

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра радиотехники и систем управления

А. А. Григорьев

ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Учебно-методическое пособие

МОСКВА
МФТИ
2020

УДК 621.396.6

ББК 32.841.я7

К552

Р е ц е н з е н т :

Кандидат технических наук *А. Л. Ларин*

Григорьев, Александр Алексеевич

К552 Цифровая фильтрация : учебно-методическое
пособие. А. А. Григорьев, – Москва: МФТИ,
2020 – 40 с.

Изучаются базовые аспекты теории цифровой фильтрации.
Приобретаются навыки синтеза и реализации цифровых фильтров с заданными характеристиками.

© Григорьев А. А., 2020

© Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)», 2020

Содержание

1. Сигналы в дискретном времени	4
2. Спектры в дискретном времени	8
3. Цифровые фильтры	13
4. Синтез цифровых фильтров	17
5. Реализация цифровых фильтров	19
6. Передискретизация	22
7. Задание	26
7.1. Ознакомительные шаги	26
7.2. Фильтры первого порядка	28
7.3. Звенья второго порядка	32
7.4. Нерекурсивные FIR фильтры	33
7.5. FDATool Matlab	38

1. Сигналы в дискретном времени

Цифровая обработка сигналов начинается с дискретизации времени – выбирается квант времени длительности T и непрерывное время t подменяется потоком эквидистантных точек дискретизации $t_n = nT|_{n \in (-\infty, \infty)}$, рис. 1. На смену непрерывного времени t приходит дискретное время n – номер кванта.

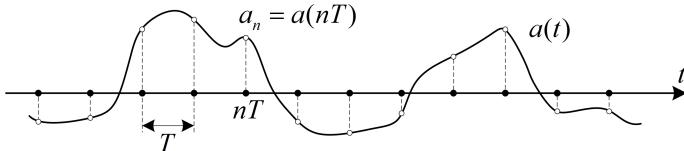


Рис. 1. Дискретизация времени

Длительность кванта T (она же длительность интервала дискретизации, период или шаг дискретизации) оказывается естественным эталоном измерения времени, а обратная величина $F = \frac{1}{T}$ – частота дискретизации – естественным эталоном частоты. Разумно с самого начала перейти к относительным единицам, начав измерять время эталоном T , а частоту – эталоном F . Шаг дискретизации и частота дискретизации станут тогда единичными, а угловая частота дискретизации $\Omega = 2\pi F$ (в радианах в единицу времени) – равной 2π .

Дискретизация времени сопровождается переходом от сигналов непрерывного времени $a(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ к времененным рядам a_n , $n \in (-\infty, \infty)$ – бесконечным в обе стороны потокам выборочных значений $a_n = a(t)|_{t=n}$. Такой поток можно упаковать в двухсторонний степенной ряд

$$a(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$$

по степеням формальной переменной x .

За ширмой ряда $a(x)$ стоит вполне конкретный физический δ -дискретизованный сигнал – гребенка равномерно распределенных вдоль оси времени δ -импульсов $\delta(t - n)$ с весами a_n :

$$a^\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - n).$$

Он получается, если процесс дискретизации сигнала $a(t)$ рассматривать как его умножение на функцию взятия выборок – гребенку Дирака $\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$:

$$a^\delta(t) = a(t)\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(t)\delta(t - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\delta(t - n).$$

В степенном ряду $a(x)$ коэффициент a_0 – это настоящее, правые коэффициенты a_n при положительных степенях x – это будущее, левые коэффициенты a_{-n} – прошлое. Замена переменой x на $\frac{1}{x} = x^{-1}$ вызывает обращение времени – будущее меняется с прошлым. Умножение ряда $a(x)$ на $x^{\pm k}$ вызывают правый или левый сдвиги сигнала вдоль временной оси на k тактов. Заметную роль играют правосторонние сигналы, у которых лишь конечное число коэффициентов слева отлично от нуля. Аналогичным образом вводятся левосторонние ряды. Ряды, являющиеся лево и правосторонними одновременно – это многочлены.

Представление дискретизованных сигналов степенными рядами – это совсем не простая прихоть. Дело в том, что критически важная в обработке сигналов **операция свертки** тесно связана с перемножением степенных рядов. Конкретно, свертке сигналов $a(t)$ и $b(t)$ непрерывного времени

$$c(t) = (a * b)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(u)b(t - u) du$$

отвечает произведение $c(x) = a(x)b(x)$ степенных рядов $a(x)$ и $b(x)$, представляющих дискретизованные версии этих сигналов. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть свертку δ -дискретизованных сигналов

$$a^\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\delta(t - n), \quad b^\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\delta(t - n) :$$

$$\begin{aligned} c^\delta(t) &= (a^\delta * b^\delta)(t) = \sum_n \sum_m a_n b_m \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - n)\delta(t - u - m) du = \\ &= \sum_n \sum_m a_n b_m \delta(t - (n + m)) = \sum_k \left(\sum_n a_n b_{k-n} \right) \delta(t - k) = \sum_k c_k \delta(t - k), \end{aligned}$$

где $c_k = \sum_n a_n b_{k-n}$ – это в точности коэффициент при x^k в произведении $c(x) = a(x)b(x)$ степенных рядов $a(x)$ и $b(x)$.

Схема вычисления дискретной свертки блоков $\bar{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, $\bar{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ коэффициентов правосторонних рядов $a(x)$, $b(x)$ показана на рис. 2. Блок \bar{b} проплывает слева направо вдоль неподвижного блока \bar{a} . На каждом такте вычисляется очередной элемент свертки как сумма произведений пар коэффициентов, лежащих один над другим в зоне наложения блоков. Оказывается, что элементы свертки – это в точности коэффициенты при степенях x в произведении рядов $c(x) = a(x)b(x)$.

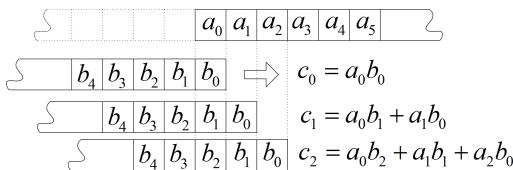


Рис. 2. К определению свертки блоков

Свертка правосторонних рядов существует безусловно, поскольку каждый из ее компонентов выражается суммой лишь конечного числа пар сомножителей. Для двухсторонних рядов это не так – компоненты свертки выражаются суммами бесконечного числа слагаемых, а это выдвигает проблемы суммируемости рядов.

Удивительно, что всякий правосторонний ряд $a(x) = a_0 + a_1 x + \dots$ с $a_0 \neq 0$ обратим – для него существует обратный ряд $b(x)$, такой что $c(x) = a(x)b(x) = 1$. Более того, обратный ряд можно эффективно построить: Поскольку $c_0 = a_0 b_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{a_0}$. Все прочие коэффициенты $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots$, $k \geq 1$ произведения $c(x)$ должны быть нулевыми. А это дает формулы $b_k = -\frac{a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \dots}{a_0}$ для вычисления очередного коэффициента b_k по предыдущим.

Вторая важная в обработке сигналов операция – это **взаимная корреляция** пары сигналов:

$$\langle a, b \rangle (t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(u)b(u-t) du = \int_{-\infty}^{\infty} a(u)b(-(t-u)) du =$$

$$= (a(u) * b(-u))(t).$$

Она сводится к свертке левого сигнала $a(t)$ с отраженной во времени версией правого – $b(t)$. Так что дискретизованная корреляция $\langle a, b \rangle(x)$ – это произведение $a(x)b(x^{-1})$ ряда $a(x)$ на отраженный во времени ряд $b(x)$:

$$\langle a, b \rangle(x) = a(x)b(x^{-1}) = c(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k x^k, \quad c_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{n-k}.$$

Коэффициент c_k в корреляции – это сумма произведений элементов блока $\bar{a} = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$ на элементы сдвинутого на k позиций блока $\bar{b} = (\dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots)$. В частности, коэффициент c_0 в автокорреляции $a(x)a(x^{-1})$, равный сумме квадратов выборок, – это полная энергия сигнала.

Приходится иметь дело и с сигналами бесконечной полной энергии, для которых обычная (энергетическая) автокорреляция не существует. Положение спасается переходом к мощностным корреляциям

$$\langle a, a \rangle_P(x) = c(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k x^k, \quad c_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N a_n a_{n-k}.$$

Значение мощностной корреляции в нуле – это предел при $N \rightarrow \infty$ отношения полной энергии конечного блока выборок к длине $(2N+1)$ этого блока:

$$c_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N a_n^2,$$

то есть средняя мощность сигнала – средняя энергия на выборку.

Важный класс сигналов бесконечной энергии – это шумы. Дискретизованный шум представляет степенной ряд $a(x)$ со случайными коэффициентами a_n – выборками шума. Математическое ожидание (среднее значение) выборки типичного шума равно нулю: $E[a_n] = 0$. Шум характеризуется статистической функцией корреляции $C_k = E[a_n a_{n-k}]$. Если шум стационарен, то $C_k = E[a_n a_{n-k}]$ не зависит от n . Значение функции корреляции в нуле $C_0 = E[a_n^2]$ – это дисперсия шума (его

средняя мощность), а значение в точке $k \neq 0$ характеризует зависимость (коррелированность) значений шума в точках n и $n - k$. Если эти выборки статистических независимы, то $C_k = E[a_n a_{n-k}] = E[a_n]E[a_{n-k}] = 0$. Шум с некоррелированными выборками ($C_k = 0$ при $k \neq 0$) называют белым.

Фундаментальное допущение корреляционной теории шумов заключается в том, что статистическая корреляция шума объявляется тождественной его мощностной корреляции:

$$C_k = E[a_n a_{n-k}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N a_n a_{n-k} = c_k.$$

Это так называемая эргодическая гипотеза. Оправдывает ее то, что сумма справа – это эмпирическая оценка математического ожидания слева, построенная по $(2N+1)$ -ой паре выборок. По закону больших чисел эта оценка сходится к математическому ожиданию при $N \rightarrow \infty$.

2. Спектры в дискретном времени

Спектр дискретного сигнала $a(x) = \sum_n a_n x^n$ определяется естественным образом – как фурье-образ физического δ -дискретизованного сигнала $a^\delta(t) = \sum_n a_n \delta(t - n)$:

$$\begin{aligned} a^\delta(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} a^\delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-j2\pi n f} \end{aligned}$$

По форме – это классический ряд Фурье по комплексным гармоническим функциям с коэффициентами a_n . Как и всякий ряд Фурье, спектр $a^\delta(f)$ периодичен с периодом в полосе Найквиста $f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – от одной до другой половины частоты дискретизации F . Эта полоса и есть область определения спектров сигналов дискретного времени.

Стандартный прием позволяет свести ряд Фурье к ряду по степеням комплексной переменной z . Область определения ряда

Фурье – полоса Найквиста $f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – отображается на единичный круг в z -плоскости функцией $z = e^{j2\pi f}$. Комплексная гармоника $e^{-j2\pi f n}$ трансформируется при этом в z^{-n} и ряд Фурье становится степенным:

$$a^\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-j2\pi n f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} = a(z); \quad z = e^{j2\pi f}.$$

В итоге оказывается, что в дискретном времени переходы сигнал-спектр реализуются совсем просто: сигнал (*временная область*) – это ряд $a(x)$ по степеням формальной переменной x , а его спектр (*частотная область*) – это тот же ряд, но уже по степеням комплексной переменной z^{-1} , пробегающей по единичной окружности в z -плоскости:

$$a(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n x^n \Leftrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} = a(z).$$

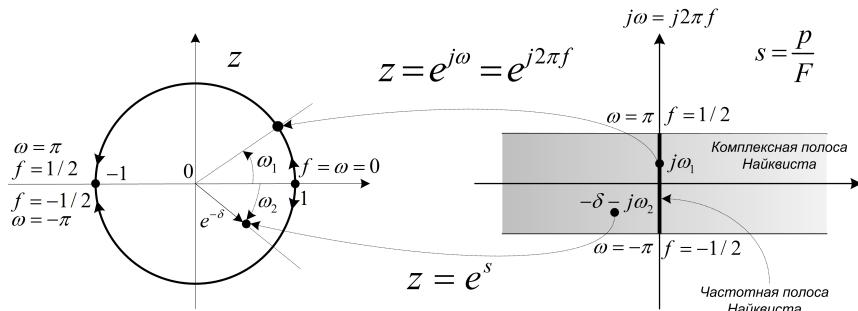


Рис. 3. Отображение s -плоскости в z -плоскость

Ряд $a(z)$ можно продолжить с единичной окружности во всю z -плоскость. Результат этого продолжения – это **двуухстороннее z -преобразование** сигнала $a(x)$ – аналог двухстороннего преобразования Лапласа сигналов непрерывного времени. Так же как и в случае преобразования Лапласа, чаще используется одностороннее z -преобразование, определенное для правосторонних сигналов, равных нулю в прошлом, при $n < 0$.

Спектры сигналов непрерывного времени определены в комплексной p -плоскости, мнимая ось которой выступает в качестве

оси частот. Оси показанной на рис. 3 s -плоскости ($s = \frac{p}{F}$) нормированы на частоту дискретизации F , так что границы выделенной на рисунке жирным частотной полосы Найквиста приходятся на точки $\omega = \pm\pi$ ($f = \pm\frac{1}{2}$). Отображение $z = e^{j\omega} = e^{j2\pi f}$ переводит эту полосу на единичную окружность в z -плоскости. Точка $s = 0$ переходит в $z = 1$, положительные частоты из полосы Найквиста отображаются на верхнюю полуокружность, отрицательные – на нижнюю. Верхней и нижней границам полосы Найквиста отвечает точка $z = -1$.

Продолжение $z = e^s = e^{\delta}e^{j\omega}$ этого отображения с мнимой оси на всю s -плоскость переводит выделенную на рисунке се-рым полосу Найквиста во всю z -плоскость. Левая половина по-лосы отображается на внутренность единичного круга, правая – на внешность. Отображение e^s периодично вдоль оси частот: $e^{\delta+j\omega} = e^{\delta+j\omega+j2\pi n}$. Все множество распределенных параллельно мнимой оси с шагом 2π точек s переходит в одну и ту же точку в z -плоскости. Это проявление эффекта репликации спектра при дискретизации сигнала.

Свойства спектров (z -преобразований) сигналов дискретного времени повторяют аналогичные свойства обычных сигналов и спектров.

Сдвиг сигнала – умножение ряда $a(x)$ на $x^{\pm k}$ вызывает умножение спектра $a(z)$ на $z^{\mp k} = e^{\mp j2\pi kf}$, то есть на комплексную гармоническую функцию частоты. Наоборот, умножение выборок сигнала на комплексную гармонику – $a_n \rightarrow a_n e^{-jn\varphi}$ преобра-зует спектр $a(z)$ в $a(ze^{j\varphi})$, то есть вызывает циклический сдвиг спектра – его поворот вдоль окружности на угол φ . Это дис-creteные аналоги теорем о сдвиге для обычного преобразования Фурье.

Свертке сигналов – произведению степенных рядов – отвечает перемножение спектров (теорема о свертке):

$$(a * b)(x) = a(x)b(x) \Leftrightarrow a(z)b(z).$$

Спектр корреляции сигналов

$$\langle a * b \rangle (x) = a(x)b(x^{-1}) \Leftrightarrow a(z)b(z^{-1})$$

оказывается произведением спектра левого сигнала $a(x)$ на спектр правого, в котором z заменено на z^{-1} . Для сигналов с

вещественными выборками такая замена эквивалента комплексному сопряжению (*) спектра:

$$b(z^{-1}) = b(e^{+j2\pi f}) = b^*(e^{-j2\pi f}) = b^*(z).$$

Поэтому спектр корреляции – это произведение спектра левого сигнала на комплексно сопряженный спектр правого:

$$\langle a * b \rangle (x) \Leftrightarrow a(z)b^*(z).$$

а спектр автокорреляции равен квадрату модуля спектра сигнала:

$$\langle a * a \rangle (x) \Leftrightarrow a(z)a^*(z) = |a(z)|^2.$$

Короче, все как и в непрерывном времени.

Спектры мощностных корреляций называют спектрами мощности сигнала или спектральными плотностями шума.

Первоочередной интерес представляют гармонические сигналы. Спектр комплексного гармонического сигнала с выборками $a_n = e^{j2\pi f_0 n}$ представляется рядом

$$a(f) = \sum a_n e^{-j2\pi n f} = \sum e^{-j2\pi n (f - f_0)} = \delta(f - f_0).$$

Ряд этот сходится к обобщенной функции $\delta(f - f_0)$, будучи ничем иным как её разложением в ряд Фурье. Так что спектр дискретного гармонического сигнала – это, как и в непрерывном случае, δ -функция, пик которой находится в точке f_0 полосы Найквиста, то есть под углом $2\pi f_0$ на единичной окружности в z -плоскости.

Исходя из этого тривиально находятся спектры вещественных гармонических функций:

$$\cos(2\pi f_0 n) = \frac{e^{j2\pi f_0 n} + e^{-j2\pi f_0 n}}{2} \Leftrightarrow a(f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2},$$

$$\sin(2\pi f_0 n) = \frac{e^{j2\pi f_0 n} - e^{-j2\pi f_0 n}}{2j} \Leftrightarrow a(f) = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}.$$

Вообще же, вычислить спектр сигнала – значит просуммировать двухсторонний степенной ряд. Иногда это удается сделать, придя к компактной формуле для спектра.

Единичный сигнал $\delta(x) = 1$ с единственной ненулевой выборкой $\delta_0 = 1$ – это дискретный аналог δ -функции. Его спектр

$\delta(z) = 1$ равномерен в полосе Найквиста, равно как и во всей z -плоскости. При сдвиге $\delta(x)$ на k позиций вправо (влево) спектр преобразуется в $\frac{1}{z^k}$ (z^k).

Прямоугольный импульс длительностью в N выборок $\text{rect}_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} x^n$ – это сумма N сдвинутых вправо импульсов со спектром $\text{rect}_N(z) = 1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^{N-1}} = \frac{z^{N-1} + \dots + z + 1}{z^{N-1}}$.

Суммирование ряда для единичной ступени $\theta(x)$ – геометрической прогрессии

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

дает $\theta(z) = \frac{z}{z-1}$ для спектра. По аналогии, для экспоненциально спадающего правостороннего сигнала получается

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n x^n = \frac{1}{1-\mu x} \Leftrightarrow \frac{z}{z-\mu}.$$

Отсюда без труда выводятся формулы для спектров правосторонних гармоник:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\cos \omega_0 n) x^n \Leftrightarrow \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 z + 1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin \omega_0 n) x^n \Leftrightarrow \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 z + 1}$$

Незамысловатое тождество

$$\left(x \frac{d}{dx} \right)^k x^n = n^k x^n$$

позволяет суммировать экспоненциально спадающие ряды с полиномиальным ростом коэффициентов типа $\sum n^k \mu^n x^n$. К примеру,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \mu^n x^n = \left(x \frac{d}{dx} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n x^n = \left(x \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{1-\mu x} = \frac{\mu x}{(1-\mu x)^2} \Leftrightarrow \frac{\mu z}{(z-\mu)^2}.$$

Практически все значимые примеры суммирования рядов получаются комбинированием двух этих техник – суммирование геометрической прогрессии и применение оператора $\left(x \frac{d}{dx} \right)$.

3. Цифровые фильтры

В непрерывном времени линейная стационарная система – фильтр – характеризуется импульсной реакцией $h(t)$ – откликом на δ -воздействие $\delta(t)$ на входе. При известной импульсной реакции отклик $b(t)$ фильтра на входной сигнал $a(t)$ представляется сверткой:

$$b(t) = (a * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(u)h(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)a(t-v) dv.$$

Видно, что на самом деле фильтр «собирает» отклик $b(t)$ как сумму по всем v сдвинутых копий воздействия $a(t-v)$ с весовыми коэффициентами $h(v)$. Гипотетически любой фильтр можно построить на линии задержки с континуальным множеством отводов, рис. 4. Сигнал $a(t-v)$ на отводе, отстоящем от начала линии на v , умножается на коэффициент $h(v)$ и все результаты умножения суммируются.

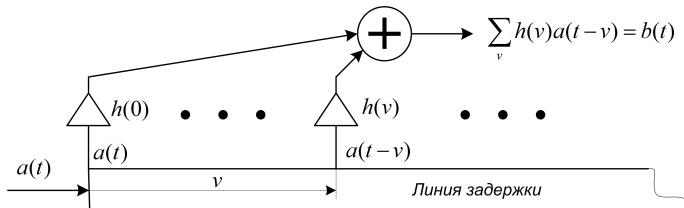


Рис. 4. Структура линейного фильтра

Чтобы перейти к цифровой фильтрации дискретизованных сигналов, достаточно сделать континуальное множество отводов дискретным, ограничившись отводами, взятыми с единичным шагом по времени. Это эквивалентно замене импульсной реакции $h(t)$ ее дискретизованной версией

$$h^\delta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \delta(t-n); \quad h_n = h(t)|_{t=n}.$$

На выходе такого фильтра с дискретной задержкой получается сигнал

$$b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n a(t-n).$$

Осталось дискретизовать сигналы $a(t)$, $b(t)$, ограничившись потоками выборок $a_n = a(t)|_{t=n}$, $b_n = b(t)|_{t=n}$ в дискретные моменты времени:

$$b_m = b(t)_{t=m} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n a(m-n) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n a_{m-n}.$$

Отсюда видно, что выходной сигнал $b(x) = \sum b_m x^m$ получается из входного $a(x) = \sum a_n x^n$ умножением на дискретизованную импульсную реакцию фильтра

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n,$$

то есть сверткой

$$b(x) = H(x)a(x).$$

Как и в непрерывном времени, цифровой фильтр характеризуется импульсной реакцией $H(x)$, которая позволяет найти отклик на произвольное входное воздействие.

По понятым причинам импульсная реакция реализуемого фильтра должна содержать лишь конечное множество ненулевых коэффициентов. Если эта характеристика имеет форму степенного ряда, то этот ряд обязан быть многочленом конечной степени. Фильтры этого рода относят к КИХ (FIR) фильтрам – *Конечная Импульсная Характеристика (Finite Impulse Response)*. Бесконечные степенные ряды некоторых импульсных реакций удается просуммировать, сведя их к рациональным дробям. К примеру,

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n x^n = \frac{1}{1 - \mu x}.$$

В итоге получаются фильтры с рациональными импульсными реакциями

$$H(x) = \frac{h(x)}{g(x)},$$

числитель и знаменатель которых – это многочлены с конечными наборами коэффициентов. Эти фильтры называют БИХ (IIR) фильтрами – *Бесконечная Импульсная Характеристика (Infinite*

Impulse Response). Все цифровые эквиваленты аналоговых фильтров попадают в эту категорию. FIR-фильтры характерны исключительно для цифровой фильтрации.

Передаточная функция фильтра – z -преобразование импульсной реакции

$$H(z) = H(x)|_{x=z^{-1}}$$

строится заменой формальной переменной x на комплексную переменную z^{-1} . Значения передаточной функции на единичном круге z -плоскости – это комплексный коэффициент передачи фильтра

$$K(jf) = H(e^{j2\pi f}), f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ или } K(j\omega) = H(e^{j\omega}), \omega \in (-\pi, \pi).$$

Спектр сигнала на выходе фильтра – это результат умножения спектра входного сигнала на комплексный коэффициент передачи.

Представление комплексного коэффициента передачи через модуль и аргумент

$$K(jf) = |K(jf)|e^{j\arg(K(jf))}$$

расщепляет его на амплитудно-частотную ($|K(jf)|$) и фазо-частотную ($\arg(K(jf))$) характеристики фильтра, определенные в полосе Найквиста – на единичном круге z -плоскости. В просторечии эти характеристики называют просто амплитудной и фазовой.

Рациональная передаточная функция $H(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ определяется с точностью до множителя C наборами корней многочленов в числителе и знаменателе – нулей h_j и полюсов g_k передаточной функции:

$$H(z) = C \frac{\prod_j (z - h_j)}{\prod_k (z - g_k)}.$$

Представив каждую из комплексных разностей $(z - h_j)$, $(z - g_k)$ через модуль и аргумент:

$$z - h_j = |z - h_j|e^{j\arg(z - h_j)} = |z - h_j|e^{j\varphi_j},$$

$$z - g_k = |z - g_k|e^{j\arg(z - g_k)} = |z - g_k|e^{j\psi_k},$$

для модуля и аргумента $H(z)$ найдем:

$$|H(z)| = C \frac{\prod_j |z - h_j|}{\prod_k |z - g_k|}; \quad \arg H(z) = \sum_j \varphi_j - \sum_k \psi_k.$$

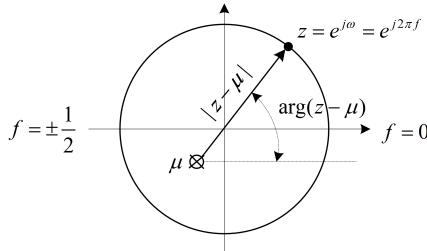


Рис. 5. Вклады нуля (полюса) в частотную и фазовую характеристики

Как видно из рис. 5, каждый объект μ (нуль h_j или полюс g_k) вносит свой вклад в частотную и фазовую характеристики. Вклад в частотную характеристику – это расстояние $|z - \mu|$ между объектом и текущей точкой z на единичном круге. Вклад в фазовую характеристику – это угол, который вектор $z - \mu$ образует с горизонтальной линией. При изменении частоты от 0 до границ $\pm \frac{1}{2}$ полосы Найквиста точка z перемещается по кругу и вклады эти изменяются. Это и определяет поведение частотной и фазовой характеристик. Значение частотной характеристики – это отношение произведения расстояний от точки z до всех нулей к произведению расстояний до полюсов. Значение фазовой характеристики – это сумма вкладов нулей минус сумма вкладов полюсов.

Имея перед глазами карту расположения нулей и полюсов передаточной функции в z -плоскости, можно составить достаточно адекватное общее представление о поведении частотной и фазовой характеристик фильтра.

Законы преобразования сигналов и их спектров при фильтрации продолжаются на корреляции и спектры мощности сигналов или спектральные плотности шумов. Рассмотрим автокорреляцию сигнала $b(x) = H(x)a(x)$ – результата фильтрации сигнала $a(x)$ фильтром с импульсной реакцией $H(x)$.

$$\langle b, b \rangle (x) = b(x)b(x^{-1}) = H(x)H(x^{-1})a(x)a(x^{-1}) = \langle H, H \rangle (x) \langle a, a \rangle (x).$$

Она имеет форму свертки корреляции входного сигнала с корреляцией импульсной реакции фильтра. Когда сигнал проходит через фильтр $H(x)$ его корреляция проходит через виртуальный фильтр с импульсной реакцией $\langle H, H \rangle(x)$. Но спектр корреляции, равный квадрату модуля спектра, имеет смысл спектра мощности сигнала или спектральной плотность шума. Так что спектры мощности и спектральные плотности преобразуются при фильтрации умножением на квадрат модуля комплексного коэффициента передачи фильтра – $|K(jf)|^2$. Это дискретный аналог теоремы Винера-Хинчина.

4. Синтез цифровых фильтров

Проблема синтеза передаточной функции цифрового фильтра формально сводится к следующему: требуется «расставить» в z -плоскости достаточное количество нулей и полюсов так, чтобы удовлетворить заданным конструктивным требованиям. Вот и все. Вопрос только в том, как найти «правильную» расстановку.

Можно выделить две основные категории методов синтеза. Первые переносят в цифровую область известные типы аналоговых прототипов. Вторые опираются на прямую оптимизацию – выбирается та или иная целевая функция качества фильтра и проводится ее максимизация по количеству и положениям нулей/полюсов. Наряду с этим эксплуатируется широкий спектр всевозможных эвристических приемов и подходов.

Технику переноса в цифровую область аналоговых фильтров достаточно проиллюстрировать на простом примере фильтра нижних частот с частотой среза $\omega_0 = 2\pi f_0$ – интегрирующей цепи с импульсной реакцией $h(t) = \omega_0 e^{-\omega_0 t}$ и передаточной функцией $H(p) = \frac{\omega_0}{p + \omega_0}$.

Дискретизация импульсной реакции с частотой F дает последовательность выборочных значений $a_n = \gamma e^{-\gamma n}$, $\gamma = \frac{\omega_0}{F}$. Для импульсной реакции и передаточной функции цифрового аналога получается

$$H(x) = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma n} x^n = \frac{\gamma}{1 - e^{-\gamma} x} \quad \Leftrightarrow \quad H(z) = \gamma \frac{z}{z - e^{-\gamma}}$$

К тому же результату приводит перенос полюса аналогового прототипа в точке $p = -\omega_0$, $s = \frac{p}{F} = -\frac{\omega_0}{F} = -\gamma$ в z -плоскость отображением $z = e^s = e^{-\gamma}$.

Любой аналоговый фильтр определяется картой расположения нулей-полюсов передаточной функции в p -плоскости. Для того, чтобы построить его цифровой эквивалент, достаточно нормировать оси p -плоскости на частоту дискретизации F ($s = \frac{p}{F}$) и перенести получившуюся карту нулей-полюсов в z -плоскость отображением $z = e^s$. Тот же результат даст дискретизация импульсной реакции аналогового прототипа.

Когда частота дискретизации F растет, нули-полюсы аналогового прототипа смешаются в малую окрестность нуля s -плоскости. Отображение $z = e^s \simeq 1 + s$ почти линейно переводит ее на малую окрестность точки $z = 1$, в которой фрагмент единичной окружности выглядит почти прямолинейным. Так что при достаточно высокой частоте дискретизации свойства цифрового эквивалента практически повторяют свойства прототипа. При не слишком высокой частоте дискретизации отображение $z = e^s$ становится нелинейным. Карта нулей-полюсов прототипа переносится в z -плоскость с искажениями. Свойства цифрового эквивалента деградируют. Это проявление эффекта элайзинга, возникающего при дискретизации импульсных реакций, обладающих некомпактными спектрами.

К примеру, коэффициент подавления сигнала на границе $f = \frac{F}{2}$ полосы Найквиста цифровым аналогом интегрирующей цепи составляет

$$\frac{|H(z)|_{z=-1}}{|H(z)|_{z=+1}} = \frac{1 - e^{-\gamma}}{1 + e^{-\gamma}} \simeq \frac{\gamma}{2}.$$

Аналоговая интегрирующая цепь подавляет сигнал той же частоты $\omega = 2\pi \frac{F}{2} = \pi F$ с коэффициентом

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\pi F}{\omega_0})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\gamma^2}}} \simeq \frac{\gamma}{\pi}$$

По уровню подавления в дальней зоне цифровой фильтр проигрывает аналоговому прототипу в $\frac{\pi}{2}$ раз – на 4 dB.

5. Реализация цифровых фильтров

Цифровой фильтр с импульсной реакцией $H(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ – это конечный автомат, который преобразует воздействие – поток поступающих на вход коэффициентов a_n степенного ряда $a(x)$ в отклик – поток коэффициентов b_n ряда $b(x) = H(x)a(x)$, рис. 6.

Автомат этот линеен и стационарен в том смысле, что сумме $a_1 + a_2$ воздействий a_1 и a_2 на входе отвечает сумма $b_1 + b_2$ откликов $b_1 = Ha_1$ и $b_2 = Ha_2$ на выходе, а сдвиг воздействия приводит к такому же сдвигу отклика.

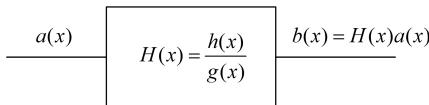


Рис. 6. Цифровой фильтр

Его можно реализовать каскадным соединением двух секций, рис. 7, из которых первая осуществляет умножение на многочлен-числитель $h(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \dots + h_jx^j$, а вторая – деление на знаменатель $g(x) = 1 + g_1x + g_1x^2 + \dots + g_kx^k$. Удобно считать младший коэффициент $g(x)$ единичным. Первая секция реализует нули передаточной функции $H(z)$, вторая – ее полюсы. Для FIR-фильтра с $g(x) = 1$ вторая секция не требуется.

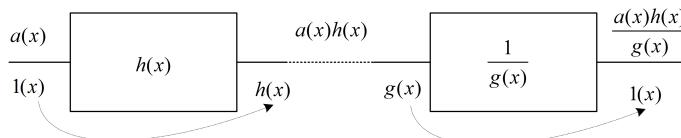


Рис. 7. Реализация нулей и полюсов отдельными секциями

На роль первой секции подходит любой автомат, который в ответ на дискретную δ -функцию $1(x) = 1$ на входе выдает последовательность коэффициентов импульсной реакции $h(x)$ на выходе. На роль второй секции – любой автомат, который в ответ на последовательность $g(x)$ на входе выдает δ -функцию $1(x)$ на выходе.

Прямые формы (*direct form*) реализации первой и второй секций показаны на рис. 8а. Левая, реализующая умножение на $h(x)$, нерекурсивна – ее выход зависит только от входов. Пра-

вая, реализующая деление на $g(x)$, рекурсивна – текущий выход зависит от предыдущих выходов.

Поступившая на вход нерекурсивной секции единица бежит сверху вниз по сдвиговому регистру из блоков задержки x . На выходе сумматора-аккумулятора появляется последовательность результатов ее умножения на коэффициенты h_0, h_1, h_2, \dots – импульсная реакция $h(x)$. В алгебраической интерпретации: блок задержки реализует умножение на x степенного ряда на входе. Так что для ряда $b(x)$ на выходе получается:

$$b(x) = h_0 a(x) + h_1 x a(x) + h_2 x^2 a(x) = h(x) a(x).$$

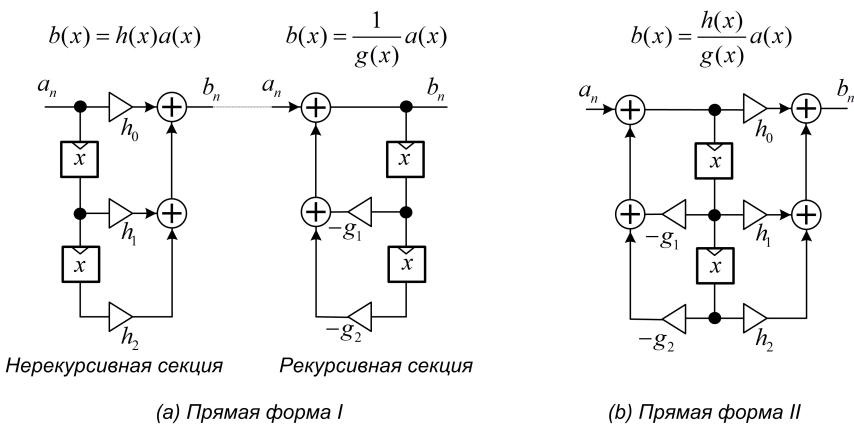


Рис. 8. Прямые формы

Когда на вход рекурсивной секции поступает блок $1, g_1, g_2, \dots$ коэффициентов $g(x)$, первая его единица, пройдя через верхний сумматор, принимается в сдвиговый регистр и бежит по нему сверху вниз. Все последующие входные коэффициенты g_1, g_2, \dots компенсируются в нуль этим сумматором, поскольку на его второй вход приходят значения $-g_1, -g_2, \dots$ с обратным знаком с умножителей. Алгебраически это выглядит так:

$$b(x) = a(x) - g_1 x b(x) - g_2 x^2 b(x) \Rightarrow b(x) = \frac{a(x)}{g(x)}.$$

Секции на рис. 8а регулярно продолжаются вниз, что позволяет реализовать фильтры с любыми рациональными импульс-

ными реакциями. Их можно поменять местами, поставив рекурсивную секцию перед нерекурсивной. Это позволяет объединить два регистра сдвига в один – память рекурсивной секции удается задействовать в нерекурсивной. Так получается вторая прямая форма, рис. 8b.

В транспонированных формах (*transposed form*) на рис. 9a, все несколько иначе. Поступившая на вход нерекурсивной секции единица умножается сразу на все коэффициенты h_j . Результаты заносятся в ячейки сдвигового регистра, из которого они последовательно, снизу вверх выталкиваются на выход. Логика работы рекурсивной секции похожа. Первая единица входного блока $1, g_1, g_2, \dots$, пройдя через верхний сумматор, умножается сразу на все коэффициенты $-g_1, -g_2, \dots$. Занесенные в ячейки регистра сдвига результаты умножений движутся снизу вверх и компенсируют в нуль последующие входы. Объединение транспонированных форм I по памяти дает транспонированную форму II. В отличие от прямой формы, в транспонированной форме первой идет нерекурсивная секция.

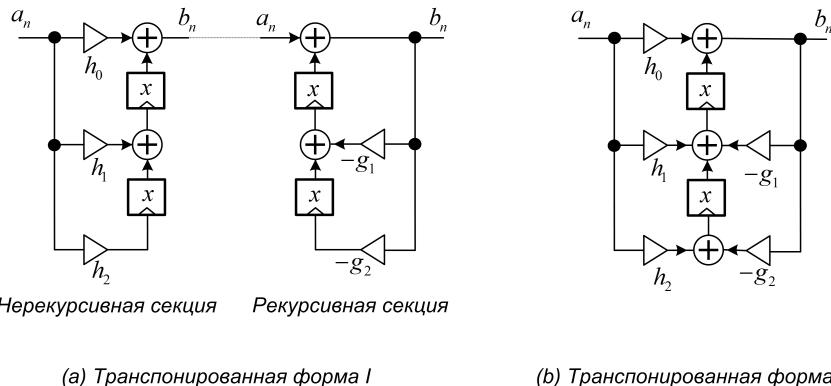


Рис. 9. Транспонированные формы

При реализации фильтров высоких порядков остро встает проблема точности задания коэффициентов. Дело в том, что положения корней многочленов, которые, собственно говоря, и представляют интерес, могут зависеть от их коэффициентов аномально сильно. Ночной кошмар цифровиков – это пример Уил-

кинсона – многочлен

$$h(x) = \prod_{n=1}^{20} (x - n) = x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} + \dots$$

Ошибка ϵ порядка 10^{-6} в коэффициенте -210 при x^{19} этого многочлена приводит к невероятно сильной трансформации карты корней. Каждый может изучить это явление вызвав в Matlab функцию *wilk(ϵ)*, которая выведет на экран карту корней при заданной ошибке ϵ .

Проблема точности особенно актуальна для высокодобротных рекурсивных фильтров с полюсами, расположенными близко к единичной окружности. Ошибка в задании коэффициента может перебросить такой полюс во внешность единичного круга, что сделает фильтр неустойчивым. Поэтому рекурсивные фильтры высоких порядков обычно строят каскадным соединением звеньев второго порядка

$$H(x) = \frac{h_0 + h_1 x + h_2 x^2}{1 + g_1 x + g_2 x^2},$$

каждое из которых реализует пару сопряженных полюсов и пару нулей. Для каждого данного звена желательно подбирать нули как можно более близкие к полюсам. Высоко добротные звенья рекомендуется ставить последними в цепочке – они отличаются большими усилениями и высокими уровнями шума округлений.

6. Передискретизация

Цифровая обработка не обходится без передискретизации – D -кратного снижения или повышения частоты дискретизации, которые сопровождаются изменениями ширины полосы Найквиста. Две показанные на рис. 10 z -плоскости различаются частотами дискретизации. Правая – z_l построена для малой (*low*) частоты дискретизации F . Границам полосы Найквиста отвечают в ней частоты $\pm \frac{F}{2}$. Левая – z_h с границами $\pm \frac{DF}{2}$ – построена для D -кратно более высокой (*high*) частоты дискретизации DF .

При снижении частоты дискретизации (*декимация или downsampling*) полоса Найквиста сужается в D раз – со всей

единичной окружности в z_h -плоскости до сектора этой окружности с углом раскрытия $\frac{2\pi}{D}$ и границами в точках $\pm\frac{F}{2}$. Отображение $z_l = z_h^D$ переводит этот сектор во всю окружность в z_l -плоскости. Обратной операции – *интерполяция* или *upsampling* – отвечает обратное отображение $z_h = z_l^{\frac{1}{D}}$, которое переводит z_l -окружность в $\frac{2\pi}{D}$ -сектор окружности в z_h .

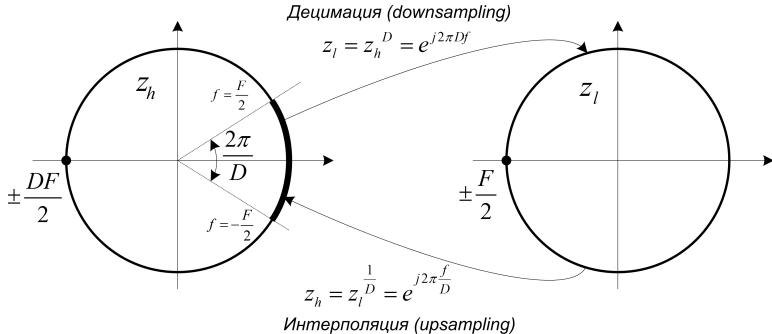


Рис. 10. Децимация и интерполяция

Окружность в z_h -плоскости разбивается на D секторов с углом $\frac{2\pi}{D}$ каждый, отличающиеся поворотами на угол $\frac{2\pi}{D}$. Прямое отображение $z_l = z_h^D$ переводит любой из этих секторов на всю z_l -окружность, поскольку $(ze^{j\frac{2\pi}{D}})^D = z^D$. По той же причине, обратное отображение $z_h = z_l^{\frac{1}{D}}$ многозначно – оно равным образом переводит z_l -окружность на любой из секторов окружности в z_h -плоскости.

Осталось разобраться, какое отношение это все имеет к передискретизации. Для этого нужно вникнуть в поведение спектров сигналов при их прореживании – умножении на дискретный аналог гребенки Дирака – функцию $\chi_D(n) = \delta_{n=0 \bmod D}$, которая принимает значение 1 в точках n , кратных D , и равна нулю в остальных точках. Это напоминает дискретизацию сигналов непрерывного времени умножением на гребенку Дирака $\chi(t) = \sum_n \delta(t - n)$.

Для функции $\chi_D(n)$ имеет место представление:

$$\chi_D(n) = \frac{1}{D} \sum_{d=0}^{D-1} \xi^{nd} = \frac{1}{D} \sum_{d=0}^{D-1} e^{-j\frac{2\pi}{D}nd}. \quad (1)$$

Комплексное число $\xi = e^{-j\frac{2\pi}{D}}$ – это примитивный корень из единицы степени D – одно из решений уравнения $\xi^D = 1$. Это уравнение имеет D корней и все они являются степенями ξ^d , $d = [0, D - 1]$. Корни это равномерно распределены по единичной окружности с шагом $\frac{2\pi}{D}$. Один из них – $\xi^0 = 1$ – тривиален.

Из разложения

$$z^D - 1 = (z - 1)(z^{D-1} + z^{D-2} + z^{D-3} + \cdots + z + 1) = (z - 1) \sum_{d=0}^{D-1} z^d$$

следует, что если число z есть корень из единицы степени D , то есть $z^D - 1 = 0$, то либо этот корень тривиален ($z = 1$), либо сумма его степеней равна нулю.

В сумме (1) ξ^n – это корень из единицы. Сумма по d его степеней $(\xi^n)^d$ отлична от нуля, только когда этот корень тривиален, $\xi^n = 1$. А это имеет место только при n , кратных D . Когда же $\xi^n = 1$, $\chi_D(n) = 1$.

Пусть $a(x) = \sum_n a_n x^n$ – сигнал со спектром $a(z) = \sum_n a_n z^{-n}$. Спектр прореженного сигнала

$$a^D(x) = \sum_n a_n \chi_D(n) x^n = \frac{1}{D} \sum_{d=0}^{D-1} \sum_n a_n \xi^{dn} x^n$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} a^D(z) &= \frac{1}{D} \sum_{d=0}^{D-1} \sum_n a_n \xi^{dn} z^{-n} = \frac{1}{D} \sum_{d=0}^{D-1} \sum_n a_n (\xi^{-d} z)^{-n} = \\ &= \frac{1}{D} \sum_{d=0}^{D-1} \sum_n a_n \left(z e^{j \frac{2\pi}{D} d} \right)^{-n} = \frac{1}{D} \sum_{d=0}^{D-1} a(z e^{j \frac{2\pi}{D} d}), \end{aligned}$$

оказываясь суммой D копий исходного спектра $a(z)$, повернутых вдоль окружности на углы, кратные $\frac{2\pi}{D} d$.

Подобно дискретизации сигналов непрерывного времени прореживание вызывает репликацию – наложение сдвинутых копий спектра. Только в дискретном случае число таких копий конечно – равно D , и они получаются не сдвигами вдоль оси частот, а поворотами вдоль окружности на углы, кратные $\frac{2\pi}{D}$.

Если спектр $a(z)$ изначально компактен в $\frac{2\pi}{D}$ -секторе на рис. 10, то при репликации его сдвинутые версии не перекрываются. Сохраняется возможность однозначно восстановить исходный спектр по реплицированному. Прореженный сигнал однозначно определяет исходный. Это аналог теоремы Котельникова об обратимости дискретизации сигналов непрерывного времени.

Спектр, который получается после репликации, одинаков во всех секторах. Это означает, что в качестве области определения отображения $z_l = z_h^D$ можно выбрать любой из них. Наоборот, если спектр с единичного круга z_l -плоскости отображением $z_h = z^{\frac{1}{D}}$ перевести на сектор z_h -окружности (интерполяция), а затем периодически размножить его по секторам, получится одинаковый во всех секторах спектр, в котором опознается спектр некоторого D -кратно прореженного сигнала. Этим сигналом является поток исходных выборок, частота следования которых D -кратно повышена вставкой между ними ($D - 1$)-блоков нулей.

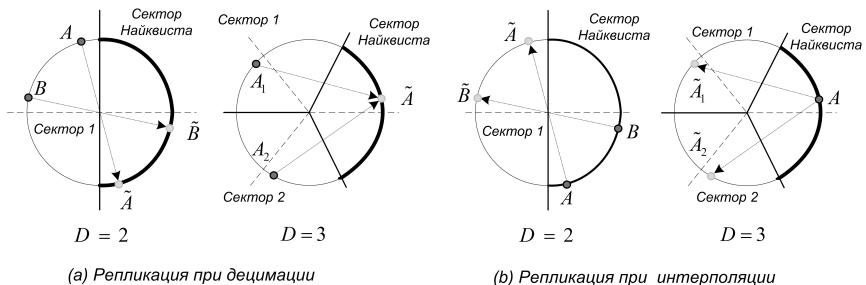


Рис. 11. Фантомные спектральные компоненты при передискретизации

Как децимация, так и интерполяция приводят к появлению в спектре результирующего сигнала фантомных спектральных компонент, не представленных в исходном спектре. Механизмы их образования при децимации и интерполяции по малым индексам $D = 2$ и $D = 3$ иллюстрирует рис. 11.

При децимации спектр сигнала подвергается репликации – аддитивному наложению копий, повернутых на углы $\frac{2\pi}{D}k$, $k = 0, 1, \dots, D - 1$. В итоге в секторе Найквиста с углом $\frac{2\pi}{D}$ и образуется спектр децимированного сигнала.

При $D = 2$, рис. 11а, накладываются всего две копии – исходная и повернутая на угол π . В секторе Найквиста оказывается

сумма исходного спектра, и спектра, перенесенного поворотом на π из сектора 1 на рисунке. Если в исходном сигнале присутствовала спектральная компонента на частоте A , она породит фантомную компоненту на частоте \tilde{A} в секторе Найквиста. Высокочастотная компонента B вблизи границы полосы Найквиста породит фантом на частоте \tilde{B} вблизи нуля. При $D = 3$ в секторе Найквиста складываются три копии – исходная и две сдвинутые поворотами из секторов 1 и 2. Сигнал на частоте A_1 в секторе 1, и сигнал A_2 из сектора 2 породят фантомы на одной и той же частоте \tilde{A} в окрестности нуля.

После децимации на данной частоте сектора Найквиста может оказаться сумма полезной спектральной компоненты и нескольких фантомных компонент. Разделить их невозможно никакой фильтрацией. Так что последствия искажения спектра при децимации (последствия элайзинга) оказываются необратимыми.

При интерполяции спектр исходного сигнала, изначально существующий в секторе Найквиста, реплицируется по прочим секторам поворотами. В спектре результирующего сигнала оказывается несколько сдвинутых копий сходного, рис. 11b. При $D = 2$ компонента на частоте A порождает компоненту \tilde{A} , низкочастотная компонента B – высокочастотную компоненту \tilde{B} . При $D = 3$ компонента A порождает целых две дополнительные компоненты на частотах \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 .

Интерполяция кратно расширяет спектр сигнала, порождая множество сторонних спектральных компонент. Но все они не перекрываются с основным спектром и, в принципе, могут быть подавлены фильтром с прямоугольной в секторе Найквиста частотной характеристикой. Так что, в отличие от децимации, интерполяция обратима – искусственно вставленные между выборками $(D - 1)$ -блоки нулей никто не мешает выбросить.

7. Задание

7.1. Ознакомительные шаги

Откройте в Matlab Smulink-модель **simple.mdl**. Вы увидите блок исследуемого фильтра *Digital Filter* в окружении источников сигналов и средств их наблюдения. По умолчанию фильтр

тривиален – выход повторяет вход.

Все это работает в дискретном времени – по тактам. Длительность такта выбрана равной единице. Можете считать эту единицу секундой, а можете – любой другой единицей времени, к примеру, микросекундой. Полоса Найквиста – область определения спектров дискретизованных сигналов – это интервал $f \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ оборотов в единицу времени (герц или мега-герц – в зависимости от подразумеваемой единицы времени) или $\omega \in (-\pi, \pi)$ радиан в единицу времени.

В окошке на панели инструментов задается длительность интервала моделирования – число тактов (к примеру, 20) или ключевое слово **inf** – бесконечный интервал. Моделирование запускается по клавише \triangleright . Оно либо останавливается само по истечении заданного числа тактов, либо прерывается принудительно по клавише \square .

Заготовлены источники пяти типов – δ -импульс PULSE, единичная ступень STEP, гармонический сигнал SIN, свип-сигнал CHIRP с линейным нарастанием частоты и шум NOISE. Любой из них можно подключить на вход фильтра – к клемме INPUT. Для этого двойным щелчком на клемме открываем ее диалог настройки и выбираем имя источника в лист-боксе Goto tag.

Освоимся с источниками.

Задайте интервал моделирования в 20 тактов, подключите источник PULSE, запустите моделирование и посмотрите осциллограмму сигнала, отрыв двойным щелчком осциллоскоп Scope. Освойтесь с этим инструментом. Научитесь масштабировать картинки по горизонтали и вертикали. Загляните в диалог настройки осциллоскопа – инструмент Parameters. В нем существенны поля *Number of axes* – количество входов и *Sample time* – период дискретизации. Посмотрите осциллограмму сигнала STEP.

Установите интервал моделирования в 400 тактов, подключите гармонический сигнал SIN и установите его частоту равной $0.01/2$ ($1/100$ от границы $1/2$ полосы Найквиста) – параметр *Frequency* в диалоге блока Sine Wave. Посмотрите осциллограмму дискретизованной низкочастотной гармоники. Измените частоту на $0.99/2 - 0.99$ от полосы Найквиста. Посмотрите осциллограмму. Ее вид приводит в изумление многих. Чтобы как-то

облегчить понимание наблюдаемого, проведите децимацию сигнала по индексу $D = 2$. Для этого установите *Output port sample time* = 2 в диалоге блока *Decimator* и *Sample time* = 2 в настройках осциллографа *Scope Dcm*. Сравните картинки до и после децимации.

Подружимся со спектроанализатором. Задайте частоту 0.4/2 и включите блок *Spectrum Scope* – флагок *Open scope at start of simulation* на закладке *Display Properties* диалога настройки блока. Запустите моделирование на inf-интервале. Полюбуйтесь на спектр гармонического сигнала. Переключите спектроанализатор на выход дециматора – выделяем существующую связь по щелчку на ней, удаляем ее по DEL и ведем новую курсором при нажатой левой кнопке, начиная от входа анализатора. Изучите влияние децимации на спектр.

Подайте на вход шум NOISE. Источник шума формирует поток независимых случайных выборок (белый шум), распределенных по гауссовскому закону с единичной дисперсией. Спектроанализатор принимает плотность белого шума с единичной дисперсией в единичной полосе частот за 0 dB спектра мощности. Посмотрите графики спектральных плотностей шума до и после децимации. Отличие уровней на $10 \lg 2 = 3 \text{ dB}$ обусловлено сужением полосы с 1 до $1/2$. Установив конечный интервал моделирования, посмотрите осциллограммы шума. *Не стоит открывать осциллографы после сеанса моделирования на бесконечном интервале – чревато проблемами с нехваткой памяти.*

Подключите на вход свип-генератор CHIRP, формирующий гармонический сигнал, частота которого линейно нарастает от 0 до границы 0.5 полосы за 10000 тактов. Установите интервал моделирования в 10000 и посмотрите осциллограмму свип-сигнала.

7.2. Фильтры первого порядка

Фильтры первого порядка реализуют один вещественный нуль в произвольной точке ν и один полюс μ внутри единичного круга z -плоскости, рис. 12. При μ вне единичного круга фильтр теряет устойчивость. Все четыре мыслимые варианта их реализации показаны на рис. 13.

Распространенные частные случаи показаны на рис. 14. Вариант с $\nu = 0$ (нуль в нуле) дает интегрирующее звено – цифро-

вой аналог интегрирующей цепи. При $\mu = 1$ (полюс на единичном круге) получается идеальный интегратор. Вариант с $\nu = 1$ (нуль на нулевой частоте) приводит к дифференцирующему звено – аналогу дифференцирующей цепи и, при $\mu = 0$, идеальному дифференциатору.

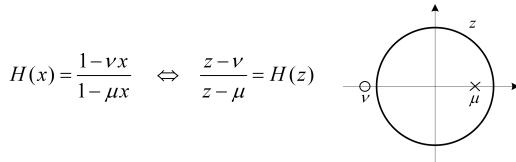


Рис. 12. Фильтры первого порядка

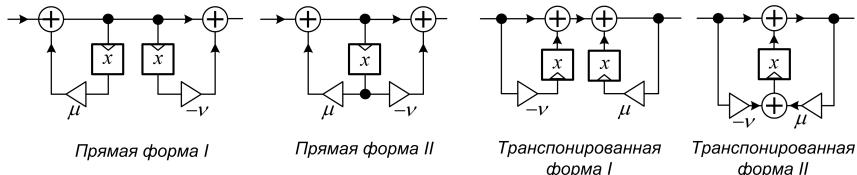


Рис. 13. Их реализации

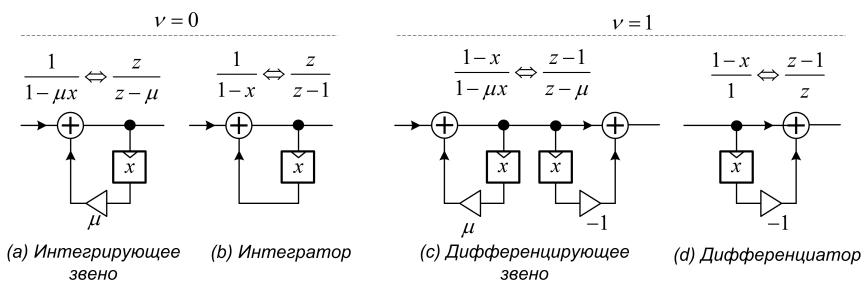


Рис. 14. Интеграторы и дифференциаторы

ЗАДАНИЕ 1

*1.1. Откройте диалог настройки фильтра. Выберите в лист-боксе *Transfer function type* опцию *IIR (poles and zeros)*. Появятся поля – *Numerator coefficients* и *Denominator coefficients*. В них задаются коэффициенты многочленов

$h(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \dots + h_nx^n$ и $g(x)$ в числителе и знаменателе импульсной реакции $H(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ в формате $[h_0 \ h_1 \ h_2 \dots h_n]$ – в квадратных скобках с пробелами-разделителями.

*1.2. Задайте параметры интегрирующего звена с полюсом $\mu = 0.7$: $h = [1]$, $g = [1 \ -0.7]$. Запустите его синтез по клавише *Apply*. Теперь можно посмотреть, что у нас получилось. На то предусмотрен инструмент *Filter Visualization Tool*, который вызывается по клавише *View Filter Response*. Он позволяет узнать о синтезированном фильтре практически все – его частотную и фазовую характеристики, групповую $-\frac{d\phi}{d\omega}$ и фазовую $-\frac{\phi}{\omega}$ задержки, импульсную реакцию и переходную характеристику, карту нулей-полюсов. Чтобы обозреть спектр возможностей, по-нажмайтесь на все клавиши в панели инструментов. Оси частот на графиках размечены от 0 до 1 – волях от границы π полосы Найквиста. В герцах эта граница составляет $1/2$, так что точка 1 на оси отвечает частота в $1/2$ – половина частоты дискретизации. По вертикали на частотных характеристиках даны значения коэффициента передачи в децибелах $-20 \lg K$. Временные оси размечены в тактах – интервалах дискретизации.

Оправляясь от карты нулей-полюсов, уясните формы частотной и фазовой характеристики.

*1.3. По частотной характеристике измерьте коэффициенты передачи фильтра на нулевой частоте и на границе полосы Найквиста. *Децибели dB переводятся в разы набором $10^{\wedge}(dB/20)$ в окне команд Matlab*. Измерьте граничную частоту фильтра f_0 по уровню -3 dB и его постоянную времени τ – время спада импульсной реакции до уровня $\frac{1}{e} = 0.37$. Связаны ли они формулой $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$?

*1.4. Подавая на вход фильтра сигналы PULSE и STEP, снимите осциллограммы его импульсной реакции и переходной характеристики.

Подав на вход свип-сигнал CHIRP, изучите частотную характеристику. Усиление на нулевой частоте фильтра разумно скомпенсировать, задав ослабление -10.46 dB в блоке-аттенюаторе Gain.

Подав на вход гармонический сигнал SYN оцените коэффициенты передачи на частотах $0.05/2$ и $0.95/2$.

*1.5. Реализуйте двукратную ($D = 2$) децимацию выходно-

го потока фильтра, установив значение 2 в блоке *Decimator* и осциллографе *Dcm Scope*. Посмотрите сигналы на выходе дециматора на частотах $0.05/2$ и $0.95/2$. Объясните совпадение форм сигналов и различие их амплитуд.

*1.6. Подайте на вход фильтра шум *NOISE*. Сравните спектральные плотности шума на входе и выходе. Оцените уровни подавления шума на границах ± 500 и в середине ± 250 полосы Найквиста. Измерьте уровни подавления шума в точках ± 250 после децимации.

*1.7. Вернувшись к диалогу настройки фильтра, исследуйте поведение его частотных и временных характеристик при стремлении полюса μ к единице. Проанализируйте характеристики идеального интегратора с $\mu = 1$. Изучите осциллограммы его импульсной реакции и переходной характеристики.

*1.8. Реализуйте дифференцирующее звено с полюсом $\mu = 0.7$: $h = [1 - 1]$ и $g = [1 - 0.7]$. Проверьте вид карты нулей-полюсов. Измерьте верхнюю граничную частоту f_0 по уровню -3 dB и время τ спада переходной характеристики до уровня $1 - \frac{1}{e} \simeq 0.63$. Проверьте формулу $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$. Исследуйте поведение частотных и временных характеристик при $\mu \rightarrow 0$ – переход от дифференцирующего звена к идеальному дифференциатору. Изучите осциллограммы временных характеристик дифференцирующего звена с $\mu = 0.7$ и дифференциатора с $\mu = 0$.

*1.9. Реализуйте цифровой фазовращатель – звено

$$H(x) = \frac{-\mu + x}{1 - \mu x} \Leftrightarrow H(z) = \frac{1 - \mu z}{z - \mu},$$

с полюсом μ и нулем $\frac{1}{\mu}$. Для этого задайте $h = [-0.7 1]$, $g = [1 - 0.7]$. Объясните природу равномерности частотной характеристики – несложная геометрическая задачка. Изучите поведение фазовой характеристики при стремлении μ к нулю. На досуге подумайте, почему все фильтры, у которых блок коэффициентов числителя – это зеркальное отражение блока коэффициентов знаменателя: $h(x) = x^n g(\frac{1}{x})$, где n – степень $g(x)$, являются все пропускающими (*all pass*) – обладая равномерной частотной характеристикой.

7.3. Звенья второго порядка

Эти звенья реализуют пару сопряженных полюсов $-\mu = r_\mu e^{j\varphi_\mu}$ и $\mu^* = r_\mu e^{-j\varphi_\mu}$, $r_\mu = |\mu| = \sqrt{\mu\mu^*}$, $\varphi_\mu = \arg(\mu)$, внутри единичного круга z -плоскости. Многочлен $g(x)$ в знаменателе их импульсной реакции функции имеет вид

$$g(x) = (1 - \mu x)(1 - \mu^* x) = 1 - (\mu + \mu^*)x + r_\mu^2 x^2 = 1 - 2r_\mu \cos \varphi_\mu x + r_\mu^2 x^2$$

с единичным младшим коэффициентом. Нули могут быть произвольными. Если это сопряженная пара $-\nu$ и ν^* с $r_\nu = |\nu|$, $\varphi_\nu = \arg(\nu)$, то

$$h(x) = 1 - 2r_\nu \cos \varphi_\nu x + r_\nu^2 x^2.$$

Паре вещественных нулей ν_1 и ν_2 отвечает числитель $h(x) = 1 - (\nu_1 + \nu_2)x + \nu_1 \nu_2 x^2$. Эквиваленты аналоговых звеньев второго порядка получаются когда эти нули находятся либо при $z = 1$ – нулевая частота, либо при $z = -1$ – граница полосы Найквиста. Импульсные реакции этих фильтров имеют вид:

$$H_{\Phi\text{нч}}(x) = \frac{1 + 2x + x^2}{1 - 2r_\mu \cos \varphi_\mu x + r_\mu^2 x^2} \Rightarrow \text{оба нуля при } z = -1,$$

$$H_{\Pi\Phi}(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 2r_\mu \cos \varphi_\mu x + r_\mu^2 x^2} \Rightarrow \text{по нулю в точках } z = \pm 1,$$

$$H_{\Phi\text{вч}}(x) = \frac{1 - 2x + x^2}{1 - 2r_\mu \cos \varphi_\mu x + r_\mu^2 x^2} \Rightarrow \text{оба нуля при } z = +1.$$

Распространены чисто рекурсивное (*all poles*) звено $H(x) = \frac{1}{1 - 2r_\mu \cos \varphi_\mu x + r_\mu^2 x^2}$ с парой нулей в нуле и чисто нерекурсивное (*all zeros*) $H(x) = \frac{1 - 2r_\nu \cos \varphi_\nu x + r_\nu^2 x^2}{1}$ с двумя сопряженными нулями и парой полюсов в нуле.

ЗАДАНИЕ 2

*2.1. Реализуйте полосовое звено с $r_\mu = 0.9$, $\varphi_\mu = \frac{\pi}{4}$: $h = [1 \ 0 \ -1]$ и $g = [1 \ -0.9 * \text{sqrt}(2) \ 0.9^2]$. Полюбуйтесь картой его полюсов и характеристиками во временной и частотной областях. Оцените резонансную частоту f_0 , усиление на ней, двухстороннюю полосу пропускания Δf по уровню -3 dB. Оцените

эквивалентную добротность $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$. Снимите осциллограммы временных откликов. Изучите спектральную плотность шума на выходе.

*2.2. Изучите зависимость характеристик фильтра от r_μ , приближая его к единице. Изучите эффекты от трансформации полосового фильтра в фильтры нижних, верхних частот, чисто рекурсивный фильтр с нулями в нуле.

*2.3. Реализуйте фильтр с парой сопряженных нулей $g = [1 - r_\nu * (2 \cos \varphi_\nu) r_\nu^2]$ и потратьте разумное время на изучение их влияния на свойства фильтра. Интересно изучить последствия изменения r_ν от 0.5 до 4 при $2 \cos \varphi_\nu = \sqrt{2}$ и последствия изменения угла $2 \cos \varphi_\nu = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, -1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}$. Наблюдаемые формы частотных характеристик интересы не сами по себе – а как элементарные вклады, перемножение которых и дает красивые частотные характеристики сложных многополюсных фильтров.

*2.4. Проверьте, что звено с $r_\mu = 0.8$ и $r_\nu = \frac{1}{r_\mu} = 1.25$ является *all pass* фильтром с равномерной частотной характеристикой при любых одинаковых φ_μ, φ_ν . Воспользуйтесь случаем взглянуть на его фазовую характеристику. Из звеньев этого типа строится цифровые эквалайзеры для выравнивания групповых задержек.

7.4. Нерекурсивные FIR фильтры

Все полюсы фильтров этого типа с $g(x) = 1$ находятся строго в точке $z = 0$. В игре участвуют только нули – *all zeros filters*. Это делает их абсолютно устойчивыми, снижая требования к точности задания коэффициентов и погрешностям вычислений. Главный недостаток их в том, что для достижения хороших характеристик порою требуется слишком большое количество нулей – большое число умножений. Фильтры этого класса не имеют аналоговых прототипов, будучи исключительно цифровым изобретением.

Предельно просты гребенчатые (*comb*) фильтры с $H(x) = h(x) = 1 - x^N$. Для их реализации достаточен $(N - 1)$ -каскадный сдвиговый регистр и один сумматор. Нули передаточной функции $H(z) = \frac{z^N - 1}{z^N}$ гребенчатого фильтра – это набор $\nu_k = e^{j \frac{2\pi}{N} k}$ комплексных корней из единицы степени N .

После такого фильтра часто прибегают к децимации по индексу D . Если $N = MD$, то удается сэкономить и на регистре, поставив дециматор на входе, перед более простым гребенчатым фильтром с $H(x) = 1 - x^M$ с меньшей длиной регистра $M = \frac{N}{D}$, работающим на пониженной частоте.

На втором по сложности месте стоят фильтры с прямоугольной импульсной реакцией

$$H(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{N-1} = \frac{1 - x^N}{1 - x} \Leftrightarrow H(z) = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - 1}{z - 1}.$$

Их нули – это те же корни из единицы, кроме одного – тривиального $\nu_0 = 1$. При большой длине N они оказываются крайне узкополосными фильтрами низких частот. Фактически такой фильтр вычисляет нулевой коэффициент N -точечного дискретного преобразования Фурье в скользящем прямоугольном окне.

Как видно из формы импульсной реакции, прямоугольный фильтр допускает простую реализацию каскадным соединением интегратора с $H(x) = \frac{1}{1-x}$ и гребенчатого фильтра с $H(x) = 1 - x^N$. Каскадное соединение K -пар интегратор-гребенчатый фильтр приводит к распространенному семейству CIC-фильтров (*Cascaded Integrator Comb*) с импульсными реакциями

$$H(x) = \left[\frac{1 - x^N}{1 - x} \right]^K.$$

Область применения всех этих не требующих умножений решений – крайне узкополосные фильтры высоких порядков N .

В общем виде задача синтеза FIR-фильтра сводится к выбору оконной функции $h(x)$, определяющей набор весовых коэффициентов h_j , с которыми суммируются выборки сигнала.

Выбор формы окна – это классическая проблема спектрального анализа. Возможны два альтернативные подхода к ее решению – можно волевым образом задавать окно во временной области и пытаться достичь приемлемого вида его спектра, а можно задавать окно в частотной области и добиваться адекватности его временной формы. Сложность в том, что требования, накладываемые во временной и частотной областях, несовместимы. Прямоугольное окно идеально для временной области, но его спектр спадает слишком медленно. При дискретизации спектр

этот искажается элайзингом, что и обуславливает деградацию характеристик фильтров. Их отличает медленный рост затухания в дальней зоне. Можно исключить элайзинг, выбрав окно с компактным спектром. Проблему создаст то, что его временная форма окажется неограниченной во времени.

В синтезе фильтров используются практически все временные окна, применяемые в спектральном анализе. Популярны синусное окно, окно в форме «приподнятый косинус» Ханна, треугольное окно Барлетта.

Подход к синтезу фильтра по частотному окну иллюстрирует рис. 15. В полосе Найквиста $f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ выбирается желаемая форма будущей частотной характеристики. Фиксируется порядок $2N + 1$ синтезируемого фильтра и выбранная частотная характеристика дискретизуется в $2N + 1$ -ой точке. Коэффициенты $h_m = h_{-m}$ импульсной реакции фильтра определяются по выборочным значениям $x_k = x_{-k}$ дискретным преобразованием Фурье:

$$h_m = x_0 + 2 \sum_{k=1}^N x_k \cos\left(\frac{2\pi}{2N+1} mk\right).$$

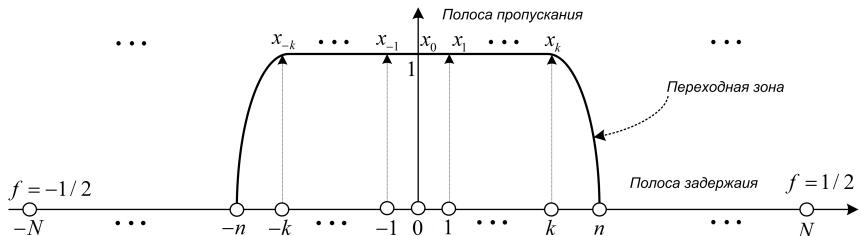


Рис. 15. К синтезу фильтра по частотному окну

Форма окна на рисунке определена границами k и n переходной зоны от полосы пропускания до полосы задержания. Внутри этой зоны она может быть задана по разному. В случае фильтров с частотным окном типа корень из приподнятого косинуса (*root of raised cosine*) используется сглаживание четвертью периода гармонического колебания.

Временная форма выбранного частотного окна на самом деле некомпактна. Применив дискретное преобразование Фурье мы

искусственно ограничили ее до интервала $t \in [-N, N]$ – наложили прямоугольное временное окно. Это приведет к искажению частной характеристики за счет ее циклической свертки с ядром Дирихле прямоугольного окна.

Импульсные реакции синтезированных по окнам фильтров оказываются симметричными – $h_k = h_{N-k}$. Это позволяет вдвое сэкономить на перемножителях при реализации в прямой форме. Вместо того, чтобы умножать два выборочные значения на равные коэффициенты $h_k = h_{N-k}$ и отправлять результаты в цепочку сумматоров, рис. 16а, можно сначала сложить их, а затем умножить сумму на h_k , рис. 16б. Это так называемая симметричная прямая форма.

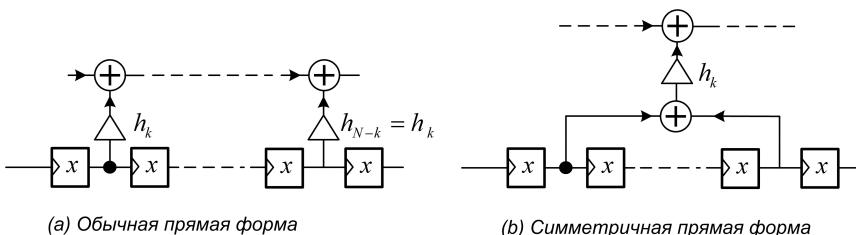


Рис. 16. Обычная и симметричная прямые формы

ЗАДАНИЕ 3

*3.1. Реализуйте гребенчатый фильтр порядка $N = 3$ с $H(x) = 1 - x^3$ ($h = [1 \ 0 \ -1]$, $g = [1]$). Проанализируйте его частотные и временные характеристики. Изучите их поведение при увеличении порядка фильтра, добавляя нули в записи числителя h . Обратите внимание, что уровень $+6 \text{ dB}$ усиления в максимуме не зависит от N . На досуге попытайтесь объяснить это явление.

*3.2. Реализуйте фильтр порядка $N = 7$ с прямоугольной импульсной реакцией: $h = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $g = [1]$. Измерьте все четыре пиковые значения коэффициента передачи. Оцените уровни затухания в первых трех побочных пиках. Убедитесь, что эти уровни не зависят от порядка N . Убедитесь, что тот же самый фильтр дают настройки $h = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0, -1]$, $g = [1 \ -1]$ – каскадное соединение интегратора и гребенчатого фильтра. Изучи-

те осцилограммы временных характеристик. Посмотрите на результат прохождения свип-сигнала.

*3.3. Организуйте децимацию выхода этого фильтра по индексу $D = 4$. Сравните спектры мощности шума на выходе до и после децимации. Усиление фильтра на нулевой частоте лучше скомпенсировать аттенюатором. Повторите это для фильтра с $h = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Почему плотность шума после децимации стала равномерной?

*3.4. Подайте на вход гармонический сигнал частоты $0.126/2$ (около $\frac{\pi}{8}$ в радианах). По осцилограммам на входе и выходе оцените коэффициент передачи. Запомните амплитуду и временную форму (число выборок на периоде) сигнала после децимации. Сравните их с формами и амплитудами сигналов при входных частотах $0.5/2 \pm 0.126/2$ ($\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$) и $1/2 \pm 0.126/2$ ($\pi \pm \frac{\pi}{8}$). Оцените относительные уровни помех, «просачивающихся» при децимации из высших зон Найквиста.

*3.5. Изучите фильтры с временными окнами. Установите *Transfer function type = FIR (all zeros)* и *Filter structure = Direct form symmetric*. В поле *Numerator coefficients* занесите `twdw(20,'r')`.

Это вызов *m*-функции `twdw(N,'r')`, которая возвращает $(2N + 1)$ -блок коэффициентов прямоугольного ('r') окна. Кроме того, она «умеет» строить треугольное ('t') окно, гармоническую полуволну – 's' и приподнятый косинус – 'c'. Все окна нормированы на единичную сумму коэффициентов. При желании можно вывести их графики, набрав в окне команд `plot(twdw(N,'r'))`.

Сравните характеристики оконных фильтров порядка $2N + 1 = 41$ с различными типами окон, измерив для каждого из них полуширину главного пика, уровень затухания в первом побочном пике и на границе полосы Найквиста. Изучите временные характеристики и карты нулей. Повторите все это при $N = 40$.

*3.6. Изучите фильтры с частными окнами. *m*-функция `fwdw(N,k,n)` возвращает нормированный на единичную сумму $(2N + 1)$ -блок коэффициентов фильтра, построенный Фурье преобразованием частотного окна на рис. 15. Форму этого окна можно посмотреть, набрав `plot(ach(N,k,n))`. Вызов `plot(fwdw(N,k,n))` выведет график блока коэффициентов.

Реализуйте прямоугольный фильтр с полосой в половину полосы Найквиста, набрав в поле *Numerator coefficients* `fwdw(20,10,10)`. Посмотрите его частные и временные характеристики, карту нулей. Измерьте затухание в первом побочном пике и на границе полосы Найквиста. Повторите эти измерения, изменяя интервал сглаживания – $k = 8, 6, 4, 2, 0$. Как эти параметры изменяются, если полосу n сужать при фиксированной ширине интервала сглаживания – $4 = n - k$? Увеличивая порядок N , синтезируйте фильтр с $k = \frac{N}{4}$, $n = \frac{N}{2}$, который обеспечивает затухание 80 dB в дальней зоне. Станет ясно, что высокие децибели затухания у FIR-фильтров покупаются ничем иным, как густотой нулей на единичной окружности в полосе задержания.

*3.7. Откройте модель **cic.mdl** 4-звенного CIC-фильтра из блоков IC (Integrator/Comb) с задержкой $N = 12$. Аттенюаторы на выходах компенсируют усиление блоков. Изучите временные (PULSE, STEP) и частотные (CHIRP) характеристики блоков и фильтра в целом. По графику спектральной плотности шума оцените ширину главного пика и уровни затухания в первых побочных пиках и пиках вблизи границы полосы Найквиста. Изучите спектр мощности после шестикратной децимации по выходу. Сравнив уровни сигнала на выходе дециматора при частотах $1.01/24$ ($\simeq \frac{\pi}{12}$) и $1/6 \pm 1.01/24$ ($\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$), оцените коэффициент подавления помехи из первой зоны Найквиста.

7.5. FDATool Matlab

Все «познания» Matlab в области синтеза фильтров воплощены в инструменте FDATool (*Filter Design and Analysis Tool*). Познания эти широки. Поэтому и инструмент этот сложен – в него заложены практически все известные методы синтеза. Для грамотного пользования им не лишне хотя бы поверхностное знакомство с реализованными в нем методами. Наша задача – познакомиться с FDATool на простых примерах, не требующих пространных пояснений.

ЗАДАНИЕ 4

*4.1. Изучим синтезатор *equiripple* FIR-фильтров. Откройте модель **fda.mdl** и диалог настройки фильтра в ней. Это и есть окно FDATool. Установите в нем *Response type = Lowpas, Design*

Method = FIR/Equiripple. Требования к частотной характеристике задаются границами переходной зоны от *wpass* до *wstop*, неравномерностью в полосе пропускания *Apass* и подавлением в полосе задержания *Astop*. Можно задать порядок синтезируемого фильтра явно через *Filter order = Specify order* или оставить порядок на усмотрение синтезатора: *Filter order = Minimal order*.

Для начала синтезируйте фильтр минимального порядка с *wpass*=0.4, *wstop*=0.5 (от границы полосы Найквиста), *Apass*=1, *Astop*=60. Синтез запускается по клавише *Design Filter* внизу. Изучите результат уже знакомыми средствами – карта нулей, частотные и временные характеристики. Потратьте некоторое время на изучение зависимости результатов синтеза от требований технического задания. Попробуйте волевым образом ограничивать порядок синтезированного фильтра и оценить последствия.

*4.2. Изучим синтезатор типовых IIR-фильтров - Баттерворта, Чебышева типов I и II и эллиптических. Все это цифровые эквиваленты аналоговых прототипов. Достаточно изменить *Design Method* на, к примеру, *IIR/Butterworth*. Набор требований технического задания тот же – *wpass*, *wstop*, *Apass*, *Astop*. В порядке упражнения, синтезируйте все варианты фильтров с *wpass*=0.4, *wstop*=0.5, *Apass* = 1, *Astop*=60. Изучите результаты.

Посмотрите на списки коэффициентов. Они уже разбиты оптимальным образом по секциям второго порядка – три коэффициента для числителя, и три – для знаменателя. У фильтров Баттервортса и Чебышева типа I все нули в точке $z = -1$. Поэтому коэффициенты числителей тривиальны – $h = [1 \ 2 \ 1]$. Для реализации такой секции требуется всего два перемножителя. Умножение на 2 не считается.

При наличии любопытства возиться с этой игрушкой можно бесконечно, в отсутствие такового – не имеет смысла.

*4.3. Синтезируйте FIR фильтр «на продажу» с характеристиками *wpass*=0.3, *wstop*=0.5, *Apass* = 1, *Astop*=80 и все четыре варианта IIR фильтров с теми же характеристиками. Сравните порядки – количества нулей и/или полюсов. Хорошая иллюстрация преимущества IIR-решений.

Учебное издание

Григорьев Александр Алексеевич

ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
