Institut Supérieur du Numérique
Algèbre / Série III

Exercice 1

On définit une loi de composition interne $*$ sur R par : $\forall(a,b) \in R^2,\ a * b = \ln(e^a + e^b)$
Quelles en sont les propriétés ? Possède-t-elle un élément neutre ? Y a-t-il des éléments réguliers (On dit qu'un élément a est régulier si pour tout (b, c) ∈ R, $a * b = a * c \Rightarrow b = c$)

Exercice 2.

a) Sur l'ensemble Z, étudier les propriétés de la loi définie par : $p * q = p + q + p.q$
b) 1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne commutative et associative.
c) 2. Montrer que $*$ possède un élément neutre.
d) 3. Quels sont les éléments symétrisables ? Réguliers ?
e) 4. Est-ce que $(Z, *)$ est un groupe ?
f) 5. L'ensemble $R \setminus \{-1\}$ muni de la loi $*$ définie par $\forall(a,b) \in R^2,\ a * b = a + b + ab$ est-il un groupe ?

Exercice 3

Soient $G = R^* \times R$ et $*$ la loi de composition interne définie sur G par
$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$
1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
2. Montrer que $R_+^* \times R$ est un sous groupe de $(G, *)$.

Exercice 4

Soient les quatre fonctions de R^* dans R^*

$$f_1(x) = x; \quad f_2(x) = \frac{1}{x}\ ; \quad f_3(x) = -x\ ; \quad f_4(x) = \frac{-1}{x}$$

Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi o

Exercice 5

Démontrer que le centre $C(G) = \{a \in G \text{ tel que } ax = xa\ \forall x \in G\}$ d'un groupe G est un sous groupe de G.

Exercice 6.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$. l'application qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $e^{ix} \in \mathbb{C}$.
1. Montrer que f est un homomorphisme de groupes.
2. Calculer son noyau et son image. f est-elle injective ?

Exercice 7

Montrer que la composition de deux homomorphismes de groupe est un homomorphisme de groupe.

Exercice 8

Soit $n \in N^*$. On considère l'ensemble $U_n = \{z \in C \text{ tel que } z^n = 1\} \subset C$ et l'application $f_n: Z \to C^*$ définie par $f_n(k) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.
1. Démontrer que U_n muni de la multiplication est un sous-groupe de (C^*, x).
2. Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ Montrer que le groupe U_n est engendré par ω : $U_n = <\omega>$.
3. Montrer que, pour n, m ∈ N^*, si n divise m alors $U_n \subset U_m$.

4. Montrer que f_n est un morphisme de groupes de (Z, +) dans ($\mathbb{C}^*$, x).
5. Déterminer le noyau Ker(f_n) et l'image Im(f_n).

Exercice 9

1. Soit $n \geq 4$ et a, b, c, d $\in \{1,\ldots n\}$ tous distincts. Que vaut $(a\ b) \circ (c\ d) \circ (d\ a)$?
2. Que dire d'une permutation de Sn possédant au moins $n-1$ points fixes.
3. Une permutation $s \neq Id$ telle que $s^2 = Id$ est-elle nécessairement une transposition?
4. Énumérer tous les éléments de S4.

Exercice 10

Pour les permutations σ suivantes, décomposer σ en produits de cycles disjoints, en produit de transpositions, calculer l'ordre de σ, la signature de σ, calculer σ^{100} :

$$\sigma 1 = \binom{123456}{354621} \qquad \sigma 2 = \binom{123456789}{469725813}$$

Exercice 11

Soit $\sigma = \binom{1234567}{3567124}$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. Calculer σ^{2001}

Exercice 12

Pour $n \geq 1$, on note An l'ensemble des éléments de Sn de signature égale à 1. An est appelé le groupe alterné d'indice n.

1. Démontrer que An est un sous-groupe de Sn.
2. Énumérer tous les éléments de A3, de A4.
3. On suppose désormais que $n \geq 2$ et on fixe τ une transposition de Sn. Démontrer que $\phi : Sn \to Sn, \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ est une bijection. En déduire le cardinal de An.

Exercice 13

Soit $n \geq 3$

Soient $a \neq b \in \{1,\ldots n\}$ et soit $\sigma \in Sn$. Quelle est la permutation $\sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1}$?

On appelle centre du groupe symétrique l'ensemble des permutations σ □ Sn qui commutent avec toutes les autres : $\forall\ s \in Sn,\ s \circ \sigma = \sigma \circ s$. Déterminer le centre de Sn