

Examen de la session de rattrapage

Exercice 1.

Soit $\{u_n\}$ la suite réelle définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n} \end{cases}$$

- 1) Calculer u_2 et u_3
- 2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 1$
- 3) Montrer que $\{u_n\}$ est décroissante
- 4) En déduire que $\{u_n\}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2.

- 1) Calculer, à l'aide de la règle de L'Hôpital, les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{5x})^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x}$$

- 2) Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

$$a) y = x^5 \ln(e^{x^2} + 1); \quad b) y = \frac{\arctan(x^5 + 1)}{(x^2 + 3)^4}; \quad c) y = \frac{\cos 3x}{5}$$

- 3) Pour quelles valeurs de a et b la fonction f , définie ci-après, est-elle continue sur \mathbb{R} ?

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ ax^2 + bx - 1 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 3.

Soit $f(x) = \ln(1+x)$. Donner le développement limité d'ordre 5 de f au point 0 et déduire la série de Taylor de f en 0.

Exercice 4.

Soit $f(x) = x^5 - 15x^3 + 2$

- a) Déterminer les intervalles de monotonie de f
- b) Trouver les extrémums locaux de la fonction f
- c) Trouver les extrémums globaux de la fonction f dans l'intervalle $[-1, 4]$
- d) Étudier la convexité et la concavité de f et déterminer les points d'inflexions de f .

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^1 \left(18x^5 - 3\pi \sin \pi x + \frac{4}{x^2} + 7 \right) dx \quad ; \quad 2) \int \frac{e^{2x} + 3}{e^{2x} + 6x + 2} dx$$