Цепи с распределенными параметрами

Весь необходимый теоретический материал по данной теме изложен в описании лабораторной работы № 79 (2007). Текст описания этой лабораторной работы в электронном виде находится в C:/Labworks/Lab_79. В дальнейшем отсылки к этому описанию будут помечены как [1].

В этом конспекте содержатся дополнительные сведения, проливающие свет на процессы в длинной линии. Упоминаемые в конспекте программы вычислений в MATLAB находятся в C:/References/Lab_79.

1. Волновое уравнение

1.1. Условие Хевисайда

Доказательство утверждения, касающегося условия Хевисайда

$$u = u^{\text{o}} e^{-qt}$$

$$q = \frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}; \quad R_0 = qL_0, \; G_0 = qC_0$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right| \quad -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2a) \quad \to \quad -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_0 \frac{\partial i}{\partial x} + L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} \quad (*)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2b) \quad \to \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u^{\text{o}} e^{-qt} + C_0 \cdot \left(\frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} e^{-qt} - q u^{\text{o}} e^{-qt} \right) \quad (**)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right| \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u^{\text{o}} e^{-qt} + C_0 \cdot \left(\frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} e^{-qt} - q u^{\text{o}} e^{-qt} \right)$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = G_0 \cdot \left(\frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} e^{-qt} - q u^{\text{o}} e^{-qt} \right) + C_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 u^{\text{o}}}{\partial t^2} e^{-qt} - q \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} e^{-qt} - q \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} e^{-qt} + q^2 u^{\text{o}} e^{-qt} \right) \quad (***)$$

u в $(*)$ заменяется на $u^{\text{o}} e^{-qt}$, $\frac{\partial i}{\partial x}$ подставляется в $(*)$ из $(**)$, а $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$ – из $(***)$:

$$-\frac{\partial^2 u^{\text{o}}}{\partial x^2} e^{-qt} = -R_0 \cdot \left[G_0 u^{\text{o}} e^{-qt} + C_0 \cdot \left(\frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} e^{-qt} - q u^{\text{o}} e^{-qt} \right) \right] -$$

$$- L_0 \cdot \left[G_0 \cdot \left(\frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} e^{-qt} - q u^{\text{o}} e^{-qt} \right) + C_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 u^{\text{o}}}{\partial t^2} e^{-qt} - q \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} e^{-qt} - q \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} e^{-qt} + q^2 u^{\text{o}} e^{-qt} \right) \right]$$

Множитель e^{-qt} по обе стороны равенства сокращается:

$$-\frac{\partial^2 u^{\text{o}}}{\partial x^2} = -R_0 G_0 u^{\text{o}} - R_0 C_0 \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} + q R_0 C_0 u^{\text{o}} -$$

$$-L_0 G_0 \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} + q L_0 G_0 u^{\text{o}} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u^{\text{o}}}{\partial t^2} + q L_0 C_0 \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} + q L_0 C_0 \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} - q^2 L_0 C_0 u^{\text{o}}$$

В правой части последнего равенства повсеместно R_0 заменяется на qL_0, а G_0 – на qC_0:

$$-\frac{\partial^2 u^{\text{o}}}{\partial x^2} = -q^2 L_0 C_0 u^{\text{o}} - q L_0 C_0 \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} + q^2 L_0 C_0 u^{\text{o}} -$$

$$-q L_0 C_0 \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} + q^2 L_0 C_0 u^{\text{o}} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u^{\text{o}}}{\partial t^2} + q L_0 C_0 \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} + q L_0 C_0 \frac{\partial u^{\text{o}}}{\partial t} - q^2 L_0 C_0 u^{\text{o}}$$

$$-\frac{\partial^2 u^{\text{o}}}{\partial x^2} = -L_0 C_0 \frac{\partial^2 u^{\text{o}}}{\partial t^2} \quad \to \quad \frac{\partial^2 u^{\text{o}}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u^{\text{o}}}{\partial t^2} = 0,$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$.

1.2. Установившиеся (постоянные) токи и напряжения в линии с потерями как реакция на скачок напряжения $\mathcal{E}$ на ее входе при $t \to \infty$ и произвольных (омических) сопротивлениях источника $R_{\text{и}}$ и нагрузки $R_{\text{н}}$

Из (1а) и (1б) в [1] при $t \to \infty$, когда $\frac{\partial i}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$:

(1.2.1) $R_0 dx \cdot i = -d_x u$ или $-\frac{du}{dx} = R_0 \cdot i$

(1.2.2) $G_0 dx \cdot u = -d_x i$ или $-\frac{di}{dx} = G_0 \cdot u$

Дифференцируя (1.2.1) по x и подставляя di/dx из (1.2.2), получим:

(1.2.3) $-\frac{d^2u}{dx^2} = R_0 \cdot \frac{di}{dx} \quad \Rightarrow \quad -\frac{d^2u}{dx^2} = -R_0 G_0 u \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u}{dx^2} - R_0 G_0 u = 0$

Аналогично из (1.2.2) с учетом (1.2.1):

(1.2.4) $-\frac{d^2i}{dx^2} = G_0 \cdot \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad -\frac{d^2i}{dx^2} = -R_0 G_0 i \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2i}{dx^2} - R_0 G_0 i = 0$

Из условия Хевисайда (6) в [1] $q = \frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$, следовательно, $\frac{R_0}{L_0} \cdot \frac{G_0}{C_0} = q^2$ и $\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}$:

(1.2.5) $w = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{\frac{R_0}{L_0} + j\omega}{\frac{G_0}{C_0} + j\omega}} \cdot \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$

(1.2.6) $\sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{q^2 L_0 C_0} = \frac{q}{v}$, где $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$

Общее решение уравнения (1.2.3):

(1.2.7) $u = A\,\mathrm{e}^{-\sqrt{R_0 G_0}\,x} + B\,\mathrm{e}^{\sqrt{R_0 G_0}\,x}$:

Подставляем (1.2.7) в (1.2.1):

(1.2.8) $$i = -\frac{1}{R_0}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{R_0} A(-\sqrt{R_0 G_0})\,\mathrm{e}^{-\sqrt{R_0 G_0}\,x} - \frac{1}{R_0} B(\sqrt{R_0 G_0})\,\mathrm{e}^{\sqrt{R_0 G_0}\,x} =$$
$$= A\sqrt{\frac{G_0}{R_0}}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{R_0 G_0}\,x} - B\sqrt{\frac{G_0}{R_0}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{R_0 G_0}\,x} = \frac{A}{w}\mathrm{e}^{-\sqrt{R_0 G_0}\,x} - \frac{B}{w}\mathrm{e}^{\sqrt{R_0 G_0}\,x}$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий.

При $x = 0$ согласно (1.2.7) и (1.2.8):

(1.2.9) $u_0 = A + B$, $i_0 = \frac{A}{w} - \frac{B}{w}$ и $R_{\text{вх}} \overset{\text{def}}{=} \frac{u_0}{i_0} = \frac{A+B}{\frac{A}{w} - \frac{B}{w}} = \frac{A+B}{A-B} \cdot w$;

но должно иметь место равенство

(1.2.10) $u_0 = \frac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{и}} + R_{\text{вх}}} \cdot \mathcal{E}$,

поэтому

(1.2.11) $A+B=\dfrac{R_{\text{вх}}}{R_{\text{И}}+R_{\text{вх}}}\cdot\mathcal{E} \;\Rightarrow\; A+B=\dfrac{\dfrac{A+B}{A-B}\cdot w}{R_{\text{И}}+\dfrac{A+B}{A-B}\cdot w}\cdot\mathcal{E} \;\Rightarrow\; A+B=\dfrac{(A+B)\cdot w}{(A-B)\cdot R_{\text{И}}+(A+B)\cdot w}\cdot\mathcal{E}$,

откуда

(1.2.12) $(A-B)\cdot R_{\text{И}}+(A+B)\cdot w=w\cdot\mathcal{E} \;\Rightarrow\; (R_{\text{И}}+w)\cdot A-(R_{\text{И}}-w)\cdot B=w\cdot\mathcal{E} \;\Rightarrow\; A-\dfrac{R_{\text{И}}-w}{R_{\text{И}}+w}\cdot B=\dfrac{w}{R_{\text{И}}+w}\cdot\mathcal{E}$.

При $x=l$ согласно (1.2.7) и (1.2.8) и принимая во внимание, что $\sqrt{R_0G_0}\cdot l=\dfrac{ql}{v}=q\tau$, где $\tau \overset{\text{def}}{=} l/v$:

(1.2.13) $u_l=Ae^{-q\tau}+Be^{q\tau}$ и $i_l=\dfrac{A}{w}e^{-q\tau}-\dfrac{B}{w}e^{q\tau}$;

но должно выполняться равенство

(1.2.14) $i_l=\dfrac{u_l}{R_{\text{Н}}}$,

поэтому

(1.2.15) $\dfrac{A}{w}e^{-q\tau}-\dfrac{B}{w}e^{q\tau}=\dfrac{Ae^{-q\tau}+Be^{q\tau}}{R_{\text{Н}}} \;\Rightarrow\; R_{\text{Н}}\cdot\left(A-Be^{2q\tau}\right)=w\cdot\left(A+Be^{2q\tau}\right) \;\Rightarrow\; (R_{\text{Н}}-w)\cdot A=(R_{\text{Н}}+w)\cdot Be^{2q\tau}$

и

(1.2.16) $A=\dfrac{R_{\text{Н}}+w}{R_{\text{Н}}-w}\cdot Be^{2q\tau}$.

Подставляя A из (1.2.16) в (1.2.12), имеем:

(1.2.17) $\dfrac{R_{\text{Н}}+w}{R_{\text{Н}}-w}\cdot Be^{2q\tau}-\dfrac{R_{\text{И}}-w}{R_{\text{И}}+w}\cdot B=\dfrac{w}{R_{\text{И}}+w}\cdot\mathcal{E}$

(1.2.18) $$B=\frac{1}{\dfrac{R_{\text{Н}}+w}{R_{\text{Н}}-w}\cdot e^{2q\tau}-\dfrac{R_{\text{И}}-w}{R_{\text{И}}+w}}\cdot\frac{w}{R_{\text{И}}+w}\cdot\mathcal{E}=$$

$$=\frac{(R_{\text{Н}}-w)\cdot w}{(R_{\text{Н}}+w)\cdot(R_{\text{И}}+w)\cdot e^{2q\tau}-(R_{\text{И}}-w)\cdot(R_{\text{Н}}-w)}\cdot\mathcal{E}.$$

Подставляем B из (1.2.18) в (1.2.16):

(1.2.19) $$A=\frac{R_{\text{Н}}+w}{R_{\text{Н}}-w}\cdot\frac{(R_{\text{Н}}-w)\cdot w\cdot e^{2q\tau}}{(R_{\text{Н}}+w)\cdot(R_{\text{И}}+w)\cdot e^{2q\tau}-(R_{\text{И}}-w)\cdot(R_{\text{Н}}-w)}\cdot\mathcal{E}=$$

$$=\frac{(R_{\text{Н}}+w)\cdot w\cdot e^{2q\tau}}{(R_{\text{Н}}+w)\cdot(R_{\text{И}}+w)\cdot e^{2q\tau}-(R_{\text{И}}-w)\cdot(R_{\text{Н}}-w)}\cdot\mathcal{E}.$$

Введем обозначение:

(1.2.20) $p=1\Big/\left[(R_{\text{Н}}+w)\cdot(R_{\text{И}}+w)\cdot e^{2q\tau}-(R_{\text{И}}-w)\cdot(R_{\text{Н}}-w)\right]$,

тогда

(1.2.21) $A=p\,w(R_{\text{Н}}+w)e^{2q\tau}\mathcal{E}$,

(1.2.22) $B=pw(R_{\text{Н}}-w)\mathcal{E}$.

В результате подстановки этих A и B в (1.2.7) и (1.2.8) с учетом (1.2.6) получим:

(1.2.23) $u=p\,w\left[(R_{\text{Н}}+w)e^{q(2\tau-x/v)}+(R_{\text{Н}}-w)\mathrm{e}^{qx/v}\right]\mathcal{E}$,

(1.2.24) $i=p\left[(R_{\text{Н}}+w)e^{q(2\tau-x/v)}-(R_{\text{Н}}-w)\mathrm{e}^{qx/v}\right]\mathcal{E}$,

а также

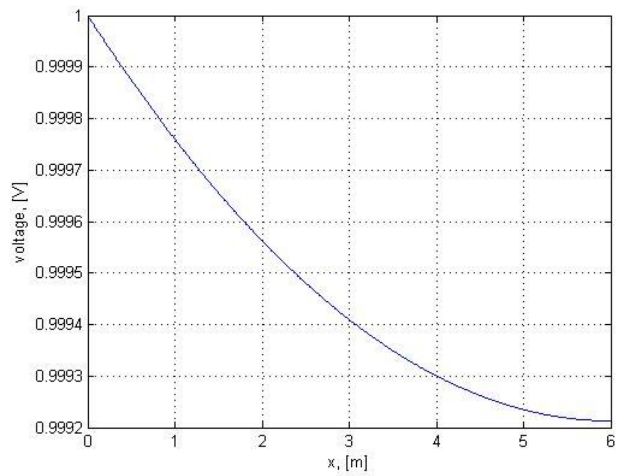
(1.2.25) $R_{\text{вх}}=\dfrac{A+B}{A-B}\cdot w=\dfrac{p\,w(R_{\text{Н}}+w)e^{2q\tau}\mathcal{E}+pw(R_{\text{Н}}-w)\mathcal{E}}{p\,w(R_{\text{Н}}+w)e^{2q\tau}\mathcal{E}-pw(R_{\text{Н}}-w)\mathcal{E}}\cdot w=\dfrac{(R_{\text{Н}}+w)e^{2q\tau}+(R_{\text{Н}}-w)}{(R_{\text{Н}}+w)e^{2q\tau}-(R_{\text{Н}}-w)}\cdot w$.

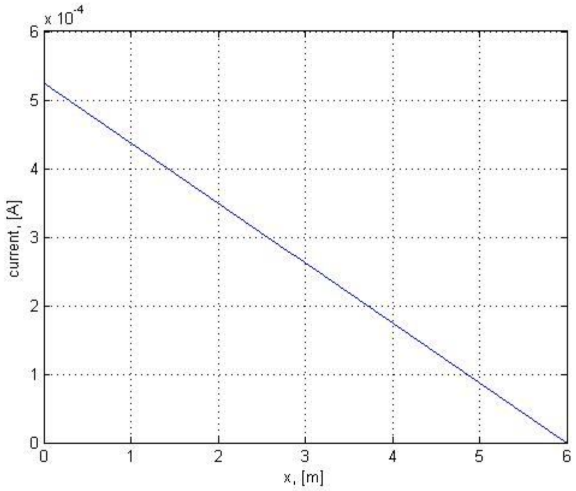
Ниже приведен текст *m*.файла программы (для MATLAB), реализующей вычисления $u(x)$ и $i(x)$ согласно (1.2.23) и (1.2.24) и результаты работы этой программы для двух указанных наборов значений параметров.

Программа *heviside_2.m* находится в C:/References/Lab_79.

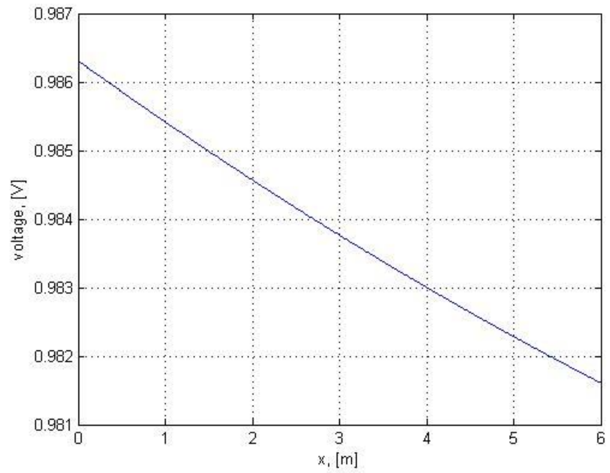
```
function [v,w,q,r0]=heviside_2(rs,l,L0,C0,R0,rl)
% Распределение (постоянных) тока и напряжения вдоль линии с потерями
% при подаче на её вход единичного скачка э.д.с.
% в установившемся режиме (при t, стремящемся к бесконечности)
% в предположении, что выполнено условие Хевисайда,
% при произвольных (омических) сопротивлениях источника rs и нагрузки rl;
% размерности: rs, rl,  w, r0 – [Ом]; l – [м]; L0 – [Гн/м]; C0 – [Ф/м];
% R0 – [Ом/м]; v – [м/с]; q – [1/с].

% Примеры обращения:
% heviside_2(0,6,0.4e-6,7e-11,0.5,7.5e9);
% heviside_2(7.5,6,0.4e-6,7e-11,0.5,750);

v=1/sqrt(L0*C0); w=sqrt(L0/C0); q=R0/L0;
tau=l/v; b=exp(2*q*tau);
p=1/((rl+w)*(rs+w)*b-(rl-w)*(rs-w));
A=p*w*(rl+w)*b;
B=p*w*(rl-w);

% r0 -входное сопротивление
r0=((rl+w)*b+(rl-w))*w/((rl+w)*b-(rl-w));

x=0:0.01:l; % x - расстояние вдоль линии от её начала, м
u=p*w*((rl+w)*b*exp(-q*x/v)+(rl-w)*exp(q*x/v));
i=p*((rl+w)*b*exp(-q*x/v)-(rl-w)*exp(q*x/v));

figure; plot(x,u); grid on;
xlabel('x, [m]');
ylabel('voltage, [V]');
figure; plot(x,i); grid on;
xlabel('x, [m]');
ylabel('current, [A]');

o=o;
```

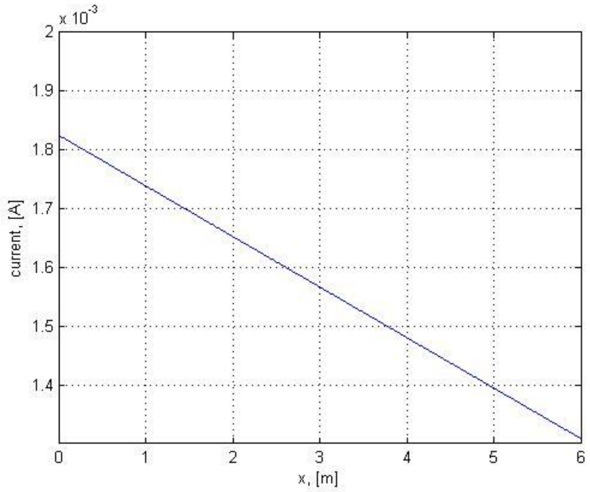
```
heviside_2(0,6,0.4e-6,7e-11,0.5,7.5e9)
```






```
heviside_2(7.5,6,0.4e-6,7e-11,0.5,750)
```





2. Длинная линия при синусоидальном воздействии

2.1. Распределение комплексных амплитуд напряжения и тока в линии при заданном значении напряжения $\tilde{U}(0) \equiv \tilde{U}_0$ на ее входе

(9) в [1] $$\frac{d^2\tilde{U}}{dx^2} - \gamma^2\tilde{U} = 0\,,$$

(10) в [1] $$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

(11а) в [1] $$\tilde{U}(x) = \tilde{A}\cdot \mathrm{e}^{-\gamma x} + \tilde{B}\cdot \mathrm{e}^{\gamma x}\,,$$

(11б) в [1] $$\tilde{I}(x) = \frac{\tilde{A}}{w}\cdot \mathrm{e}^{-\gamma x} - \frac{\tilde{B}}{w}\cdot \mathrm{e}^{\gamma x}\,,$$

(12) в [1] $$w = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

(2.1.1) $$\tilde{U}(0) = \tilde{A} + \tilde{B}$$

(2.1.2) $$\tilde{I}(0) = \frac{\tilde{A}}{w} - \frac{\tilde{B}}{w}$$

(2.1.3) $$\tilde{U}(0) + w\cdot\tilde{I}(0) = 2\tilde{A}\,,\;\; \tilde{A} = \frac{\tilde{U}(0) + w\cdot\tilde{I}(0)}{2}$$

(2.1.4) $$\tilde{U}(0) - w\cdot\tilde{I}(0) = 2\tilde{B}\,,\;\; \tilde{B} = \frac{\tilde{U}(0) - w\cdot\tilde{I}(0)}{2}$$

Обозначения: $\tilde{U}(0) \equiv \tilde{U}_0\,, \tilde{I}(0) \equiv \tilde{I}_0$

(2.1.5) $$\tilde{U}(x) = \frac{\tilde{U}_0 + w\tilde{I}_0}{2}\cdot \mathrm{e}^{-\gamma x} + \frac{\tilde{U}_0 - w\tilde{I}_0}{2}\cdot \mathrm{e}^{\gamma x}$$

(2.1.6) $$\tilde{U}(x) = \tilde{U}_0\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\gamma x} + \mathrm{e}^{\gamma x}}{2} + w\tilde{I}_0\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\gamma x} - \mathrm{e}^{\gamma x}}{2}$$
$$= \tilde{U}_0\cdot \mathrm{ch}\,\gamma x - w\tilde{I}_0\cdot \mathrm{sh}\,\gamma x$$ – эквивалент (14а) в [1]

(2.1.7) $$\tilde{I}(x) = \frac{1}{w}\left\{\frac{\tilde{U}_0 + w\tilde{I}_0}{2}\cdot \mathrm{e}^{-\gamma x} - \frac{\tilde{U}_0 - w\tilde{I}_0}{2}\cdot \mathrm{e}^{\gamma x}\right\}$$

(2.1.8) $$\tilde{I}(x) = \frac{\tilde{U}_0}{w}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\gamma x} - \mathrm{e}^{\gamma x}}{2} + \tilde{I}_0\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\gamma x} + \mathrm{e}^{\gamma x}}{2}$$
$$= -\frac{\tilde{U}_0}{w}\cdot \mathrm{sh}\,\gamma x + \tilde{I}_0\cdot \mathrm{ch}\,\gamma x$$ – эквивалент (14б) в [1]

При $x = l$:

(2.1.9) $$\tilde{U}(l) = \tilde{U}_0\cdot \mathrm{ch}\,\gamma l - w\tilde{I}_0\cdot \mathrm{sh}\,\gamma l$$

(2.1.10) $$\tilde{I}(l) = -\frac{\tilde{U}_0}{w}\cdot \mathrm{sh}\,\gamma l + \tilde{I}_0\cdot \mathrm{ch}\,\gamma l$$

Обозначения: $\tilde{U}(l) \equiv \tilde{U}_l\,,\; \tilde{I}(l) \equiv \tilde{I}_l$

$\tilde{U}_l / \tilde{I}_l = z_{\text{н}}$ – сопротивление нагрузки

$\tilde{U}_0 / \tilde{I}_0 = z_{\text{вх}}$ – входное сопротивление

Проверки: входное сопротивление $z_{\text{вх}}$ и коэффициент передачи $\tilde{K} = \tilde{U}_l / \tilde{U}_0$:

(2.1.11) $$z_{\text{н}} = \frac{\tilde{U}_l}{\tilde{I}_l} = \frac{\tilde{U}_0 \cdot \operatorname{ch}\gamma l - w\tilde{I}_0 \cdot \operatorname{sh}\gamma l}{-\dfrac{\tilde{U}_0}{w}\cdot \operatorname{sh}\gamma l + \tilde{I}_0 \cdot \operatorname{ch}\gamma l} = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}\cdot \frac{\operatorname{ch}\gamma l - \dfrac{w}{\tilde{U}_0/\tilde{I}_0}\cdot \operatorname{sh}\gamma l}{-\dfrac{\tilde{U}_0/\tilde{I}_0}{w}\cdot \operatorname{sh}\gamma l + \operatorname{ch}\gamma l} = z_{\text{вх}} \cdot \frac{1 - \dfrac{w}{z_{\text{вх}}}\cdot \operatorname{th}\gamma l}{-\dfrac{z_{\text{вх}}}{w}\cdot \operatorname{th}\gamma l + 1}$$

(2.1.12) $$z_{\text{н}} - z_{\text{вх}} \cdot \frac{z_{\text{н}}}{w}\cdot \operatorname{th}\gamma l = z_{\text{вх}} - w \cdot \operatorname{th}\gamma l$$

(2.1.13) $$z_{\text{н}} \cdot \left(1 + \frac{w}{z_{\text{н}}}\cdot \operatorname{th}\gamma l\right) = z_{\text{вх}} \cdot \left(1 + \frac{z_{\text{н}}}{w}\cdot \operatorname{th}\gamma l\right)$$

(2.1.14) $$z_{\text{вх}}\left(\overset{\text{def}}{=} \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}\right) = \frac{1 + \dfrac{w}{z_{\text{н}}} \operatorname{th}\gamma l}{1 + \dfrac{z_{\text{н}}}{w} \operatorname{th}\gamma l}\cdot z_{\text{н}}$$ – эквивалент (16) в [1]

(2.1.15) $$\tilde{K}\left(\overset{\text{def}}{=} \frac{\tilde{U}_l}{\tilde{U}_0}\right) = \frac{\tilde{U}_0 \cdot \operatorname{ch}\gamma l - w\tilde{I}_0 \cdot \operatorname{sh}\gamma l}{U_0} = \operatorname{ch}\gamma l - \frac{w}{z_{\text{вх}}}\cdot \operatorname{sh}\gamma l = \operatorname{ch}\gamma l \cdot \left(1 - \frac{w}{\dfrac{1 + \dfrac{w}{z_{\text{н}}} \operatorname{th}\gamma l}{1 + \dfrac{z_{\text{н}}}{w} \operatorname{th}\gamma l}\cdot z_{\text{н}}}\cdot \operatorname{th}\gamma l\right)$$

$$= \operatorname{ch}\gamma l \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{w}{z_{\text{н}}} \operatorname{th}\gamma l\right)\cdot z_{\text{н}} - w\cdot\left(1 + \dfrac{z_{\text{н}}}{w} \operatorname{th}\gamma l\right)\cdot \operatorname{th}\gamma l}{\left(1 + \dfrac{w}{z_{\text{н}}} \operatorname{th}\gamma l\right)\cdot z_{\text{н}}} = \operatorname{ch}\gamma l \cdot \frac{z_{\text{н}} + w\cdot \operatorname{th}\gamma l - w\cdot \operatorname{th}\gamma l - z_{\text{н}}\cdot \operatorname{th}^2\gamma l}{z_{\text{н}} + w\cdot \operatorname{th}\gamma l} = \frac{\operatorname{ch}^2\gamma l - \operatorname{sh}^2\gamma l}{\operatorname{ch}\gamma l + \dfrac{w}{z_{\text{н}}}\cdot \operatorname{sh}\gamma l}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}\gamma l + \dfrac{w}{z_{\text{н}}}\cdot \operatorname{sh}\gamma l} \quad - \textit{эквивалент } (15) \textit{ в } [1]$$

В отсутствие потерь $\gamma = j\alpha,\ \alpha = \frac{\omega}{\nu} = \frac{2\pi f}{\nu} = \frac{2\pi}{\nu T} = \frac{2\pi}{\lambda}$ и $w = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$

(2.1.16) $$\tilde{U}(x) = \tilde{U}_l \cos\alpha(l-x) + j\frac{w}{R_{\text{н}}}\tilde{U}_l \sin\alpha(l-x)$$ – эквивалент (20а) в [1]

$$= \tilde{U}_l \sqrt{\cos^2\alpha(l-x) + \left(\frac{w}{R_{\text{н}}}\right)^2 \sin^2\alpha(l-x)}\cdot \mathrm{e}^{j\operatorname{arctg}\left[\frac{w}{R_{\text{н}}} \operatorname{tg}\alpha(l-x)\right]}$$

(2.1.17) $$\left|\tilde{U}(x)\right| = U_l \sqrt{\left[1 - \left(\frac{w}{R_{\text{н}}}\right)^2\right]\cos^2\alpha(l-x) + \left(\frac{w}{R_{\text{н}}}\right)^2}$$

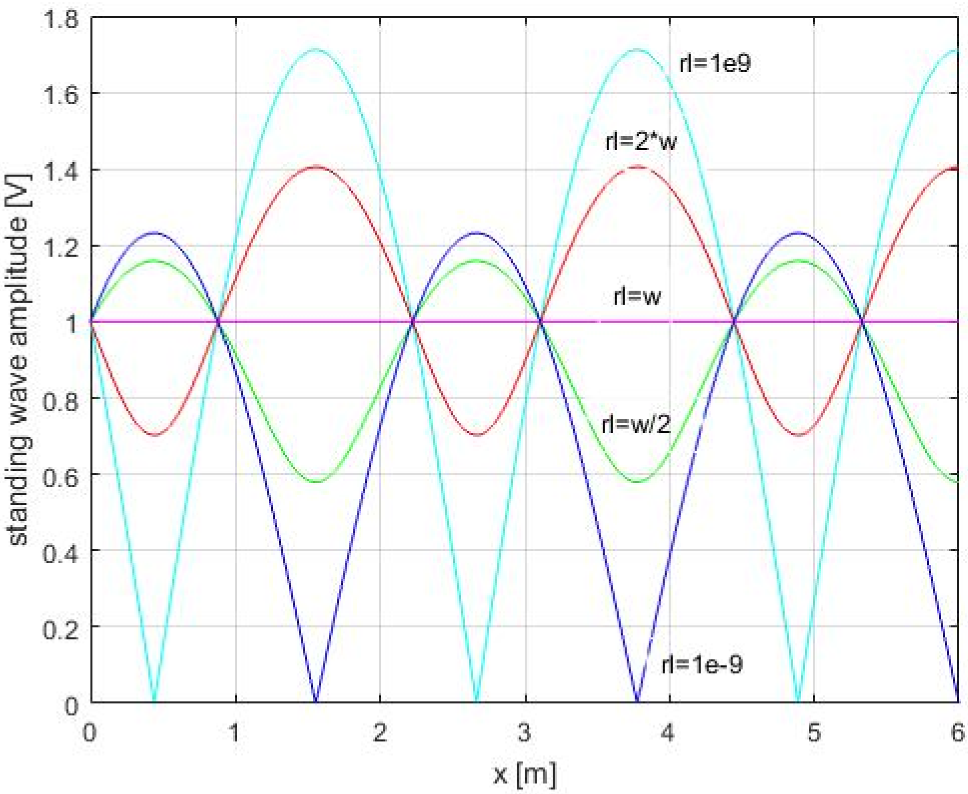
Из (2.1.16) $$\tilde{U}(x) == \tilde{U}_l \cdot \left[\cos\alpha(l-x) + j\frac{w}{R_{\text{н}}}\sin\alpha(l-x)\right] = \tilde{K}\tilde{U}_0 \cdot \left[\cos\alpha(l-x) + j\frac{w}{R_{\text{н}}}\sin\alpha(l-x)\right]$$

(21) в [1] $$\tilde{K} = \frac{1}{\cos\alpha l + j\dfrac{w}{R_{\text{н}}}\sin\alpha l}$$

(2.1.18) $$\tilde{U}(x) = \tilde{U}_0 \frac{\cos\alpha(l-x) + j\dfrac{w}{R_{\text{н}}}\sin\alpha(l-x)}{\cos\alpha l + j\dfrac{w}{R_{\text{н}}}\sin\alpha l}$$

Программа *standing_waves.m* находится в C:/References/Lab_79.

```
function standing_waves(l,f,L0,C0)
% Стоячие волны напряжения в линии без потерь при различных нагрузках rl
% Пример обращения: standing_waves(6,4.25e7,0.4e-6,7e-11)
v=1/sqrt(L0*C0);
w=sqrt(L0/C0);
a=2*pi*f/v;
x=(0:0.001:1)*l;
figure;
rl=1e9;
u=(cos(a*(l-x))+j*w*sin(a*(l-x))/rl)./(cos(a*l)+j*w*sin(a*l)/rl);
plot(x,abs(u),'c'); hold on;
rl=2*w;
u=(cos(a*(l-x))+j*w*sin(a*(l-x))/rl)./(cos(a*l)+j*w*sin(a*l)/rl);
plot(x,abs(u),'r'); hold on;
rl=w;
u=(cos(a*(l-x))+j*w*sin(a*(l-x))/rl)./(cos(a*l)+j*w*sin(a*l)/rl);
plot(x,abs(u),'m'); hold on;
rl=w/2;
u=(cos(a*(l-x))+j*w*sin(a*(l-x))/rl)./(cos(a*l)+j*w*sin(a*l)/rl);
plot(x,abs(u),'g'); hold on;
rl=1e-9;
u=(cos(a*(l-x))+j*w*sin(a*(l-x))/rl)./(cos(a*l)+j*w*sin(a*l)/rl);
plot(x,abs(u),'b'); grid on;
xlabel('x [m]'); ylabel('standing wave amplitude [V]');
o=o;
```



2.2. Падающая, отраженная и стоячая волны при наличии потерь

Согласно объяснениям, приведенным в разделе *Падающая, отраженная, стоячая и бегущая волны* в [1], правые слагаемые в (11а) в [1] и в (2.1.5) представляют собой волну напряжения, распространяющуюся вдоль линии вправо, то есть в сторону бóльших значений x (падающую волну напряжения), а левые слагаемые – волну напряжения, перемещающуюся влево, в сторону меньших значений x (отраженную волну напряжения). Их сумма в каждой точке x образует стоячую волну напряжения, комплексная амплитуда которой равна

$$\tilde{U}(x)=\frac{\tilde{U}_0+w\tilde{I}_0}{2}\cdot e^{-\gamma x}+\frac{\tilde{U}_0-w\tilde{I}_0}{2}\cdot e^{\gamma x}=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\tilde{U}_0\cdot\left(1+\frac{w}{z_{\text{вх}}}\right)\cdot e^{-\gamma x}}_{\text{падающая волна напряжения}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\tilde{U}_0\cdot\left(1-\frac{w}{z_{\text{вх}}}\right)\cdot e^{\gamma x}}_{\text{отраженная волна напряжения}},$$

где $\tilde{U}(0)\equiv\tilde{U}_0$ – заданное напряжение на входе линии, а $z_{\text{вх}}$ – сопротивление линии со стороны ее входа [см. (2.1.14)]:

$$z_{\text{вх}}\left(\overset{\text{def}}{=}\frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}\right)=\frac{1+\dfrac{w}{z_{\text{н}}}\,\text{th}\,\gamma l}{1+\dfrac{z_{\text{н}}}{w}\,\text{th}\,\gamma l}\cdot z_{\text{н}}.$$

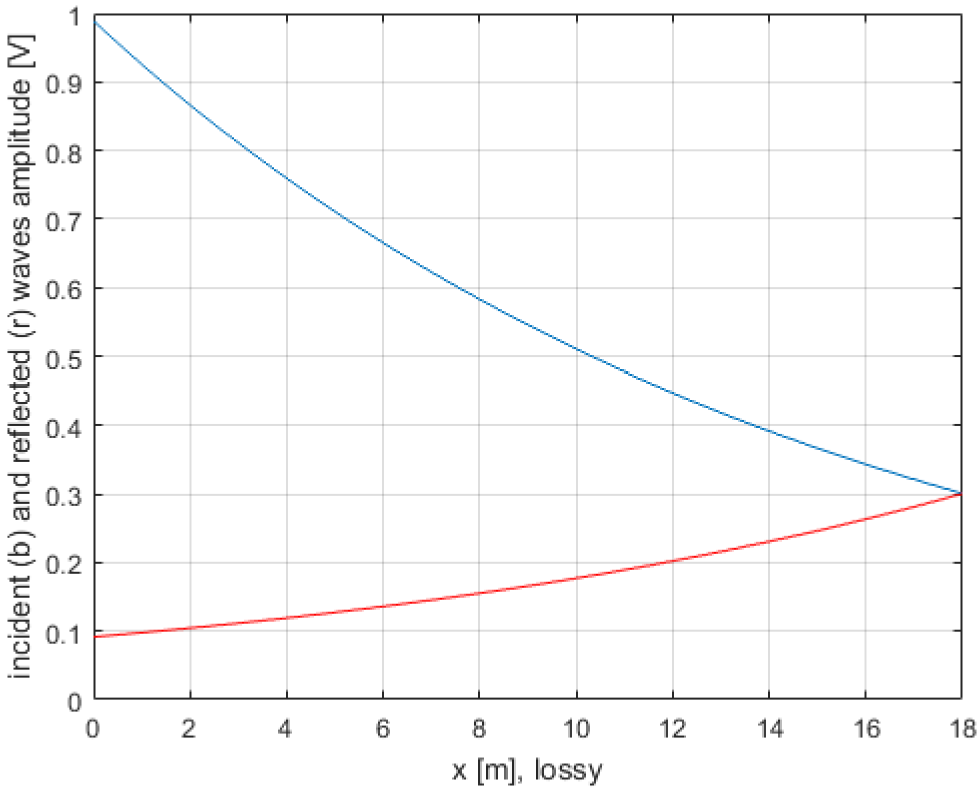
Программа *lw79_9.m* позволяет графически отобразить распределение модуля комплексной амплитуды падающей, отраженной и стоячей волн напряжения вдоль длинной линии в общем случае и сравнить стоячие волны напряжения в отсутствие и при наличии потерь.

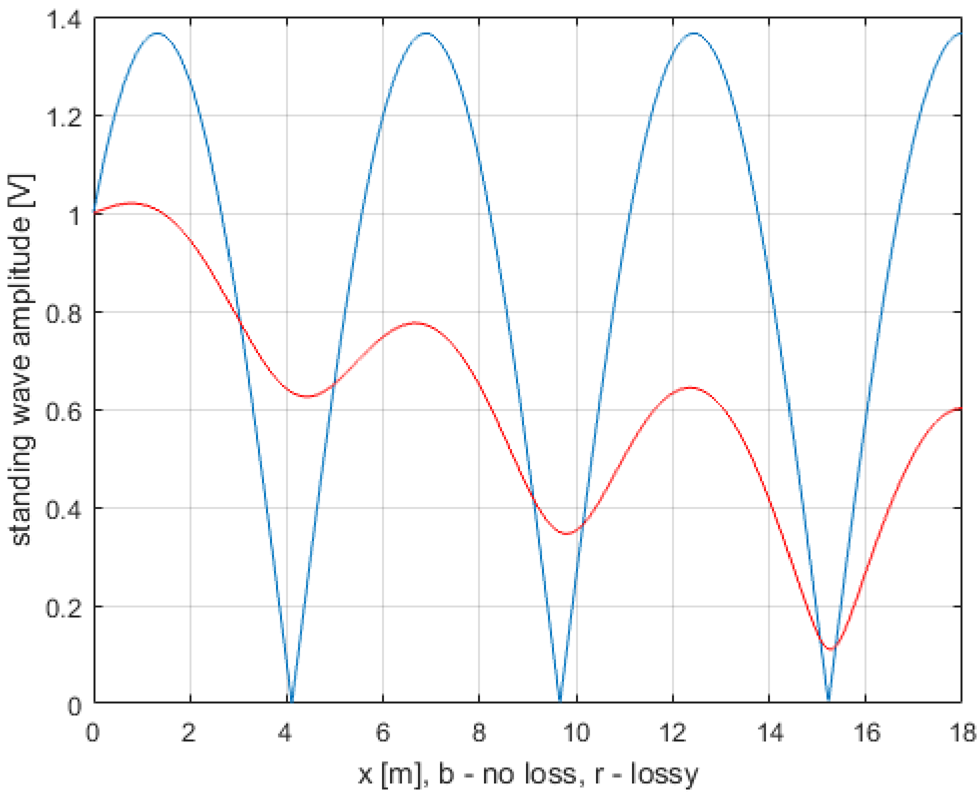
Программа *lw79_9.m* находится в C:/References/Lab_79.

```
function lw79_9(L0,C0,R0,f,l,zs,zl)
% Линия с потерями потерь (выполнено условие Хевисайда):
% стоячие волны напряжения при любых zs и zl

% L0 - погонная индуктивность, Гн/м
% C0 - погонная емкость, Ф/м
% R0 - погонное сопротивление, Ом/м
% G0 - погонная проводимость: G0=(C0/L0)*R0, 1/(Ом*м)
% f - частота, Гц
% l - длина линии, м
% zs - сопротивление источника сигнала, Ом
% zl - нагрузка, Ом

% ЭДС источника сигнала предполагается равной 1 В

% q=R0/L0=G0/C0 - параметр затухания, 1/с
% v - скорость распространения: v=1/sqrt(L0*C0), м/с
% gamma - постоянная распространения:
% gamma=sqrt((R0+j*2*pi*f*L0)*(G0+j*2*pi*f*C0)), 1/м
% gamma=beta+j*alpha: beta=q/v, alpha=2*pi*f/v=2*pi/lambda
% beta - постоянная затухания, 1/м
% alpha - фазовая постоянная (волновое число), рад/м
% lambda - длина волны: lambda=v/f, м
% w - волновое сопротивление:
% w=sqrt((R0+j*2*pi*f*L0)/(G0+j*2*pi*f*C0)), Ом;
% коль скоро выполняется условие Хевисайда, w=sqrt(L0/C0)

% Пример обращения:
% lw79_9(0.4e-6,7e-11,5,1.7e7,18,0,1e10);

n=1000; % n - число точек вдоль линии
x=0:l/n:l;

% U0 - амплитуда напряжения на входе (при x=0), В
% Ux - амплитуда напряжения в точке x, В
% Ul - амплитуда напряжения на нагрузке (при x=l), В
% K - коэффициент передачи
% z0 - входное сопротивление, Ом
```

```
% Вычисление gamma, w, z0 и U0 в отсутствие потерь:

gamma=sqrt((0+j*2*pi*f*L0)*(0+j*2*pi*f*C0));
w=sqrt((0+j*2*pi*f*L0)/(0+j*2*pi*f*C0));

% Выделение случаев короткозамкнутой и разомкнутой линии:

eps_=1e-9;
if abs(zl) < eps_
    K=0;
    z0=w*tanh(gamma*l);
elseif abs(1/zl) < eps_
    K=1/cosh(gamma*l);
    z0=w/tanh(gamma*l);
else
    K=1/(cosh(gamma*l)+w*sinh(gamma*l)/zl);
    z0=((1+w*tanh(gamma*l)/zl)/(1+zl*tanh(gamma*l)/w))*zl;
end
U0=z0/(zs+z0);

Uxll=U0*(cosh(gamma*x)-w*sinh(gamma*x)/z0);
% Uxll - стоячая волна в отсутствие потерь (no loss)

% Вычисление gamma, w, z0, U0 и других параметров с учетом потерь:

G0=(C0/L0)*R0;
q=R0/L0;
v=1/sqrt(L0*C0);
gamma=sqrt((R0+j*2*pi*f*L0)*(G0+j*2*pi*f*C0));
beta=q/v;
alpha=2*pi*f/v;
lambda=v/f;
w=sqrt((R0+j*2*pi*f*L0)/(G0+j*2*pi*f*C0));

% Выделение случаев короткозамкнутой и разомкнутой линии:

f abs(zl) < eps_
    K=0;
    z0=w*tanh(gamma*l);
elseif abs(1/zl) < eps_
    K=1/cosh(gamma*l);
    z0=w/tanh(gamma*l);
else
    K=1/(cosh(gamma*l)+w*sinh(gamma*l)/zl);
    z0=((1+w*tanh(gamma*l)/zl)/(1+zl*tanh(gamma*l)/w))*zl;
end
U0=z0/(zs+z0);

A=1/2*U0*(1+w/z0)*exp(-gamma*x); % A - падающая волна
B=1/2*U0*(1-w/z0)*exp(gamma*x); % B - отраженная волна

figure; plot(x,abs(A)); grid on; hold on;
plot(x,abs(B),'r'); grid on;
xlabel('x [m], lossy');
ylabel('incident (b) and reflected (r) waves amplitude [V]');

figure; plot (x,abs(Uxll)); grid on; hold on;
Uxwl=U0*(cosh(gamma*x)-w*sinh(gamma*x)/z0);
% Uxwl - стоячая волна при наличии потерь (lossy)
plot (x,abs(Uxwl),'r'); grid on;
xlabel('x [m], b - no loss, r - lossy');
ylabel('standing wave amplitude [V]');

o=o;
```

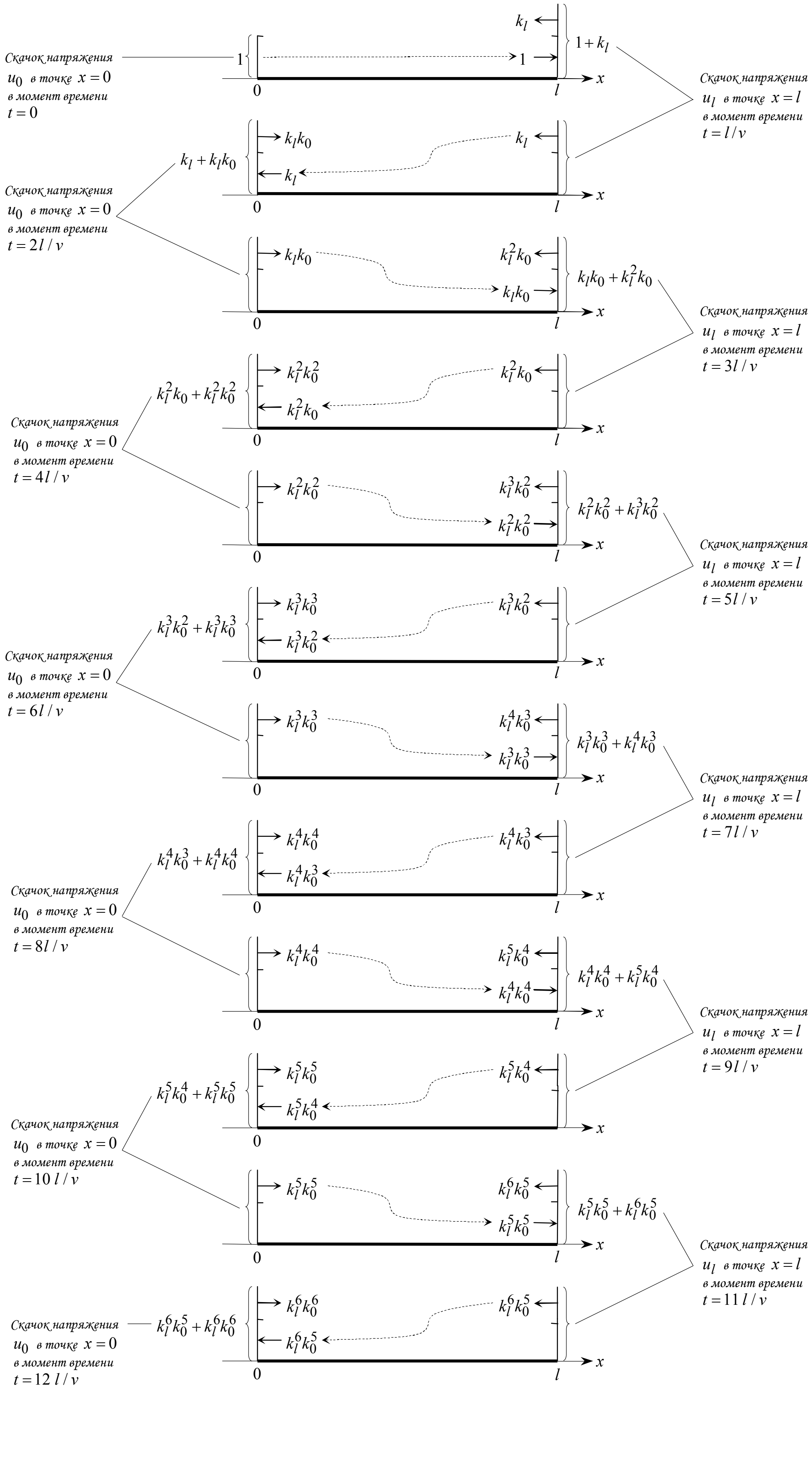
```
lw79_9(0.4e-6,7e-11,5,1.7e7,18,0,1e10)
```





3. Переходные процессы в длинной линии

3.1. Скачки напряжения на входе и на выходе линии без потерь



Геометрическая прогрессия:

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, ...,\, a_{n-1},\, a_n; \quad a_i = a_1 \cdot q^{i-1}; \quad s_n(def) = \sum_{i=1}^{n} a_i; \quad s_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}.$$

Вывод формулы (66) для напряжения u_0 и ее эквивалента для напряжения u_l

$$x = 0 \quad [n = 0,1,2,...; \;\; t = n \cdot (2l/v)]:$$

$$1 + \underbrace{k_l + k_l k_0}_{1} + \underbrace{k_l^2 k_0 + k_l^2 k_0^2}_{2} + \underbrace{k_l^3 k_0^2 + k_l^3 k_0^3}_{3} + \underbrace{k_l^4 k_0^3 + k_l^4 k_0^4}_{4} + ... =$$

$$= 1 + \underbrace{k_l k_0}_{a_1} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1\right) + \underbrace{k_l^2 k_0^2}_{a_2} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1\right) + \underbrace{k_l^3 k_0^3}_{a_3} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1\right) + \underbrace{k_l^4 k_0^4}_{a_4} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1\right) + ... + \underbrace{k_l^n k_0^n}_{a_n} \cdot \left(\frac{1}{k_0} + 1\right) =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{k_0} + 1\right) \cdot \frac{k_l k_0 \cdot \left[1 - (k_l k_0)^n\right]}{1 - k_l k_0} = \frac{1 - k_l k_0 + k_l \cdot (1 + k_0) \cdot \left[1 - (k_l k_0)^n\right]}{1 - k_l k_0} =$$

$$= \frac{1 - k_l k_0 + k_l + k_l k_0 - k_l \cdot (1 + k_0) \cdot (k_l k_0)^n}{1 - k_l k_0} = \frac{1 + k_l - k_l \cdot (1 + k_0) \cdot (k_l k_0)^n}{1 - k_l k_0}$$

$$x = l \quad [m = 0,1,2,...; \;\; t = (2m+1) \cdot (l/v)]:$$

$$\underbrace{1 + k_l}_{m=0} + \underbrace{k_l k_0 + k_l^2 k_0}_{m=1} + \underbrace{k_l^2 k_0^2 + k_l^3 k_0^2}_{m=2} + \underbrace{k_l^3 k_0^3 + k_l^4 k_0^3}_{m=3} + \underbrace{k_l^4 k_0^4 + k_l^5 k_0^4}_{m=4} + ... =$$

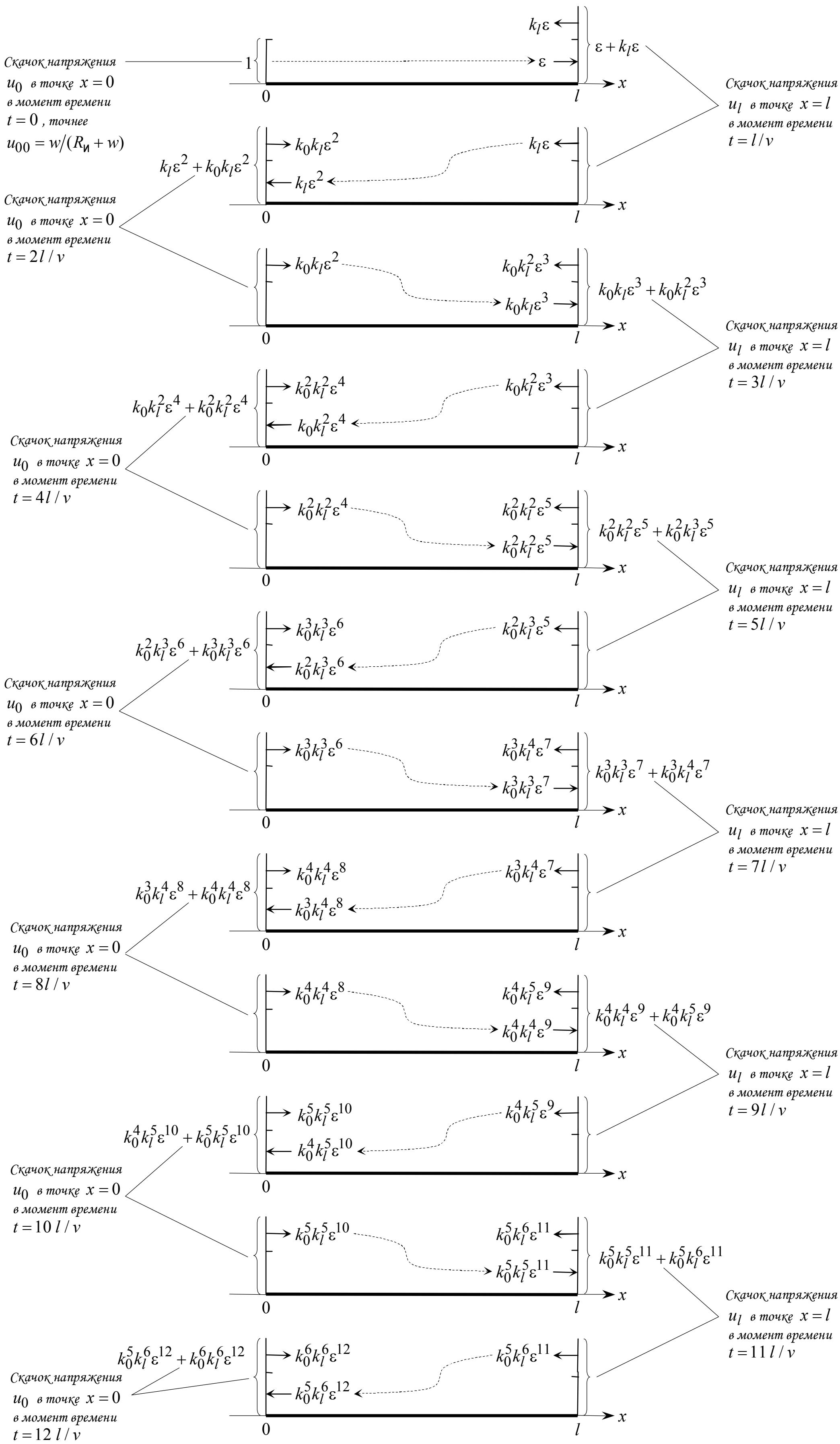
$$= 1 + k_l + (1 + k_l) \cdot \left[\underbrace{k_l k_0}_{a_1} + \underbrace{(k_l k_0)^2}_{a_2} + \underbrace{(k_l k_0)^3}_{a_3} + ... + \underbrace{(k_l k_0)^m}_{a_m}\right] =$$

$$= 1 + k_l + (1 + k_l) \cdot \frac{k_l k_0 \cdot \left[1 - (k_l k_0)^m\right]}{1 - k_l k_0} = (1 + k_l) \cdot \left\{1 + \frac{k_l k_0 \cdot \left[1 - (k_l k_0)^m\right]}{1 - k_l k_0}\right\} =$$

$$= (1 + k_l) \cdot \frac{1 - k_l k_0 + k_l k_0 \cdot \left[1 - (k_l k_0)^m\right]}{1 - k_l k_0} = (1 + k_l) \cdot \frac{1 - k_l k_0 + k_l k_0 - k_l k_0 \cdot (k_l k_0)^m}{1 - k_l k_0} =$$

$$= \frac{(1 + k_l) \cdot \left[1 - (k_l k_0)^{m+1}\right]}{1 - k_l k_0}$$

3.2. Скачки напряжения на входе и на выходе линии с потерями



$k_0 = (R_{и} - w)/(R_{и} + w)$
$k_l = (R_{н} - w)/(R_{н} + w)$
$u_{00} = w/(R_{и} + w)$

Обозначение: $e^{-ql/v} = \varepsilon$

Геометрическая прогрессия:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n; \quad a_i = a_1 \cdot q^{i-1}; \quad s_n(def) = \sum_{i=1}^{n} a_i; \quad s_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}.$$

Для напряжения u_0/u_{00} в точке $x = 0$ в момент времени $t = n\cdot(2l/v)$, $n = 0, 1, 2, ...$:

$$1 + \underbrace{(k_l + k_l k_0)\varepsilon^2}_{n=1} + \underbrace{\left(k_l^2 k_0 + k_l^2 k_0^2\right)}_{n=2}\varepsilon^4 + \underbrace{\left(k_l^3 k_0^2 + k_l^3 k_0^3\right)}_{n=3}\varepsilon^6 + \underbrace{\left(k_l^4 k_0^3 + k_l^4 k_0^4\right)}_{n=4}\varepsilon^8 + ... =$$

$$= 1 + \underbrace{k_l k_0 \varepsilon^2}_{a_1}\cdot\left(\frac{1}{k_0}+1\right) + \underbrace{k_l^2 k_0^2 \varepsilon^4}_{a_2}\cdot\left(\frac{1}{k_0}+1\right) + \underbrace{k_l^3 k_0^3 \varepsilon^6}_{a_3}\cdot\left(\frac{1}{k_0}+1\right) + \underbrace{k_l^4 k_0^4 \varepsilon^8}_{a_4}\cdot\left(\frac{1}{k_0}+1\right) + ... + \underbrace{k_l^n k_0^n \varepsilon^{2n}}_{a_n}\cdot\left(\frac{1}{k_0}+1\right) =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{k_0}+1\right)\cdot\frac{k_l k_0 \varepsilon^2\cdot\left[1-(k_l k_0 \varepsilon^2)^n\right]}{1-k_l k_0 \varepsilon^2} = \frac{1 - k_l k_0 \varepsilon^2 + k_l \varepsilon^2\cdot(1+k_0)\cdot\left[1-(k_l k_0 \varepsilon^2)^n\right]}{1-k_l k_0 \varepsilon^2} =$$

$$= \frac{1 - k_l k_0 \varepsilon^2 + k_l \varepsilon^2 + k_l k_0 \varepsilon^2 - k_l \varepsilon^2\cdot(1+k_0)\cdot(k_l k_0 \varepsilon^2)^n}{1-k_l k_0 \varepsilon^2} = \frac{1 + k_l \varepsilon^2 - k_l \varepsilon^2\cdot(1+k_0)\cdot(k_l k_0 \varepsilon^2)^n}{1-k_l k_0 \varepsilon^2}$$

Для напряжения u_l/u_{00} в точке $x = l$ в момент времени $t = (2m+1)\cdot(l/v)$, $m = 0, 1, 2, ...$:

$$\underbrace{(1+k_l)\varepsilon}_{m=0} + \underbrace{\left(k_l k_0 + k_l^2 k_0\right)\varepsilon^3}_{m=1} + \underbrace{\left(k_l^2 k_0^2 + k_l^3 k_0^2\right)\varepsilon^5}_{m=2} + \underbrace{\left(k_l^3 k_0^3 + k_l^4 k_0^3\right)\varepsilon^7}_{m=3} + \underbrace{\left(k_l^4 k_0^4 + k_l^5 k_0^4\right)\varepsilon^9}_{m=4} + ... =$$

$$= \varepsilon\cdot\left\{1 + k_l + (1+k_l)\cdot\left[\underbrace{k_l k_0 \varepsilon^2}_{a_1} + \underbrace{\left(k_l k_0 \varepsilon^2\right)^2}_{a_2} + \underbrace{\left(k_l k_0 \varepsilon^2\right)^3}_{a_3} + ... + \underbrace{\left(k_l k_0 \varepsilon^2\right)^m}_{a_m}\right]\right\} =$$

$$= \varepsilon\cdot\left\{1 + k_l + (1+k_l)\cdot\frac{k_l k_0 \varepsilon^2\cdot\left[1-\left(k_l k_0 \varepsilon^2\right)^m\right]}{1-k_l k_0 \varepsilon^2}\right\} = (1+k_l)\cdot\varepsilon\cdot\left\{1 + \frac{k_l k_0 \varepsilon^2\cdot\left[1-\left(k_l k_0 \varepsilon^2\right)^m\right]}{1-k_l k_0 \varepsilon^2}\right\} =$$

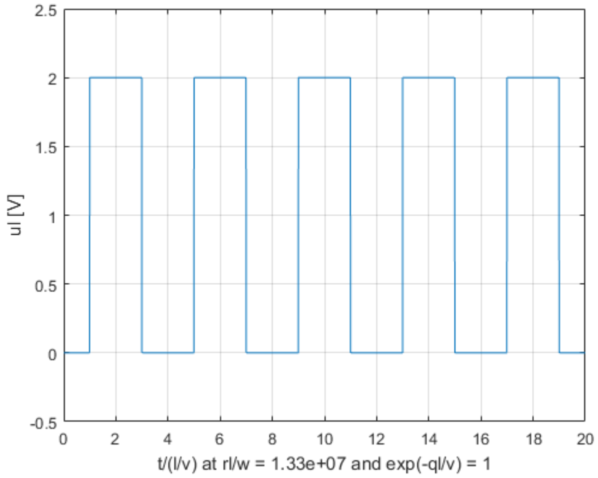
$$= (1+k_l)\cdot\varepsilon\cdot\frac{1 - k_l k_0 \varepsilon^2 + k_l k_0 \varepsilon^2\cdot\left[1-\left(k_l k_0 \varepsilon^2\right)^m\right]}{1-k_l k_0 \varepsilon^2} = (1+k_l)\cdot\varepsilon\cdot\frac{1 - k_l k_0 \varepsilon^2 + k_l k_0 \varepsilon^2 - k_l k_0 \varepsilon^2\cdot\left(k_l k_0 \varepsilon^2\right)^m}{1-k_l k_0 \varepsilon^2} =$$

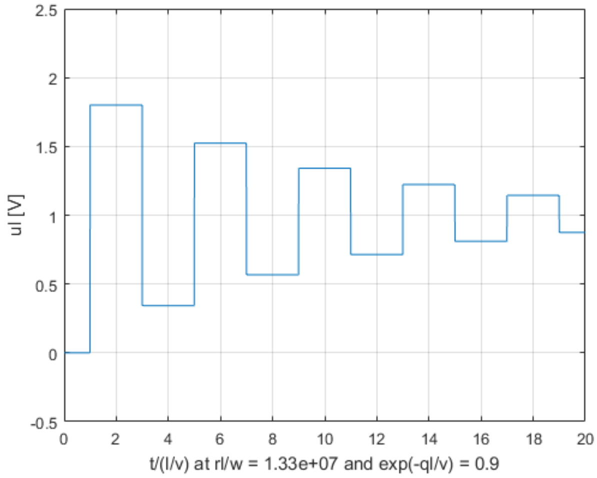
$$= \frac{(1+k_l)\cdot\varepsilon\cdot\left[1-\left(k_l k_0 \varepsilon^2\right)^{m+1}\right]}{1-k_l k_0 \varepsilon^2}$$

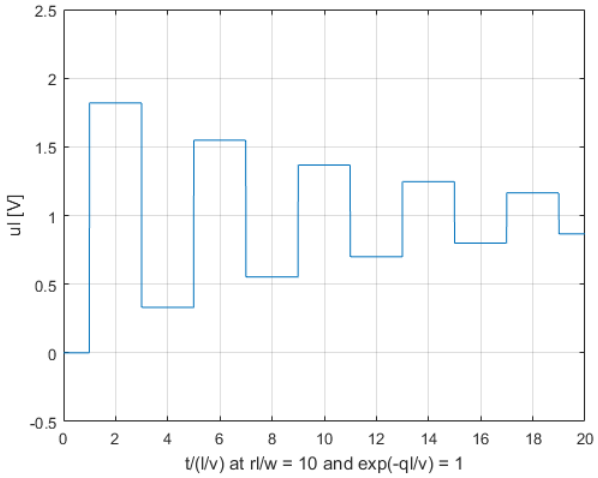
3.3. Реакция длинной линии на единичный скачок напряжения на ее входе при $R_И = 0$

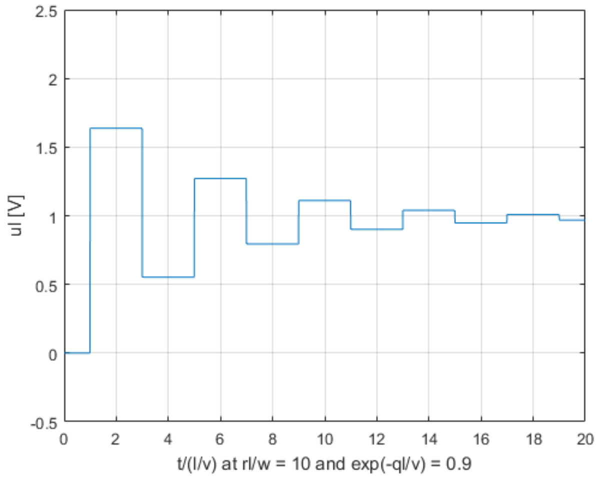
Программа *ul_rl.m* находится в C:/References/Lab_79.

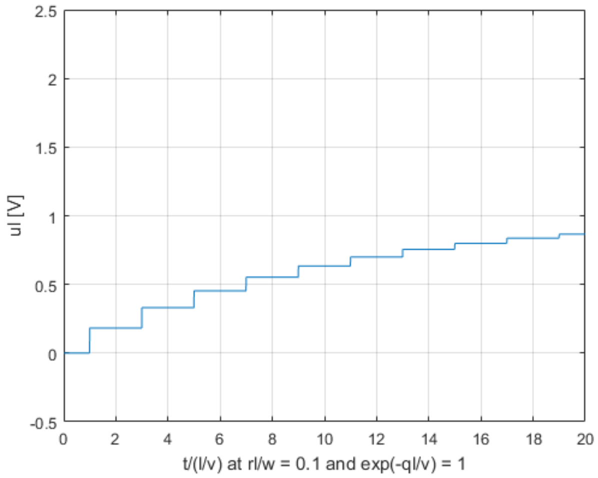
```
function ul_rl(w,rl,eps)
% Напряжение на выходе линии с волновым сопротивлением w [Ом],
% с сопротивлением нагрузки rl [Ом] и коэффициентом ослабления
% exp(-ql/v), равном eps < 1 при наличии потерь как отклик
% на скачок напряжения 1 В на входе линии в момент времени t = 0;
% в отсутствие потерь eps = 1; l - длина линии [м],
% v - скорость распространения волны [м/с].
% Пример обращения: ul_rl(75,1e9,1)
n=1:2001;
ul=zeros(1,2001);
l=101:200:2001; l(11)=2002;
k0=-1; kl=(rl-w)/(rl+w);
for m=0:9
    ul(l(m+1))=(1+kl)*eps*(1-(kl*k0*eps^2)^(m+1))/(1-kl*k0*eps^2);
    ul(l(m+1)+1:l(m+2)-1)=ul(l(m+1));
end
figure; plot((n-1)/100,ul); grid on; ylim([-0.5 2.5]);
xlabel(['t/(l/v) at rl/w = ',num2str(rl/w,3),...
    ' and exp(-ql/v) = ',num2str(eps,3)]);
ylabel('ul [V]');

o=o;
```

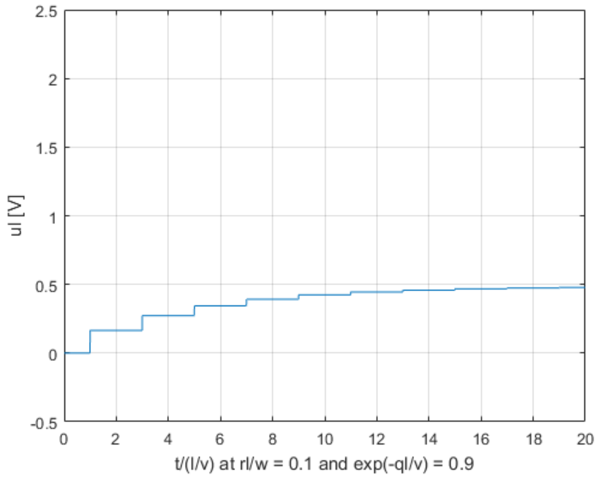

ul [V]
t/(l/v) at rl/w = 1.33e+07 and exp(-ql/v) = 1


ul [V]
t/(l/v) at rl/w = 1.33e+07 and exp(-ql/v) = 0.9

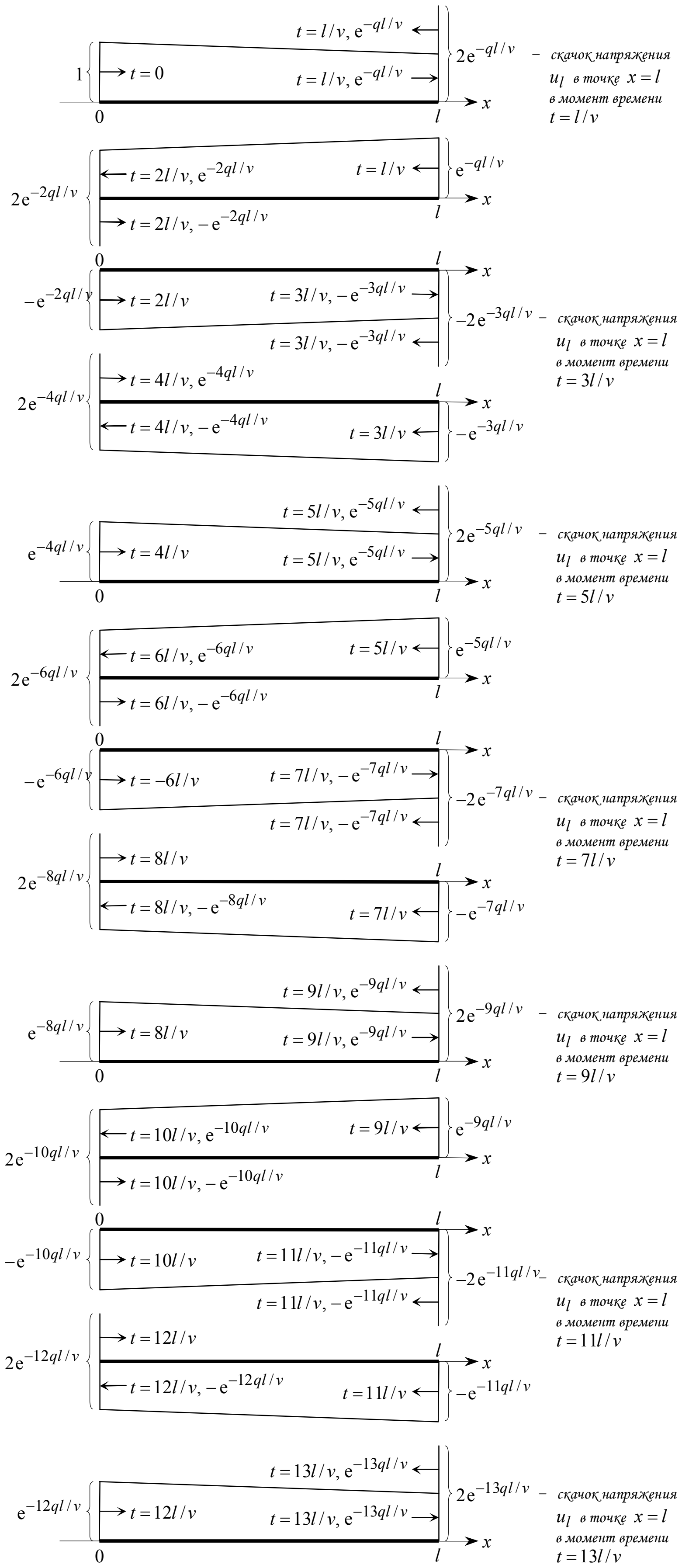

ul [V]
t/(l/v) at rl/w = 10 and exp(-ql/v) = 1


ul [V]
t/(l/v) at rl/w = 10 and exp(-ql/v) = 0.9


ul [V]
t/(l/v) at rl/w = 0.1 and exp(-ql/v) = 1


ul [V]
t/(l/v) at rl/w = 0.1 and exp(-ql/v) = 0.9

3.4. Постоянное напряжение (при $t \to \infty$) на выходе *разомкнутой линии с потерями* при подключении к ее входу идеального источника постоянного напряжения $\mathcal{E}$ [В]



$R_{\text{и}} = 0,\ R_{\text{н}} = \infty,\ \mathcal{E} = 1$

$k_u\big|_{x=l} = 1,\ k_u\big|_{x=0} = -1$

Скачки в точке $x = l$:
$2\,\mathrm{e}^{-ql/v}$, $-2\,\mathrm{e}^{-3ql/v}$, $2\,\mathrm{e}^{-5ql/v}$, $-2\,\mathrm{e}^{-7ql/v}$, …
– убывающая геометрическая прогрессия с первым членом $\alpha_1 = 2\,\mathrm{e}^{-ql/v}$ и знаменателем $\chi = -\,\mathrm{e}^{-2ql/v}$, $|\chi| < 1$.

При $t \to \infty$

$$u_l = \frac{\alpha_1}{1-\chi} = \frac{2\,\mathrm{e}^{-ql/v}}{1+\mathrm{e}^{-2ql/v}} =$$
$$= \frac{2\,\mathrm{e}^{-ql/v}}{\mathrm{e}^{-ql/v}\left(\mathrm{e}^{ql/v}+\mathrm{e}^{-ql/v}\right)} = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(ql/v\right)}$$

Тот же результат можно найти согласно

(1.2.23) $u = p\,w\left[\left(R_{\text{н}}+w\right)e^{q(2\tau-x/v)} + \left(R_{\text{н}}-w\right)\mathrm{e}^{qx/v}\right]\mathcal{E}$ при $x = l$,

подставляя в качестве множителя p

(1.2.20) $p = 1\Big/\left[\left(R_{\text{н}}+w\right)\cdot\left(R_{\text{и}}+w\right)\cdot e^{2q\tau} - \left(R_{\text{и}}-w\right)\cdot\left(R_{\text{н}}-w\right)\right]$

и имея в виду, что $\tau \overset{\text{def}}{=} l/v$:

$$u_l = \frac{w\cdot\left(R_{\text{н}}+w\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{ql/v} + \dfrac{R_{\text{н}}-w}{R_{\text{н}}+w}\cdot\mathrm{e}^{ql/v}\right)\cdot\mathcal{E}}{\left(R_{\text{н}}+w\right)\cdot\left[\left(0+w\right)\cdot\mathrm{e}^{2ql/v} - \left(0-w\right)\cdot\dfrac{R_{\text{н}}-w}{R_{\text{н}}+w}\right]} \underset{w=\infty}{\Rightarrow} \frac{2\cdot\mathrm{e}^{ql/v}}{\mathrm{e}^{2ql/v}+1}\cdot\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{\operatorname{ch}\left(ql/v\right)}\ .$$

Наконец, еще один способ получения того же результата заключается в решении задачи
о подключении в момент $t=0$ источника постоянного напряжения $\mathcal{E}$ с сопротивлением $R_{\text{И}}=w$
ко входу разомкнутой длинной линии при наличии потерь:

при $t=0$

$u\big|_{x=0}=\dfrac{\mathcal{E}}{2}$;

к моменту $t=l/v$ конца линии с $x=l$ достигает волна напряжения величиной $\dfrac{\mathcal{E}}{2}\cdot \mathrm{e}^{-ql/v}$

и напряжение в точке $x=l$ удваивается, так как $R_{\text{Н}}=\infty$:

$u\big|_{x=l}=2\cdot\left(\dfrac{\mathcal{E}}{2}\mathrm{e}^{-ql/v}\right)$;

одновременно с этим возникает волна напряжения величиной $\dfrac{\mathcal{E}}{2}\mathrm{e}^{-ql/v}$, движущаяся в сторону меньших значений x;

к моменту времени $t=2l/v$ эта волна с амплитудой $\dfrac{\mathcal{E}}{2}\mathrm{e}^{-2ql/v}$ достигает начала линии с $x=0$

и на этом все процессы в линии заканчиваются, поскольку $k_u\big|_{x=0}=0$ вследствие того, что $R_{\text{И}}=w$;

таким образом, в момент $t=2l/v$ напряжение на входе линии становиться равным

$u\big|_{x=0}=\dfrac{\mathcal{E}}{2}+\dfrac{\mathcal{E}}{2}\mathrm{e}^{-2ql/v}$;

отсюда следует, что при $t\ge 2l/v$ отношение напряжений $u\big|_{x=l}/u\big|_{x=0}$ остается неизменным и равным

$$K\big|_{t\ge 2l/v}=\frac{2\cdot\left(\dfrac{\mathcal{E}}{2}\mathrm{e}^{-ql/v}\right)}{\dfrac{\mathcal{E}}{2}+\dfrac{\mathcal{E}}{2}\mathrm{e}^{-2ql/v}};$$

поэтому результатом подачи постоянного напряжения $\mathcal{E}$ непосредственно на вход линии (когда $R_{\text{И}}=0$)
при $t\ge 2l/v$ напряжение на ее выходе будет равным

$$u\big|_{x=l}=K\big|_{t\ge 2l/v}\cdot\mathcal{E}=\frac{2\cdot\left(\dfrac{\mathcal{E}}{2}\mathrm{e}^{-ql/v}\right)}{\dfrac{\mathcal{E}}{2}+\dfrac{\mathcal{E}}{2}\mathrm{e}^{-2ql/v}}\cdot\mathcal{E}=\frac{2\cdot\mathrm{e}^{-ql/v}}{1+\mathrm{e}^{-2ql/v}}\cdot\mathcal{E}=\frac{2}{\mathrm{e}^{ql/v}+\mathrm{e}^{-ql/v}}\cdot\mathcal{E}=\frac{\mathcal{E}}{\mathrm{ch}\left(ql/v\right)}.$$