Kalkulus

Bab IV
Limit Fungsi dan Kontinuitas (2)

Juwairiah, S.Si,M.T
(juwai_riah@yahoo.com)

Sub Pokok Bahasan

- Limit Kiri dan Limit Kanan
- Kontinuitas Fungsi

Kompetensi Khusus

Mahasiswa mampu memahami konsep limit kiri dan limit kanan, serta mampu menentukan kontinuitas fungsi

LIMIT KIRI DAN LIMIT KANAN

- Limit kiri : $\lim_{x \to c^-} f(x)$ adalah nilai limit f(x) untuk x mendekati c dari kiri atau x< c
- Limit kanan : $\lim_{x \to c^+} f(x)$ adalah nilai limit f(x) untuk x mendekati c dari kanan atau x > c
- Nilai limit f(x) ada :

$$\lim_{x \to c} f(x) \text{ ada} \Leftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Contoh :

1) Diketahui fungsi

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Nilai f(0) = 1/0 → tidak terdefinisi

a) Limit kiri → nilai fungsi untuk x < 0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1/x = -\square$$

b) Limit kanan → nilai fungsi untuk x > 0

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1/x = \square$$

$$-> \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 1/x = \text{tidak ada}$$

Contoh :

2) Diketahui fungsi

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Maka

a) Limit kiri → nilai fungsi untuk x < 0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1/x{\wedge}2 = \square$$

b) Limit kanan → nilai fungsi untuk x > 0

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1/x{\wedge}2 = \square$$

$$- > \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 1/x{\wedge}2 = \square$$

Contoh :

3) Diketahui fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ untuk } x < 1 \\ x^2 + 2, \text{ untuk } x \geq 1 \end{cases}$$

Maka

a) Limit kiri → nilai fungsi untuk x < 1

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

b) Limit kanan → nilai fungsi untuk x ≥ 1

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3$$

→ $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

4. Diketahui fungsi :

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{untuk } x<0 \\ 2x+3 & \text{untuk } 0\le x<3 \\ x^2 & \text{untuk } x\ge 3 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x-2=-2$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x+3=3$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ tidak ada

d) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 2x+3=2.3+3=9$

e) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} x^2=3^2=9$

f) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=3$

g) f(0) = 2x+3 = 3 → nilai f(x) untuk x=0

h) f(3) = x^2 = 9 → nilai f(x) untuk x=3

KONTINUITAS FUNGSI

Definisi :

- Fungsi f dikatakan kontinu di c, jika memenuhi 3 syarat :
  1. f (c) ada = L
  2. $\lim_{x \to c} f(x) = L(ada) \Leftrightarrow \lim_{x \to c-} f(x) = \lim_{x \to c+} f(x)$
  3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

- Fungsi f(x) dikatakan kontinu di [a , b] ⇔ f(x) kontinu di setiap x $\in$ [a , b]

Contoh – contoh :

1) Diketahui fungsi f (x) = x+ 1, apakah fungsi f(x) kontinu di x = 1 ?

Jawab :

Syarat kontinu :

1) f (1) = 1 + 1 = 2
2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$
3) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$

Jadi karena f (x) memenuhi 3 syarat maka f (x) kontinu di x = 1

LIMIT KIRI DAN LIMIT KANAN

2) Diberikan $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x-8}{x-2} & \text{untuk } x \neq 2 \\ 2 & \text{untuk } x = 2 \end{cases}$

Ditanya : apakah f (x) kontinu di x = 2 ?

Jawab :

(1) f (2) = 2

(2) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{4x-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)} = 4$

(3) $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

Jadi karena (3) tidak memenuhi maka f tidak kontinu di x = 2

KONTINUITAS FUNGSI

3) Misalkan $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ untuk } x \leq 0 \\ x, \text{ untuk } x > 0 \end{cases}$

Apakah f (x) kontinu di x = 0 ?

Jawab :

(1) $f(0) = x^2 = 0$

(2) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \ (ada)$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

Jadi f(x) kontinu di x = 0

KONTINUITAS FUNGSI

4) Misalkan f (x) = $\frac{(x^2-4)}{x-2}, untuk\ x \neq 2$, berapakah nilai f harus didefinisikan agar f kontinu di x = 2 ?

Jawab :

(1) f (2) = $\frac{0}{0}$ $(\ tidak\ ada)$

(2) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$$

Agar f kontinu di x = 2 maka :

f (2) = $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

sehingga didefinisikan :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & ,\ \text{untuk } x \neq 2 \\ 4, & \text{untuk } x = 2 \end{cases}$$

KONTINUITAS FUNGSI

5) Misalkan f (x) = $\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$,dimanakah f (x) tidak kontinu?
Definisikan f (x) yang baru agar f (x) kontinu di semua x € R

Jawab :

f (x) tidak kontinu di x = 3 karena f (3) = $\frac{0}{0}$ $(tidak\ ada)$

(1) f (3) = $\frac{0}{0}$

(2) $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}$

$= \lim_{x \to 3} x + 2 = 3 + 2 = 5$

KONTINUITAS FUNGSI

Agar f (x) kontinu di x = 3 maka :

$$f(3) = \lim_{x \to 3} f(x) = 5$$

sehingga f (x) didefinisikan :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & \text{untuk } x \neq 3 \\ 5, & \text{untuk } x = 3 \end{cases}$$

LATIHAN SOAL

Diberikan :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{jika } x < 1 \\ x - 1, & \text{jika } 1 \leq x < 2 \\ 5 - x^2, & \text{jika } x \geq 2 \end{cases}$$

- Selidiki apakah f (x) kontinu di semua x € R

Soal

- Tetukan nilai a dan b agar f(x) kontinu dimana-mana! (x□R)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, jika\ x < 1 \\ ax + b, jika\ 1 \leq x < 2 \\ 3x, jika\ x \geq 2 \end{cases}$$

Referensi

- Purcell, Varberg, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Penerbit Erlangga, 1993
- Frank Ayres, *Calculus*, Mc.Graw Hill, New York, 1972
- J.Salas and Hill, *Calculus One and Several Variables*, John Willey& Sons, NewYork, 1982