

TD 2 Limites et continuité

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^6 + 5} - x^3)$; 3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x - 5}}{x^2 - 3x - 7}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(12x^3 - 1) - \ln(3x^3 + 7x^2 + 10)]$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x-1) - \ln(5x^3 + 7x^2 + 10) + 2 \ln x]$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 3x \sin 3x \sin 6x}{x^2}$

Exercice 2. Etudier la continuité des fonctions suivantes sur \mathbb{R} ?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases} ; \quad v(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 3.

Pour quelle valeur de α la fonction f , définie ci-après, est-elle continue sur \mathbb{R} ?

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ \alpha & \text{si } x = 2 \end{cases} ; 2) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{x} & \text{si } x > 4 \\ (x + \alpha)^2 & \text{si } x \leq 4 \end{cases} ;$$

Exercice 4.

Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité aux points proposés? Si oui, donner l'expression du prolongement.

$$f(x) = \frac{\sin 5x}{x} \text{ en } x = 0 ; g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \text{ en } x = 2 ; h(x) = \frac{(\sin \pi x)^2}{x^2} \text{ en } x = 0$$

Exercice 5. On définit f par $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?