Kalkulus (1230012)

BAB V
Turunan

Juwairiah, S.Si,M.T
(juwai_riah@yahoo.com)

Sub Pokok Bahasan

- Teorema L'Hospital

Kompetensi Khusus

Mahasiswa mampu menyelesaikan limit dengan menggunakan turunan

TEOREMA L'HOSPITAL

Teorema L'Hospital adalah cara untuk menyelesaikan limit dengan menggunakan turunan

Jika bentuk $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}\ atau\ \frac{\infty}{\infty}, maka$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Contoh :

1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x}{1} = 4$

2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to 3}\frac{3x}{2} = \frac{9}{2}$

- $\lim_{x \to 0} x . \ln x$

- $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3+7}{5x^3-6x-10}$

Bentuk lain seperti : $0.\infty$ atau $\infty - \infty$ atau 0^0 atau 1^∞ atau ∞^0 diubah menjadi $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$

3) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/\sin x}$ (Bentuk 1^∞)

$$\boxed{e^{\ln x} = x}$$

Jawab :

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} . \ln \cos x}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{\sin x}} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1/\cos x(-\sin x)}{\cos x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos^2 x}} = e^{-0/1} = e^0 = 1$$

Soal

5. $\lim_{x \to 0} \frac{sinx - x}{6x^2}$

6. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1}$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{x}$

8. $\lim_{x \to 0} (\frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{3x^2})$

9. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$

10. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x^2 + 3x}$

11. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

12. $\lim_{x \to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{sinx})$

13. $\lim_{x \to 0} (2x)^x$

14. $\lim_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\tan x}$

15. $\lim_{x \to 0} (x + 1)^{\cot x}$

16. $\lim_{x \to 0} (\csc x - \frac{1}{x})$

17. $\lim_{x \to 0} (x. \sin \frac{1}{x})$

Soal Teorema L Hospital

13. $\lim\limits_{x \to 0} (2x)^x$
14. $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{\tan x}$
15. $\lim\limits_{x \to 0} (x + 1)^{\cot x}$

BAB VI

PENGGUNAAN TURUNAN

I. GRADIEN GARIS SINGGUNG

- Persamaan garis melalui 2 titik : (x_1, y_1) *dan* (x_2, y_2) adalah :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

atau

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

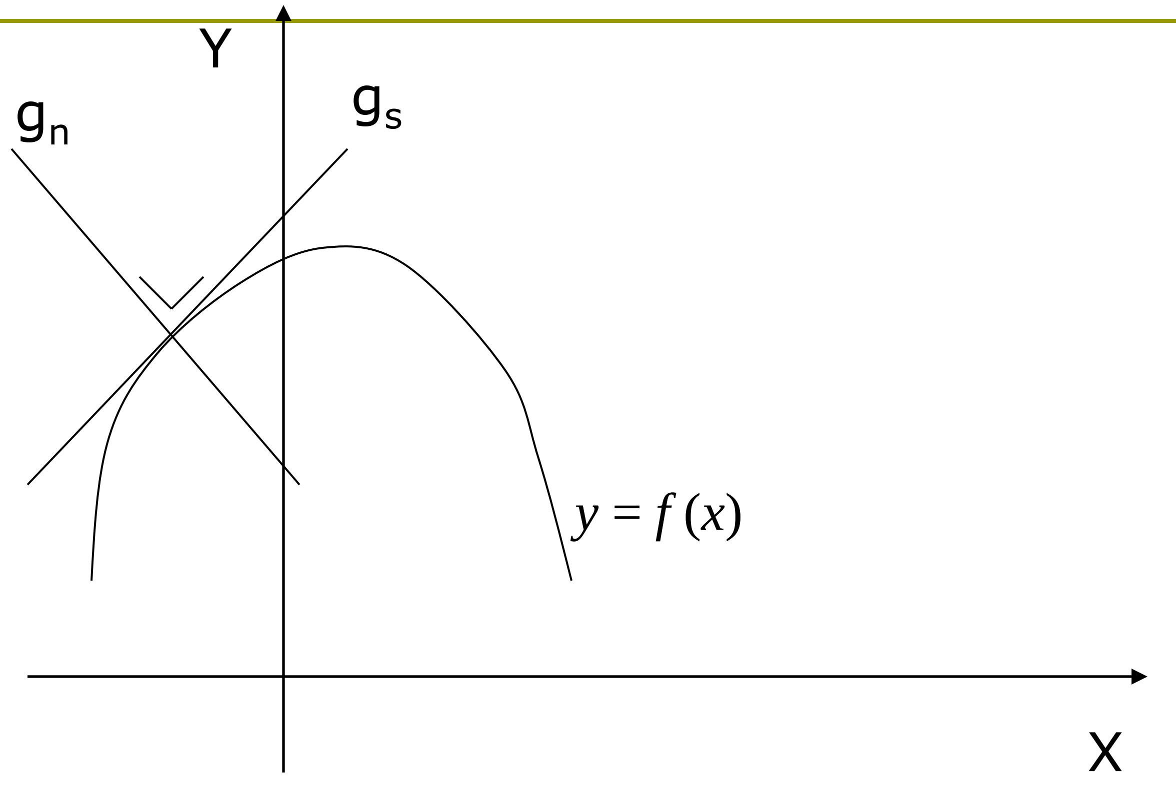
- Gradien kurva y adalah : $m = y'$
- Garis singgung adalah garis yang menyinggung kurva y di satu titik
- Persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) dengan gradien m adalah : $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

- Jika garis $g_1 // g_2 \rightarrow m_1 = m_2$
- Jika $g_1 \perp g_2 \rightarrow m_1 . m_2 = -1$ atau

  $m_1 = -1/m_2$
- Garis normal (g_n) adalah garis yang tegak lurus dengan garis singgung (g_s), sehingga $m_n = -1/m_s$

Ket : m_n = gradien garis normal

m_s = gradien garis singgung


Y
g_n
g_s
$y = f(x)$
X

Contoh :

1)Carilah persamaan garis singgung (PGS) kurva :

$$y = x^2 - 4x + 3$$

di titik dengan absis x = -1

Jawab :

$y = x^2 – 4x + 3$

$x = -1 \rightarrow y = 1^2 - 4.(-1)+3 = 8$

Gradien : $m = y' = 2x – 4 = -2 – 4 = -6$

Maka persamaan garis singgung yang melalui titik (-1,8) dan m= -6 adalah

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y – 8 = - 6 (x + 1)$

$y– 8 = - 6x – 6$

$y = -6x + 2$

2) Carilah persamaan garis singgung kurva $y = x^3 - 6x + 2$ yang sejajar dengan garis $y = 6x - 2$

Jawab :

$g_{1\,:}\ y = x^3 - 6x + 2 \rightarrow m_1 = 3x^2 - 6$

$g_1 : y = 6x - 2 \rightarrow m_2 = 6$

$g_1 // g_2 \rightarrow m_1 = m_2$

$3x^2 - 6 = 6$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x = -2\ ,\ x = 2$

$$y = x^3 - 6x + 2$$

$x = 2 \rightarrow y = -2 \rightarrow (2, -2)$

$x = -2 \rightarrow y = 6 \rightarrow (-2, 6)$

a)PGS dititik (2, -2) dan m = 6

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 2 = 6(x - 2)$$

$$y = 6x - 14$$

b)PGS dititik (-2, 6) dan m = 6

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 6 = 6(x + 2)$$

$$y = 6x + 18$$

Contoh 3

- Tentukan PGS $y = \sqrt{x-3}$ yang tegak lurus 6x+3y – 4 = 0

4) Tentukan PGS kurva

$$y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$$

yang sejajar dengan garis y+x = 3

4) Tentukan PGS dan PGN pada kurva

$y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ dititik A (–2, 1)

Jawab :

$$y^2 - 2x - 4y - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad fs.implisit$$

$$2y.\frac{dy}{dx} - 2 - 4.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y-4).\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y-4} = \frac{1}{y-2} = m$$

Dititik $A(-2{,}1)$ → $m = \frac{1}{y-2} = \frac{1}{1-2} = -1$

a)Persamaan Garis Singgung (PGS)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -1(x + 2)$$

$$y = -x - 1$$

b)Persamaan Garis Normal (PGN)

$$y - 1 = 1(x + 2)$$

$$g_1 \perp g_2 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = x + 3$$

SOAL - SOAL

Tentukan PGS dan PGN pada :

1) $xy + 2x - y = 0$ yang sejajar dengan garis 2x + y = 13 di titik dengan absis 3

2) $y = \sqrt{x - 3}$ yang tegak lurus dengan garis $6x + 3y - 4 = 0$

3) $y = e^{2x}$ dititik dengan absis = 3

Referensi

- Purcell, Varberg, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Penerbit Erlangga, 1993
- Frank Ayres, *Calculus*, Mc.Graw Hill, New York, 1972
- J.Salas and Hill, *Calculus One and Several Variables*, John Willey& Sons, NewYork, 1982