Institut Supérieur du Numérique
Algèbre / Série I

Exercice 1

Soient les propositions :
Q: On est naïf; T: On est heureux; R: On est riche; U: On a de la chance; S: On est intelligent.

1) Décrire les propositions suivantes à l'aide de Q, R, S, T et U et des opérateurs logiques.

A : L'argent ne fait pas le bonheur.
B : On n'est pas nécessairement intelligent quand on est riche.
C : La chance sourit au malheureux.
D : On est naïf et stupide si et seulement si on est malheureux quand on est riche.
E : Quand on est riche et stupide, on a de la chance ou on est malheureux.

2) Formuler en français les formules suivantes :

K : (non R ou R) $\Rightarrow$ (non Q $\Rightarrow$S).
L : (non S et R) $\Leftrightarrow$ U
M : non (non Q) $\Rightarrow$ T.
N :(non Q et R) ou non T.
O :R $\Rightarrow$ (S ou T).

Exercice 2

Montrer que les assertions suivantes, sont des tautologies (i.e. toujours vraies).

1. $P \Leftrightarrow P$;
2. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$;
3. $P \Rightarrow (P \vee Q)$
4. $P \vee (P \Rightarrow Q)$;
5. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$;
6. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

Exercice 3

Montrer que :

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \bar{P} \vee Q$
2. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow P \wedge \bar{Q}$
3. $R \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ avec $R = (P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q} \vee (P \wedge Q)$.

Exercice 4

Soient I un intervalle de R et f : I → R une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :

1. $\exists\, C \in R, \forall\, x \in I, f(x) = C$
2. $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
3. $\forall y \in R, \exists x \in I, f(x) = y$
4. $\forall\, x, y\ \in I, x \leq y\ \Rightarrow\ f(x) \leq f(y)$
5. $\forall\, x, y\ \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow\ x = y$

Exercice 5

Soient I un intervalle de R et f : I → R une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. la fonction f s'annule.
2. la fonction f est la fonction nulle.
3. f n'est pas une fonction constante.
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. la fonction f présente un minimum.
6. f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 6

Soient I un intervalle de R et f : I → R une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer les négations des assertions suivantes

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
2. $\forall y \in R, \exists\, x \in I, f(x) = y$
3. $\exists M \in R, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$
4. $\forall\, x, y\ \in I, x \leq y\ \Rightarrow\ f(x) \leq f(y)$
5. $\forall\, x, y\ \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow\ x = y$
6. $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$

Exercice 7

En construisant un tableau de vérité, vérifier si l'équivalence est correcte :
P implique (non Q ou non R) est équivalente à (Q implique non P) ou (R implique non P)

Exercice 8

Ecrire la contraposition des implication suivantes :
1. S'il gagne son pari, je mange mon chapeau.
2. Si tu es logicien dans l'âme, cet exercice n'est pas difficile pour toi.

Exercice 9

Soit E = {a, b, c} un ensemble. Peut-on écrire :
a) a ∈ E ; b) a ⊂ E ; c) {a} ⊂ E ; d) ; Φ ∈ E ; e) ; Φ ⊂ E ; f) { Φ} ⊂ E ?

Exercice 10

Etant donné *A*, *B* et *C* trois parties de *E*, justifier les équivalences suivantes :

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B.$
b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B.$
c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
d) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

Exercice 11

Soient *A, B, C* ∈ P(*E*). Etablir $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Exercice 12

Soient *A* et *B* deux parties de *E*, on appelle différence symétrique de *A* et *B*, l'ensemble :
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \setminus B)$.

Exercice 13

Soit f : E ⟶ F une application.
a) Etablir : ∀A ∈ P(E), A $\subset f^{-1}(f(A))$ et ∀B ∈ P(F), $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset$ B

Exercice 14

Soit f : E ⟶ F une application.

a) Montrer que : ∀A, A' ∈ P(E), f(A ∪ A') = f(A) ∪ f(A') et f(A ∩ A') ⊂ f(A) ∩ f(A').
b) Montrer que : ∀B, B' ∈ P(F), f^{-1}(B ∪ B') = f–1(B) ∪ f^{-1}(B')
et f^{-1} (B ∩ B') = f^{-1} (B) ∩ f^{-1} (B')

Exercice 15

Soient f : N ⟶ N et g : N ⟶ N les applications définies par :

$$\forall\ k \in N, f(k) = 2k \ et \ g(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{2} & si\ k\ est\ pair \\ \dfrac{k-1}{2} & si\ k\ est\ impair \end{cases}$$

a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
b) Préciser les applications fog et gof. Etudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 16

$$\text{Soit f : } N \longrightarrow Z \text{ définie par } f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & si\ n\ est\ pair \\ -\dfrac{n+1}{2} & si\ non \end{cases}$$

.

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 17

Soient f : E ⟶ F et g : F ⟶ G. Etablir les implications suivantes :

a) gof injective $\Longrightarrow f$ injective.
b) gof surjective $\Longrightarrow g$ surjective
c) gof injective et f surjective $\Longrightarrow g$ injective.
d) gof surjective et g injective $\Longrightarrow f$ surjective.