

Examen

Exercice 1.

Calculer, les limites des suites suivantes :

$$a) u_n = \frac{1}{n^2 - \sqrt{n^4 + 3n^2 + 3}} ; \quad b) u_n = \frac{3^n + 5^n}{7^n - 2^n} ;$$

$$c) \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) \quad \propto$$

Exercice 2.

1) Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

$$a) y = \ln(5 - \cos(x^2)) + 5x^2 ; \quad b) y = (3 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}$$

2) Calculer, à l'aide de la règle de L'Hôpital, les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$$

3) Ecrire l'équation de la tangente de la courbe : $x^3 + y^3 - 3\sin xy - 1 = 0$ au point $(0, 1)$.

Exercice 3.

Soit $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Donner le développement limité d'ordre 4 de f au point 0 et déduire la série de Taylor de f en 0.

Exercice 4.

Trouver les intervalles de monotonie et les extrémums locaux de la fonction :

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 2$$

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^1 (15x^4 - \cos \pi x + e^{-2x} + 4\sqrt[3]{x} + 5) dx$$

$$2) \int \frac{x^3 + 1}{(x^4 + 4x + 6)^5} dx$$

$$3) \int 2 \arctan x dx$$