

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ФИЗИКЕ

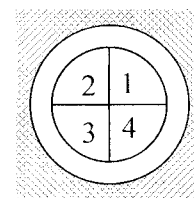
Для студентов 2-го курса МФТИ

03 июня 2016

ФИО	№ группы	ВАРИАНТ А	1	2	3	4	5	Σ	оценка	задания	
										I	II

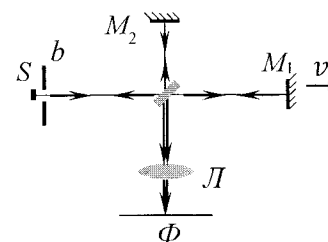
1А. Линейно поляризованная волна может быть представлена в виде суперпозиции двух волн, поляризованных по кругу с правой и левой поляризацией. Для радиоволны, распространяющейся в ионосфере вдоль магнитного поля Земли, коэффициенты преломления этих круговых составляющих отличаются на малую величину Δn : $n_{1,2} = n \pm \frac{\Delta n}{2}$, что приводит к повороту плоскости поляризации исходной волны. Определить Δn , если поворот плоскости поляризации линейно поляризованной волны с частотой $f = 50$ МГц на угол $\theta = \pi$ происходит при прохождении ею в ионосфере расстояния $h = 6$ км.

2А. Сферическая волна падает на непрозрачный экран с небольшим круглым отверстием, открывающим для точки наблюдения две первых зоны Френеля. В центр отверстия устанавливается диск из стекла с показателем преломления $n = 1,5$, целиком перекрывающий первую зону Френеля. Диск имеет четыре одинаковых сектора (см. рис.) разной толщины $d_m = d_0 \cdot (m - 1)$, где $m = 1, 2, 3, 4$, $d_0 = \lambda/3$, λ — длина волны излучения. Определить интенсивность света I в точке наблюдения, если в отсутствие экрана и диска интенсивность в точке наблюдения равна I_0 .



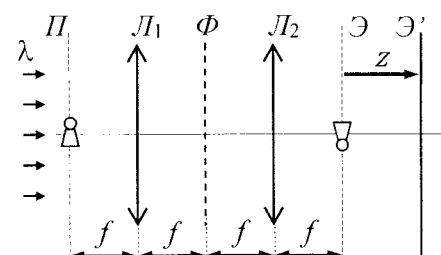
3А. Расходящийся пучок непрерывного монохроматического оптического излучения анализируется с помощью интерферометра Фабри–Перо с расстоянием между зеркалами $L = 5$ см и коэффициентом отражения зеркал по интенсивности $\rho = 0,9$. Во сколько раз изменится угловая ширина дифракционных колец, если непрерывное излучение заменить на периодическую последовательность импульсов длительностью $\tau = 10^{-9}$ с и периодом следования $T > 10^{-8}$ с?

4А. С помощью интерферометра Майкельсона, одно из зеркал которого смещается в процессе измерения со скоростью $v = 0,1$ см/с, изучается закон изменения интенсивности $I(t)$ в интерференционной картине, регистрируемой фотоприемником Φ , расположенным в фокальной плоскости линзы L . Необходимо выяснить, излучает ли источник S дублет — две близкие узкие спектральные линии $\lambda - \Delta\lambda/2$ и $\lambda + \Delta\lambda/2$ с центральной длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, интервалом между линиями $\Delta\lambda = 5 \cdot 10^{-8}$ см и шириной каждой линии $\delta\lambda = 5 \cdot 10^{-10}$ см, — либо излучение представляет собой однородную линию с центральной длиной волны λ и спектральной шириной $\Delta\lambda$.



1) Оцените время измерения t_1 , необходимое для того, чтобы отличить излучение дублета от одиночной широкой спектральной линии. 2) Оцените время t_2 , необходимое для измерения спектральной ширины каждой линии дублета. 3) Нарисуйте качественные графики функций видности интерференционной картины от времени $V(t)$ с указанием положения максимумов и минимумов для этих двух случаев.

5А. В оптической системе, показанной на рисунке, сфокусированное изображение предмета, расположенного в плоскости Π , наблюдается на экране \mathcal{E} . Если отодвинуть экран \mathcal{E} на расстояние $z = 1$ м (см. рис.), то изображение окажется «размытым» (расфокусированным). 1) Найти минимальный период решётки d , которую следует расположить в фурье-плоскости Φ , чтобы мультиплицированное изображение на экране оказалось снова «резким» (сфокусированным). 2) При каких ещё смещениях экрана z в этом случае можно наблюдать сфокусированные изображения предмета? 3) При каком размере предмета b не будут перекрываться соседние элементы мультиплицированного изображения? $\lambda = 500$ нм, $f = 20$ см. Указание: полагайте углы дифракции малыми.



ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ФИЗИКЕ

Для студентов 2-го курса МФТИ

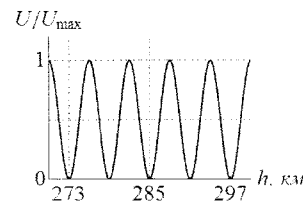
03 июня 2016

ФИО	№ группы

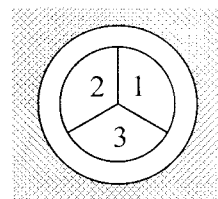
ВАРИАНТ Б

1	2	3	4	5	Σ	оценка	задания	
							I	II

1Б. Линейно поляризованная волна может быть представлена в виде суперпозиции двух волн, поляризованных по кругу с правой и левой поляризацией. Для радиоволны, распространяющейся в ионосфере вдоль магнитного поля Земли, эти составляющие имеют разные коэффициенты преломления $n_{1,2}$, что приводит к вращению плоскости поляризации исходной волны. На рисунке показана часть графика напряжения $U(h)$ на входе приёмника, подключенного к антенне с линейной поляризацией, в зависимости от расстояния h от источника до антенны. Источник удаляется от антенны в ионосфере, частота излучения $f = 50$ МГц. Определить разность коэффициентов преломления $\Delta n = n_1 - n_2$.



2Б. Плоская волна падает на непрозрачный экран с круглым отверстием, открывающим для точки наблюдения две первых зоны Френеля. В центр отверстия устанавливается диск из стекла с показателем преломления $n = 1,5$, целиком перекрывающим первую зону Френеля. Диск имеет три одинаковых сектора (см. рис.) разной толщины $d_m = a + b(m - 1)$, $m = 1, 2, 3$, где a и b — положительные константы. Определите минимальные значения a и b , при которых интенсивность в точке наблюдения максимальна, $I = I_{max}$. Определить значение I_{max} , если в отсутствие экрана и диска интенсивность в точке наблюдения равна I_0 . Длина волны излучения λ .



3Б. Монохроматическое расходящееся оптическое излучение анализируется с помощью интерферометра Фабри-Перо с коэффициентом отражения зеркал по амплитуде $r = 0,95$. После того, как непрерывное излучение было преобразовано в периодическую последовательность импульсов длительностью $\tau = 2 \cdot 10^{-9}$ с, угловая ширина дифракционных колец увеличилась в $\alpha = 10$ раз. Найти расстояние L между зеркалами интерферометра.

4Б. При изучении звёздного объекта с помощью интерферометра Майкельсона (см. рис. 1) была получена зависимость видности $V(D)$ интерференционной картины, наблюдаемой в фокальной плоскости Φ объектива L , от базы интерферометра D (см. рис. 2). Видность периодически принимает максимальные значения при $D = D_1, 2D_1, 3D_1$, где $D_1 = 1$ м. При этом высота максимумов постепенно уменьшается, и наконец при $D \geq 4D_1$ интерференционная картина практически исчезает. Определите угловое расстояние между звёздами и угловой размер каждой звезды, если $\lambda = 500$ нм.

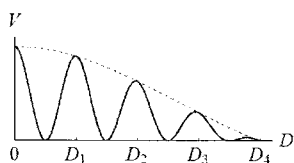


Рис.2

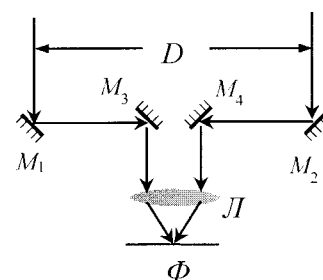
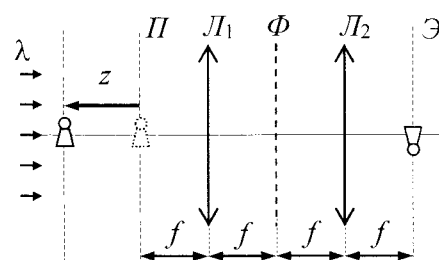


Рис.1

5Б. В оптической системе, показанной на рисунке, сфокусированное изображение предмета, расположенного в плоскости Π , наблюдается на экране \mathcal{E} . Если отодвинуть предмет на расстояние $z = 1$ м, как показано на рисунке, то изображение окажется «размытым» (расфокусированным). 1) Решётку какого периода d нужно расположить в фурье-плоскости оптической системы Φ , чтобы изображение оказалось снова «резким» (сфокусированным)? 2) Останется ли изображение сфокусированным, если период решётки увеличить вдвое? 3) Каким должен быть размер предмета, чтобы на экране не происходило перекрытие соседних элементов мультиплицированного изображения? $\lambda = 500$ нм, $f = 25$ см. Указание: полагайте углы дифракции малыми.



Решения задач экзаменационной контрольной работы по физике

Для студентов 2-го курса МФТИ

03 июня 2016г.

ВАРИАНТ А

1А. (Данилин В.А.) Плоскость поляризации волны поворачивается из-за различия фаз φ_1 и φ_2 , набираемых волнами с правой и левой круговой поляризацией по ходу распространения волны. Угол поворота плоскости поляризации θ равен

$$\theta = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{kz}{2}(n_2 - n_1) = \frac{\pi f z}{c} \Delta n.$$

Учитывая, что при $z = h$ значение $\theta = \pi$, получаем: $\Delta n = \frac{c}{fh} = 10^{-3}$.

2А. (Кузьмичёв С.Д.) Так как толщина первого сектора стеклянного диска равна нулю, то его амплитуда \vec{S}_1 составляет четверть от амплитуды первой зоны Френеля: $\vec{S}_1 = \vec{A}_1/4$. Разность фаз колебаний волн, идущих от первого и второго секторов диска составляет

$$\Delta\Phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} d_0(n - 1) = \frac{\pi}{3}.$$

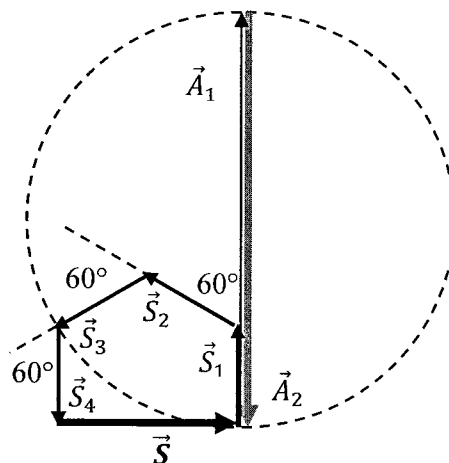
Такая же разность фаз для волн, идущих от второго и третьего, третьего и четвертого секторов диска.

Векторная диаграмма для амплитуды волны \vec{S} , идущей от области, перекрываемой стеклянным диском показана на рисунке. Там же показана амплитуда волны от второй зоны \vec{A}_2 . Тогда имеем

$$|\vec{S}| = 2 \frac{A_1}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} A_1,$$

$$\vec{A}_\Sigma = |\vec{S} + \vec{A}_2| = \sqrt{S^2 + A_2^2} = \frac{\sqrt{19}}{4} A_1.$$

Для интенсивности волны получаем: $I = \frac{19}{16} A_1^2 = \frac{19}{4} A_0^2 = \frac{19}{4} I_0$.



3А. (Юрьев Ю.В.) Дифференцируя выражение для максимума m -го порядка $2L \cos \theta = m \lambda$, получаем: $-2L \sin \theta d\theta/d\lambda = m$. Для угловой дисперсии интерферометра Фабри-Перо:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{m}{2L \sin \theta} = -\frac{\cos \theta}{\lambda \sin \theta} = -\frac{1}{\lambda \tan \theta}. \quad (1)$$

С учетом (1) угловая ширина кольца для непрерывного излучения:

$$\delta\theta = \left| \frac{d\theta}{d\lambda} \right| \delta\lambda = \left| \frac{d\theta}{d\lambda} \right| \frac{\lambda}{R} = \frac{1}{\lambda \tan \theta} \frac{\lambda}{R} \approx \frac{1}{R\theta}, \quad (2)$$

где R – разрешающая способность интерферометра Фабри-Перо. Ширина спектра периодической последовательности импульсов:

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau}, \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda \Delta\nu}{\nu} \sim \frac{\lambda^2}{c\tau}, \quad (3)$$

а соответствующая угловая ширина кольца с учетом (3):

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda \tan \theta} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda \theta} \approx \frac{\lambda}{c\tau\theta}. \quad (4)$$

Отношение угловых ширин (4) и (2):

$$\frac{\Delta\theta}{\delta\theta} = \frac{\lambda}{c\tau} R = \frac{\lambda}{c\tau} \frac{2\pi L \sqrt{\rho}}{\lambda(1-\rho)} = \frac{2\pi L \sqrt{\rho}}{c\tau(1-\rho)} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot \sqrt{0,9}}{3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} \cdot (1-0,9)} \approx 9,9.$$

Замечания: 1. Т.к. $\Delta\theta \gg \delta\theta$, то выражение (4) определяет угловую ширину кольца.

2. Полученное решение справедливо, если дисперсионная область интерферометра

$\Delta\lambda_d > \Delta\lambda$, т.е. $\frac{\lambda^2}{2L} > \frac{\lambda^2}{c\tau}$, или $\tau > \frac{2L}{c} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 10^{10}} = 3,3 \cdot 10^{-10}$ с — условие выполнено.

4А. (Локшин Г.Р.) 1. Разность хода Δ интерферирующих волн $\Delta = 2vt$, разность фаз $\Delta\varphi = k\Delta = 2\frac{\omega_0}{c}vt$. Круговая частота изменения интенсивности $\Omega_0 = \frac{2v}{c}\omega_0 = \frac{4\pi v}{\lambda}$. Несущая частота фототока $f_0 = \frac{2v}{\lambda} = 4 \cdot 10^3$ Гц.

2. Степень когерентности (теорема Винера-Хинчина):

$$\gamma(\tau) = \frac{\int J(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega}{\int J(\omega) d\omega}, \quad |\gamma(\tau)| = V.$$

$J(\omega)$ — спектральная интенсивность, $\tau = \frac{\Delta}{c} = \frac{2v}{c}t$ — запаздывание.

а) Сплошной спектр с полосой $\Delta\omega$ ($J(\omega) = J_0 = \text{const}$) (см. рис. 1).

$$|\gamma(\tau)| \sim \left| \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \exp(-i\omega\tau) d\omega \right| \sim \left| \frac{\sin\left(\frac{v}{c}\Delta\omega t\right)}{\frac{v}{c}\Delta\omega t} \right|, \quad (\text{см. рис. 2}).$$

Время измерения спектральной ширины $\Delta\lambda$ оценивается из условия

$$\frac{v}{c}\Delta\omega t_0 = \pi \Rightarrow t_0 = \frac{\pi c}{v\Delta\omega} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda v} = \frac{(5 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-1}} = 0,25 \text{ с.}$$

б) Дублет: две линии на частотах $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ и $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ (см. рис. 3). В силу их некогерентности

$$I_1(t) = 2J_0(1 + \cos\frac{\omega_1}{c}2vt), \quad I_2(t) = 2J_0(1 + \cos\frac{\omega_2}{c}2vt),$$

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) \sim 4J_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{c}vt\right) \cos\left(\frac{\omega_0}{c}2vt\right).$$

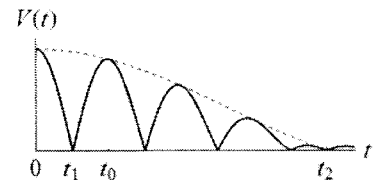
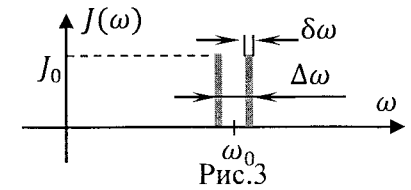
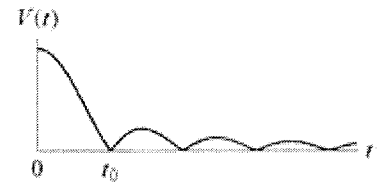
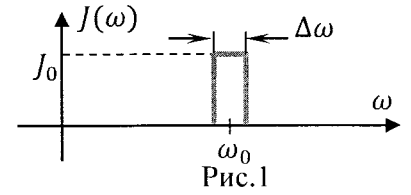
Учитывая ширину спектральной линии, для видности получим

$$V(t) \sim \left| \cos\left(\frac{\Delta\omega}{c}vt\right) \right| \left| \frac{\sin\left(\frac{v}{c}\delta\omega t\right)}{\frac{v}{c}\delta\omega t} \right|, \quad (\text{см. рис. 4}).$$

Время измерения расстояния между линиями $\Delta\lambda$ оценивается из

$$\frac{v}{c}\Delta\omega t_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{t_0}{2} = 0,125 \text{ с.}$$

Оценка времени измерения спектральной ширины $\delta\lambda$ даёт: $t_2 = \frac{\pi c}{v\delta\omega} = \frac{\lambda^2}{2v\delta\lambda} = 25 \text{ с.}$



5А. (Локшин Г.Р.) Решётка с периодом d даёт мультиплицированное изображение в задней фокальной плоскости линзы L_2 с периодом мультипликации $d_1 = \lambda f/d$. Далее, при смещении экрана вправо периодическая структура с периодом d_1 самовоспроизводится (эффект Талбота, «саморепродукция») на расстояниях $z_m = (2d_1^2/\lambda)m = (2\lambda f^2/d^2)m$, ($m = 1, 2, \dots$). При заданном z минимальный период решётки будет при $m=1$, т.е. $d = f\sqrt{2\lambda/z} = 2 \cdot 10^{-2}$ см. При выбранном периоде d решётки самовоспроизведение возможно также на расстояниях $z_m = m \cdot z$.

Размер объекта b ограничен условием отсутствия перекрытия соседних элементов

мультиплицированного изображения: $b < d_1 = \frac{\lambda f}{d} = \sqrt{\lambda z/2} = \sqrt{5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2/2} = 0,05 \text{ см.}$

ВАРИАНТ Б

1Б. (Данилин В.А.) При распространении радиоволны вдоль вертикали происходит поворот плоскости поляризации на угол θ (см. задачу 1А):

$$\theta = \frac{\pi f h}{c} \Delta n$$

На рисунке период изменения напряжения $\Delta h = 6$ км соответствует изменению угла $\theta = \pi$. Для изменения показателей преломления получаем: $\Delta n = \frac{c}{f \Delta h} = 10^{-3}$.

2Б. (Кузьмичёв С.Д.) На векторной диаграмме вклад от каждого сектора стеклянного диска будет представляться векторами $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$ с одинаковой длиной, равной $|S_1| = |S_2| = |S_3| = A_1/3$. Здесь A_1 — амплитуда первой зоны Френеля. Разность фаз колебаний волн, идущих от первого сектора диска и первой зоны Френеля, составляет

$$\Delta\Phi_{01} = \frac{2\pi}{\lambda} a(n-1).$$

Разность фаз для волн, идущих от первого и второго секторов стеклянного диска $\Delta\Phi_{12}$, равна:

$$\Delta\Phi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} b(n-1).$$

Такая же разность фаз для волн, идущих от второго и третьего секторов: $\Delta\Phi_{23} = \Delta\Phi_{12}$.

Итоговое колебание будет представлять собой сумму амплитуд колебаний от стеклянного диска и второй зоны Френеля: $\vec{A}_\Sigma = [\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{A}_2]$.

Максимальная интенсивность в точке наблюдения будет при выполнении условий синфазности складываемых волн: $\Delta\Phi_{01} = \pi, \Delta\Phi_{12} = 2\pi$, из которых получаем:

$$a_{\min} = \frac{\lambda}{2(n-1)} = \lambda, \quad b_{\min} = \frac{\lambda}{n-1} = 2\lambda.$$

Максимальная интенсивность в точке наблюдения $I = (2A_1)^2 = (4A_0)^2 = 16I_0$.

3Б. (Юрьев Ю.В.) См. решение задачи 3А. Отношение угловых ширин из (4) и (2):

$$\alpha = \frac{\Delta\theta}{\delta\theta} = \frac{\lambda}{c\tau} R = \frac{\lambda}{c\tau} \frac{2\pi L r}{\lambda(1-r^2)} = \frac{2\pi L r}{c\tau(1-r^2)} \Rightarrow L = \frac{\alpha c \tau (1-r^2)}{2\pi r} = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} \cdot (1-0,9)}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,95} \approx 10 \text{ см.}$$

Замечание: (см. 3А) Полученное решение справедливо, если дисперсионная область интерферометра $\Delta\lambda_d > \Delta\lambda$, т. е. $\frac{\lambda^2}{2L} > \frac{\lambda^2}{c\tau}$, или $\tau > \frac{2L}{c} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10^{10}} = 6,7 \cdot 10^{-10} \text{ с}$ — условие выполнено.

4Б. (Локшин Г.Р.) Картина на рис. 2 подобна картине дифракции Фраунгофера на двух щелях шириной b и расстоянием между щелями $d = 4b$. Нормированная функция $|\gamma(D)| = V$ имеет вид (теорема Ван-Циттерта-Цернике)

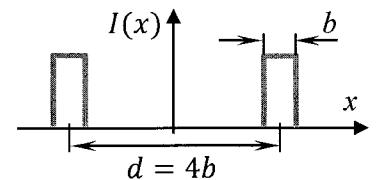
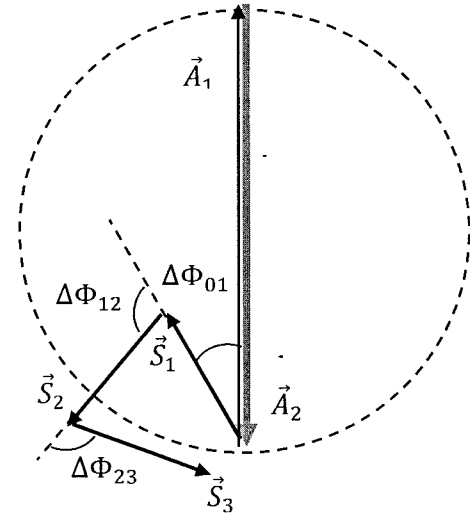
$$|\gamma(D)| = \left| \frac{\int I(x) \exp\left(-i \frac{k D x}{z}\right) dx}{\int I(x) dx} \right| \sim \left| \frac{\sin \frac{\pi D \Psi}{\lambda}}{\frac{\pi D \Psi}{\lambda}} \right| \left| \frac{\sin \frac{\pi b \Psi}{\lambda}}{\frac{\pi b \Psi}{\lambda}} \right|.$$

Здесь $\Psi = \frac{x}{z}$ — угловая координата.

Угловое расстояние между звёздами $\Delta\Psi = \frac{\Delta x}{z}$, угловой размер звезды $\Psi_{\text{зв}} = \frac{b}{z} = \frac{d}{4z}$.

Максимумы видности соответствуют значениям $D = D_1, 2D_1, 3D_1$,

т.е. $\Delta\Psi = \frac{\lambda}{D_1} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{10^2} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ рад.}$ Угловой размер каждой звезды $\Psi_{\text{зв}} = \frac{\lambda}{4D_1} = 1,25 \cdot 10^{-7} \text{ рад.}$



5Б (Локшин Г.Р.). Из всего «непрерывного» пространственного спектра предмета решётка «пропускает» гармоники $u_n = k \sin \alpha_n \approx (kd/f)n$. Соответственно, набег фазы n -ой гармоники на отрезке z во френелевском приближении равен $\Delta\varphi_n = kz - \frac{z}{2k} \left(\frac{kdn}{f} \right)^2 = kz - \Delta\varphi n^2$.

Если $\Delta\varphi = 2\pi$, то разность фаз гармоник с любым n окажется кратной 2π . Из $\frac{zk}{2} \left(\frac{d}{f} \right)^2 = 2\pi$ получаем минимальное значение периода $d = f\sqrt{2\lambda/z} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ см. Период мультипликации $d_0 = \lambda f/d = \sqrt{\lambda z/2} = 0,5$ см. Размер объекта b должен быть меньше d_0 .

Вниманию преподавателей!

В графе задания I и II выставляются оценки, полученные за сдачу 1-ого и 2-ого заданий. Если задание не сдано – выставляется ноль.

Оценку каждой задачи предлагается отображать в итоговой таблице символами, каждому из которых соответствует определённое количество баллов. Итоговая оценка по десятибалльной шкале определяется как округлённая до целого величина 2Σ , где Σ — сумма баллов за задачи.

оценка	баллы	комментарий
+	1	Чисто решенная задача — приведено обоснованное решение, аналитический и численный ответ которого совпадает с ответом авторов задачи.
+	0.9	Задача решена, но есть мелкие недочёты (не приведён в явном виде необходимый логический аргумент; арифметическая ошибка, не приведшая к заведомо абсурдному ответу; и т.п.)
+	0.7	Задача решена, в общем, верно, но есть существенные недочёты (из-за арифметической ошибки приведён физически абсурдный численный ответ; нет численного ответа; ошибки в формулах вследствие опечаток; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства и т.п.)
+ / 2	0.5	Задача решена наполовину (дан ответ только на часть вопросов задачи, если их несколько; выкладки не доведены до конца; есть ошибки в части выкладок вследствие недостаточной математической подготовки; принципиально важные промежуточные результаты приведены без доказательства и т.п.)
+	0.3	Задача не решена, но есть существенные подвижки в ее решении (есть исходная система уравнений и начаты, но не доведены до конца выкладки; либо в выкладках есть логические ошибки, приведшие к существенно неверному ответу; и т.п.)
—	0	Основные законы записаны с ошибками, или подход к решению задачи принципиально неверен.
0	0	Попытки решить задачу не было.

Оценка отл (10) может ставиться только за 5 чисто решённых задач. Получившие эту оценку студенты могут быть рекомендованы преподавателем лектору для получения отличной оценки без устного экзамена (преподаватель не обязан рекомендовать, а лектор не обязан соглашаться).

**Обсуждение письменного экзамена состоится в понедельник 06.06.2016
в 8 час. 30 мин. в Главной Физической аудитории.**