Institut Supérieur du Numérique
Algèbre
Session Principale 2022 / 2023

UGEM

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés
Durée 1 h 30 mn

Exercice 1

A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si les formules suivantes sont des tautologies.

i) $P \vee \overline{P}$ principe du tiers exclu

ii) $\overline{P \wedge \overline{P}}$ principe de non-contradiction

iii) $\overline{P} \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ le faux implique tout

iv) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ transitivité de $\rightarrow$

Exercice 2

On considère le couple d'entiers ($a = 60$, $b = 84$)

1. Calculer $PGCD(a,b)$ par l'algorithme d'Euclide.
2. En déduire une identité de Bézout.
3. Calculer $PPCM(a,b)$.
4. Déterminer l'ensemble des couples (u,v) d'entiers relatifs tels que : $au+bv=PGCD(a,b)$
5. Donner la décomposition en facteurs premiers de a et b.
6. En déduire la décomposition en facteurs premiers de $PGCD(a,b)$ et $PPCM(a,b)$, et retrouver les résultats des questions 1 et 3

Exercice 3

On munit R de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall\, x, y \in R, x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

1. Montrer que l'application $x \rightarrow x^3$ est un isomorphisme de (R, $*$) vers (R, +).
2. En déduire que (R, $*$) est un groupe commutatif.