Chapitre II.

Fonctions réelles : limites et continuité

II.1. Définitions générales

Définition 2.1. Soient D et T deux ensembles non vides. Une fonction f de D dans T est une correspondance qui associe à tout élément $x \in D$ un élément $y = f(x) \in T$. On la note par

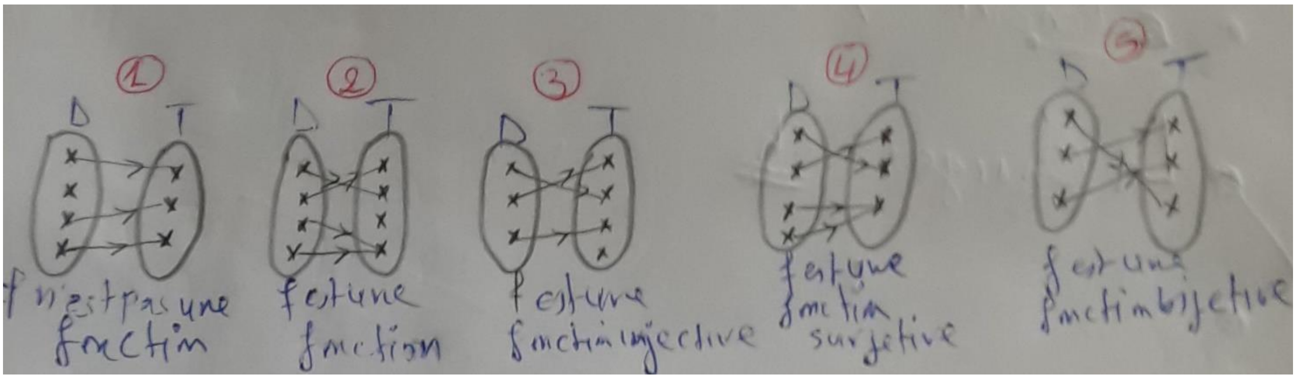
$$\begin{aligned} f : D &\to T \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- L'ensemble D est le domaine de définition de f. Il sera souvent noté D_f
- L'élément $y = f(x) \in T$ est l'image de x par f alors que x est une pré-image de y.
- Si D et T sont des sous-ensembles de R, la fonction f est appelée **fonction réelle**.
- L'ensemble $Im(f) := \{y \in T \mid \exists x \in D$ avec $y = f(x)\}$ est appelé l'image de D par f.

Définition 2.2. Une fonction f : D −→ T est dite :

- Injective si tout élément de T a au plus une pré-image. Autrement dit, si $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$ pour tout x_1 , $x_2 \in D$.
- Surjective si tout élément de T a au moins une pré-image. Autrement dit, si pour tout y∈ T, il existe x ∈ D avec $y = f(x)$. Ou encore, si $Im(f) = T$.
- Bijective si elle est injective et surjective.

Exemple 1.



Exemple 2.

- ✓ La fonction $f : N \to N$ définie par $f(x) = x^2$ est injective mais pas surjective car il n'existe aucun x ∈ N tel que $f(x) = 5$.
- ✓ La fonction $f : Z \to N$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective car $f(-2) = f(2) = 4$ et aussi n'est pas surjective car il n'existe aucun x ∈ Z tel que $f(x) = 5$.
- ✓ La fonction $f : IR \to IR$ définie par $f(x) = x$ est la fonction identité. Elle est bijective.

Dr. Kamal Bouh Email : kamal.bouh@supnum.mr

Propriétés des fonctions réelles

Une fonction réelle $f : D_f \to IR$ est dite

- paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- périodique de période T si $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- bornée si $f(x) \leq M$ pour un certain $M \in IR$ et pour tout $x \in D_f$.
- croissante (resp. strictement croissante) si $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$)
- décroissante (resp. strictement décroissante) si $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$)
- monotone si elle est croissante ou décroissante.

Composition

Soient f, g deux fonctions réelles telles que $Im(f) \subset D_g$. Alors on peut construire la fonction composée $g \circ f$ définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in D_f$.

Exemple Soit $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$

On a $\mathrm{Im}(f) = [1, +\infty[$ et $D_g = IR_+$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset D_g$. Alors on peut construire la fonction composée $g \circ f$: $(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$

D'autre part, $\mathrm{Im}(g) = IR_+$ et $D_f = IR$ donc $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$. Alors on peut aussi construire la fonction composée $f \circ g$: $(fog)(x) = f(g(x)) = (g(x))^4 + 3(g(x))^2 + 1 = x^2 + 3x + 1$.

Fonction réciproque (ou fonction inverse)

Si une fonction $f : D \to T$ est bijective, on peut définir la fonction réciproque $f^{-1} : T \to D$ qui associe à tout $y \in T$ l'élément $x \in D$ tel que $f(x) = y$. On a alors

$$(f^{-1} of)(x) = (fof^{-1})(x) = x \text{ pour tout x ou les expressions sont définies.}$$

Exemple 1. La fonction $f : IR_+ \to IR_+$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective. On peut donc trouver f^{-1} qui n'est rien d'autre que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in IR_+$. En effet

$(fof^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$ et $(f^{-1} of)(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$

Exemple 2. La fonction $f : IR \to IR$ définie par $f(x) = 3x+1$ est bijective. Pour trouver f^{-1} :

$f(x) = y = 3x + 1 \Rightarrow x = \dfrac{y-1}{3}$. Donc $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$. On a bien $(f^{-1} of)(x) = (fof^{-1})(x) = x$

Quelques fonctions réelles élémentaires

1) Fonctions polynômiales :

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ , \ a_k \in IR, a_n \neq 0 \ et \ D_f = IR$$

2) Fonctions rationnelles :

$$y = f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \ et \ D_f = IR \setminus \{x \in IR | Q_m(x) = 0\}$$

3) Fonctions irrationnelles : polynômes + racines.

4) Fonctions trigonométriques :

$f(x) = sinx$: impaire, périodique de période T = 2π, bornée, $D_f = IR$

Dr. Kamal Bouh **Email : kamal.bouh@supnum.mr**

$f(x) = \cos x$: paire, périodique de période T = 2π, bornée, $D_f = IR$

$f(x) = \tan x$: impaire, périodique de période T = π, non bornée, $D_f = IR \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$

5) Fonctions trigonométriques inverses

Pour inverser les fonctions trigonométriques, il faut se restreindre à un intervalle sur lequel elles sont bijectives. On choisit les intervalles suivants :

$$\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$
$$\cos x : [0, \pi] \to [-1,1]$$
$$\tan x : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to IR$$

On définit alors

$$\sin^{-1} x := \arcsin x : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\cos^{-1} x := \arccos x : [-1,1] \to [0, \pi]$$
$$\tan^{-1} x := \arctan x : IR \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

6) Fonctions exponentielles

Soit $a > 0$ un nombre réel. La fonction exponentielle est $f(x) = a^x$

- $D_f = IR$
- $f(x) > 0, \forall x \in IR$; $f(0) = 1$, $f(1) = a$
- $f(x^r) = a^{rx} = (a^x)^r = (f(x))^r$
- $f(x+y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y)$
- Si $a > 1$, alors $f(x)$ est strictement croissante.
- Si $0 < a < 1$, alors $f(x)$ est strictement décroissante.
- Si $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle classique e^x

7) Fonctions logarithmes :

Soit $a > 0$ un nombre réel. La fonction logarithme de base a est $f(x) = \log_a x$

- $D_f = IR^*_+$
- $f(1) = 0$, $f(a) = 1$
- $f(x^r) = \log_a x^r = r \log_a x = rf(x)$ pour tout x> 0.
- $f(xy) = \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y = f(x) + (y)$ pour tout x, y > 0.
- Si $a > 1$, alors $f(x)$ est strictement croissante.
- Si $0 < a < 1$, alors $f(x)$ est strictement décroissante.
- Si $a = e$, on retrouve Logarithme naturel. On pose $\log_e x := \ln x$
- Logarithme est l'inverse de l'exponentielle : $\ln e^x = e^{\ln x} = x$

Dr. Kamal Bouh Email : kamal.bouh@supnum.mr

II.2. Limite d'une fonction

Valeur limite à l'infini

Définition 2.3. On dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M_\epsilon \in IR$ tel que

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{pour tout } x > M_\epsilon .$$

- idem pour la limite en $-\infty$.

Exemples

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^r}$, $r > 0$, alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

2) $f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

3) $f(x) = \ln x$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4) $f(x) = e^x$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

5) $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, alors

Si $n<m$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; Si $n=m$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_m}$; Si $n>m$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

6) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{P_n(x)}{e^x} = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{P_n(x)} = \infty$

7) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{P_n(x)}{\ln x} = \infty$, et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{P_n(x)} = 0$

8) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = \infty$

Valeurs limites en un point

Définition 2.4. Soit $f(x)$ une fonction et x_0 un point fixé. On dit que f admet le nombre L pour limite au point x_0 si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ avec

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{dès que} \quad 0 < |x_0 - x| < \delta_\epsilon.$$

On note alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

Définition 2.5. On peut définir aussi la limite à gauche qui est notée $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ et la limite à droite qui est notée $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ par :

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$$

On dit que la limite de f au point x_0 existe si les limites à gauche et à droite exisitent et

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Dr. Kamal Bouh Email : kamal.bouh@supnum.mr

Exemples

1) Considérons la fonction *f(x)* définie par : $f(x) = \begin{cases} x-2 & x<0 \\ x^2-2 & 0 \le x < 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2-2) = -2$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2-2) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.

2) Considérons la fonction *f(x)* définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

3) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ alors $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^{+-}} f(x) = +\infty$

4) Considérons la fonction *f(x)* définie par : $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas car

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{-x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} (1) = 1,$$

Cas indéterminés : $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$; $0.\infty$; $\infty - \infty$

Exemples

1. Calculons $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1}$ $\left(= \dfrac{0}{0}\right)$

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(3x+1-4)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

2. $A = x + 2 - \sqrt{x^2+4} \xrightarrow{x\to+\infty} ?$

$$A = (x+2-\sqrt{x^2+4}) \cdot \frac{x+2+\sqrt{x^2+4}}{x+2+\sqrt{x^2+4}}$$
$$= \frac{x^2+4x+4-(x^2+4)}{x+2+\sqrt{x^2+4}} = \frac{4x}{x+2+x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$$
$$= \frac{4}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+4/x^2}} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{4}{2} = 2$$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = (F.I\,\dfrac{0}{0}) = 1$ Plus généralement

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin px}{x} = p \lim_{x\to 0} \frac{\sin px}{px} = p$$

Dr. Kamal Bouh **Email : kamal.bouh@supnum.mr**

4. Calculons

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sin 2x}\right)\sin x = {}^{\alpha}(\infty+\infty)\cdot 0^{\alpha}.$$

On a

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sin 2x}\right)\sin x = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}$$
$$= \sqrt[3]{x^2}\,\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{2\cos x}$$

et la limite vaut alors $0\cdot 1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Composition

Soient *f(x)* et *g(x)* deux fonctions telles que $Im(f)\subset D_g$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=c$ et $\lim_{u\to c} g(u)=L$, alors

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=L$$

Applications :

1) $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

2) $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2+5}{2+3x^2}\right)=\sin\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x^2+5}{2+3x^2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

3) Que vaut

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}\qquad\left(=\frac{0}{0}\right)?$$

On a $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ et donc

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2\cdot\sin^2 x/2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x/2))^2}{(x/2)^2}$$
$$\overset{u=x/2}{=}\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$
$$=\left(\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\right)^2=1.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}=1$$

Dr. Kamal Bouh **Email : kamal.bouh@supnum.mr**

II.3. Continuité

Définition 2.6. Soit $f(x)$ une fonction et $x_0 \in D_f$. On dit que f est continue au point x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que $f(x)$ est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point $x_0 \in I$. On note alors $f(x) \in C^0(I)$.

Exemples

1) Considérons la fonction $f(x)$ définie par : $f(x) = \begin{cases} x-2 & x<0 \\ x^2-2 & 0 \le x < 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$

On a $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-2) = -2$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2-2) = -2$, donc $\lim_{x \to 0} f(x) = -2 = f(0)$, d'ou f est continue au point 0.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2-2) = -1$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0$, donc $\lim_{x \to 1} f(x)$ n'existe pas d'ou f n'est pas continue au point 1. Donc f est continue sur $IR \setminus \{1\}$

2) Considérons la fonction $f(x)$ définie par : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \ne 2 \\ 4 & x=2 \end{cases}$

On a $g(2)=4$ et $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2}\left(\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$

Alors g est continue au point 2. Donc g est continue sur IR.

Trois types de discontinuité

Type I : La limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe mais n'est pas égale a $f(x_0)$.

Exemple

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} & x \ne 2 \\ 0 & x=2 \end{cases}$$

Type II : La limite $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \ne \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Exemple

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \ne 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

Type III : une des limites $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ou $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ (ou les deux) n'existe pas.

Exemple

Dr. Kamal Bouh Email : kamal.bouh@supnum.mr

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \le 1 \\ \dfrac{5}{x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Prolongement par continuité

Soit f(x) une fonction et $x_0 \notin D_f$. Supposons que la limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ existe . On peut alors définir une fonction $\tilde{f}(x)$ en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = a & si\ x = x_0 \end{cases}$$

On appelle $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de *f* au point *x0*. On a cette fois $x_0 \in D_{\tilde{f}}$. En général, la nouvelle fonction sera encore notée *f* par un abus de notation.

Exemples

1) La fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ indéfinie en 0 peut être prolongée par continuité en posant *f(0) = 1* car on vient de voir que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2) La fonction $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ indéfinie en 0 et elle n'est pas prolongeable par continuité en 0 car on vient de voir que $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ n'existe pas.

3) La fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}$ indéfinie en 0, peut être prolongée par continuité en ?

4) Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} & si\ x \neq 1, x \ge 0 \\ c & si\ x = 1 \end{cases}$$

Trouver c pour que f soit continue en 1.
Solution : On a

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1} (x^2+x+1)(\sqrt{x}+1) = 6$$

Il faut poser c = 6.

Dr. Kamal Bouh **Email : kamal.bouh@supnum.mr**