

Спектральный анализ и дискретизация

А. А. Григорьев

1. Сигналы во временной и частотной областях

В самом широком смысле сигнал – это некоторая функция $x(t)$ от непрерывного вещественного времени t .

Удобно с самого начала иметь дело с комплексными (комплекснозначными) сигналами $x(t) = x_i(t) + jx_q(t)$ – суммами вещественной $x_i(t)$ и мнимой $x_q(t)$ квадратурных компонент. Причина этого кроется в том, что ограничение вещественными сигналами исключает из обсуждения комплексные гармонические сигналы вида

$$e^{j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft),$$

обойтись без которых затруднительно. Обычные вещественные сигналы рассматриваются как частные случаями комплексных, выделенные обращением в нуль мнимой компоненты.

Класс всех возможных сигналов обладает естественной структурой линейного пространства над полем комплексных чисел. Означает это ровно то, что сигналы можно складывать между собой и умножать на комплексный скаляр. От этого они не перестают быть сигналами. Сигналы обретают, таким образом, статус векторов – элементов линейного пространства. Пространство сигналов, разумеется не конечномерно – не имеет конечного базиса. Тем не менее в нем сохраняются традиционные для линейной алгебры понятия о линейной комбинации сигналов и линейной оболочке набора сигналов $e_1(t), \dots, e_N(t)$ – множестве линейных комбинаций

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i(t)$$

с комплексными коэффициентами α_i . Как и обычно, сигналы $e_i(t)$ линейно независимы, если из равенств нулю линейной комбинации $x(t)$ вытекает равенство нулю всех ее коэффициентов α_i . Линейная оболочка системы из N линейно независимых сигналов – это N -мерное линейное подпространство в пространстве сигналов.

В линейной алгебре векторы представляются не иначе как блоками чисел – коэффициентов разложения вектора по базису. Это переносится и на бесконечномерные пространства. Набор значений $x(t)$ сигнала x в точках t можно рассматривать как блок коэффициентов разложения этого сигнала по базису

$$\{\delta(t - u)\}_{u \in (-\infty, \infty)},$$

образованному всеми возможными сдвигами δ -импульса (δ -функции Дирака):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \delta(t - u) du = \sum_u x(u) \delta(t - u)$$

Интеграл выступает здесь как техническое средство придания смысла сумме по континуальному множеству индексов суммирования.

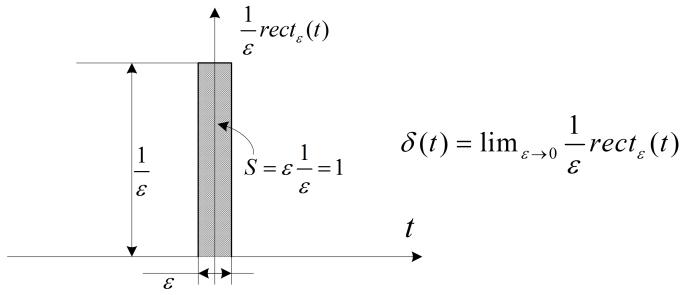


Рис. 1. К определению δ -функции

Введенная Дираком δ -функция формализует интуитивное представление о плотности некоторой физической величины, сосредоточенной в одной точке. К ней приводит рассмотрение предела при $\epsilon \rightarrow 0$ функции $\frac{1}{\epsilon} \text{rect}_\epsilon(t)$ – симметричного прямоугольника ширины ϵ и высоты $\frac{1}{\epsilon}$ с единичной площадью, рис. 1. Предельная функция $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \text{rect}_\epsilon(t)$ существует и принимает нулевое значение во всех точках t кроме точки $t = 0$, в которой ее значение бесконечно. Отсутствие значения в нуле не мешает рассматривать интегралы от плотности $\delta(t)$ с произвольной достаточно гладкой весовой функцией $\varphi(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \varphi(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \varphi(0) \epsilon = \varphi(0). \quad (1)$$

Чтобы безошибочно оперировать с δ -функцией, достаточно интуитивного представления о ней как о бесконечно узком импульсе единичной площади и знания ее определяющих свойств:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t-a) dt = \varphi(a); \quad \varphi(t) \delta(t-a) = \varphi(a) \delta(t-a).$$

Не лише также знать, что δ -функция четна – $\delta(-t) = \delta(t)$, а при масштабировании аргумента преобразуется с сохранением площади под графиком:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t).$$

Тот же сигнал x можно представить в ином континуальном базисе

$$\{e^{j2\pi ft}\}_{f \in (-\infty, \infty)},$$

составленном из комплексных гармонических сигналов со всеми возможными частотами f :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) e^{+j2\pi ft} df. \quad (2)$$

Коэффициенты этого разложения $x(f)$ – это и есть спектр сигнала x . Он вполне определяется по представлению $x(t)$ сигнала x во временной области:

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (3)$$

Интегральные преобразования (2),(3), известные как прямое (3) и обратное (2) преобразования Фурье, реализуют переходы от представления $x(t)$ сигнала x во временной области к его представлению $x(f)$ в частотной области и обратно:

$$x(t) \leftrightarrow x(f).$$

Если о наборе значений сигнала $x(t)$ думать как о блоке чисел $x_t = x(t)$ с континуальным индексом t , а о спектре $x(f)$ – как о блоке чисел $x_f = x(f)$ с индексом f , то эти преобразования принимают привычные формы перехода от одного базиса к другому умножением вектора на матрицу:

$$x_f = \sum_t e^{-j2\pi f t} x_t; \quad x_t = \sum_f e^{+j2\pi f t} x_f.$$

Как видно из (2), значение сигнала в нуле – это интеграл от его спектра:

$$x(0) = x(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) df.$$

Так что функция $x(f)$ дает закон распределения амплитуды сигнала $x(t)|_{t=0}$ по частотам. На этом основании ее называют амплитудным спектром.

Несколько пар сигнал \leftrightarrow спектр, о которых должен знать каждый:

Формальная подстановка в интеграл Фурье (3) $x(t) = \delta(t)$ с учетом свойства (1) дает:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t}|_{t=0} = 1.$$

Так что сигнал в форме δ -импульса обладает равномерным спектром, равным единице на всех частотах:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1(f).$$

Верно и обратное – спектр везде равного единице сигнала – это δ -импульс на нулевой частоте:

$$1(t) \leftrightarrow \delta(f).$$

Тождественно единичная функция и δ -функция двойственны – одна преобразуется в другую при переходе из частотной области во временную. Подобная двойственность обнаруживается также между прямоугольными импульсами и импульсами Найквиста.

Пусть $\text{rect}_T(t)$ – симметричный прямоугольный импульс, равный единице при $t \in [-T/2, T/2]$ и нулю вне этого интервала. Оказывается, что спектр импульса $\text{rect}_1(t)$ единичной длительности – это импульс Найквиста:

$$\text{rect}_1(t) \leftrightarrow \frac{\sin \pi f}{\pi f}$$

и наоборот, спектр импульса Найквиста прямоуголен:

$$\frac{\sin \pi t}{\pi t} \leftrightarrow \text{rect}_1(f).$$

Проверяются эти факты в одну строчку:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_1(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{2\pi f} \int_{-j\pi f}^{j\pi f} e^{-u} du = \frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{2\pi f} = \frac{\sin \pi f}{\pi f}.$$

Импульс Найквиста $\frac{\sin \pi f}{\pi f}$ обращается в нуль во всех целых точках $f = n$, кроме точки $n = 0$, где он принимает единичное значение. Это означает, что в спектре прямоугольника присутствует постоянная составляющая – нулевая частота, но полностью подавлены все гармоники с частотами, кратными длительности импульса.

При $T \rightarrow \infty$ прямоугольный импульс $x(t) = \text{rect}_T(t)$ длительности T переходит в тождественно единичную функцию $1(t)$, а его спектр $x(f) = \frac{\sin \pi T f}{\pi f}$ – в δ -импульс. Это дает важные предельные представления для δ -функций:

$$\delta(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi T f}{\pi f}, \quad \delta(t) = \lim_{F \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi F t}{\pi t}.$$

2. Отношения двойственности

Некоторым элементарным преобразованиям сигналов отвечают столь же элементарные двойственные преобразования их спектров. Причем, в силу сходства интегральных форм прямого и обратного преобразований Фурье, соответствие эти оказываются двухсторонними. Речь идет о преобразованиях масштабирования и сдвига.

2.1. Масштабирования

Перекалибровка шкалы измерения времени вызывает масштабирование (сжатие или расширение) сигнала – переход от $x(t)$ к $x'(t) = x(at)$. Легко проверяется, что масштабирование сигнала с параметром a отвечает обратное масштабирование спектра с параметром $\frac{1}{a}$:

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} x\left(\frac{f}{a}\right).$$

В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j2\pi \frac{f}{a} at} dat = \frac{1}{a} x\left(\frac{f}{a}\right).$$

Наоборот, масштабированию спектра отвечает обратное масштабирование сигнала:

$$\frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow x(af).$$

Растяжение сигнала с параметром $a < 1$ вызывает пропорциональное сжатие его спектра с параметром $\frac{1}{a} > 1$. Множитель $\frac{1}{a}$ обеспечивает сохранение площади под графиком спектра, которая равна значению сигнала в точке $t = 0$ и при растяжении не изменяется.

Соотношения масштабирования становятся симметричными

$$\sqrt{a} x(at) \leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a}} x\left(\frac{f}{a}\right),$$

если их выполнять с сохранением энергии – интеграла от квадрата модуля. Тогда оказывается, что сохраняющее энергию масштабирование сигнала по закону $x'(t) = \sqrt{a} x(at)$ эквивалентно обратному сохраняющему энергию масштабированию спектра – $x'(f) = \sqrt{b} x(bf)$ с $b = \frac{1}{a}$.

Законы масштабирования выявляют факт невозможности совместного измерения временного положения сигнала и его частоты: повышение точности измерения времени – сужение пика на временной оси вызывает пропорциональное расширение спектра. В квантовой теории это явление дает начало принципу неопределенности между измерениями времени и энергии.

2.2. Сдвиги по времени и частоте

Элементарно обнаруживается, что сдвиг сигнала на t_0 вдоль временной оси – преобразование $x'(t) = x(t - t_0)$ эквивалентен умножению его спектра на комплексную гармоническую функцию:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow x(f)e^{-j2\pi t_0 f}.$$

В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j2\pi f(t - t_0)} d(t - t_0) = e^{-j2\pi f t_0} x(f).$$

Верно и противоположное:

$$x(t)e^{+j2\pi f_0 t} \leftrightarrow x(f - f_0).$$

Умножение сигнала на гармоническую функцию эквивалентно сдвигу его спектра.

Умножение спектра на комплексную гармонику не изменяет его модуль: $|x(f)e^{-j2\pi f_0 t}| = |x(f)||e^{-j2\pi f_0 t}| = |x(f)|$. Поэтому модуль спектра сигнала не изменяется при сдвигах. Вся информация о положении сигнала на временной оси сосредоточена, таким образом, в фазах его спектра.

Спектр δ -импульса – это тождественная единица:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1(f).$$

Следовательно, спектр сдвинутого по времени δ -импульса $\delta(t - u)$ – это комплексная гармоническая функция частоты:

$$\delta(t - u) \leftrightarrow e^{-j2\pi u f}.$$

Наоборот, спектр гармонической функции частоты f_0 – это δ -импульс в частотной области:

$$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0).$$

Для спектров вещественных гармонических сигналов

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{+j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}; \quad \sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{+j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}$$

отсюда получается:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_0 t) &\leftrightarrow \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}, \\ \sin(2\pi f_0 t) &\leftrightarrow \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}. \end{aligned}$$

3. Что дает переход в частотную область

Переход в частотную область – к разложениям сигналов по базису из комплексных гармоник важен потому, что в этом базисе операторы всех линейных стационарных систем приводятся к диагональному виду. Это явление природы обнаруживает фундаментальная для теории Фурье теорема о свертке.

Свертка пары сигналов $x(t), y(t)$ – это сигнал

$$z(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t - u) du.$$

Элементарно проверяется, что свертка коммутативна (перестановочна)

$$(x * y)(t) = (y * x)(t)$$

и ассоциативна

$$((x * y) * z)(t) = (x * (y * z))(t),$$

то есть, обладает всеми свойствами привычного умножения. Это дает основание рассматривать ее как операцию перемножения сигналов $z(t) = (x * y)(t)$ наряду с обычным поточечным перемножением $z(t) = x(t)y(t)$.

Теорема о свертке обнаруживает глубокую двойственность между поточечным и сврточным умножениями во временной и частотной областях. Оказывается что свертке сигналов $x(t), y(t)$ отвечает поточечное перемножение их спектров $x(f), y(f)$:

$$(x * y)(t) \leftrightarrow x(f)y(f)$$

и наоборот перемножению сигналов – свертка спектров:

$$x(t)y(t) \leftrightarrow (x * y)(f).$$

Собственно говоря, эти факты не доказываются. Они обнаруживаются. Достаточно заняться вычислением прямого или обратного преобразования Фурье от свертки. К примеру,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (x * y)(t) e^{-j2\pi ft} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u) e^{-j2\pi f(u+(t-u))} du dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi fu} du \int_{-\infty}^{\infty} y(t-u) e^{-j2\pi f(t-u)} dt = x(f)y(f). \end{aligned}$$

Будем понимать под системой – фильтром все, что преобразует воздействие – сигнал $x(t)$ на входе в отклик – сигнал $y(t)$ на выходе. С формальной точки зрения, система – это оператор H , который действует на вход $x(t)$ и дает выход $y(t) = Hx(t)$.

Система линейна, если оператор H реализует линейное отображение пространства входов в пространство выходов. Иными словами, для линейной системы выполняется принцип суперпозиции:

$$H(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha Hx_1(t) + \beta Hx_2(t).$$

Отклик на линейную комбинацию воздействий равен линейной комбинации откликов на каждое из них в отдельности.

Система стационарна (инвариантна во времени), если временнй сдвиг воздействия – переход от $x(t)$ к $x(t-u)$ – приводит к такому же сдвигу отклика – переходу от $y(t)$ к $y(t-u)$.

Пусть на вход системы подан δ -импульс $\delta(t)$, рис. 2. На выходе получится некоторый отклик $h(t)$. Это *импульсная реакция* (импульсная характеристика) системы. Замечательно, что импульсная реакция дает исчерпывающее описание стационарной линейной системы, позволяя предсказать ее отклик на любое воздействие на входе.

В самом деле, поскольку система стационарна, откликом на сдвинутый по времени на u δ -импульс $\delta(t-u)$ окажется сдвинутая на то же u импульсная реакция $h(t-u)$. Далее, любой вход $x(t)$ можно представить континуальной суммой сдвинутых δ -импульсов $\delta(t-u)$ с коэффициентами $x(u)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \delta(t-u) du = (x * \delta)(t).$$

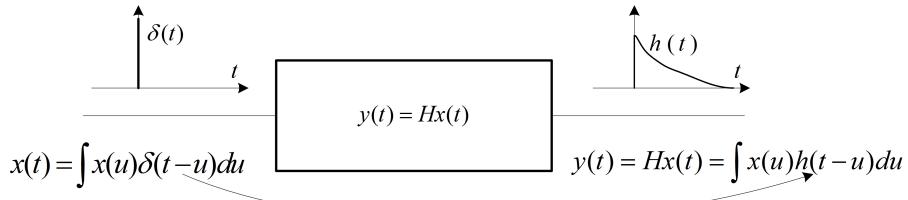


Рис. 2. Описание системы во временной области

Система преобразует каждое из воздействий $\delta(t-u)$ в импульсную реакцию $h(t-u)$. Поскольку система линейна, отклик на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое из них. Поэтому,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u) du = (x * h)(t).$$

Отклик $y(t)$ на выходе стационарной линейной системы – это свертка воздействия $x(t)$ с импульсной реакцией $h(t)$.

Свертка дает, таким образом, универсальное средство описания линейных стационарных систем - фильтров. Каждый фильтр вполне характеризуется своей импульсной реакцией $h(t)$ и преобразует вход $x(t)$ в свертку $y(t) = (h * x)(t)$ на выходе.

Операция свертки не локальна – значение отклика $y(t)$ в данный момент t формально зависит от значений входа $x(u)$ на всей временной оси. Переход в частотную область – к разложениям сигналов $x(t)$, $y(t)$ и импульсной реакции $h(t)$ по комплексным гармоникам

$$x(t) \leftrightarrow x(f); \quad y(t) \leftrightarrow y(f); \quad h(t) \leftrightarrow h(f) = K(jf)$$

диагонализует систему. В частотной области свертка переходит в произведение, так что спектр отклика $y(f)$ оказывается результатом умножения спектра воздействия $x(f)$ на спектр импульсной реакции $h(f)$ – комплексный коэффициент передачи системы $K(jf) = h(f)$, рис. 3. Оказывается, что значение спектра отклика $y(f)$ в данной точке f вполне определяется значением спектра воздействия $x(f)$ в той же точке.

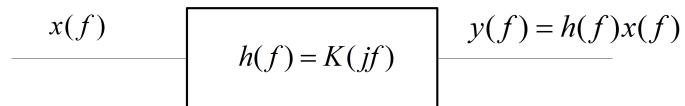


Рис. 3. Описание системы в частотной области

Упрощение, которое дает эффект диагонализации, столь значимо, что обсуждение вопросов фильтрации сигналов всегда переносится в частотную область и сводится к анализу комплексных коэффициентов передачи фильтров

$$K(jf) = |K(jf)|e^{j\arg(K(jf))},$$

которые вполне определяются своими амплитудно-частотными характеристиками $|K(jf)|$ и фазочастотными характеристиками $\arg(K(jf))$.

Несколько важных для дальнейшего примеров.

Трибуналный фильтр, выход которого повторяет вход: $y(t) = x(t)$. Импульсная реакция $h(t)$ этого фильтра – это δ -функция, свертка с которой не изменяет сигнал:

$(x * \delta)(t) = x(t)$. Комплексный коэффициент передачи $h(f)$ – тождественно единичная функция $1(f)$ – Фурье-образ δ -функции. δ -импульс на входе тривиального фильтра порождает δ -импульс на выходе. В терминах свертки этот факт выглядит немного шокирующее: $(\delta * \delta)(t) = \delta(t)$ – свертка δ -функции с собой – это снова δ -функция.

Линия задержки с $y(t) = x(t - \tau)$. Ее импульсная реакция – это задержанный на τ δ -импульс: $h(t) = \delta(t - \tau)$. Комплексный коэффициент передачи – гармоническая функция частоты $h(f) = e^{-j2\pi\tau f}$. Отметим, что свертка сигнала $x(t)$ с задержанной δ -функцией приводит к его задержке:

$$(x(u) * \delta(u - \tau))(t) = x(t - \tau).$$

Фильтр с прямоугольной частотной характеристикой $h(f) = \text{rect}_1(f)$. Его импульсная реакция – Фурье образ прямоугольника – это импульс Найквиста:

$$h(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$

Фильтр с прямоугольной частотной характеристикой технически не реализуем, поскольку не удовлетворяет принципу причинности – отклик $h(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ на его выходе появляется раньше воздействия $\delta(t)$. Тем не менее, эта модель играет важную роль в теоретических построениях.

4. Дискретизация времени

Цифровая обработка сигналов начинается с перехода от непрерывного времени t к дискретному nT , выражаемому целым числом n квантами времени длительности T каждый, рис. 4. Сигнал непрерывного времени $x(t)$ заменяется при этом временными рядом – потоком $\{x_n\}_{n \in (-\infty, \infty)}$ выборочных значений $x_n = x(nT)$ сигнала $x(t)$, взятых в моменты дискретизации.

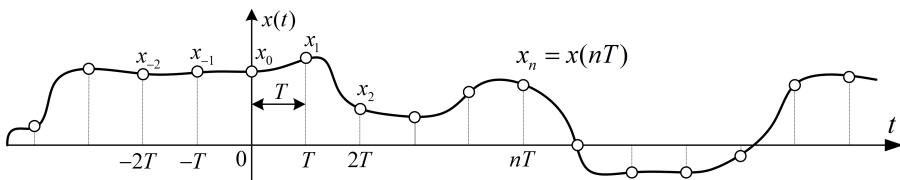


Рис. 4. Дискретизация времени

Выбор шага дискретизации T или, что то же самое, частоты дискретизации $F = \frac{1}{T}$ (частоты Найквиста) определяет разбиение оси частот на зоны Найквиста, рис. 5. Ведущее значение имеет нулевая зона – полоса Найквиста $[-F/2, +F/2]$. Это естественная область определения спектров сигналов дискретного времени. Она симметрична относительно нуля. Высшие зоны Найквиста представлены парами интервалов ширины F на положительных и отрицательных частотах. Для ориентировки, при шаге дискретизации T в 1 мкс (частоте дискретизации F в 1 МГц) полоса Найквиста – это интервал от -500 до $+500$ КГц.

Для дискретизованного сигнала длительность шага дискретизации T оказывается естественным эталоном времени. Удобно раз и навсегда принять T за единицу измерения времени. Тогда единицей измерения частоты станет частота Найквиста $F = \frac{1}{T}$. Если время t измерять в единицах T , а частоту – в единицах F , то моменты

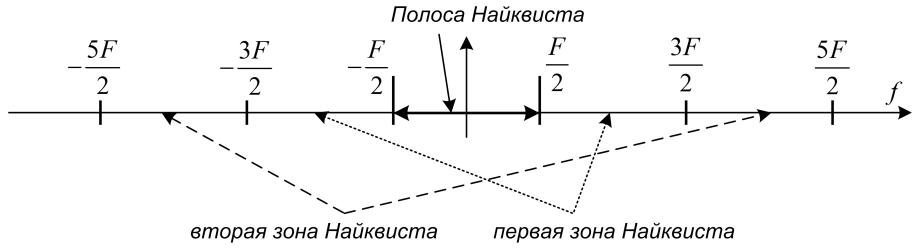


Рис. 5. Зоны Найквиста

дискретизации будут располагаться в целых точках $t = n$, зоны Найквиста окажутся интервалами единичной длины, а полоса Найквиста приведется к стандартному интервалу $[-1/2, 1/2]$ – от одной до другой половины частоты дискретизации.

Итак, пусть сигнал непрерывного времени $x(t)$ дискретизован – заменен потоком выборок $\{x_n\}_{n \in (-\infty, \infty)}$, $x_n = x(t)|_{t=n}$. Можно ли восстановить исходный сигнал по этому потоку? Ясно, что в общем случае – нет. Через набор точек x_n на рис. 4 каждый волен провести плавную кривую $x(t)$ как ему вздумается.

Чтобы ставить вопрос об однозначном восстановлении, нужно как-то ограничить класс дискретизуемых сигналов, а лучше сразу ориентироваться на какой-нибудь конкретный способ восстановления. Классическая теория дискретизации подразумевает восстановление исходного сигнала интерполирующим фильтром с прямоугольной в полосе Найквиста $f \in [-1/2, 1/2]$ частотной характеристики $\text{rect}_1(f)$.

Чтобы выполнить восстановление, преобразуем поток выборок x_n в поток δ -импульсов

$$x^\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - n)$$

с весами x_n и пропустим δ -дискретизованный сигнал $x^\delta(t)$ через прямоугольный фильтр. Импульсная реакция такого фильтра – Фурье образ его частотной характеристики – это импульс Найквиста:

$$h(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \leftrightarrow \text{rect}_1(f).$$

Каждый из сдвинутых δ -импульсов на входе даст сдвинутый импульс Найквиста на выходе. В итоге получится восстановленный сигнал

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin \pi(t - n)}{\pi(t - n)} \quad (4)$$

в виде взвешенного потока сдвинутых импульсов Найквиста. Этот ряд известен как ряд Котельникова.

Сигнал непрерывного времени $\hat{x}(t)$, восстановленный по выборкам x_n рядом Котельникова – то есть прямоугольным интерполирующим фильтром, – вообще говоря, отличается от исходного сигнала $x(t)$ хотя бы потому, что спектр восстановленного сигнала $\hat{x}(t)$ заведомо компактен в полосе Найквиста, а спектр исходного сигнала $x(t)$ может простираться и вне этой полосы.

Принципиально важный факт состоит в том, что, если спектр $x(f)$ сигнала $x(t)$ был компактен в полосе Найквиста изначально, то $\hat{x}(t) = x(t)$. То есть **сигнал с компактным в полосе Найквиста спектром однозначно восстанавливается по выборкам рядом Котельникова**.

Чтобы показать это, перейдем в обеих сторонах (4) в частотную область. Поскольку спектр сдвинутого по времени импульса Найквиста – это умноженный на гармоническую функцию прямоугольник:

$$\frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \leftrightarrow e^{-j2\pi n f} \text{rect}_1(f),$$

в итоге получится:

$$\hat{x}(f) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi n f} \right) \text{rect}_1(f). \quad (5)$$

В круглых скобках правой части легко опознается ряд Фурье – разложение компактного в полосе Найквиста $f \in [-1/2, 1/2]$ спектра $x(f)$ исходного сигнала по системе гармонических функций $e^{-j2\pi n f}$:

$$x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j2\pi n f},$$

в котором коэффициенты Фурье

$$c_n = \int_{-1/2}^{1/2} x(f) e^{j2\pi n f} df = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) e^{j2\pi n f} df = x(t)|_{t=n} = x_n$$

как раз совпадают с выборочными значениями x_n . Так что $\hat{x}(f) = x(f) \text{rect}_1(f) = x(f)$. А значит и $\hat{x}(t) = x(t)$.

Что представляет собой восстановленный сигнал $\hat{x}(t)$ в том случае, когда спектр $x(f)$ исходного сигнала не компактен? В выражение (5) для спектра восстановленного сигнала по прежнему входит ряд Фурье с коэффициентами

$$\begin{aligned} x_n &= x(t)|_{t=n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) e^{j2\pi n f} df = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2+m}^{1/2+m} x(f) e^{j2\pi n f} df = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} x(f-m) e^{j2\pi n(f-m)} df = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(f-m) \right) e^{j2\pi n f} df = \int_{-1/2}^{1/2} x^{\delta}(f) e^{j2\pi n f} df, \end{aligned}$$

которые оказываются коэффициентами разложения в ряд Фурье спектра

$$x^{\delta}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(f-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi n f}.$$

Видно, что спектр $\hat{x}(f) = x^{\delta}(f) \text{rect}_1(f)$ восстановленного сигнала получается из спектра исходного сигнала $x(f)$ в два этапа. Вначале спектр $x(f)$ подвергается репликации – периодизации путем наложения бесконечного числа сдвинутых копий. Реплицированный спектр $x^{\delta}(f)$ жестко ограничивается затем до полосы Найквиста умножением на частотную характеристику $\text{rect}_1(f)$ интерполирующего фильтра.

В процессе репликации бесконечная в обе стороны нить оси частот как бы «наматывается» на окружность единичной длины, а относящиеся к разным виткам этой намотки значения спектра, суммируются. Результатом становится периодический реплицированный спектр, определенный на окружности – то есть в полосе Найквиста.

Характер искажений спектра сигнала при его дискретизации-восстановлении иллюстрирует рис. 6. Если спектр $x(f)$ сигнала изначально компактен в полосе Найквиста, рис. 6а, то при его репликации в $x^{\delta}(f)$ сдвинутые копии не перекрываются.

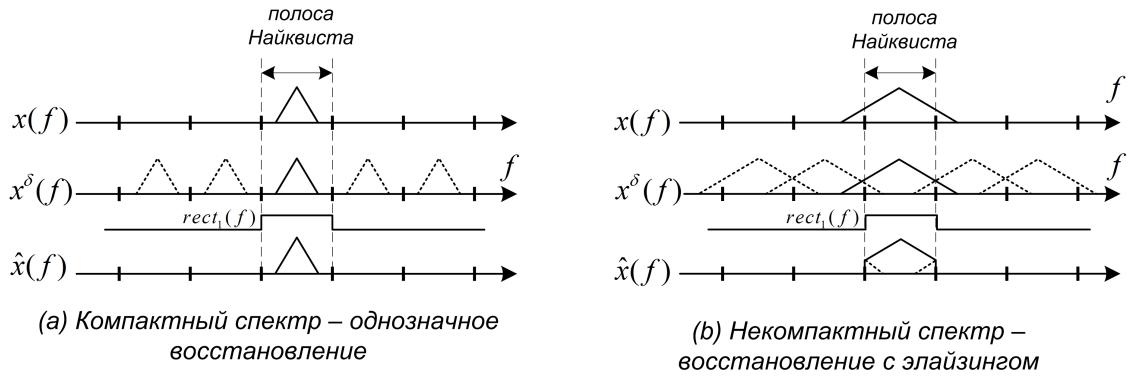


Рис. 6. К явлению элайзинга

Возможность выделения исходного спектра из реплицированного при этом сохраняется. Ее реализует прямоугольный интерполирующий фильтр. Восстановленный им спектр $\hat{x}(f)$ совпадает с исходным. Если же исходный спектр простирается за границы полосы Найквиста, рис. 6b, возникает элайзинг – перекрытие сдвинутых при репликации копий. Элайзинг исключает возможность восстановления исходного спектра из реплицированного. Интерполирующий фильтр обрезает спектр реплицированного сигнала до полосы Найквиста. При этом в полосу Найквиста попадают также и «хвосты» компонент спектра, оказавшихся при репликации в высших зонах.

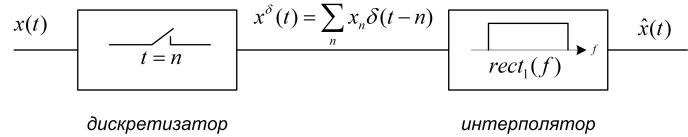


Рис. 7. Тандем дискретизатор-интерполирующий фильтр

Посмотрим на каскадное соединение дискретизатор-интерполятор как на фильтр со входом $x(t)$ и выходом $\hat{x}(t)$, рис. 7. Этот фильтр, очевидно, линеен – отклик на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое из них. Но он не стационарен, не инвариантен во времени. Нестационарность вносит дискретизатор, в котором подразумевается наличие внутренних часов, определяющих положение моментов взятия выборок на временной оси. Так что в общем случае нельзя утверждать, что временной сдвиг сигнала на входе этого фильтра эквивалентен такому же сдвигу выхода.

В спектре сигнала на выходе нестационарного фильтра можно обнаружить компоненты на частотах, которых и в помине не было на входе.

Пусть, к примеру, на входе присутствует узкополосный сигнал $x(t) = a(t)e^{j2\pi mt}$ со спектром $a(f - m)$ в m -ой зоне Найквиста. Случай $m = 2$ показан на рис. 8. При репликации этот спектр перекочует в полосу Найквиста и на выходе будет восстановлен сигнал $\hat{x}(t) = a(t)$ со спектром в полосе Найквиста. Природа этого явления тривиальна – сигналы $x(t) = a(t)e^{j2\pi mt}$ и $a(t)$ имеют одинаковые выборочные значения при всех $t = n$, поскольку $e^{j2\pi mn} = 1$.

В частотной области нестационарность проявляется при репликации спектра. Если входной сигнал сдвинуть на τ , его спектр $x(f)$ перейдет в $x(f)e^{-j2\pi f\tau}$. При репликации

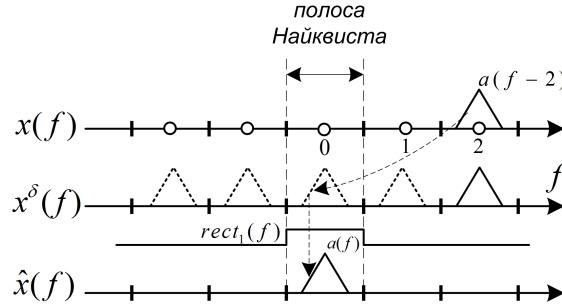


Рис. 8. Помеха из высшей зоны Найквиста

этого спектра получится:

$$\sum_m x(f-m) e^{-j2\pi(f-m)\tau} = e^{-j2\pi f\tau} \sum_m x(f-m) e^{j2\pi m\tau}.$$

Сдвиг же на τ уже дискретизованного сигнала $x^\delta(t)$ – умножение на комплексную гармонику реплицированного спектра – дает иной результат:

$$e^{-j2\pi f\tau} \sum_m x(f-m).$$

Видно, что сдвинутые копии спектра суммируются при репликации с весами $e^{j2\pi m\tau}$, зависящими от сдвига τ сигнала относительно точек взятия выборок. Так проявляется нестационарность дискретизации.

Тем не менее, если спектр $x(f)$ сигнала компактен в полосе Найквиста, а помехи в высших зонах Найквиста отсутствуют, то репликация сводится к размножению спектра $x(f)$ из полосы Найквиста по высшим зонам. Для спектра в полосе Найквиста ($m = 0$) весовой множитель $e^{j2\pi m\tau}$ исчезает. А именно этот спектр и остается после прямоугольного интерполирующего фильтра. Таким образом, компактность спектра в полосе Найквиста делает тандем дискретизатор-интерполятор стационарным фильтром.

Чтобы убрать помехи из высших зон Найквиста, принято перед дискретизацией устанавливать антиэлайзинговый фильтр с прямоугольной в полосе Найквиста частотной характеристикой, рис. 9.

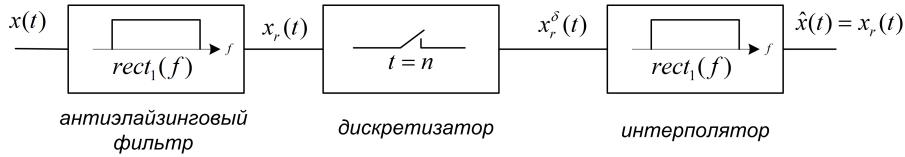


Рис. 9. Антиэлайзинговый фильтр

Волевое ограничение полосы дискретизуемого сигнала до полосы Найквиста снимает все проблемы с нестационарностью. Фильтр со входом $x(t)$ и выходом $\hat{x}(t) = x_r(t)$ на рис. 9 оказывается обычным стационарным фильтром с прямоугольной в полосе Найквиста частотной характеристикой. Отсюда главный практических значимый вывод: прибегая к цифровой обработке того или иного сигнала с шагом

дискретизации T (частотой дискретизации $F = 1/T$), решите для себя – готовы ли Вы пойти на ограничение спектра Вашего сигнала до полосы Найквиста $[-F/2, F/2]$. Если да, то действуйте. Иначе – подумайте над увеличением частоты дискретизации.

5. Гребенка Дирака

Чрезвычайно удобный контекст для обсуждения связанных с дискретизацией времени вопросов дает знакомство с гребенкой Дирака – потоком равномерно распределенных вдоль оси δ -импульсов:

$$\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n).$$

Замечательное свойство этой функции состоит в том, что она инвариантна относительно преобразования Фурье – ее спектр, это также поток δ -импульсов:

$$\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m) = \chi(f)$$

Факт этот почти очевиден. Формальное вычисление интеграла Фурье от ряда для $\chi(t)$ дает представление спектра $\chi(f)$ суммой гармоник:

$$\chi(f) = \int \chi(t) e^{-j2\pi t f} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n f} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m).$$

Но эта сумма есть ни что иное, как разложение частотной гребенки Дирака в ряд Фурье на периоде $f \in [-1/2, 1/2]$.

Гребенка Дирака рассматривается как функция взятия выборок – *sampling function*. Процесс дискретизации сигнала $x(t)$ – переход к дискретизованному сигналу $x^\delta(t)$ – это умножение на функцию выборок:

$$x^\delta(t) = x(t)\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\delta(t - n).$$

В частотной области умножению отвечает свертка спектра $x(f)$ со спектром функции выборок – гребенкой $\chi(f)$:

$$x^\delta(f) = (x(f) * \chi(f)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (x(f) * \delta(f - m)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(f - m).$$

Эта свертка и вызывает репликацию спектра – его периодизацию путем наложения бесконечного числа сдвинутых копий. Таким образом, δ -дискретизация сигнала $x(t)$ эквивалентна репликации его спектра $x(f)$:

$$x^\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\delta(t - n) \leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(f - m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi n f} = x^\delta(f).$$

Если пропустить δ -дискретизованный сигнал через прямоугольный в полосе Найквиста фильтр, то, во временной области, это восстановит сигнал рядом Котельникова, а в частотной – «обрежет» его спектр до полосы Найквиста:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin \pi(t - n)}{\pi(t - n)} \leftrightarrow \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(f - m) \right) rect_1(f) = \hat{x}(f).$$

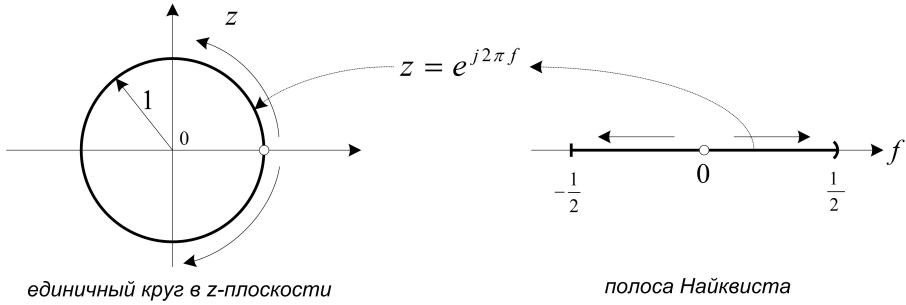


Рис. 10. От полосы Найквиста к z-плоскости

Функция $z = e^{j2\pi f}$ отображает полосу Найквиста – полуинтервал $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, на котором определены спектры дискретизованных сигналов, на единичный круг в комплексной z -плоскости, рис. 10. Это дает возможность рассматривать спектры дискретизованных сигналов

$$x^\delta(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(f-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi n f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = x^\delta(z)$$

как функции комплексной переменной z . Так появляется общепринятое в цифровой обработке z -преобразование дискретизованных сигналов.

Поток x_n выборок дискретизованного сигнала «упаковывается» в ряд

$$x(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n u^n$$

по степеням формальной переменной u . Тогда оказывается, что дискретизованный сигнал – это формальный степенной ряд $x(u)$, а его спектр – это тот же ряд, но рассматриваемый как функция $x(z) = x(u)|_{u=z^{-1}}$ в z -плоскости.

6. Дискретизация в окне

Бесконечный в обе стороны поток выборок дискретизованного сигнала почти всегда приходится ограничивать до блока конечной длины N . Такое ограничение естественно описать как умножение дискретизуемого сигнала $x(t)$ на оконную функцию $w(t)$, выборочные значения которой $w_n = w(t)|_{t=n}$ равны нулю вне диапазона $n = [0 : N - 1]$.

Спектр ограниченного окном сигнала $\hat{x}(t) = x(t)w(t)$ – это свертка спектра $x(f)$ самого сигнала со спектром $w(f)$ оконной функции:

$$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v)w(f-v) dv.$$

Дискретизация сигнала $\hat{x}(t)$ – переход к выборкам

$$\hat{x}^\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_n \delta(t-n) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n w_n \delta(t-n)$$

сопровождается репликацией этой свертки:

$$\hat{x}^\delta(f) = \sum_m \hat{x}(f-m) = \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} x(v)w(f-m-v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) \left(\sum_m w(f-v-m) \right) dv =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)w^{\delta}(f-v) dv = \sum_k \int_{-\frac{1}{2}+k}^{\frac{1}{2}+k} x(v)w^{\delta}(f-v) dv = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_k x(u-k)w^{\delta}(f-u+k) du = \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k x(u-k) \right) w^{\delta}(f-u) du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^{\delta}(u)w^{\delta}(f-u) du.
\end{aligned}$$

Получившийся интеграл – это циклическая свертка периодических функций $x^{\delta}(f)$ и $w^{\delta}(f)$. Интегрирование ведется в ней по периоду $u \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Если представить себе это период «намотанным» на окружность единичной длины, то циклическая свертка сводится к интегралу по окружности от произведения двух определенных на ней функций, из которых вторая – $w^{\delta}(f-u) = w^{\delta}(-(u-f))$ – «поворнута» на f и отражена заменой u на $-u$. Получается, что репликация *свертки* пары функций эквивалента *циклической свертке* их репликаций.

Отсюда следует, что ограничение окном дискретизованного сигнала приводит к циклической свертке его спектра $x^{\delta}(f)$ со спектром

$$w^{\delta}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{-j2\pi n f}. \quad (6)$$

дискретизованной оконной функции

$$w^{\delta}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n \delta(t-n).$$

Функцию (6) называют ядром Дирихле окна $w(t)$. Ядро это вполне определяется набором из N выборочных значений w_n .

Ядро Дирихле прямоугольного окна с $w_n = 1$, $n = [0 : N - 1]$ вычисляется как сумма членов геометрической прогрессии:

$$w^{\delta}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n f} = \frac{1 - e^{-j2\pi N f}}{1 - e^{-j2\pi f}} = \frac{\sin(\pi N f)}{\sin(\pi f)} e^{-j\pi(N-1)f}. \quad (7)$$

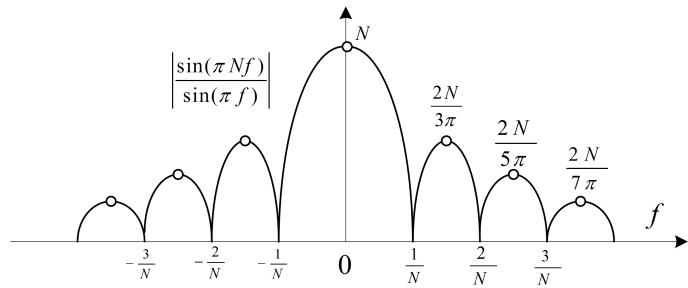


Рис. 11. Модуль ядра Дирихле прямоугольного окна

График его модуля, рис. 11, обращается в нуль в точках $f = \pm \frac{m}{N}$, $m \neq 1$, имеет главный пик высоты N при $f = 0$ и множество побочных пиков. Высота побочных пиков падает пропорционально их удаленности от нуля, но не стремится к нулю ни при каких f , стабилизируясь на единичном уровне.

При $N \rightarrow \infty$ это ядро переходит в гребенку Дирака:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi N f)}{\sin(\pi f)} e^{-j\pi(N-1)f} = \sum_m \delta(f - m).$$

Циклическая свертка спектра дискретизованного сигнала с ядром Дирихле окна вызывает расплывание пиков спектра и появление в нем паразитных осцилляций в области резких перепадов. Это одно из проявлений явления Гиббса, известного в теории сходимости рядов Фурье.

К примеру, спектр гармонического сигнала частоты f_0 – это δ -функция:

$$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0).$$

При его дискретизации спектр реплицируется, становясь гребенкой δ -импульсов – по импульсу на каждую зону Найквиста. Циклическая свертка с ядром Дирихле прямоугольного окна превращает δ -импульс $\delta(f - f_0)$ в полосе Найквиста в сдвинутое на f_0 ядро Дирихле

$$\frac{\sin(\pi N(f - f_0))}{\sin(\pi(f - f_0))} e^{-j\pi(N-1)(f - f_0)}$$

с главным пиком высоты N при $f = f_0$. Так что спектр дискретизованного в окне гармонического сигнала частоты f_0 – это вовсе не δ -импульс в точке f_0 , а сдвинутое в точку f_0 ядро Дирихле окна.

В спектральном анализе выбор прямоугольного окна не считается вполне приемлемым. Критику вызывает слишком медленный спад его ядра Дирихле с удалением от главного пика. Распространены окна, отличные от прямоугольных. Ядро Дирихле хорошего окна, с одной стороны, должно иметь узкий пик в нуле, а с другой – быстро спадать в дальней зоне. Эти требования, в определенной мере, взаимно исключают друг друга. Поэтому выбор хорошего окна – это непростая задача. Известны не менее десятка конкурирующих вариантов выбора окон, и все они находят свои применения.

7. Дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) на N точках принимает на вход N -блок $X^t = \{x_n^t, n = [0 : N - 1]\}$ комплексных выборочных значений сигнала и формирует N -блок $X^f = \{x_m^f, m = [0 : N - 1]\}$ комплексных же выборочных значений спектра по правилу:

$$x_m^f = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^t \xi^{-mn}, \quad \xi = e^{j \frac{2\pi}{N}}.$$

По форме, – это просто умножение вектора X^t на квадратную матрицу $H = \{h_{m,n} = \xi^{-mn}\}$:

$$X^f = H X^t.$$

Комплексное число $\xi = e^{j \frac{2\pi}{N}}$ – это один из комплексных корней из единицы степени N – решений уравнения

$$z^N = 1.$$

Уравнение это имеет N корней $\xi^k = e^{j \frac{2\pi k}{N}}$, $k = [0 : N - 1]$. Все они равномерно распределены по единичной окружности в комплексной плоскости с шагом $\frac{2\pi}{N}$.

Корни можно перемножать – $\xi^k \xi^l = \xi^{(k+l)}$ и возводить в целую степень – $(\xi^k)^l = \xi^{kl}$. Это сводится к сложению и перемножению показателей. Условие $\xi^N = 1 = \xi^0$ обеспечивает автоматическое приведение результатов операций над показателей по модулю N . У каждого корня ξ^k имеется обратный $\xi^{-k} = \xi^{N-k}$, такой что $\xi^k \xi^{-k} = \xi^N = \xi^0 = 1$.

Фигурирующие в определении ДПФ индексы n, m удобно с самого начала рассматривать как элементы кольца Z_N целых чисел от 0 до $N - 1$ с операциями сложения и перемножения по модулю N :

$$x_m^f = \sum_{n \in Z_N} x_n^t \xi^{-mn} = \sum_{n \in Z_N} x_n^t e^{-j \frac{2\pi}{N} mn}, \quad m \in Z_N. \quad (8)$$

Примечательно, что значение ДПФ-спектра в точке нуль – это просто сумма всех выборок сигнала:

$$x_0^f = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^t,$$

а, при четном N , его значение в точке $\frac{N}{2}$ – это знакопеременная сумма выборок:

$$x_{N/2}^f = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x_n^t.$$

Легко проверяющееся разложение

$$(z^N - 1) = (z - 1)(z^{N-1} + z^{N-2} + \cdots + z^2 + z + 1)$$

показывает, что среди N комплексных корней из единицы ξ^k , $k = [0 : N - 1]$ имеется один тривиальный – решение $\xi^0 = 1$ уравнения $z - 1 = 0$, а все прочие нетривиальные корни ξ^k с $k \neq 0$ являются решениями уравнения

$$(z^{N-1} + z^{N-2} + \cdots + z^2 + z + 1) = 0.$$

А это означает, что сумма их степеней равна нулю. Сумма же N степеней тривиального корня $\xi^0 = 1$ равна N . Таким образом:

$$\sum_{j \in Z_N} (\xi^k)^j = \sum_{j \in Z_N} \xi^{kj} = N \delta_{k,0},$$

или, в чуть более общем виде:

$$\frac{1}{N} \sum_{j \in Z_N} \xi^{kj} \xi^{-lj} = \frac{1}{N} \sum_{j \in Z_N} \xi^{(k-l)j} = \delta_{k,l}. \quad (9)$$

Преобразование (8) обратимо. Выборки сигнала восстанавливаются по выборкам спектра по правилу:

$$x_n^t = \frac{1}{N} \sum_{m \in Z_N} x_m^f \xi^{nm} = \frac{1}{N} \sum_{m \in Z_N} x_m^f e^{+j \frac{2\pi}{N} nm}, \quad n \in Z_N. \quad (10)$$

Доказательство сводится к прямой проверке с использованием соотношения ортогональности (9) по дороге:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{m \in Z_N} x_m^f \xi^{nm} &= \frac{1}{N} \sum_{m \in Z_N} \left(\sum_{k \in Z_N} x_k^t \xi^{-mk} \right) \xi^{nm} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k \in Z_N} x_k^t \left(\sum_{m \in Z_N} \xi^{m(n-k)} \right) = \sum_{k \in Z_N} x_k^t \delta_{n,k} = x_n^t. \end{aligned}$$

Формулы (8) и (10) и определяют пару дискретных преобразований Фурье – переходов между блоками X^t , X^f выборок сигнала и спектра. При взгляде на них аналогии с интегралами Фурье бросаются в глаза. И все же их использование в спектральном анализе сигналов непрерывного времени требует определенного осмысливания.

8. ДПФ в спектральном анализе

В обычном преобразование Фурье время и частота непрерывны и неограничены. Время же и частота ДПФ дискретны и цикличны – являются элементами кольца Z_N .

Чтобы «приспособить» дискретное преобразование с спектральному анализу сигнала непрерывного времени $x(t)$, этот сигнал нужно во первых, дискретизовать, а во вторых – ограничить некоторым времененным окном с тем, чтобы выделить из бесконечного потока выборок блок конечной длины N .

Как и раньше, примем шаг дискретизации T за единицу измерения времени. Введем функцию времененного окна $w(t)$, выборочные значения которой $w_n = w(t)|_{t=n}$ обращаются в нуль вне диапазона $n = [0 : N - 1]$. Ограничим исследуемый сигнал во времени умножением на оконную функцию – $\hat{x}(t) = x(t)w(t)$ – и подвернем результат дискретизации. Получим δ -дискретизованный сигнал

$$\hat{x}^\delta(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_n^t \delta(t - n); \quad \hat{x}_n^t = \hat{x}(t)|_{t=n} = (x(t)w(t))|_{t=n}. \quad (11)$$

со спектром

$$\hat{x}^\delta(f) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_n^t e^{-j2\pi n f}. \quad (12)$$

Если ограничиться анализом этого спектра в дискретном наборе точек $f = \frac{m}{N}$, то окажется, что блок чисел $\hat{x}_m^f = \hat{x}^\delta(f)|_{f=\frac{m}{N}}$, $m = [0 : N - 1]$ как раз и определяется по блоку выборок \hat{x}_n^t дискретным преобразование Фурье (8):

$$\hat{x}_m^f = \hat{x}^\delta(f)|_{f=\frac{m}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_n^t e^{-j\frac{2\pi}{N} mn} = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_n^t \xi^{-mn}.$$

Таково место ДПФ в устройстве мироздания – оно преобразует блок выборок дискретизованного в окне сигнала (11) в блок выборок его спектра (12).

При дискретизации в окне спектр $x(f)$ исследуемого сигнала искажается. Во первых, он реплицируется, превращаясь в периодический спектр

$$x^\delta(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(f - m)$$

с периодом в полосе Найквиста $f \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, а во вторых, этот уже реплицированный спектр подвергается циклической свертке с ядром Дирихле $w^\delta(f)$ окна (6)

$$\hat{x}^\delta(f) = \int_{-1/2}^{1/2} x^\delta(v) w^\delta(f - v) dv.$$

Дискретное преобразование (8), вычисленное по блоку \hat{x}_n^t , $n = [0 : N - 1]$ выборок сигнала, как раз и дает блок выборок этого искаженного спектра.

Если число N точек дискретизации четно, рис. 12, то точка с номером $m = \frac{N}{2}$ попадает как раз на правую границу полосы Найквиста: $f = \frac{m}{N} = \frac{1}{2}$. Поскольку $\frac{N}{2} = -\frac{N}{2}$ по модулю N , эта точка представляет также и левую границу этой полосы с $f = -\frac{1}{2}$. Точке $m = 0$ отвечает нулевая частота. Прочие $N - 2$ точки разделены на две равные группы. Точки с номерами от 1 до $\frac{N}{2} - 1$ представляют зону положительных частот в полосе Найквиста. Точкам же с номерами от $\frac{N}{2} + 1$ до $N - 1$ отвечают частоты в первой зоне Найквиста, в которую реплицирован спектр с отрицательной полуоси

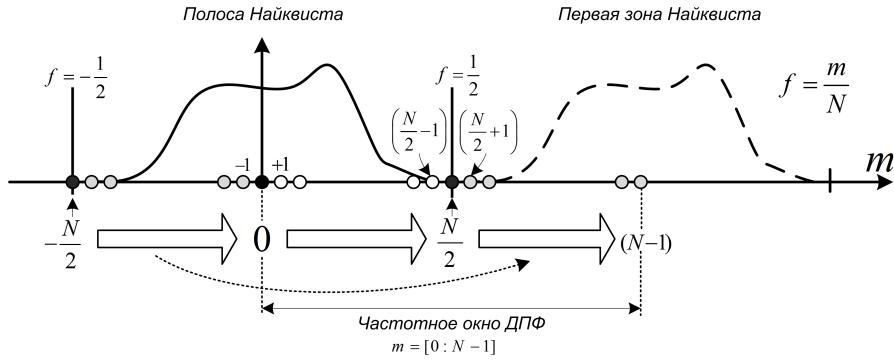


Рис. 12. Точки дискретизации спектра

частот. Так что точки из этой группы на самом деле представляют отрицательные частоты от левой границы полосы Найквиста $m = -\frac{N}{2}$ до точки $m = -1$.

При движении от нуля в направлении увеличения индекса m , рис. 12, вначале проходятся положительные частоты от нуля до правой границы полосы Найквиста $m = \frac{N}{2}$. В этой точке происходит скачок на левую границу – в точку $m = -\frac{N}{2}$. При дальнейшем движении проходятся отрицательные частоты в направлении от левой границы полосы Найквиста к нулю. Выборочное значение спектра с наибольшим номером $m = N - 1$ представляет ближайшую к нулю отрицательную частоту.

Эффекты наложения прямоугольного временного окна иллюстрирует рис. 13, на котором показаны результаты вычисления дискретного преобразования Фурье по блоку выборок $x_n = x(t)|_{t=n}$, $n = [0 : N - 1]$ гармонического сигнала $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ частоты f_0 . Истинный спектр этого сигнала – это δ -функция $\delta(f - f_0)$ в точке f_0 . Ограничение прямоугольным временным окном приводит к циклической свертке спектра $\delta(f - f_0)$ в полосе Найквиста с ядром Дирихле прямоугольного окна (7). Результатом становится ядро Дирихле, сдвинутое в точку f_0 . Показанные на рисунке графики его модуля дают представление о том, как выглядит спектр ограниченного прямоугольным окном гармонического сигнала на самом деле.

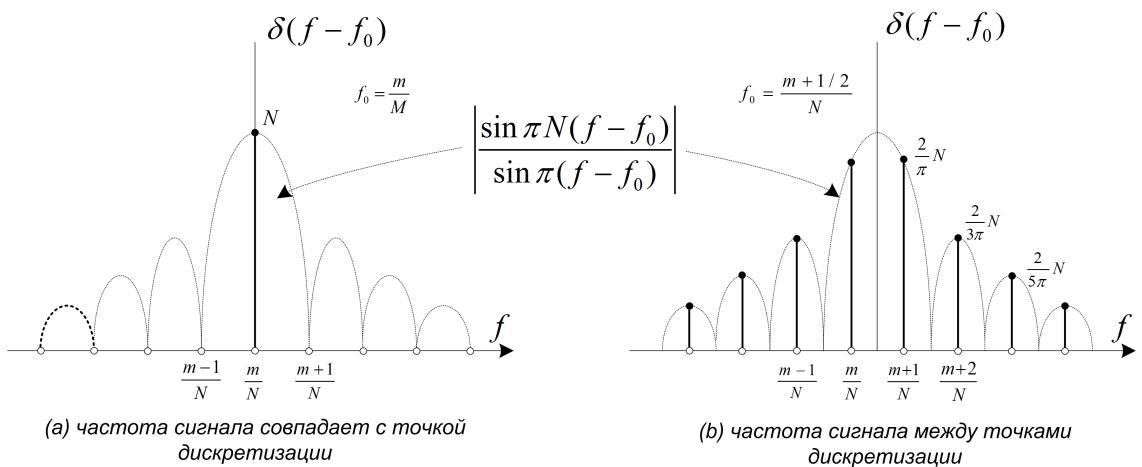


Рис. 13. Спектры гармонического сигнала, дискретизованного в окне

Если частота $f_0 = \frac{m}{N}$ совпадает с одной из точек дискретизации спектра (целое число периодов гармонического сигнала на длине окна), то оказывается, рис. 13а, что в точке $f = f_0$ выборочное значение спектра составляет N , а все прочие точки дискретизации приходятся как раз на нули ядра Дирихле. Вычисленный дискретным преобразованием Фурье спектр похож на δ -функцию – единственное отличное от нуля значение N в точке $f = f_0$. Но это иллюзия благополучия, которая разбивается при малейшем отклонении частоты f_0 от точки дискретизации $\frac{m}{N}$, то есть всякий раз, когда на временное окно приходится не целое число периодов. Как показано на рис. 13б для $f_0 = \frac{m+1/2}{N}$, в вычисленном дискретным преобразованием спектре обнаруживается тогда масса ненулевых выборок, уровни которых падают с уходом от f_0 не слишком быстро – лишь обратно пропорционально отклонению по частоте. Это и объясняет повышенное внимание научного сообщества к выбору формы окна ДПФ.

Возможности ДПФ как инструмента спектрального анализа определяются его основным ресурсом – числом N точек дискретизации. Это ресурс определяет базу ДПФ – произведение ширины временного окна W_t на ширину частотного W_f :

$$N = W_t W_f, \quad \text{где} \quad W_t = NT, \quad W_f = NF; \quad FT = \frac{1}{N},$$

а T и F – шаги дискретизации (разрешения) по времени и частоте. Располагая этим ресурсом, надлежит разумно распорядиться им, адекватно выбрав частоту дискретизации.

Когда интересен анализ спектров в широкой полосе, выбирают широкое частотное окно, проигрывая в разрешении по частоте. Для этого приходится сузить ширину временного окна, применив малый шаг дискретизации по времени. Когда же в центре внимания находится высокое разрешение по частоте, частотное окно сужают, выбирая большой шаг дискретизации по времени – широкое временное окно.

9. Быстрое преобразование Фурье

Вычисление дискретного преобразования Фурье на N -точках

$$x_m^f = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^t \xi^{-mn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^t e^{-j \frac{2\pi}{N} mn} \quad (13)$$

требует N^2 умножений комплексных чисел – по N умножений для вычисления каждого из N значений x_m^f . Это много. Уже при $N = 1000$ требуется 10^6 умножений. Распространенность ДПФ связана с существованием быстрых алгоритмов его вычисления – алгоритмов быстрого преобразования Фурье – БПФ (*Fast Fourier Transform – FFT*) с логарифмически-линейной сложностью $N \log N$.

В основе ускорения лежит идея факторизации, рис. 14. Пусть число $N = PQ$ составное – является произведением чисел P и Q . Если эти сомножители взаимно просты, то оказывается, что элементы N -блока $[x_0^t, \dots, x_{N-1}^t]$ можно упаковать в $P \times Q$ -матрицу так, что вычисление ДПФ на N -блоке сводится к вычислению ДПФ по каждой из строк этой матрицы, а затем – к вычислению ДПФ по всем ее столбцам, рис. 14.

Каждое ДПФ по строке требует Q^2 операций. Имеется P строк. Так что сложность вычисления строчных ДПФ составляет PQ^2 . Прибавив к этому сложность QP^2 столбцовых ДПФ, получим оценку сложности факторизованного N -точечного ДПФ:

$$QP^2 + PQ^2 = PQ(P + Q) = N(P + Q) \ll N^2.$$

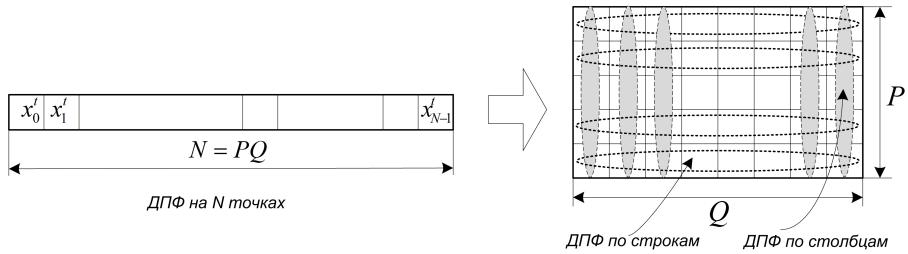


Рис. 14. К идеи факторизации

Ускорение достигается благодаря тому, что $P + Q \ll PQ = N$.

Когда речь заходит о БПФ, почти наверняка имеется в виду ДПФ на числе точек $N = 2^k$, выражаящемся степенью двойки. Такое число прекрасно факторизуется в произведение k двоек. Сложность в том, что эти сомножители не взаимно просты. Так что сведение ДПФ на $N = 2^k = 22^{k-1}$ точках к 2-точечным и 2^{k-1} -точечным требует определенных ухищрений. Это минус. Плюс же состоит в том, что 2-точечные ДПФ вычисляются крайне просто. При $N = 2$ (13) сводится к

$$x_0^f = x_0^t + x_1^t,$$

$$x_1^f = x_0^t - x_1^t.$$

Требуется одно сложение и одно вычитание пары комплексных чисел. По понятной причине за этой парой операций закрепилось название «бабочка».

Блок из $N = 2^k$ чисел разбивается на два 2^{k-1} -блока. Существенно, что сделать это можно двумя способами – дихотомией и прореживанием.

При разбиении дихотомией блок $[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$ просто разрезается пополам посередине. Этому отвечает факторизация скалярного индекса $n^{[k]}$ из диапазона $[0 : 2^k - 1]$ в двумерный векторный индекс $(n^{[1]}, n^{[k-1]})$, $n^{[1]} = [0 : 1]$, $n^{[k-1]} = [0 : 2^{k-1} - 1]$ по правилу:

$$n^{[k]} = n^{[k-1]} + 2^{k-1}n^{[1]}.$$

Координата $n^{[1]}$ – это номер субблока (частное от деления $n^{[k]}$ на 2^{k-1}), координата $n^{[k-1]}$ – это индекс элемента внутри субблока (остаток от деления $n^{[k]}$ на 2^{k-1}).

При разбиении прореживанием в субблоки выделяются элементы на четных и нечетных позициях:

$$n^{[k]} = 2n^{[k-1]} + n^{[1]}.$$

Здесь $n^{[1]}$ – это остаток от деления $n^{[k]}$ на 2, а $n^{[k-1]}$ – частное.

К успеху приводит использование разных способов факторизации индекса для временной и частотной областей. Пусть во временной области применена дихотомия:

$$n^{[k]} = n^{[k-1]} + 2^{k-1}n^{[1]},$$

а в частотной – прореживание:

$$m^{[k]} = 2m^{[k-1]} + m^{[1]}.$$

Тогда

$$n^{[k]}m^{[k]} = 2n^{[k-1]}m^{[k-1]} + 2^{k-1}n^{[1]}m^{[1]} + n^{[k-1]}m^{[1]} + 2^k n^{[1]}m^{[k-1]}.$$

Ключевой момент состоит в том, что последнее слагаемое здесь равно нулю по модулю $N = 2^k$, так что перемножение скалярных индексов почти сводится к перемножению

их координат $-n^{[k-1]}m^{[k-1]}$ и $n^{[1]}m^{[1]}$. Идиллию нарушает «перепутывающий» фактор $n^{[k-1]}m^{[1]}$:

$$n^{[k]}m^{[k]} = \left(2n^{[k-1]}m^{[k-1]} + 2^{k-1}n^{[1]}m^{[1]} + n^{[k-1]}m^{[1]}\right) \bmod N. \quad (14)$$

После факторизации индексов

$$m = m^{[k]} \rightarrow (m^{[1]}, m^{[k-1]}); \quad n = n^{[k]} \rightarrow (n^{[1]}, n^{[k-1]})$$

сумма (13) принимает вид:

$$x_{m^{[1]}, m^{[k-1]}}^f = \sum_{n^{[k-1]}} \sum_{n^{[1]}} x_{n^{[1]}, n^{[k-1]}}^t \xi^{-2m^{[k-1]}n^{[k-1]}} \xi^{-2^{k-1}m^{[1]}n^{[1]}} \xi^{-m^{[1]}n^{[k-1]}}.$$

Обозначим через $\xi_{(k)} = e^{j\frac{2\pi}{2^k}}$ комплексный корень из единицы для вычисления ДПФ на 2^k точках. Тогда $\xi = \xi_{(k)}$, $\xi^2 = \xi_{(k-1)}$, $\xi^{2^{k-1}} = \xi_{(1)}$. Учтя это, придем к следующей факторизации ДПФ:

$$x_{m^{[1]}, m^{[k-1]}}^f = \sum_{n^{[k-1]}} \xi_{(k-1)}^{-m^{[k-1]}n^{[k-1]}} \xi_{(k)}^{-m^{[1]}n^{[k-1]}} \left(\sum_{n^{[1]}} x_{n^{[1]}, n^{[k-1]}}^t \xi_{(1)}^{-m^{[1]}n^{[1]}} \right). \quad (15)$$

Внутренняя сумма здесь – это ДПФ на двух точках, которые вычисляются по индексу $n^{[1]}$ при всех возможных значениях индекса $n^{[k-1]}$. Результаты этих вычислений со смешанным индексом $(m^{[1]}, n^{[k-1]})$ умножаются на комплексные числа $\xi_{(k)}^{-m^{[1]}n^{[k-1]}}$. Их называют поворачивающими множителями (*twiddles*). Наконец, внешняя сумма – это ДПФ на 2^{k-1} -й точке, которое вычисляется по индексу $n^{[k-1]}$ дважды – при $m^{[1]} = 0$ и $m^{[1]} = 1$. Примечательно, что при $m^{[1]} = 0$ этап умножения на поворачивающие множители выпадает, поскольку все эти множители оказываются единичными.

Схема (15) известна как быстрое преобразование Фурье с прореживанием по частоте. Она сводит вычисление ДПФ на 2^k точках к 2^{k-1} -у вычислению бабочки (ДПФ на двух точках) и последующему вычислению двух ДПФ на 2^{k-1} -й точке. Между этими этапами «вклинивается» умножение на поворачивающие множители. Это следствие присутствия перепутывающего фактора в (14).

Внешние 2^{k-1} -точечные ДПФ, в свою очередь, факторизуются на двухточечные внутренние и 2^{k-2} -точечные внешние. Так продолжается до тех пор, пока внешние ДПФ также не окажутся двухточечными. Вычисление двухточечных ДПФ не требует перемножений. Так что все умножения в алгоритме БПФ оказываются сосредоточенными на этапах умножений на поворачивающие множители.

Альтернативный вариант БПФ получается, если применить факторизацию прореживанием для временного индекса и дихотомией – для частотного. Он приводит к схеме БПФ с прореживанием по времени:

$$x_{m^{[1]}, m^{[k-1]}}^f = \sum_{n^{[1]}} \xi_{(1)}^{-m^{[1]}n^{[1]}} \xi_{(k)}^{-m^{[k-1]}n^{[1]}} \left(\sum_{n^{[k-1]}} x_{n^{[1]}, n^{[k-1]}}^t \xi_{(k-1)}^{-m^{[k-1]}n^{[k-1]}} \right),$$

в которой два 2^{k-1} -точечные ДПФ вычисляются сначала, а двухточечные потом – после умножения на поворачивающие множители.