Работа 1.4.2
Сибгатуллин Булат, Б01-007

Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника

Цель работы: определить величину ускорения маятника свободного падения, пользуясь оборотным маятником.

В работе используются: оборотный маятник, счетчик числа колебанийб секундомерб штангенцирекль с пределом измерений 1 *м*.

Свободным падением называют движение тела вблизи поверхности Земли, при котором модно не учитывать силы сопротивления, возникающие в среде окружающей тело. Ускорение свободного падени вблизи поверхности Земли можем рассчитать по формуле:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{1}$$

Система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной. В этой системе на тело, кроме гравитационных сил, действуют ещё центробежная сила и сила Кориолиса. Под ускорением свободного падения обычно понимается тангенциальная к траектории компонента ускорения, и сила Кориолиоса при этом не учитывается. Очевидно, что для покоящегося на поверхности Земли тела сумма силы притяжения к Земле и центробежной равна силе реакции опоры, то есть весу тела.

Сила притяжения тела к Земле определяется произведением его массы m на напряженность поля тяготения Земли, которая обычно обозначается $\vec{g_0}$:

$$\vec{F_0} = m\vec{g_0} \tag{2}$$

Напряженность поля тяготения определяется распределением масс в Земле. Если бы Змеля представляла собой шар постоянной плотности, то внутри шара напряженность росла пропорционально расстоянию от центра Земли, а вне шара падала бы обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. В действительности Земля не очень однородна. Плотность её растёт с глубиной. Из-за этого напряженность поля тяготения даже немного увеличивается с глубиной, примерно до 2800 *км* (при этом расстояние до центра Земли около 3600 *км*), а затем начинает падать по линейному закону. Над поверхностью Земли распределение напряженности гравитационного поля близко к распределению вне однородного шара. На пысоте порядка 300 *км* напряженность поля тяготения меньше, чем у поверхности Земли, примерно на 10%.

Кроме сил притяжения к Земле, действуют ещё силы притяжения к Луне и Солнцу, но вклад их в полную напряженность гравитационного поля очень мал, хотя они в глобальных масштабах вызыва.т такие заметные явления, как приливы.

Вращение Земли привело к её деформации за счёт центробежных сил. Суммарная напряженность поля,обозначаемая g и равная ускорению свободного падения, обычно приводится в таблицах распределения свободного падения по поверхности Земли. На полюсе $g = 983,2155$ *см*$/$*с*^{2}, а затем умеьшается с уменьшением широты, и на экваторе $g = 978,0300$ *см*$/$*с*^{2}. Это приводит, например к тому, что маятниковые часы на экваторе за сутки отстанут от аналогичных часов на полюсе на 3,8 минуты.

Неоднородность Земли в горизонтальном направлении также приводит к локальным изменениям g. Большое количество очень точных измерений на поверхности Земли показало, что g менятся также со временем. Периодические изменения, связанные с лунными приливами, равны примерно $2,49 \cdot 10^{-4}$ *см*$/$*с*^{2}, а с солнечными - порядка $9,6 \cdot 10^{-5}$ *см*$/$*с*^{2}. Такого же порядка изменения происходящиев течение года, связаны с геологическими процессами внутри Земли (так называемые вековые изменения.

Первые измерения g с точностью до 10^{-3} *см*$/$*с*^{2} (миллигал) были выполнены в начале века с помощью оборотных маятников. Для получения такой точности периоды колебаний должны быть измерены с точностью до 10^{-6} *с*, а приведенные длины - до 1 микрона. Современные методы измерения полей g делятся на динамические и статические. К динамическим относятся измерения с помощью маятников, в том числе и оборотных.

В последнее время благодаря увеличению точности измерений расстояний и времен стали применяться прямые методы измерения ускорения падающих тел. Использование лазерных интерферометров для измерения пути падающего в вакуумной трубе тела, снабженного уголковым отражателем, и атомных часов позволило определить абсолютное значение ускорения свободного падения с точностью до $3 \cdot 10^{-6}$ *см*$/$*с*^{2}. Динамические методы позволяют измерять абсолютные значения ускорения свободного падения. Статические методы позволяют измерять относительное изменение ускорения свободного подения с точностью до $1,5 \cdot 10^{-5}$ *см*$/$*с*^{2} и основываются на измерении деформации пружин, на которых подвешены грузики, либо на закручивании горизонтально закрепленных нитей под действием рычагов с грузиками.

Период колебаний физического маятника определяется формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} \tag{3}$$

Здесь I - момент инерции маятника относительно оси качания, m - масса маятника, a - расстояние от центра масс до оси качания.

Приведенная длина физического маятника, равная длине математического маятника, имеющего такой же период колебаний, выражается формулой:

$$l_{pr} = \frac{I}{ma} \tag{4}$$

Массу маятника и период его колебаний можно измерить с высокой точностью, но точно измерить момент инерции не удается. Указанного недостатка лишен метод оборотного маятника, который позволяется исключить момент инерции из расчетной формулы для g.

Метод оборотного маятника основан на том, что период колебаний физического маятника не изменяется при перемещении оси в центр качаний, т.е. в точку, отстоящую от оси качаний на расстояние, равное приведенной длине маятника, и лежащую на одной прямой с точкой подвеса и центром масс маятника.

Применяемый в настоящей работе оборотный маятник (рис. 1) состоит из стальной пластины (или стержня), на которой укреплены две однородные призмы Π_1 и Π_2. Период колебаний маятника можно менять при помощи подвижных грузов Γ_1, Γ_2 и Γ_3.

Допустим, что нам удалось найти такое положение грузов, при котором периоды колебаний маятника T_1 и T_2 на призмах Π_1 и Π_2 совпадают, т.е.

$$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mgl_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mgl_2}}, \tag{5}$$

где L_1 и L_2 - расстояния от центра массы маятника до призм Π_1 и Π_2.

Условием этого, очевидно, является равенство приведенных длин, т.е. равенство величин I_1/ml_1^2 и I_2/ml_2^2. По теореме Гюйгенса-Штейнера

$$I_1 = I_0 + ml_1^2, \quad I_1 = I_0 + ml_1^2, \tag{6}$$

где I_0 - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс (и параллельной оси качаний). Исключая из (5) и (6) I_0 и m, получим формулу для определения g:

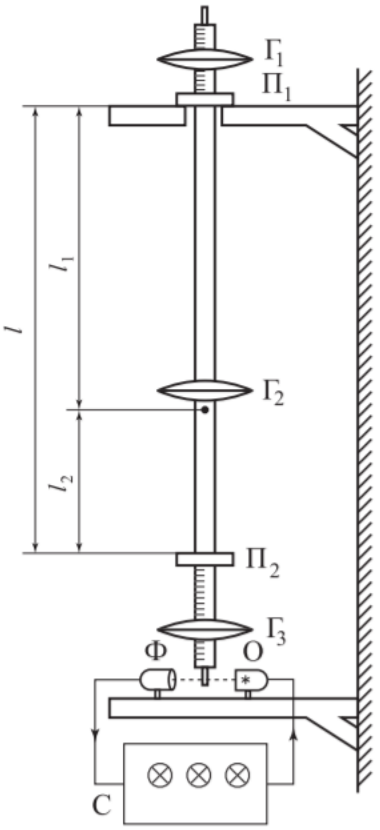

Рис. 1. Оборотный маятник

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(l_1 + l_2) = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}. \tag{7}$$

Здесь $L = l_1 + l_2$ - расстояние между призмами Π_1 и Π_2, которое легко может быть измерено с выскокой точностью ($0,1$ *мм*) при помощи большого штангенциркуля (но не путем суммирования измерений l_1 и l_2, погрешность получения которых в работе велика и составляет несколько миллиметров).

Заметим, что формула(7) следует из формул (5) и (6) лишь при условии, что

$$l_1 \neq l_2; \tag{8}$$

так как при $l_1 = l_2$ равенства (5) и (6) удовлетворяются тождественно.

При выводе формулы (7) мы полагали, что $T_1 = T_2$. На самом деле точного равенства добиться, конечно, невозможно. Тогда

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\tfrac{I_0 + ml_1^2}{mgl_1}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\tfrac{I_0 + ml_2^2}{mgl_2}}.$$

Из этих равенств имеем

$$T_1^2 g l_1 - T_2^2 g l_2 = 4\pi^2 (l_1^2 - l_2^2),$$

откуда

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2} = 4\pi \frac{L}{T_0^2}, \tag{9}$$

где

$$T_0^2 = \frac{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2}{l_1 - l_2} = T_2^2 + \frac{l_1}{l_1 - l_2}(T_1 + T_2)(T_1 - T_2). \tag{10}$$

Погрешность определения g может быть найдена из (9):

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2}. \tag{11}$$

Входящая в эту формулу погрешность σ_{T_0} сама должна быть вычислена. Прежде чем это сделать, исследуем, как зависит период колебаний от расстояния l между центром масс и осью качаний маятника. Для этого выразим момент инерции I с помощью (6) через I_0:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ml^2}{mgl}}. \tag{12}$$

График этой зависимости изображен на рис. 2. При $l \to 0$ период T стремится к бесконечности по закону $l^{-1/2}$. При $l \to \infty$ он стремится к бесконечности как $l^{1/2}$. Период минимален при двух разных значениях l: одно из них больше, а другое меньше l_{min}. Эти разные значения и были использованы в формулах (5) - (7). Из графика видно , что при изменении T величины l_1, l_2 сближаются или удаляются друг от друга.

Найдем зависимость погрешности в определении T_0 от разности $l_1 - l_2$. Для этого исследуем, например, как завсити σ_{T_0} от погрешности в поределении T_1. Дифференцируя первое равенство (10) и полагая T_2 неизменным, мы получаем

$$2T_0 (dT_0)_{T_2} = \tfrac{l_1}{l_1 - l_2} 2T_1 dT_1, \quad (dT_0)_{T_2} = \tfrac{l_1}{l_1 - l_2} \cdot \tfrac{T_2}{T_0} dT_1.$$

Аналогично при неизменном T_1 получим

$$(dT_0)_{T_1} = -\tfrac{l_2}{l_1 - l_2} \cdot \tfrac{T_2}{T_0} dT_2.$$

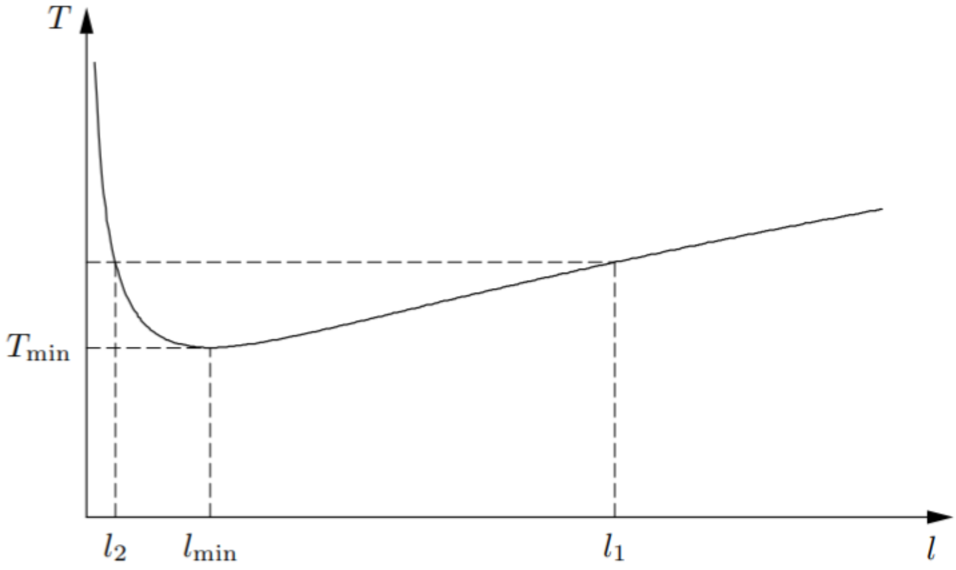

Рис. 2. Зависимость периода колебания маятника от расстояния между центром масс и осью качаний

Рассмотрим случай, когда l_1 и l_2 близки друг к другу.Знаменатель формулы при этом мал и погрешность в определении T_0 резко возрастает. Тот же вывод справедлив для пересчета погрешности dT_2 в погрешность dT_0 (при неизменном T_1). Поэтому период колебаний следует выбирать так, чтобы l_1 и l_2 заметно отличались друг от друга (при различии их в 1,5 раза погрешность T_0 превышает погрешность T_1 менее чем на порядок).

Получим формулу для расчета погрешности dT_0. Обратимся для этого ко второму равенству (10). Заметим, что $T_1 \approx T_2$, так что $T_1 - T_2$ мало. Поэтому при не слишком малых $l_1 - l_2$ второй член в этой формуле играет роль небольшой поправки.

Следовательно, если учитывать ошибки измерений l_1 и l_2 (но не T_1 и T_2), то эти ошибки будут умножаться на малую величину $T_1 - T_2$ и ими при расчете погрешностей σ_{T_0} можно пренебречь (даже несмотря на то, что эти ошибки могут быть равны нескольким миллиметрам, что обычно получается в данной работе). Учитывая, что погрешностии в измерении периодов T_1 и T_2 независимы и примерно равны друг другу, окончательно найдем, используя для расчета ошибок общую формулу:

$$\sigma_{T_0} \approx \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{l_1 - l_2}\sigma_T, \tag{13}$$

где σ_T - погрешность измерений периодов.

Видно, что погрешность периодов слабо зависит от точности с которой выпонятеся $T_1 = T_2$. Поэтому нет смысла тратить время на его уточнение, когда они равны друг другу, с точностью до нескольких процентов.

Заметим, наконец, что соотношение l_1/l_2 не должно быть слишком большим. При увеличении их отношения, увеличивается время измерения и растет роль сил трения, которые при выводе формулы (3) не учитывались.

Поясним это утверждение. Роль трения определяется отношением работы, производимой этими силами за период колебаний, к запасу колебательной энергии в системе. Работа сио трения слабо зависит от l_2. Запас колебательной энергии равен потенциальной энергии, которую приобретает маятник при поднятии его центра масс, т.е.

$$W_{hes} = mgl_2(1 - \cos\varphi),$$

где φ - угол отклонения маятника. При уменьшение l_2 значение W_hes падает. Таким образом, мы приходим к выводу, что отношение l_1 к l_2 не должно быть ни слишком большим; желательно, чтобы выполнялось условие

$$1,5 < \frac{l_1}{l_2} < 3. \qquad (14)$$

Ход работы

1. Познакомимся с прибором и оборотным маятником. Определим из характеристик прибора его погрешность $\sigma_t = 0,01(c)$. Определим рабочий диапазон амплитуд, в пределах которого период колебаний T можно считать не зависящим от амплитуды. Для этого установив маятник на одной из призм и отклонив его на угол $\varphi(\sim 10°)$, и измерим время 100 полных колебаний. Уменьшим угол отклонения в два раза и повторим измерения в результате получив период *T'*.

Получим $T = 151,67/100 = 1,5167$ *c*, *T'* $= 151,45/100 = 1,5145$ *c*. В пределах точности измерений получаем $T =$ *T'*.

2. Изучим каким образом время колебаний T_1 и T_2 (при опоре на призмы Π_1 и Π_2 соответсвенно) зависят от положения грузов Γ_1, Γ_2 и Γ_3. Изначально грузы Γ_1 и Γ_3 вплотную прижаты к соответствующим призмам.

T_1	1,531	1,527	1,537	1,534	1,526
T_2	1,517	1,507	1,527	1,523	1,509

В данной таблице первый столбик (не считаю столбца с обозначениями T_1 И T_1) включает в себя информацию о периодах в начальный момент времени. Второй столбец задает информацию о периодах при Γ_2 смещенном в сторону Γ_1, третий при Γ_2 смещенном в сторону Γ_3, четвертый при Γ_1 смещенном в сторону от Γ_1 и пятый при Γ_3 смещенном в сторону от Γ_1.

По результатам измерений можем определить, что на изменение T_1 в большей степени влияет перемещение Γ_1. На изменение T_2 в большей степени влияет перемещение Γ_3. А на изменение $|T_1 - T_2|$ в большей степени влияет перемещение Γ_2. При чем при перемещении Γ_1 и Γ_3 периоды T_1 и T_2 изменяются в одну сторону, а при перемещении Γ_2 в разные.

3. Перемещая груз наиболее сильно влияющий на величину разности (в нашем случае это Γ_2) добьемся грубого совпадения периодов. В результате получим $T_1 = 1,532$ и $T_2 = 1,522$, тогда $|T_1 - T_2| = 0,010$. Проверим, удовлетворяют ли в этом случае l_1 и l_2 неравенству (14):

$l = 60,00 \pm 0,01$ (*мм*)

$l_1 = 37,4 \pm 0,1$ (*мм*)

$l_2 = 22,5 \pm 0,1$ (*мм*)

В таком случае:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{37,4}{22,5} = 1,66.$$

Следовательно l_1 и l_2 удовлетворяют неравенству (14).

Перемещая $Г_1$ и $Г_3$ добьемся более точного совпадения T_1 и T_2. В результате получим $T_1 = 1,537$ и $T_2 = 1,529$, тогда $|T_1 - T_2| = 0,007$. Проверим, удовлетворяют ли для данных значений периода неравенство (14):

$l_1 = 36,2 \pm 0,1$ (*мм*)

$l_2 = 23,8 \pm 0,1$ (*мм*)

В таком случае:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{36,2}{23,8} = 1,52.$$

Следовательно l_1 и l_2 удовлетворяют неравенству (14).

Окончательное измерение величин проведу по $N = 250$ полным колебаниям маятника. Также убежусь в том, что трение не оказывает заметного влияния на колебания (за 250 раз амплитуда колебания заметно не изменяется).

Для 250 колебаний получаем, что $T_1 = 1,538$ и $T_2 = 1,531$, тогда $|T_1 - T_2| = 0,008$. По результатам измерений можем убедиться, что трение не оказывает существенного влияния на колебания.

4. Проведя все нужные измерения вычислим ускорение свободного падения g и её погрешность σ_g. Для того, чтобы вычислить g вычислим T_0 по формуле (10), а потом и само ускорение свободного падения:

$$T_0^2 = 1,529^2 + \frac{36,2}{36,2 - 23,8}(1,537 + 1,529)(1,537 - 1,529) = 2,41 с^2$$

$$g = 4\pi^2 \frac{0,6}{2,41} = 9,828 \text{ м/с}^2$$

Определим погрешность измерения периодов:

$$\sigma_T = \frac{\sigma_t}{N} = \frac{0,01}{250} = 0,00004\ c$$

Зная σ_T найдем по формуле (13) погрешность σ_{T_0}:

$$\sigma_{T_0} \approx 0,00004\frac{\sqrt{36,2^2 + 23,8^2}}{36,2 - 23,8} = 0,00014\ c$$

И по формуле 11 окончательно вычислим σ_g:

$$\sigma_g = g\sqrt{\frac{\sigma_l}{l} + 4\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}}$$

$$\sigma_g = g\sqrt{\frac{0,1}{600} + 4\frac{0,00014}{1,552}} = 0,023\ м/c^2$$

По полученным данным $g = 9,828 \pm 0,023\ м/c^2$.

Сравним полученные данные с табличными значением на данной широте. Стандартное значение ускорение свободного падения составляет 9,815 $м/c^2$, это значение совпадает с полученными нами данными в пределах погрешности.

Оценим влияние луны на ускорение свободного падения масса луны $m = 7,3477 \cdot 10^{22}$ *кг*, расстояние от Земли до луны равно $l = 3,844 \cdot 10^8$ *м*. Наибольшая разница в измерениях ускорения свободного падения вызванная влиянием луны будет достигаться когда вначале луна будет находиться над нами, а потом под (в надире). Эту разницу можно посчитать по формуле:

$$\delta g = 2\frac{F}{m} = 2\frac{Gm}{l^2}$$

$$\delta g = 6,633 \cdot 10^{-5}\ м/c^2$$

Эта разница гораздо меньше, чем точность с которой мы измерили ускорение свободного падения. Следовательно, в нашем случае мы не сможем заметить влияние луны на ускорение свободного падения.

Вывод: познакомились с обротным маятником, с его помощью с высокой точностью определили величину ускорения свободного падения.