

KALKULUS

Juwairiah, S.Si, M.T
UPN"Veteran" Yogyakarta



BAB II

FUNGSI DAN GRAFIK (1)

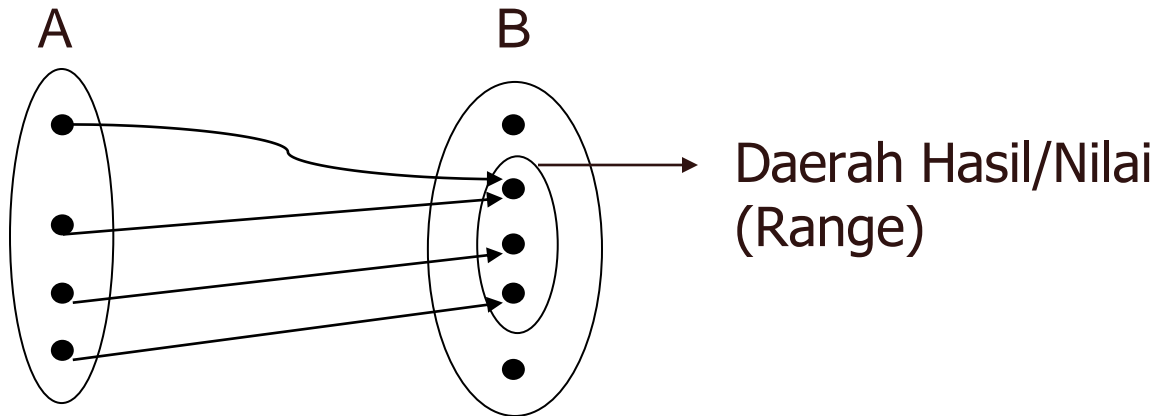


Sub Pokok Bahasan

- Definisi Fungsi
- Daerah asal alamiah (Domain) dan Daerah Hasil (Range)
- Jenis-Jenis Fungsi
- Operasi Fungsi
- Komposisi Fungsi
- Fungsi Invers
- Grafik Fungsi

Definisi Fungsi:

- Fungsi $f: A \rightarrow B$ adalah aturan yang memetakan setiap anggota himpunan A ke tepat satu anggota himpunan B .
- A = Daerah Asal = Domain
 B = Daerah Kawan = Kodomain



Diberikan fungsi $y = f(x)$ \rightarrow $x =$ variabel bebas
 \searrow $y =$ variabel tak bebas

Dipandang dari letak variabel bebas dan tak bebas, fungsi dibedakan menjadi 2, yaitu :

1. Fungsi Eksplisit : $y = f(x)$

Contoh: $y = x + 1$

$$y = x^2 + 2x + 3$$

2. Fungsi Implisit : $y - f(x) = 0$ atau : $f(x, y)$

Contoh : $y^3 - x^2y - 6 = 0$

$$y^2 - 2xy + x^2 = 0$$

Definisi Nilai Fungsi:

$f(a)$ adalah nilai f jika $x = a$

Contoh :

1). Diketahui : $f(x) = x^2 + 2x - 1$, maka :

a. $f(0) = 0^2 + 2.0 - 1 = -1$

b. $f(1) = 1^2 + 2.1 - 1 = 2$

c. $f(-2) = (-2)^2 + 2.(-2) - 1 = -1$

d. $f(a) = a^2 + 2a - 1$

e. $f(a + h) = (a + h)^2 + 2(a + h) - 1$
 $= a^2 + 2ah + h^2 + 2a + 2h - 1$

f. $f(x+1)$

Script maple

```
> f:=x->x^2+2*x-1;  
> f(0);  
> f(1) ;  
> f(-2);  
> f(a) ;  
> f( a + h);  
> expand(f(a+h));  
> f(x+1);  
> expand(f(a+h));
```



2) Diketahui $g(x) = \frac{1}{x}$

Sederhanakan

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Script maple :

```
> g:=x->1/x;  
> (g(a+h) - g(a)) / h;  
> simplify((g(a+h)-g(a))/h);
```


DAERAH ASAL ALAMIAH (DOMAIN) DAN DAERAH NILAI (RANGE)

Definisi :

- Daerah Asal Alamiah (D_x) = himpunan bilangan real x terbesar sehingga f terdefinisi atau mempunyai nilai real
- Daerah Nilai /Range (R_y) = himpunan bil riil y yang merupakan hasil pemetaan fungsi f

Contoh :

1) Diberikan $f(x) = x^2$

$$Dx = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$Ry = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$Dx = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}^*$$

$$Ry = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$$

* Pembagian \rightarrow Penyebut tidak boleh = 0

$$3) f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

f mempunyai nilai real jika : $25 - x^2 \geq 0$ *

$$25 \geq x^2$$

$$x^2 \leq 25$$

$$|x| \leq 5 \text{ atau } -5 \leq x \leq 5$$

$$Dx = \{ x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 5 \}$$

$$Ry = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \}$$

* Bilangan dalam akar harus ≥ 0

$$4) f(x) = x^2 + 2$$

$$Dx = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$Ry = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$$

$$5) f(x) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow Dx = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$= (x - 1)^2 \quad Ry = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

$$6) g(x) = x + 3 \rightarrow Dx = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$Ry = \{y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$7) h(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+6} \rightarrow Dx = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ dan } x \neq -3\}$$

$$Ry = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$$

$$8) f(x) = \log(x^2 - 7x + 12) \rightarrow \text{Bil dalam log} > 0$$

Soal

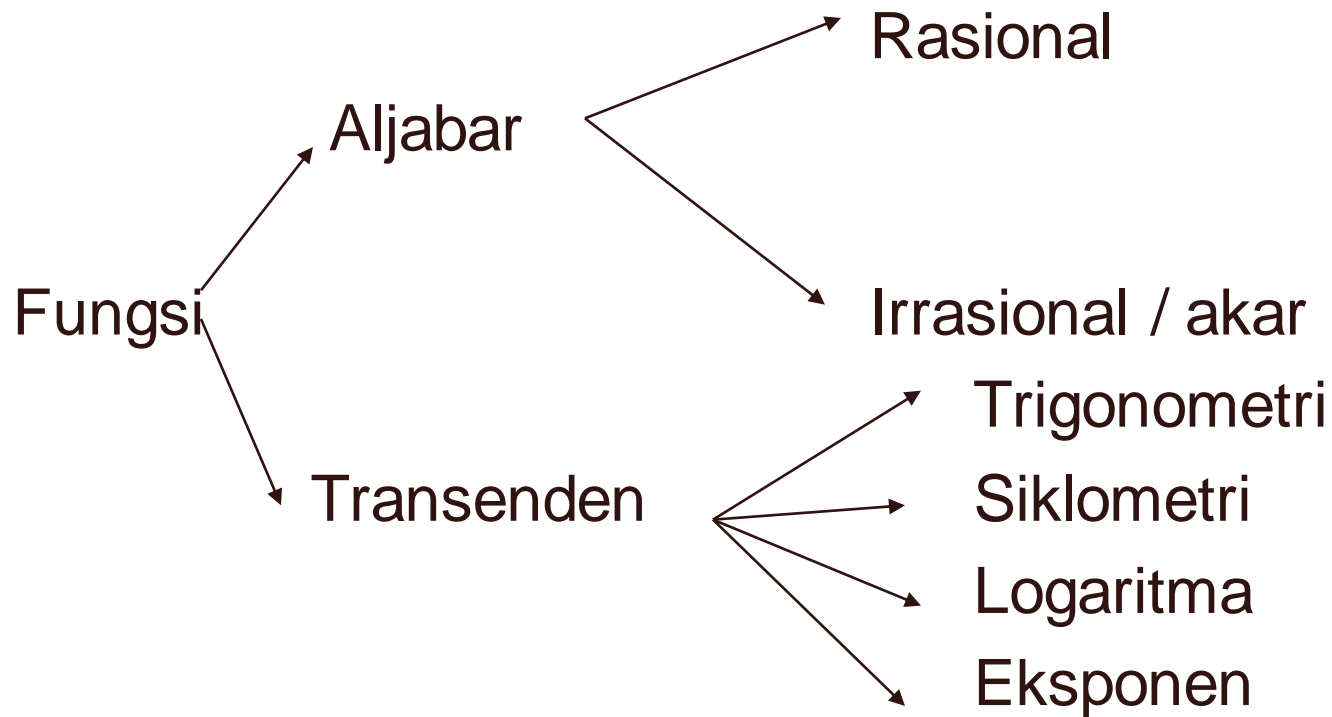
Tentukan domain :

$$1. f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$$

$$2. f(x) = \frac{1}{x+5} + \log(x^2 - x - 6)$$

- Penentuan daerah asal fungsi sangat penting dalam pemrograman, untuk menentukan agar fungsi mempunyai nilai riil (terdefinisi).
- Jika tidak didefinisikan, maka fungsi bisa menjadi tidak terdefinisi (*undefined*), misalnya : pembagiannya nol, akar dari bilangan bilangan negatif, sehingga program menjadi error

JENIS - JENIS FUNGSI



FUNGSI ALJABAR

- Fungsi konstan : $f(x) = k$, $k = \text{konstanta}$
Contoh : $f(x) = 2$, $f(x) = 5$, dll
- Fungsi identitas : $f(x) = x$
- Fungsi polynomial/suku banyak (berderajat n)

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

jika $n = 1 \rightarrow$ fungsi linier $f(x) = ax + b$

Contoh : $f(x) = x + 2$, $f(x) = 2x - 4$

fs kuadrat : $f(x) = x^2 + 3x - 4$

fs pangkat 3 : $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 7$

Pembagian 2 fungsi polinomial = Fungsi Rasional

FUNGSI TRIGONOMETRI

(sin x, cos x, tan x)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Kesamaan 2 sudut

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x\end{aligned}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Kesamaan Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Kesamaan ganjil genap

$$1) \sin(-x) = -\sin x$$

$$2) \cos(-x) = \cos x$$

$$3) \tan(-x) = -\tan x$$

Jumlah dan selisih sudut

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Soal 1

Tentukan x ($0^\circ < x < 360^\circ$) yang memenuhi persamaan

$$\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$$



Soal 2

Diketahui: $\cos (x+y) = 5/7$,
 $\cos x \cdot \cos y = 2/3$ dan $\tan x = a$.
maka $\tan y = ?$



FUNGSI SIKLOMETRI


$$x = \sin t \rightarrow t = \arcsin x$$


$$x = \cos t \rightarrow t = \arccos x$$


$$x = \tan t \rightarrow t = \arctan x$$

FUNGSI LOGARITMA

$$\blacksquare \text{ Log } a = {}^{10}\log a$$

$$\blacksquare {}^a\log b = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\blacksquare \log a + \log b = \log (a.b)$$

$$\blacksquare \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$\blacksquare \log 1 = 0$$

$$\blacksquare \log a^n = n. \log a$$

Logaritma Natural = ln

$$\blacksquare \ln a = {}^e\log a = \frac{\log a}{\log e}, e = 2,718...$$

$$\blacksquare e^{\ln x} = x$$

Ketaksamaan Logaritma


Jika ${}^a\log b < {}^a\log c \rightarrow b < c$ jika $a > 1$
 $b > c$ jika $0 < a < 1$


Contoh soal


1. ${}^5\log (3x+5) < {}^5\log 35$
2. ${}^{1/3}\log (2x+3) > {}^{1/3}\log 15$
3. ${}^2\log(x-2) + {}^2\log x \geq 3$
4. ${}^4\log (2x^2+24) < {}^4\log (x^2+10x)$
5. ${}^6\log (x^2-16) - {}^6\log (2x-7) > 2 - {}^6\log 9$


FUNGSI EKSPONEN


$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$


$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$


$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$


$$\sqrt[m]{x} = x^{1/m}$$


$$\sqrt[m]{x^n} = x^{n/m}$$

Contoh soal

$$1. \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3x-31} \leq 8$$

$$2. 3^{x^2+3x+4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}$$

$$3. 4^{x+3} = \sqrt[4]{8^{x+5}}$$