TD N°3 : Dérivées et applications

Exercice 1. Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

1) $y = 2\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[3]{x^5+3} - \frac{3}{x^2}$; 2) $y = \ln(3+\sin 5x)$; 3) $y = \sin\left(e^{x^2}\right)$; 4) $y = 3^{\tan 5x}$
5) $y = \ln(\ln x)$; 6) $y = (x^2+\cos 2x)^5 \sin(e^{-3x}+5x)$; 7) $y = \arcsin(4-x^2)$;
8) $y = \arctan\sqrt{x}$; 9) $y = \dfrac{e^{\sqrt{x}}\cos(x^3)}{\cos 3x}$; 10) $y = \dfrac{\arccos(1-e^{-x})}{\ln\sqrt{1+x^2}}$; 11) $y = (x^2+1)^{\sin x}$

Exercice 2. Etudier la continuité et la dérivabilité pour les fonctions suivantes :

1) $f(x) = |x-1|$; 2) $f(x) = x|x|$

3) $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$; 4) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

Exercice 3. Montrer que :
1) La fonction $y = e^x \sin x$ vérifie la relation: $y'' - 2y' + 2y = 0$
2) La fonction $y = e^{-x}\sin 2x$ vérifie la relation: $y'' + 2y' + 5y = 0$

Exercice 4. Calculer les dérivées des fonctions implicites y suivantes:
1) $x^4 + y^4 = x^2y^2$; 2) $x^3 + y^3 + x^2y^2 - e^{xy} = 0$; 3) $2y\ln y = x$; 4) $y = 1 + xe^y$

Exercice 5. Ecrire l'équation de la tangente a chacune des courbes au point indiqué :
1) $y = \arctan 2x$. $M(0.0)$; 2) $y = \cos 2x - \ln(1+\sin x)$. $M(\pi.1)$;
3) $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$. $M(-1.3)$

Exercice 6. Calculer, à l'aide de la règle de L'Hôpital, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to \pi^+}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$; 5) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\ln(x^2+1))$; 6) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; 9) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\cos\frac{2}{x})^{x^2}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x})$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos 3x}{x^2})$

Exercice 7. Trouver les intervalles de monotonie, les intervalles de convexité et de concavité, les extrémums locaux des fonctions suivantes:
1) $y = 3x^4 - 4x^3$; 2) $y = x^2e^{-x}$; 3) $y = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$

Exercice 8. Trouver les minimums et maximums absolus des fonctions suivantes:
1) $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ sur $[-2\,.\,2]$; 2) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ sur $[1\,.\,5]$

Exercice 9. Soit $f : IR \to IR$ la fonction définie par $f(x) = x^5 - 5x + 1$. Etudier les variations de f et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Dr. Kamal Bouh **Email : kamal.bouh@supnum.mr**