Длинные линии и параметры рассеяния

1. Телеграфные уравнения

В обсуждаемой здесь модели свойства длинной линии характеризуются набором из четырех «погонных» (отнесенных к единице длины) параметров: L – индуктивность на метр, R – омическое сопротивление проводников на метр, C – емкость между проводниками на метр и G – проводимость изоляции на метр.

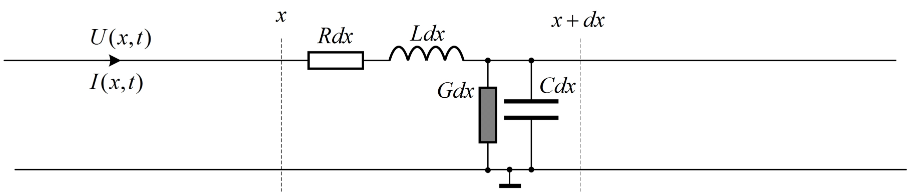


Рис. 1. Фрагмент длинной линии

Падение напряжения U на участке линии от сечения x до сечения $x + dx$ вызвано протеканием тока I через сопротивление $R\,dx$ и индуктивность $L\,dx$:

$$-dU(x,t) = U(x,t) - U(x + d\,x, t) = (L\,dx)\frac{dI(x,t)}{dt} + (R\,dx)I(x,t).$$

В свою очередь, падение тока на этом участке вызвано его утечкой через проводимость $G\,dx$ и емкость $C\,dx$:

$$-dI(x,t) = I(x,t) - I(x + d\,x, t) = (C\,dx)\frac{dI(U,t)}{dt} + (G\,dx)U(x,t).$$

Результатом становятся известные телеграфные уравнения для полей $U(x,t)$, $I(x,t)$ напряжения и тока вдоль линии:

$$-\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = L\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + RI(x,t), \tag{1}$$

$$-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = C\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + GU(x,t).$$

Характерные комбинации погонных параметров L, C, R, G дают начало ряду важных обобщенных параметров длинной линии.

Параметр $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (в метрах в секунду) имеет смысл скорости распространения волн вдоль линии. Параметр $w = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (в омах) – это волновое сопротивление линии.

Параметры $\delta_L = \frac{R}{L}$ и $\delta_C = \frac{G}{C}$ (в обратных секундах) характеризуют скорости затухания волн во времени. Наконец, параметры $\beta_L = \frac{\delta_L}{v} = \frac{R}{w}$ и $\beta_C = \frac{\delta_C}{v} = Gw$ (в обратных метрах) – скорости затухания волн в пространстве – вдоль оси x.

Далее будут обсуждаться исключительно длинные линии, удовлетворяющие условию Хевисайда:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad \Rightarrow \quad \beta_L = \beta_C = \beta = \frac{R}{w} = Gw.$$

При выполнении этого условия линия оказывается линией без дисперсии – скорость распространения гармонической волны в ней составляет $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и не зависит от частоты.

При выполнении условия Хевисайда переход к обобщенным параметрам в телеграфных уравнениях (1) приводит их к следующей приятной на вид форме:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = -\Big(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big) wI(x,t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial wI(x,t)}{\partial x} = -\Big(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big) U(x,t),$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad w = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \beta = \frac{R}{w} = Gw.$$

2. Волновые параметры

Система из двух уравнений (2), связывающих между собой поля напряжения $U(x,t)$ и тока $I(x,t)$, расщепляется на два независимые уравнения переходом к параметрам

$$A(x,t) = \frac{U(x,t) + wI(x,t)}{2}; \quad B(x,t) = \frac{U(x,t) - wI(x,t)}{2}.$$

Сложение и вычитание левых и правых частей (2) дает пару независимых уравнений

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} = -\Big(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big) A(x,t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = +\Big(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \beta\Big) B(x,t)$$

с почти очевидными решениями

$$A(x,t) = e^{-\beta x}\tilde{A}(x - vt),$$

$$B(x,t) = e^{+\beta x}\tilde{B}(x + vt),$$

где $\tilde{A}(u)$ и $\tilde{B}(u)$ произвольные дифференцируемые по своему аргументу u функции.

Решения $A(x,t)$ и $B(x,t)$ – это бегущие вдоль линии волны. $A(x,t)$ описывает падающую волну, которая бежит со скоростью v в положительном направлении оси x, затухая по дороге по закону $e^{-\beta x}$. Аналогично, $B(x,t)$ – это отраженная волна, которая бежит и затухает в противоположном направлении.

Параметры рассеяния $A(x,t)$ и $B(x,t)$ – это амплитуды падающей и отраженной волн в точке (x,t) пространства-времени.

Пусть в линии присутствует только подающая волна $A(x,t)$, то есть $B(x,t) = \frac{U(x,t) - wI(x,t)}{2} = 0$. Это означает, что поля напряжения и тока в волне $A(x,t)$ связаны законом Ома:

$$U(x,t) = wI(x,t); \quad A(x,t) = \frac{U(x,t) + wI(x,t)}{2} = U(x,t) = wI(x,t).$$

При наличии только отраженной волны, когда $A(x,t) = \frac{U(x,t)+wI(x,t)}{2} = 0$, аналогичная связь отличается только знаком:

$$U(x,t) = -wI(x,t); \quad B(x,t) = \frac{U(x,t) - wI(x,t)}{2} = U(x,t) = -wI(x,t).$$

В обоих типах волн направление тока совпадает с направлением распространения. В «чистых» ситуациях, когда имеется только падающая или только отраженная волна, амплитуда волны – это одновременно и напряжение на линии, и плюс-минус произведение тока в линии на волновое сопротивление.

В общем случае в линии могут параллельно существовать как падающая волна $A(x,t)$, так и отраженная $B(x,t)$. Напряжение на линии оказывается тогда суммой напряжений в падающей и отраженной волнах

$$U(x,t) = A(x,t) + B(x,t),$$

а ток – разностью токов в них

$$I(x,t) = \frac{A(x,t) - B(x,t)}{w}.$$

Переход к параметрам рассеяния позволяет однозначно разделить наблюдаемое на линии напряжение $U(x,t)$ на части $A(x,t)$ и $B(x,t)$, имеющие смысл напряжений в падающей и отраженной волнах.

В присутствии обоих волн простая связь между напряжением и током в линии теряется:

$$R(x,t) = \frac{U(x,t)}{I(x,t)} = w\frac{A(x,t) + B(x,t)}{A(x,t) - B(x,t)} = w\frac{1 + \rho(x,t)}{1 - \rho(x,t)}.$$

Параметр

$$\rho(x,t) = \frac{B(x,t)}{A(x,t)} = \frac{R(x,t) - w}{R(x,t) + w},$$

определяющий отношение амплитуд отраженной и падающей волны в точке (x,t) – это коэффициент отражения.

Замечательно, что мгновенная мощность в линии $P(x,t) = U(x,t)I(x,t)$

$$P(x,t) = \frac{A^2(x,t)}{w} - \frac{B^2(x,t)}{w} = \frac{A^2(x,t)}{w}(1 - \rho^2)$$

оказывается разностью мощностей $\frac{A^2(x,t)}{w}$ и $\frac{B^2(x,t)}{w}$, независимо переносимых падающей и отраженной волнами в противоположных направлениях.

3. Гармонические волны

Будем рассматривать гармонические волны, колеблющиеся во времени по закону $e^{j\omega t}$ с частотой ω. Для этого положим

$$A(x,t) = a(x)e^{j\omega t}, \quad B(x,t) = b(x)e^{j\omega t}.$$

Здесь $a(x) = |a|e^{j\varphi_a}$ и $b(x) = |b|e^{j\varphi_b}$ – это комплексные амплитуды волн. Их модули $|a|$, $|b|$ определяют амплитуды гармонических колебаний в точке x, а аргументы φ_a, φ_b – фазы этих колебаний.

Подставив это в (3), придем к уравнениям для комплексных амплитуд волн:

$$\frac{d\,a(x)}{dx} = -\gamma a(x), \quad \frac{d\,b(x)}{dx} = +\gamma b(x),$$

где

$$\gamma = j\frac{\omega}{v} + \beta = jk + \beta \quad - \quad \text{комплексная постоянная распространения.}$$

Их общие решения имеют вид

$$a(x) = a(0)e^{-\gamma x} = a(0)e^{-jkx}e^{-\beta x}, \quad b(x) = b(0)e^{+\gamma x} = b(0)e^{+jkx}e^{+\beta x}$$

с произвольными постоянными $a(0)$, $b(0)$.

Гармонические во времени волны оказываются также и гармоническими в пространстве. Амплитуда волны a совершает гармонические колебания вдоль оси x по закону e^{-jkx} и затухает как $e^{-\beta x}$. С волной b все то же самое, только в противоположном направлении.

Параметр $k = \frac{\omega}{v}$ (в обратных метрах) известен как волновое число – пространственная частота. Амплитуда волны совершает в пространстве одно полное колебание на длине λ, такой что $k\lambda = 2\pi$. Так что длина волны связана с волновым числом как

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f}, \quad \text{где} \quad \omega = 2\pi f.$$

Таким образом, в линии существуют падающая a и отраженная b гармонические волны, комплексные амплитуды которых изменяются вдоль линии по универсальному закону $e^{-\gamma x}$, если под x понимать величину перемещения вдоль оси x в направлении распространения волны.

Комплексная амплитуда напряжения оказывается при этом равной сумме амплитуд волн

$$u(x) = a(x) + b(x),$$

а комплексная амплитуда тока – разностью

$$i(x) = \frac{a(x) - b(x)}{w}.$$

Ситуацию в сечении x линии можно описывать как классически – комплексными амплитудами напряжения u, тока i и их отношением – импедансом $Z = \frac{u}{i}$, так и волновыми параметрами (параметрами рассеяния) – амплитудами бегущих волн a, b и коэффициентом отражения $\varrho = \frac{b}{a}$. Переходы от одного описания к другому – это просто линейные преобразования между пространствами (u, i) и (a, b):

$$a = \frac{u + wi}{2}, \quad b = \frac{u - wi}{2}, \quad \varrho = \frac{b}{a} = \frac{Z - w}{Z + w}.$$

$$u = a + b, \quad iw = a - b, \quad Z = \frac{u}{i} = w\frac{1 + \varrho}{1 - \varrho}.$$

Описание параметрами рассеяния удобно тем, что оно выделяет бегущие волны как самостоятельные физические феномены. При работе с напряжениям-токами все перемешивается.

К тому же, через параметры рассеяния просто выражается передающаяся по линии активная мощность P. Как известно, эта мощность может быть найдена через комплексные амплитуды напряжения и тока как $P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(ui^*)$, где $*$ - знак комплексного сопряжения. Но

$$wui^* = (a + b)(a^* - b^*) = |a|^2 - |b|^2 + ba^* - ab^* = |a|^2 - |b|^2 + [ba^* - (ba^*)^*].$$

Последнее слагаемое в квадратных скобках чисто мнимо – разность между числом ba^* и его комплексным сопряжением. Поэтому:

$$P = \frac{\mathrm{Re}(ui^*)}{2} = \frac{|a|^2}{2w} - \frac{|b|^2}{2w} = \frac{|a|^2}{2w}(1 - |\rho|^2).$$

Таким образом, $P_a = \frac{|a|^2}{2w}$ – это активная мощность, переносимая падающей волной, $P_b = \frac{|b|^2}{2w}$ – мощность в отраженной волне, а $|\rho|^2$ – коэффициент отражения мощности.

В микроволновой технике выражена тенденция к переходу от измерения напряжений и токов к измерению мощностей. Для обозначения параметра $\tilde{a} = a/\sqrt{2w}$ используют термин «амплитуда падающей мощности». Соответственно, параметр $\tilde{b} = b/\sqrt{2w}$ называют «амплитудой отраженной мощности». Обе эти амплитуды комплексны, а физический смысл мощностей имеют квадраты их модулей: $P_a = |\tilde{a}|^2$, $P_b = |\tilde{b}|^2$.

4. Несколько слов о коэффициенте отражения

При работе с волновыми параметрами безразмерный коэффициент отражения $\rho = \frac{Z-w}{Z+w}$ подменяет собой импеданс Z.

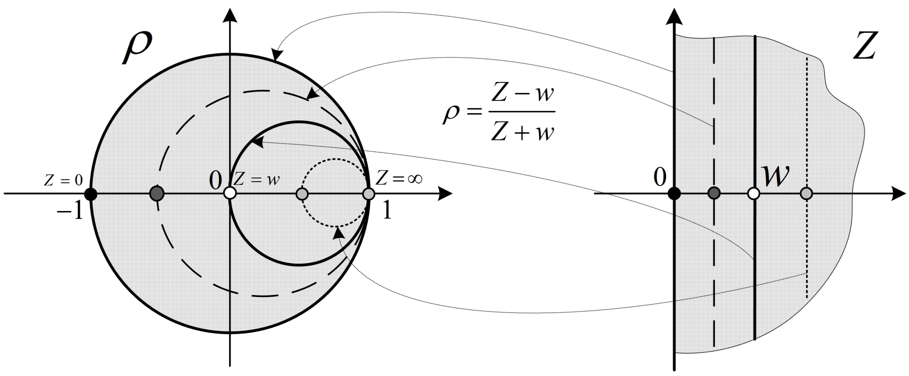


Рис. 2. Плоскости коэффициентов отражения и импедансов

Как видно из рис. 2, закон преобразования импедансов в коэффициенты отражения далеко не прост. Прежде всего, при этом преобразовании вся правая Z-полуплоскость отображается на внутренность единичного круга, причем, точка $Z = w$ переходит в центр этого круга $\rho = 0$. Мнимая ось Z-плоскости – область реактивных импедансов отображается на границу круга – единичную окружность. Нулевому импедансу отвечает точка $\varrho = -1$ на ней, бесконечному – точка $\varrho = +1$. Вообще, всякая вертикальная прямая в Z-плоскости переходит в круг, проходящий через точку $\varrho = +1$ – образ бесконечности. Выделен круг, проходящий также и через точку 0. Это образ прямой $\mathrm{Re}(Z) = w$. Прямые с $\mathrm{Re}(Z) < w$ отображаются на большие круги, содержащие выделенный круг внутри, прямые $\mathrm{Re}(Z) > w$ – на малые круги внутри выделенного круга.

Пара наблюдений, на которые стоит обратить внимание.

Преобразование $Z' = \frac{w^2}{Z}$ $(Z'Z = w^2)$ известно как *конвертирование* импеданса Z в импеданс Z'. Оно интересно тем, что переводит емкостной импеданс $Z = \frac{1}{j\omega C}$ в индуктивный $Z' = j\omega C w^2 = j\omega L$, $L = Cw^2$. Нетрудно заметить, что конвертирование импеданса эквивалентно изменению знака коэффициента отражения:

$$\rho' = \frac{Z' - w}{Z' + w} = \frac{\frac{w^2}{Z} - w}{\frac{w^2}{Z} + w} = \frac{w - Z}{w + Z} = -\rho.$$

Преобразование *инвертирования* – изменения знака импеданса $Z' = -Z$ вызывает обращение коэффициента отражения: $\rho' = \frac{1}{\rho}$.

При смене направления оси x изменяются знаки токов. Это приводит к тому, что падающая волна a переходит в отраженную b, b – в a, импеданс инвертируется, а коэффициент отражения ρ переходит в $\frac{1}{\rho}$ со значением вне единичного круга. Так что, если модуль измеренного Вами коэффициента отражения превышает единицу, знайте – Вы просто перепутали падающую волну с отраженной.

5. Стоячая волна

Когда обе бегущие волны присутствуют в линии одновременно, напряжение на ней

$$|u(x)| = |a(0)e^{-\gamma x} + b(0)e^{+\gamma x}| = |a(0)e^{-\beta x}e^{-jkx} + b(0)e^{+\beta x}e^{+jkx}|$$

осциллирует вдоль линии по замысловатому закону. Это явление стоячей волны – результат наложения падающей и отраженной волн.

Напряжение на линии – это модуль комплексной амплитуды напряжения $u(x)$. Амплитуда же эта является суммой двух комплексных векторов. Первый из них – $a(0)e^{-\beta x}e^{-jkx} = a(x)e^{-jkx}$ при движении вдоль x укорачивается как $e^{-\beta x}$ и вращается по часовой стрелке, совершая один полный оборот на длине волны. Второй – $b(0)e^{+\beta x}e^{+jkx} = b(x)e^{+jkx}$ – удлиняется и вращается в противоположную сторону. Зависимость напряжения на линии от координаты x повторяет зависимость от x длины суммарного вектора. Она не является строго гармонической.

Когда направления векторов совпадают, их длины складываются. Наблюдается максимум напряжения с величиной $|a(x)| + |b(x)|$. Это *пучность* стоячей волны. Когда же векторы направлены в противоположные стороны, их длины вычитаются. Наблюдается *узел* стоячей волны – минимум напряжения с уровнем $||a(x)| - |b(x)||$. Расстояние Δl между соседними узлом и пучностью определяется очевидным условием $k\Delta l = \frac{\pi}{2}$ и равно четверти длины волны.

В линии без потерь модули амплитуд волн $a(x)$, $b(x)$ постоянны. Отношение напряжений в пучности и узле составляет при этом $\frac{|a|+|b|}{|a|-|b|} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}$. Это коэффициент стоячей волны, измеряя который судят о модуле коэффициента отражения $\rho = \frac{b}{a}$. Если линия согласована по выходу, $\rho = 0$, отраженной волны нет, напряжения вдоль линии неизменно, коэффициент стоячей волны равен 1. Чем хуже с согласованием, тем заметнее различие между напряжениями в пучностях и узлах и выше значение коэффициента стоячей волны. При $|\rho| = 1$ (короткое замыкание или холостой ход на выходе) коэффициент стоячей волны бесконечен. Напряжения в узлах падают до нуля.

6. Нагруженная линия

Обратимся к рис. 3, на котором показана линия длины l нагруженная на импеданс Z_l. Пусть a и b – амплитуды падающей и отраженной волн на входе линии, при $x = 0$. На выходе, при $x = l$, эти амплитуды преобразуются в $ae^{-\gamma l}$ и $be^{\gamma l}$, соответственно.

Подключение нагрузки Z_l накладывает жесткое граничное условие на соотношение между комплексными амплитудами напряжения и тока при $x = l$: $Z_l = \frac{u(l)}{i(l)}$,

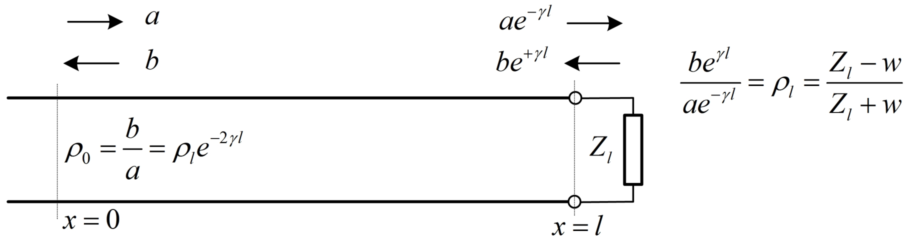


Рис. 3. Нагруженная линия

определяя тем самым значение коэффициента отражения от нагрузки

$$\rho_l = \frac{Z_l - w}{Z_l + w} = \frac{be^{\gamma l}}{ae^{-\gamma l}}.$$

Для коэффициента отражения на входе, при $x = 0$, это дает

$$\rho_0 = \frac{b}{a} = \rho_l e^{-\gamma l}.$$

Столь просто выражается зависимость коэффициента отражения от входа нагруженной линии от ее длины l.

Если линия согласована на выходе, то есть $Z_l = w$, то коэффициента отражения ρ_l равен нулю. Вместе с ним равен нулю и коэффициент отражения ρ_0. Так что входной импеданс согласованной линии составляет w независимо от ее длины.

Переход на выходе линии от режима короткого замыкания ($Z_l = 0$; $\rho_l = -1$) к режиму холостого хода ($Z_l = \infty$; $\rho_l = +1$) сопровождается изменением знака коэффициента отражения. Вместе с ним изменяется и знак коэффициента отражения от входа. Это вызывает конвертирование входного импеданса линии. Так что имеет место следующий общий факт:

$$Z_0|_{Z_l=0} Z_0|_{Z_l=\infty} = w^2.$$

Произведение входного импеданса линии в режиме холостого хода на входной импеданс в режиме короткого замыкания равно квадрату волнового сопротивления. Факт этот используют для экспериментального измерения волнового сопротивления линии путем измерения ее входных импедансов в двух режимах – холостого хода и короткого замыкания на выходе.

Сама же зависимость входного импеданса от длины линии оказывается совсем не простой:

$$Z_0 = w\frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} = w\frac{1 + \rho_l e^{-2\gamma l}}{1 - \rho_l e^{-2\gamma l}} = w\frac{e^{+\gamma l} + \rho_l e^{-\gamma l}}{e^{+\gamma l} - \rho_l e^{-\gamma l}}.$$

Для линии без потерь ($\beta = 0$, $\gamma = jk$) отсюда получаются следующие выражения для входных импедансов линии в режимах короткого замыкания ($\rho_l = -1$) и холостого хода ($\rho_l = 1$):

$$Z_0|_{Z_l=0} = jw \operatorname{tg} kl, \quad Z_0|_{Z_l=0} = -jw \operatorname{ctg} kl.$$

Важное прикладное значение имеют четверть волновые отрезки длинных линий с $kl = \frac{\pi}{2}$, $l = \frac{\lambda}{4}$. Такая линия преобразует коэффициент отражения от нагрузки ρ_l в коэффициент

$$\rho_0 = \rho_l e^{-2\gamma l} = \rho_l e^{-2jkl} e^{-2\beta l} = -\rho_l e^{-\beta\lambda/2}.$$

Четверть волновая линия без потерь инвертирует знак коэффициента отражения: $\rho_0 = -\rho_l$. А это дает эффект конвертирования импедансов. Так что для четверть волнового отрезка без потерь произведение входного импеданса на импеданс нагрузки есть квадрат волнового сопротивления:

$$Z_0 Z_l = w^2$$

Основное применение этого явления – согласование сопротивлений. Чтобы согласовать источник с сопротивлением R_s с нагрузкой R_l следует соединить их четверть волновым отрезком с $w = \sqrt{R_s R_l}$. Входное сопротивление линии $R_0 = \frac{w^2}{R_l}$ как раз совпадет с сопротивлением источника R_s.

В режиме короткого замыкания на выходе входной импеданс четверть волнового отрезка без потерь $Z_0|_{Z_l=0} = jw\,\mathrm{tg}\,kl|_{kl=\pi/2}$ формально бесконечен. При наличии потерь он ведет себя подобно резонатору – параллельному колебательному контуру с добротностью Q и резонансным сопротивлением R_0, обладающему импедансом

$$Z(j\omega) = \frac{R_0}{1 + j2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0}}.$$

В самом деле, пусть ω_0 – частота, на которой линия является четверть волновой, то есть $\frac{\omega_0 l}{v} = \frac{\pi}{2}$, а $\Delta\omega$ – отклонение от нее. Тогда

$$\gamma l = j\frac{\omega}{v}l + \beta l = j\frac{\omega_0 + \Delta\omega}{v}l + \beta l = j\frac{\pi}{2} + j\frac{\Delta\omega}{v}l + \beta l = j\frac{\pi}{2} + \delta.$$

Малый комплексный параметр δ приводится к виду:

$$\delta = \beta l\Big(1 + j\frac{\Delta\omega}{\beta v}\Big) = \beta l\Big(1 + j\frac{\pi}{2\beta l}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\Big) = \frac{Rl}{w}\Big(1 + 2jQ\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\Big), \quad Q = \frac{\pi}{4}\frac{1}{\beta l} = \frac{\pi}{4}\frac{w}{Rl}$$

В режиме короткого замыкания ($\rho_l = -1$) для входного импеданса получается

$$Z_0 = w\frac{e^{+\gamma l} + \rho_l e^{-\gamma l}}{e^{+\gamma l} - \rho_l e^{-\gamma l}} = w\frac{e^{j\frac{\pi}{2}+\delta} - e^{-j\frac{\pi}{2}-\delta}}{e^{j\frac{\pi}{2}+\delta} + e^{j\frac{\pi}{2}-\delta}} = w\frac{e^{\delta} + e^{\delta}}{e^{\delta} - e^{\delta}}$$

При малых δ это составляет примерно

$$Z_0 \simeq \frac{w}{\delta} = \frac{w}{\beta l\Big(1 + 2jQ\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\Big)} = \frac{\frac{w^2}{Rl}}{1 + 2jQ\frac{\Delta\omega}{\omega_0}}$$

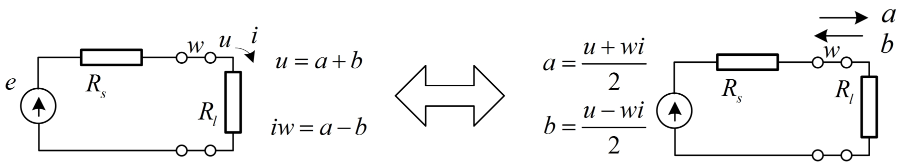
Так что в окрестности частоты резонанса $\omega_0 = \frac{\pi}{2}\frac{v}{l}$ короткозамкнутый четверть волновой отрезок ведет себя как резонатор с вещественным резонансным сопротивлением $R_0 = \frac{w^2}{Rl}$ и добротностью $Q = \frac{\pi}{4}\frac{w}{Rl}$.

7. Подключаем источник

Обсуждение подключения источника сигнала к нагрузке через длинную линию полезно начать с элементарной задачи об источнике e со внутренним сопротивлением R_s, подключенном к нагрузке R_l напрямую, то есть – через воображаемую длинную линию нулевой длины, рис. 4. Волновое сопротивление w этой линии можно выбрать как угодно.

Если подойти к этой задаче с привычными представлениями о напряжении на нагрузке u и потребляемом ею токе i, то окажется, что нагрузка и источник накладывают на значения u, i два ограничения:

$$u = iR_l, \quad u = e - iR_s,$$



(a) Через напряжение и ток (b) Через амплитуды волн

Рис. 4. Сопряжение источника с нагрузкой

которые и определяют значения u, i однозначно: $u = e\frac{R_s}{R_s+R_l}$, $u = \frac{e}{R_s+R_l}$.

Поучительно рассмотреть ту же задачу в терминах волновых параметров – параметров рассеяния. Итак, источник создает падающую волну $a = \frac{u+wi}{2}$, а нагрузка порождает отраженную волну $b = \frac{u-wi}{2}$.

Замены $u = a + b$, $iw = a - b$ переводят накладываемые источником и нагрузкой ограничения в следующие ограничения на амплитуды бегущих волн:

$$u = iR_l \quad \Rightarrow \quad b = \rho_l a, \quad \rho_l = \frac{R_l - w}{R_l - w}.$$

$$u = e - iR_s \quad \Rightarrow \quad e\frac{(1-\rho_s)}{2} = a - \rho_s b, \quad \rho_s = \frac{R_s - w}{R_s - w}. \tag{4}$$

Нагрузка определяет соотношение между амплитудами волн через коэффициент отражения ϱ_l. Если она согласована ($R_l = w$, $\varrho_l = 0$), то отраженной волны нет – $b = 0$. Согласованная нагрузка не накладывает никакого ограничения на падающую волну a, поглощая всю ее без остатка.

Согласованный источник ($R_s = w, \rho_s = 0$) вполне определяет амплитуду $a = \frac{e}{2}$ падающей волны. Мощность в ней $P = \frac{|a|^2}{2w} = \frac{|e|^2}{8w} = \frac{|e|^2}{8R_s}$ – это предельная мощность, которую только способен отдать источник с комплексной амплитудой напряжения e и внутренним сопротивлением R_s. Дальнейшее зависит от нагрузки. Согласованная нагрузка поглотит всю эту мощность без остатка. Несогласованная – вернет часть мощности в отраженной волне.

Наложенные нагрузкой и источником ограничения вполне определяют амплитуды волн. Подставив $b = \rho_l a$ в (4), найдем

$$e\frac{(1-\rho_s)}{2} = a(1 - \rho_s\rho_l).$$

Откуда

$$a = e\frac{(1-\rho_s)}{2}\frac{1}{(1-\rho_s\rho_l)}, \quad b = \rho_l a = e\frac{(1-\rho_s)}{2}\frac{\rho_l}{(1-\rho_s\rho_l)} \tag{5}$$

Для напряжения u получается

$$u = a + b = \frac{e}{2}\frac{(1-\rho_s)(1+\rho_l)}{(1-\rho_s\rho_l)} = e\frac{R_s}{R_s + R_l},$$

а для тока

$$i = \frac{a-b}{w} = \frac{e}{2w}\frac{(1-\rho_s)(1-\rho_l)}{(1-\rho_s\rho_l)} = e\frac{1}{R_s + R_l}.$$

Каждый может проверить, что результаты для тока и напряжения от волнового сопротивления w на самом деле не зависят.

Пусть $R_s = w$ – согласованный источник. Тогда $\varrho_s = 0$ и

$$u = \frac{e}{2}(1+\rho_l); \quad i = \frac{e}{2w}(1-\rho_l); \quad P = \frac{\mathrm{Re(ui*)}}{2} = \frac{|e|^2}{8w}(1-|\rho_l|^2).$$

Согласованный источник пытается отдать в нагрузку предельную для него мощность $\frac{|e|^2}{8w}$. Согласованная нагрузка ($\rho_l = 0$) поглотит всю эту мощность без остатка, несогласованная – вернет часть мощности обратно. Коэффициент $|\rho_l|^2$ как раз и определяет долю возвращенной мощности.

Включение между нагрузкой и источником линии длины l попросту преобразует коэффициент ρ_l отражения от нагрузки в коэффициент $\rho_l e^{-2\gamma l}$ отражения от входа линии. Так что формула для амплитуд падающей волны на входе линии принимает вид:

$$a(0) = \frac{e}{2}\frac{(1-\rho_s)}{(1-\rho_s\rho_l e^{-2\gamma l})}. \tag{6}$$

Амплитуда отраженной волны на входе отличается коэффициентом отражения от входа:

$$b(0) = a(0)\rho_l e^{-2\gamma l}.$$

Знание амплитуд волн на входе вполне определяет их амплитуды в любой точке x – $a(x) = a(0)e^{-\gamma x}$, $b(x) = b(0)e^{+\gamma x}$ – в том числе, на выходе

$$a(l) = a(0)e^{-\gamma l}, \quad b(l) = b(0)e^{+\gamma l}.$$

В свою очередь, амплитуды волн вполне определяют напряжения и токи в линии:

$$u(x) = a(x) + b(x), \quad i(x) = \frac{a(x) - b(x)}{w}.$$

В пределе $\omega \to 0$ от экспоненты $e^{-\gamma l} = e^{-\beta l} e^{-j\frac{\omega}{v}l}$ остается $e^{-\beta l}$. Формула (6) для амплитуды падающей волны принимает вид:

$$a(0) = \frac{e}{2}\frac{(1-\rho_s)}{(1-\rho_s\rho_l e^{-2\beta l})}$$

Заодно эта формула дает асимптотическое значение амплитуды падающей волны на входе при $t \to \infty$, когда все переходные процессы в линии завершились. Для линии без потерь ($\beta = 0$) эта формула переходит в (5). На нулевой частоте всякая линия без потерь становится короткой, с $l = 0$.

8. Переходные процессы в длинной линии

Формула (6) определяет частотно зависимый комплексный коэффициент передачи от напряжения источника e до амплитуды падающей волны $a(0)$ на входе линии:

$$\frac{a(0)}{e} = \frac{(1-\rho_s)}{2}\frac{1}{(1-\rho_s\rho_l e^{-2\gamma l})}. \tag{7}$$

Воспользовавшись формулой суммы членов геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

представим (7) рядом

$$\frac{a(0)}{e} = \frac{(1-\rho_s)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_s \rho_l e^{-2\gamma l})^n. \tag{8}$$

В результате придем к показанной на рис. 5 структуре линейного фильтра, преобразующего сигнал источника – напряжение $E(t)$ в амплитуду $A(0,t)$ падающей волны на входе линии.

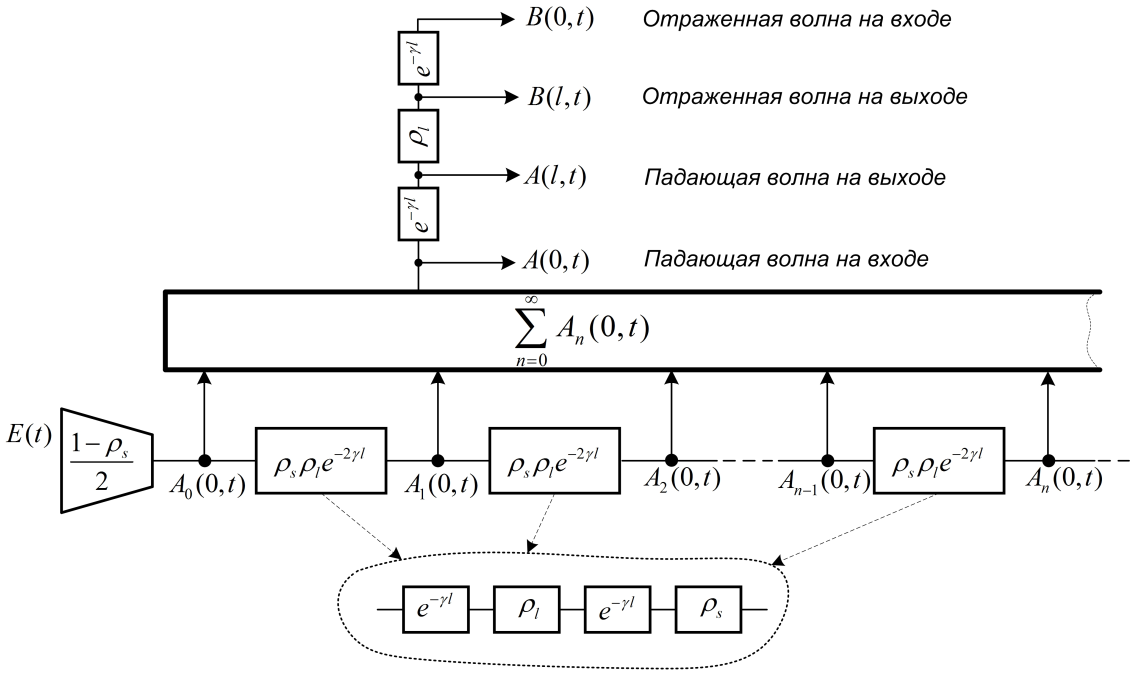


Рис. 5. Эквивалентный фильтр

Все начинается с того, что сигнал источника $E(t)$ преобразуется в первичную падающую волну $A_0(0,t)$ фильтром с комплексным коэффициентом передачи $\frac{1-\rho_s}{2}$. Далее эта волна последовательно проходит через бесконечную цепочку одинаковых блоков с коэффициентами передачи $\rho_s \rho_l e^{-2\gamma l}$, порождая на их выходах парциальные волны $A_n(0,t)$, $n = 1, 2, \ldots$. Падающая волна $A(0,t)$ на входе линии – это сумма парциальных волн.

Каждый из одинаковых блоков в цепочке описывает распространение волны от источника до нагрузки (блок $e^{-\gamma l}$), отражение ее там (блок ρ_l), возвращение волны назад, к источнику (блок $e^{-\gamma l}$) и отражение от источника (блок ρ_s).

Амплитуда $A(0,t)$ падающей волны на входе линии естественным образом, рис. 5, определяет амплитуды всех прочих волн – падающей волны на выходе $A(l,t) = A(0,t)e^{-\gamma t}$, отраженной волны на выходе $B(l,t) = \rho_l A(l,t)$ и, наконец, отраженной волны на входе $B(0,t) = B(l,t)e^{-\gamma t}$.

В стою очередь, амплитуды волн определяют напряжения и токи: $U(x,t) = A(x,t) + B(x,t)$, $I(x,t)w = A(x,t) - B(x,t)$.

Если сопротивления источника и нагрузки вещественны (R_s и R_l), то вещественны и оба коэффициента отражения ρ_l, ρ_s. При этом из всех входящих в модель на рис. 5 блоков комплексными оказываются только коэффициенты передачи блоков распространения волн

$$e^{-\gamma l} = e^{-\beta l} e^{-jkl} = e^{-\beta l} e^{-j\omega \frac{l}{v}} = e^{-\beta l} e^{-j\omega\tau},$$

где $\tau = \frac{l}{v}$ – время распространения волны вдоль линии.

Как нетрудно понять из рис. 6, блок распространения с комплексным коэффициентом передачи $e^{-\gamma l} = e^{-\beta l} e^{-j\omega\tau}$ – это просто последовательное соединение линии задержки на τ и аттенюатора с коэффициентом ослабления $e^{-\beta l}$. Линия задержки реализует оператор задержки D_τ, действующий на сигналы $u(t)$ по правилу:

$$D_\tau u(t) = u(t - \tau).$$

В случае линии без потерь блок распространения оказывается просто задержкой D_τ.

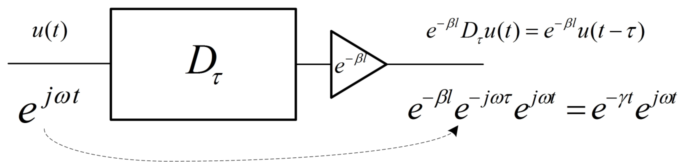


Рис. 6. Модель блока распространения

Для того, чтобы изучить переходный процессы в линии в том или ином режиме, достаточно найти временную форму $A(0,t)$ падающей волны на входе как сумму бесконечного числа парциальных волн. При этом полезно иметь в виду, что сумма эта сходится к следующему стационарному уровню амплитуды падающей волны на входе (предельный переход в (7) по $\omega \to 0$):

$$A(0,\infty) = \frac{e}{2} \frac{(1-\rho_s)}{(1-\rho_s \rho_l e^{-2\beta l})}.$$

Когда временная форма $A(0,t)$ падающей волны на входе известна, остальное достраивается несложно. Падающая волна на выходе – это результат ослабления и задержки:

$$A(l,t) = e^{-\beta l} D_\tau A(0,t).$$

Отраженная волна на выходе – результат отражения:

$$B(l,t) = \rho_l A(l,t).$$

Наконец, отраженная волна на входе – это снова результат ослабления и задержки:

$$B(0,t) = e^{-\beta l} D_\tau B(l,t).$$

Переходы от амплитуд волн к токам и напряжениям стандартны.

Ситуация радикально упрощается, когда бы один из коэффициентов отражения равен нулю – есть согласование на входе и/или выходе. Многократные переотражения тогда исключаются и выражение для коэффициента передачи упрощается к

$$\frac{a(0)}{e} = \frac{(1-\rho_s)}{2}.$$

Амплитуда падающей волны на входе устанавливается без задержек.

Наиболее прост в плане переходного процесса случай согласованной нагрузки – $\rho_l = 0$, отражения от нагрузки нет. В этом случае источник порождает первичную волну с амплитудой

$$A(0,t) = \frac{1-\rho_s}{2}E(t) = \frac{w}{R_s + w}E(t),$$

которая достигает выхода спустя τ как

$$A(l,t) = e^{-\beta l} D_\tau A(0,t)$$

и там не отражается. Это и завершает переходный процесс. Поскольку отраженной волны нет, напряжение на линии совпадает с амплитудой волны $A(x,t)$. Согласованная по выходу линия «работает» как линия задержки на τ, которая, при наличии потерь, к тому же и ослабляет сигнал в $e^{-\beta l}$ раз.

Отдаваемая источником мощность составляет

$$P = UI = \frac{A^2}{w} = \frac{E^2}{4w}(1-\varrho_s)^2 = \frac{E^2}{4R_s}(1+\varrho_s)(1-\varrho_s) = \frac{E^2}{4R_s}(1-\rho_s^2),$$

достигая предельной мощности источника $\frac{E^2}{4R_s}$ только при наличии согласования на входе, когда $\rho_s = 0$. Таким образом, чтобы источник отдавал в нагрузку предельно возможную мощность, нужны согласование как на выходе, так и на входе.

При рассогласованной нагрузке, но наличии согласования на входе ($\rho_s = 0$), в линии происходит всего одно отражение. Источник создает первичную волну $A(0,t) = \frac{E(t)}{2}$ предельной мощности, которая приходит на выход как

$$A(l,t) = e^{-\beta l} D_\tau A(0,t),$$

отражается там, порождая волну

$$B(l,t) = \rho_l e^{-\beta l} D_\tau A(0,t),$$

которая возвращается на вход задержанной на 2τ:

$$B(0,t) = \rho_l e^{-2\beta l} D_\tau^2 A(0,t).$$

Этим все и заканчивается.

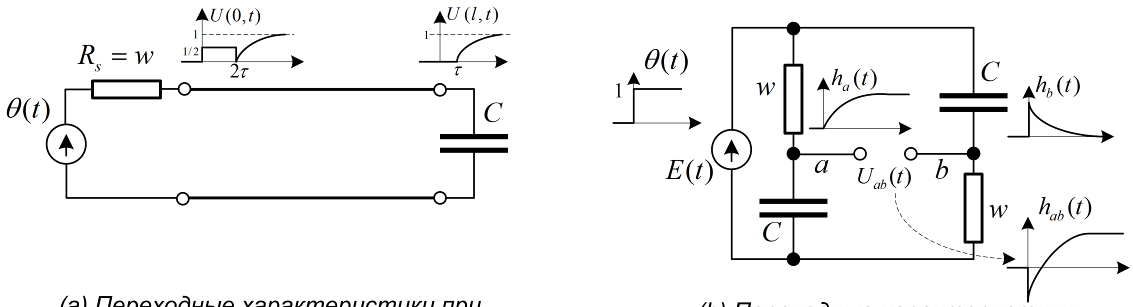
В момент 2τ, когда приходит отражение от нагрузки, напряжение на входе линии скачком изменяется с начального уровня $\frac{E}{2}$ до $\frac{E}{2}(1+e^{-2\beta l}\rho_l)$. Если потерь в линии нет, то при коротком замыкании на выходе ($\rho_l = -1$) напряжение на входе падает до нуля, а при холостом ходе ($\rho_l = 1$) – нарастает до двойного уровня E.

9. Емкостная нагрузка

Если импедансы источника $Z_s(j\omega)$ и/или нагрузки $Z_l(j\omega)$ комплексны, то комплексными становятся также и коэффициенты отражения $\rho_s(j\omega)$, $\rho_l(j\omega)$. При этом помимо задержек и ослаблении, связанных с распространением волн вдоль линии, возникают трансформации форм волн при их отражении – прохождении через блоки с комплексными коэффициентами передачи $\rho_s(j\omega)$, $\rho_l(j\omega)$.

Рассмотрим простой пример согласованной по входу линии с $R_s = w$, нагруженной на емкостную нагрузку C с импедансом $Z_l = \frac{1}{j\omega C}$, рис. 7. Для комплексного коэффициента отражения от емкостной нагрузки найдем:

$$\rho_l(j\omega) = \frac{Z_l - w}{Z_l + w} = \frac{1 - j\omega C w}{1 + j\omega C w} = \frac{1}{1 + j\omega C w} - \frac{j\omega C w}{1 + j\omega C w}.$$



(a) Переходные характеристики при емкостной нагрузке

(b) Переходные характеристики фазовращателя

Рис. 7. Работа линии на емкостную нагрузку

В этом легко опознается комплексный коэффициент передачи фазовращателя – схемы на рис. 7b , которая преобразует входной $E(t)$ в разностный выходной сигнал $U_{ab}(t)$.

Его переходная характеристика $h_{ab}(t)$ – реакция на единичный перепад $\theta(t)$ на входе – это разность между переходной характеристикой $h_a(t) = \theta(t)(1 - e^{-t/Cw})$ интегрирующей цепи с комплексным коэффициентом передачи $\frac{1}{1+j\omega Cw}$ и переходной характеристикой $h(t) = \theta(t)e^{-t/Cw}$ дифференцируюшей цепи с комплексным коэффициентом передачи $\frac{j\omega Cw}{1+j\omega Cw}$:

$$h_{ab}(t) = \theta(t)(1 - 2e^{-t/Cw}).$$

Она плавно изменяется от уровня $h_{ab}(0) = -1$ до уровня $h_{ab}(\infty) = +1$.

Включение единичного перепада $\theta(t)$ на входе линии создает в ней падающую волну с амплитудой $A(0,t) = \frac{1}{2}\theta(t)$. Спустя время $\tau = \frac{l}{v}$, эта волна достигает выхода линии. Упавшая волна $A(l,t) = A(0,t) = \frac{1}{2}\theta(t-\tau)$ отражается от «фазовращателя», порождая отраженную волну в форме

$$B(l,t) = \frac{1}{2}\theta(t-\tau)(1 - 2e^{-(t-\tau)/Cw}).$$

Ее амплитуда изменяется от уровня $B(l,\tau) = -\frac{1}{2}$ до уровня $B(l,\infty) = +\frac{1}{2}$. В момент падения волны, при $t = \tau$, природа решает, что емкость – это короткое замыкание и отражает то что упало с коэффициентом $\rho_l = -1$. Затем, по мере того, как емкость заражается, природа меняет точку зрения, приходя к тому, что на выходе линии все-таки, скорее, холостой ход. Коэффициент отражения плавно дрейфует к значению $\rho_l = +1$.

Сложение падающей и отраженной волн дает показанные на рис. 7a временные формы для напряжения на выходе линии

$$U(l,t) = A(l,t) + B(l,t) = \theta(t-\tau)(1 - e^{-(t-\tau)/Cw})$$

и для напряжения на ее входе:

$$U(0,t) = A(0,t) + B(0,t) = \frac{1}{2}\theta(t) + \frac{1}{2}\theta(t-2\tau)(1 - 2e^{-(t-2\tau)/Cw}).$$