$\frac{15}{20}$

$12 \equiv 2 [5]$

$12 = 2\times 5 + 2$

Institut Supérieur du Numérique
Algèbre
Session Principale 2022 / 2024

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés
Durée 1 h 30 mn

Exercice 1

A. A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si les formules suivantes sont des tautologies.

i) $(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$ Commutativité de la disjonction

ii) $(\overline{P} \Rightarrow Q) \wedge (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}) \Rightarrow P$ Preuve par l'absurde

B. Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1) Le carré de tout réel est positif.
2) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres

C. Enoncer la négation des assertions suivantes :

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit
2. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens

$40 = 9\times 4 + 4$

$40 = 12\times 3 + 4$

Exercice 2

Soient le domaine $D = \{(x, y) \in R^2, -y \leq x \leq y\}$ et la fonction $f: D \rightarrow R \times R$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2,\ 2xy)$.

1. Représenter D dans le plan
2. Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2)vérifient $\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$ alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
3. Montrer que f est injective, on pourra se ramener au système de la question 2
4. Est-ce que f est surjective ?

Exercice 3

Le nombre d'élèves d'une classe est inférieur à 40. Si on les regroupe par 9 ou par 12, il en reste 1 chaque fois. Quel est ce nombre ?

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^8 = 1$

Exercice 4

I. On note $H = \{z \in \mathbb{C}, z^8 = 1\}$, où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

1. Montrer que (H, ×) est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Pour $z_1 \in H$ *et* $z_2 \in H$ on pose $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1^4 = z_2^4$. Montrer ~ que est une relation d'équivalence sur H.
3. Montrer que H admet deux classes d'équivalence.
4. Déterminer les éléments de ces deux classes d'équivalence.

II. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 3\,5\,6\,7\,1\,2\,4 \end{pmatrix}$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. Calculer σ^{2014}

$\sigma(1) = 3$
$\sigma(3) = 6$
$\sigma(6) = 2$
$\sigma(2) = 5$
$\sigma(5) = 1$
$\sigma(4) = 7$
$\sigma(7) = 4$

$(1,5)(1,6)(1,2)(2,6)$
$(2,7)(3,5)(3,6)(3,7)$
$(4,5)(4,6)(4,7)$

Bonne Chance

$(\sigma^{10})^{200} \times \sigma^{14}$