{и}}\Delta f = 4kT_{\text{и}}g'_{\text{и}}\Delta f,$$

где $g' = g_{\text{и}}/n^2$.

Шумовая эквивалентная схема входной цепи «шумящего» усилителя

Ключевая идея учета шумовых свойств усилителя – та же, что и в случае простого резистора, и состоит в представлении усилителя с собственным шумом на выходе $u_{ш_вых}(t)$ в виде эквивалентного источника шума на входе $u_{ш_вх}(t)$ и следующего за ним идеального («нешумящего») усилителя (рис. 4.22).

В предположении, что

$$\Delta u_{ш_вых,f}^2 = G_{ш_вых}(f) \Delta f,$$

где $G_{ш_вых}(f)$ – с. п. м. шума на выходе, эквивалентность учета в $u_{ш_вх}(t)$ всех шумовых свойств усилителя будет иметь место, если принять, что с. п. м. шума на входе равна

$$G_{ш_вх}(f) \Delta f = \frac{G_{ш_вых}(f)}{|K(j2\pi f)|^2},$$

так как в этом случае мощность элементарной составляющей шума на вы-

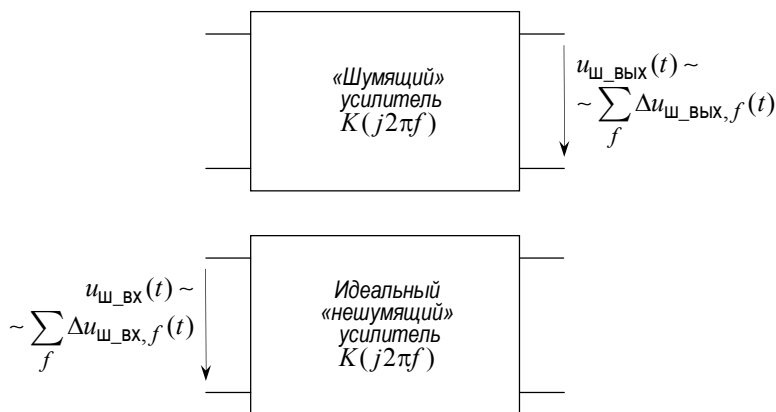


Рис. 4.22. Представление усилителя с собственным шумом на выходе (здесь источник сигнала ко входу усилителя не подключен) в виде эквивалентного источника шума на входе и следующего за ним идеального («нешумящего») усилителя

ходе «нешумящего» усилителя в окрестности каждой точки на оси частот f имеет прежнее значение $\Delta u_{\text{ш_вых},f}^2$, равное $|K(j2\pi f)|^2 \cdot \Delta u_{\text{ш_вх},f}^2$.

Шум на выходе усилителя зависит от того, что включено в его входной цепи. Рассмотрим два крайних случая – короткое замыкание на входе (кз) и холостой ход на входе (хх).

Пусть в режиме короткого замыкания на входе с. п. м. выходного шума $u_{\text{ш_вых}}^{\text{кз}}(t)$ равна $G_{\text{ш_вых}}^{\text{кз}}(f)$. Изобразим эквивалентный для этого случая источник шума во входной цепи в виде источника ЭДС $e_{\text{ш_ус_вх}}(t)$ (рис. 4.23а):

$$e_{\text{ш_ус_вх}}(t) \sim \sum_f \Delta e_{\text{ш_ус_вх},f}(t),$$

$$\overline{\Delta e_{\text{ш_ус_вх},f}^2} = \frac{G_{\text{ш_вых}}^{\text{кз}}(f)}{|K(j2\pi f)|^2} \Delta f.$$

Чаще всего с. п. м. шумовой ЭДС $e_{\text{ш_ус_вх}}(t)$ (дробь, являющаяся множителем при Δf в правой части последнего соотношения) задают указанием зависящего от частоты сопротивления $R_{\text{ш_ус}}(f)$ некоего воображаемого «шумящего» элемента, для которого справедливо равенство

$$4kT_{\text{и}}R_{\text{ш_ус}}(f) = \frac{G_{\text{ш_вых}}^{\text{кз}}(f)}{|K(j2\pi f)|^2},$$

где $T_{\text{и}}$, как и ранее, – температура источника сигнала. Зависимость $R_{\text{ш_ус}}$ от частоты будем иметь в виду по умолчанию.

На рис. 4.23а и далее потери во входной цепи самого усилителя учитываются в «нешумящем» резисторе $R_{\text{вх}}$, изображаемом на рисунке слева от источника шумовой ЭДС $e_{\text{ш_ус_вх}}(t)$. Сопротивление справа от точек $A'''B'''$ считается бесконечно большим.

При холостом ходе на входе шум на выходе усилителя $u_{\text{ш_вых}}^{\text{хх}}(t)$ всегда больше, чем при коротком замыкании на входе. Отразим это увеличение шума на выходе в эквивалентной шумовой схеме входной цепи путем добавления в разомкнутую входную цепь усилителя источника шумового тока $i_{\text{ш_ус_вх}}(t)$ так, чтобы результирующее шумовое напряжение $u_{\text{ш_вх}}(t)$ на входе «нешумящего» усилителя (между точками A''' и B''' ,

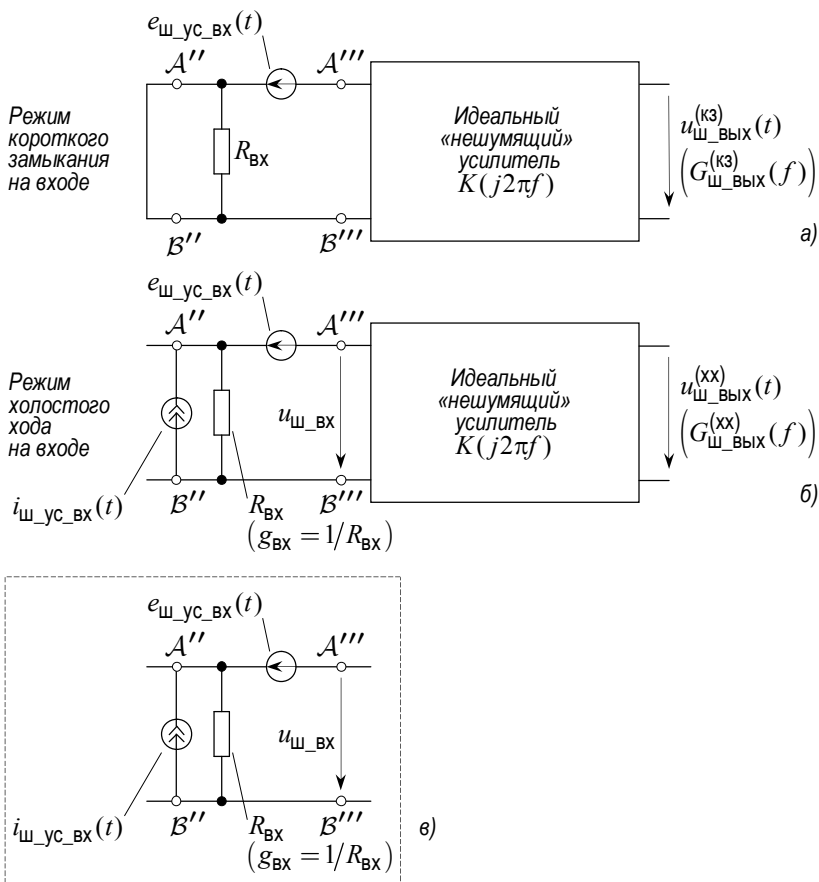


Рис. 4.23. К составлению эквивалентной шумовой схемы входной цепи «шумящего» усилителя (резистор $R_{\text{вх}}$ – «нешумящий»)

рис. 4.23б) имело с. п. м., равную $G_{\text{ш_вых}}^{\text{xx}}(f)/|K(j2\pi f)|^2$ при условии, что $G_{\text{ш_вых}}^{\text{xx}}(f)$ – с. п. м. шума на выходе в режиме холостого хода на входе.

Будем считать, что источники $e_{\text{ш_ус_вх}}(t)$ и $i_{\text{ш_ус_вх}}(t)$ независимы и

$$i_{\text{ш_ус_вх}}(t) \sim \sum_f \Delta i_{\text{ш_ус_вх},f}(t).$$

Тогда мощности элементарных составляющих $\Delta e_{ш_ус_вх,f}(t)$ и $\Delta i_{ш_ус_вх,f}(t) \cdot R_{вх}$ ЭДС $e_{ш_ус_вх}(t)$ и напряжения $i_{ш_ус_вх}(t) \cdot R_{вх}$, возникающего на входном сопротивлении усилителя $R_{вх}$ от протекания по нему тока $i_{ш_ус_вх}(t)$, необходимо сложить, чтобы получить требуемую мощность элементарной составляющей $\Delta u_{ш_вх,f}(t)$ результирующего напряжения $u_{ш_вх}(t)$ на входе «нешумящего» усилителя:

$$\frac{1}{g_{вх}^2} \overline{\Delta i_{ш_ус_вх,f}^2} + \overline{\frac{\Delta e_{ш_ус_вх,f}^2}{4kT_{и}R_{ш_ус} \cdot \Delta f}} = \frac{G_{ш_вхх}^{xx}(f)}{|K(j2\pi f)|^2} \cdot \Delta f$$

($g_{вх} = 1/R_{вх}$). Если $\overline{\Delta i_{ш_ус_вх,f}^2}$ представить в виде $4kT_{и}g_{ш_ус}(f) \cdot \Delta f$, то зависящую от частоты проводимость $g_{ш_ус}(f)$ некоего воображаемого «шумящего» элемента можно найти из равенства

$$4kT_{и}g_{ш_ус}(f) \cdot \Delta f = g_{вх}^2 \cdot \left(\frac{G_{ш_вхх}^{xx}(f)}{|K(j2\pi f)|^2} \cdot \Delta f - 4kT_{и}R_{ш_ус}(f) \cdot \Delta f \right).$$

Зависимость $g_{ш_ус}$ от частоты будем иметь в виду по умолчанию.

Схема, изображенная отдельно на рис. 4.23в (обведенная пунктирной рамкой), как раз и представляет собой эквивалентную шумовую схему входной цепи «шумящего» усилителя. В этой схеме $g_{ш_ус} \neq 1/R_{ш_ус}$.

Схема во входной цепи усилителя при подключении «шумящего» источника сигнала

В результате соединения выводов вторичной обмотки трансформатора (точки A' и B' на рис. 4.21) со входом «шумящего» усилителя (точки A'' и B'' на рис. 4.23) цепь на входе «нешумящего» усилителя принимает вид схемы, приведенной на рис. 4.24, где оставлены для рассмотрения только источники шума, а источник полезного сигнала опущен.

Очевидно, что

$$u_{ш_вх}(t) = \underbrace{\left[i'_{ш_и}(t) + i_{ш_ус_вх}(t) \right] \cdot (R'_{и} \| R_{вх})}_{\substack{\text{напряжение между} \\ \text{точками } A' \equiv A'' \text{ и } B' \equiv B''}} + e_{ш_ус_вх}(t).$$

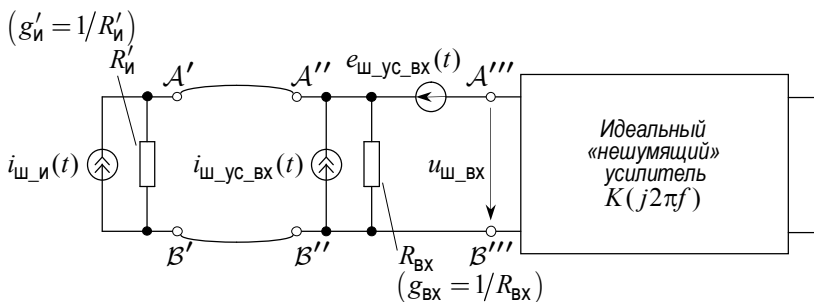


Рис. 4.24. Схема во входной цепи усилителя при подключении к его входу «шумящего» источника сигнала (резисторы $R'_и$ и $R_{вх}$ – «нешумящие»)

Переходя к элементарным составляющим всех шумовых процессов, входящих в последнее равенство, и вычисляя мощность $\overline{\Delta u_{ш_вх,f}^2}$ элементарной составляющей результирующего суммарного шумового напряжения $u_{ш_вх}(t)$ на входе «нешумящего» усилителя путем сложения мощностей соответствующих элементарных составляющих, получим

$$\overline{\Delta u_{ш_вх,f}^2} = \frac{1}{(g'_и + g_{вх})^2} \cdot 4kT_и g'_и \Delta f + \frac{1}{(g'_и + g_{вх})^2} \cdot 4kT_и g_{ш_ус} \Delta f + 4kT_и R_{ш_ус} \Delta f,$$

где принято во внимание, что $R'_и \parallel R_{вх} = 1/(g'_и + g_{вх})$.

Коэффициент шума (шум-фактор)

По определению коэффициент шума \mathcal{F} равен

$$\mathcal{F} = \frac{\overline{\Delta u_{ш_вх,f}^2}}{\text{Доля } \overline{\Delta u_{ш_вх,f}^2}, \text{ обязанная своим происхождением наличию собственного шума у источника сигнала}}.$$

Величина, указанная в знаменателе дроби в выражении для \mathcal{F} , есть не что иное, как

$$\overline{\Delta u_{\text{ш_вх},f}^2} \Big|_{\substack{R_{\text{ш_ус}}=0 \\ g_{\text{ш_ус}}=0}} = \frac{1}{(g'_и + g_{\text{вх}})^2} \cdot 4kT_и g'_и \Delta f .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= 1 + \frac{\frac{1}{(g'_и + g_{\text{вх}})^2} \cdot 4kT_и g_{\text{ш_ус}} \Delta f}{\frac{1}{(g'_и + g_{\text{вх}})^2} \cdot 4kT_и g'_и \Delta f} + \frac{4kT_и R_{\text{ш_ус}} \Delta f}{\frac{1}{(g'_и + g_{\text{вх}})^2} \cdot 4kT_и g'_и \Delta f} = \\ &= 1 + \frac{g_{\text{ш_ус}}}{g'_и} + \frac{(g'_и + g_{\text{вх}})^2 \cdot R_{\text{ш_ус}}}{g'_и} = \\ &= 1 + 2g_{\text{вх}} R_{\text{ш_ус}} + g'_и R_{\text{ш_ус}} + \frac{g_{\text{ш_ус}} + g_{\text{вх}}^2 R_{\text{ш_ус}}}{g'_и} . \end{aligned}$$

Выбирая подходящим образом коэффициент трансформации $n = w_2/w_1$, можно минимизировать \mathcal{F} (рис. 4.25). Поиск минимума по n эквивалентен поиску минимума по $g'_и$:

$$\frac{d\mathcal{F}}{d(g'_и)} = 0 \Rightarrow R_{\text{ш_ус}} - \frac{g_{\text{ш_ус}} + g_{\text{вх}}^2 R_{\text{ш_ус}}}{(g'_и)^2} = 0 .$$

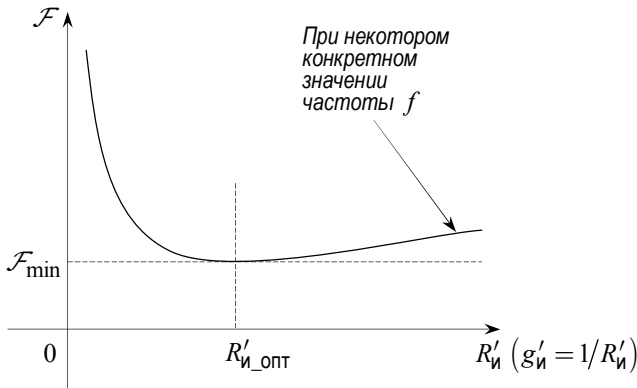


Рис. 4.25. Типичная зависимость коэффициента шума от сопротивления источника сигнала, пересчитанного к выводам вторичной обмотки трансформатора

Таким образом, минимум \mathcal{F} достигается при

$$g'_{и_опт} = \sqrt{g_{вх}^2 + g_{ш_yc} / R_{ш_yc}}$$

и равен

$$\min_{g'_{и}} \mathcal{F} = 1 + 2g_{вх}R_{ш_yc} + 2\sqrt{g_{вх}^2 R_{ш_yc}^2 + g_{ш_yc}R_{ш_yc}} ,$$

$$\text{если } n = n_{опт} = \sqrt{(R'_{и_опт})/R_{и}} = \sqrt{1/(g'_{и_опт} \cdot R_{и})} .$$

5. Узкополосный гауссовский случайный процесс

«Вероятностный процесс называют узкополосным, если ширина полосы той области частот, где спектральная плотность имеет значительную величину, мала по сравнению со средней частотой этой области... Если посмотреть выборочную функцию такого процесса на экране осциллографа, то она будет иметь вид синусоиды с медленно меняющимися огибающей (амплитудой) и фазой.» (В. Б. Давенпорт и В. Л. Рут [6], с. 186).

На рис. 5.1 и 5.2 представлены такие «осциллограммы», полученные в моделирующей программе **rsn_30**, причем на втором из этих рисунков изображено возникающее на экране наложение нескольких отрезков узкополосного случайного процесса, начинающихся в моменты времени, когда сигнал пересекает нулевой уровень с производной не меньше некоторого наперед заданного числа (как это происходит в цепи синхронизации развертки реального осциллографа при наблюдении последовательных отрезков одной реализации).

5.1. Гауссовские случайные величины и процессы: основные определения и свойства

У действительного гауссовского случайного процесса $x(t)$ мгновенные значения являются случайными величинами с нормальным распределением:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (5.1)$$

где m и σ — среднее и среднеквадратическое значения соответственно, остающиеся неизменными со временем, когда процесс стационарен.

По меньшей мере по двум причинам «гауссовские случайные величины и гауссовские вероятностные процессы являются особенно важными и заслуживают специального изучения» (В. Б. Давенпорт и В. Л. Рут [6], с. 172).

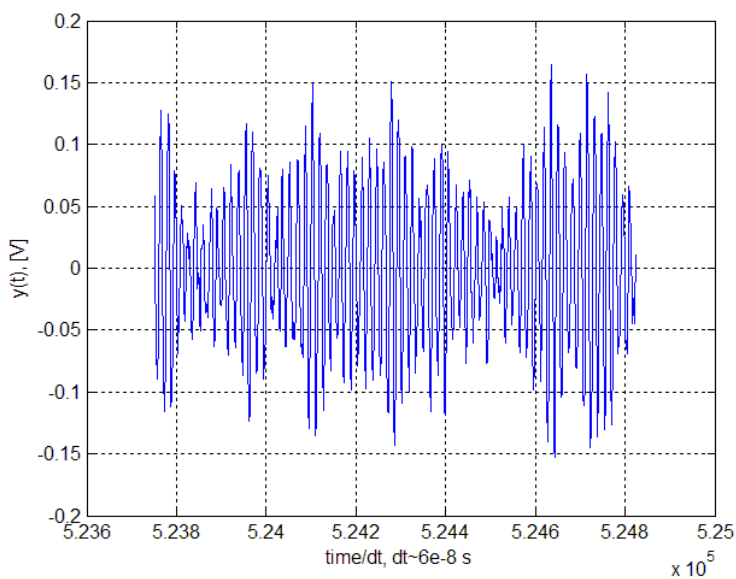


Рис. 5.1. Отрезок одиночной реализации узкополосного процесса

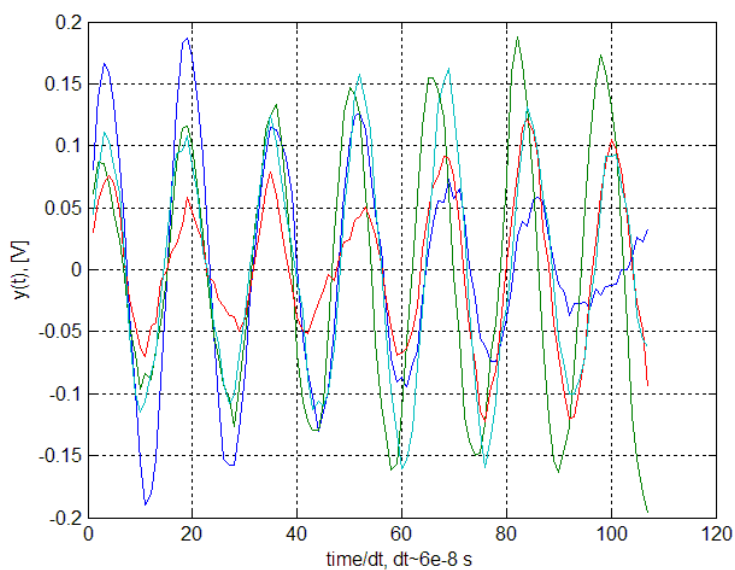


Рис. 5.2. Наложение отрезков из ансамбля независимых реализаций узкополосного процесса

Главная причина заключается в том, что на практике чаще всего приходится иметь дело с такими случайными процессами, которые являются совокупным результатом проявления очень большого числа независимых обстоятельств одной и той же физической природы. Поэтому можно ожидать, что будет действовать правило, вытекающее из уже упоминавшейся центральной предельной теоремы теории вероятностей, согласно которой распределение вероятностей суммы независимых случайных величин при неограниченном увеличении числа слагаемых стремится к гауссовскому.

Другая причина состоит в том, что именно гауссовские процессы к настоящему времени оказались изученными лучше всего теоретически благодаря относительной простоте с точки зрения их математического описания и анализа.

Приводимые здесь мелким шрифтом сведения о свойствах гауссовских случайных величин и гауссовских случайных процессов могут оказаться полезными при решении многих задач, относящихся к случайным сигналам и шумам, но в данном пособии в дальнейшем используются лишь частично.

Гауссовские случайные величины обладают рядом замечательных свойств:

- сумма независимых гауссовских случайных величин является гауссовской случайной величиной;
- если сумма двух независимых случайных величин распределена по нормальному закону, то каждое слагаемое тоже распределено по нормальному закону;
- линейное преобразование гауссовских случайных величин приводит снова к гауссовским случайным величинам;
- если случайные величины y_1 и y_2 имеют двумерную гауссовскую плотность распределения вероятностей

$$p(y_1, y_2) = \frac{e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(y_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(y_1 - m_1)(y_2 - m_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - r^2}}, \quad (5.2)$$

с коэффициентом корреляции

$$r = r_{12} = r_{21} = \frac{\iint (y_1 - m_1)(y_2 - m_2) p(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sigma_1 \sigma_2},$$

то с помощью поворота системы координат

$$x_1 = y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta,$$

$$x_2 = -y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta$$

пару коррелированных случайных величин y_1 и y_2 можно преобразовать в пару независимых гауссовских случайных величин x_1 и x_2 ;

– из некоррелированности двух гауссовских случайных величин следует их независимость; другими словами, если $r = 0$, то

$$p(y_1 y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(y_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}} = p(x_1) \cdot p(x_2)$$

(в общем случае это не справедливо);

– при наличии статистической связи ($r \neq 0$) между гауссовскими случайными величинами y_1 и y_2 условная плотность распределения вероятностей величины y_2 при заданном значении y_1 равна

$$p(y_2 | y_1) = \frac{p(y_1, y_2)}{p(y_1)} = \frac{e^{-\frac{[y_2 - m_2 - (y_1 - m_1)r\sigma_2/\sigma_1]^2}{2\sigma_2^2(1-r^2)}}}{\sigma_2 \sqrt{2\pi(1-r^2)}},$$

и $p(y_2 | y_1) \rightarrow p(y_2) = \exp\left[-(y_2 - m_2)^2 / (2\sigma_2^2)\right] / (\sqrt{2\pi}\sigma_2)$ при $r \rightarrow 0$.

По определению действительный вероятностный процесс $x(t)$ является гауссовским, когда n -мерная плотность совместного распределения вероятностей (см. пп. 1.1 – 1.3) имеет вид

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2|r_{ij}|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot \frac{x_i - m_i}{\sigma_i} \cdot \frac{x_j - m_j}{\sigma_j}\right]}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \dots \sigma_n |r_{ij}|^{1/2}}, \quad (5.3)$$

где $x_{i,j} \equiv x_{t_i, t_j}$, $m_{i,j} \equiv \overline{x_{t_i, t_j}}$, $\sigma_{i,j} \equiv \sqrt{\overline{(x_{t_i, t_j} - \overline{x_{t_i, t_j}})^2}}$ – мгновенные, средние и среднеквадратические значения процесса в моменты времени t_i, t_j , $i, j = 1, \dots, n$, $r_{ij} = R_{ij} / (\sigma_i \sigma_j)$ – коэффициенты корреляции, $R_{ij} = \overline{x_{t_i} \cdot x_{t_j}}$ – значения корреляционной функции для моментов времени t_i, t_j , а A_{ij} – алгебраические дополнения элементов r_{ij} в матрице $\|r_{ij}\|$.

У стационарного в широком смысле гауссовского процесса все $m_{i,j} = m$, $\sigma_{i,j} = \sigma$ и R_{ij} зависят только от разности моментов времени $t_j - t_i$. Поэтому стационарный в широком смысле гауссовский случайный процесс стационарен также и в узком смысле.

Многомерная плотность совместного распределения вероятностей гауссовских случайных величин должна быть именно такой, как указано в (5.3), для того чтобы, действуя по общему правилу

$$p(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_{k+1}, \dots, dx_n$$

(n-k)-кратный
интеграл

($k < n$) и переходя от большего числа переменных к меньшему, можно было из (5.3) получить, в частности, (5.2) и (5.1).

5.2. Разложение на квадратурные составляющие

Реализацию узкополосного случайного процесса $x(t)$ при $\overline{x(t)} = 0$ можно записать в виде

$$x(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (5.4)$$

где ω_0 – резонансная частота, скажем, простейшего узкополосного фильтра, а $U(t)$ и $\varphi(t)$ – соответственно огибающая и фаза случайного сигнала на выходе такого фильтра, изменяющиеся тем медленнее по сравнению с $\cos \omega_0 t$, чем уже полоса частот, занимаемая спектральной плотностью мощности этого сигнала.

Тогда

$$x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (5.5)$$

где

$$x_c(t) = U(t) \cos \varphi(t), \quad x_s(t) = U(t) \sin \varphi(t) \quad (5.6)$$

и при этом

$$U(t) = \sqrt{[x_c(t)]^2 + [x_s(t)]^2}, \quad \varphi(t) = \arctg \frac{x_s(t)}{x_c(t)}. \quad (5.7)$$

Здесь $x_c(t)$ и $x_s(t)$ – медленно меняющиеся амплитуды так называемых квадратурных составляющих $x_c(t) \cdot \cos \omega_0 t$ и $-x_s(t) \cdot \sin \omega_0 t$.

Узкополосный случайный процесс можно представить в виде векторной диаграммы (рис. 5.3), где отдельными векторами приближенно изо-

бражается гармоническое колебание в узком интервале времени Δt вблизи моментов времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \dots$. Предполагается, что в интервал Δt укладывается сравнительно много периодов высокочастотного колебания частоты ω_0 ($\Delta t \gg 2\pi/\omega_0$), но за то же время амплитуда и фаза колебания практически не успевают сколько-нибудь значительно измениться. В i -й момент времени $x_c(t_i)$ и $x_s(t_i)$ – проекции i -го вектора на оси $\cos \omega_0 t$ и $-\sin \omega_0 t$, а длина этого вектора и угол его наклона по отношению к положительному направлению оси $\cos \omega_0 t$ являются значениями огибающей и фазы колебания в окрестности точки t_i на оси времени. При переходе от одного момента времени к другому происходит медленное вращение вектора с одновременным изменением его длины по мере того, как случайные величины $x_c(t)$ и $x_s(t)$ принимают новые значения.

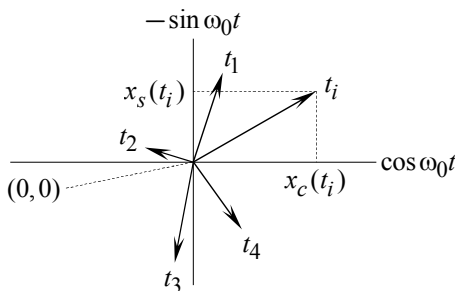


Рис. 5.3. Представление узкополосного процесса в виде векторной диаграммы

При выполнении ряда ограничений теоретически показывается (В. Б. Давенпорт и В. Л. Рут [6]), что в случае, когда исходный узкополосный процесс $x(t)$ – гауссовский, низкочастотные процессы $x_c(t)$ и $x_s(t)$ также являются гауссовскими, каждый из них обладает дисперсией (мощностью) той же величины σ_x^2 , что процесс $x(t)$, и они независимы один относительно другого.

Моделирующая программа **rsn_31** демонстрирует, что упомянутые свойства процессов $x_c(t)$ и $x_s(t)$ действительно имеют место в условиях, представляющих интерес на практике.

На рис. 5.4 показаны амплитудно-частотные характеристики цифровых фильтров: зеленым цветом – характеристика полосового фильтра, на вход которого подается гауссовский «белый» шум, так что на его выходе возникает узкополосный гауссовский сигнал $x(t)$, а голубым цветом – характеристика каждого из двух фильтров нижних частот, следующих, по

предположению, за перемножителями сигнала $x(t)$ с колебаниями $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$; в результате подавления высокочастотных колебаний фильтрами нижних частот на их выходах появляются сигналы $x_c(t)$ и $x_s(t)$.

Временные диаграммы на рис. 5.5 служат примером того, какой вид имеют узкополосный сигнал $x(t)$ и сигналы $x_c(t)$ и $x_s(t)$ в «косинусоидальном» («косинусном») и «синусоидальном» («синусном») каналах.

Для одной из реализаций узкополосного сигнала $x(t)$ (последней в череде реализаций, по которым производилось «усреднение по ансамблю», см. ниже) в данной программе предусмотрен вывод в командном окне значений дисперсии процесса $x(t)$ и его квадратурных составляющих $x_c(t)$ и $x_s(t)$ на выходах фильтров нижних частот. В том запуске моделирующей программы **rsn_31**, результаты которого приводятся здесь, дисперсии (мощности) упомянутых сигналов равнялись $3.0755\text{e-}002$, $3.0696\text{e-}002$ и $3.0049\text{e-}002$ соответственно. Следовательно, в данном случае отличие дисперсии сигнала $x_c(t)$ от дисперсии сигнала $x(t)$ составило 0,19 %, а отличие дисперсии сигнала $x_s(t)$ от дисперсии сигнала $x(t)$ – 2,35 %.

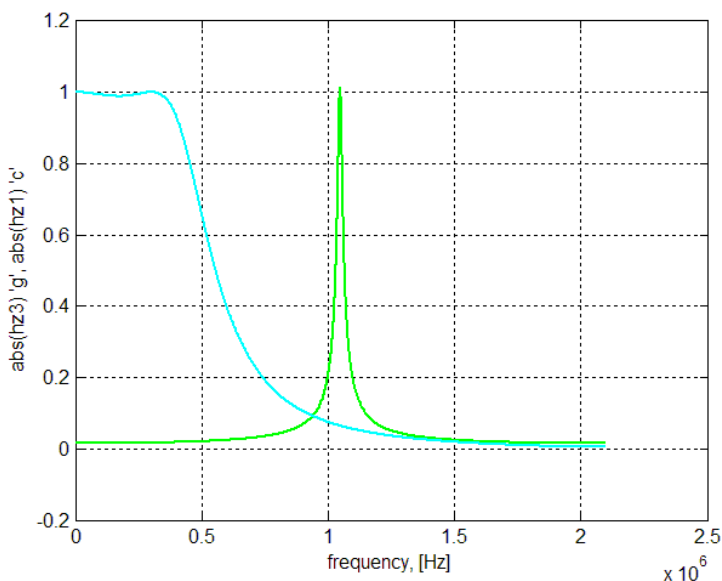


Рис. 5.4. Характеристики цифровых полосового фильтра и фильтров нижних частот

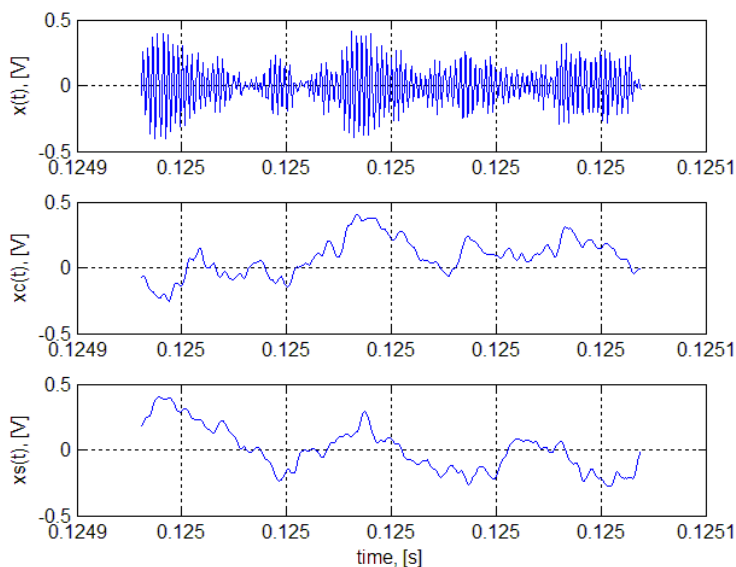


Рис. 5.5. Исходный узкополосный сигнал x и низкочастотные сигналы x_c и x_s

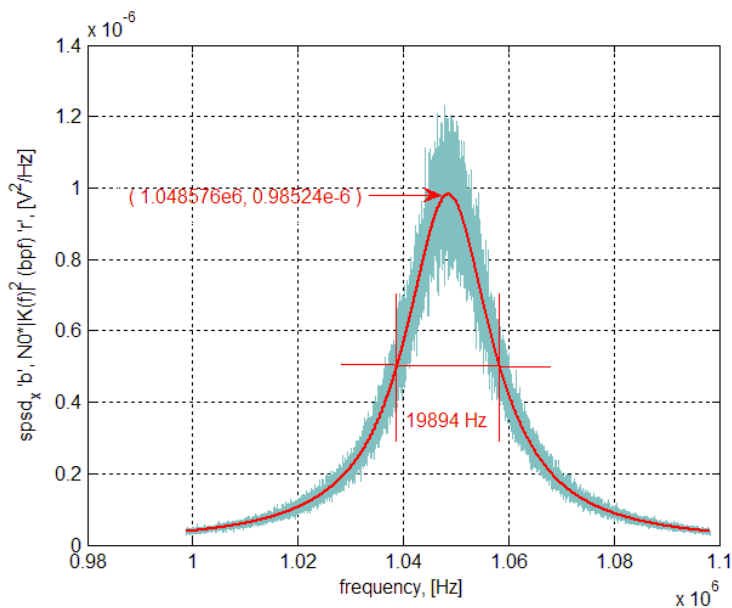


Рис. 5.6. Односторонняя спектральная плотность мощности узкополосного процесса, разлагаемого на квадратурные составляющие

Рис. 5.6 повторяет по существу то, что было изображено на рис. 4.16, а именно — одностороннюю спектральную плотность узкополосного гауссовского шума на выходе резонансного усилителя как результат усреднения по M реализациям этого сигнала длины N (в данном примере $N \approx 10^6$, а $M = 128$). Как и ранее, красная кривая является ожидаемой теоретической зависимостью от частоты односторонней спектральной плотности мощности шума на выходе простейшего узкополосного фильтра с «белым» шумом на входе. Горизонтальная красная прямая проведена на уровне, вдвое меньшем, чем значение теоретической зависимости в максимуме; точки пересечения горизонтальной прямой с теоретической спектральной плотностью соответствуют границам амплитудно-частотной характеристики полосового цифрового фильтра на уровне 0.707, расстояние между которыми по оси частот, указанное на графике, равно полосе пропускания данного фильтра.

Полученные в компьютерном эксперименте односторонние спектральные плотности мощности низкочастотных амплитуд квадратурных составляющих $x_c(t) \cdot \cos \omega_0 t$ и $-x_s(t) \cdot \sin \omega_0 t$ показаны на рис. 5.7 и 5.8. На этих графиках красным цветом изображены ожидаемые зависимости спектральной плотности от частоты, в точности повторяющие правую половину возведенной в квадрат резонансной кривой полосового фильтра, с помощью которого образуется узкополосный процесс $x(t)$. Это является следствием того, что правая половина частотной характеристики простейшего однокаскадного усилителя с параллельным LC -контуром в качестве коллекторной нагрузки совпадает с частотной характеристикой интегрирующей цепи с граничной частотой $f_{гр}$, равной половине ширины резонансной кривой на уровне 0.707. Поэтому нет ничего удивительного в том, что зависимости спектральной плотности мощности сигналов $x_c(t)$ и $x_s(t)$ от частоты совпадают по форме с такой зависимостью для интегрирующей цепи (см. рис. 4.2). Единственное отличие заключается в том, что значения о. с. п. м. сигналов $x_c(t)$ и $x_s(t)$ вдвое превосходят значения о. с. п. м. простейшего узкополосного фильтра на соответствующих частотах; грубо говоря, это происходит потому, что в мощность каждого из сигналов $x_c(t)$ и $x_s(t)$ вносит свой вклад не только шум, сосредоточенный в интервале частот, относящемся к правой половине частотной характеристики фильтра, но в равной степени также и шум, спектр которого расположен в интервале частот, относящемся к левой половине частотной характеристики фильтра.

Мгновенные значения низкочастотных сигналов $x_c(t)$ и $x_s(t)$ являются гауссовскими случайными величинами, как это следует из гистограмм, построенных программой **tr_gauss** и приведенных на рис. 5.9 и

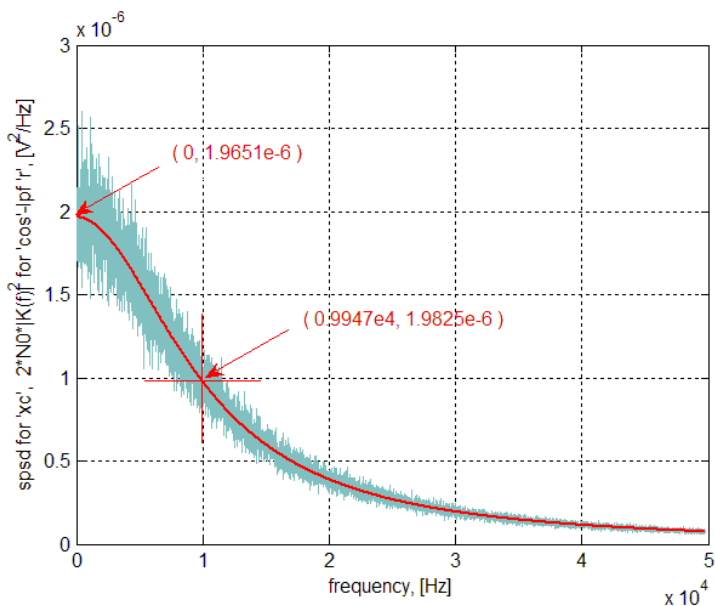


Рис. 5.7. О. с. п. м. низкочастотного процесса в «косинусоидальном» канале

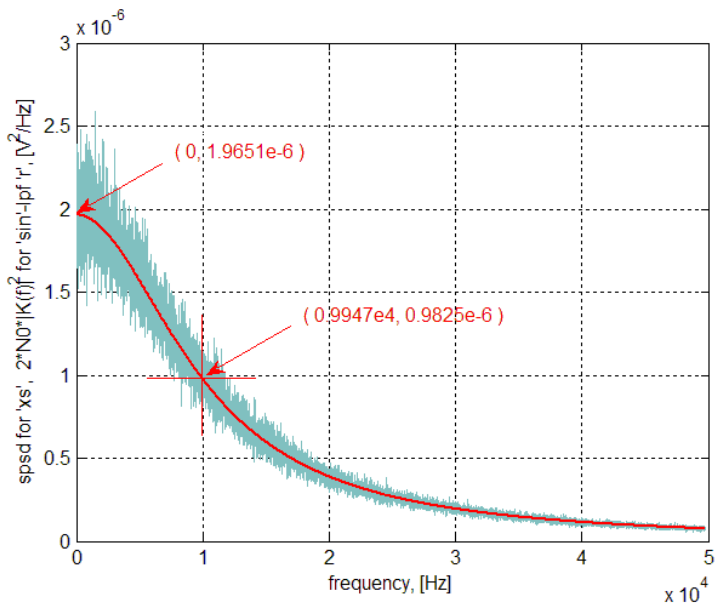


Рис. 5.8. О. с. п. м. низкочастотного процесса в «синусоидальном» канале

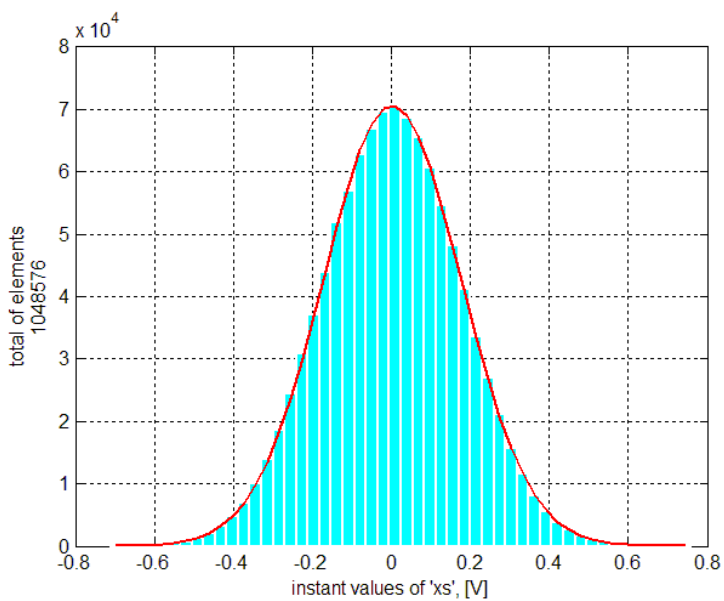
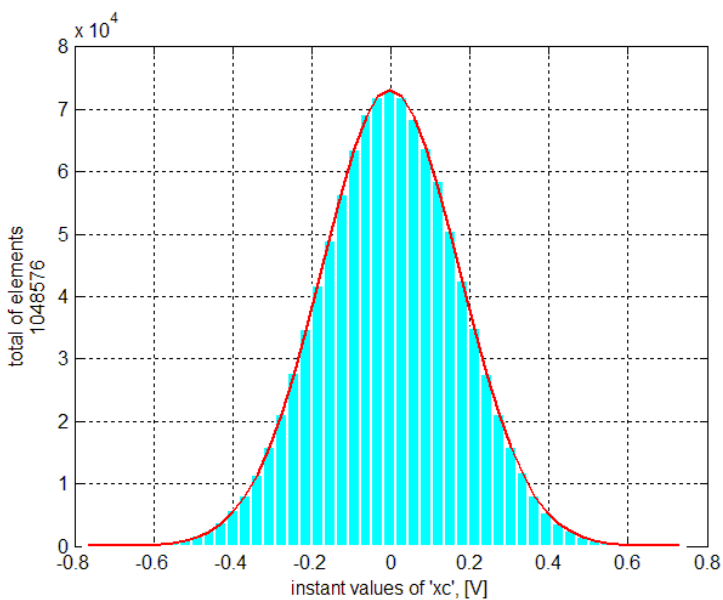


Рис. 5.9 и 5.10. Распределение мгновенных значений низкочастотных сигналов в «косинусоидальном» и «синусоидальном» каналах соответственно

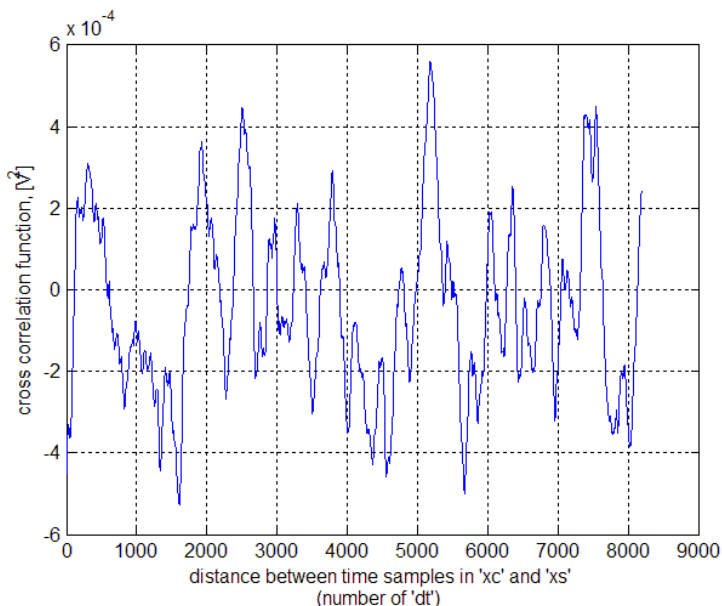


Рис. 5.11. Взаимная корреляционная функция сигналов x_c и x_s

5.10, где кривые красного цвета проведены по формуле (5.1) после подсчета среднего и дисперсии для соответствующих массивов временных отсчетов.

В условиях разбиравшегося здесь примера значения взаимной корреляционной функции сигналов $x_c(t)$ и $x_s(t)$ не выходили за пределы $\pm 0.001 \text{ B}^2$ при дисперсии каждого из них 0.03 B^2 (рис. 5.11), что свидетельствует в пользу независимости этих низкочастотных процессов.

Автокорреляционные функции сигналов $x_c(t)$ и $x_s(t)$ в данном случае, очевидно, имеют вид (4.5), поскольку их спектральная плотность мощности в точности такая же, как у сигнала на выходе интегрирующей цепи при «белом» шуме на ее входе.

5.3. Огибающая и фаза узкополосного гауссовского процесса

Правила перехода от одних случайных величин к другим, когда функциональная зависимость между старыми и новыми случайными величинами взаимно однозначна, позволяют найти распределения огибающей и фазы узкополосного гауссовского случайного процесса по известным распределениям мгновенных значений сигналов $x_c(t)$ и $x_s(t)$.

Пусть $p(U, \varphi)$ – плотность совместного распределения вероятностей огибающей U и фазы φ , а $p(x_c, x_s)$ – плотность совместного распределения мгновенных значений сигналов $x_c(t)$ и $x_s(t)$ в какой-то определенный момент времени t . Из равенства вероятностей

$$p(U, \varphi) dU d\varphi = p(x_c, x_s) dx_c dx_s$$

следует, что

$$p(U, \varphi) = p(x_c(U, \varphi), x_s(U, \varphi)) \cdot J,$$

где J – якобиан преобразования x_c и x_s в U и φ . Согласно (5.6)

$x_c = U \cos \varphi$ и $x_s = U \sin \varphi$, поэтому

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial U} & \frac{\partial x_c}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_s}{\partial U} & \frac{\partial x_s}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -U \sin \varphi \\ \sin \varphi & U \cos \varphi \end{vmatrix} = U.$$

Воспользуемся тем, что мгновенные значения сигналов x_c и x_s являются независимыми случайными величинами с распределениями

$$p(x_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x_c^2}{2\sigma_x^2}}, \quad p(x_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x_s^2}{2\sigma_x^2}}, \quad -\infty < x_c, x_s < \infty,$$

где σ_x^2 – дисперсия узкополосного процесса $x(t)$. Тогда

$$p(U, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x_c^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x_s^2}{2\sigma_x^2}} \cdot U = \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (5.8)$$

$$0 \leq U < \infty, \quad -\pi \leq \varphi < \pi,$$

откуда

$$p(U) = \int_{-\pi}^{\pi} p(U, \varphi) d\varphi = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}, \quad 0 \leq U < \infty, \quad (5.9)$$

$$p(\varphi) = \int_0^{\infty} p(U, \varphi) dU = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi < \pi. \quad (5.10)$$

Выражение (5.9) для $p(U)$ называется распределением Рэлея (рис. 5.12). Напомним, что размерность плотности вероятностей для всякой величины, имеющей физический смысл, обратна размерности этой физической величины. Поэтому в случае, когда U — напряжение, $p(U)$ имеет размерность $[1/B]$.

Среднее значение и дисперсия рэлеевского распределения равны:

$$m_U = \int_0^{\infty} U p(U) dU = \int_0^{\infty} \frac{U^2}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x^3, \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_U^2 &= \int_0^{\infty} U^2 p(U) dU - m_U^2 = \\ &= \sigma_x^2 \int_0^{\infty} \frac{U^2}{2\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} d\left(\frac{U^2}{2\sigma_x^2}\right) - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x\right)^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_x^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Фаза φ распределена равномерно в интервале $[-\pi, \pi]$.

$$^3) \int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{(n+1)/2}} \quad (a > 0, n > -1);$$

в частности: $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ и $\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$ при $a > 0$.

$$^4) \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n > -1); \text{ в частности, } \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

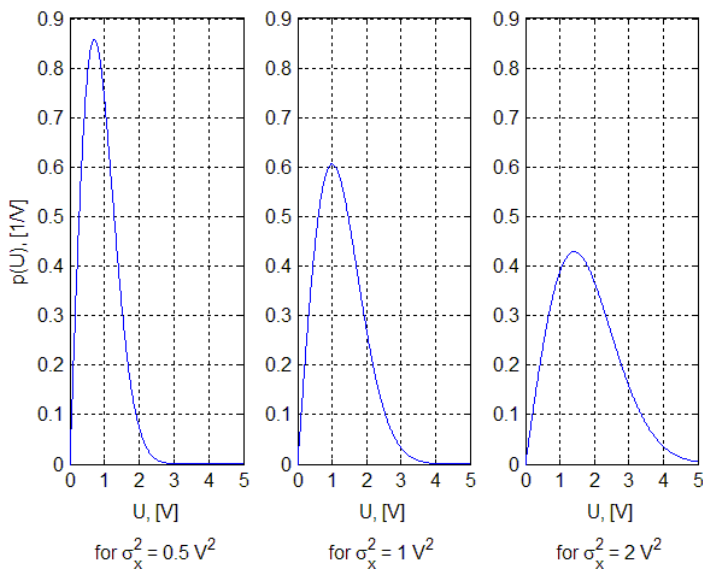


Рис. 5.12. Распределение Рэлея

Из вывода соотношений (5.8) – (5.10) следует, что

$$p(U, \varphi) = p(U) \cdot p(\varphi),$$

то есть относящиеся к одному и тому же моменту времени мгновенные значения огибающей и фазы узкополосного гауссовского процесса независимы. Однако процессы $U(t)$ и $\varphi(t)$ не являются независимыми, поскольку

$$p(U_{t_1}, U_{t_2}, \varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}) \neq p(U_{t_1}, U_{t_2}) \cdot p(\varphi_{t_1}, \varphi_{t_2})$$

(Давенпорт В. Б. и Рут В. Л. [6]).

Программа **rsn_32** позволяет составить представление о том, как выглядят сами огибающая и фаза (рис. 5.13 и 5.14) и их спектральные плотности мощности (рис. 5.15), а также убедиться в том, что распределения их мгновенных значений – рэлеевское и равномерное соответственно (рис. 5.16). (Спектральная плотность мощности для огибающей находится за вычетом ее постоянной составляющей.)

Условия разбираемого примера точно такие же, какие были предположены выше при обсуждении вопроса о разложении узкополосного гауссовского процесса на квадратурные составляющие.

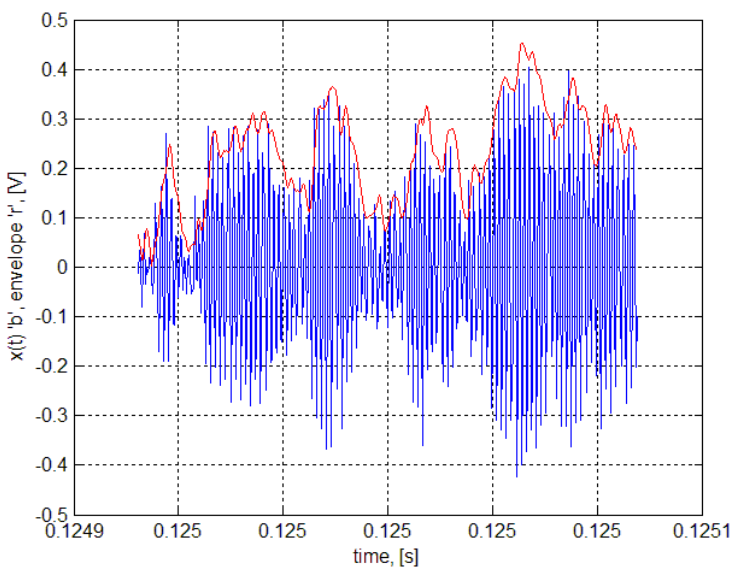
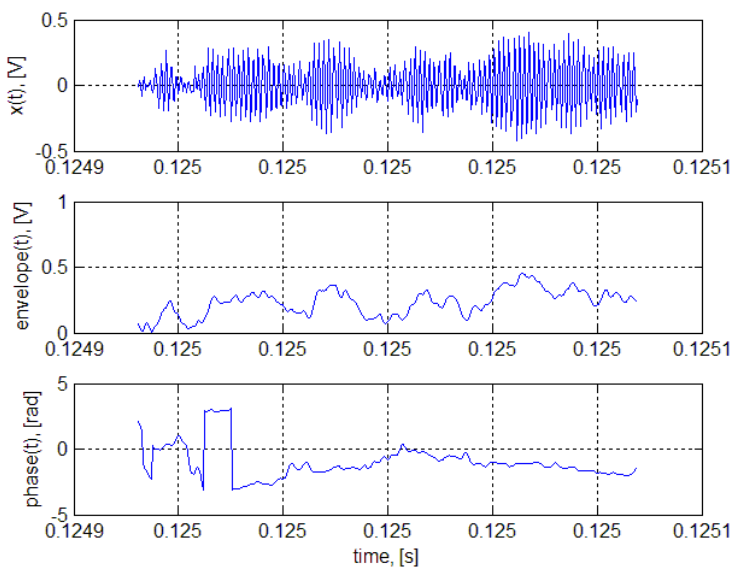


Рис. 5.13 и 5.14. Отрезки реализаций огибающей и фазы узкополосного гауссовского случайного процесса

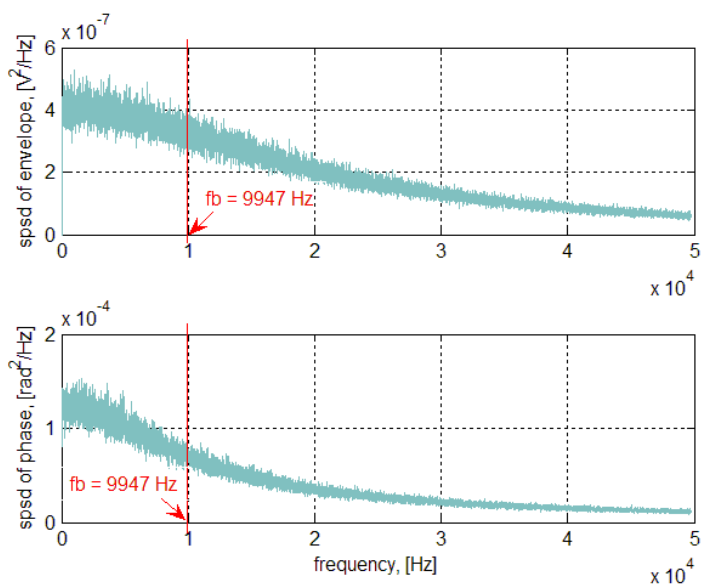


Рис. 5.15. О. с. п. м. огибающей и фазы узкополосного гауссовского процесса

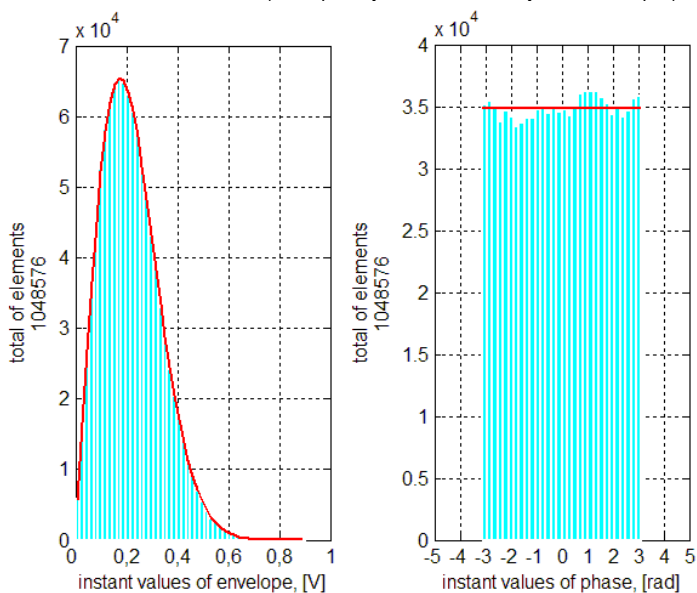


Рис. 5.16. Распределения мгновенных значений огибающей и фазы

6. Обнаружение полезного сигнала в смеси полезного сигнала с шумом

6.1. Статистические свойства суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума

Пусть $x(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \psi)$ – полезный сигнал (в предположении, что U_m и ψ остаются постоянными), а $n(t)$ – узкополосный гауссовский шум с центральной частотой ω_0 , то есть

$$x(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \psi) + U_n(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_n(t)],$$

где $U_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ – огибающая и фаза гауссовского шума.

Представим шум в виде суммы его квадратурных составляющих $n_c(t) \cos \omega_0(t)$ и $-n_s(t) \sin \omega_0(t)$ с гауссовскими независимыми низкочастотными процессами $n_c(t) = U_n(t) \cos \varphi_n(t)$ и $n_s(t) = U_n(t) \sin \varphi_n(t)$ с дисперсией σ_n^2 каждый:

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t) &= [U_m \cos \psi + n_c(t)] \cos \omega_0 t - [U_m \sin \psi + n_s(t)] \sin \omega_0 t = \\ &= x_{\Sigma c}(t) \cos \omega_0 t - x_{\Sigma s}(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Таким образом, процесс $x(t)$ также может быть разложен на квадратурные составляющие с медленно меняющимися амплитудами

$$x_{\Sigma c}(t) = U_m \cos \psi + n_c(t)$$

и

$$x_{\Sigma s}(t) = U_m \sin \psi + n_s(t)$$

(рис. 6.1) или, что то же самое, с медленно меняющимися огибающей

$$U_{\Sigma}(t) = \sqrt{[x_{\Sigma c}(t)]^2 + [x_{\Sigma s}(t)]^2}$$

и фазой

$$\varphi_{\Sigma}(t) = \arctg \frac{x_{\Sigma c}(t)}{x_{\Sigma s}(t)}.$$

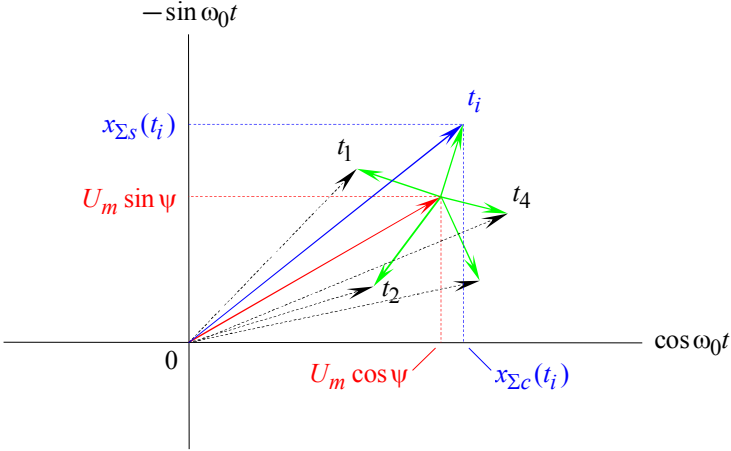


Рис. 6.1. Векторная диаграмма для суммы гармонического сигнала и шума

Аналогично тому, как находится распределение Рэлея, можно найти плотность совместного распределения вероятностей $p(U_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma})$, воспользовавшись нормальностью распределения мгновенных значений амплитуд квадратурных составляющих шума $n_c(t) = x_{\Sigma c}(t) - U_m \cos \psi$ и $n_s(t) = x_{\Sigma s}(t) - U_m \sin \psi$, имея в виду, что $x_{\Sigma c}(t) = U_{\Sigma}(t) \cos \varphi_{\Sigma}(t)$ и $x_{\Sigma s}(t) = U_{\Sigma}(t) \sin \varphi_{\Sigma}(t)$:

$$p(U_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}) dU_{\Sigma} d\varphi_{\Sigma} = p(n_c, n_s) dn_c dn_s,$$

$$p(U_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}) = p(n_c(U_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}), n_s(U_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma})) \cdot J,$$

где

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial n_c}{\partial U_{\Sigma}} & \frac{\partial n_c}{\partial \varphi_{\Sigma}} \\ \frac{\partial n_s}{\partial U_{\Sigma}} & \frac{\partial n_s}{\partial \varphi_{\Sigma}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{\Sigma} & -U_{\Sigma} \sin \varphi_{\Sigma} \\ \sin \varphi_{\Sigma} & U_{\Sigma} \cos \varphi_{\Sigma} \end{vmatrix} = U_{\Sigma}.$$

Следовательно,

$$p(U_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp \left[-\frac{(x_{\Sigma c} - U_m \cos \psi)^2 + (x_{\Sigma s} - U_m \sin \psi)^2}{2\sigma_n^2} \right] \cdot U_{\Sigma}.$$

Выполнив преобразование числителя в показателе экспоненты

$$\begin{aligned} & (x_{\Sigma c} - U_m \cos \psi)^2 + (x_{\Sigma s} - U_m \sin \psi)^2 = \\ & = \underbrace{x_{\Sigma c}^2 + x_{\Sigma s}^2}_{U_{\Sigma}^2} + U_m^2 - 2U_m(x_{\Sigma c} \cos \psi + x_{\Sigma s} \sin \psi) = \\ & = U_{\Sigma}^2 + U_m^2 - 2U_m(U_{\Sigma} \cos \varphi_{\Sigma} \cos \psi + U_{\Sigma} \sin \varphi_{\Sigma} \sin \psi) = \\ & = U_{\Sigma}^2 + U_m^2 - 2U_m U_{\Sigma} \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi), \end{aligned}$$

получим

$$p(U_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}) = \frac{U_{\Sigma}}{2\pi\sigma_n^2} \exp \left[-\frac{U_{\Sigma}^2 + U_m^2 - 2U_m U_{\Sigma} \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{2\sigma_n^2} \right]. \quad (6.1)$$

В результате интегрирования по φ_{Σ} в пределах от $-\pi$ до π находим плотность распределения для U_{Σ} :

$$\begin{aligned} p(U_{\Sigma}) &= \int_{-\pi}^{\pi} p(U_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}) d\varphi_{\Sigma} = \frac{U_{\Sigma}}{\sigma_n^2} e^{-\frac{U_{\Sigma}^2 + U_m^2}{2\sigma_n^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{U_m U_{\Sigma}}{\sigma_n^2} \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)} d\varphi_{\Sigma} = \\ &= \frac{U_{\Sigma}}{\sigma_n^2} e^{-\frac{U_{\Sigma}^2 + U_m^2}{2\sigma_n^2}} I_0 \left(\frac{U_m U_{\Sigma}}{\sigma_n^2} \right)^{5);} \end{aligned} \quad (6.2)$$

здесь $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка⁶⁾.

Для плотности распределения по фазе φ_{Σ} имеем:

5) $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\pm z \cos \vartheta} d\vartheta = I_0(z).$

6) Модифицированная функция Бесселя – это функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента: $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix).$

$$\begin{aligned}
p(\varphi_\Sigma) &= \int_0^\infty p(U_\Sigma, \varphi_\Sigma) dU_\Sigma = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \int_0^\infty U_\Sigma e^{-\frac{U_\Sigma^2 + U_m^2 - 2U_\Sigma U_m \cos(\varphi_\Sigma - \psi)}{2\sigma_n^2}} dU_\Sigma = \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{U_m^2}{2\sigma_n^2}} \left(1 + a e^{\frac{a^2}{2}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{u^2}{2}} du \right), \tag{6.3}
\end{aligned}$$

где $a = U_m \cos(\varphi_\Sigma - \psi)/\sigma_n$, а интеграл равен умноженной на $\sqrt{2\pi}$ функции распределения гауссовской случайной величины $\Phi(x)$ в точке $x = a$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Вывод формулы (6.3)

Дополним числитель в показателе экспоненты в (6.1) до квадрата разности

$$\begin{aligned}
&U_\Sigma^2 + U_m^2 - 2U_m U_\Sigma \cos(\varphi_\Sigma - \psi) + [U_m \cos(\varphi_\Sigma - \psi)]^2 - [U_m \cos(\varphi_\Sigma - \psi)]^2 = \\
&= U_m^2 [1 - \cos^2(\varphi_\Sigma - \psi)] + [U_\Sigma - U_m \cos(\varphi_\Sigma - \psi)]^2
\end{aligned}$$

и в таком виде подставим в выражение для $p(\varphi_\Sigma)$:

$$\begin{aligned}
p(\varphi_\Sigma) &= \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\frac{U_m^2 [1 - \cos^2(\varphi_\Sigma - \psi)]}{2\sigma_n^2}} \int_0^\infty U_\Sigma e^{-\frac{[U_\Sigma - U_m \cos(\varphi_\Sigma - \psi)]^2}{2\sigma_n^2}} dU_\Sigma = \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{U_m^2}{2\sigma_n^2}} e^{-\frac{U_m^2 \cos^2(\varphi_\Sigma - \psi)}{2\sigma_n^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_n^2} \int_0^\infty U_\Sigma e^{-\frac{[U_\Sigma - U_m \cos(\varphi_\Sigma - \psi)]^2}{2\sigma_n^2}} dU_\Sigma \dots \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Перейдем под знаком интеграла к новой переменной $u = \frac{U_{\Sigma} - U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n}$:

$$U_{\Sigma} = \sigma_n \cdot u + U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi), \quad dU_{\Sigma} = \sigma_n \cdot du \quad \text{и} \quad u = -\frac{U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n} \quad \text{при}$$

$U_{\Sigma} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{-\frac{U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n}}^{\infty} [\sigma_n u + U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)] e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma_n du = \\ & = \int_{-\frac{U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n}}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n} \cdot \int_{-\frac{U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Первый из этих интегралов берется непосредственно: пусть $v = u^2/2$, тогда

$$dv = u \cdot du$$

и

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n}}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\frac{U_m^2 \cos^2(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{2\sigma_n^2}}^{\infty} e^{-v} dv = \\ & = -e^{-v} \Big|_{-\frac{U_m^2 \cos^2(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{2\sigma_n^2}}^{\infty} = e^{-\frac{U_m^2 \cos^2(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{2\sigma_n^2}}. \end{aligned}$$

Во втором интеграле в (6.5) подынтегральная функция четная, поэтому

$$\int_{-\frac{U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{\frac{U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Принимая во внимание полученные результаты и последовательно выполняя необходимые подстановки, получим в продолжение преобразований, прерванных в (6.4):

$$\begin{aligned}
p(\varphi_{\Sigma}) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{U_m^2}{2\sigma_n^2}} e^{\frac{U_m^2 \cos^2(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{2\sigma_n^2}} \times \\
&\times \left(e^{-\frac{U_m^2 \cos^2(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{2\sigma_n^2}} + \frac{U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n} \cdot \int_{-\infty}^{\sigma_n} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{U_m^2}{2\sigma_n^2}} \left(1 + a e^{\frac{a^2}{2}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \text{ с } a = \frac{U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n}.
\end{aligned}$$

[Конец вывода формулы (6.3).]

Прежде чем закончить это отступление, приведем другое выражение для $p(\varphi_{\Sigma})$, согласно которому вычисление значений этой функции производится в программах **rice_phi** и **tr_rice_phi** (см. ниже). Чтобы средствами MATLAB находить значения интеграла, остающегося в (6.3), приходится использовать функцию ошибки $\text{erf}(x)$:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Представим интеграл, фигурирующий в (6.3), в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{-\infty}^a e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{u^2}{2}} du + \int_0^a e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (6.6)$$

Первый из этих интегралов равен $\sqrt{\pi/2}$ [см. выше³⁾], а второй интеграл в результате перехода к новой переменной $t = u/\sqrt{2}$, $u = \sqrt{2} \cdot t$, $du = \sqrt{2} \cdot dt$ принимает вид

$$\int_0^a e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2} \int_0^{a/\sqrt{2}} e^{-t^2} dt = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

Объединяя значение первого интеграла в (6.6) с полученным выражением для второго интеграла, приходим к выводу, что

$$\int_{-\infty}^a e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) \right],$$

и поэтому окончательно

$$p(\varphi_{\Sigma}) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{U_m^2}{2\sigma_n^2}} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} a e^{\frac{a^2}{2}} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\}. \quad (6.7)$$

Соотношения (6.1) – (6.3) для огибающей и фазы суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума называются распределением Райса (S. O. Rice); о выражении (6.2) иногда говорят как об обобщенном распределении Рэлея.

На рис. 6.2 показано семейство зависимостей $p(U_{\Sigma})$ для различных значений амплитуды полезного сигнала U_m при дисперсии шума σ_n^2 , равной 1 В². Левая кривая относится к случаю, когда полезный сигнал отсутствует ($U_m = 0$ В), поэтому данная зависимость в точности повторяет рэлеевское распределение (5.6) (см. средний из графиков на рис. 5.12, также соответствующий значению дисперсии шума, равной 1 В²). Чем больше амплитуда полезного сигнала U_m при фиксированной мощности шума σ_n^2 , тем в большей степени распределение становится похожим на нормальное распределение со средним значением (примерно совпадающим с абсциссой максимума), практически равным U_m , и дисперсией, становящейся – все с большей точностью – равной $2\sigma_n^2$.

Справедливость последнего утверждения следует из асимптотического поведения $p(U_{\Sigma})$ при $U_m \rightarrow \infty$ в (6.2), поскольку при больших x

$$I_0(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x.$$

При конечных значениях всех величин, входящих в выражение для $p(U_{\Sigma})$, среднее значение и дисперсия огибающей суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума равны

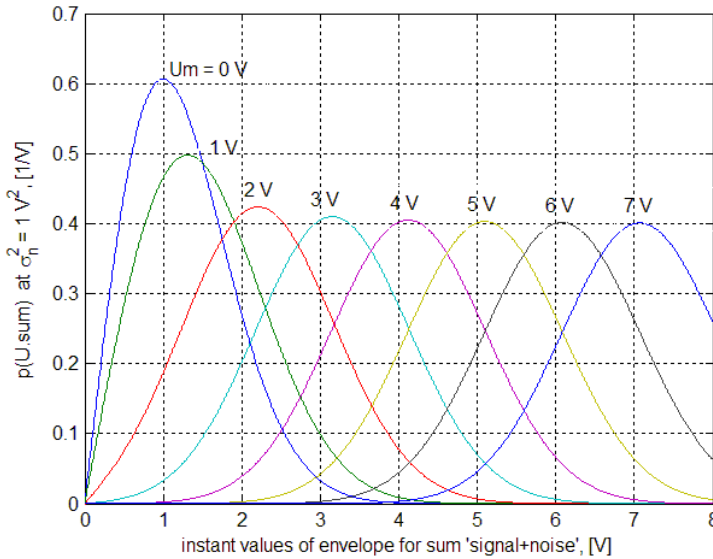


Рис. 6.2. Распределение Райса (обобщенное распределение Рэлея) для огибающей суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума при $\sigma_n^2 = 1 \text{ В}^2$

$$m_{U_\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty U_\Sigma p(U_\Sigma) dU_\Sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_n e^{-\frac{U_m^2}{4\sigma_n^2}} \left[\left(1 + \frac{U_m^2}{2\sigma_n^2} \right) I_0 \left(\frac{U_m^2}{4\sigma_n^2} \right) + \frac{U_m^2}{2\sigma_n^2} I_1 \left(\frac{U_m^2}{4\sigma_n^2} \right) \right]$$

и

$$\sigma_{U_\Sigma}^2 = \overline{U_\Sigma^2} - (m_{U_\Sigma})^2,$$

где $I_1(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка и

$$\overline{U_\Sigma^2} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty U_\Sigma^2 p(U_\Sigma) dU_\Sigma = 2\sigma_n^2 + U_m^2$$

(без доказательства).

Аналогично огибающей на рис. 6.3 и 6.4 демонстрируются семейства зависимостей $p(\varphi_\Sigma)$ для фазы суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума при мощности шума σ_n^2 , равной 10 В^2 и 1 В^2

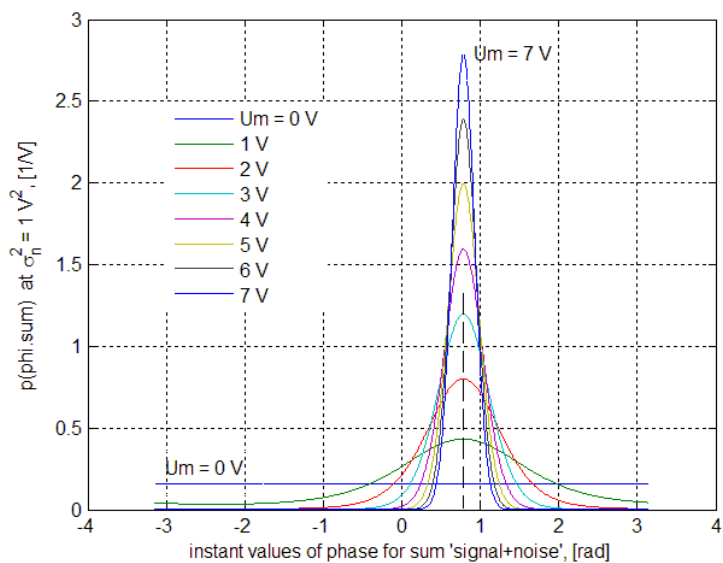
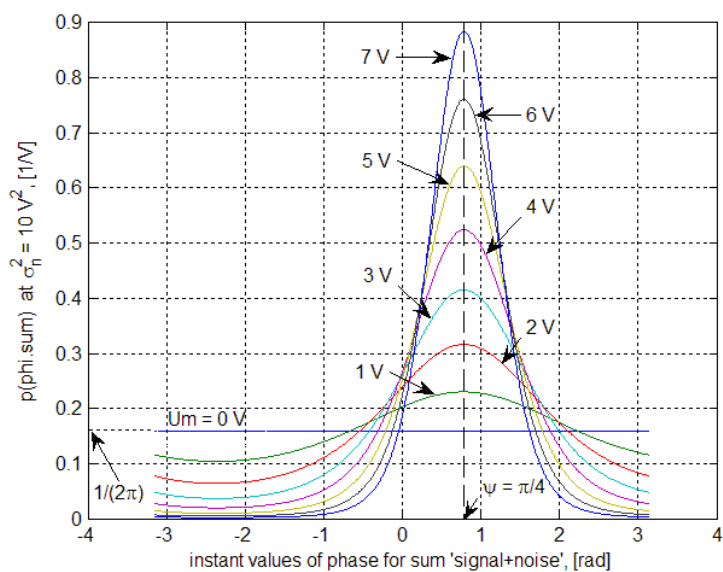


Рис. 6.3 и 6.4. Распределение Райса для фазы суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума (размерность по вертикальной оси $[1/\text{rad}]$)

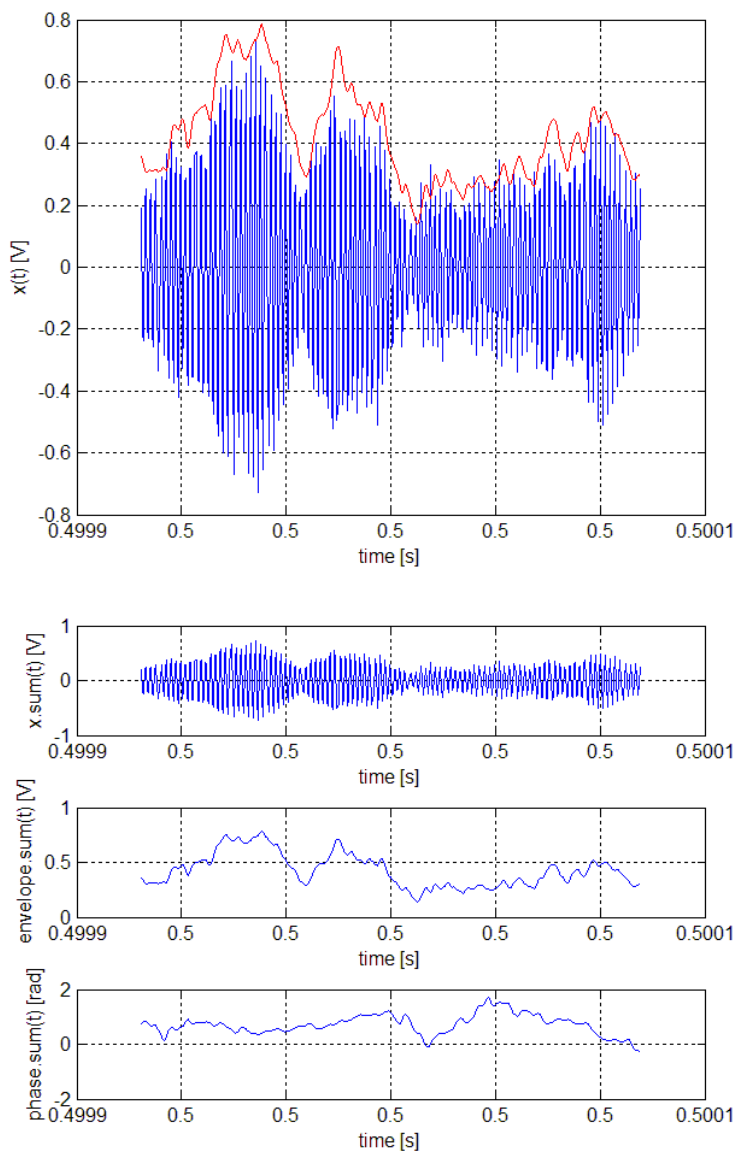


Рис. 6.5 и 6.6. Сумма узкополосного гауссовского шума с гармоническим сигналом с амплитудой вдвое больше среднеквадратического значения шума

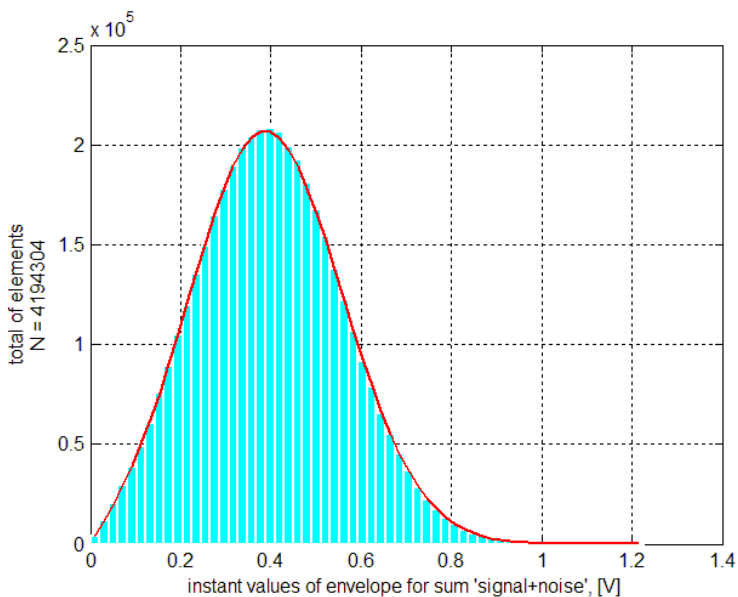


Рис. 6.7. Гистограмма огибающей для суммы «сигнал+шум» с $U_m/\sigma_n = 2$

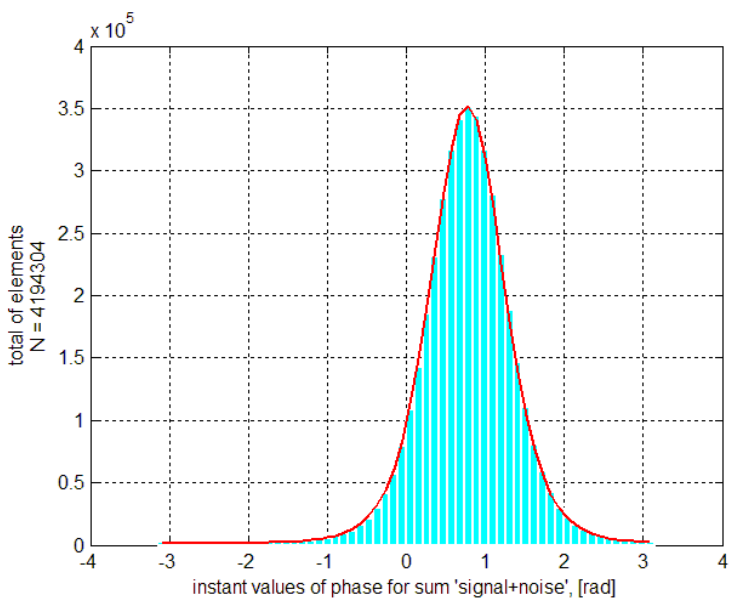


Рис. 6.8. Гистограмма фазы для суммы «сигнал+шум» с $U_m/\sigma_n = 2$

соответственно; фаза ψ полезного сигнала считается заданной (в этих примерах $\psi = \pi/4$). Параметром семейства в каждом случае служит амплитуда полезного сигнала U_m . При $U_m = 0$ В распределение мгновенных значений фазы φ_Σ равномерное в пределах $[-\pi, \pi)$, как этого и следовало ожидать согласно (5.10). С ростом U_m плотность распределения вероятностей $p(\varphi_\Sigma)$ стремится к виду $\delta(\psi)$, что можно было предвидеть, вглядываясь в векторную диаграмму на рис. 6.1. При $\psi = 0$ эти семейства располагались бы симметрично относительно нуля на горизонтальной оси.

Если полезный сигнал присутствует в смеси с шумом, то $p(U_\Sigma, \varphi_\Sigma) \neq p(U_\Sigma) \cdot p(\varphi_\Sigma)$, то есть мгновенные значения огибающей и фазы не являются независимыми случайными величинами.

Графики, представленные на рис. 6.2 – 6.4, получены с помощью программ **rice_U** и **rice_phi** путем вычисления по формулам (6.2) и (6.7).

В качестве примера в моделирующей программе **rsn_40** рассмотрен случай, когда частота несущей гармонического сигнала совпадает с центральной частотой узкополосного гауссовского шума, а амплитуда сигнала U_m вдвое больше среднеквадратического значения шума `rms_xwos` (отношение сигнал/шум `snr` равно 2). Как следует из сравнения рис. 5.13 и 5.14 с рис. 6.5 и 6.6, наличие в сумме с шумом гармонического сигнала такой амплитуды практически неотличимо от чистого шума. Тем не менее гистограммы, приведенные на рис. 6.7 и 6.8, явно показывают, что распределения мгновенных значений огибающей и фазы уже не являются рэлеевским и равномерным соответственно, как это бывает при чистом шуме, а становятся распределениями Райса [красные кривые на последних двух графиках построены по формулам (6.2) и (6.7)].

О точности, с которой данные компьютерного эксперимента соответствуют теоретическому предсказанию, можно судить по следующим числовым результатам, выводимым программой **rsn_40** в командном окне MATLAB в случае, когда длина отрезка реализации N равна примерно 4×10^6 , дисперсия шума `var_xwos` равна $0.030786 B^2$, амплитуда сигнала U_m равна $0.35092 B$, а фаза сигнала задана равной `pi/4`:

	Теория	Эксперимент
$mUsum, \text{mean}(U_sum) \text{ [B]}$	0.39871	0.39873
$mUsum2, \text{mean}(U_sum.^2) \text{ [B}^2\text{]}$	0.18472	0.18457
$vUsum, \text{var}(U_sum) \text{ [B}^2\text{]}$	0.025746	0.025583
$\text{mean}(\text{phi_sum}) \text{ [рад]}$	0.78540	0.76859
$\text{var}(\text{phi_sum}) \text{ [рад}^2\text{]}$	–	0.37290
$\text{sqrt}(\text{var}(\text{phi_sum})) \text{ [рад]}$	–	0.61066

Здесь $mUsum$, $mUsum2$ и $vUsum$ – вычисленные по формулам (теоретические) среднее значение, средний квадрат и дисперсия огибающей суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума соответственно; $\text{mean}(U_sum)$, $\text{mean}(U_sum.^2)$ и $\text{var}(U_sum)$ – те же величины, найденные (в эксперименте) путем подсчета по отрезку реализации U_sum длины N ; $\text{mean}(\text{phi_sum})$, $\text{var}(\text{phi_sum})$ и $\text{sqrt}(\text{var}(\text{phi_sum}))$ – среднее, дисперсия и среднеквадратическое значение фазы суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума соответственно, найденные в эксперименте путем подсчета по отрезку реализации phi_sum длины N .

6.2. Асинхронное (диодное) детектирование. Подавление слабого сигнала шумом

В этом и в следующем параграфах рассматривается задача, в которой полезным сигналом является радиоимпульс, то есть отрезок синусоиды, занимающий сравнительно небольшой участок на оси времени по сравнению с длительностью всего интервала наблюдения. Предполагается, что частота заполнения радиоимпульса f_0 известна и наблюдение за ним происходит в присутствии помехи в виде узкополосного гауссовского шума с центральной частотой f_0 .

Проблема возникает тогда, когда желательно обнаруживать наличие такого сигнала в смеси с шумом даже в том случае, когда амплитуда сигнала сравнима со среднеквадратическим значением шума.

Можно следующим образом уточнить постановку задачи: как можно «увидеть» отличие статистических свойств процесса на том участке по оси времени, где располагается наш сигнал, от статистических свойств процесса на других участках в пределах интервала наблюдения, например, слева и справа от того места, где располагается радиоимпульс?

Предположим, что амплитуда синусоиды в пределах радиоимпульса U_m равна 1 В и среднеквадратическое значение шума σ_n также равно 1 В. Из сказанного выше следует, что в этом случае распределение мгновенных значений огибающей (и фазы) там, где нет сигнала, и на том участке, где сигнал имеется, выглядит так, как это показано на рис. 6.9 кривыми синего и красного цвета соответственно.

Первое, что приходит на ум в попытке найти простое решение, – попытаться уловить различие средних значений огибающей процесса для этих двух распределений.

В принципе это можно сделать с помощью диодного детектора и интегрирующей цепочки (рис. 6.10) при условии, что сигнал $u_{env}(t)$ практически повторяет огибающую узкополосного процесса $s(t) + n(t)$ [или $n(t)$], а постоянная времени интегрирующей цепи достаточно велика.

Программа **rsn_50** позволяет смоделировать процедуру, схематически изображенную на рис. 6.10. В этой программе сигнал $u_{env}(t)$ формируется из квадратурных составляющих узкополосного шума $n(t)$ или смеси сигнала и шума $s(t) + n(t)$, а в качестве фильтра нижних частот, производящего усреднение, используется эллиптический фильтр 3-го порядка с частотой среза на два порядка меньшей, чем половина ширины полосы частот, занимаемой наблюдаемым узкополосным процессом.

Результаты моделирования представлены на рис. 6.11 и 6.12.

То, что показано на рис. 6.11, соответствует гипотетическому случаю, когда помехи отсутствуют [$n(t) \equiv 0$]. В рассматриваемом примере параметры были выбраны так, что прохождение радиоимпульса через узкополосный фильтр лишь незначительно сказывается на фронтах сигнала, а его длительность настолько больше периода несущего колебания, что сам радиоимпульс на рис. 6.11 имеет вид прямоугольника, целиком залитого синим цветом. В данном случае сигнал $u_{env}(t)$ представляет собой прямоугольный видеоимпульс, показанный на рисунке красной линией. Фильтром нижних частот, с помощью которого производится усреднение, сигнал $u_{env}(t)$ преобразуется в сигнал $U_{dc}(t)$, изображенный на рисунке

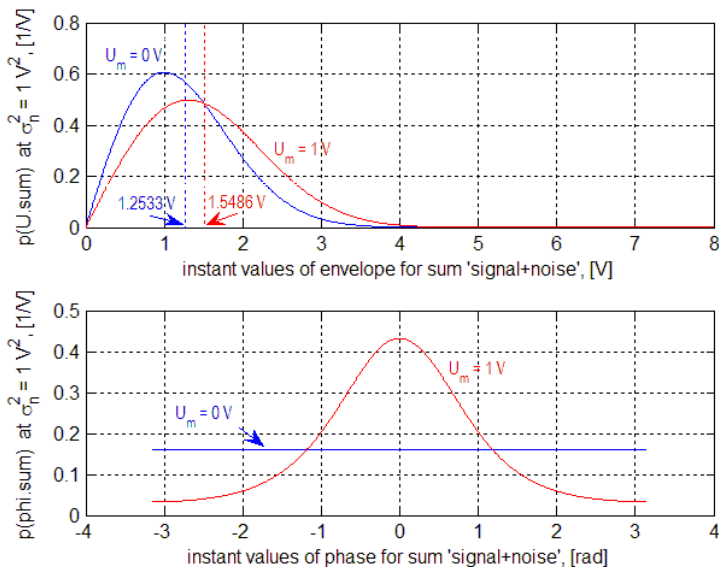


Рис. 6.9. Распределение Райса огибающей и фазы для двух значений амплитуды гармонического сигнала U_m при мощности шума 1 B^2 (на нижнем рисунке размерность по вертикальной оси $[1/\text{rad}]$)

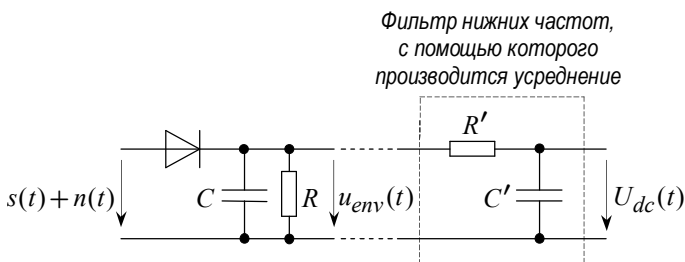


Рис. 6.10. Схематическое изображение процедуры асинхронного (диодного) детектирования

светлоголубым цветом. Когда шума нет, амплитуда сигнала на выходе фильтра нижних частот, грубо говоря, равна амплитуде самого радиоимпульса, и в этих условиях обнаружение сигнала где-то на интервале наблюдения никаких трудностей не представляет.

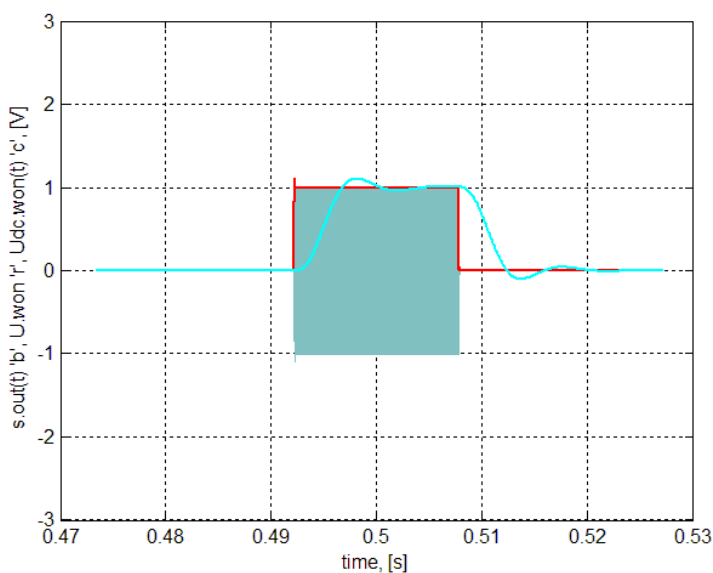


Рис. 6.11. К прохождению радиоимпульса через детектор огибающей в отсутствие помех

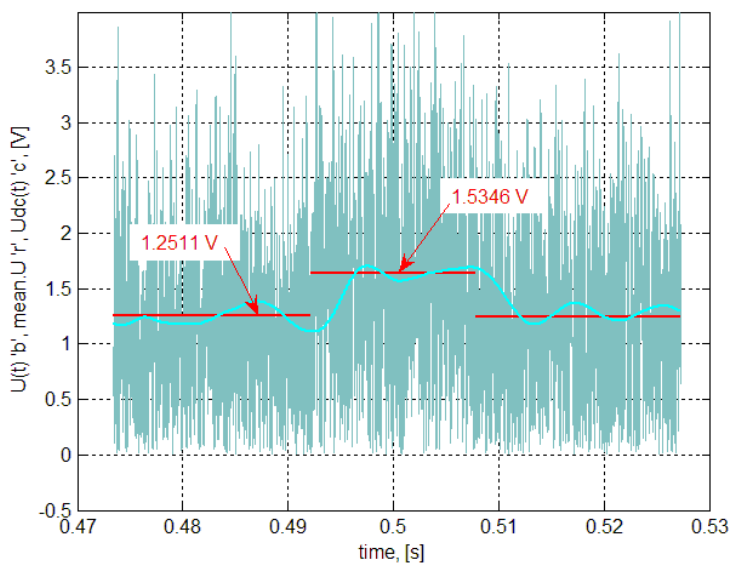


Рис. 6.12. Подавление шумом слабого сигнала при отношении сигнала/шум, равном 1

В присутствии шума огибающая $u_{env}(t)$ процесса $s(t) + n(t)$ выглядит так, как показано на рис. 6.12 синим цветом. Медленно изменяющийся сигнал $U_{dc}(t)$ («напряжение постоянного тока») на выходе усредняющего фильтра нижних частот в большей или меньшей степени отслеживает среднее значение огибающей (на рисунке это сигнал светлоголубого цвета). Горизонтальными линиями красного цвета отмечены вычисленные на соответствующих участках интервала наблюдения средние значения огибающей, которые, как видно из рисунка, близки к теоретическим значениям соответствующих распределений, указанных на рис. 6.9.

Таким образом, *при наличии шума $n(t)$ с таким же по порядку среднеквадратическим значением, что и амплитуда сигнала $s(t)$, различие между средними уровнями напряжения на выходе фильтра нижних частот на участках, где нет сигнала, и там, где он имеется, значительно меньше, чем в отсутствие шума.* Очевидно, что при этом обнаружение сигнала на фоне шума весьма затруднительно. Это явление носит название подавления слабого сигнала шумом.

6.3. Синхронное детектирование

Если к тому времени, когда производится наблюдение, несущее колебание полезного сигнала известно с точностью до фазы, возможно так называемое синхронное детектирование, заключающееся в умножении смеси (суммы) сигнала $s(t)$ и узкополосного гауссовского шума $n(t)$ на опорное колебание, синхронизированное с несущей полезного сигнала, и выделении низкочастотной составляющей произведения (рис. 6.13).

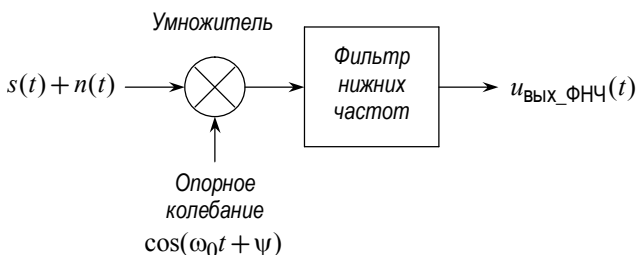


Рис. 6.13. Схематическое изображение синхронного детектора

В общем случае, когда сигнал $s(t)$ является гармоническим сигналом вида $U_m \cos(\omega_0 t + \psi)$, дисперсия шума $n(t) = U_n(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_n(t)]$ равна σ_n^2 , а амплитуда опорного колебания – ради упрощения выкладок – принята равной единице, сигнал на выходе умножителя равен

$$\begin{aligned} & [s(t) + n(t)] \cdot \cos(\omega_0 t + \psi) = \\ & = \{U_m \cos(\omega_0 t + \psi) + U_n(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_n(t)]\} \cdot \cos(\omega_0 t + \psi) = \\ & = \frac{1}{2} \{U_m \cos 0 + U_m \cos 2(\omega_0 t + \psi) + \\ & + U_n(t) \cos[\varphi_n(t) - \psi] + U_n(t) \cos[2\omega_0 t + \varphi_n(t) + \psi]\}. \end{aligned}$$

В результате отфильтровывания высокочастотных составляющих фильтром нижних частот сигнал на выходе последнего имеет вид

$$\begin{aligned} u_{\text{вых_ФНЧ}}(t) &= \frac{1}{2} [U_m + U_n(t) \cos \varphi_n(t) \cdot \cos \psi + U_n(t) \sin \varphi_n(t) \cdot \sin \psi] = \\ &= \frac{1}{2} [U_m + n_c(t) \cdot \cos \psi + n_s(t) \cdot \sin \psi], \end{aligned}$$

где $n_c(t) = U_n(t) \cos \varphi_n(t)$ и $n_s(t) = U_n(t) \sin \varphi_n(t)$ – независимые низкочастотные гауссовские случайные процессы с дисперсией σ_n^2 каждый.

Но сумма гауссовских случайных величин, какими являются мгновенные значения $n_c(t)$ и $n_s(t)$, является гауссовской. Поэтому, – отвлекаясь от несущественного коэффициента $1/2$, – приходим к выводу, что сигнал $u_{\text{вых_ФНЧ}}(t)$ на выходе фильтра нижних частот представляет собой гауссовский случайный процесс со средним значением U_m и дисперсией шумовой составляющей, очевидно, равной

$$\sigma_{n_c}^2 \cdot \cos^2 \psi + \sigma_{n_s}^2 \cdot \sin^2 \psi = \sigma_n^2 \cdot (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = \sigma_n^2.$$

Но это означает, что соотношение между постоянной составляющей и среднеквадратическим значением шума на выходе фильтра нижних частот точно такое же, каким является соотношение между амплитудой полезного сигнала и среднеквадратическим значением шума в смеси $s(t) + n(t)$ на входе синхронного детектора.

При синхронном детектировании не происходит подавления слабого сигнала шумом!

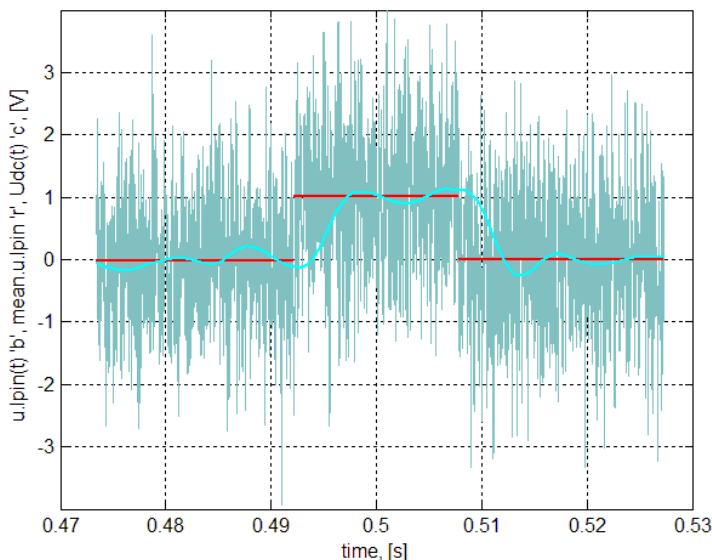


Рис. 6.14. Сигнал на выходе фильтра нижних частот при синхронном детектировании

В моделирующей программе **rsn_50** (с помощью которой в предыдущем параграфе было продемонстрировано подавление слабого сигнала шумом при диодном детектировании) в условиях того же примера, что и раньше, осуществляется синхронное детектирование или, как говорят, «когерентный прием» сигнала, имеющего форму радиоимпульса. Результат представлен на рис. 6.14. Сравнивая изображения на рис. 6.12 и 6.14 с точки зрения различия между постоянными составляющими на выходе фильтра нижних частот на тех участках интервала наблюдения, где только шум, и там, где имеется сигнал, нетрудно убедиться в значительном преимуществе синхронного детектирования (когда оно возможно) по отношению к асинхронному детектированию («некогерентному приему»), хотя, конечно, говорить о надежном обнаружении одиночного радиоимпульса при таком сильном шуме не приходится.

7. Пример регистрации сигналов в физическом эксперименте

В качестве заключительной иллюстрации разберем конкретный пример воображаемого физического эксперимента, в котором через прозрачную кювету пропускается какая-то смесь, газ или жидкость (рис. 7.1). Предположим, что отдельные атомы или молекулы этого вещества под воздействием белого света от достаточно мощного источника могут переходить в возбужденное состояние, поглощая энергию, содержащуюся в электромагнитных колебаниях определенной частоты. Коль скоро на место возбужденных частиц будут поступать свежие порции газа или жидкости, поглощение части энергии, поступающей в луче света, происходит постоянно и по спектру поглощения можно судить, скажем, о составе изучаемой субстанции.

Луч, прошедший через исследуемое вещество, с помощью призмы расщепляется на составляющие разной длины волны и в таком виде проецируется на поверхность, в которой имеется узкая щель. В зависимости от наклона призмы на щель приходятся колебания определенной длины волны. За щелью располагается фотоэлектронное устройство, по сигналу с выхода которого нужно будет решить, имеются ли в наблюдаемом спектре колебания данной частоты или они отсутствуют в результате поглощения. Поворачивая призму, можно просмотреть весь спектр в пределах желаемого диапазона длин волн.

В процессе создания установки для проведения такого эксперимента необходимо будет последовательно принять во внимание следующие обстоятельства:

- 1) из желаемой точности отсчета в отношении проходящей на щель длины волны, следует, что сама щель должна быть достаточно узкой;
- 2) узость щели означает, что даже в тех случаях, когда на щель падает свет определенной длины волны, сигнал на выходе фотоэлектронного устройства (ФЭУ) окажется заведомо слабым;
- 3) чтобы зарегистрировать такой сигнал, его надо усилить, и коэффициент усиления должен быть достаточно большим;
- 4) в пределах интервала времени, отводимого на наблюдение данного участка спектра, сигнал, подлежащий регистрации, представляет собой постоянное напряжение, когда свет падает на щель, или отсутствие постоянного напряжения в противном случае; другими словами, нужен так называемый «усилитель постоянного тока», отрицательным свойством

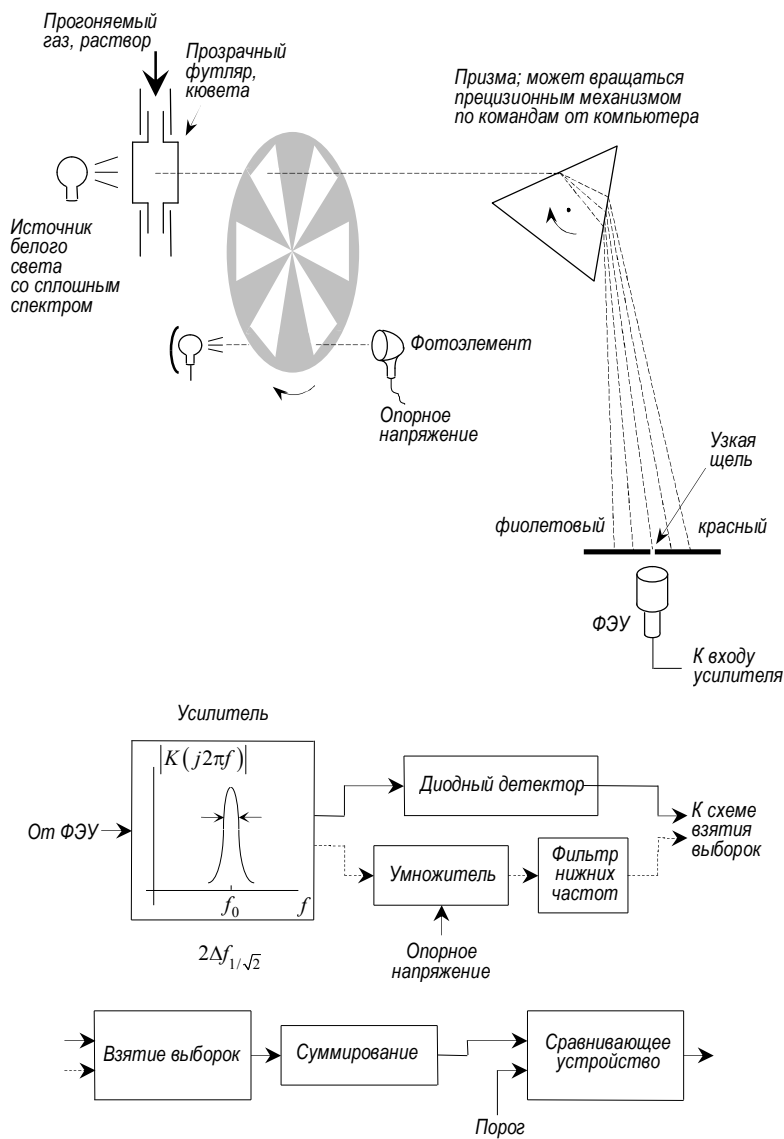


Рис. 7. 1. Схема гипотетического физического эксперимента

которого является дрейф его выходного напряжения, то есть недопустимый собственный шум усилителя, носящий характер $1/f$ -шума;

5) чтобы избежать последствий дрейфа, осуществляется преобразование «сигналов постоянного тока» в переменный сигнал: для этого на пути светового луча помещают вращающийся с постоянной скоростью диск с прорезями, обеспечивающий периодическое прерывание луча, так что сигнал на выходе фотоэлектронного устройства, когда свет падает на щель, становится прямоугольным колебанием определенной частоты f_0 ;

6) поскольку в любом случае ожидаемый «полезный сигнал» слабый, он будет поступать на вход усилителя на фоне как минимум тех шумов, которые присущи фотоэлектронному устройству в режиме отсутствия падающего на него светового потока; следовательно, для уменьшения мощности шума на выходе усилителя переменного сигнала частоты f_0 надо будет сделать его полосу пропускания $2\Delta f_{1/\sqrt{2}}$ возможно более узкой.

Таким образом, при поочередном помещении на щель различных участков наблюдаемого спектра, на каждом шаге нужно будет принимать решение, присутствует ли **на выходе усилителя** только шум или сумма шума и полезного гармонического сигнала частоты f_0 (так называемая задача «проверки статистических гипотез» в простейшем случае двух альтернативных гипотез).

Мы остановимся на случае «пороговых» сигналов, когда при наличии полезного сигнала его амплитуда U_m порядка среднеквадратического значения шума σ_n ; точнее, будем считать, что отношение сигнал/шум U_m/σ_n равно 1.

Пусть вслед за диодным **или** синхронным детектированием (см. п. 6.2) берутся выборки мгновенных значений на таком расстоянии Δt одна от другой по оси времени ($\Delta t \sim 1/\Delta f_{1/\sqrt{2}}$), чтобы можно было считать их независимыми случайными величинами. Тогда согласно закону больших чисел выборочное среднее будет тем лучшей оценкой истинного среднего, чем больше число N суммируемых выборок.

На рис. 7.2 приведено полученное путем моделирования (программа **rsn_60**) распределение выборочного среднего при диодном детектировании для значений N , равных 10, 30 и 100. По оси абсцисс на этом рисунке отложено отношение значения выборочного среднего к среднеквадратическому значению шума на выходе усилителя. Голубым цветом показано распределение выборочного среднего при равном нулю среднем значении сигнала на выходе усилителя, то есть в том случае, когда суммируемые мгновенные значения имеют рэлеевское распределение с заданным среднеквадратическим значением шума. Красным цветом показано распреде-

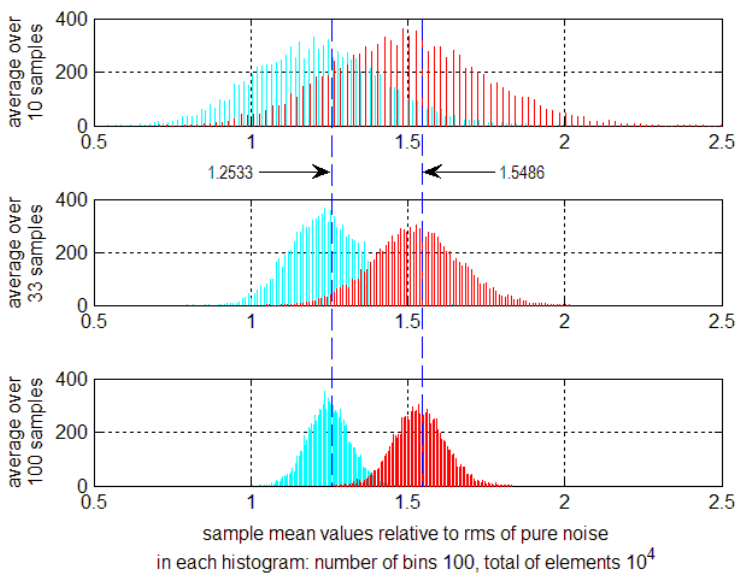


Рис. 7.2. Распределение выборочного среднего при диодном детектировании

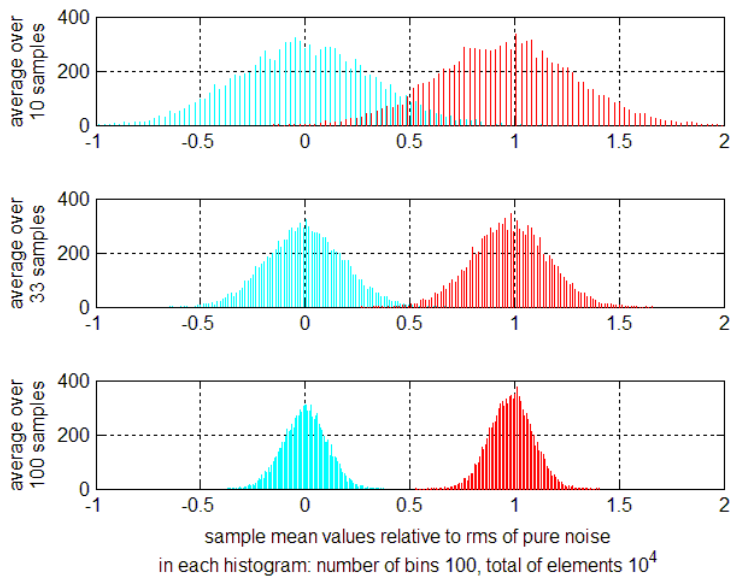


Рис. 7.3. Распределение выборочного среднего при синхронном детектировании

ление выборочного среднего, когда распределение суммируемых мгновенных значений имеет обобщенное рэлеевское распределение с отношением сигнал/шум, равным 1.

Если порог, с которым сравнивается выборочное среднее, установлен посередине между ожидаемыми истинными средними значениями на выходе диодного детектора в отсутствие полезного сигнала и при его наличии, то площадью хвостов распределений, приведенных на рисунке, определяются вероятности ошибочных решений, а именно вероятность решить, что среднее соответствует наличию полезного сигнала, когда в действительности его нет, и вероятность ошибки другого рода.

На рис. 7.3 показаны распределения выборочного среднего при синхронном детектировании в тех же условиях, которые оговорены выше. Сравнение результатов, относящихся к диодному и к синхронному детектированию, говорит безусловно в пользу последнего с точки зрения надежности решений, принимаемых сравнивающим устройством. Синхронное детектирование – это лучшее, что можно сделать в данном случае.

На этом обсуждение воображаемого – сознательно упрощенного до предела – эксперимента можно в принципе завершить. Но всё же имеет смысл сделать под конец два небольших замечания.

Во-первых, иллюстрации на рис. 7.2 и 7.3 относятся к случаю, когда шум на выходе узкополосного усилителя является гауссовским. В оговоренных условиях это должно быть более или менее справедливо по причинам, изложенным в п. 4.5, в силу которых распределение мгновенных значений случайного сигнала на выходе усилителя тем ближе к нормальному, чем более инерционным является данный линейный четырехполосник, то есть чем уже $2\Delta f_{1/\sqrt{2}}$. Однако в общем случае нельзя забывать о том, что собственные шумы фотоэлектронных устройств по своему характеру заметно отличаются от тепловых шумов (см. Ф. Н. Х. Робинсон [13], гл. 21): они определяются конструкцией ФЭУ, то есть физической природой явления, используемого в нем для преобразования света в электрический ток, и могут зависеть также от длины волны и интенсивности падающего света; в частности, шум на выходе ФЭУ не равен нулю в отсутствие полезного сигнала, когда никакой свет не падает на фотоэлектрод («темновой шум»).

Во-вторых, оказывается, что эффективность принятия решений сравнивающим устройством (малые значения вероятностей ошибки) не зависит от ширины полосы пропускания $2\Delta f_{1/\sqrt{2}}$ узкополосного усилителя, а определяется суммарным временем наблюдения $T = N \cdot \Delta t$ на каждом шаге процедуры сканирования при условии, что $2\Delta f_{1/\sqrt{2}}/f_0$ остается много меньше 1, а шаг дискретизации по времени выбирается обратно

пропорциональным значению $\Delta f_{1/\sqrt{2}}$ (Д. А. Ревенок [11]). Действительно, согласно сказанному выше вероятности ошибок тем меньше, чем более узкими являются распределения выборочных средних типа тех, какие приведены на рис. 7.2 и 7.3, то есть чем меньше дисперсия каждого из этих распределений. Но если суммируемые мгновенные значения $x(t_i)$ являются независимыми случайными величинами с одинаковыми дисперсиями $\sigma^2 = c_1 \cdot 2\Delta f_{1/\sqrt{2}}$ и $\Delta t = c_2 / \Delta f_{1/\sqrt{2}}$, где c_1 и c_2 – соответствующие постоянные нужной размерности, то дисперсия выборочного среднего

$$\bar{x}^{-T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i)$$

равна

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}^{-T}}^2 &= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \cdot N \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} = \frac{c_1 \cdot 2\Delta f_{1/\sqrt{2}}}{T/\Delta t} = \frac{1}{T} \cdot c_1 \cdot 2\Delta f_{1/\sqrt{2}} \cdot \Delta t = \\ &= \frac{1}{T} \cdot c_1 \cdot 2\Delta f_{1/\sqrt{2}} \cdot \frac{c_2}{\Delta f_{1/\sqrt{2}}} = c/T, \end{aligned}$$

где $c = 2c_1c_2$. Дисперсия результата усреднения тем меньше, чем больше время наблюдения T .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как упоминалось во введении, в этом пособии представлен взгляд на проблему случайных сигналов и шумов, которого, вероятнее всего, будут придерживаться специалисты по электронике, в одной команде с которыми будущему физику-экспериментатору предстоит принимать участие в постановке и проведении какого-то эксперимента. Эти сведения должны позволить физику в будущем как минимум находить общий язык с коллегами-«электронщиками», чтобы иметь возможность действовать сообща.

Различные по своей природе случайные процессы занимают важное место в физической картине мира. «...Предельная точность измерений любой физической величины ограничена флуктуациями этой величины, и предельная чувствительность приборов тоже ограничена флуктуациями» (Ш. М. Коган [8]). Интерес к теории случайных процессов и шумов и к ее применению в самых разнообразных областях физики и техники весьма широк уже сегодня и продолжает расти.

Можно считать, что цель, которая ставилась при написании учебного пособия, достигнута, если первоначальное знакомство с этой тематикой и приобретение первого опыта думать в данном направлении в какой-то степени облегчат более глубокое изучение соответствующей теории и позволят в дальнейшем составить представление об огромном объеме конкретных сведений, накопленных в этой области к настоящему времени.

Если студенту-физику ближе всего электрические флуктуации, то можно рекомендовать ему продолжить свое образование, обратившись к одному из самых, пожалуй, известных руководств на эту тему – к «Введению в статистическую радиофизику» С. М. Рытова [14] и постаравшись, в частности, разобраться с приведенными там *задачами с решениями*. Любому начинающему физику будет, по-видимому, интересным и небесполезным познакомиться с тем, что включил Дж. Хонеркамп в свою «Статистическую физику» [16], где также имеется большое число *задач, сопровождаемых решениями или указаниями* по их решению.

В МФТИ учебными планами разных факультетов предусмотрено независимое изучение студентами 2-го, 3-го и 4-го курсов теории стохастических процессов как математической дисциплины. По некоторым из этих курсов изданы учебные пособия (А. В. Булинский. Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения : учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2010; А. А. Натан, О. Г. Горбачев, С. А. Гуз. Основы теории случайных процессов. – М.: М3-Пресс, 2003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высшая школа, 2005.
2. Бонч-Бруевич А. М. Радиоэлектроника в экспериментальной физике. — М.: Наука, 1966.
3. Букингом М. Шумы в электронных приборах и системах. — М.: Мир, 1986.
4. Воронов Е. В. Начала цифровой обработки сигналов для студентов-физиков с упражнениями в MATLAB. — М.: МФТИ, 2010.
5. Горелик Г. С. Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959.
6. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. — М.: ИЛ, 1960.
7. Клаассен К. Б. Основы измерений. Электронные методы и приборы в измерительной технике. — М.: Постмаркет, 2000.
8. Коган Ш. М. Электронный шум и флуктуации в твердых телах. — М.: Физматлит, 2009.
9. Куклев Л. П. Генераторы синусоидальных колебаний и нелинейные преобразования сигналов. — М.: МФТИ, 2009.
10. Манаев Е. И. Основы радиоэлектроники. — М.: Радио и связь, 1990.
11. Ревенок Д. А. Поиск сигнала по частоте при большом отношении сигнал/шум // Известия вузов — Радиоэлектроника. — 1983. — Т. 26, № 4. — С. 82–84.
12. Рейф Ф. Статистическая физика. Берклевский курс физики. Т. V. — М.: Наука, 1972.
13. Робинсон Ф. Н. Х. Шумы и флуктуации в электронных схемах и цепях. — М.: Атомиздат, 1980.
14. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. — М.: Наука, 1976.
15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1964.
16. Honerkamp J. Statistical Physics. An Advanced Approach with Applications. Web-enhanced with Problems and Solutions. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002 (ebooksclub.org_Statistical_Physics_an_advanced_approach_with_applications_2nd_Edition.djvu).

Учебное издание

Воронов Евгений Валентинович

СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ И ШУМЫ

Моделирование в среде MATLAB

Редактор *О. П. Котова*
Корректор *И. А. Волкова*

Подписано в печать 07.11.2011. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 7,75.
Уч.-изд. л. 7,5. Тираж 300 экз. Заказ № 105.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru.

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9