Institut Supérieur du Numérique — Année 2021/2022

SupNum-S1 UGEM

Examen

21 Février 2022

Durée: 1^h30

Algèbre

0 — 1

Exercice I
Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G, définie par : $(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$

1) Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.
2) Montrer que $(]0, +\infty[\times\mathbb{R}, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$. 11

Exercice II
On considère la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 1 & 10 & 9 & 11 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ de S_{12}.

1) Décomposer σ en produits de cycles à supports disjoints.
2) Décomposer σ en produits de transpositions.
3) Quelle est la parité de σ ?
4) Calculer l'entier minimum n tel que $\sigma^n = Id$.
5) Calculer σ^{1999}.

Exercice III
Trois collègues, Ahmed, Brahim et Hassen déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1) Si Ahmed commande un dessert, Brahim en commande un aussi.
2) Chaque jour, soit Brahim, soit Hassen, mais pas les deux, commandent un dessert.
3) Ahmed ou Hassen, ou les deux, commandent chaque jour un dessert.
4) Si Hassen commande un dessert, Ahmed fait de même.

On introduit des variables propositionnelles A, B et H qui représentent le fait que Ahmed (A), Brahim (B) et Hassen (H) prennent un dessert.

Questions :

1) Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles
2) Donner la table de vérité de chaque formule propositionnelle.

Exercice IV
Soit $f : E \to F$ une application. Etablir :

1) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A))$.
2) $\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) \subset B$.