

Рекомендовать студентам до начала выступления преподавателя у доски

а) **скопировать** из References в свою индивидуальную директорию следующие программы:

rsn_30
rsn_31a
rsn_32b (!)
rsn_40
rsn_50a
tr_rayleigh
tr_rice_phi
tr_rice_U
tr_uniform

б) **запустить** (в MATLAB) программу **rsn_30**, предусмотрев останов перед последним оператором (функциональной клавишей F12), и, последовательно нажимая функциональную клавишу F5, **убедиться** в том, что при подаче белого шума на вход узкополосного фильтра на его выходе возникает колебание с частотой, равной центральной частоте узкополосного фильтра, с медленно меняющимися амплитудой и фазой.

План выступления у доски:

- 1) Узкополосный гауссовский случайный процесс:
разложение на квадратурные составляющие.
- 2) Узкополосный гауссовский случайный процесс:
огibaющая и фаза.
- 3) Сумма гармонического сигнала
и узкополосного гауссовского шума.
- 4) Обнаружение радиопульса на фоне шума:
 - а) *Постановка задачи*
 - б) *Обнаружение с использованием детектора огibaющей*
 - б) *Синхронное детектирование*

По окончании выступления преподавателя у доски

рекомендовать студентам запустить программу **rsn_31a**, предусмотрев останов перед последним оператором (функциональной клавишей F12), и в течение времени работы этой программы (около 15 мин.) организовать чтение студентами параграфов 6.2 и 6.3 в Пособии (которое находится в Labworks\Lab_12V).

Предполагается, что по результатам выполнения программы **rsn_31a** студент убеждается в наличии у квадратурных составляющих тех свойств, о которых было рассказано преподавателем.

Результаты выполнения программы **rsn_32b** позволяют студенту убедиться в том, что огибающая узкополосного гауссовского шума имеет рэлеевское распределение, а фаза распределена равномерно в пределах $(-\pi, +\pi)$.

Для правильного истолкования результатов выполнения программы **rsn_40** (figure 3 и figure 4, распределения мгновенных значений огибающей и фазы суммы гармонического сигнала и шума) существенны численные значения параметров, выводимые в командное окно MATLAB операторами 138–143.

Сравнивая изображения на figure 2 и figure 3 в программе **rsn_50a** (с точки зрения различия между постоянными составляющими на выходе фильтра нижних частот на тех участках интервала наблюдения, где только шум, и там, где имеется сигнал), нетрудно убедиться в значительном преимуществе синхронного детектирования по отношению к детектированию с использованием детектора огибающей, хотя при таком сильном шуме говорить о надежном обнаружении одиночного радиоимпульса не приходится. **Синхронное детектирование – это лучшее, что можно сделать в данном случае.**

1) Узкополосный гауссовский случайный процесс:
разложение на квадратурные составляющие

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (5.1)$$

$$x(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (5.4)$$

$$x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (5.5)$$

$$x_c(t) = U(t) \cos \varphi(t), \quad x_s(t) = U(t) \sin \varphi(t) \quad (5.6)$$

$$U(t) = \sqrt{[x_c(t)]^2 + [x_s(t)]^2}, \quad \varphi(t) = \arctg \frac{x_s(t)}{x_c(t)}. \quad (5.7)$$

$x_c(t)$ и $x_s(t)$ – медленно меняющиеся амплитуды так называемых квадратурных составляющих $x_c(t) \cdot \cos \omega_0 t$ и $-x_s(t) \cdot \sin \omega_0 t$:

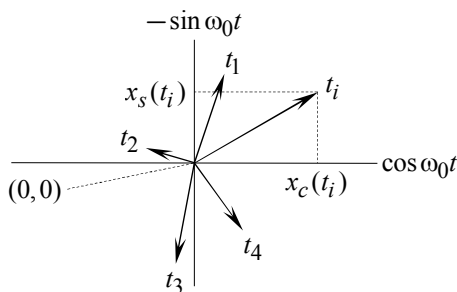


Рис. 5.3. Представление узкополосного процесса в виде векторной диаграммы

Свойства квадратурных составляющих:

Низкочастотные процессы $x_c(t)$ и $x_s(t)$

- (а) являются гауссовскими,
- (б) каждый из них обладает дисперсией (мощностью) той же величины σ_x^2 , что процесс $x(t)$, и
- (в) они независимы один относительно другого.

Моделирующая программа **rsn_31a** демонстрирует, что указанные свойства процессов $x_c(t)$ и $x_s(t)$ действительно имеют место.

2) Узкополосный гауссовский случайный процесс:
огибающая и фаза

$$p(U, \varphi) dU d\varphi = p(x_c, x_s) dx_c dx_s$$

$$p(U, \varphi) = p(x_c(U, \varphi), x_s(U, \varphi)) \cdot J ,$$

J – якобиан преобразования x_c и x_s в U и φ :

$x_c = U \cos \varphi$ и $x_s = U \sin \varphi$, поэтому

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial U} & \frac{\partial x_c}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_s}{\partial U} & \frac{\partial x_s}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -U \sin \varphi \\ \sin \varphi & U \cos \varphi \end{vmatrix} = U .$$

Мгновенные значения сигналов x_c и x_s являются независимыми случайными величинами с распределениями

$$p(x_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x_c^2}{2\sigma_x^2}}, \quad p(x_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x_s^2}{2\sigma_x^2}}, \quad -\infty < x_c, x_s < \infty,$$

где σ_x^2 – дисперсия узкополосного процесса $x(t)$, следовательно

$$p(U, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x_c^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x_s^2}{2\sigma_x^2}} \cdot U = \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (5.8)$$

$$0 \leq U < \infty, \quad -\pi \leq \varphi < \pi,$$

откуда

$$p(U) = \int_{-\pi}^{\pi} p(U, \varphi) d\varphi = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}, \quad 0 \leq U < \infty, \quad (5.9)$$

$$p(\varphi) = \int_0^{\infty} p(U, \varphi) dU = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi < \pi. \quad (5.10)$$

$$p(U, \varphi) = p(U) \cdot p(\varphi) .$$

$p(U)$ называется **распределением Рэлея**, его размерность $[1/B]$.

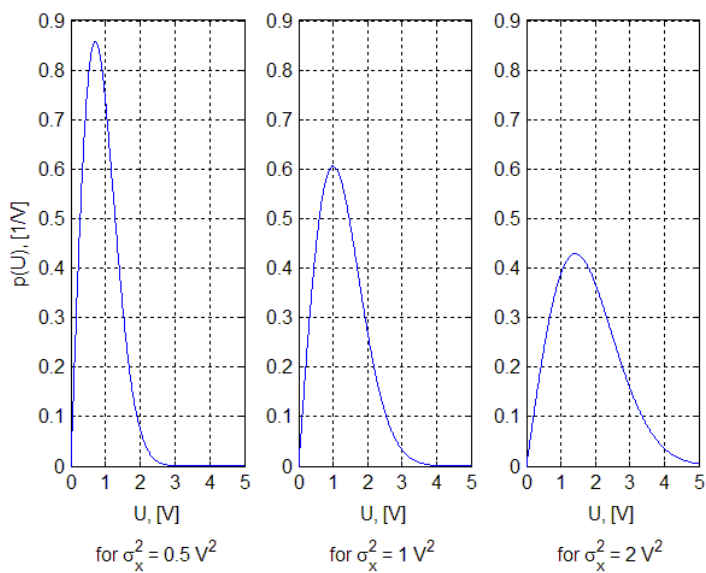


Рис. 5.12. Распределение Рэлея

3) Сумма гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

$s(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \psi)$ – полезный сигнал,

$n(t)$ – узкополосный гауссовский шум с центральной частотой ω_0 :

$$x(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \psi) + U_n(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_n(t)],$$

$U_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ – огибающая и фаза гауссовского шума;

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_0(t) - n_s(t) \sin \omega_0(t),$$

$n_c(t) = U_n(t) \cos \varphi_n(t)$ и $n_s(t) = U_n(t) \sin \varphi_n(t)$ – гауссовские независимые низкочастотные процессы с дисперсией σ_n^2 каждый.

$$\begin{aligned} x(t) &= [U_m \cos \psi + n_c(t)] \cos \omega_0 t - [U_m \sin \psi + n_s(t)] \sin \omega_0 t = \\ &= x_{\Sigma c}(t) \cos \omega_0 t - x_{\Sigma s}(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Таким образом, процесс $x(t)$ также может быть разложен на квадратурные составляющие с медленно меняющимися амплитудами

$$x_{\Sigma c}(t) = U_m \cos \psi + n_c(t) \text{ и } x_{\Sigma s}(t) = U_m \sin \psi + n_s(t)$$

(рис. 6.1) или представлен в виде колебания

$$x(t) = U_{\Sigma}(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_{\Sigma}(t)]$$

с медленно меняющимися огибающей

$$U_{\Sigma}(t) = \sqrt{[x_{\Sigma c}(t)]^2 + [x_{\Sigma s}(t)]^2}$$

и фазой

$$\varphi_{\Sigma}(t) = \arctg \frac{x_{\Sigma c}(t)}{x_{\Sigma s}(t)}.$$

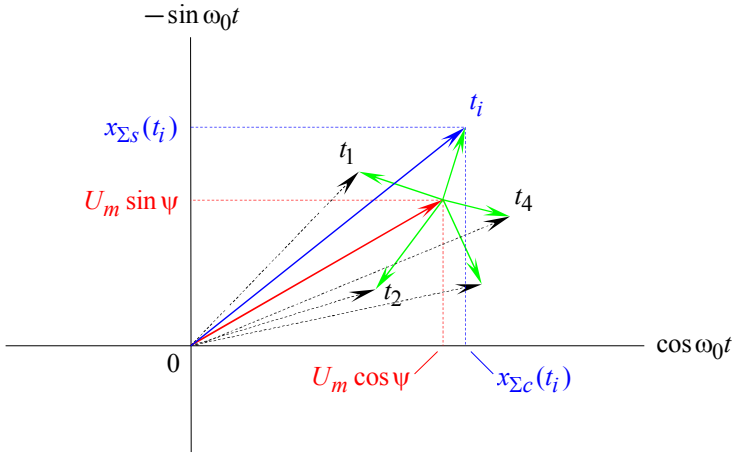


Рис. 6.1. Векторная диаграмма для суммы гармонического сигнала и шума

Чтобы найти плотность совместного распределения вероятностей $p(U_\Sigma, \varphi_\Sigma)$ можно воспользоваться нормальностью распределения мгновенных значений амплитуд квадратурных составляющих шума

$$n_c(t) = x_{\Sigma c}(t) - U_m \cos \psi \text{ и } n_s(t) = x_{\Sigma s}(t) - U_m \sin \psi,$$

имея в виду, что

$$x_{\Sigma c}(t) = U_\Sigma(t) \cos \varphi_\Sigma(t) \text{ и } x_{\Sigma s}(t) = U_\Sigma(t) \sin \varphi_\Sigma(t):$$

$$p(U_\Sigma, \varphi_\Sigma) dU_\Sigma d\varphi_\Sigma = p(n_c, n_s) dn_c dn_s,$$

$$p(U_\Sigma, \varphi_\Sigma) = p(n_c(U_\Sigma, \varphi_\Sigma), n_s(U_\Sigma, \varphi_\Sigma)) \cdot J,$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial n_c}{\partial U_\Sigma} & \frac{\partial n_c}{\partial \varphi_\Sigma} \\ \frac{\partial n_s}{\partial U_\Sigma} & \frac{\partial n_s}{\partial \varphi_\Sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_\Sigma & -U_\Sigma \sin \varphi_\Sigma \\ \sin \varphi_\Sigma & U_\Sigma \cos \varphi_\Sigma \end{vmatrix} = U_\Sigma.$$

$$p(U_\Sigma, \varphi_\Sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp \left[-\frac{(x_{\Sigma c} - U_m \cos \psi)^2 + (x_{\Sigma s} - U_m \sin \psi)^2}{2\sigma_n^2} \right] \cdot U_\Sigma.$$

$$p(U_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}) = \frac{U_{\Sigma}}{2\pi\sigma_n^2} \exp \left[-\frac{U_{\Sigma}^2 + U_m^2 - 2U_m U_{\Sigma} \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{2\sigma_n^2} \right]. \quad (6.1)$$

$$p(U_{\Sigma}) = \int_{-\pi}^{\pi} p(U_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}) d\varphi_{\Sigma} = \frac{U_{\Sigma}}{\sigma_n^2} e^{-\frac{U_{\Sigma}^2 + U_m^2}{2\sigma_n^2}} I_0 \left(\frac{U_m U_{\Sigma}}{\sigma_n^2} \right), \quad (6.2)$$

здесь $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка⁶.

$$5) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\pm z \cos \vartheta} d\vartheta = I_0(z).$$

6) Модифицированная функция Бесселя – это функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента: $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$.

$$p(\varphi_{\Sigma}) = \int_0^{\infty} p(U_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}) dU_{\Sigma} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{U_m^2}{2\sigma_n^2}} \left\{ 1 + a e^{\frac{a^2}{2}} \sqrt{2\pi} \cdot \Phi \left[\frac{U_m \cos(\varphi_{\Sigma} - \psi)}{\sigma_n} \right] \right\},$$

$$\text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (6.3)$$

Соотношения (6.1) – (6.3) называются распределением Райса; о выражении (6.2) иногда говорят как об обобщенном распределении Рэлея.

Рис. 6.2. Распределение Райса (обобщенное распределение Рэлея) для огибающей суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума при $\sigma_n^2 = 1 \text{ В}^2$

Рис. 6.3. Распределение Райса для фазы суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского шума при $\sigma_n^2 = 10 \text{ В}^2$ (*размерность по вертикальной оси [1/rad]*)

Графики, представленные на рис. 6.2 и 6.3, получены с помощью программ **rice_U** и **rice_phi** путем вычисления по формулам (6.2) и (6.7) [ф-ла (6.7) на с. 103 в Пособии]

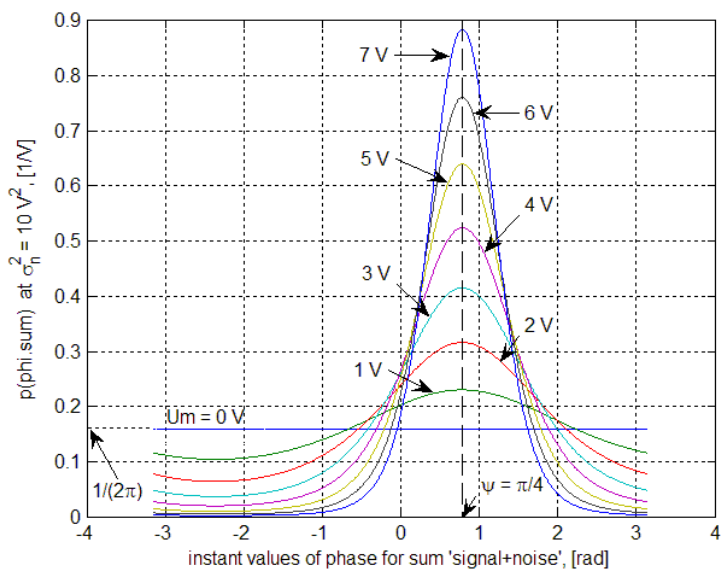
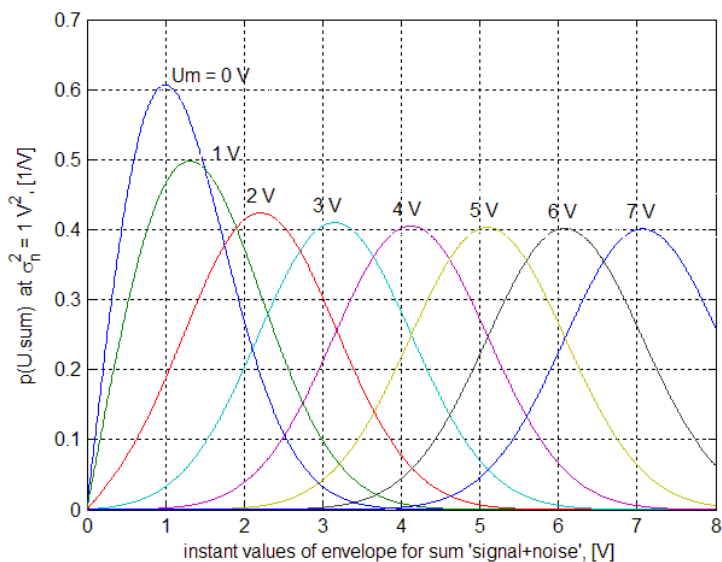


Рис. 6.2 и 6.3

4) Обнаружение радиоимпульса на фоне шума

а) Постановка задачи

Полезным сигналом является радиоимпульс, занимающий сравнительно небольшой участок на оси времени по сравнению с длительностью всего интервала наблюдения. Частота заполнения радиоимпульса f_0 известна и наблюдение за ним происходит в присутствии помехи в виде узкополосного гауссовского шума с центральной частотой f_0 .

Желательно обнаруживать наличие такого сигнала в смеси с шумом даже в том случае, когда амплитуда сигнала сравнима со среднеквадратическим значением шума.

Другими словами, необходимо «увидеть» отличие статистических свойств процесса на том участке по оси времени, где располагается наш сигнал, от статистических свойств процесса на других участках в пределах интервала наблюдения слева и справа от того места, где располагается радиоимпульс?

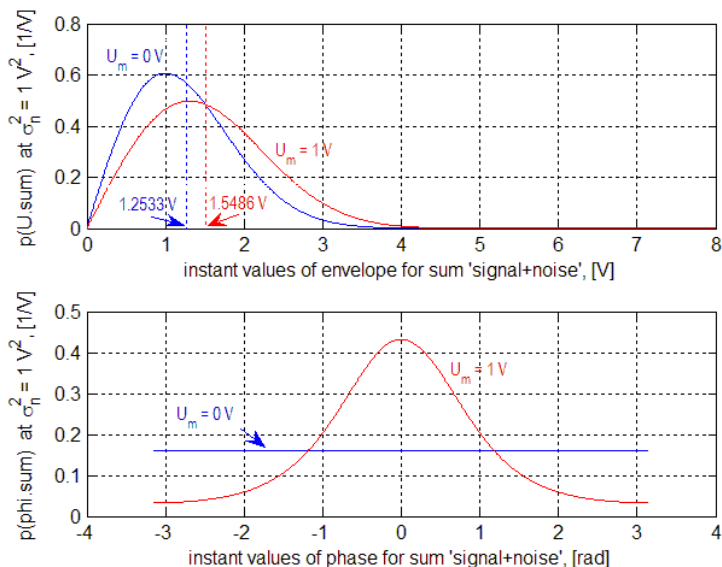


Рис. 6.9. Распределение Райса огибающей и фазы для двух значений амплитуды гармонического сигнала U_m при мощности шума 1 B^2 (на нижнем рисунке размерность по вертикальной оси $[1/\text{rad}]$)

Если амплитуда синусоиды в пределах радиоимпульса U_m равна 1 В и среднеквадратическое значение шума σ_n также равно 1 В, то распределения мгновенных значений огибающей и фазы там, где нет сигнала, и на том участке, где сигнал имеется, выглядят так, как показано на рис. 6.9 кривыми синего и красного цвета соответственно.

Простое решение – попытаться уловить различие средних значений огибающей процесса для этих двух распределений.

б) Обнаружение с использованием детектора огибающей

В принципе это можно сделать с помощью диодного детектора и интегрирующей цепочки (рис. 6.10) при условии, что сигнал $u_{env}(t)$ практически повторяет огибающую узкополосного процесса $n(t)$ или $s(t) + n(t)$ [envelope – огибающая], а постоянная времени интегрирующей цепи, с помощью которой производится усреднение [сигнал $u_{env}(t)$ преобразуется в сигнал $U_{dc}(t)$], достаточно велика.

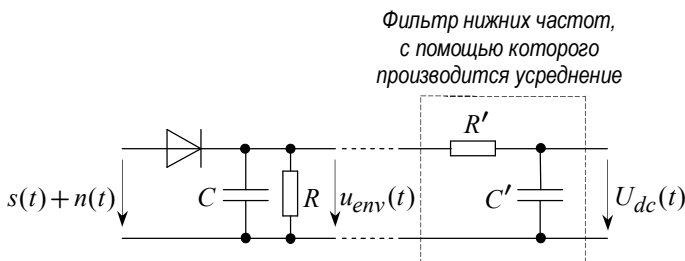


Рис. 6.10. Схематическое изображение процедуры асинхронного (диодного) детектирования

При наличии шума $n(t)$ с таким же по порядку среднеквадратическим значением, что и амплитуда сигнала $s(t)$, различие между средними уровнями напряжения на выходе фильтра нижних частот на участках, где нет сигнала, и там, где он имеется, значительно меньше, чем в отсутствие шума. Это явление носит название подавления слабого сигнала шумом.

б) Синхронное детектирование

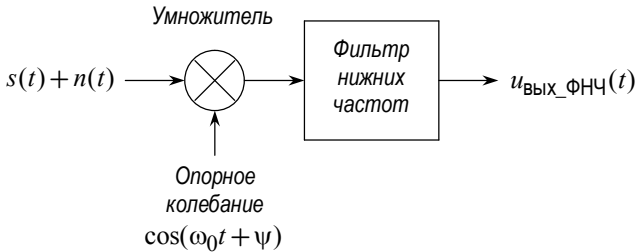


Рис. 6.13. Схематическое изображение синхронного детектора

Сигнал на выходе умножителя равен

$$[s(t) + n(t)] \cdot \cos(\omega_0 t + \psi) = \{U_m \cos(\omega_0 t + \psi) + U_n(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_n(t)]\} \times \\ \times \cos(\omega_0 t + \psi) = \frac{1}{2} \{U_m \cos 0 + U_m \cos 2(\omega_0 t + \psi) + U_n(t) \cos[\varphi_n(t) - \psi] + \\ + U_n(t) \cos[2\omega_0 t + \varphi_n(t) + \psi]\}.$$

Фильтром нижних частот составляющие с частотой ω_0 отфильтровываются:

$$u_{\text{вых_ФНЧ}}(t) = \frac{1}{2} [U_m + U_n(t) \cos \varphi_n(t) \cdot \cos \psi + U_n(t) \sin \varphi_n(t) \cdot \sin \psi] = \\ = \frac{1}{2} [U_m + n_c(t) \cdot \cos \psi + n_s(t) \cdot \sin \psi],$$

где $n_c(t) = U_n(t) \cos \varphi_n(t)$ и $n_s(t) = U_n(t) \sin \varphi_n(t)$ – независимые низкочастотные гауссовские случайные процессы с дисперсией σ_n^2 каждый.

Но сумма гауссовских случайных величин является гауссовской. Поэтому сигнал $u_{\text{вых_ФНЧ}}(t)$ на выходе фильтра нижних частот представляет собой гауссовский случайный процесс со средним значением U_m и дисперсией шумовой составляющей, равной

$$\sigma_{n_c}^2 \cdot \cos^2 \psi + \sigma_{n_s}^2 \cdot \sin^2 \psi = \sigma_n^2 \cdot (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = \sigma_n^2.$$

Это означает, что соотношение между постоянной составляющей и среднеквадратическим значением шума на выходе фильтра нижних частот точно такое же, каким является соотношение между амплитудой полезного сигнала и среднеквадратическим значением шума в смеси $s(t) + n(t)$ на входе синхронного детектора, то есть подавления слабого сигнала шумом не происходит.