Institut Supérieur du Numérique
Devoir d'Algèbre

UGEM **Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés**
Durée 1 h 30 mn

Exercice 1

Soient p; q et r trois propositions données. En utilisant la table de vérité, vérifier que les propositions suivantes sont vraies

1. $(p \vee q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r)) \Rightarrow (q \wedge r)]$

Exercice 2

$$\text{Soit } f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \text{ définie par } f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si non} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 3

1. Pour tout entier naturel n, montrer que 5 divise $((12)^n - 7^n)$
2. Calculer ce qui suit pgcd(955,183), ppcm(955,183),
3. Trouver les entiers x et y tels que pgcd(x; y) = 18 et ppcm(x; y) = 540

Exercice 4

Sur l'ensemble Z, étudier les propriétés de la loi définie par : $p * q = p + q + pq$

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne, commutative et associative.
2. Montrer que $*$ possède un élément neutre.
3. Quels sont les éléments symétrisables ?
4. Quels sont les éléments réguliers ? (On dit qu'un élément a est régulier si pour tout b, $c \in \mathbb{Z}$, $a * b = a * c \Rightarrow b = c$)