Chapitre III.

Dérivées et applications

III.1. Définitions générales

Définition 3.1. (Dérivabilité). Soit $y = f(x)$ une fonction continue et $x_0 \in D_f$. On dit que la fonction $f(x)$ est dérivable au point x_0 si la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ existe.}$$

Cette limite est appelée la dérivée de f au point x_0. Elle est notée $f'(x_0)$. Ainsi

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Définition 3.2. Soit $f(x)$ une fonction et $I\subset D_f$ un intervalle. Si $f'(x)$ existe pour tout $x\in I$, on dit que f est dérivable sur I. La fonction $f'(x)$ est appelée la dérivée de f (sur I).

Autre notation : la dérivée de $f(x)$ est aussi notée $f'(x)=\frac{df}{dx}(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{dy}{dx}$ ou encore f'

Exemples

1. Soit $f(x) = 7$, alors $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{7-7}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}0 = 0$
2. Soit $f(x) = 5x + 3$, alors
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)+3-(5x+3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5h}{h} = \lim_{h\to 0}5 = 5$$
3. Soit $f(x) = x^2$, alors
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$
4. Soit $f(x) = \sqrt{x}$, alors
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En général, si $f(x) = x^r, r \in IR$, alors $f'(x) = rx^{r-1}$

5. Soit $f(x) = sinx$, alors
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{sin(x+h)-sinx}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}2\sin\left(\frac{h}{2}\right)cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2}cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = cosx$$
6. Soit $f(x) = cosx$, alors $f'(x) = -sinx$
7. Soit $a > 0$, $f(x) = a^x$, alors $f'(x) = a^x lna$; si $a = e$, $(e^x)' = e^x$
8. Soit $a > 0$, $f(x) = \log_a x$, alors $f'(x) = \frac{1}{xlna}$; si $a = e$, $(lnx)' = \frac{1}{x}$

Dr. Kamal Bouh Email : kamal.bouh@supnum.mr

Application : équation de la tangente à un graphe
Soit $f(x)$ une fonction continue et $P(a\,;f(a))$ un point du graphe de f. Alors l'équation de la tangente au graphe de f passant par P est : $y = f^{'}(a)(x-a) + f(a)$

Règles de calculs

Soient f et g deux fonctions derivables sur I. Alors

1- : $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
2- : $(fg)' = f'g + fg'$
3- : Si $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f^{'}g - fg'}{g^2}$
4- : Si $r \in IR$, $(f^r)^{'} = rf'f^{r-1}$

Exemples

*- $f(x) = 5x^4 - cosx + \sqrt[3]{x} - \frac{3}{x^2} + 6$, alors $f'(x) = 20x^3 + sinx + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{x^3}$

*- $f(x) = \frac{x^5 lnx}{e^x}$, alors $f^{'}(x) = \frac{(5x^4lnx + x^4)e^x - e^x x^5 lnx}{e^{2x}} = \frac{5x^4lnx + x^4 - x^5 lnx}{e^x}$

*- $f(x) = tanx$ alors $f^{'}(x) = \frac{(cosx)^2 + (sinx)^2}{(cosx)^2} = \frac{1}{(cosx)^2} = 1 + (tanx)^2$

*- $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + \sqrt{x}}$, alors $f^{'}(x) = \cdots$

5- Fonction composée : $\left(f\big(g(x)\big)\right)' = f'(g(x)) \times g'(x)$

Exemples

- ✓ $f(x) = \sin(x^5)$, alors $f'(x) = 5x^4 \cos(x^5)$ d'ou $(\sin u)' = u'cosu$
- ✓ $f(x) = \cos(x^3)$, alors $f'(x) = -3x^2 \sin(x^3)$ d'ou $(\cos u)' = -u'sinu$
- ✓ $f(x) = 3^{x^5}$, alors $f'(x) = 5x^4 3^{x^5} ln3$ d'où pour $a > 0$ $on\ a$

  $(a^u)' = -u'a^u lna$ et si $a = e\ on\ a$ $(e^u)' = u'e^u$
- ✓ $f(x) = \log_5(x^2+3)$, alors $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+3)ln5}$ d'où pour $a > 0$ $on\ a$

  $(\log_a(u))' = \frac{u'}{u.lna}$ et si $a = e\ on\ a$ $(lnu)' = \frac{u'}{u}$

6- Fonction réciproque (inverse)

Soit f une fonction est bijective et $f^{-1}(y)$ sa fonction réciproque.
On suppose $f'(x) \neq 0$. Par définition de f^{-1}, on a $(fof^{-1})(y) = y$ et en dérivant par rapport à y, on trouve $f'(f^{-1}(y)).(f^{-1})'(y) = 1$ ce qui donne

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

En particulier,

$$(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad (arc\sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$(arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad (arc\cos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Exemples

- ✓ $f(x) = x^5 arc\tan(x^2+3)$, alors $f'(x) = 5x^4 arc\tan(x^2+3) + \frac{2x^6}{1+(x^2+3)^2}$

Dr. Kamal Bouh **Email : kamal.bouh@supnum.mr**

- ✓ $f(x) = \frac{e^{x^2} arccos\,(x^3)}{\ln\,(x^4+1)}$, alors $f'(x) = \cdots$
- ✓ $f(x) = arcsin(x^2 - 3)$, alors $f'(x)$?

7- La fonction $f(x) = (u(x))^{v(x)}$

On pose $f(x) = e^{\ln\,(u^v)} = e^{\mathrm{v(x)ln}\,(u(x))}$ et $D_f = \{x \in IR \mid u(x) > 0\}$

Notons que $(u(x))^{v(x)}$ n'a de sens que si $u(x) > 0$. La dérivée vaut alors

$$f'(x) = \left(v'(x)lnu(x) + \frac{v(x)}{u(x)}\right)e^{\mathrm{v(x)\,ln}(u(x))} = \left(v'(x)lnu(x) + \frac{v(x)}{u(x)}\right)(u(x))^{v(x)}$$

Exemple. Calculons l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = x^{sinx}$ au point *P(π; 1)*.

On a $D_f = IR_+^*$ et

$$f'(x) = \left(cosxlnx + \frac{sinx}{x}\right)e^{\mathrm{sinx\,ln}\,x} = \left(v'(x)lnu(x) + \frac{v(x)}{u(x)}\right)x^{sinx}$$

En $P(\pi; 1)$ on obtient $f'(\pi) = -\ln \pi$. L'équation de la tangente est donc

$$y = -ln\pi(x - \pi) + 1 = -xln\pi + 1 + \pi ln\pi$$

8- Dérivée des fonctions implicites

Toute relation de la forme $F(x, y) = 0$ définit une fonction implicite $y = y(x)$. On a peut calculer la dérivée de cette fonctions en un point donnée sans trouver explicitement la fonction *y*.

Exemple 1. Calculons la dérivée de la fonction implicite y définie par la relation suivante:

$$x^4 + y^4 - x^2y^2 + 5 = 0$$

On dérive par rapport à x :

$$4x^3 + 4y^3y' - 2xy^2 - 2x^2yy' = 0 \Rightarrow y'(4y^3 - 2x^2y) = 2xy^2 - 4x^3$$

d'où $y' = \frac{2xy^2-4x^3}{4y^3-2x^2y}$

Exemple 2. Ecrire l'équation de la tangente au graphe de la fonction implicite y définie par la relation suivante au point P(1,1) :

$$2x^2 - y^3 + lnxy - 1 = 0$$

On dérive par rapport à x :

$$4x - 3y^2y' + \frac{y + xy'}{xy} = 0 \Rightarrow y'\left(\frac{1}{y} - 3y^2\right) = -4x - \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-4x - \frac{1}{x}}{\frac{1}{y} - 3y^2}$$

La pente au point P est : $y'(1) = \frac{-4-1}{1-3} = \frac{5}{2}$

D'où l'équation de la tangente est : $y = y'(1)(x - 1) + 1 = \frac{5}{2}(x - 1) + 1$

<u>Dérivées d'ordres supérieurs</u>

Si $f'(x)$ est elle- même dérivable on note :

$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \frac{d^2f}{dx^2}$ la dérivée seconde ou la dérivée d'ordre 2

$f^{(3)}(x) = \left(f''(x)\right)' = \frac{d^3f}{dx^3}$ la dérivée d'ordre 3

Dr. Kamal Bouh **Email : kamal.bouh@supnum.mr**

$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = \frac{d^n f}{dx^n}$ la dérivée d'ordre n

Si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I on note $f \in C^n(I)$ et l'on dit que *f* est *n-fois continument dérivable.*

III.2. La règle de Bernoulli-l'Hospital

Théorème. (Règle de Bernoulli- l'Hospital)**.** Soient *f, g* deux fonctions dérivables sur I =]*a*; *b*[telles que pour tout $x \in I$ on ait $g(x) \neq 0$ *et* $g'(x) \neq 0$. Supposons que

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$, avec $\alpha = 0$ *ou* ∞
- $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Exemples.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{cosx}{1} = cos0 = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^1 = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{cosx}{2} = \frac{cos0}{2} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x+6}{2x^2-3x+2} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x+5}{4x-3} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x+6}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x+5}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = 0$
6. $\lim_{x\to 0^+} xlnx = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{1/x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$
7. 1) $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$; 2) $\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}$
8. 1) $\lim_{x\to+\infty} (\cos\frac{1}{x})^x$; 2) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$
9. *a*) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$; *b*) $\lim_{x\to+\infty} (1+2x)^{1/x}$

Expressions indéterminées de la forme : ∞^0 ; 1^∞ ; 0^0

On lève l'indétermination de la forme ∞^0 ; 1^∞ ; 0^0 en procédant comme suit :

- On applique la formule : $u^v = e^{\ln(u^v)} = e^{v\ln u}$ pour les transformer en une expression de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$
- On applique alors la règle de l'Hospital pour calculer la limite

Exemples.

1. ∞^0 : $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{lnx}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$
2. 1^∞ : $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^4}} = \lim_{x\to 1} e^{\ln(x^{\frac{1}{1-x^4}})} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{lnx}{1-x^4}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{-4x^4}} = e^{\frac{-1}{4}}$

Dr. Kamal Bouh **Email : kamal.bouh@supnum.mr**

3- 0^0 : $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\sin x)^x} = \lim_{x\to 0} e^{x\ln\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{-x^2\cos x}{\sin x}} =$ $\lim_{x\to 0} e^{\frac{-x\cos x}{\sin x/x}} = e^{0/1} = 1$

4- ∞^0 : $\lim_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln((e^x+x)^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(e^x+x)}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{e^x+1}{e^x+x}} = e^1 = e$

5- 1^∞ : $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$

III.2. Etude de fonction

Monotonie

Dans toute cette section, *f*(*x*) désignera une fonction continue sur son ensemble de définition

Théorème. Soit f une fonction continue sur I = [a; b] et dérivable sur]a; b[. Alors

- *f* est croissante ⇔ $f' \geq 0$ sur]a; b[
- *f* est décroissante ⇔ $f' \leq 0$ sur]a; b[

  De plus, si *f′ > 0* (*f'<0*), alors *f* est strictement croissante (strictement décroissante).

Exemples

1. Soit $f(x) = 5x + 3$, alors $f'(x) = 5$ donc *f* est strictement croissante sur IR

2. Soit $f(x) = x^2 - 6x + 7$, alors $f'(x) = 2x - 6$, on a $f'(x) \geq 0 \Rightarrow 2x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ donc *f* est croissante sur $[3, +\infty[$, *f* est décroissante sur $]-\infty, 3]$

Points critiques

Définition. Soit x_0 un point du domaine de définition de la fonction *f*

- x_0 est un **point stationnaire** de *f* si $f'(x_0) = 0$
- x_0 est un **point critique** de *f* si x_0 est un point stationnaire de *f* ($f'(x_0) = 0$) ou $f'(x_0)$ n'existe pas

Exemples

1- Soit $f(x) = x^2 - 6x + 7$, alors $f'(x) = 2x - 6$, on a $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, d'ou 3 est un point stationnaire de *f* et donc est un point critique *f*.

2- Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, alors $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$, on a $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, d'ou 0 est un point stationnaire de *f*. D'autre part, $f'(-2)$ et $f'(2)$ n'existent pas. Donc les points critiques de *f* sont -2 , 0 et 2.

Extremum local (relatif)

On dira **extremum** pour maximum ou minimum.

Définition. Soit x_0 est un point critique de *f*

- x_0 est un maximum local (relatif) de *f* s'il existe un voisinage *de* x_0 : $v_\epsilon =]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[$ tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in v_\epsilon$
- x_0 est un minimum local (relatif) de *f* s'il existe un voisinage *de* x_0 : $v_\epsilon =]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[$ tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in v_\epsilon$

La condition nécessaire et suffisante pour avoir un extremum en *x*0 est donnée par le théorème suivant :

Théorème. Soit *f(x)* une fonction dérivable dans un voisinage de x_0 mais pas nécessairement en x_0. Alors

x_0 est un extremum $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ change de signe en x_0.

Plus precisement si

- $f'(x) < 0$ pour $x < x_0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > x_0$ *alors* x_0 *est un minimum local de f*
- $f'(x) > 0$ pour $x < x_0$ et $f'(x) < 0$ pour $x > x_0$ *alors* x_0 *est un maximum local de f*

Exemples

1- Soit $f(x) = x^2 - 6x + 7$, alors $f'(x) = 2x - 6$: $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$
3 est le seul point critique de f. Comme $f'(x) < 0$ pour $x < 3$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 3$ alors 3 est un minimum local de *f*

2- Soit $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$; 0 est un point critique de *f* mais $f'(x) > 0$ pour $x \neq 3$ alors 0 n'est pas un extremum local de *f*
Un point stationnaire n'est pas necessairement un extremum

3- $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$, alors $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$: $f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$ *ou* 1 donc les points critiques de *f* sont *-1* , *0 et 1.*

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\quad$ -1		0	1 $\quad$ $+\infty$
f'(k)	$f'(-2) = 180$	$f'(-1/2)$ =-45/16	$f'(1/2)$ =-45/16	$f'(2) = 180$
f'	+	-	-	+

Donc *f* est croissante sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, *f* est décroissante sur $[-1, 1]$

- *-1* est un maximum local de *f*
- *0* n'est pas un extremum de *f*
- *1* est un maximum local de *f*

4- $f(x) = x^3(x^3 - 1)^{2/3}$

Un cas particulier de ce th´eor`eme est le suivant :

Proposition. Soit f une fonction continue et x_0 un point stationnaire ($(f'(x_0) = 0)$).

(1) Si $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un minimum local.
(2) Si $f''(x_0) < 0$ alors x_0 est un maximum local.
(3) Si $f''(x_0) = 0$ alors x_0 est un plat.

Extremum global (absolu)

Définition. Soit x_0 est un point critique de *f*

- x_0 est un maximum global (absolu) de *f* si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in D_f$
- x_0 est un minimum global (absolu) de *f* si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in D_f$

Remarque. Un extremum global n'existe pas toujours sur IR.

Exemples

1- $f(x) = x^3$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; donc *f* n'est pas de extremum global

2- $f(x) = x^2 - 6x + 7$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; donc *f* a un minimum global mais n'a pas de maximum global

Dr. Kamal Bouh **Email : kamal.bouh@supnum.mr**

3- $f(x) = \frac{3x^2+7}{x^2+2}$, on a $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{f(x)} = 3$; donc f a un minimum et un maximum global

Extremum global sur I = [a; b]
Pour determiner les extremums globaux sur un intervalle ferme I = [a; b]:

- Determiner les points critiques de *f* dans intervalle ferme I : x_1 , x_2 , …
- Calculer les images des points critiques: $f(x_1)$, $f(x_2)$, …
- Calculer *f(a)* et *f(b)*,
- Comparer les images

Exemple
Determiner les extremums globaux de *f* dans l'intrvalle [-1/2 ; 2] : $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

On a $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$: $f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1 \ ou \ 1$
D'ou les points critiques de *f* dans l'intrvalle [-1/2 ; 2] sont *0 et 1.*

$$f(0) = 1 \ ; \ f(1) = -1 \ ; f(1/2) = 15/32 \text{ et : } f(2) = 57$$

Donc le maximum global est le point (2,57) et le minimum global est (1,-1).

Courbure et point d'inflexion

Définition. Soit $f \in C^2(I)$, 2-fois continument dérivable.

- *f* est dite **convexe** sur *I* si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- *f* est dite **concave** sur *I* si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$
- $x_0 \in D_f$ est un ***point d'inflexion*** de *f* si $f''(x)$ change de signe en x_0.

Exemples

1- Soit $f(x) = x^2 - 6x + 7$, alors $f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f''(x) = 2 > 0$.
Comme $f''(x) > 0$ pour tout $x \in IR$ alors *f* est convexe sur IR

2- Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$, alors $f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$, on a
$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.
Comme $f''(x) < 0$ pour $x < 2$ $alors\ f\ est\ concave\ sur$ $]-\infty, 2[$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 2$ alors *f* est convexe sur $]2, +\infty[$ et donc 2 est un point d'inflexion *f.*

3- Soit $f(x) = x^4 - 5x + 1$, alors $f'(x) = 4x^3 - 5 \Rightarrow f''(x) = 12x^2$,
on a $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, mais 0 n'est pas un point d'inflexion de f car $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in IR$ et donc *f* est convexe sur IR.

III.4. Développement limité

Dr. Kamal Bouh **Email : kamal.bouh@supnum.mr**