Institut Supérieur du Numérique
Algèbre / Série II

Exercice 1

Soit E= {1, 2, 3, 4} et R la relation binaire sur E dont le graphe est {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)}

1. Vérifier que la relation R est une relation d'équivalence.
2. Faire la liste des classes d'équivalences distinctes et donner l'ensemble quotient E/R.

Exercice 2.

On considère sur $\mathcal{F}(E,E)$ la relation binaire R définie par :

$$fRg \iff \exists\, \varphi \in S(E)\ telle\ que\ \ fo\varphi = \varphi og$$

a) Montrer que R est une relation d'équivalence.
b) Décrire la classe d'équivalence d'une fonction donnée $f \in \mathcal{F}(E,E)$

Exercice 3

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur R par : $x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence $\dot{x}$de pour tout réel x.
3. Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 4

Dans N^* on définit une relation $\ll$ en posant $m \ll n\ s'il existe\ k \in N^*\ tel\ que\ \ n = km$
Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur N^*.

Exercice 5

Dans R^2 on définit une relation $\ll$ en posant
$(x,y) \ll (x',y') \Leftrightarrow x < x' ou\ (x = x' et\ y < y')$
Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre sur R^2. Est-ce une relation d'ordre total

Exercice 6

1) Montrer que les nombres entiers suivants sont composés, c'est-à-dire non premier
$$i)\ A = 5^{45} + 4^{30}; \quad ii)\ B = n^4 - 20n^2 + 4, \forall n \in Z$$
2) Montre que $a)$ $\forall n \in N$ $14 \mid 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$
$b)$ $\forall n \in N$ $11 \mid 3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2}$

Exercice 7.

1) Trouvez tous les $n \in Z\ tel\ que\ \sqrt{\frac{11n-5}{n+4}} \in N$
2) Résoudre dans Z l'équation x −1 | x +3.

Exercice 8

1) Déterminer le nombre de diviseurs de 10!
2) Sachant que 3285 = 25 × 123+210 trouver, sans effectuer cette division, le reste et le quotient de la division euclidienne de 3285 par 123.
3) Montrer que. $\forall\, n \geq 0, \quad 6 \mid 5n^3 + n$

Exercice 9

Calculer le pgcd des couples

1. (120,230), 2. (210,135), 3. (211,112)

Exercice 10

Soient a, b des nombres premiers entre eux. Montrer que :

1) $a \wedge (a+b) = b \wedge (a+b) = 1$.
2) $(a+b) \wedge ab = 1$

Exercice 11

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ $(a \leq b)$ tels que :

i) $a \wedge b = 18$ et $a+b = 360$.
ii) $a \wedge b = 18$ et $ab = 126$