

# ***Дискретизация по времени и по частоте***

Учебно-методическое пособие

по курсу

*Введение в электронику*

Лабораторная работа № 22

Москва  
2018



## Содержание

|   |    |
|---|----|
| Введение .....  | 4  |
| 1. Теорема о выборках .....   | 5  |
| 2. Переход из временной области в частотную .....   | 8  |
| 3. Сигнал с $N$ степенями свободы.....  | 9  |
| 4. Непосредственный переход от дискретного сигнала $x(k\Delta t)$ , $k\Delta t \in [0, T)$ ,<br>к дискретному спектру $S(jn\Delta\omega)$ , $n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}})$ ..... | 10 |
| 5. Непосредственный переход от дискретного спектра $S(jn\Delta\omega)$ ,<br>$n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}})$ , к дискретному сигналу $x(k\Delta t)$ , $k\Delta t \in [0, T)$ ..... | 12 |
| 6. Дискретное преобразование Фурье .....  | 14 |
| 7. Физический смысл дискретного преобразования Фурье.....   | 16 |
| Инструкция по работе с MATLAB .....   | 18 |
| Упражнения  |    |
| ex22_1. Одиночное гармоническое колебание .....   | 20 |
| ex22_2 Сумма двух амплитудно-модулированных колебаний .....   | 22 |
| ex22_3. Одиночный прямоугольный (видео)импульс .....  | 25 |
| ex22_4. Одиночный радиоимпульс.....   | 28 |
| Приложения  |    |
| 1. Вывод (2.1).....   | 31 |
| 2. Вывод (4.2).....   | 32 |
| 3. Вывод (5.2).....   | 34 |
| 4. Быстрое преобразование Фурье.....  | 36 |
| Литература .....  | 44 |

## Введение

Когда речь идет о регистрации и обработке данных в физическом эксперименте с применением средств вычислительной техники, необходимо быть готовым к тому, чтобы непрерывный по своей природе сигнал с выхода электрического датчика представлять в виде набора значений этого сигнала в отдельные моменты времени, а для его преобразования в простейшем случае – типа прохождения сигнала через фильтр с известной или заданной частотной характеристикой – использовать имеющееся программное обеспечение для дискретного отображения спектра сигнала.

Исходные соотношения из классического математического анализа:

прямое преобразование Фурье –

$$S(j\omega) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (0.1)$$

обратное преобразование Фурье –

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (0.2)$$

Эти два соотношения справедливы, если сигнал  $x(t)$  абсолютно интегрируем и для него выполнены **условия Дирихле** (на любом конечном интервале времени  $x(t)$  не имеет разрывов с уходящими в бесконечность ветвями и число скачков и экстремумов конечно).

Если сигнал  $x(t)$  периодический с периодом  $T$ , то есть  $x(t + m \cdot T) = x(t)$ , где  $m$  – целое число, и для него выполнены условия Дирихле, то

$$x(t) = \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} C_n e^{jn \frac{2\pi}{T} t}, \quad (0.3)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt. \quad (0.4)$$

## 1. Теорема о выборках

### Теорема

Вещественный сигнал  $x(t)$  [В], спектр которого  $S(j2\pi f)$  [В·с] не содержит частот выше  $f_{\text{гр}}$  [Гц], может быть полностью восстановлен по отсчетным значениям (выборкам) сигнала, взятым через промежутки времени, равные  $1/(2f_{\text{гр}})$  [с].

### Доказательство

Согласно условию теоремы

$$S(j\omega) = \begin{cases} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} x(t) e^{-j\omega t} dt & \text{при } \omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}], \\ 0 & \text{при } \omega < -\omega_{\text{гр}} \text{ и } \omega \geq \omega_{\text{гр}}; \end{cases}$$

здесь и далее  $\omega = 2\pi f$ ,  $\omega_{\text{гр}} = 2\pi f_{\text{гр}}$ . Продолжим  $S(j\omega)$  периодически вдоль оси частот  $\omega$  с периодом  $2\omega_{\text{гр}}$  и представим периодически продолженный спектр  $\hat{S}(j\omega)$  в виде ряда Фурье:

$$\hat{S}(j\omega) = \sum_{k=-\Gamma}^{\Gamma} D_k e^{jk \frac{2\pi}{2\omega_{\text{гр}}} \omega}, \quad (1.1)$$

где

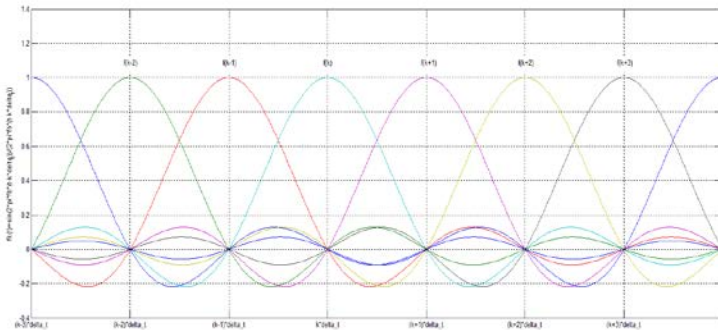
$$\begin{aligned} D_k &= \frac{1}{2\omega_{\text{гр}}} \int_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} \hat{S}(j\omega) e^{-jk \frac{2\pi}{2\omega_{\text{гр}}} \omega} d\omega \\ &= \frac{2\pi}{2\omega_{\text{гр}}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} S(j\omega) e^{j\omega(-k\Delta t)} d\omega \\ &= \frac{\pi}{\omega_{\text{гр}}} x(-k\Delta t), \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega_{\text{гр}}}. \end{aligned}$$

Подставим (1.1) в (0.2), имея в виду, что в пределах  $[-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}]$  справедливо равенство  $S(j\omega) = \hat{S}(j\omega)$ ; получим

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} \sum_{k=-\Gamma'}^{\Gamma'} \frac{\pi}{\omega_{\text{rp}}} x(-k\Delta t) e^{+jk\omega\Delta t} e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\omega_{\text{rp}}} \sum_{k=-\Gamma'}^{\Gamma'} x(k\Delta t) \int_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} e^{j\omega(t-k\Delta t)} d\omega \\
&= \frac{1}{2\omega_{\text{rp}}} \sum_{k=-\Gamma'}^{\Gamma'} x(k\Delta t) \cdot \left( \frac{1}{j(t-k\Delta t)} e^{j\omega(t-k\Delta t)} \right) \Bigg|_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} \\
&= \sum_{k=-\Gamma'}^{\Gamma'} x(k\Delta t) \cdot \frac{1}{\omega_{\text{rp}}(t-k\Delta t)} \cdot \frac{e^{j\omega_{\text{rp}}(t-k\Delta t)} - e^{-j\omega_{\text{rp}}(t-k\Delta t)}}{2j} \\
&= \sum_{k=-\Gamma'}^{\Gamma'} x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_{\text{rp}}(t-k\Delta t)}{\omega_{\text{rp}}(t-k\Delta t)}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

### Замечания

1) В (1.2) сигнал  $x(t)$  представлен в виде суммы взвешенных и сдвинутых во времени функций вида  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ; в той точке на оси времени, где одна из этих функций равна 1 (например, при  $t = k'\Delta t$ ), все другие функции (соответствующие  $k \neq k'$ ) равны 0.



2) Интерполяционная формула (1.2) позволяет точно восстанавливать значение  $x(t)$  *в любой момент времени*, но для этого нужно знать бесконечное число выборочных значений  $x(t)$  на всей оси времени от  $-\Gamma$  до  $+\Gamma$ .

3) Условия теоремы выполнены при любом  $\Delta t \leq \frac{\pi}{\omega_{\text{гр}}}$ ; знак  $<$  при этом эквивалентен принятию за границу спектра частоты, большей  $\omega_{\text{гр}}$ .

4) На практике ни у какого реального физического сигнала  $x(t)$  спектр  $S(j\omega)$  не бывает ограниченным. Обычно он имеет «хвосты», уходящие на бесконечность. Чтобы воспользоваться все же интерполяционной формулой (1.2), граничные частоты  $-\omega'_{\text{гр}}$  и  $\omega'_{\text{гр}}$  назначаются из соображений относительно малой площади под «отбрасываемыми» хвостами. Если теперь брать выборки с интервалом  $\Delta t = 1/(2f'_{\text{гр}})$ ,  $f'_{\text{гр}} = \omega'_{\text{гр}}/(2\pi)$ , то по формуле (1.2) будет восстановлен сигнал  $x'(t)$ , спектр которого располагается в интервале  $[-\omega'_{\text{гр}}, \omega'_{\text{гр}})$  и равен сумме части спектра  $S(j\omega)$  исходного сигнала, приходящейся на указанный интервал частот, с попадающими в этот интервал хвостами *всех* копий  $S(j\omega)$ , возникающих в результате периодического повторения  $S(j\omega)$  вдоль оси частот с периодом  $2\omega'_{\text{гр}}$ . В результате сигнал  $x'(t)$  будет совпадать с  $x(t)$  в моменты взятия выборок, но будет отличаться от  $x(t)$  на интервалах между моментами взятия выборок. Сигнал  $x'(t)$  оказывается «более медленным» (изменяющимся более плавно), поскольку в его спектре нет высокочастотных составляющих сигнала  $x(t)$ , содержащихся в «отбрасываемых хвостах» спектра  $S(j\omega)$ . Отличие  $x'(t)$  от  $x(t)$  тем меньше, чем большей выбирается граничная частота  $\omega'_{\text{гр}}$  и чем меньше площадь в отбрасываемых хвостах.

5) По историческим причинам теорему о выборках называют также теоремой Котельникова (Владимир Александрович Котельников, 1908–2005) и теоремой Шеннона [Клод Элвуд Шеннон (Claude Elwood Shannon), 1916–2001], а частоту  $f_{\text{гр}}$  – частотой Найквиста [Гарри Найквист (Harry Nyquist), 1889–1976].

## 2. Переход из временной области в частотную

Если сигнал  $x(t)$  ограничен во времени интервалом  $[0, T)$  (то есть равен нулю вне этого интервала;  $T$  – длительность сигнала [с]), то его спектр  $S(j\omega)$  может быть полностью восстановлен по отсчетным значениям (выборкам), взятым вдоль оси частот  $\omega$  через равные промежутки длины  $\Delta\omega = 2\pi/T$  [рад/с].

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно в предыдущем рассуждении *одновременно* осуществить замену переменных согласно следующей таблице [1]:

|  |   |  |
|--|---|--|
| время $t$ [с]  | → | частота $\omega$ [рад/с]   |
| частота $\omega$ [рад/с]   | → | время $t$ [с]  |
| интервал частот,<br>в пределах которого<br>спектр сигнала<br>не равен нулю,<br>$2\omega_{\text{гр}}$ [рад/с] | → | длительность сигнала $T$<br>[с]  |
| интервал взятия<br>выборки по оси<br>времени<br>$\Delta t = \pi / \omega_{\text{гр}}$ [с]                    | → | интервал взятия<br>выборки по оси<br>частот<br>$\Delta\omega = 2\pi / T$ [рад/с] |

Тогда в силу известного свойства симметрии преобразования Фурье

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} S(jn\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}, \quad \Delta\omega = 2\pi/T. \quad (2.1)$$

### Замечания

6) Замечания, сделанные в отношении собственно теоремы о выборках в полной мере приложимы и к утверждению, относящемуся к отсчетам вдоль частотной оси.

7) Строго говоря, спектр  $S(j\omega)$  сигнала  $x(t)$  конечной длительности имеет бесконечную протяженность



8) Вывод соотношения (2.1) предполагает периодическое повторение сигнала  $x(t)$  вдоль оси времени с периодом, равным длительности сигнала  $T$ . Поэтому коэффициенты ряда Фурье, посредством которого представляется это периодическое продолжение, образуют линейчатый спектр, состоящий из гармоник, кратных «основной частоте»  $2\pi/T$ . Амплитуды гармоник линейчатого спектра с точностью до коэффициента  $1/T$  совпадают со значениями выборок  $S(jn\Delta\omega)$  сплошного спектра  $S(j\omega)$  «одиночного импульса», каким является исходный сигнал  $x(t)$ , равный нулю за пределами интервала  $[0, T)$ .

### 3. Сигнал с $N$ степенями свободы

Всегда приходится иметь дело с сигналом  $x(t)$  конечной длительности  $T$ . Если не представляется возможным исследовать спектр  $S(j\omega)$  такого сигнала аналитически, то на основании тех или иных соображений ограничиваются конечным интервалом частот  $[-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}})$ , пренебрегая частью спектра, лежащей за пределами этого интервала.

Естественно выбрать интервал  $\Delta t$ , с которым будут браться выборки сигнала  $x(t)$  вдоль оси времени, равным  $1/(2f_{\text{гр}}) = \pi/\omega_{\text{гр}}$ . Тогда полное число временных выборок будет равно

$$N = T / \Delta t = 2Tf_{\text{гр}}.$$

Но согласно теореме о выборках вдоль оси частот для описания спектра  $S(j\omega)$  сигнала  $x(t)$  длительности  $T$  достаточно взять выборочные значения спектра  $S(j\omega)$ , отстоящие одно от другого по оси частот на  $\Delta\omega = 2\pi/T$ . При этом полное число частотных выборок также равно  $N$ :

$$\frac{2\omega_{\text{гр}}}{\Delta\omega} = \frac{\frac{2\pi}{\Delta t}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{\Delta t} = N.$$

Спрашивается: как связаны между собой значения выборок, которые берутся вдоль оси времени и вдоль оси частот?

#### 4. Непосредственный переход от дискретного сигнала

$x(k\Delta t)$ ,  $k\Delta t \in [0, T)$ , к дискретному спектру  $S(jn\Delta\omega)$ ,  $n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}})$

По условиям задачи

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_{\text{гр}}(t - k\Delta t)}{\omega_{\text{гр}}(t - k\Delta t)}, \quad (4.1)$$

$$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{1}{2f_{\text{гр}}} = \frac{\pi}{\omega_{\text{гр}}}.$$

Подставим  $x(t)$  в (0.1):

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_{\text{гр}}(t - k\Delta t)}{\omega_{\text{гр}}(t - k\Delta t)} e^{-j\omega t} dt \\ &= \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-j\omega k\Delta t} \end{aligned} \quad (4.2)$$

при  $\omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}})$ . [Вывод (4.2) см. в Приложении 2.]

Для  $\omega = n \cdot \Delta\omega$ , где

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t} = \frac{2\pi}{N \cdot [1/(2f_{\text{гр}})]} = \frac{2\omega_{\text{гр}}}{N},$$

$$S(jn\Delta\omega) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jnk \cdot \Delta\omega \cdot \Delta t}, \quad n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}). \quad (4.3)$$

Но

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = \frac{2\omega_{\text{гр}}}{N} \cdot \frac{\pi}{\omega_{\text{гр}}} = \frac{2\pi}{N},$$

поэтому

$$S(jn\Delta\omega) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}, \quad n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}). \quad (4.4)$$

**Периодичность**  $S(jn\Delta\omega)$  по  $n$  с периодом  $N$

Пусть  $n = n_0 + m \cdot N$ , где  $m$  – целое, тогда

$$\begin{aligned} S(jn\Delta\omega) &= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jk(n_0 \frac{2\pi}{N} + mN \frac{2\pi}{N})} \\ &= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jkn_0 \frac{2\pi}{N}} \underbrace{e^{-jkm2\pi}}_{=1} = S(jn_0\Delta\omega). \end{aligned}$$

Принято под дискретным спектром в рассматриваемом случае понимать

$$S(jn\Delta\omega) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.5)$$

считая по умолчанию, что величины  $S(jn\Delta\omega)$  с индексами  $n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1$  отображают часть спектра, относящуюся к отрицательным частотам.

## 5. Непосредственный переход от дискретного спектра

$S(jn\Delta\omega)$ ,  $n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}})$ , к дискретному сигналу  $x(k\Delta t)$ ,  $k\Delta t \in [0, T)$

По теореме о выборках вдоль оси частот

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}, \quad (5.1)$$

где  $n\Delta\omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}})$ ,

$$\Delta\omega = \frac{2\omega_{\text{гр}}}{N} = \frac{4\pi f_{\text{гр}}}{T / \Delta t} = \frac{2\pi}{T} \underbrace{2f_{\text{гр}}\Delta t}_{=1}.$$

Подставим  $S(j\omega)$  в (0.2):

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \text{ при } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

[Вывод (5.2) см. в Приложении 3.]

$$\text{Для } t = k \cdot \Delta t, \text{ где } \Delta t = \frac{T}{N} = \frac{\pi}{\omega_{\text{гр}}} = \frac{1}{2f_{\text{гр}}},$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) e^{jnk \cdot \Delta\omega \cdot \Delta t} \text{ при } k\Delta t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right). \quad (5.3)$$

Но

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = \frac{2\omega_{\text{гр}}}{N} \cdot \frac{\pi}{\omega_{\text{гр}}} = \frac{2\pi}{N},$$

поэтому

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) e^{jnk\frac{2\pi}{N}} \text{ при } k\Delta t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$$

или, в силу периодичности  $S(jn\Delta\omega)$  по  $n$  с периодом  $N$ ,

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jnk\frac{2\pi}{N}} \text{ при } k\Delta t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}). \quad (5.4)$$

Поскольку утверждение теоремы о выборках по оси частот опирается на периодическое повторение исходного сигнала  $x(t)$ , заданного на отрезке  $[0, T)$ , интервалу времени  $t \in [-T/2, 0)$  соответствует вторая, более поздняя половина исходного сигнала  $x(t)$ . Следовательно, условие  $k\Delta t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  в (5.4) эквивалентно перебору точек отсчета по оси времени со значениями  $k$  от  $-\frac{N}{2}$  до  $\frac{N}{2}-1$ .

**Периодичность  $x(k\Delta t)$  по  $k$  с периодом  $N$**

Пусть  $k = k_0 + m \cdot N$ , где  $m$  – целое, тогда

$$\begin{aligned} x(k\Delta t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jn(k_0\frac{2\pi}{N} + mN\frac{2\pi}{N})} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jk_0n\frac{2\pi}{N}} \underbrace{e^{jnm2\pi}}_{=1} = x(k_0\Delta t). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.5)$$

## 6. Дискретное преобразование Фурье

Согласно (4.5) и (5.5) для  $\{S(jn\Delta\omega), n = 0, 1, \dots, N-1\}$  и  $\{x(k\Delta t), k = 0, 1, \dots, N-1\}$  имеем:

$$S(jn\Delta\omega) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.1)$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} S(jn\Delta\omega) e^{jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.2)$$

где  $\Delta t = \frac{T}{N}$  и  $\Delta\omega = \frac{2\omega_{\text{гр}}}{N}$ ,  $T$  – длительность сигнала, а  $[-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}})$  – интервал частот, которым ограничен спектр этого сигнала.

*Взаимная однозначность (6.1) и (6.2).*

*Несовершенство (6.1) и (6.2):*

1) Знание временных выборок в данном случае позволяет получить лишь приближенное представление о промежуточных значениях непрерывной функции  $x(t)$  в точках на оси времени между моментами взятия выборок. Спектр сигнала  $x'(t)$ , восстанавливаемого по формуле (4.1), является суммой части спектра  $S(j\omega)$  исходного сигнала  $x(t)$ , попадающей в интервал  $[-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}})$ , с отбрасываемыми хвостами всех копий  $S(j\omega)$  при периодическом продолжении  $S(j\omega)$  влево и вправо вдоль оси частот с периодом  $2\omega_{\text{гр}}$ .

2) На практике бывает трудно удовлетворить требованиям, предъявляемым к сигналу  $x(t)$  (абсолютная интегрируемость и выполнение условий Дирихле), чтобы можно было, строго говоря, надеяться получить выборочные значения  $S(jn\Delta\omega)$  его спектральной плотности.

*Простой пример:*

Если  $x(t)$  – гармоническое колебание частоты  $\omega$ , причем на интервале  $[0, T)$  укладывается целое число периодов этого колебания, то при периодическом повторении сигнала  $x(t)$  с периодом  $T$  мы имеем на всей оси времени синусоиду частоты  $\omega$ , и спектральная плотность такого сигнала состоит

из двух  $\delta$ -функций на частотах  $-\omega$  и  $\omega$ ; очевидно, что соотношение (6.1) ни при каких обстоятельствах такого результата нам не даст.

3) То, что при дискретизации спектра всегда имеется в виду периодическое повторение сигнала, заданного на интервале  $[0, T)$  (см. 2), подталкивает нас к тому, чтобы отказаться от обращения к спектральной плотности  $S(j\omega)$  в пользу перехода к линейчатому спектру, компоненты которого были бы амплитудами гармоник соответствующего ряда Фурье.

**Поэтому** принято вместо выборочных значений  $S(jn\Delta\omega)$  (с размерностью  $[B \cdot c]$ , или, что то же самое,  $[B/\Gamma_{\Pi}]$ ) использовать отсчеты

$$S_n = \frac{1}{\Delta t} S(jn\Delta\omega)$$

(с размерностью  $[B]$ ), а временные отсчеты переобозначить:

$$x_k = x(k\Delta t) .$$

В результате подстановки  $S(jn\Delta\omega) = \Delta t \cdot S_n$  равенства (6.1) и (6.2) переходят в *прямое дискретное преобразование Фурье* (прямое ДПФ)

$$S_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jnk \frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.3)$$

и *обратное дискретное преобразование Фурье* (обратное ДПФ)

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{jnk \frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6.4)$$

В общем случае дискретное преобразование Фурье применяется к произвольным ограниченным числовым наборам  $\{x_k, k = 0, 1, \dots, N-1\}$  и  $\{S_n, n = 0, 1, \dots, N-1\}$  любой физической природы.

Отсутствие в формулах (6.3) и (6.4) какого-либо реального временного параметра  $T$  или  $\Delta t$  (размерности  $[c]$ ) означает, что частота дискретизации вдоль оси времени, равная  $1/\Delta t$ , принята равной 1.

Выражения для  $S_n$  и  $x_k$ , задаваемые формулами (6.3) и (6.4), не теряют смысла при  $n$  и/или  $k$ , выходящими за пределы интервала от 0 до  $N-1$ , в силу периодичности  $S_n$  и  $x_k$  по  $n$  и  $k$  соответственно с периодом  $N$ .

## 7. Физический смысл дискретного преобразования Фурье

Возвращаясь к электрическим сигналам, напомним правило, известное из аналогового описания сигналов и их спектров:

если  $x_1(t)$  – одиночный «импульс» произвольного вида длительности  $T$  :

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -T/2 \\ x(t) & \text{при } -T/2 \leq t \leq T/2, \\ 0 & \text{при } t > T/2 \end{cases}$$

и  $S^{\{x_1(t)\}}(j\omega)$  – его спектральная плотность,

а  $x_2(t)$  – результат неограниченного повторения  $x(t)$  влево и вправо вдоль оси времени с периодом  $T$  :

$$x_2(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ x(t \pm n \cdot T) = x(t) & \text{при } -\Gamma < t < \Gamma \text{ и целом } n \end{cases},$$

и  $C_n^{\{x_2(t)\}}$  –  $n$ -й коэффициент его ряда Фурье в комплексной форме,

то из сравнения выражений для значения  $S^{\{x_1(t)\}}(j\omega)$  в точке  $n \frac{2\pi}{T}$  на оси частот и коэффициента  $C_n^{\{x_2(t)\}}$  согласно (0.1) и (0.4) соответственно

$$S^{\{x_1(t)\}}(jn \frac{2\pi}{T}) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$$

$$C_n^{\{x_2(t)\}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn \frac{2\pi}{T} t} dt$$

следует, что с точностью до множителя  $\frac{1}{T}$  они совпадают:

$$C_n^{\{x_2(t)\}} = \frac{1}{T} \cdot S^{\{x_1(t)\}}(jn \frac{2\pi}{T}).$$

Другими словами, спектр одиночного «импульса» можно рассматривать как огибающую линейчатого спектра периодической последовательности таких «импульсов».



Применительно к дискретному описанию сигнала  $x(t)$  конечной длительности  $T$  с  $N$  степенями свободы согласно (4.5) и (6.3) получим:

$$\frac{1}{T} \cdot S(jn\Delta\omega) = \frac{\Delta t}{T} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-jnk \cdot \frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N} \cdot S_n$$

или, с учетом того, что  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,

$$S_n = N \cdot \left\{ \frac{1}{T} \cdot S\left(jn \frac{2\pi}{T}\right) \right\}.$$

Следовательно,  $n$ -е значение дискретного преобразования Фурье представляет собой умноженную на  $N$  амплитуду  $n$ -й гармоники ряда Фурье для сигнала, являющегося результатом периодического повторения исходного сигнала  $x(t)$  вдоль оси времени с периодом  $T$ .

## Инструкция по работе с MATLAB

Прежде чем приступить к выполнению упражнений, предусмотренных заданием, *создайте* в директории **C:\Students** свою индивидуальную директорию, имя которой должно начинаться с номера учебной группы студента и содержать его фамилию латинскими буквами, и *скопируйте* все содержимое папки **References\Lab\_22** в свою индивидуальную директорию.

Запустите с рабочего стола **MATLAB R2006a**. В верхнем меню открывшегося окна **MATLAB** (это окно носит название **Command Window**) выберите опцию **Desktop** и в ней обратитесь к выбору текущей директории **Current Directory**. Воспользуйтесь кнопками перехода вверх по дереву диска **C:**, которые находятся справа от верхнего горизонтального окна в **Current Directory**, и добейтесь того, чтобы в указанном окне возникло обращение к вашей индивидуальной директории: **C:\Students\ваша\_индивидуальная\_директория**. Выберите имя одного из упражнений с расширением **.m**, например, **ex22\_1.m**, и нажмите **Enter**. (Обратите внимание на то, что в верхнем горизонтальном окне **MATLAB** теперь будет постоянно удерживаться имя вашей индивидуальной директории.)

В результате выбора вами одного из упражнений слева от окна **MATLAB** возникнет новое большое окно **Editor** –

**C:\Students\ваша\_индивидуальная\_директория\имя\_выбранного\_упражнения.m**.

Теперь вы готовы к работе в **MATLAB**. Если вы впервые обращаетесь к этой системе, то ваши возможные действия могут состоять в том, чтобы скопировать пример обращения из окна **Editor** – ... в окно **MATLAB**, нажать **Enter** и осуществить наблюдение за работой выбранной программы (например, вы можете поочередно просмотреть графики **Figure** созданные ею).

Если вы хотите снова запустить данную программу с новыми значениями входных параметров, то, оставаясь в командном окне **Command Window** (в окне **MATLAB**), скопируйте предыдущее обращение к этой программе в место, указываемое мигающим приглашением продолжить работу (вертикальная черта справа от значка **>>>**), измените значения тех или иных входных параметров в созданной вами копии обращения к данной программе, переместитесь на конец строки и нажмите **Enter**.

Для перехода в режим редактирования (видоизменения) программы выполняемого вами упражнения и одновременного перехода в режим отладки перед очередным запуском выбранной программы согласно указанному в программе правилу (примеру обращения) установите перед последним оператором программы точку останова **Breakpoint**, нажав функциональную клавишу **F12**. В окне **Editor** – ... перед этим оператором возникнет красная точ-

ка. При очередном запуске программы, она выполнится, войдя в режим отладки, и остановится перед выполнением отмеченного оператора (в установленной точке останова **Breakpoint**). В состоянии останова в режиме отладки вы имеете возможность вручную, оставаясь в окне **MATLAB**, узнавать значения любых величин, заданных или вычисленных в вашей программе к моменту останова.

После любых изменений в изучаемой программе необходимо сохранять ее текст обычными средствами (при этом в самой верхней строке окна **Editor** – ... исчезнет знак \* после расширения **.m** в имени данного упражнения; этот значок возникает в качестве предупреждения о необходимости сохранения текста программы при любом ее изменении).

При овладении основными (первоначальными) приемами программирования в **MATLAB** следует активно пользоваться средствами, предоставляемыми справочной системой **Help**. В частности, выделив любое из слов в программе или в командном окне, можно получить исчерпывающую справку об этой команде или служебном слове, нажав на выделенном слове *правую кнопку* и обратившись к **Help on Selection**.

При наблюдении графиков в окне **Figure** полезно использовать численный вывод координат выбранной точки на любой из выведенных кривых. Для этого среди иконок под верхним горизонтальным меню нужно найти иконку, сопровождаемую подписью **Data Cursor** во всплывающем окне, и нажать на нее. Затем следует подвести мышь к нужному месту на графике и нажать *левую* клавишу. В рамке, возникающей рядом с выделенной точкой, указаны значения абсциссы X: и ординаты Y:. Удерживая левую клавишу мыши нажатой, можно перемещать выделенную точку вместе с ее координатами вдоль выбранной кривой. Если на графике несколько кривых, то каждую из них можно снабдить своим *курсором данных* командой **Create New Datatip** в окне, открывающемся в результате нажатия *правой* клавиши мыши.

## Упражнение ex22\_1

### Одинокое гармоническое колебание

Предполагается, что с данного упражнения начинается знакомство с формой представления в MATLAB результатов вычислений. Следует обратить внимание на численные значения задаваемых параметров в примере обращения к программе, где частота гармонического колебания  $\sin \omega t$  точно равна одному из значений вдоль оси частот, для которых вычисляется прямое БПФ, и поэтому в линейчатом спектре имеется единственная составляющая, абсолютное значение которой равно  $N/2$ , а само значение этой составляющей является чисто мнимым (значение действительной части не превосходит  $4.5 \times 10^{-13}$  и представляет собой ошибку вычислений). Если же задать частоту колебаний, не равной целому числу интервалов дискретизации вдоль оси частот, то имеет место «растекание спектра» (из-за наличия разрывов при периодическом повторении данного отрезка сигнала вдоль оси времени), однако при восстановлении сигнала посредством обратного БПФ форма сигнала в точности совпадает с исходной.

В этом и в других упражнениях спектр, как правило, отображается только для положительных частот.

#### Указания

1. Запустите программу ex22\_1, выбрав частоту колебаний равной целому числу интервалов дискретизации по оси частот  $\text{delta\_f}$  ( $f_{\text{—}}$  – целое число). Запишите в рабочей тетради числовые значения *ненулевых* результатов БПФ. В домашних условиях путем вычисления по формулам (6.3) найдите, какими должны быть эти значения, и сравните результаты расчета с результатами запуска программы ex22\_1.
2. Замените *синус* в строке 17 на *косинус*, а затем задайте сигнал  $z$  в виде *суммы* синусоидальной и косинусоидальной составляющих одной частоты. Для каждого из этих случаев осуществите запуск данной программы и найдите объяснение новым результатам, сравнивая их с тем, что было получено в п. 1.
3. Осуществите наблюдение дискретного спектра, когда частота колебания отличается от целого числа интервалов дискретизации по оси частот сначала на 0.1 этого интервала, а затем выбирается точно посередине одного из интервалов  $\text{delta\_f}$ .

|    |  |
|----|--|
|    | ex22_1.m   |
| 1  | function ex22_1(N,delta_t,f_)  |
| 2  | % "Одиночное гармоническое колебание"                                      |
| 3  | % N - число выборок во временной области (число степеней свободы,          |
| 4  | % N должно быть целой степенью 2);   |
| 5  | % delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с]; |
| 6  | % f_ - частота гармонического колебания, выраженная числом интервалов      |
| 7  | % дискретизации по оси частот (число f_ - не обязательно целое,            |
| 8  | % оно должно быть в пределах от 0 до N/2-1);                               |
| 9  | % Пример обращения: ex22_1(2^10,1e-6,10);                                  |
| 10 | % T - длительность сигнала [с];  |
| 11 | % delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];                |
| 12 | % f - частота исследуемого гармонического колебания [Гц];                  |
| 13 | T=N*delta_t;   |
| 14 | delta_f=1/T;   |
| 15 | f=f_*delta_f;  |
| 16 | k=0:N-1; tk=delta_t*k;   |
| 17 | z=sin(2*pi*f*k*delta_t); % z - исследуемое колебание с амплитудой 1 В      |
| 18 | % Figure 1 - Исходный сигнал как функция времени                           |
| 19 | figure; plot(tk,z); grid on;   |
| 20 | xlabel('t [s]'); ylabel('z [V]');  |
| 21 | n=0:N-1; fn=delta_f*n;   |
| 22 | Z=fft(z); % Z - значения FFT (прямое преобразование) сигнала z             |
| 23 | ne=fix(5*f_); if ne>N/2 ne=N/2; end % искусственное растягивание оси x     |
| 24 | % Figure 2 - Модуль значений FFT для n от 0 до ne                          |
| 25 | figure; stem(fn(1:ne),abs(Z(1:ne)),'.'); grid on;                          |
| 26 | xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(fft(z)) [V]');                               |
| 27 | % Figure 3 - Действительная часть значений FFT для n от 0 до ne            |
| 28 | figure; stem(fn(1:ne),real(Z(1:ne)),'.'); grid on;                         |
| 29 | xlabel('f [Hz]'); ylabel('real(fft(z)) [V]');                              |
| 30 | % Figure 4 - Мнимая часть значений FFT для n от 0 до ne                    |
| 31 | figure; stem(fn(1:ne),imag(Z(1:ne)),'.'); grid on;                         |
| 32 | xlabel('f [Hz]'); ylabel('imag(fft(z)) [V]');                              |
| 33 | z_=ifft(Z); % z_ - результат обратного преобразования Z                    |
| 34 | % Figure 5 - Результат восстановления временной формы сигнала по его FFT   |
| 35 | figure; plot(tk,z_); grid on;  |
| 36 | xlabel('t [s]'); ylabel('ifft(Z) [V]');                                    |
| 37 | o=0;   |

## Упражнение ex22\_2

### Сумма двух амплитудно-модулированных колебаний

При обращении к данной программе параметры складываемых АМ-колебаний выбираются так, чтобы их спектры не пересекались и частоты их составляющих (положительные значения) не выходили за пределы интервала  $[0, f_{гр}]$ .

Операторами 54, 55 формируются прямоугольные окна, вырезающие спектры каждого из этих колебаний как в области положительных, так и в области отрицательных частот: функция *fliplr(A)* осуществляет перестановку элементов массива *A* в обратном порядке, то есть слева направо; массив  $C = [A \ B]$  является результатом объединения массивов *A* и *B* путем пристыковывания к элементам массива *A* справа элементов массива *B* (операция *конкатенации*).

В результате взятия обратного БПФ для каждого из вырезанных спектров происходит восстановление порознь обоих АМ-колебаний из их смеси («двухканальный приемник»).

#### Указания

1. Запустите программу ex22\_2, воспользовавшись предложенными в строках 14, 15 примерами обращения к этой программе или выбрав другие допустимые значения параметров  $N, \dots, m2$ . Примите к сведению результаты наблюдения работы программы ex22\_2.

2. (Факультативно.) Видоизмените данную программу таким образом, чтобы имелась возможность разделения *большого числа* амплитудно-модулированных колебаний из их смеси, построив для этого надлежащим образом "прямоугольные окна"  $w1, w2, \dots$  (взамен строк 54, 55), вырезающие нужные части спектра новой смеси  $u = u1 + u2 + \dots$ , описанной в строках, предшествующих строке, в которой реализуется сложение отдельных АМ-колебаний (в исходной программе ex22\_2 это строка 37).

|    |  |
|----|--|
| 1  | function ex22_2(N,delta_t,fc1,ac1,fc2,ac2,AMF1,AMF2,m1,m2)                 |
| 2  | % "Сумма двух амплитудно-модулированных колебаний"                         |
| 3  | % N - число выборок во временной области (число степеней свободы,          |
| 4  | % N должно быть целой степенью 2);   |
| 5  | % delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с]; |
| 6  | % fc1, fc2 - частоты несущих, выраженные числом интервалов дискретизации   |
| 7  | % по оси частот (предполагается, что $fc2 > fc1$ );                        |
| 8  | % ac1, ac2 - амплитуды несущих колебаний [В];                              |
| 9  | % AMF1, AMF2 - частоты модулирующих колебаний, выраженные числом           |
| 10 | % интервалов дискретизации по оси частот (предполагается, что AMF1, AMF2   |
| 11 | % много меньше $fc1, fc2$ ; должны выполняться неравенства:                |
| 12 | % $fc1-AMF1 > 0$ , $fc2+AMF2 < N/2-1$ , $fc2-AMF2 \geq fc1+AMF1 + 2$ );    |
| 13 | % m1, m2 - коэффициенты (глубина) модуляции;                               |
| 14 | % Пример обращения: ex22_2(2^10,1e-6,20,1,40,1,3,5,0.67,0.67);             |
| 15 | % Пример обращения: ex22_2(2^10,1e-6,90,1,110,1,5,3,0.67,0.67);            |
| 16 | % T - длительность сигнала [с];  |
| 17 | % delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];                |
| 18 | % f01, f02 - частоты несущих [Гц];   |
| 19 | % F1, F2 - частоты модулирующих колебаний [Гц];                            |
| 20 | $T=N*\delta t$ ;   |
| 21 | $\delta f=1/T$ ;   |
| 22 | $f01=fc1*\delta f$ ;   |
| 23 | $F1=AMF1*\delta f$ ;   |
| 24 | $f02=fc2*\delta f$ ;   |
| 25 | $F2=AMF2*\delta f$ ;   |
| 26 | % y1, y2 - огибающие АМ колебаний;   |
| 27 | % z1, z2 - несущие 1-го и 2-го колебаний с амплитудой 1 В;                 |
| 28 | % u1, u2 - складываемые АМ колебания;                                      |
| 29 | % u - сумма двух АМ колебаний;   |
| 30 | $k=0:N-1$ ; $tk=\delta t*k$ ;  |
| 31 | $y1=(1+m1*\sin(2*pi*F1*k*\delta t))$ ;                                     |
| 32 | $z1=ac1*\sin(2*pi*f01*k*\delta t)$ ;                                       |
| 33 | $u1=y1.*z1$ ;  |
| 34 | $y2=(1+m2*\cos(2*pi*F2*k*\delta t))$ ;                                     |
| 35 | $z2=ac2*\sin(2*pi*f02*k*\delta t)$ ;                                       |
| 36 | $u2=y2.*z2$ ;  |
| 37 | $u=u1+u2$ ;  |
| 38 | % Figure 1 - Исходный сигнал как функция времени                           |
| 39 | figure; plot(tk,u); grid on;   |
| 40 | xlabel('t [s]'); ylabel('u [V]');  |

```

41 n=0:N-1; fn=delta_f*n;
42 V=fft(u); % V - значения FFT для суммы двух АМ-колебаний
43 % Figure 2 - Модуль значений FFT для n от 0 до N/2-1
44 figure; stem(fn(1:N/2),abs(V(1:N/2)), 'm. '); grid on;
45 xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(fft(u)) [V]');
46 % Figure 3 - Действительная часть значений FFT для n от 0 до N/2-1
47 figure; stem(fn(1:N/2),real(V(1:N/2)), 'b. '); grid on;
48 xlabel('f [Hz]'); ylabel('real(fft(u)) [V]');
49 % Figure 4 - Мнимая часть значений FFT для n от 0 до N/2-1
50 figure; stem(fn(1:N/2),imag(V(1:N/2)), 'g. '); grid on;
51 xlabel('f [Hz]'); ylabel('imag(fft(u)) [V]');
52 middle=((fc1+AMF1)+(fc2-AMF2))/2; flrm=floor(middle);
53 % middle - середина между fc1+AMF1 и fc2-AMF2
54 w1=[ones(1,flrm) zeros(1,N/2-flrm)]; w1=[w1 fliplr(w1)];
55 w2=[zeros(1,flrm) ones(1,N/2-flrm)]; w2=[w2 fliplr(w2)];
56 % w1,w2 - "прямоугольные окна", вырезающие части спектра
57 % суммы двух АМ колебаний с частотами ниже middle*delta_f и выше
58 % Figure 5 - окна, вырезающие спектры каждого из АМ-колебаний
59 % (правые половины графиков относятся к отрицательным частотам)
60 figure; subplot(2,1,1); plot(fn,w1);
61 grid on; ylim([-0.5 1.5]); xlabel('f [Hz]'); ylabel('w1');
62 subplot(2,1,2); plot(fn,w2);
63 grid on; ylim([-0.5 1.5]); xlabel('f [Hz]'); ylabel('w2');
64 V1=V.*w1; V2=V.*w2;
65 % V1, V2 - вырезанные части спектра V=fft(u);
66 % Figure 6 - Спектры каждого из колебаний порознь
67 % (правые половины графиков относятся к отрицательным частотам)
68 figure; subplot(2,1,1); stem(fn, abs(V1), 'm. ');
69 grid on; xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(V1) [V]');
70 subplot(2,1,2); stem(fn, abs(V2), 'm. ');
71 grid on; xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(V2) [V]');
72 % v1, v2 - восстанавливаемые слагаемые суммы двух АМ колебаний
73 v1=ifft(V1); v2=ifft(V2);
74 % Figure 7 - АМ-колебание с частотой несущей fc1 как функция времени
75 figure; plot(tk,real(v1), 'r'); grid on;
76 xlabel('t [s]'); ylabel('real(ifft(V.*w1)) [V]');
77 % Figure 8 - АМ-колебание с частотой несущей fc2 как функция времени
78 figure; plot(tk,real(v2), 'g'); grid on;
79 xlabel('t [s]'); ylabel('real(ifft(V.*w2)) [V]');
80 o=0;

```



## Упражнение ex22\_3

### Одиночный прямоугольный (видео)импульс

Имитируется прохождение прямоугольного импульса через интегрирующую и дифференцирующую цепи. Спектр входного сигнала, который находится с помощью прямого БПФ, умножается на комплексный коэффициент передачи интегрирующей (дифференцирующей) цепи, и результат умножения подвергается обратному БПФ.

Комплексный коэффициент передачи каждой из этих цепей вычисляется по известной формуле для тех точек в области положительных частот, для которых оказывается найденным спектр входного сигнала. Об операциях *fliplr(A)* и  $C = [A \ B]$  см. пояснения к упражнению ex22\_2; функцией *conj(·)* в каждой точке берется комплексно-сопряженное (*conjugate*) число. Указанные действия выполняются операторами в строках 35, 36 для интегрирующей цепи и операторами в строках 55, 56 для дифференцирующей цепи.

#### Указания

1. Воспользуйтесь предлагаемыми в строках 11, 12 примерами обращения к программе ex22\_3. В каждом из этих случаев сравните сигналы, изображенные на фиг. 5 и фиг. 9, с сигналами на выходе интегрирующей (дифференцирующей) цепи при аналоговом подходе к решению соответствующей задачи.

2. (Факультативно.) Добавьте в конец программы ex22\_3 перед пустым оператором  $o=0$ ;

```
f0=fn(N/16); nbf=1./(1+i*16*tau*(fn(1:N/2+1)-f0));
nbf_=[nbf(1:N/2) conj(fliplr(nbf(2:N/2+1)))];
figure; plot(n(1:N/2),abs(nbf(1:N/2))); grid on;
xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(nbf(1:N/2))');
figure; plot(n(1:N/2),angle(nbf(1:N/2))); grid on;
xlabel('f [Hz]'); ylabel('angle(nbf(1:N/2)) [rad]');
W=nbf_.*U; w=ifft(W);
figure; plot(tk,real(w),'r'); grid on;
xlabel('t [s]'); ylabel('real(ifft(nbf_.*U)) [V]');
figure; plot(tk,imag(w),'r'); grid on;
xlabel('t [s]'); ylabel('imag(ifft(nbf_.*U)) [V]');
```

запомните видоизмененную программу и обратитесь к ней с набором параметров из строки 12. На фиг. 11 и 12 вы увидите амплитудно-частотную и фазовую характеристики узкополосного фильтра (*narrow band filter*, nbf), а на фиг. 13 «результат прохождения» через него прямоугольного импульса, показанного на фиг. 1. Найдите физическое объяснение характера временной зависимости, изображенной на фиг. 13.

|    |  |
|----|--|
| 1  | function ex22_3(N,delta_t,t0,tp,tau)                                       |
| 2  | % "Одиночный прямоугольный (видео) импульс"                                |
| 3  | % N - число выборок во временной области (число степеней свободы,          |
| 4  | % N должно быть целой степенью 2);   |
| 5  | % delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с]; |
| 6  | % t0 - момент начала импульса, выраженный целым числом delta_t;            |
| 7  | % tp - длительность импульса, выраженная целым числом delta_t;             |
| 8  | % значение t0+tp-1 должно быть меньше или равно N;                         |
| 9  | % амплитуда импульса равна 1 В;  |
| 10 | % tau - постоянная времени интегрирующей (дифференцирующей) цепи, [с];     |
| 11 | % Пример обращения: ex22_3(2^10,1e-6,201,20,1e-5);                         |
| 12 | % Пример обращения: ex22_3(2^10,1e-6,201,400,3e-5);                        |
| 13 | % T - длительность сигнала [с];  |
| 14 | % delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц];                |
| 15 | T=N*delta_t;   |
| 16 | delta_f=1/T;   |
| 17 | k=0:N-1; tk=delta_t*k;   |
| 18 | u1=zeros(1,t0-1);  |
| 19 | u2=ones(1,tp);   |
| 20 | u3=zeros(1,N-t0-tp+1);   |
| 21 | u=[u1 u2 u3];  |
| 22 | % Figure 1 - Исходный сигнал как функция времени на входе интегрирующей    |
| 23 | % (дифференцирующей) цепи  |
| 24 | figure; plot(tk,u,'b'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;                         |
| 25 | xlabel('t [s]'); ylabel('u [V]');  |
| 26 | n=0:N-1; fn=delta_f*n; max_n=min([fix(T/tau) N/2]);                        |
| 27 | U=fft(u);  |
| 28 | % Figure 2 - Линейчатый спектр исходного сигнала                           |
| 29 | figure; stem(fn(1:N/2),abs(U(1:N/2)),'m. '); grid on;                      |
| 30 | xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(U) [V]');                                    |
| 31 | % K - комплексный коэффициент передачи интегрирующей цепи;                 |
| 32 | % int_cir = K(1:N/2) - значения K для положительных частот;                |
| 33 | % conj(fliplr(K(2:N/2+1))) - значения K для отрицательных частот;          |
| 34 | % int_cir_ - частотная характеристика интегрирующей цепи в целом           |
| 35 | K=1./(1+i*2*pi*fn*tau); int_cir=K(1:N/2);                                  |
| 36 | int_cir_=[int_cir conj(fliplr(K(2:N/2+1)))];                               |
| 37 | % Figure 3 - Амплитудно-частотная характеристика интегрирующей цепи        |
| 38 | figure; plot(fn(1:max_n),abs(int_cir(1:max_n))); grid on;                  |
| 39 | xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(int_cir)');                                  |
| 40 | % Figure 4 - Фазовая характеристика интегрирующей цепи                     |

```

41 figure; plot(fn(1:max_n),angle(int_cir(1:max_n))); grid on;
42 xlabel('f [Hz]'); ylabel('angle(int_cir) [rad]');
43 V=int_cir_.*U;
44 v=ifft(V);
45 % Figure 5 - Действительная часть сигнала на выходе интегрирующей цепи
46 figure; plot(tk,real(v),'r'); grid on;
47 xlabel('t [s]'); ylabel('real(ifft(int_cir .*U)) [V]');
48 % Figure 6 - Мнимая часть сигнала на выходе интегрирующей цепи
49 figure; plot(tk,imag(v),'r'); grid on;
50 xlabel('t [s]'); ylabel('imag(ifft(int_cir .*U)) [V]');
51 % K - комплексный коэффициент передачи дифференцирующей цепи;
52 % dif_cir = K(1:N/2) - значения K для положительных частот;
53 % conj(fliplr(K(2:N/2+1))) - значения K для отрицательных частот;
54 % dif_cir_ - частотная характеристика дифференцирующей цепи в целом;
55 K=1./(1+1./(i*2*pi*fn*tau)); dif_cir=K(1:N/2);
56 dif_cir_=[dif_cir conj(fliplr(K(2:N/2+1)))];
57 % Figure 7 - Амплитудно-частотная характеристика дифференцирующей цепи
58 figure; plot(fn(1:max_n),abs(dif_cir(1:max_n))); grid on;
59 xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(dif_cir)');
60 % Figure 8 - Фазовая характеристика дифференцирующей цепи
61 figure; plot(fn(1:max_n), [pi/2 angle(dif_cir(2:max_n))]); grid on;
62 xlabel('f [Hz]'); ylabel('angle(dif_cir) [rad]');
63 W=dif_cir_.*U;
64 w=ifft(W);
65 % Figure 9 - Действительная часть сигнала на выходе дифференцирующей це-
66 figure; plot(tk,real(w),'r'); grid on;
67 xlabel('t [s]'); ylabel('real(ifft(dif_cir .*U)) [V]');
68 % Figure 10 - Мнимая часть сигнала на выходе дифференцирующей цепи
69 figure; plot(tk,imag(w),'r'); grid on;
70 xlabel('t [s]'); ylabel('imag(ifft(dif_cir .*U)) [V]');
71 o=0;

```

## Упражнение ex22\_4

### Одиночный радиоимпульс

Данное упражнение позволяет *сравнить по ширине спектра* два случая: когда огибающая радиоимпульса является прямоугольной и когда во избежание скачков огибающей осуществляется сглаживание радиоимпульса в начале и в конце. Чтобы сравнить между собой эти случаи, следует *дважды запустить* программу: со значением параметра сглаживания  $a$ , равным 0, когда сглаживание отсутствует, и со значением  $a$ , отличным от нуля.

В этом упражнении осуществляется косинусоидальное сглаживание (при  $a \neq 0$ ) путем умножения отрезка гармонического колебания на так называемое окно Тьюки. Для этого границы отрезка гармонического колебания раздвигаются по сравнению со случаем отсутствия сглаживания: колебания начинаются в момент времени  $t_0 - a \cdot tp$  и заканчиваются в момент времени  $(t_0 + tp - 1) + a \cdot tp$ , где  $t_0$  – момент начала исходного радиоимпульса с прямоугольной огибающей, а  $tp$  – его длительность ( $t_0 + tp - 1$  – момент окончания импульса).

Само окно составляется из трех компонентов:  $win2$ ,  $win3$  и  $win4$  (операторы 43–45, 47, 49–50). Компонент  $win2$  обеспечивает плавное нарастание амплитуды колебаний в начале по формуле  $(1 - \cos \varphi) / 2$ , где  $\varphi$  изменяется от  $-\pi$  до 0 в пределах интервала времени от  $t_0 - a \cdot tp$  до  $t_0 + a \cdot tp$ . На протяжении отрезка времени от  $t_0 + a \cdot tp$  до  $(t_0 + tp - 1) - a \cdot tp$  значение окна  $win3$  равно 1. Компонент  $win4$  обеспечивает плавное спадание амплитуды колебаний в конце по формуле  $(1 + \cos \varphi) / 2$ , где  $\varphi$  изменяется от 0 до  $\pi$  в пределах интервала времени от  $(t_0 + tp - 1) - a \cdot tp$  до  $(t_0 + tp - 1) + a \cdot tp$ .

#### Указания

1. Обратитесь к программе ex22\_4 сначала согласно примеру в строке 15, а затем согласно примеру в строке 16. Ознакомьтесь с тем, насколько более узким становится спектр радиоимпульса в результате сглаживания его формы в начале и в конце.

2. (Факультативно.) Попытайтесь преобразовать программу ex22\_4 таким образом, чтобы за счет сужения спектров двух радиоимпульсов с различными частотами несущих  $fc1$  и  $fc2$  оказалось возможным извлечение этих импульсов порознь из их суммы. Сами радиоимпульсы могут располагаться на одном и том же отрезке времени или находится на каком-то расстоянии один от другого, но их спектры должны *почти не пересекаться*. Вырезая спектры каждого из них подобно тому, как в упражнении ex22\_2 производилось разделение двух АМ-колебаний путем образования «окон» в частотной области [строки 52–55 в программе ex22\_1; в данном случае  $middle$  может равняться  $(fc1 + fc2) / 2$ ], и применяя к каждой части спектра всей суммы обратное БПФ, получим радиоимпульсы в отдельности, *мало отличающиеся* от исходных по своей форме.

```

1 function ex22_4(N,delta_t,t0,tp,A,fc,a,dilation)
2 % "Одиночный радиоимпульс"
3 % N - число выборок во временной области (число степеней свободы,
4 % N должно быть целой степенью 2),  $N \geq 2^7$ ;
5 % delta_t - интервал, с которым берутся выборки во временной области, [с];
6 % t0 - момент начала импульса, выраженный целым числом delta_t;
7 % tp - длительность импульса, выраженная целым числом delta_t;
8 % значение t0+tp-1 должно быть меньше или равно N;
9 % A - амплитуда импульса [В];
10 % fc - частота несущей, выраженная числом интервалов дискретизации
11 % по оси частот;
12 % a - параметр косинусоидального сглаживания (t0-a*tp должно быть
13 % больше или равно 1, t0+tp-1+a*tp должно быть меньше или равно N);
14 % dilation - коэффициент растяжения по оси времени (целая степень  $2 < N$ );
15 % Пример обращения: ex22_4(2^10,1e-6,21,20,0.33,256,0.2,16);
16 % Пример обращения: ex22_4(2^10,1e-6,21,20,0.33,256,0.3,16);
17 % T - длительность сигнала [с]
18 % delta_f - интервал между выборками вдоль оси частот [Гц]
19 % fp - частота заполнения радиоимпульса [Гц]
20 T=N*delta_t;
21 delta_f=1/T;
22 fp=fc*delta_f;
23 k=0:N-1; tk=delta_t*k; t_max=N/dilation;
24 n=0:N-1; fn=delta_f*n;
25 % carrier - несущее колебание для заполнения им видеоимпульса
26 carrier=sin(2*pi*fp*tk);
27 % формирование радиоимпульса u без сглаживания на концах
28 u1=zeros(1,t0-1);
29 u2=A*ones(1,tp);
30 u3=zeros(1,N-t0-tp+1);
31 u=[u1 u2 u3];
32 u=u.*carrier;
33 % Figure 1 - Радиоимпульс как функция времени без сглаживания на концах
34 figure; plot(tk(1:t_max),u(1:t_max),'b'); grid on;
35 xlabel('t [с]'); ylabel('u [В]');
36 U=fft(u);
37 % Figure 2 - Амплитудный спектр радиоимпульса без сглаживания на концах
38 figure; stem(fn(1:N/2),abs(U(1:N/2)),'m'); grid on;
39 xlabel('f [Гц]'); ylabel('abs(U) [В]');
40 % вычисление граничных точек сглаживающих полупериодов косинусоиды

```

```

41 af=floor(a*tp); t0_b=t0-af; t0_a=t0+af; te_b=t0+tp-1-af; te_a=te_b+2*af;
42 % формирование "косинусоидального окна" win
43 win1=zeros(1,t0_b-1);
44 if af~=0
45     dphi=pi/(2*af);
46     kw2=t0_b:t0_a-1;
47     win2=(1-cos((kw2-t0_b)*dphi))/2;
48 end
49 win3=ones(1,te_b-t0_a+1);
50 if af~=0
51     kw4=te_b+1:te_a;
52     win4=(1+cos((kw4-te_b)*dphi))/2;
53 end
54 win5=zeros(1,N-te_a);
55 if af~=0
56     win=[win1 win2 win3 win4 win5];
57 else
58     win=[win1 win3 win5];
59 end
60 % Figure 3 - Временное окно win, обеспечивающее сглаживание радиоимпульса
61 % на концах
62 figure; plot(tk(1:t_max),win(1:t_max),'k'); ylim([-0.2 1.2]); grid on;
63 xlabel('t [s]'); ylabel('win');
64 % формирование растянутого радиоимпульса с прямоугольной огибающей,
65 % в отношении которого предстоит сглаживание на концах
66 u1=zeros(1,t0_b-1);
67 u2=A*ones(1,tp+2*af);
68 u3=zeros(1,N-te_a);
69 u=[u1 u2 u3];
70 % умножение радиоимпульса с прямоугольной огибающей на "окно"
71 u=u.*win;
72 u=u.*carrier;
73 % Figure 4 - Радиоимпульс со сглаженными концами как функция времени
74 figure; plot(tk(1:t_max),u(1:t_max),'b'); grid on;
75 xlabel('t [s]'); ylabel('u [V]');
76 U=fft(u);
77 % Figure 5 - Амплитудный спектр радиоимпульса со сглаженными концами
78 figure; stem(fn(1:N/2),abs(U(1:N/2)),'m'); grid on;
79 xlabel('f [Hz]'); ylabel('abs(U) [V]');
80 o=0;

```

## Приложение 1. Вывод (2.1)

Согласно условию теоремы

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega & \text{при } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}), \\ 0 & \text{при } t < -\frac{T}{2} \text{ и } t \geq \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (\text{П1.1})$$

Продолжим  $x(t)$  периодически вдоль оси времени  $t$  с периодом  $T$  и представим периодически продолженный сигнал  $x^\wedge(t)$  в виде ряда Фурье:

$$x^\wedge(t) = \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} E_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t},$$

где

$$E_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^\wedge(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j(n\Delta\omega)t} dt = \frac{1}{T} S(n\Delta\omega).$$

Подставляя (П1.1) в (0.1) и имея в виду, что в пределах  $[-T/2, T/2)$  справедливо равенство  $x(t) = x^\wedge(t)$ , получим

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} \frac{1}{T} S(n\Delta\omega) e^{-j(n\Delta\omega)t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} S(n\Delta\omega) \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(\omega - n\Delta\omega)t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} S(n\Delta\omega) \left( -\frac{1}{j(\omega - n\Delta\omega)} e^{-j(\omega - n\Delta\omega)t} \right) \bigg|_{-T/2}^{T/2} = \\ &= \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} S(n\Delta\omega) \left[ -\frac{1}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)} \cdot \frac{e^{-j(\omega - n\Delta\omega)\frac{T}{2}} - e^{j(\omega - n\Delta\omega)\frac{T}{2}}}{2j} \right] = \\ &= \sum_{n=-\Gamma}^{\Gamma} S(jn\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}. \end{aligned}$$

## Приложение 2. Вывод (4.2)

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} x(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_{\text{rp}}(t - k\Delta t)}{\omega_{\text{rp}}(t - k\Delta t)} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \underbrace{\int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \omega_{\text{rp}}(t - k\Delta t)}{\omega_{\text{rp}}(t - k\Delta t)} e^{-j\omega t} dt}_{I_1} \\
 &= \dots
 \end{aligned} \tag{П2.1}$$

Произведем в  $I_1$  замену переменных:  $t - k\Delta t = t^*$ ,  $dt = dt^*$ ,  $t = t^* + k\Delta t$ .

Получим

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \omega_{\text{rp}} t^*}{\omega_{\text{rp}} t^*} e^{-j\omega t^*} e^{-j\omega k\Delta t} dt^* \\
 &= e^{-j\omega k\Delta t} \underbrace{\int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \omega_{\text{rp}} t}{\omega_{\text{rp}} t} e^{-j\omega t} dt}_{I_2}.
 \end{aligned} \tag{П2.2}$$

Чтобы найти  $I_2$ , решим другую задачу. Пусть

$$\tilde{S}(j\omega) = \begin{cases} A \cdot \frac{\pi}{\omega_{\text{rp}}} = A \cdot \Delta t & \text{при } -\omega_{\text{rp}} \leq \omega < \omega_{\text{rp}}, \\ 0 & \text{при } \omega < -\omega_{\text{rp}} \text{ и } \omega \geq \omega_{\text{rp}} \end{cases}$$

(размерность  $\tilde{S}(j\omega)$  [В·с]). Тогда

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \tilde{S}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} A \frac{\pi}{\omega_{\text{rp}}} \int_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{A}{2\omega_{\text{rp}}} \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_{\text{rp}}}^{\omega_{\text{rp}}} = A \frac{e^{j\omega_{\text{rp}} t} - e^{-j\omega_{\text{rp}} t}}{2j\omega_{\text{rp}} t} = A \frac{\sin \omega_{\text{rp}} t}{\omega_{\text{rp}} t}
 \end{aligned}$$



(размерность  $\tilde{x}(t)$  [В]). В силу взаимной однозначности преобразования Фурье

$$I_2 = \begin{cases} \Delta t & \text{при } \omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}), \\ 0 & \text{вне интервала } [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}) \end{cases} \quad (\text{П2.3})$$

(размерность  $I_2$  [с]).

Подставляем (П2.3) в (П2.2):

$$I_1 = \Delta t \cdot e^{-j\omega k \Delta t} \quad \text{при } \omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}) .$$

Следовательно, выкладки, прерванные в (П2.1), можно продолжить следующим образом:

$$S(j\omega) = \dots = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-j\omega k \Delta t} \quad \text{при } \omega \in [-\omega_{\text{гр}}, \omega_{\text{гр}}) .$$

### Приложение 3. Вывод (5.2)

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T}{2}(\omega - n\Delta\omega)} e^{j\omega t} d\omega}_{I'_1} \\
 &= \dots
 \end{aligned} \tag{П3.1}$$

Произведем в  $I'_1$  замену переменных:  $\omega - n\Delta\omega = \omega^*$ ,  $d\omega = d\omega^*$ ,  $\omega = \omega^* + n\Delta\omega$ . Получим

$$\begin{aligned}
 I'_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \omega^* \frac{T}{2}}{\omega^* \frac{T}{2}} e^{j\omega^* t} e^{jn\Delta\omega t} d\omega^* = e^{jn\Delta\omega t} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \frac{\sin \omega^* \frac{T}{2}}{\omega^* \frac{T}{2}} e^{j\omega^* t} d\omega^*}_{I'_2}.
 \end{aligned} \tag{П3.2}$$

Чтобы найти  $I'_2$ , решим другую задачу. Пусть

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} A & \text{при } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}), \\ 0 & \text{при } t < -\frac{T}{2} \text{ и } t \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$

(размерность  $\tilde{x}(t)$  [В]). Тогда

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}(j\omega) &= \int_{-\Gamma}^{\Gamma} \tilde{x}(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = AT \frac{e^{-j\omega \frac{T}{2}} - e^{j\omega \frac{T}{2}}}{2 \cdot (-j\omega \frac{T}{2})} = AT \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}}
 \end{aligned}$$

(размерность  $\tilde{S}(j\omega)$  [В · с]). В силу взаимной однозначности преобразования Фурье

$$I'_2 = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{при } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}), \\ 0 & \text{вне интервала } [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \end{cases} \quad (\text{П3.3})$$

(размерность  $I'_2$  [с<sup>-1</sup>]).

Подставляем (П3.3) в (П3.2):

$$I'_1 = \frac{1}{T} e^{-jn\Delta\omega t} \text{ при } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}).$$

Следовательно, выкладки, прерванные в (П3.1), можно продолжить следующим образом:

$$x(t) = \dots = \frac{1}{T} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(jn\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \text{ при } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}).$$

## Приложение 4. Быстрое преобразование Фурье

В настоящее время получили большое распространение специальные алгоритмы расчета  $N$ -точечного дискретного преобразования Фурье, позволяющие значительно сократить время, занимаемое этой процедурой на компьютере, по сравнению с вычислениями непосредственно по формулам (6.3) и (6.4). Такого рода вычислительные алгоритмы носят название быстрого преобразования Фурье (БПФ; Fast Fourier Transform, FFT). В частности, в системе MATLAB реализован так называемый принцип «прореживания по времени» («прореживания по частоте»), наиболее эффективный в случае, когда число  $N$  равно целой степени 2.

Объясним, в чем заключается этот алгоритм, на примере прямого дискретного преобразования Фурье набора исходных величин  $\{x_k, k = 0, 1, \dots, N-1\}$  в результирующие значения  $\{X_n, n = 0, 1, \dots, N-1\}$  согласно (6.3):

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jnk \cdot \frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{П4.1})$$

Предполагая число  $N$  равным целой степени 2, разобьем **на первом шаге** последовательность  $x_k$  на две последовательности: последовательность  $\{y_m, m = 0, 1, \dots, (N/2)-1\}$  чисел  $x_k$  с четными номерами и последовательность  $\{z_m, m = 0, 1, \dots, (N/2)-1\}$  чисел  $x_k$  с нечетными номерами:

$$y_m = x_{2m}, \quad z_m = x_{2m+1}, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1.$$

Пусть  $\{Y_n, n = 0, 1, \dots, (N/2)-1\}$  и  $\{Z_n, n = 0, 1, \dots, (N/2)-1\}$  – прямые  $(N/2)$ -точечные ДПФ последовательностей  $\{y_m\}$  и  $\{z_m\}$  соответственно:

$$\begin{cases} Y_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} y_m e^{-jmn \cdot \frac{2\pi}{N/2}}, & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1; \\ Z_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} z_m e^{-jmn \cdot \frac{2\pi}{N/2}}, & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1. \end{cases} \quad (\text{П4.2})$$

Введем следующие обозначения:

$$w_0 = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (w_0 - \text{корень } N\text{-й степени из } 1!), \quad (\text{П4.3})$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k w_0^{kn}, \quad (\text{П4.4})$$

$$Y_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} y_m w_0^{2mn}, \quad (\text{П4.5})$$

$$Z_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} z_m w_0^{2mn}. \quad (\text{П3.6})$$

Подчеркнем еще раз, что величины  $X_n$  определены в (П4.4) для  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , а величины  $Y_n$  и  $Z_n$  определены в (П4.5) и (П4.6) только для  $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$ , поэтому для выражения  $X_n$  через  $Y_n$  и  $Z_n$  при  $n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1, \dots, N-1$  нам чуть ниже потребуются дополнительные преобразования:

$$X_n = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} w_0^{2mn} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} w_0^{(2m+1)n} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_m w_0^{2mn} + w_0^n \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z_m w_0^{2mn} = \\ = Y_n + w_0^n \cdot Z_n, & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1, \\ \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_m w_0^{2mn} + w_0^n \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z_m w_0^{2mn}, & n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (\text{П4.7})$$

Степени  $w_0$ , фигурирующие в нижней строке соотношения (П4.7), при  $n \geq \frac{N}{2}$  можно представить в виде

$$w_0^n = w_0^{\frac{n-N}{2}} \cdot w_0^{\frac{N}{2}} = w_0^{\frac{n-N}{2}} e^{-j\pi} = -w_0^{\frac{n-N}{2}}; \quad (\text{П4.8})$$

$$w_0^{2mn} = \left(w_0^n\right)^{2m} = \left(-w_0^{\frac{n-N}{2}}\right)^{2m} = w_0^{2m\left(\frac{n-N}{2}\right)}. \quad (\text{П4.9})$$

Подставляя (П4.8) и (П4.9) в нижнюю строку (П4.7), получим

$$X_n = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_m w_0^{2mn} + w_0^n \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z_m w_0^{2mn} = \\ = Y_n + w_0^n \cdot Z_n, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} y_m w_0^{2m\left(\frac{n-N}{2}\right)} - w_0^{\frac{n-N}{2}} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} z_m w_0^{2m\left(\frac{n-N}{2}\right)} = \\ = Y_{\frac{n-N}{2}} - w_0^{\frac{n-N}{2}} \cdot Z_{\frac{n-N}{2}}, \quad n = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (\text{П4.10})$$

Рис. П4.1 служит графической иллюстрацией того, что делается **на первом шаге** алгоритма «прореживания по времени» согласно (П4.10): нахождение всей совокупности значений  $N$ -точечного ДПФ на этом шаге сводится к выполнению двух  $(N/2)$ -точечных ДПФ с входными данными с четными и нечетными номерами и к последующему сложению и вычитанию результатов этих  $(N/2)$ -точечных ДПФ. Данные, получаемые на выходе второго из этих ДПФ, умножаются на коэффициент, зависящий от номера  $n$  результата последней ДПФ,  $n = 0, 1, \dots, (N/2) - 1$ ; на рис. П4.1 значение  $w$  равно  $w_0$ . Более точно смысл операции сложения/вычитания, изображенный на рисунке кружком со знаком  $\pm$ , объясняется позднее.

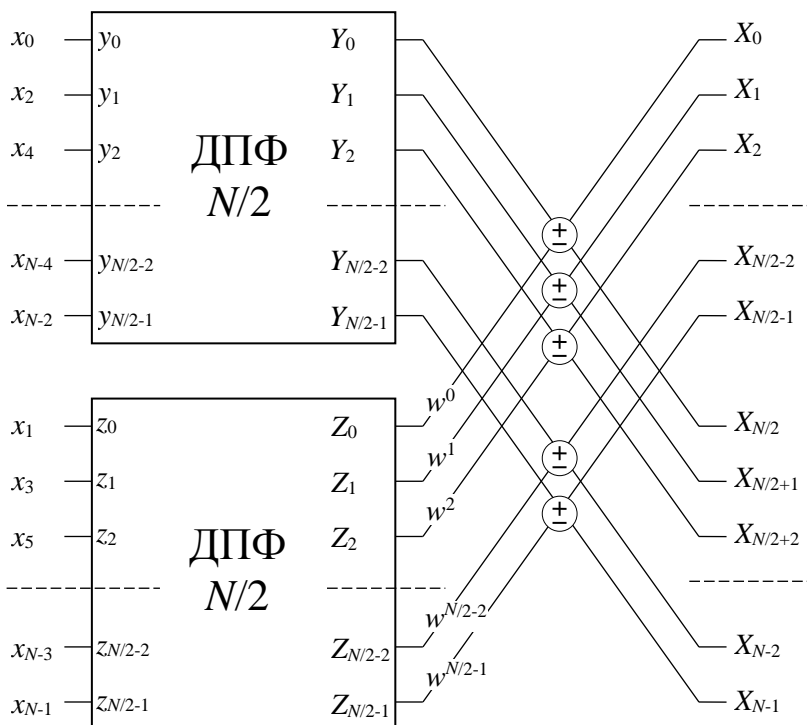


Рис. П4.1.

**На втором шаге** осуществляется подобный переход в каждом из блоков, реализующих  $(N/2)$ -точечное ДПФ, к двум ДПФ с вдвое меньшим числом точек с последующим сложением/вычитанием результатов последних ДПФ, для чего каждая из последовательностей  $\{y_m\}$  и  $\{z_m\}$  разбивается на подпоследовательности чисел с четными и нечетными номерами и в отношении этих подпоследовательностей реализуются  $(N/4)$ -точечные ДПФ. На рис. П4.2 показано на примере одного из  $(N/2)$ -точечных ДПФ, возникших на предыдущем шаге, что совокупность действий **на втором шаге** точно совпадает с тем, что делалось ранее, за исключением множителя  $w$ , который **на втором шаге** равен  $w_1 = w_0^2$ :

$$u_m = y_{2l}, \quad v_m = y_{2l+1} \quad (l, m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1),$$

$$U_m = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} u_l e^{-jlm \frac{2\pi}{(N/4)}} = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} u_l w_0^{4lm} = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} u_l w_1^{2lm}, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1,$$

$$V_m = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} v_l e^{-jlm \frac{2\pi}{(N/4)}} = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} v_l w_0^{4lm} = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} v_l w_1^{2lm}, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1,$$

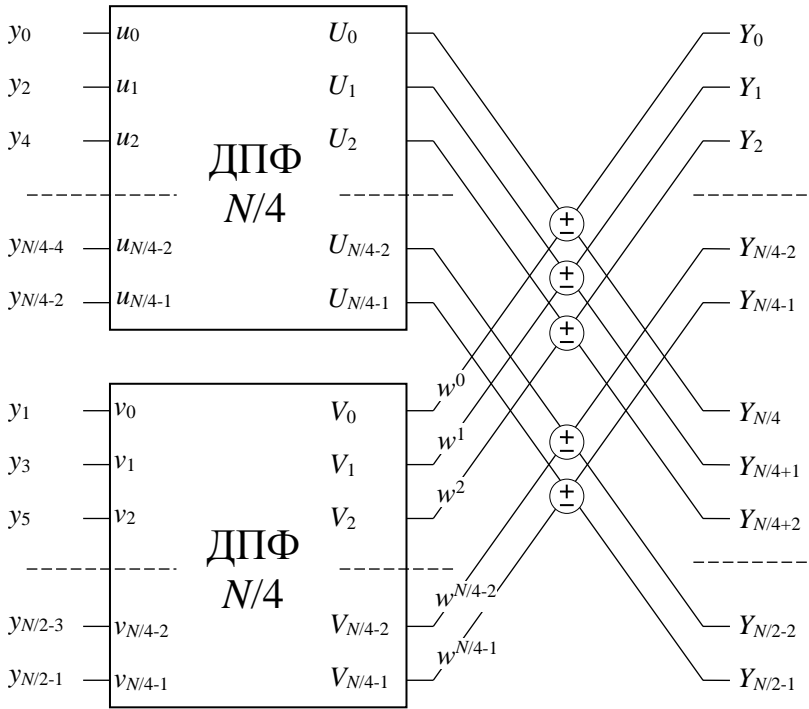
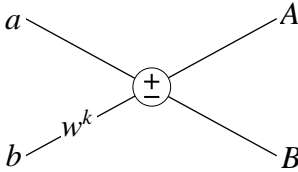


Рис. П4.2.



$$Y_m = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} u_l w_1^{2lm} + w_1^m \cdot \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} v_l w_1^{2mn} = \\ = U_m + w_1^m \cdot V_m, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1, \\ \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} u_l w_0^{2l\left(m-\frac{N}{4}\right)} - w_1^{m-\frac{N}{4}} \cdot \sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1} v_l w_1^{2l\left(m-\frac{N}{4}\right)} = \\ = U_{m-\frac{N}{4}} - w_1^{m-\frac{N}{4}} \cdot V_{m-\frac{N}{4}}, \quad m = \frac{N}{4}, \frac{N}{4}+1, \dots, \frac{N}{2}-1. \end{cases} \quad (\text{П4.11})$$

Целиком «прореживание по времени» (то есть разбиение на последовательности чисел с четными и нечетными номерами и переход к ДПФ со все меньшим числом точек) при  $N$ , равном целой степени 2, выполняется за  $\log_2 N$  шагов и заканчивается 2-точечным ДПФ. На каждом шаге совершается  $N/2$  «элементарных действий» с двумя аргументами и двумя результатами; про одно такое «элементарное действие» говорят, что оно реализуется по принципу «бабочки» (рис. П4.3):



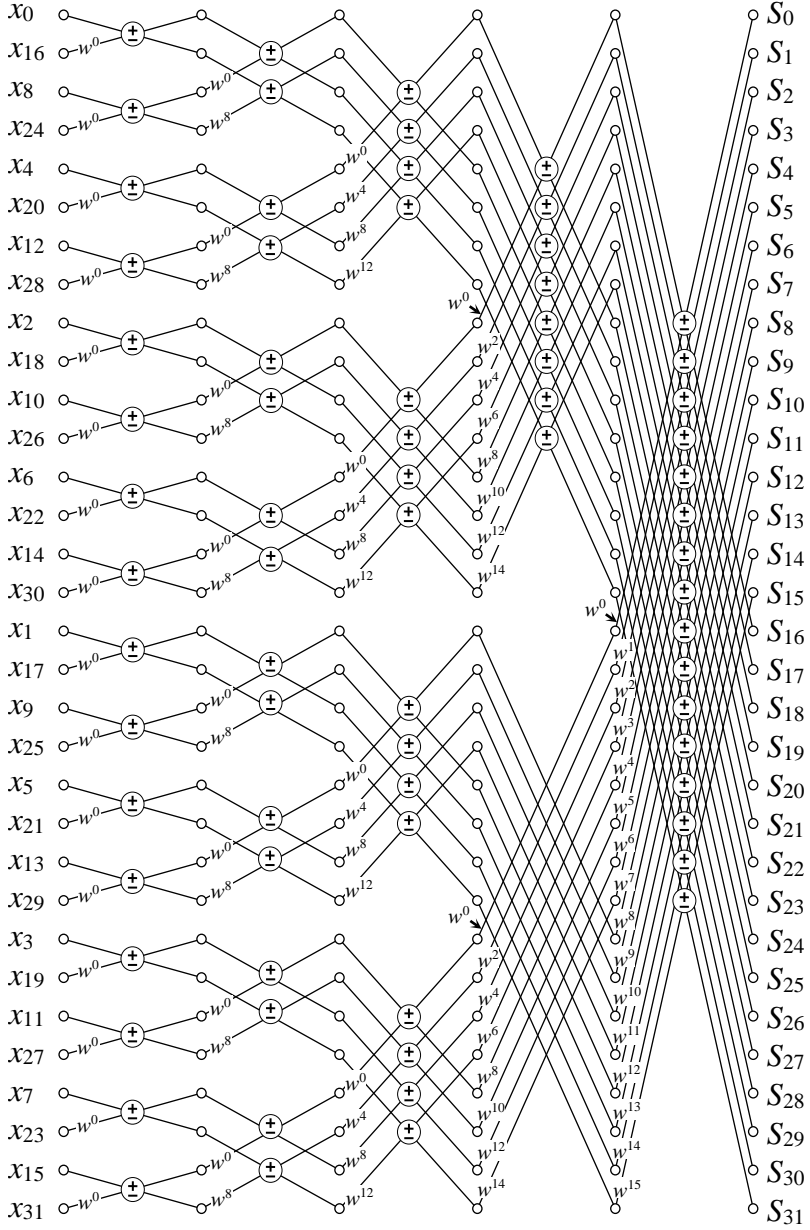
$$A = a + w^k \cdot b, \quad B = a - w^k \cdot b,$$

Рис. П4.3.

где множитель  $w^k$  может равняться, например,  $w_0^k = e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$ . В частности, на последнем шаге «прореживания по времени» ( $k = 0$ ) осуществляется прямое 2-точечное ДПФ:

$$X_n = \sum_{k=0}^1 x_k e^{-jkn\pi} = x_0 + e^{-jn\pi} \cdot x_1, \quad n = 0, 1,$$

то есть  $X_0 = x_0 + x_1$ ,  $X_1 = x_0 - x_1$  [см. (П4.1) при  $N = 2$ ].



На рис. П4.4 (на предыдущей странице) в качестве иллюстрации изображена полностью работа алгоритма «прореживание по времени» для случая  $N = 2^5$ , где  $w = w_0 = \exp(-j \cdot 2\pi / 2^5)$ .

Обратное  $N$ -точечное БПФ рассчитывается по аналогичному алгоритму «прореживания по частоте». Обратное 2-точечное ДПФ согласно (6.4) имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 X_n e^{jkn\pi} = \frac{1}{2} (X_0 + e^{jk\pi} \cdot X_1), \quad k = 0, 1,$$

то есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (X_0 + X_1) &= \frac{1}{2} [(x_0 + x_1) + (x_0 - x_1)] = x_0, \\ \frac{1}{2} (X_0 - X_1) &= \frac{1}{2} [(x_0 + x_1) - (x_0 - x_1)] = x_1. \end{aligned}$$

### ***Сравнение ДПФ и БПФ по числу выполняемых арифметических операций***

Чтобы вычислить одно значение  $X_n$  по формуле (П4.1), нужно выполнить, грубо говоря,  $2N$  арифметических действий ( $N$  умножений и  $N$  сложений); чтобы найти все  $N$  значений  $\{X_n\}$ , необходимо произвести  $2N^2$  таких операций.

Как было объяснено выше, реализация  $N$ -точечного БПФ требует осуществления  $\log_2 N$  шагов, на каждом из которых производится  $N/2$  умножений,  $N/2$  сложений и  $N/2$  вычитаний, то есть всего  $\frac{3}{2} N \log_2 N$  арифметических операций.

При  $N = 2^{10}$  требуемое число операций сокращается в

$$\frac{2N^2}{(3/2) \cdot N \log_2 N} \approx \frac{2 \cdot 10^6}{1.5 \cdot 10^4} \approx 100 \text{ раз.}$$

## Литература

1. *Воронов Е. В.* Начала цифровой обработки сигналов для студентов–физиков с упражнениями в MATLAB. – М.: МФТИ, 2010.
2. *Сергиенко А. Б.* Цифровая обработка сигналов. 3-е изд. – СПб.: БХВ–Петербург, 2011.