

**Caderno de Exercícios de Álgebra Linear A**

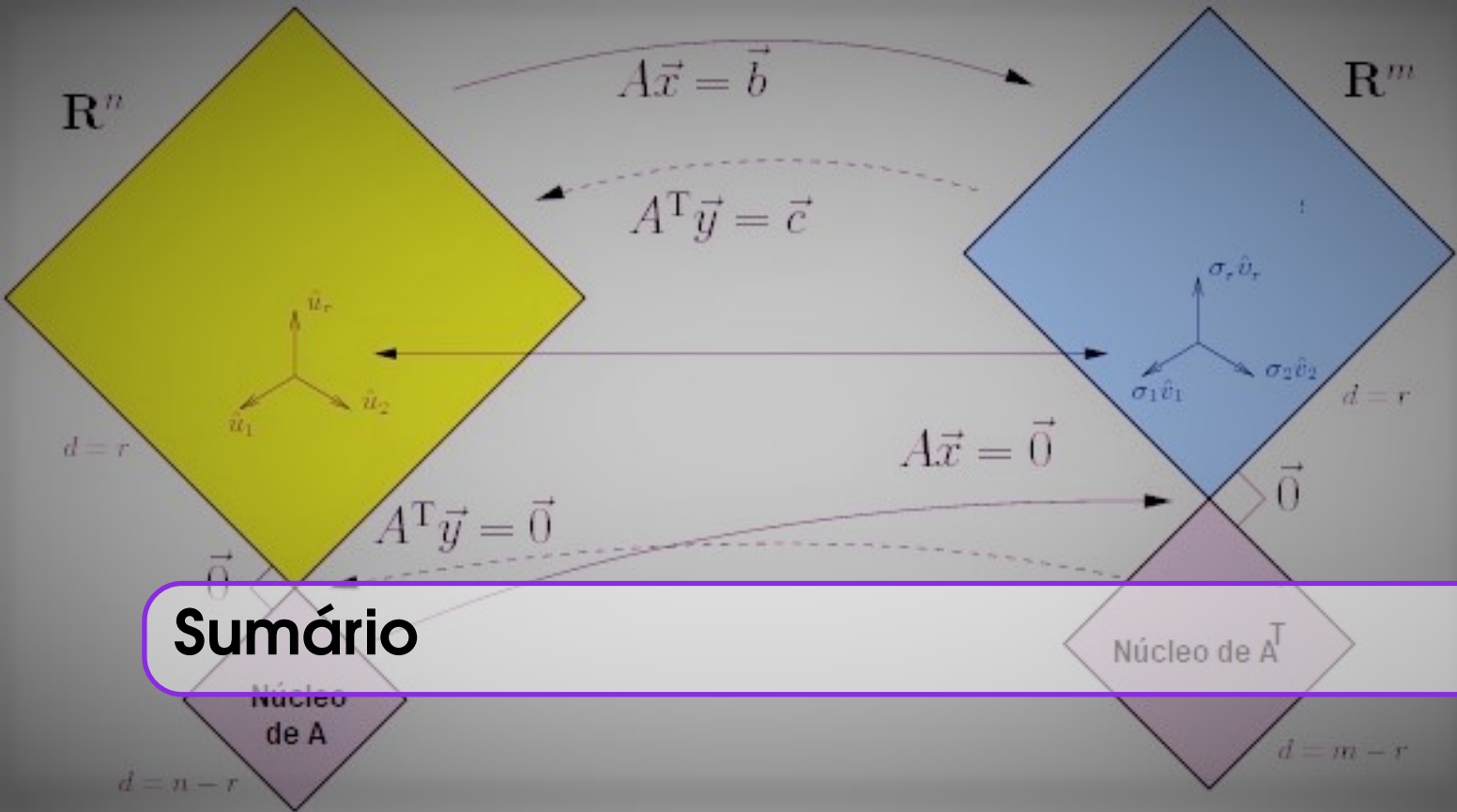
**UFBA - Versão 2021-1**

**Simone Moraes**

# UFBA - Versão 2021-1

# Simone Moraes





## Sumário

I

## Matrizes e Sistemas Lineares

<b>1</b>	<b>Matrizes</b>	<b>7</b>
1.1	Definição de Matrizes	7
1.2	Operações com Matrizes	8
1.3	Matrizes Simétricas e Matrizes Ortogonais	9
1.4	Matrizes Hermitianas e Matrizes Normais	10
1.5	Determinante	10
1.6	Matriz Inversa	11
1.7	Miscelânea	13
1.8	Matriz na Forma Escalonada e na Forma Escada	14
<b>2</b>	<b>Sistemas de Equações Lineares</b>	<b>15</b>
2.1	Forma Matricial de um Sistema Linear	15
2.2	Classificação e Solução de Sistemas Lineares	15
2.3	Teorema do Posto	16
2.4	Resolução de Sistemas Lineares	18
2.5	Método da Matriz Inversa	19
2.6	Regra de Cramer	20
2.7	Miscelânea	20
2.8	Aplicações de Sistemas Lineares	21

<b>3</b>	<b>Espaços Vetoriais .....</b>	<b>27</b>
3.1	Espaços Vetoriais	27
3.2	Subespaços Vetoriais	28
3.3	Soma e Intersecção de Subespaços Vetoriais	29
3.4	Combinação Linear	30
3.5	Subespaço Gerado	31
3.6	Dependência e Independência Linear	33
3.7	Base e Dimensão	34
3.8	Coordenadas de um Vetor e Mudança de Base	37

<b>4</b>	<b>Transformações Lineares .....</b>	<b>43</b>
4.1	Transformações Lineares	43
4.2	Matriz de uma Transformação Linear	45
4.3	Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear	47
4.4	Transformações Lineares Injetoras e Sobrejetoras	48
4.5	Inversa de uma Transformação Linear	50
<b>5</b>	<b>Diagonalização de Operadores .....</b>	<b>53</b>
5.1	Autovalor, Autovetor e Polinômio Característico	53
5.2	Diagonalização de Operadores Lineares	54

# Matrizes e Sistemas Lineares

<b>1</b>	<b>Matrizes .....</b>	<b>7</b>
1.1	Definição de Matrizes	
1.2	Operações com Matrizes	
1.3	Matrizes Simétricas e Matrizes Ortogonais	
1.4	Matrizes Hermitianas e Matrizes Normais	
1.5	Determinante	
1.6	Matriz Inversa	
1.7	Miscelânea	
1.8	Matriz na Forma Escalonada e na Forma Escada	
<b>2</b>	<b>Sistemas de Equações Lineares .....</b>	<b>15</b>
2.1	Forma Matricial de um Sistema Linear	
2.2	Classificação e Solução de Sistemas Lineares	
2.3	Teorema do Posto	
2.4	Resolução de Sistemas Lineares	
2.5	Método da Matriz Inversa	
2.6	Regra de Cramer	
2.7	Miscelânea	
2.8	Aplicações de Sistemas Lineares	



# 1. Matrizes

## 1.1 Definição de Matrizes

1. As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  tem ordens  $4 \times 3$ ,  $4 \times 5$ ,  $3 \times 5$ ,  $2 \times 5$  e  $3 \times 5$ , respectivamente. Determine quais das seguintes expressões matriciais são possíveis e a ordem de cada uma:

(a)  $AE + B^T$ ;    (b)  $C(D^T + B)$ ;    (c)  $AC + B$ ;    (d)  $E^T(CB)$ .

2. Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  matrizes tais que  $AB^T$  de ordem  $5 \times 3$  e que  $(C^T + D)B$  de ordem  $4 \times 6$ . Determine a ordem de cada uma destas matrizes.

3. Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 11 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ , determine:

4. Determine a matriz quadrada,  $A = (a_{ij})$ , de ordem 4 cujos elementos são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i - 3j, & \text{se } i < j \\ i^2 + 2j, & \text{se } i = j \\ -3i + 4j, & \text{se } i > j \end{cases}$$

5. Determine números reais  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$  tais que  $\begin{bmatrix} 2x+y & t \\ z-t & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & y+2z \end{bmatrix}$ .

6. (a) A **matriz de Hilbert** em  $M_n(\mathbb{R})$  é a matriz  $H_n = [h_{ij}]$  definida por:  $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ , determine a matriz de Hilbert para  $n = 4$ .

- (b) A **matriz de Pascal** em  $M_n(\mathbb{R})$  é a matriz  $P_n = [p_{ij}]$  definida por:  $p_{ij} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}$ , determine a matriz de Pascal para  $n = 5$ .

## 1.2 Operações com Matrizes

1. Determine números reais  $x$  e  $y$  tais que  $\begin{bmatrix} x^3 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 3y \\ 4y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ .

2. Sejam as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = A \cdot B$  e  $D = B \cdot A$ , determine os elementos  $c_{32}$  e  $d_{43}$ .

3. Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ , determine  $A^2$ ;  $A^3$ ;  $A^{31}$ ;  $A^{42}$ .

4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine, se possível:

(a)  $4E - 2D$ ; (b)  $2A^T + C$ ; (c)  $(2E^T - 3D^T)^T$ ; (d)  $(BA^T - 2C)^T$ ;  
 (e)  $(-AC)^T + 5D^T$ ; (f)  $B^T(CC^T - A^TA)$ ; (g)  $D^TE^T - (ED)^T$ .

5. Uma matriz  $A$  em  $M_n(\mathbb{K})$  é chamada idempotente se  $A^2 = A$ , mostre que:

(a) Se  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  são tais que  $A \cdot B = A$  e  $B \cdot A = B$ , então  $A$  e  $B$  são idempotentes.

(b) A matriz  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$  é idempotente.

6. Determine, se possível:

(a) Números reais  $x$  e  $y$  tais que  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$  comutam.

(b) Todas as matrizes em  $M_2(\mathbb{R})$  que comutam com a matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

7. Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ , calcule  $A + A^T$  e  $A \cdot A^T$ .

8. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes em  $M_n(\mathbb{R})$ , se  $A \cdot B = B \cdot A$ , mostre que:

(a)  $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ ;

(b)  $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ ;

(c)  $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$ .



### 1.3 Matrizes Simétricas e Matrizes Ortogonais

1. Determine, em cada um dos casos abaixo, números reais  $x$ ,  $y$  e  $z$  tais que a matriz  $A$  seja simétrica.

$$(a) A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b) A = \begin{bmatrix} 8 & x+3 & -10 \\ 15 & -5 & -8 \\ y-2 & 2z & 9 \end{bmatrix}, \quad (c) A = \begin{bmatrix} 8 & x^2+3 & -5 \\ 7 & -9 & 4 \\ y+x & z+3x & 11 \end{bmatrix}.$$

2. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em simétrica e anti-simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}.$$

3. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes em  $M_n(\mathbb{K})$ , com  $n > 1$  e  $\alpha$  e  $\beta$  escalares em  $\mathbb{K}$ , mostre que:

- (a)  $A + A^T$  é simétrica e  $A - A^T$  é anti-simétrica.
- (b) Se  $A$  e  $B$  são simétricas, então  $\alpha A + \beta B$  também o é.
- (c) Se  $A$  e  $B$  são anti-simétricas, então  $\alpha A + \beta B$  também o é.
- (d) Se  $A$  e  $B$  são simétricas, então  $A \cdot B$  é simétrica se, e somente se,  $A$  e  $B$  comutam.

4. Determine, se possível, números reais  $x$  e  $y$  de modo que a matriz  $A$  seja ortogonal, nos seguintes casos:

$$(a) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}; \quad (b) A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

5. Verifique quais das matrizes abaixo é ortogonal.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

6. Sejam  $A$  e  $B$  em  $M_n(\mathbb{R})$ , mostre que se  $A$  e  $B$  são ortogonais, então  $A \cdot B$  também o é.

7. Dado  $\theta$  número real considere a matriz  $T_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ .

- (a) Dados  $\theta$  e  $\phi$  em  $\mathbb{R}$ , mostre que  $T_\theta \cdot T_\phi = T_{\theta+\phi}$ .
- (b) Calcule  $T_{(-\theta)}$ .
- (c) Mostre que para todo número  $\theta$  a matriz  $T_\theta$  é ortogonal.

8. Em  $M_2(\mathbb{R})$  determine todas as matrizes que são simultaneamente:

- (a) Simétricas e ortogonais.
- (b) Anti-simétricas e ortogonais.

## 1.4 Matrizes Hermitianas e Matrizes Normais

1. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em hermitiana e anti-hermitiana:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}.$$

2. Sejam  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , mostre que:

- (a) Se  $A$  é matriz real e simétrica (ou anti-simétrica), então  $A$  é matriz normal.
- (b) Se  $A$  é matriz hermitiana (ou anti-hermitiana), então  $A$  é matriz normal.
- (c) As matrizes  $A + \bar{A}^T$  e  $A \cdot \bar{A}^T$  são matrizes hermitianas.

3. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em normais e unitárias:

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

## 1.5 Determinante

1. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 5, cujo determinante é igual a  $-3$ .

- (a) Calcule o determinante da matriz  $P$  dada por  $P = 4A^{-1}A^T$ ,  $P$  é invertível?
- (b) Calcule o determinante da matriz  $B$  obtida de  $A$  após serem realizadas as seguintes operações:  $L_3 \leftrightarrow L_2$ ;  $L_1 \rightarrow L_1 + 2L_5$ ;  $L_4 \rightarrow -3L_4$ .

2. Calcule o determinante da matriz  $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ .

- (a) Teorema de Laplace (usando cofatores de uma linha ou de uma coluna de  $A$ ).
- (b) Usando operações elementares sobre as linhas de  $A$ .

3. Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ , determine:

- (a)  $\det A$  utilizando as operações elementares sobre as linhas de  $A$ ;
- (b)  $\det A^T$ ;      (c)  $\det A^2$ ;      (d)  $\det A^{-1}$ ;      (e)  $\det(-A)$ ;      (f)  $\det(3AA^T)$ .

4. Calcule os seguintes determinantes:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Resolva as seguintes equações:

$$(a) \begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0; \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ 2x+3 & x-1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16;$$

$$(c) \begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}.$$

6. Seja  $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ , determine  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\det(xI - A) = 0$ .

7. Calcule o determinante da matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ . Generalize o resultado para uma matriz  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  na qual  $a_{ij} = 0$  sempre que  $i + j \leq n$ .

8. Diz-se que uma matriz  $A$  é semelhante à matriz  $B$  quando existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$ .

- (a) Mostre que se  $A$  é uma matriz semelhante a  $B$ , então  $B$  é semelhante a  $A$ .
- (b) Mostre que se  $A$  é semelhante a  $B$  e  $B$  é semelhante a  $C$ , então  $A$  é semelhante a  $C$ .
- (c) Prove que matrizes semelhantes têm o mesmo determinante.

## 1.6 Matriz Inversa

1. Verifique se as matrizes abaixo são invertíveis, em caso afirmativo determine as inversas.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Determine os valores de  $a$  para que a matriz seja invertível em cada um dos seguintes casos:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}; \quad (b) A = \begin{bmatrix} a+3 & 7 & 6 \\ -1 & a-5 & -6 \\ 1 & 1 & a+2 \end{bmatrix}.$$

3. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes invertíveis em  $M_n(\mathbb{K})$ , encontre a expressão da matriz  $X$ , nos seguintes casos:

(a)  $AB^T X = C$ ;      (b)  $AB + CX = I_n$ ;      (c)  $(CB)^{-1}AX = I_n$ ;      (d)  $(AB)^T XC = I_n$ .

4. Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz diagonal com  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  todos não nulos, determine  $A^{-1}$ , a inversa de  $A$ , se existir.

5. Em cada caso verifique se  $A$  é invertível; determine  $\text{cof}A$ , a matriz co-fatora de  $A$ , e  $A^{-1}$ , a matriz inversa de  $A$ , se esta existir.

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ;      (b)  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;

(c)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ;      (d)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ .

6. Mostre que se  $A$  é invertível e  $A \cdot B = A \cdot C$ , então  $B = C$ .

7. Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , determine:

(a)  $\det(AB)$ ;      (b)  $A^{-1}$ ;      (c)  $B^{-1}$ ;      (d)  $(AB)^{-1}$ .

8. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ , mostre que:

(a) Se  $A$  satisfaz a igualdade  $A^2 - 3A + I = 0$ , então  $A^{-1} = 3I - A$ .

(b) Se  $A$  é tal que  $A^{n+1} = 0$  para  $n \in \mathbb{N}$ , então  $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n$ .

9. Supondo que  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de ordem  $n$  invertíveis, prove as seguintes igualdades:

(a)  $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$ .

(b)  $(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}$ .

(c)  $(A + BB^T)^{-1}B = A^{-1}B(I + B^T A^{-1}B)^{-1}$ .

10. Mostre que:

(a) Uma matriz quadrada  $A$  é invertível se, e somente se,  $A^T A$  é invertível.

(b) Se  $A$  é invertível, então  $\text{adj}A$  é invertível e  $(\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A} A = \text{adj}(A^{-1})$ .

(c) Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  invertível, então  $\det(\text{adj}A) = (\det A)^{n-1}$ .

11. Determine  $A^{-1}$ , se existir, utilizando operações elementares sobre as linhas da matriz, em cada um dos seguintes casos:

(a)  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ;      (b)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ ;      (c)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ;

(d)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ ;      (e)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

12. Considere as seguintes matrizes invertíveis:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Encontre a expressão de  $X$  tal que  $BAX = C$ .  
 (b) Determine, caso exista, a inversa da matriz  $X$  do item acima.

## 1.7 Miscelânea

Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

1. ( ) Se a soma de matrizes  $A \cdot B + B \cdot A$  está definida, então as matrizes  $A$  e  $B$  têm a mesma ordem.
2. ( ) Se  $A \cdot A^T$  é uma matriz não invertível, então  $A$  não é invertível.
3. ( ) Se  $A$  é invertível de ordem  $n$  e  $A \cdot B_{n \times m} = 0_{n \times m}$ , então  $B$  é a matriz nula de ordem  $n \times m$ .
4. ( ) A soma de duas matrizes invertíveis é sempre uma matriz invertível.
5. ( ) Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  tal que  $A^4 = 0$ , então  $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3$ .
6. ( ) Se  $A$  é matriz quadrada de ordem  $n$ , com  $n \geq 2$ , então  $\det(2A) = 2\det A$ .
7. ( ) Se  $A$  é matriz quadrada de ordem  $n$ , com  $n \geq 2$ , então  $\det(I_n + A) = 1 + \det A$ .
8. ( ) Não existe matriz quadrada real  $A$  para a qual  $\det(A \cdot A^T) = -1$ .
9. ( ) Se  $\det(A^T \cdot A) = 4$ , então  $\det A = 2$ .
10. ( )  $\det(A + B) = \det A + \det B$ .
11. ( ) Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem 4 com  $\det A = -\frac{1}{2}$ , então  $\det(-2A^2A^T \cdot A^{-1}) = -4$ .
12. ( ) Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , com  $n > 1$ , então  $\det(-A) = -\det A$ .
13. ( ) Toda matriz diagonal é invertível.
14. ( ) Dadas  $A$  e  $B$  em  $G_n(\mathbb{K})$ , então  $(I + A^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot A^{-1} = (A + B^T)^{-1}$ .
15. ( ) Se  $A^{100}$  é invertível, então  $3A$  também o é.
16. ( ) Se  $A$  é uma matriz anti-simétrica, então a matriz  $A^k$  é anti-simétrica para todo  $k \in \mathbb{N}^*$ .
17. ( ) Se  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , então  $A$  é a soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica.
18. ( ) Toda matriz complexa simétrica é uma matriz normal.
19. ( ) Se  $A$  é uma matriz real simétrica, então  $A$  é matriz normal.
20. ( ) O conjugado da soma de duas matrizes simétricas é uma matriz normal.
21. ( ) O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.
22. ( ) A soma de matrizes reais hermitianas é uma matriz simétrica.
23. ( ) A transposta do produto de matrizes ortogonais é o produto de suas inversas.
24. ( ) A soma de matrizes idempotentes é uma matriz idempotente.
25. ( ) Se  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de mesma ordem tais que  $AB = A$  e  $BA = B$ , então  $A$  e  $B$  são matrizes idempotentes.

26. ( ) A soma de duas matrizes hermitianas é uma matriz normal.
27. ( ) O traço de uma matriz quadrada é igual ao traço de sua transposta.
28. ( ) O traço de uma matriz ortogonal é igual ao traço de sua inversa.
29. ( ) O traço de uma matriz quadrada complexa é igual ao traço de sua conjugada transposta.
30. ( ) O conjugado do traço de uma matriz hermitiana é igual ao traço da matriz.

## 1.8 Matriz na Forma Escalonada e na Forma Escada

**Observação:** Nesta seção, dada uma matriz  $A$  vamos indicar por  $p(A)$  o posto de  $A$  e  $n(A)$  a nulidade de  $A$ .

1. Encontre a forma escalonada reduzida (forma escada) das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Verifique, se possível, para quais valores de  $m \in \mathbb{R}$  as matrizes abaixo são linhas equivalentes à matriz identidade  $I_3$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Determine o posto e a nulidade de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Dê exemplos, se possível, de matrizes satisfazendo as condições em cada um dos seguintes casos:

- (a)  $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  com  $p(A) = 2$ ;      (b)  $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$  com  $p(A) = 3$ ;
- (c)  $A \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$  com  $p(A) = 3$ ;      (d)  $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  com  $n(A) = 2$ ;
- (e)  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  com  $n(A) = 0$ ;      (f)  $A \in M_3(\mathbb{R})$  com  $n(A) = 0$ ;
- (g)  $A \in M_3(\mathbb{R})$  com  $p(A) = 2$ .

5. Dada a matriz  $B_{m \times n}$ , determine a matriz  $N$ , linha forma reduzida de  $B$  (forma escada) e a matriz invertível  $M$ , de ordem  $m$ , tal que  $N = M \cdot B$ , em cada um dos seguintes casos:

(a)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$ ;      (b)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 0 \\ 1+i & \frac{3+i}{2} & -5-i \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ .

## 2. Sistemas de Equações Lineares

### 2.1 Forma Matricial de um Sistema Linear

1. Escreva os seguintes sistemas na forma matricial:

$$(a) S: \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases},$$

$$(b) S: \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y = -7 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases},$$

$$(c) S: \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 2y = 4 \\ 4x - 7y = 2 \end{cases},$$

$$(d) S: \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3t = 9 \\ 3x + 6y - z + 8t = 10 \end{cases}.$$

### 2.2 Classificação e Solução de Sistemas Lineares

1. Determine os valores reais de  $k$ , em cada um dos casos, para que o sistema linear dado seja compatível.

$$(a) S: \begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases},$$

$$(b) S: \begin{cases} a_1 + 2a_2 = -1 \\ -3a_1 + 4a_2 = k \\ 2a_1 - a_2 = -7 \end{cases}.$$

2. Determine os valores de  $a$  e  $b$  que tornam o sistema linear  $S: \begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$  compatível e determinado.

3. Considere o sistema linear  $S: \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ . Mostre que:
- (a) se  $ad - bc \neq 0$ , então o sistema tem uma única solução, dada por

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc} \text{ e } y = \frac{af - ce}{ad - bc};$$

- (b) se  $ad - bc = 0$  e  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{e}{f}$ , então o sistema não tem solução.
- (c) se  $ad - bc = 0$  e  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f}$ , então o sistema tem infinitas soluções.
4. Dado o sistema linear  $S: \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$ .
- (a) Verifique que  $x_1 = 1, y_1 = -1$  e  $z_1 = -1$  é uma solução de  $S$ ;
- (b) Verifique que  $x_2 = -2, y_1 = 2$  e  $z_1 = 2$  também é uma solução de  $S$ ;
- (c) É verdade que  $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$  e  $z = z_1 + z_2$  é uma solução de  $S$ ?
- (d) É verdade que  $3x, 3y$  e  $3z$ , onde  $x, y$  e  $z$  são como no item (c), é uma solução de  $S$ ?
- (e) Se as respostas de (c) e (d) forem afirmativas, então responda: Por que isso ocorre?

## 2.3 Teorema do Posto

1. Considere os sistemas lineares abaixo, determine o posto e a nulidade das matrizes: **matriz dos coeficientes** e **matriz ampliada**, para os diferentes valores de  $m \in \mathbb{R}$ .

$$(a) S: \begin{cases} mx + 2y + mz = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2x + my + 2z = 0 \end{cases}, \quad (b) S: \begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + mz = 0 \end{cases}.$$

2. Seja o sistema de equações linear  $S: \begin{cases} mx + 2y + mz = 0 \\ mx + y + z = 0 \\ 2x + my + 2z = 0 \end{cases}$ .
- (a) Estude o conjunto solução do sistema  $S$  utilizando o posto e a nulidade das matrizes relacionadas para os diferentes valores de  $m \in \mathbb{R}$ .
- (b) Para  $m = 1$ , determine o conjunto solução deste sistema utilizando, se possível, a inversa da matriz dos coeficientes.
3. Determine os valores reais de  $k$ , em cada um dos casos, para que o sistema linear dado admita solução não-trivial:

$$(a) S: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \end{cases}, \quad (b) S: \begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}.$$

4. Determine  $k$  de modo que o sistema linear  $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = k \end{cases}$  admita solução.



5. Determine os valores reais de  $a$  e  $b$  para que o sistema linear  $S: \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = b \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$  tenha: (a) uma única solução; (b) infinitas soluções; (c) nenhuma solução.

6. Determine os valores reais de  $k$ , em cada um dos casos, tais que o sistema linear  $S$  dado tenha:  
(i) uma única solução; (ii) infinitas soluções; (iii) nenhuma solução:

$$(a) S: \begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 22x - y = k \end{cases},$$

$$(b) S: \begin{cases} x + y - kz = 0 \\ kx + y - z = 2 \end{cases},$$

$$(c) S: \begin{cases} 2x - 2y + kz = 2 \\ 2x - y + kz = 3 \\ x - ky + z = 0 \end{cases},$$

$$(d) S: \begin{cases} x + kz = -2 \\ x - y - 2z = k \\ x + ky + 4z = -5 \end{cases},$$

$$(e) S: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases},$$

$$(f) S: \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases},$$

$$(g) S: \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases},$$

$$(h) S: \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}.$$

7. Determine a condição que os números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$  devem satisfazer para que, em cada um dos casos abaixo, o sistema dado tenha solução.

$$(a) \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases},$$

$$(c) \begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = b \end{cases},$$

$$(d) \begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases},$$

$$(e) \begin{cases} x + 2y = a \\ -3x + 4y = b \\ 2x - y = c \end{cases},$$

$$(f) \begin{cases} -a + 3b = x \\ 2a - b = y \\ -2a + b = z \\ 3a + b = t \end{cases}.$$

8. Seja o sistema de equações lineares  $S: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 4 \\ x + 3y + kz = 3 \end{cases}$  com  $k \in \mathbb{R}$ .

Efetue operações elementares sobre as linhas das matrizes para responder os seguintes itens. Justifique suas respostas!

- (a) Determine o posto e a nulidade da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada do sistema  $S$  para os diferentes valores de  $k \in \mathbb{R}$ .
- (b) Para  $k = -1$ , determine, se possível, a inversa da matriz dos coeficientes e o conjunto solução do sistema  $S$  utilizando esta matriz.
- (c) Para  $k = 0$ , determine o conjunto solução do sistema  $S$  utilizando o método de eliminação de Gauss.

- (d) Para  $k = -2$ , determine o conjunto solução do sistema  $S$  utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

9. Seja o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 12x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -6 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_3 + kx_4 = 9 \end{cases},$$

com  $k \in \mathbb{R}$ .

Efetue operações elementares sobre as linhas das matrizes para responder os seguintes itens. Justifique suas respostas!

- Determine o posto e a nulidade da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada do sistema  $S$  para os diferentes valores de  $k \in \mathbb{R}$ .
- Para  $k = 2$ , determine, se possível, a inversa da matriz dos coeficientes e o conjunto solução do sistema  $S$  utilizando esta matriz.
- Para  $k = 1$ , determine o conjunto solução do sistema  $S$  utilizando o método de eliminação de Gauss.
- Para  $k = 0$ , determine o conjunto solução do sistema  $S$  utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

## 2.4 Resolução de Sistemas Lineares

- Determine a solução do sistema linear  $S: \begin{cases} 2x - (1-i)y + w = 0 \\ 3y - 2iz + 5w = 0 \end{cases}$ , no conjunto dos números complexos.
- Resolva os seguintes sistemas utilizando o **Método de Gauss** ou o **Método de Gauss-Jordan**. Classifique-os.

$$(a) S: \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}, \quad (b) S: \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 3y + 2z = 9 \\ 3x - y + 4z = 13 \end{cases},$$

$$(c) S: \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}, \quad (d) S: \begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases},$$

$$(e) S: \begin{cases} x + 2y - z + w = 0 \\ -x - y + 2z - 3t + w = 0 \\ x + y - 2z - w = 0 \\ z + t + w = 0 \end{cases}, \quad (f) S: \begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ 3x + 3y + z + 2t = 0 \\ 2x + y + z - 2t = 4 \end{cases},$$

$$(g) S: \begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}, \quad (h) S: \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases},$$

$$(i) S: \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$(j) S: \begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 6 \\ x + y + z = 0, \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$(k) S: \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 3y + z - t = 4, \\ x + y - z + t = -4, \\ x - 2y + z + t = 2 \end{cases}$$

$$(l) S: \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3, \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$(m) S: \begin{cases} x + 2y + 3z = -6 \\ 2x - 3y - 4z = 15, \\ 3x + 4y + 5z = -8 \end{cases}$$

$$(n) S: \begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ 4x + 2y + 2z = 8, \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

$$(o) S: \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 2y = 3, \\ 5x + 2y = 27 \end{cases}$$

$$(p) S: \begin{cases} x + 4y - z = 12 \\ 3x + 8y - 2z = 4, \end{cases}$$

$$(q) S: \begin{cases} x + 3y = -4 \\ 2x + 5y = -8, \\ x + 3y = -5 \end{cases}$$

$$(r) S: \begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ 2x - y - z - t = 0, \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$$

$$(s) S: \begin{cases} 3x + 3y - 2z - t = 2 \\ 5x + 2y + z - 2t = 1, \\ 2x - y + 3z - t = -1 \end{cases}$$

$$(t) S: \begin{cases} x + 2y - 5z + 4t = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 0, \\ 4x - 7y + z - 6t = 0 \end{cases}$$

$$(u) S: \begin{cases} x + 5y + 4z - 13t = 3 \\ 3x - y + 2z + 5t = 2, \\ 2x + 2y + 3z - 4t = 1 \end{cases}$$

$$(v) S: \begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5, \\ 3x + 4y - 5z + 2t = 4 \end{cases}$$

$$(x) S: \begin{cases} x + 3y + 2z + 3t - 7w = 14 \\ 2x + 6y + z - 2t + 5w = -2, \\ x + 3y - z + 2w = -1 \end{cases}$$

## 2.5 Método da Matriz Inversa

1. Resolva os seguintes sistemas lineares utilizando o **Método da Matriz Inversa**:

$$(a) S: \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 3x - y = 3, \end{cases}$$

$$(b) S: \begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5, \\ 5x - 3y + z = 16 \end{cases}$$

2. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$ , encontre os valores reais de  $\lambda$  para os quais o sistema homogêneo  $A \cdot X_{3 \times 1} = 0_{3 \times 1}$  admite apenas a solução trivial.

3. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine, se possível, a inversa de  $A$ .
- (b) Utilize o item (a) para resolver a equação matricial  $AX = B_k$  para  $k = 1, 2, 3$ .

## 2.6 Regra de Cramer

1. Resolva os seguintes sistemas utilizando a **Regra de Cramer**:

$$(a) S: \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}, \quad (b) S: \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$(c) S: \begin{cases} 2x + 5z + 2w = 0 \\ y + z + w = 0 \\ 2y + z + 3w = 4 \\ 3y - z + w = 1 \end{cases}.$$

2. Considere o sistema de equações lineares:  $S: \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y + 2z = -4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ , verifique se é um sistema de Cramer. Em caso afirmativo, determine o conjunto solução do sistema utilizando a regra de Cramer.

## 2.7 Miscelânea

Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

- ( ) Se o sistema de equações lineares  $S: A_n \cdot X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$  possui apenas a solução trivial,  $X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$ , então  $S$  é também um sistema de Cramer.
- ( ) Um sistema de equações lineares homogêneo é sempre compatível.
- ( ) Um sistema de equações lineares  $S: A_n \cdot X_{n \times 1} = B_{n \times 1}$  possui uma única solução se, e somente se, o posto de  $A$  é igual a  $n$ .
- ( ) Se  $S$  é sistema de equações lineares homogêneo que possui solução diferente da solução trivial, então  $S$  é um sistema incompatível (impossível).
- ( ) Se o sistema linear  $A_n \cdot X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$  admite as soluções  $X_1$  e  $X_2$ , então também admite  $k_1 X_1 + k_2 X_2$  como solução, quaisquer que sejam os números reais  $k_1$  e  $k_2$ .
- ( ) Uma condição necessária e suficiente para que o sistema linear  $A_n \cdot X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$  tenha somente a solução trivial é que  $\det A \neq 0$ .
- ( ) Se  $X_1$  e  $X_2$  são soluções do sistema linear  $A_n \cdot X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$ , então  $X_1 - X_2$  também é solução de  $A_n \cdot X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$ .
- ( ) Se um sistema de equações lineares  $A_n \cdot X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$  tem apenas a solução trivial, então todo sistema de equações lineares  $A_n \cdot X_{n \times 1} = B_{n \times 1}$ , com  $B \neq 0$ , tem uma única solução.
- ( ) Se um sistema de equações lineares  $S$  é compatível indeterminado, então toda forma linha-reduzida da matriz ampliada de  $S$  contém alguma linha nula.
- ( ) Existem números reais  $a, b$  e  $c$  tais que o sistema de equações lineares:

$$S: \begin{cases} x - y - 3z = a \\ 2x + 6y + z = b \\ x + 15y + 11z = c \end{cases} \quad \text{é compatível determinado.}$$

## 2.8 Aplicações de Sistemas Lineares

Resolva os seguintes problemas utilizando sistemas de equações lineares e seus métodos de resolução. Em cada caso construa o sistema linear correspondente ao problema e estude o seu conjunto solução utilizando posto e nulidade das matrizes relacionadas ao sistema.

1. Uma refinaria de petróleo processa dois tipos de petróleo: com alto teor de enxofre e com baixo teor de enxofre. Cada tonelada de petróleo de baixo teor necessita de 5 minutos no setor de mistura e 4 minutos no setor de refinaria; já o petróleo com alto teor são necessários 4 minutos no setor de mistura e 2 minutos no setor de refinaria. Se o setor de mistura está disponível por 3 horas, e o setor de refinaria por 2 horas, quantas toneladas de cada tipo de combustível devem ser processadas de modo que os dois setores não fiquem ociosos?
2. Um fabricante de plástico produz dois tipos de plástico: o normal e o especial. Para produzir uma tonelada de plástico normal são necessárias duas horas na fábrica A e 5 horas na fábrica B; já na produção de uma tonelada de plástico especial são necessárias 2 horas na fábrica A e 3 horas na fábrica B. Se a fábrica A funciona 8 horas por dia e a fábrica B funciona 15 horas por dia, quantas toneladas de cada tipo de plástico devem ser produzidas diariamente para que as duas fábricas se mantenham totalmente ocupadas?
3. Um nutricionista está elaborando uma refeição que contenha os alimentos A, B e C. Cada grama do alimento A contém 2 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 4 unidades de carboidrato. Cada grama do alimento B contém 3 unidades de proteína, 2 unidades de gordura e 1 unidade de carboidrato. Já o alimento no alimento C encontramos 3 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 2 unidades de carboidrato. Se a refeição deve fornecer exatamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de gordura e 21 unidades de carboidrato, quantos gramas de cada tipo de alimento devem ser utilizados?
4. Um cooperativa produz três tipos de ração: X, Y e Z, utilizando farelo de soja, gordura animal e milho. Cada quilograma da ração A contém 100 g de farelo de soja e 200 g de milho e não contém gordura animal; cada quilograma da ração B contém 300 g de farelo de soja, 100 g de gordura animal e 400 g de milho; cada quilograma da ração C contém 200 g de farelo de soja, 200 g de gordura animal e 100 g de milho.

Sabendo que a disponibilidade destes produtos na cooperativa nos meses de abril, maio e junho foi dada como na tabela abaixo. Pede-se para determinar qual a quantidade de cada tipo de ração foi produzido em cada um destes meses.

Quant./ Mês (em tonelada)	Farelo de Soja	Gordura Animal	Milho
Abril	1	1,5	2
Maio	1,3	2	1,6
Junho	1	1,4	1,8

5. Um biólogo colocou três espécies de bactéria (denotadas por I, II e III) em um tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes diferentes de alimentos (A, B e C). A cada dia serão colocadas no tubo de ensaio 2.300 unidades de A, 800 unidades de B e 1.500 unidades de C. Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como mostra a tabela abaixo.

Alimento	Bactéria I	Bactéria II	Bactéria III
A	2	2	4
B	1	2	0
C	1	3	1

Determine quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento.

6. Num torneio de triatlon as competições: nado, corrida e ciclismo foram pontuadas com pesos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. A tabela abaixo apresenta a pontuação dos quatro primeiros colocados em cada categoria e sua respectiva classificação final.

	Nado	Corrida	Ciclismo	Classificação Geral
Atleta 1	7,5	9	9	8,4
Atleta 2	8	7	9	8
Atleta 3	9	7,5	8,5	7,9
Atleta 4	7,5	8	8	7,8

O terceiro atleta alegou que se as classificações dos 1, 2 e 4 atletas estivessem corretas, então sua classificação estaria incorreta. Sabendo que a classificação geral foi obtida pela média ponderada da pontuação de cada uma das competições e supondo que o terceiro atleta está correto determine:

- o peso de cada competição;
  - a classificação do terceiro candidato.
7. No meu bairro há três cadeias de supermercados:  $A$ ,  $B$  e  $C$ . A tabela abaixo apresenta os preços (em reais por quilo) do produto  $X$ , do produto  $Y$  e do produto  $Z$ , nessas cadeias.

	Produto X	Produto Y	Produto Z
A	3	4	2
B	1	6	4
C	1	4	7

Comprando-se  $x$  quilos do produto  $X$ ,  $y$  quilos do produto  $Y$  e  $z$  quilos do produto  $Z$  em qualquer dos supermercados pagarei R\$31,00. Determine  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

8. Uma firma fabrica dois produtos:  $A$  e  $B$ . Cada um deles passa por duas máquinas:  $I$  e  $II$ . Para se fabricar uma unidade de  $A$  gasta-se  $1h$  da máquina  $I$  e  $1,5h$  da máquina  $II$ . Cada unidade de  $B$  gasta  $3h$  de  $I$  e  $2h$  de  $II$ . Quantas unidades de cada produto poderão ser fabricadas em um mês se, por motivos técnicos,  $I$  só funciona 300 horas e  $II$  só 250 horas por mês?
9. Dois metais  $x$  e  $y$  são obtidos de dois tipos de minérios  $I$  e  $II$ . De 100Kg de  $I$  se obtém 3 gramas de  $x$  e 5 gramas de  $y$  e de 100Kg de  $II$  obtém-se 4 gramas de  $x$  e 2,5 gramas de  $y$ . Quantos quilos de minério de cada tipo serão necessários para se obter 72 gramas de  $x$  e 95 gramas de  $y$ , usando-se simultaneamente os dois minérios?

10. Três pessoas jogam juntas. Na primeira rodada a primeira perde para cada um dos outros dois a mesma quantia que cada um deles tinha no início do jogo. Na segunda rodada, a segunda pessoa perde para cada um dos outros a mesma quantia que eles tinham no final da 1ª rodada. Na terceira rodada, o 1 e o 2 jogadores ganham do 3 a mesma quantia que cada um tinha no final da segunda rodada. Neste momento, os jogadores verificaram que cada um deles possui R\$24,00. Quanto cada jogador tinha ao começar o jogo?
11. Uma indústria produz três produtos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , utilizando dois tipos de insumos,  $X$  e  $Y$ . Para a manufatura de cada quilo de  $A$  são utilizados 1 grama do insumo  $X$  e 2 gramas do insumo  $Y$ ; para cada quilo de  $B$ , 1 grama do insumo  $X$  e 1 grama do insumo  $Y$  e, para cada quilo de  $C$ , 1 grama do insumo  $X$  e 4 gramas do insumo  $Y$ . O preço da venda do quilo de cada um dos produtos  $A$ ,  $B$  e  $C$  é de R\$2,00, R\$3,00 e R\$5,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de  $A$ ,  $B$  e  $C$  manufaturada com 1 quilo de  $X$  e 2 quilos de  $Y$ , essa indústria arrecadou R\$2500,00. Determine quantos quilos de cada um dos produtos  $A$ ,  $B$  e  $C$  foram vendidos.
12. Cada ração contém as seguintes unidades de proteínas ( $P$ ), carboidratos ( $C$ ) e gorduras ( $G$ ).

	$P$	$C$	$G$
(1)	1	0	2
(2)	3	1	4
(3)	2	2	1

Se as quantidades de proteínas ( $P$ ), carboidratos ( $C$ ) e gorduras ( $G$ ) que a cooperativa tem disponível, nos meses de dezembro e janeiro, são mostradas na tabela abaixo, qual a quantidade de cada tipo de ração é produzido em cada mês?

Quant./mês	$P$	$C$	$G$
Dezembro	15	10	14
Janeiro	13	5	17

13. Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada  $10m^2$  140g de nitrato, 190g de fosfato e 205g de potássio. Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:
- (i) Cada quilograma do adubo I custa R\$5,00 e contém 10g de nitrato, 10g de fosfato e 100g de potássio.
  - (ii) Cada quilograma do adubo II custa R\$6,00 e contém 10g de nitrato, 100g de fosfato e 30g de potássio.
  - (iii) Cada quilograma do adubo III custa R\$5,00 e contém 50g de nitrato, 20g de fosfato e 20g de potássio.
  - (iv) Cada quilograma do adubo IV custa R\$15,00 e contém 20g de nitrato, 40g de fosfato e 35g de potássio.
- Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir o efeito desejado se estamos dispostos a gastar R\$54,00 a cada  $10m^2$  com a adubação?
14. Uma florista oferece três tamanhos de arranjos de flores com rosas, margaridas e crisântemos. Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:
- (i) Cada arranjo pequeno contém uma rosa, três margaridas e três crisântemos.
  - (ii) Cada arranjo médio contém duas rosas, quatro margaridas e seis crisântemos.

(iii) Cada arranjo grande contém quatro rosas, oito margaridas e seis crisântemos.

Um dia a florista notou que havia usado um total de 24 rosas, 50 margaridas e 48 crisântemos ao preparar as encomendas desses três tipos de arranjos. Quantos arranjos de cada tipo ela fez?

15. Um comerciante vende três tipos distintos de caixas com chocolates. A caixa tipo-I contém 2 unidades do chocolate branco, 2 unidades do chocolate ao leite e 4 unidades do chocolate amargo. A caixa tipo-II contém 1 unidade do chocolate branco, 2 unidades do chocolate ao leite e não contém chocolate amargo. A caixa tipo-III contém 1 unidade do chocolate branco, 3 unidades do chocolate ao leite e  $a$  unidade do chocolate amargo;  $a \in \mathbb{R}$ . Sabe-se que o comerciante dispõe de 50 unidades do chocolate branco, 100 unidades do chocolate ao leite e 60 unidades do chocolate amargo. Quantas caixas de cada tipo o comerciante consegue preparar utilizando todos os chocolates?

Verifique também se é possível, para quais valores de  $a \in \mathbb{R}$ , que o sistema correspondente ao problema do comerciante seja um sistema de Cramer.

16. Um comerciante de café vende três misturas de grãos.
- (i) Um pacote com a mistura da casa contém 300g de café colombiano e 200g de café tostado tipo francês.
  - (ii) Um pacote com a mistura especial contém 200g de café colombiano, 200g de café queniano e 100g de café tostado tipo francês.
  - (iii) Um pacote com a mistura gourmet contém 100g de café colombiano, 200g de café queniano e 200g de café tostado tipo francês.

O comerciante tem 30kg de café colombiano, 15kg de café queniano e 25kg de café tostado tipo francês. Se ele deseja utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura ele deve preparar?

17. Faça o balanceamento da equação química para a seguinte reação:



“Queima do gás butano na presença de oxigênio para formar dióxido de carbono e água.”

18. Um aluno de *Álgebra Linear A* precisa distribuir o seu tempo no mês a fim de revisar os seguintes assuntos: matrizes, sistemas de equações lineares e funções. Para revisar matrizes ele necessita na semana de 1h na segunda-feira, 3h na quarta-feira e 3h na sexta-feira. Para revisar sistemas de equações lineares ele necessita na semana de 2h na segunda-feira, 4h na quarta-feira e 6h na sexta-feira; e, para revisar métodos de solução ele necessita na semana de 4h na segunda-feira, 8h na quarta-feira e 6h na sexta-feira. Organizando o seu tempo de estudo, ele constatou que tem disponível no mês: 24 horas/mês na segunda-feira, 50 horas/mês na quarta-feira e 48 horas/mês na sexta-feira. Agora ele deseja saber quantas vezes no mês ele conseguirá revisar cada assunto.





# Espaços Vetoriais

<b>3</b>	<b>Espaços Vetoriais .....</b>	<b>27</b>
3.1	Espaços Vetoriais	
3.2	Subespaços Vetoriais	
3.3	Soma e Intersecção de Subespaços Vetoriais	
3.4	Combinação Linear	
3.5	Subespaço Gerado	
3.6	Dependência e Independência Linear	
3.7	Base e Dimensão	
3.8	Coordenadas de um Vetor e Mudança de Base	



## 3. Espaços Vetoriais

### 3.1 Espaços Vetoriais

1. Considere em  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$  com as operações:

- Adição:  $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2)$  para quaisquer  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ .
- Multiplicação por escalar:  $\lambda \odot (x, y) = (x^\lambda, \lambda \cdot y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (a) Exiba o elemento neutro da adição  $\oplus$ .
- (b) Exiba o simétrico aditivo de  $(x, y)$ .
- (c) Exiba a unidade da operação  $\odot$ .
- (d) Mostre que  $V$  é um espaço vetorial real.

2. Verifique se  $M_2(\mathbb{R})$ , com as operações: soma usual e a multiplicação por escalar dada por

$$\lambda \odot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{bmatrix},$$

é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

3. Verifique se  $\mathbb{C}^2$  com a multiplicação por escalar usual e a adição dada por:

$$(a_1 + b_1i, c_1 + d_1i) \oplus (a_2 + b_2i, c_2 + d_2i) = (a_1 + a_2 + (b_1 + 2b_2)i, (c_1 - c_2) + (d_1 + d_2)i)$$

para quaisquer  $(a_1 + b_1i, c_1 + d_1i), (a_2 + b_2i, c_2 + d_2i)$  em  $\mathbb{C}^2$  é:

- (a) Sobre  $\mathbb{R}$ .
- (b) Sobre  $\mathbb{C}$ .

4. Considere  $a$  e  $b$  números reais com  $a < b$ , o conjunto das funções reais contínuas com domínio  $[a, b]$  é indicado por:

$$\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é uma função contínua}\}.$$

Mostre que com  $\mathcal{C}([a, b])$ , com as operações adição  $((f + g)(x) = f(x) + g(x))$  e multiplicação por um escalar  $((\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x))$  definidas em  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

## 3.2 Subespaços Vetoriais

- Verifique em cada um dos casos se  $W$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .
  - $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y \leq 0\}$ ;
  - $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ;
  - $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ ;
  - $W = \mathbb{Q}^3$ ; com  $\mathbb{Q}$  conjunto dos números racionais;
  - $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \cdot y = 1\}$ ;
  - $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = x^2\}$ .
- Verifique em cada um dos casos se  $W$  é um subespaço de  $M_n(\mathbb{R})$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , com  $n \geq 2$ .
  - $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A \text{ é simétrica}\}$ ;
  - $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A \text{ é invertível}\}$ ;
  - $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A \text{ não é invertível}\}$ ;
  - $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^2 = A\}$ ;
  - $W_B = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A \cdot B = 0_{n \times n}\}$ , com  $B \in M_n(\mathbb{R})$  matriz não nula e fixa;
  - $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} = a_{22} \text{ e } a_{21} = -a_{12} \right\}$ .
- Verifique em cada um dos casos se  $W$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^4$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .
  - $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + t \geq 0\}$ ;
  - $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = z \text{ e } t = 3z\}$ ;
  - $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + 2t = 0\}$ ;
  - $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; t \notin \mathbb{Q}\}$ .
- Considere  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ , com  $n \geq 2$ , conjunto dos polinômios de grau  $\leq n$  reunido com o polinômio nulo. Verifique em cada um dos casos se  $W$  é um subespaço de  $(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$  é espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .
  - $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); 0 \text{ é raiz de } p(t)\}$ ;
  - $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); p(t) \text{ é o polinômio nulo ou } p(t) \text{ tem grau ímpar}\}$ ;
  - $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); p(t) \text{ é divisível por } 1 - t\}$ ;
  - $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); p(0) = p(1)\}$ ;
  - $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); p(t) \text{ tem todos os coeficientes iguais}\}$ ;
  - $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); \text{ a soma dos coeficientes de } p(t) \text{ é igual a zero}\}$ .
- Verifique em cada um dos casos se  $W$  é um subespaço de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .
  - $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f \text{ é função ímpar}\}$ ;
  - $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f(0) = 1\}$ ;
  - $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f(0) = f(1)\}$ ;
  - $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$ ;
  - $W_{a,b} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f(x) = ae^x + be^{-x}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}\}$ .
- Verifique em cada um dos casos se  $W$  é um subespaço de  $\mathcal{C}([0, 1])$  espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , com  $\mathcal{C}([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é uma função contínua}\}$ .
  - $W = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]); f \text{ é crescente}\}$ ;
  - $W = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]); f'(0) = f'(1) = 0\}$ .
- Verifique em cada um dos casos se  $W$  é um subespaço do espaço vetorial  $M_n(\mathbb{C})$ , com  $n \geq 2$ .
  - $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}); A \text{ é hermitiana}\}$ , sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .
  - $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}); A \text{ é hermitiana}\}$ , sobre o corpo  $\mathbb{C}$ .
  - $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}); A \text{ é anti-hermitiana}\}$ , sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .
  - $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}); A \text{ é anti-hermitiana}\}$ , sobre o corpo  $\mathbb{C}$ .

8. Verifique em cada um dos casos se  $W$  é um subespaço do espaço vetorial  $\mathbb{C}^2$ .
- (a)  $W = \{(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \in \mathbb{C}^2; a_1 - a_2 = 1 \text{ e } b_1 + b_2 = 0\}$ , sobre o corpo  $\mathbb{C}$ .
  - (b)  $W = \{(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \in \mathbb{C}^2; a_1 + b_1i = 3(a_2 + b_2i)\}$ , sobre o corpo  $\mathbb{C}$ .
  - (c)  $W = \{(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \in \mathbb{C}^2; a_1 - 2a_2 = 0 \text{ e } b_1 + b_2 = 0\}$ , sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .
  - (d)  $W = \{(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \in \mathbb{C}^2; a_1 - 2a_2 = 0 \text{ e } b_1 + b_2 = 0\}$ , sobre o corpo  $\mathbb{C}$ .

### 3.3 Soma e Intersecção de Subespaços Vetoriais

1. Determine, em cada um dos casos, os subespaços  $U + W$  e  $U \cap W$  de  $\mathbb{R}^3$  e verifique se o subespaço  $U + W$  é uma soma direta.
  - (a)  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 3z = 0\}$  e  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ .
  - (b)  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}$  e  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y - z\}$ .
2. Determine, em cada um dos casos, os subespaços  $U + W$  e  $U \cap W$  de  $\mathbb{R}^4$  e verifique se o subespaço  $U + W$  é uma soma direta.
  - (a)  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = t \text{ e } y = 2z\}$  e  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y - z + t = 0\}$ .
  - (b)  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z - t = 0\}$  e  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + z + t = 0\}$ .
  - (c)  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0\}$  e  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z + t = 0\}$ .
3. Determine, em cada um dos casos, os subespaços  $U + W$  e  $U \cap W$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  e verifique se o subespaço  $U + W$  é uma soma direta.
  - (a)  $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 - a_2 = 0\}$  e  $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 = 0\}$ .
  - (b)  $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 = a_1 = a_2\}$  e  $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$ .
4. Determine, em cada um dos casos, os subespaços  $U + W$  e  $U \cap W$  de  $M_2(\mathbb{R})$  e verifique se o subespaço  $U + W$  é uma soma direta.
  - (a)  $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} = -a_{12} \text{ e } a_{21} = a_{22} \right\}$  e  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0 \right\}$ .
  - (b)  $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A = \lambda \cdot I_2, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}\}$  e  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} + a_{12} + a_{22} = 0 \right\}$ .
5. Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , dados  $U$  e  $W$  subespaços próprios de  $V$ , ou seja,  $U \subsetneq V$  e  $W \subsetneq V$ . Mostre que a reunião  $U \cup W$  é um subespaço de  $V$  se, e somente se,  $U \subset W$  ou  $W \subset U$ .
6. Dê exemplos de subespaços próprios  $U$  e  $W$  em  $V$  tais que  $U + W = V$  e  $U \cap W \neq \{0_V\}$ , nos seguintes casos:
  - (a)  $V = \mathbb{R}^4$ ;      (b)  $V = M_2(\mathbb{R})$ ;      (b)  $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ .

7. Dados os subespaços vetoriais  $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = z\}$ ;  $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$  e  $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}$  do espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ .
- (a) Verifique que  $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$ ,  $U_1 + U_3 = \mathbb{R}^3$  e  $U_2 + U_3 = \mathbb{R}^3$ .
- (b) Em algum dos casos a soma é direta? Quais?
8. Determine, em cada um dos casos, um subespaço  $W$  de  $V$  tal que  $V = U \oplus W$ .
- (a)  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 \text{ e } z + t = 0\}$  em  $V = \mathbb{R}^4$ .
- (b)  $U = \{A \in M_2(\mathbb{C}); A \text{ é diagonal}\}$  em  $V = M_2(\mathbb{C})$  como espaço vetorial complexo.
- (c)  $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_1 + a_2 = 0\}$  em  $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$  como espaço vetorial complexo.
9. Verifique, em cada um dos casos, se a soma dos subespaços do espaço vetorial complexo é direta.
- (a) Em  $\mathbb{C}^3$  a soma  $U + W$ , com  $U = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 + z_3 = 0\}$  e  $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 + z_2 = 0 \text{ e } z_3 = 0\}$ .
- (b) Em  $M_2(\mathbb{C})$  as somas  $U_1 + U_2$ ,  $U_1 + U_3$  e  $U_2 + U_3$  com  $U_1 = \{A \in M_2(\mathbb{C}); A \text{ é diagonal}\}$ ,  $U_2 = \{A \in M_2(\mathbb{C}); A^T = A\}$  e  $U_3 = \{A \in M_2(\mathbb{C}); A^T = -A\}$ .
- (c) Em  $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$  a soma  $U + W$ , com  $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_2 = 0\}$  e  $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_0 = 0 \text{ e } a_1 + a_2 = 0\}$ .
10. Seja  $V$  um espaço vetorial qualquer sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e sejam  $U$  e  $W$  subespaços vetoriais de  $V$ . Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
- (a) ( )  $U \cap W$  é subespaço vetorial de  $V$  se, e somente se,  $U \cap W = U$  ou  $U \cap W = W$ .
- (b) ( )  $U + W$  é subespaço vetorial de  $V$  se, e somente se,  $U \subset W$  ou  $W \subset U$ .
- (c) ( )  $V$  é um espaço vetorial, então está definida em  $V$  a soma e a multiplicação entre seus vetores, satisfazendo as propriedades: comutatividade, associatividade, elemento neutro e elemento simétrico.
- (d) ( ) O próprio espaço vetorial  $V$  e o subespaço  $\{\emptyset\}$  são os chamados subespaços vetoriais triviais de  $V$ .

### 3.4 Combinação Linear

1. Determine, em cada um dos casos, números reais  $a$  e  $b$  ou  $a$ ,  $b$ , e  $c$  tais que  $v$  se escreva como combinação linear dos vetores de  $S$ , subconjunto do espaço vetorial  $V$ .
- (a)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(1, -3, 2), (2, -1, 1)\}$  e  $v = (1, 2, -1)$ .
- (b)  $V = M_2(\mathbb{R})$   $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$  e  $v = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 13 \end{bmatrix}$ .
- (c)  $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$   $S = \{1 + t + t^3, t^2 - 5t^3, 2t + t^2 + t^3\}$  e  $v = 5 + t - 2t^2 + 3t^3$ .
2. Seja  $S = \{(1, 2, 1, 0), (4, 1, -2, 3), (1, 2, 6, -5), (-2, 3, -1, 2)\}$  subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ , verifique se  $v$  se escreve como combinação linear dos vetores de  $S$  nos seguintes casos:
- (a)  $v = (3, 6, 3, 0)$ ; (b)  $v = (1, 0, -1, 0)$ ; (c)  $v = (3, 6, -2, 5)$ .

3. Sejam  $u_1 = (1, 2, 1)$  e  $u_2 = (0, 1, -1)$  vetores em  $\mathbb{R}^3$ , determine:
  - (a) Uma combinação linear de  $u_1$  e  $u_2$ .
  - (b) O conjunto de todas as combinações lineares de  $u_1$  e  $u_2$ .
4. Sejam  $p_1(t) = t^2 - 1$  e  $p_2(t) = 2t - t^2$  vetores em  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , determine:
  - (a) Uma combinação linear de  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$ .
  - (b) O conjunto de todas as combinações lineares de  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$ .
  - (c) Se  $v = t^2 + 2t - 2$  é combinação linear de  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$ .
5. Sejam  $A_1 = I_2$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  e  $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  vetores em  $M_2(\mathbb{R})$ .
  - (a) Verifique se  $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$  se escreve como combinação linear de  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , em caso afirmativo verifique se a combinação linear é única.
  - (b) Determine o conjunto de todas as combinações lineares de  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ .
  - (c) Escreva  $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  como combinação linear de  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , se possível.

### 3.5 Subespaço Gerado

1. Determine, em cada um dos casos, um sistema de geradores para o subespaço  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ :
  - (a)  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$ .
  - (b)  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - 3z = 0\}$ .
2. Determine, em cada um dos casos, um sistema de geradores para o subespaço  $U$  de  $\mathbb{R}^4$ :
  - (a)  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 3y - 2t = 0 \text{ e } y - z = 0\}$ .
  - (b)  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - t = 0, y + 5t = 0 \text{ e } y + z - 2t = 0\}$ .
3. Determine, em cada um dos casos, um sistema de geradores para o subespaço  $U$  de  $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ :
  - (a)  $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}; a_{11} = a_{21} + a_{31} \text{ e } a_{22} = 0 \right\}$ .
  - (b)  $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}; a_{11} + 2a_{22} = 0, a_{12} - a_{21} + 3a_{31} + 4a_{22} = 0 \right\}$ .
4. Determine, em cada um dos casos, um sistema de geradores para o subespaço  $U$  de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ :
  - (a)  $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); a_1 = a_2 \text{ e } a_3 = 0\}$ .
  - (b)  $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); a_0 + 3a_2 = 0\}$ .
  - (c)  $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); a_0 + 2a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \text{ e } 3a_0 + 7a_1 - a_2 - 3a_3 = 0\}$ .

5. Em  $M_2(\mathbb{C})$  determine um sistema de geradores para o subespaço

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ a_{21} + b_{21}i & a_{22} + b_{22}i \end{bmatrix}, a_{12} + b_{12}i = 0 \text{ e } a_{21} + b_{21}i = -2(a_{22} + b_{22}i) \right\}.$$

(a)  $M_2(\mathbb{C})$  como espaço vetorial real.

(b)  $M_2(\mathbb{C})$  como espaço vetorial complexo.

6. Em cada um dos casos, determine analiticamente o subespaço  $U$  do espaço vetorial  $V$ , verifique se  $U$  é subespaço próprio de  $V$  e exiba um elemento de  $U$ .

(a)  $U = [(2, -2), (-1, 1)]$  em  $V = \mathbb{R}^2$ .

(b)  $U = [(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$  em  $V = \mathbb{R}^3$ .

(c)  $U$  é o subespaço gerado pelas colunas da matriz:  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  em  $V = \mathbb{R}^3$ .

(d)  $U = [(1, 0, 0, 1), (1, 2, 1, 0)]$  em  $V = \mathbb{R}^4$ .

(e)  $U = [1 - 2t^2 + t^3, 3 + t - 5t^2, t + t^2 - 3t^3]$  em  $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ .

(f)  $U = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right]$  em  $V = M_2(\mathbb{R})$ .

(g)  $U = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$  em  $V = M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ .

(h)  $U = \left[ \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$  em  $V = M_2(\mathbb{C})$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  e como espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

7. Em cada um dos casos, determine o subespaço gerado pelo subconjunto  $S$  do espaço vetorial  $V$ .

(a)  $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$  em  $V = \mathbb{R}^3$ .

(b)  $S = \{(1, 2, 3, -2), (0, 1, -3, 1), (1, 4, -3, 0)\}$  em  $V = \mathbb{R}^4$ .

(c)  $S = \{1, 1-t, (1-t)^2, (1-t)^3\}$  em  $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ .

(d)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$  em  $V = M_2(\mathbb{R})$ .

(e)  $S = \{\sin x, \cos x\}$  em  $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

8. Em cada um dos casos, determine o menor número de geradores para subespaço  $U = [S]$ .

(a)  $S = \{(1, 2), (-1, -2), (3, 6)\}$  em  $\mathbb{R}^2$ .

(b)  $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$  em  $\mathbb{R}^3$ .

(c)  $S = \{1 + t^2, 1 + t, 1 + 2t^2, 2\}$  em  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

(d)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$  em  $M_2(\mathbb{R})$ .

9. Em cada um dos casos, determine um sistema de geradores para os subespaços  $U + W$  e  $U \cap W$  de  $V$  e verifique se o subespaço  $U + W$  é uma soma direta:



- (a)  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 3z = 0\}$  e  $W = [(1, -3, 2), (2, 5, -7)]$  em  $V = \mathbb{R}^3$ .
- (b)  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 \text{ e } t - z = 0\}$  e  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\}$  em  $V = \mathbb{R}^4$ .
- (c)  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + t = 0\}$  e  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z = 0\}$  em  $V = \mathbb{R}^4$ .
- (d)  $U = [1 + 2t + t^2, 1 - t + t^2]$  e  $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 = a_1\}$  em  $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .
- (e)  $U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  e  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0 \right\}$  em  $V = M_2(\mathbb{R})$ .
- (f)  $U = \{A \in M_3(\mathbb{R}); A \text{ é simétrica}\}$  e  $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}); \text{tr}(A) = 0\}$  em  $V = M_3(\mathbb{R})$ .

10. Considere os subespaços  $U$  e  $W$  de um espaço vetorial  $V$  sobre  $\mathbb{K}$ , tais que:

$$U = [u_1, u_2] \text{ e } W = [w_1, w_2, w_3].$$

- (a) Mostre que  $U + W \subset [u_1, u_2, w_1, w_2, w_3]$  e que  $[u_1, u_2, w_1, w_2, w_3] \subset U + W$ .
- (b) O que você pode concluir do item (a)?

### 3.6 Dependência e Independência Linear

1. Verifique, em cada um dos casos, se conjunto  $S$  é linearmente independente (L.I.) ou linearmente dependentes (L.D.). Justifique sua resposta (faça cálculos somente quando for realmente necessário!)

- (a)  $S = \{1 - 2t + t^2, 2 + t, -1 - 3t + t^2\}$  em  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .
- (b)  $S = \{(1, -2, 1, 0), (2, 1, -1, 3), (7, -4, 1, 3)\}$  em  $\mathbb{R}^4$ .
- (c)  $S = \{x, x^2, e^x\}$  em  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .
- (d)  $S = \{\cosh x, e^x, e^{-x}\}$  em  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .
- (e)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 332 \\ 41 & 90 \end{bmatrix} \right\}$  em  $M_2(\mathbb{R})$ .
- (f)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$  em  $M_2(\mathbb{C})$ , como espaço vetorial real e como espaço vetorial complexo.
- (g)  $S = \{(7, -4, 8, 0), (11, -1, 5, 2), (7, 3, 8, -1), (2, -6, 5, 7), (9, 4, 3, -3)\}$  em  $\mathbb{R}^4$ .
- (h)  $S = \left\{ (1, 3, 2, 5, 7), \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right) \right\}$  em  $\mathbb{R}^5$ .
- (i)  $S = \{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$  em  $\mathbb{C}^2$  espaço vetorial real.
- (j)  $S = \{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$  em  $\mathbb{C}^2$  espaço vetorial complexo.

2. Complete, em cada um dos casos, o subconjunto  $S$  de modo a formar um conjunto L.I. maximal no espaço vetorial correspondente.

- (a)  $S = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}$  em  $\mathbb{R}^4$ .

- (b)  $S = \{1 - 2t + t^2, 2 + t\}$  em  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .
- (c)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  em  $M_2(\mathbb{R})$ .
- (d)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  em  $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ .
- (e)  $S = \left\{ (1, 3, 2, 5, 7), \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right) \right\}$  em  $\mathbb{R}^5$ .
- (f)  $S = \{(1 - i, i, 2 - i), (0, 1 + i, -1 + i)\}$  em  $\mathbb{C}^3$  espaço vetorial complexo.
3. Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.
- (a) ( ) Se  $\dim W = 3$  e  $\mathcal{B}$  é um subconjunto de  $W$  com 4 vetores então  $\mathcal{B}$  é L.D.
- (b) ( ) Se  $\dim W = 3$  e  $\mathcal{B}$  é um subconjunto de  $W$  com 2 vetores então  $\mathcal{B}$  é L.I.
- (c) ( ) Todo subconjunto de um espaço vetorial contendo o vetor nulo é L.D.
- (d) ( ) Se  $\dim W = 3$  e  $v_1, v_2 \in W$ , então  $[v_1, v_2] \neq W$ .
- (e) ( ) Se  $\dim W = 3$  e  $v_1, v_2, v_3 \in W$ , então  $[v_1, v_2, v_3] = W$ .
4. Se  $S = \{u, v, w\}$  é um subconjunto L.I. de um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , o que podemos dizer sobre o subconjunto  $S' = \{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ ? É L.I. ou L.D.?
5. Se  $u, v, w$  são vetores linearmente independentes em um espaço vetorial  $V$ , mostre que o conjunto  $\{u + v, u + w, v + w\}$  é um subconjunto linearmente independente de  $V$ .

### 3.7 Base e Dimensão

1. Determine, em cada um dos casos, uma base e a dimensão do subespaço  $W$ :
- (a)  $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); p'(-1) = 0 \text{ e } p(1) = 0\}$  em  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ .
- (b) Em  $\mathbb{R}^5$ ,  $W$  conjunto solução do sistema homogêneo:
- $$S: \begin{cases} x + 2y + 2z - t + 3w = 0 \\ x + 2y + 3z + t + w = 0 \\ 3x + 6y + 8z + t + 5w = 0 \end{cases}$$
- (c)  $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}); A \text{ é matriz triangular inferior}\}$  em  $M_3(\mathbb{R})$ .
- (d)  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} - a_{12} - a_{21} = 0 \right\}$  em  $M_2(\mathbb{R})$ .
- (e)  $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_3 = z_2 - 2z_1\}$  em  $V = \mathbb{C}^3$  como espaço vetorial real e como espaço vetorial complexo.
2. Determine, em cada um dos casos, uma base e a dimensão dos subespaços  $U$ ,  $W$ ,  $U \cap W$  e  $U + W$ , e verifique se a soma é direta.
- (a)  $U = [(1, 0, 1), (1, 1, 3)]$  e  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 3z = 0\}$  em  $\mathbb{R}^3$ .

- (b)  $U = [(-1, 1, -1), (1, 2, 1)]$  e  $W = [(2, 1, 1), (1, 1, -1)]$  em  $\mathbb{R}^3$ .
- (c)  $U$  é conjunto solução do sistema homogêneo  $S : \begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$   
e  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$  em  $\mathbb{R}^3$ .
- (d)  $U = [(1, 2, 1)]$  e  $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 - z_2 - z_3 = 0\}$  em  $\mathbb{C}^3$  sobre  $\mathbb{C}$ .
- (e)  $U = [(1, 2, 1, 3), (3, 1, -1, 4)]$  e  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y = z \text{ e } x - 3y + t = 0\}$  em  $\mathbb{R}^4$ .
- (f)  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + t = 0\}$  e  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z = 0\}$  em  $\mathbb{R}^4$ .
- (g)  $U = \{A \in M_3(\mathbb{R}); \text{tr}(A) = 0\}$  e  $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}); A^T = A\}$  em  $M_3(\mathbb{R})$ .
- (h)  $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 - 2a_2 = 0\}$  e  $W = [1 - t, t - t^2]$  em  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .
- (i)  $U = [1 + t + t^2]$  e  $W = [1, t - t^2]$  em  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .
- (j)  $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_0 = a_1\}$  e  $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_2 = 0\}$  em  $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$  sobre  $\mathbb{C}$ .
- (k)  $U = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = 0\}$  e  $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); p(-1) = 0\}$  em  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ .
- (l)  $U = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$  e  $W = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$  em  $M_2(\mathbb{R})$ .
- (m)  $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{21} = a_{12} \right\}$  e  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{22} = -a_{11} \right\}$  em  $M_2(\mathbb{R})$ .

3. Considere, em cada um dos casos, o espaço vetorial  $V$  e o subconjunto  $S$  de  $V$ . Determine uma base de  $V$  obtida pelo complemento de  $S$ .

- (a)  $S = \{(1, 0, -2, 2), (1, 2, -2, 1)\}$  em  $V = \mathbb{R}^4$ .
- (b)  $S = \{(1, -2, 5, 3), (2, 3, 1, -4), (3, 8, -3, -5)\}$  em  $V = \mathbb{R}^4$ .
- (c)  $S = \{1 + 4t - 2t^2 + t^3, -1 + 9t - 3t^2 + 2t^3, -5 + 6t + t^3, 5 + 7t - 5t^2 + 2t^3\}$  em  $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ .
- (d)  $S = \{1 + t + t^2 + 3t^3 + 2t^4, 1 + 2t + t^2 + 2t^3 + t^4, 1 + 3t + 2t^2 + t^3 + 2t^4\}$  em  $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ .
- (e)  $S = \{(1, 0, -2), (1, 2, 1)\}$  em  $V = \mathbb{C}^3$  sobre  $\mathbb{C}$ .
- (f)  $S = \{(1, 0, -2), (1, 2, 1), (0, 0, i)\}$  em  $V = \mathbb{C}^3$  sobre  $\mathbb{R}$ .
- (g)  $S$  é uma base de  $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A \text{ é simétrica}\}$  em  $V = M_2(\mathbb{R})$ .
- (h)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right\}$  em  $V = M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

4. Sejam  $S = \{u, v, w, r, s, t\}$  um subconjunto L.I. de um espaço vetorial  $V$  e  $R$  um subconjunto de  $S$  tal que  $R$  tem 3 elementos. Determine:

- (a)  $\dim [S]$ , (b)  $\dim [R]$ , (c)  $\dim ([S] \cap [R])$ , (d)  $\dim ([S] + [R])$ .

5. Sejam  $U$  e  $W$  subespaços vetoriais de um espaço vetorial  $V$ , tais que  $\dim U = 4$ ,  $\dim W = 5$  e  $\dim V = 7$ . Determine quais as possíveis dimensões para  $U \cap W$ .

6. Dado o subespaço  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 3y + 2z = 0\}$ , encontre um subespaço  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $U \oplus W = \mathbb{R}^3$ .
7. Seja  $U$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  gerado por  $u_1 = (1, -1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (0, 0, 1, 1)$ ,  $u_3 = (-2, 2, 1, 1)$  e  $u_4 = (1, 0, 0, 0)$ .
  - (a) Verifique se o subconjunto  $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  é L. I. ou L.D.
  - (b) Existe um subconjunto próprio de  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  formado por vetores L.I.'s e que ainda gera  $U$ ?
  - (c) O vetor  $v = (2, -3, 2, 2) \in U$ ?
  - (d) Para o subespaço  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = z = 0\}$  de  $\mathbb{R}^4$ , determine o subespaço  $U \cap W$ .
  - (e) Determine  $\dim U$  e responda justificadamente: o subespaço  $U$  coincide com  $\mathbb{R}^4$ ?
  - (f) É possível exibir um vetor  $u \in \mathbb{R}^4$ , tal que  $u$  seja L.I. com uma base de  $U$ ?
8. Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  em  $M_2(\mathbb{R})$ .
  - (a) Verifique se  $C = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$  é combinação linear de  $A$  e  $B$ .
  - (b) Verifique se o subconjunto  $\{A, B, C\}$  é L. I. ou L.D.
  - (c) Determine o subespaço  $U = [A, B]$  e  $\dim U$ .
  - (d) Determine o subespaço  $W = [A, B, C]$  e  $\dim W$ .
9. Sejam  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + z = y \text{ e } t = 0\}$  e  $W = [e_1, 3e_3 + e_4]$  subespaços de  $\mathbb{R}^4$ .
  - (a) Determine uma base e a dimensão para  $U \cap W$ ,  $U + W$ .
  - (b) Verifique se  $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ .
10. Sejam  $U = [(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1)]$  e  $W = [(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)]$  subespaços de  $\mathbb{R}^4$ , determine uma base e a dimensão de  $U + W$  e a dimensão de  $U \cap W$  em  $\mathbb{R}^4$ .
11. Encontre uma base e a dimensão de  $W$  subespaço de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  gerado pelas funções  $f(x) = 1$ , função constante igual a 1,  $g(x) = \sin x$  e  $h(x) = \cos x$ .
12. Sejam  $U$  e  $W$  subespaços de  $V$ , espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , com  $\dim V = 5$ . Se  $\dim U = 1$ ,  $\dim W = 4$  e  $U \not\subset W$ , mostre que  $U \oplus W = V$ .
13. Dê exemplos de dois subespaços  $U$  e  $W$  de  $\mathbb{R}^4$ , ambos de dimensão 3, tais que  $U + W = \mathbb{R}^4$ . Esta soma é direta?
14. Sejam  $U = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 + z_3 = 0\}$  e  $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 + z_2 = 0 \text{ e } z_3 = 0\}$  subespaços de  $\mathbb{C}^3$ .
  - (a) Determine uma base para  $U$ ,  $W$ ,  $U \cap W$ ,  $U + W$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ .
  - (b) Determine uma base para  $U$ ,  $W$ ,  $U \cap W$ ,  $U + W$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .
  - (c) Verifique se a soma  $U + W$  é direta em ambos os casos.
15. Determine os possíveis valores para  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{B} = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$  seja uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

16. Verifique se  $\mathcal{B} = \{(1-i, i), (2, -1+i)\}$  é uma base de  $\mathbb{C}^2$ , sobre  $\mathbb{R}$  e sobre  $\mathbb{C}$ .
17. Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão de finita sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e sejam  $U$  e  $W$  subespaços vetoriais de  $V$ , então  $U \cup W$  é subespaço de  $V$  se, e somente se,
- $( ) U \cup W = U \cap W$ .
  - $( ) U \cup W = U + W$ .
  - $( ) \dim U + \dim W = \dim V$ .
  - $( ) U \cup W = V$ .
  - $( )$  Nenhuma das alternativas anteriores.
18. Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão de finita sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e sejam  $U$  e  $W$  subespaços vetoriais de  $V$  tais que  $U \oplus W = V$ , então:
- $( ) \mathcal{B}_{U \cap W} = \emptyset$  e  $U + W = V$ .
  - $( ) U \cap W = \emptyset$  e  $U + W = V$ .
  - $( ) \dim(U + W) = \dim V$ .
  - $( ) U \cap W = \emptyset$  e  $\dim U + \dim W = \dim V$ .
  - $( )$  Nenhuma das alternativas anteriores.
19. Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão de finita sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e sejam  $U$  e  $W$  subespaços vetoriais de  $V$  tais que  $\dim U = 2$  e  $\dim W = 3$ , então:
- $( ) \dim(U \cup W) = 5$ .
  - $( ) 0 \leq \dim(U \cup W) \leq 2$ .
  - $( ) U \subset W$ .
  - $( ) 5 \leq \dim(U + W) \leq \dim V$ .
  - $( )$  Nenhuma das alternativas anteriores.

### 3.8 Coordenadas de um Vetor e Mudança de Base

- Em cada um dos casos, encontre as coordenadas do vetor dado em relação à base  $\mathcal{B}$  de  $V$ .
  - $u = (3, -2, 7)$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$  base de  $\mathbb{R}^3$ .
  - $p(t) = 5 + 4t + t^2$ ,  $\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1-t^2\}$  base de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .
  - $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  base de  $M_2(\mathbb{R})$ .
- Em cada um dos casos, encontre as coordenadas de  $v_1$  e  $v_2$  em relação à base  $\mathcal{B}$ .
  - $v_1 = (3, 2, 3)$ ,  $v_2 = (0, -2, 0)$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$  base de um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ .
  - $v_1 = -2t^2$ ,  $v_2 = -1 + 2t + 3t^2$ ,  $\mathcal{B} = \{t + t^2, t + 1\}$  base de um subespaço de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .
  - $v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$  base de um subespaço de  $M_2(\mathbb{R})$ .

3. Seja  $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1), (1, 0, 1)\}$  base de  $\mathbb{R}^3$ . Determine:
- (a) A matriz mudança da base  $\mathcal{B}'$  para a base canônica  $\mathcal{B}$ .
  - (b) As coordenadas do vetor  $u = (1, 1, 1)$  em relação à base  $\mathcal{B}'$ .
4. Em  $M_2(\mathbb{R})$  consideremos os subespaços um  $U = [e_1 + e_4, 3e_2]$  e  $W = [2e_1 - e_3]$ , determine:
- (a) Uma base ordenada  $\mathcal{B}'$  para  $M_2(\mathbb{R})$  a partir de uma base do subespaço  $U + W$ .
  - (b) A matriz mudança de base de  $\mathcal{B}$ , da base canônica de  $M_2(\mathbb{R})$ , para  $\mathcal{B}'$ , encontrada no item (a).
  - (c) As coordenadas do vetor  $u = e_1 + 3e_2 - e_3 + 4e_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  em relação à base  $\mathcal{B}'$  utilizando a matriz do item (b).
5. Em  $\mathbb{R}^4$  considere as bases  $\mathcal{B}' = \{e_1 + 2e_2, -e_4, e_1, 2e_3\}$  e  $\mathcal{B}$  a base canônica, determine:
- (a)  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ , a matriz mudança de base de  $\mathcal{B}'$  para a base  $\mathcal{B}$ .
  - (b) As coordenadas do vetor  $u = 3e_1 + e_2 - 4e_4$  em relação à base  $\mathcal{B}$  utilizando a matriz do item (a).
6. Em  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  considere as bases  $\mathcal{B}$  a base canônica e  $\mathcal{B}' = \{1, 1 + t, 1 - t^2\}$ , para  $p(t) = 2 + 4t + t^2$  determine
- $$[p(t)]_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad [p(t)]_{\mathcal{B}'}$$
- utilizando  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  e  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ , matrizes mudança de base, de  $\mathcal{B}$  para  $\mathcal{B}'$  e de  $\mathcal{B}'$  para  $\mathcal{B}$ , respectivamente.
7. Em  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  considere as bases  $\mathcal{B}' = \{1 - t, t - t^2, t^2 - t^3, t^3\}$  e  $\mathcal{B}$  a base canônica, determine:
- (a)  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ , a matriz mudança de base de  $\mathcal{B}'$  para a base  $\mathcal{B}$ .
  - (b) As coordenadas do vetor  $p(t) = 3 + t - 4t^3$  em relação à base  $\mathcal{B}$  utilizando a matriz do item (a).
8. Sejam  $V$  um espaço vetorial real e  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  uma base ordenada de  $V$ .
- (a) Mostre que  $\mathcal{B}' = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$  também é uma base de  $V$ .
  - (b) Determine  $[v]_{\mathcal{B}'}$ , sabendo  $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

9. Sejam  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  e  $\mathcal{B}$  é a base canônica ordenada de  $\mathbb{R}^3$ . Determine:
- A base  $\mathcal{B}'$ .
  - $[v]_{\mathcal{B}'}$  sabendo que  $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ .
  - $[u]_{\mathcal{B}}$  sabendo que  $[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ .
10. Sejam  $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,2)\}$ ,  $\mathcal{B}_1 = \{(-1,0), (11)\}$ , e  $\mathcal{B}_2 = \{(-1,-1), (0,-1)\}$  bases ordenadas de  $\mathbb{R}^2$ .
- Determine:  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_1}$ ,  $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ ,  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2}$ ,  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_1} \cdot M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ .
  - Se for possível, estabeleça uma relação entre estas matrizes de mudança de base.
11. No itens abaixo determine a matriz  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  mudança de base  $\mathcal{B}$  para a base  $\mathcal{B}'$ .
- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$  e  $\mathcal{B}' = \{(1,1,1), (1,0,1), (1,0,-1)\}$ .
  - $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$  e  $\mathcal{B}' = \{2, 1-t, 1-t^2\}$ .
12. Sejam  $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$  espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{C}$  e os subespaços vetoriais  $U = [1+it, (1-3i)t]$  e  $W = [2t + (1-i)t^2]$ .
- Mostre que  $\mathcal{P}_2(\mathbb{C}) = U \oplus W$ .
  - Encontre uma base  $\mathcal{B}'$  de  $U \oplus W$ , distinta de  $\mathcal{B}$  base canônica de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ .
  - Determine a matriz  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  mudança de base  $\mathcal{B}$  para a base  $\mathcal{B}'$ .
  - Encontre as coordenadas de  $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$  em relação à base  $\mathcal{B}'$  utilizando a matriz do item (c).
13. Em  $\mathbb{R}^3$  considere as bases ordenadas  $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (0,2,3), (0,2,-1)\}$  e  $\mathcal{B}' = \{(1,1,0), (1,-1,0), (0,0,1)\}$ .
- Encontre as coordenadas  $[u]_{\mathcal{B}}$  e  $[u]_{\mathcal{B}'}$  para  $u = (3,5,-2)$ .
  - Construa a matriz  $M$  cujas colunas são, respectivamente, as componentes dos respectivos vetores da base  $\mathcal{B}$  em relação à base  $\mathcal{B}'$  e verifique que  $M \cdot [u]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}'}$ .
14. Encontre a matriz  $M$  definida no exercício 13 no caso em que  $\mathcal{B} = \{(1,2,3), (0,1,2), (0,0,1)\}$  e  $\mathcal{B}'$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Verifique a validade da relação  $M \cdot [u]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}'}$ , com  $u = (3,5,-2)$ .
15. Encontre a matriz  $M$  definida no exercício 13 para  $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{B} = \{2, 1-t, 1-t^2\}$  e  $\mathcal{B}'$  é a base canônica de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Verifique a validade da relação  $M \cdot [u]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}'}$ , para  $u = 2 + t^2$ .







# Transformações Lineares e Diagonalização

<b>4</b>	<b>Transformações Lineares .....</b>	<b>43</b>
4.1	Transformações Lineares	
4.2	Matriz de uma Transformação Linear	
4.3	Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear	
4.4	Transformações Lineares Injetoras e Sobrejetoras	
4.5	Inversa de uma Transformação Linear	
<b>5</b>	<b>Diagonalização de Operadores .....</b>	<b>53</b>
5.1	Autovalor, Autovetor e Polinômio Característico	
5.2	Diagonalização de Operadores Lineares	



## 4. Transformações Lineares

### 4.1 Transformações Lineares

1. Verifique, em cada um dos casos, se a transformação  $T$  é uma transformação linear.

$$(a) \quad T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto T(x, y, z) = (x^2, y + z).$$

$$(b) \quad T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto T(x, y) = (x + y, y, 0).$$

$$(c) \quad T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto T(x, y) = (|x|, y, x + y).$$

$$(d) \quad T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto T(x, y, z) = 2x - 3y + 4z.$$

$$(e) \quad T : V \longrightarrow V \\ u \longmapsto T(u) = -u, \text{ com } V \text{ espaço vetorial sobre um corpo } \mathbb{K}.$$

$$(f) \quad T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ (x, y) \longmapsto T(x, y) = \begin{bmatrix} x + 2y & 0 \\ 1 & y \end{bmatrix}.$$

$$(g) \quad T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \longmapsto T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = \begin{bmatrix} a_3 + a_2 & a_2 \\ -a_1 & a_1 + a_0 \end{bmatrix}.$$

$$(h) \quad T : M_{3 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \longmapsto T \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \right) = (-a_{11} + a_{22} - a_{31}, a_{12} - a_{21} + a_{32}).$$

$$(i) \quad T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \\ p(t) \longmapsto T(p(t)) = p'(t), \text{ com } p'(t) \text{ a derivada do polinômio } p(t) \text{ e } n \in \mathbb{N}^*.$$

- (j)  $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R})$   
 $p(t) \longmapsto T(p(t)) = 1 + tp(t)$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- (k)  $T : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$   
 $X \longmapsto T(X) = X \cdot A - A \cdot X$ , com  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $A \neq 0_{n \times n}$ .
- (l)  $T : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$   
 $X \longmapsto T(X) = (X + A)^2 - (X + 2A) \cdot (X - 3A)$ , com  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $A \neq 0_{n \times n}$ .

2. Determine, em cada um dos casos, a expressão da transformação linear  $T$ .

- (a)  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  é tal que:  $T(1, 2) = (3, -1, 5)$  e  $T(0, 1) = (2, 1, -4)$ .
- (b)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  é tal que:  $T(1, 0, 0) = (2, 0)$ ,  $T(0, 1, 0) = (1, 1)$  e  $T(0, 0, 1) = (0, -1)$ .
- (c)  $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$  é tal que:

$$T(1) = (0, 1), \quad T(t) = (0, 5), \quad T(t^2) = (5, 7) \quad \text{e} \quad T(t^3) = (-4, 1).$$

(d)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$  é tal que:  $T(-2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $T(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e

$$T(t^2 - 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(e)  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$  é tal que:  $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = (1, -1, 0)$ ,

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0, 0, -1), \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1, 2, 0), \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = (0, 1, -3).$$

(f)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$  é tal que:  $T(p(t)) = (p(0), p(1), p(-1))$ .

(g)  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  é tal que:  $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + 2t - t^3$ ,

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = -3 - 5t + t^2, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3t + t^2 + 2t^3, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 - 2t^2 - t^3.$$

(h)  $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  é tal que:  $T(p(t)) = 2p'(t) + p(0)(t - 1)$ .

3. Sejam  $T$  e  $S$  operadores lineares de  $\mathbb{R}^2$ , definidos por  $T(x, y) = (x, x - y)$  e  $S(x, y) = (x + y, 2x)$ , determine as transformações  $T + S$ ,  $T \circ S$ ,  $S \circ T$ ,  $T^2$  e  $S^2$ , se existirem.

4. Sejam  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear, dado por  $T(x, y) = (x, -y)$ , e  $K$  é o triângulo de vértices  $(1, 4)$ ,  $(3, 1)$  e  $(2, 6)$ .

(a) Determine a imagem de  $K$  pela transformação  $T$  e represente graficamente.

(b) Qual é a interpretação geométrica de  $T$ ?

5. Considere as transformações lineares  $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  e  $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ , definidas por  $T(x, y, z, t) = (x, 2x + y, 3x + 2y + z, 4x + 3y + 2z + t)$  e  $S(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z, x + y + z)$ .

(a) Determine, se possível,  $T \circ S$ ,  $S \circ T$ .

(b) A transformação  $T + S$  está definida? Justifique sua resposta!

## 4.2 Matriz de uma Transformação Linear

1. Determine, em cada um dos casos, a matriz da transformação linear  $T$  em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ .

(a)  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \longmapsto T(x, y) = (x + 3y, x, x - y)$ ,  $\mathcal{B}$  base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e  
 $\mathcal{B}' = \{(1, 0, -1), (0, 0, 1), (0, 2, 4)\}$  base de  $\mathbb{R}^3$ .

(b)  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longmapsto T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = (a_{11}, a_{11} - 3a_{12} + a_{22}, a_{21} - a_{22})$ ,  
 $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  base de  $M_2(\mathbb{R})$  e  
 $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -2)\}$  base de  $\mathbb{R}^3$ .

(c)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$   
 $a_0 + a_1t + a_2t^2 \longmapsto T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ a_0 & a_2 + a_1 - a_0 \end{bmatrix}$ ,  
 $\mathcal{B} = \{t + 1, t + 2, t^2\}$  base de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{B}'$  base canônica de  $M_2(\mathbb{R})$ .

(d)  $T : V \longrightarrow V$  e  $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$  com  $T(v_1) = 2v_1$ ,  $T(v_2) = -3v_2$  e  $T(v_3) = v_3$ .

(e)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(x, y, z) \longmapsto T(x, y, z) = (x, y, z)$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  base de  $\mathbb{R}^3$   
e  $\mathcal{B}'$  base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

(f)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \longmapsto T(x, y, z) = (x - 2y - 3z, -x + 2y)$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$   
base de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (0, 1)\}$  base canônica de  $\mathbb{R}^2$ .

2. Determine, em cada um dos casos, a expressão da transformação linear  $T$ .

(a)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , com  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$  base de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{B}' = \{(2, 1), (-1, 1)\}$  base de  $\mathbb{R}^2$ .

(b)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ ,  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , com  $\mathcal{B} = \{t, t + 2, t^2\}$  base de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$   
e  $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$  base de  $M_2(\mathbb{R})$ .

(c)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , com  $\mathcal{B} = \{t, t + 2, t^2\}$  base de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

(d)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , com  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$  base de  $\mathbb{R}^3$   
e  $\mathcal{B}'$  base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

(e)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , com  $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$  base de  $\mathbb{R}^3$ .

(f)  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ , com  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  bases canônicas de  $M_2(\mathbb{R})$  e de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , respectivamente.

(g)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ ,  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ , com  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  bases canônicas de  $\mathbb{R}^3$  e de  $M_2(\mathbb{R})$ , respectivamente.

(h)  $T : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ ,  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{bmatrix}$ , com  $\mathcal{B}$  base canônica de  $\mathbb{C}^4$  e  $\mathcal{B}' = \{(1, i, -1, 0), (0, 1, -i, 1), (0, 0, 1, i), (0, 0, 1)\}$  base de  $\mathbb{C}^4$ .

3. Seja  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^3$  tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

com  $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,2)\}$  e  $\mathcal{B}' = \{(1,0,0), (0,-1,1), (1,0,2)\}$  bases de  $\mathbb{R}^3$ . Determine as coordenadas dos seguintes vetores de  $\mathbb{R}^3$  em relação à base  $\mathcal{B}'$ :

(a)  $v_1 = (1,0,1)$       (b)  $v_2 = (1,7,11)$       (c)  $u = (x,y,z)$ .

4. Seja  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^2$ , definido por  $T(x,y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , com  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Determine a matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$ , nos seguintes casos:

(a)  $\mathcal{B}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ .  
 (b)  $\mathcal{B} = \{(1,3), (2,5)\}$ .

5. Sejam  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  e  $S : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$  transformações lineares definidas por:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

com  $\mathcal{B}$  base canônica de  $M_2(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{B}' = \{3, t+1, t^2\}$  base de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{B}'' = \{(1,0), (-1,-1)\}$  base de  $\mathbb{R}^2$ .

Determine:

(a)  $[S \circ T]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}$       (b)  $S \circ T \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$       (c)  $S(a_0 + a_1t + a_2t^2)$   
 (d)  $T \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right)$       (e)  $S \circ T \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right)$ .

6. Sejam  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  transformações lineares definidas por:

$$T(x, y, z) = (x - 2y, 3x - y + z) \quad \text{e} \quad S(x, y) = (x + y, x + 2y, 3y).$$

Determine:

- As matrizes  $[T]$  e  $[S]$  em relação às bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .
  - As matrizes  $[S \circ T]$  e  $[T \circ S]$  em relação às bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .
  - A expressão de cada um dos operadores lineares  $S \circ T$  e  $T \circ S$ , utilizando o item (b).
7. Sejam  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  transformações lineares tais que:

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Determine:

- A expressão de cada uma das transformações lineares  $T$  e  $S$ .
- A matriz  $[S \circ T]$  em relação às bases canônicas de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^4$ .

## 4.3 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

- Determine o núcleo de todas as transformações do exercício 2 da seção 4.1 e do 4.1 da seção 4.2.
- Seja  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^3$  tal que:

$$T(1, 1, 0) = (0, 1, 1), \quad T(1, 0, 1) = (1, 1, 1) \quad \text{e} \quad T(0, 1, 1) = (2, 1, -1).$$

Determine:

- $T(1, 1, 1)$  e  $T(1, 2, 1)$ .
  - $\ker(T)$ .
  - A dimensão de  $\ker(T)$  e  $\text{Im}(T)$ .
3. Seja  $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  transformação linear definida  $T(p(t)) = 2p'(t) + p(0)(t - 1)$ , determine:
- $\text{Im}(T)$ , a imagem de  $T$ .
  - A expressão de  $T$ .
  - $\ker(T)$ , o núcleo de  $T$ .
4. Em cada um dos casos abaixo, exemplifique a afirmação, se for verdadeira, caso contrário refute apresentando um argumento baseado na teoria ou um contra-exemplo.
- $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  e  $\text{Im}(T) = [(1, 2, 3), (4, 5, 6)]$ .
  - $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\ker(T) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$  e  $\text{Im}(T) = [(3, 1, 0), (0, -1, 0)]$ .
  - $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $\ker(T) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$  e  $\text{Im}(T) = [1, t + 2, t^2]$ .

- (d)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\ker(T) = [(1, 2)]$  e  $\text{Im}(T) = [(1, 1, 0)]$ .
- (e)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ ,  $\ker(T) = [(1, 1, 1)]$ .
5. Seja  $T$  um operador linear de um espaço vetorial  $V$ , com  $\dim V = 5$ . Sabendo que  $\dim(\ker(T) \cap \text{Im}(T)) = 2$ , determine  $\dim(\ker(T) + \text{Im}(T))$ , justificando.
6. Seja  $T$  um operador linear de  $M_2(\mathbb{R})$ , definido por  $T \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 0 \\ -a_{21} & a_{12} + a_{22} \end{bmatrix}$ .  
Determine:
- (a)  $\ker(T)$       (b)  $\text{Im}(T)$       (c)  $\ker(T) \cap \text{Im}(T)$       (d)  $\dim(\ker(T) + \text{Im}(T))$   
(e) Verifique se:  $M_2(\mathbb{R}) = \dim(\ker(T) \oplus \text{Im}(T))$ .
7. Determine:
- (a)  $T$  um operador linear de  $M_2(\mathbb{R})$  tal que  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ .  
(b)  $T$  um operador linear de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y + z = 0\}$ .  
(c)  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear tal que  $\text{Im}(T) \setminus \{0_W\}$ .  
(d)  $T$  um operador linear de  $\mathbb{R}^4$  tal que  $\dim(\ker(T)) = \dim(\text{Im}(T))$ .  
(e)  $T$  um operador linear de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  tal que  $\dim(\ker(T)) = 1$ .  
(f)  $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  uma transformação linear tal que  $\ker(T) = [1 - t^2, t - t^3]$ .  
(g)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  uma transformação linear tal que  

$$\text{Im}(T) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$
  
(h)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  uma transformação linear tal que  $\text{Im}(T) = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$   
e  $\ker(T) = [1 + t]$ .  
(i)  $T : M_{3 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  tal que  

$$\ker(T) = \left[ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right].$$
  
(j)  $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$  tal que  $\text{Im}(T) = [1 - t + t^2, t - t^3 + t^4, t^2 - t^4]$ .
8. Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita  $n$  e  $T$  um operador linear de  $V$  linear tal que  $\text{Im}(T) = \ker(T)$ .
- (a) Mostre que  $n$  é par.  
(b) Dê o exemplo de um operador linear com estas características.

## 4.4 Transformações Lineares Injetoras e Sobrejetoras

1. Seja  $T : V \rightarrow W$  transformação linear dada por:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

com  $\mathcal{B}$  base de  $V$  e  $\mathcal{B}'$  base de  $W$ .



- (i) Determine: (a)  $\dim V$ ; (b)  $\dim W$ ; (c)  $\dim(\ker(T))$ ; (d)  $\dim(\operatorname{Im}(T))$ .
- (ii) Classifique em verdadeiro ou falso, justificadamente:
- (a)  $T$  é uma transformação linear invertível.
- (b)  $\dim(\operatorname{Im}(T)) = p\left([T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)$ ,  $p$  designando o posto da matriz.
- (c)  $\operatorname{Im}(T) = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ , com

$$[v_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [v_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [v_3]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [v_4]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- (d) O conjunto  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  é uma base de  $\operatorname{Im}(T)$ .
- (e)  $\operatorname{null}\left([T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right) = 4 - p\left([T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right) = \dim V - \dim(\operatorname{Im}(T))$ .
- (f)  $p\left([T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right) \neq p\left([T]_{\mathcal{B}_1'}^{\mathcal{B}_1}\right)$ , com  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_1'$  bases de  $V$  e  $W$ , respectivamente.
- (g)  $\operatorname{null}\left([T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right) = \operatorname{null}\left([T]_{\mathcal{B}_1'}^{\mathcal{B}_1}\right) = \dim(\ker(T))$ , com  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_1'$  bases de  $V$  e  $W$ , respectivamente.

2. Seja  $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  transformação linear dada por:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b^2 & b \end{bmatrix},$$

com  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  bases canônicas de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , respectivamente.

Determine se possível, os valores reais da constante  $b$ , tal que:

- (a)  $T$  é injetora; (b)  $T$  é sobrejetora; (c)  $\dim(\ker(T)) = 2$ .

3. O operador linear determinado no exercício 5 da seção 4.3 é injetor?

4. Em cada um dos casos abaixo, se for possível, apresente uma transformação linear através de sua matriz associada.

- (a)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$  e  $T$  é injetora.
- (b)  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$  e  $T$  é sobrejetora.
- (c)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$  e  $T$  é sobrejetora.
- (d)  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  e  $T$  é injetora.
- (e)  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$  e  $\dim(\ker(T)) = 2$ .
- (f)  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  e  $T$  é sobrejetora.

5. Em cada um dos casos abaixo, exemplifique a afirmação, se for verdadeira, caso contrário refute apresentando um argumento baseado na teoria ou um contra-exemplo.

- (a)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$  e  $T$  é sobrejetora.
- (b)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\ker(T) = \{p_0\}$ .

- (c)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  e  $T$  é sobrejetora.
- (d)  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$  e  $\ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$ .
- (e)  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$  e  $(0, 0, 0, 0) \notin \text{Im}(T)$ .
- (f)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + z = 0\}$ .
- (g)  $T : M_{3 \times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  e  $\text{Im}(T) = [1 + t, t + t^2]$ .
- (h)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\dim(\ker(T)) = 1$  e  $(0, 2, 1) \in \text{Im}(T)$ .
- (i)  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\ker(T) = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A \text{ é matriz diagonal}\}$ .
6. Seja  $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  transformação linear, cuja matriz em relação às bases canônicas de  $\mathbb{R}^3$  e de  $\mathbb{R}^4$  é dada por  $[T_\lambda] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda^2 + 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Determine:
- (a) Os valores de  $\lambda$  para os quais  $T_\lambda$  é injetora.
- (b) O conjunto de elementos de  $\mathbb{R}^3$  cuja imagem por  $T_1$  é  $(6, 5, 5, 7)$ .
- (c) A matriz de  $T_1$  em relação às bases  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-1, 2, 1), (0, -1, 3)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{B}'$  base canônica de  $\mathbb{R}^4$ .
7. Seja  $T : V \longrightarrow W$  transformação linear, com  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensão finita, mostre que:
- (a)  $T$  é injetora se, e somente se,  $T$  é sobrejetora.
- (b)  $T$  é bijetora se, e somente se,  $T$  leva base de  $V$  em base de  $W$ .
8. Seja  $T : V \longrightarrow W$  transformação linear injetora.
- (a) Mostre que  $T$  transforma subconjuntos L.I.'s de  $V$  em subconjuntos L.I.'s de  $W$ .
- (b) Dê um exemplo mostrando que este resultado não é verdadeiro sem a hipótese  $T$  é injetora.
9. Seja  $T : V \longrightarrow W$  transformação linear com  $\dim V > \dim W$ .
- (a) Se  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  é uma base de  $V$  então  $T(v_1), \dots, T(v_n)$  são vetores L.I.'s ou L.D.'s? Justifique!
- (b) Prove que existe um vetor não nulo  $v \in V$  tal que  $T(v) = 0_W$ , ou seja,  $T$  não é injetora.
10. Seja  $T : V \longrightarrow W$  transformação linear injetora, com  $\dim V = \dim W$ .
- (a) Mostre que  $T$  transforma base de  $V$  em base de  $W$ .
- (b) Dê contra exemplos quando pelo menos uma das hipóteses não se verifica.

## 4.5 Inversa de uma Transformação Linear

1. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  transformação linear definida por:

$$T(1, 0, 0) = t^2 - 1, \quad T(0, 1, 0) = t \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = 2.$$

Determine:

- (a)  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ , com  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  bases quaisquer de  $\mathbb{R}^3$  e de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , respectivamente.

- (b)  $T^{-1}(a_0 + a_1t + a_2t^2)$ .
- (c)  $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ , com  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  as bases consideradas no item (a).
- (d)  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ .
- (e) O que podemos concluir dos itens anteriores?
2. Verifique, em cada um dos casos, se  $T$  é uma transformação linear invertível, em caso afirmativo determine  $T^{-1}$  a inversa de  $T$ .

(a)  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \longmapsto T(x, y) = (x - 2y, -3x + 6y)$ .

(b)  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \longmapsto T(x, y) = (2x - y, x + y)$ .

(c)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:

$$T(1, 2, 1) = (1, 2, 3), \quad T(0, 1, 0) = (2, 1, 5) \quad \text{e} \quad T(0, 4, 1) = (0, 3, 2).$$

(d)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(x, y, z) \longmapsto T(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, 2y - 3z)$ .

(e)  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tal que  $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

(f)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \longmapsto T(p(t)) = (a_2, a_1, a_0)$ .

(g)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$   
 $(x, y, z) \longmapsto T(x, y, z) = (2x + 3y - z) + (4x - y)t + 2xt^2$ .

(h)  $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$  tal que:

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(e_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i)  $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(j)  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  tal que  $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ .

(k)  $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$   
 $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \longmapsto T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) = \begin{bmatrix} a_3 + a_2 & a_2 \\ -a_1 & a_1 + a_0 \end{bmatrix}$ .

3. Em cada um dos casos abaixo, exemplifique a afirmação, se for verdadeira, caso contrário refute apresentando um argumento baseado na teoria ou um contra-exemplo.
- (a)  $T : V \longrightarrow W$  isomorfismo, com  $\dim V = 5$  e  $\dim W = 3$ .
  - (b)  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow U$  isomorfismo, com  $U$  um subespaço de  $M_2(\mathbb{R})$ .
  - (c)  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  e  $T$  é isomorfismo.
  - (d)  $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $p([T]) < 4$ .
4. Sejam  $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  transformações lineares quaisquer.
- (a) Mostre que a transformação linear  $S \circ T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  não é um isomorfismo.
  - (b) Encontre um exemplo em que  $T \circ S$  é isomorfismo e outro exemplo em que  $T \circ S$  não é isomorfismo.
  - (c) Generalize os resultados dos itens (a) e (b) para  $T : V \longrightarrow W$  e  $S : W \longrightarrow V$  transformações lineares, com  $\dim V > \dim W$ .

## 5. Diagonalização de Operadores

### 5.1 Autovalor, Autovetor e Polinômio Característico

1. Determine, em cada um dos casos, o polinômio característico, os autovalores e os autovetores do operador linear  $T$ .

(a)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $T(x, y) = (y, 2x + y)$ .

(b)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $T(x, y) = (-y, x)$ .

(c)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$ .

(d)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$ .

(e)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $T(x, y, z) = (3x - 3y - 4z, 3y + 5z, -z)$ .

(f)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ .

(g)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^4$  dado por  $T(x, y, z, t) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + t)$ .

(h)  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tal que  $[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

(i)  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  dado por  $T(1) = 2$ ,  $T(t) = 2 + t + t^2$  e  $T(0t^2) = 3 + 2t + t^2$ .

(j)  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  dado por  $T(p(t)) = t^2 p''(t)$ .

(k)  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  dado por  $T(p(t)) = p'(t) + p''(t)$ .

2. Encontre o operador linear de  $\mathbb{R}^2$  com autovalores  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = 3$ , cujos autovetores associados são  $(3y, y)$  e  $(-2y, y)$ , respectivamente, com  $y \neq 0$ .
3. Seja  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ .
  - (a) Mostre  $T$  tem autovalores reais se, e somente se,  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ .
  - (b) Analise o caso  $\theta = \pi$ .
4. Seja  $A \in M_2(\mathbb{R})$ .
  - (a) Mostre que o polinômio característico de  $A$  é dado por:  $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A$ .
  - (b) Conclua que, se  $A$  é simétrica e  $A \neq k \cdot I_2$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , então  $A$  sempre possui dois autovalores reais e distintos.

## 5.2 Diagonalização de Operadores Lineares

1. Em cada um dos casos, para o operador linear  $T$  de  $V$ , determine:
  - (i) O polinômio característico de  $T$ .
  - (ii) Todos os autovalores de  $T$ .
  - (iii) Os auto-espacos associados aos autovalores de  $T$ .
  - (iv) A multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de cada autovalor de  $T$ .
  - (v) Se  $T$  é operador diagonalizável. Caso seja, encontre uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$  constituída de autovetores de  $T$ , tal que  $[T]_{\mathcal{B}}$  é matriz diagonal.
- (a)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$ .
- (b)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$ .
- (c)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $T(x, y, z) = (3x - 3y - 4z, 3y + 5z, -z)$ .
- (d)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^4$  dado por  $T(x, y, z, t) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + t)$ .
- (e)  $T$  operador linear de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .
- (f)  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tal que  $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ .
- (g)  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  dado por  $T(1) = 1 + 2t + t^2 + t^3$ ,  $T(t) = 3t + t^2 - t^3$ ,  $T(t^2) = t^2 + 5t^3$  e  $T(t^3) = 2t^3$ .
- (h)  $T$  operador linear de  $M_2(\mathbb{R})$  dado por  $T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_{11} + a_{12} & 2a_{12} \\ a_{12} + a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ .
- (i)  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  tal que  $[T] = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ .

(j)  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$  dado por:

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4) = (a_0 - a_1 + a_2 - a_4) + (7a_1 - 2a_3 + 2a_4)t \\ + (7a_2 + a_3 - a_4)t^2 + (-2a_3 + 5a_4)t^3 + 7a_4t^4.$$

(k)  $T$  operador linear de  $\mathbb{C}^4$  tal que  $[T] = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

2. Seja  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  dado por:  $T(2) = -2$ ,  $T(t+1) = t+1$ ,  $T(t^2) = -2t^2$ . Determine uma base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tal que  $[T]_{\mathcal{B}}$  é matriz diagonal.
3. Em cada um dos casos abaixo, se for possível, apresente um exemplo de operador diagonalizável, através de sua matriz na forma diagonal, satisfazendo as condições dadas.
  - (a)  $T$  operador linear de  $M_2(\mathbb{R})$  tal que  $T$  não é sobrejetor e seus autovalores são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 3$ .
  - (b)  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tal que  $V_{-2} = [t, t+t^2]$  e  $V_1 = [1]$
  - (c)  $T$  operador linear de  $V$  tal que  $p(\lambda) = (3-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$ .
  - (d)  $T$  operador linear de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tal que  $\ker(T) = \{1, t\}$  e  $V_2 = [2]$ .
4. Se  $p(\lambda) = (3-\lambda)^2 \cdot (2+\lambda)^4 \cdot (1-\lambda)^2$  é o polinômio característico de um operador linear  $T : V \longrightarrow V$ . Determine a matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$ , com  $\mathcal{B}$  uma base de  $V$  formada de autovetores de  $T$ .
5. Em cada um dos casos abaixo, para o operador linear  $T$  de  $V$ , verifique se a afirmação é verdadeira (sempre) ou falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.
  - (a) ( ) Todo operador linear é diagonalizável.
  - (b) ( ) Se  $\dim V = 3$  e  $T$  possui três autovalores distintos, então  $T$  é diagonalizável.
  - (c) ( ) Se  $\dim V = 3$  e  $T$  possui dois autovalores distintos, então  $T$  é diagonalizável.
  - (d) ( ) Existem operadores lineares que possuem apenas um autovalor e são diagonalizáveis.
  - (e) ( ) Se o grau do polinômio característico de  $T$  é igual a três, então  $\dim V = 3$ .

