

BAB II

STUDI DESKRIPTIF DATA STATISTIK

1. STATISTIKA DATA TUNGGAL

2. STATISTIKA DATA BERKELOMPOK

I. RUMUS-RUMUS

1. STATISTIKA UNTUK DATA TUNGGAL

1. Rata-rata = Mean = Aritmatik Mean

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n xi}{n}$$

2. Geometrik Mean

$$GM = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n}$$

atau:

$$\text{Log GM} = \log \frac{\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n}{n}$$

3. Harmonic Mean

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

4. Modus = nilai yang paling sering muncul

5. Median = nilai tengah setelah data diurutkan

- n ganjil → $Md = x_{\frac{n+1}{2}}$

- n genap → $Md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

6. Variansi

$$S^2 = \frac{\sum (xi - \bar{x})^2}{n-1}$$

atau

$$S^2 = \frac{\sum xi^2 - \frac{(\sum xi)^2}{n}}{n-1}$$

7. Deviasi Standar (Simpangan Baku)

$$S = \sqrt{S^2} \text{ atau } S = \sqrt{\frac{\sum (xi - \bar{x})^2}{n-1}}$$

8. Simpanan /Deviasi rata-rata:

$$Sr = \frac{\sum |xi - \bar{x}|}{n}$$

9. Range (Jangkauan) = data max – data min

10. Kuartil → membagi data menjadi 4 bagian yang sama K_1, K_2, K_3

Desil → membagi data menjadi 10 bagian yang sama D_1, D_2, \dots, D_9

Persentil → membagi data menjadi 100 bagian yang sama P_1, P_2, \dots, P_{99}

11. Simpangan Kuartil:

$$Sk = \frac{K3 - K1}{2}$$

2. STATISTIKA DATA BERKELOMPOK

DISTRIBUSI FREKUENSI

Data dapat disusun menurut beberapa cara, yaitu :

1. Menurut besarnya (kuantitas) → Distribusi Frekuensi Kuantitatif
 2. Menurut Kategori (Kualitas) → Distribusi Frekuensi Kualitatif
 3. Menurut Waktu terjadinya → Runtun waktu (Time series)
 4. Menurut Tempat terjadinya → Distribusi Spasial
- Jika data yang dipunyai banyak, maka akan lebih mudah jika data itu diringkaskan menjadi distribusi frekuensi.

Definisi :

Distribusi Frekuensi adalah susunan data menurut besarnya (kuantitas) atau kategorinya (kualitas).

- Suatu distribusi frekuensi kuantitatif disusun dengan cara membagi-bagi data dalam beberapa kelas, yang disebut interval kelas.

Syarat-syarat Interval Kelas:

1. Tidak boleh Overlap
2. Tidak boleh terdapat celah/gap
3. Mempunyai lebar yang sama

Menyusun Distribusi Frekuensi Kuantitatif:

1. Cari harga max & min

2. Tentukan jumlah kelas interval (k)
3. Tentukan lebar kelas interval $c = \frac{Max - Min}{k}$
 \rightarrow dibulatkan ke atas
4. Hitung jumlah data dalam tiap-tiap kelas interval
 \rightarrow disebut Frekuensi Kelas
5. Frekuensi Relatif = $\frac{frek.kelas}{jml.data}$

Contoh :

Dari hasil ujian 50 mahasiswa, diketahui nilai minimum = 10 dan maksimum 84. Jika akan dibuat menjadi 5 kelas interval, maka lebar interval : $c = \frac{84-10}{5} = 14,8 \approx 15$

Sehingga kelas-kelas intervalnya adalah :

Kelas	Nilai
1	9,5 – 24,5
2	24,5 – 39,5
3	39,5 – 54,5
4	54,5 – 69,5
5	69,5 – 84,5

Setelah dibuat kelas-kelas interval, maka disusun Distribusi Frekuensi.

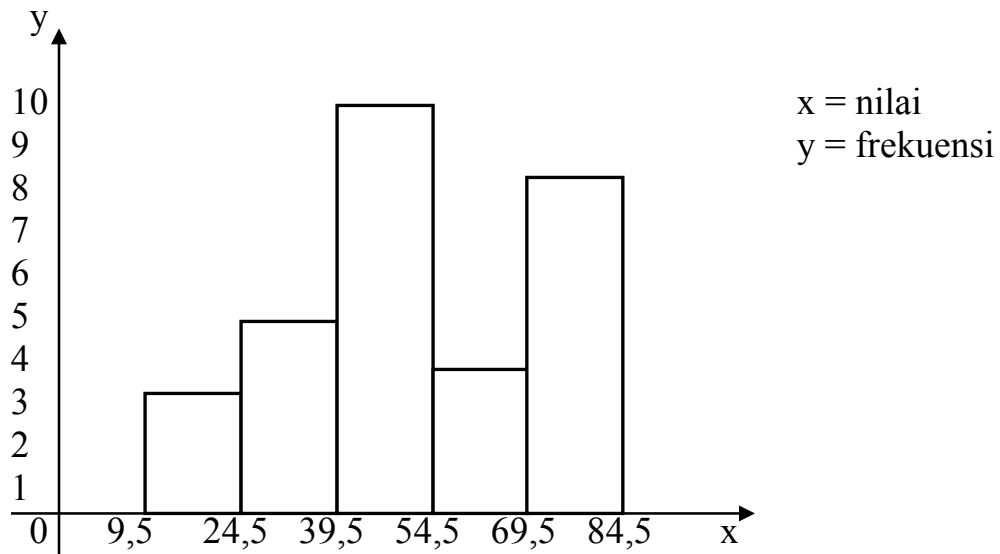
Ex :

Kelas	Nilai B.B B.A	Frek. (fi)	xi	Frek.relatif(%)	Frek.Kum <	Frek.Kum >
1	9,5 – 24,5	3	17	10	0	30
2	24,5 – 39,5	5	32	16,7	3	27
3	39,5 – 54,5	10	47	33,3	8	22
4	54,5 – 69,5	4	62	13,3	18	12
5	69,5 – 84,5	8	77	26,7	22	8
		n = 30			30	0

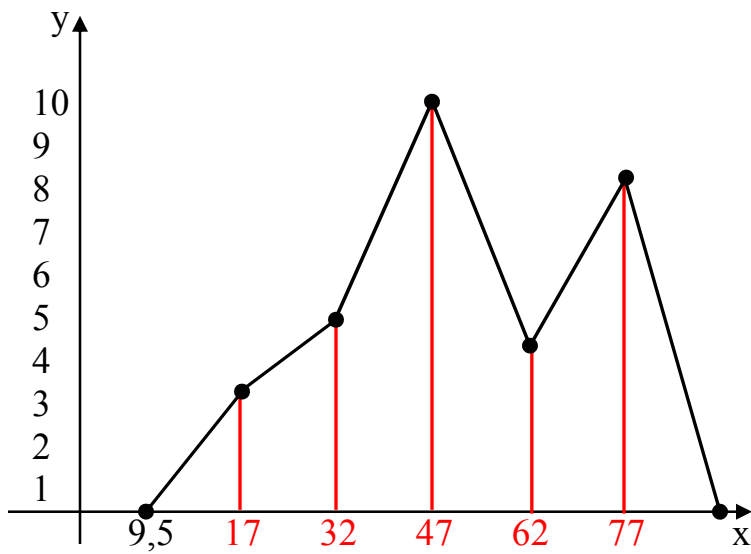
Keterangan:

- Titik Tengah $xi = \frac{btsBwh + btsAtas}{2}$
- Frek. Kum < Batas bawah kelas
- Frek. Kum > Batas bawah kelas

HISTOGRAM

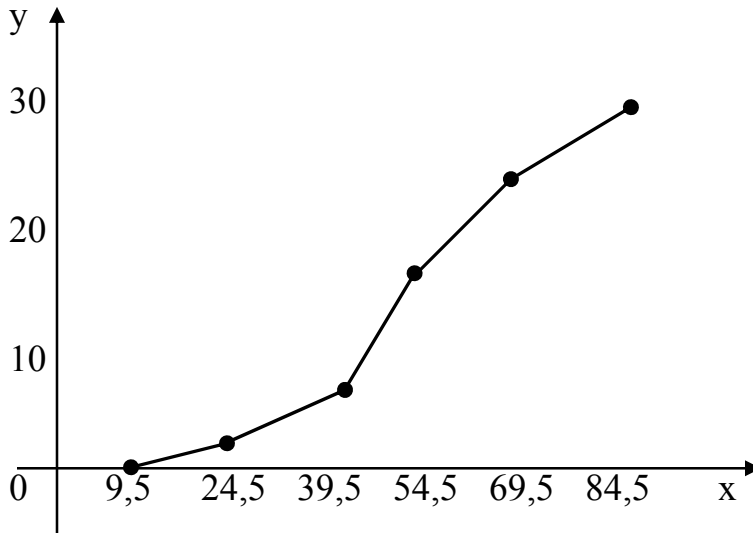


POLIGON → titik tengah



OGIVE

Frekuensi Kumulatif <



DISTRIBUSI FREKUENSI KUALITATIF

Contoh:

Data jumlah kendaraan yang ada di DIY

Jenis Kendaraan	Jumlah = Frekuensi
Mobil	15500
Motor	21250
Sepeda	5000
Bis Kota	120
Becak	500
Lain-lain	1000

Contoh lain:

Diketahui nilai ujian mahasiswa:

3	8	4	5	5	4	6	4	7	5
8	5	3	6	5	4	7	2	4	3
5	8	7	4	9	8	6	6	5	6
6	5	6	8	6	6	5	8	6	3

Distribusi Frekuensi :

Nilai	Bnyk Mhs = Frekuensi
2	1
3	4
4	6
5	9
6	10
7	3
8	6
9	1

n = 40

HARGA-HARGA TENGAH DATA BERKELOMPOK

1) RATA-RATA (MEAN)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i . x_i}{n}$$

x_i = titik tengah kelas ke-i

f_i = frekuensi

n = jumlah data

2) MEDIAN = nilai tengah

$$Md = L_{md} + \frac{\frac{n}{2} - F}{f_{md}} . c$$

L_{md} = Batas bawah kelas median

F = Frekuensi Kumulatif <

f_{md} = Frekuensi kelas median

c = lebar interval

3) KUARTIL

$$K_1 = L_{k1} + \frac{\frac{n}{4} - F}{f_{k1}} . c$$

$$K_3 = L_{k3} + \frac{\frac{3n}{4} - F}{f_{k3}} .$$

L = Lower Bound (Batas bawah)

- 4) **MODUS** = nilai yang paling sering muncul (mempunyai frekuensi kelas terbesar)

$$M_0 = L_{M_0} + \frac{a}{a+b} \cdot c$$

a = f modus – f sebelum

b = f modus – f sesudah

HARGA-HARGA DEVIASI (SIMPANGAN)

1) VARIANSI (RAGAM)

$$S^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

atau

$$S^2 = \frac{\sum f_i.x_i^2 - \left(\frac{\sum f_i.x_i}{n}\right)^2}{n-1}$$

2) DEVIASI STANDAR / SIMPANGAN BAKU

$$S = \sqrt{S^2}$$

3) SIMPANGAN RATA-RATA

$$S_r = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{n}$$

4) SIMPANGAN KUARTIL

$$S_k = \frac{K_3 - K_1}{2}$$

5) SIMPANGAN RELATIF

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Contoh:

Tabel Distribusi Frekuensi nilai ujian mahasiswa

Kelas	Nilai	Frekuensi
1	9,5 – 24,5	3
2	24,5 – 39,5	5
3	39,5 – 54,5	10
4	54,5 – 69,5	4
5	69,5 – 84,5	8

$$n = 30$$

Hitung :

- Mean
- Median, K_1 & K_2 , D_7
- Modus
- Simpangan Baku
- Simpangan rata-rata

Jawab:

Kelas	Nilai	fi	xi	fi.xi	fi.xi ²	xi - \bar{x}	fi x - \bar{x}	F
1	9,5 – 24,5	3	17	51	867	34,5	103,5	0
2	24,5 – 39,5	5	32	160	5120	19,5	97,5	3
3	39,5 – 54,5	10	47	470	22090	4,5	45	8
4	54,5 – 69,5	4	62	248	15376	10,5	42	18
5	69,5 – 84,5	8	77	616	47432	25,5	204	22
		n = 30		1545	90885		492	

$$\Sigma fi.xi$$

$$\Sigma fi.xi^2$$

$$\Sigma fi|x - \bar{x}|$$

$$\text{Lebar interval} = B.A - B.B = 24,5 - 9,5 = 15$$

a) Rata-rata (Mean)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fi.xi}{n} = \frac{1545}{30} = 51,5$$

b) Median = Nilai Tengah = Data ke $\frac{n}{2} = 15$

di kelas ke-3 dengan $L_{md} = 39,5$

$$\begin{aligned}
 Md &= L_{md} + \frac{\frac{n}{2} - F}{f_{md}} \cdot c \\
 &= 39,5 + \frac{15 - 8}{10} \cdot 15 = 39,5 + 10,5 = 50,0
 \end{aligned}$$

$$K_1 = \text{Data ke-} n/4 = 30/4 = 7,5 = 8$$

kelas ke-2 dengan $L_{k1} = 24,5$

$$\begin{aligned} K_1 &= 24,5 + \frac{7,5-3}{5} \cdot 15 \\ &= 24,5 + 13,5 = 38,0 \end{aligned}$$

$K_3 \rightarrow$ Data ke-23 \rightarrow kelas ke-5 dengan $L_{k3} = 69,5$

$$\begin{aligned} K_3 &= 69,5 + \frac{22,5-22}{8} \cdot 15 \\ &= 69,5 + 0,94 = 70,44 \end{aligned}$$

$D_7 \rightarrow$ Data ke-21 & 22 \rightarrow kelas ke-4

$$\begin{aligned} D_7 &= L_{D_7} + \frac{\frac{7n}{10} - F}{f_{D_7}} \cdot C = 54,5 + \frac{21-18}{4} \cdot 15 \\ &= 54,5 + 11,25 = 65,75 \end{aligned}$$

c) Modus = nilai yang paling sering muncul

\rightarrow di kelas ke-3 dengan $L_{mo} = 39,5$

$$a = 10 - 5 = 5 \quad b = 10 - 4 = 6$$

$$\begin{aligned} M_0 &= L_{mo} + \frac{a}{a+b} \cdot c \\ &= 39,5 + \frac{5}{5+6} \cdot 15 \\ &= 39,5 + 6,82 = 46,32 \end{aligned}$$

d) Variansi

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\sum f_i \cdot x_i^2 - \frac{(\sum f_i \cdot x_i)^2}{n}}{n-1} \\ &= \frac{90885 - \frac{(1545)^2}{30}}{29} \\ &= 390,26 \end{aligned}$$

\rightarrow Simpangan Baku

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{390,26} = 19,75$$

e) Simpangan Rata-rata

$$Sr = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{429}{30} = 16,4 = 16,4$$

BAB III

UNSUR –UNSUR PROBABILITAS

A. RUANG SAMPEL & PERISTIWA

Definisi :

- Eksperimen : prosedur yang dijalankan pada kondisi tertentu yang dapat diulang-ulang dan setelah prosedur itu selesai dapat diamati berbagai hasil.
- Ruang Sampel : himpunan yang elemen-elemennya merupakan hasil yang mungkin dari suatu eksperimen.
- Titik Sampel : elemen dari ruang sampel.

Ruang sampel ada 2, yaitu :

1. Ruang sampel Diskrit → mempunyai banyak elemen yang terhingga
2. Ruang sampel Kontinu → membuat bilangan-bilangan dalam suatu interval.

→ Peristiwa : himpunan bagian dari ruang sampel

Contoh :

Ruang Sampel Diskrit

1. Eksperimen : Pelemparan sebuah dadu
Hasil : Mata dadu yang tampak di atas
Ruang Sampel : $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
Peristiwa : $A = \text{Titik ganjil yang muncul} = \{1,3,5\}$
 : $B = \text{Titik genap yang muncul} = \{2,4,6\}$
2. Eksperimen : Pelemparan 2x mata uang logam
Hasil : M (Muka) atau B (Belakang) pada pelemparan I & II
Ruang sampel : $S = \{MM, MB, BM, BB\}$
Peristiwa : $A = \text{kedua hasil sama} = \{MM, BB\}$
 : $B = \text{paling sedikit 1M} = \{MM, MB, BM\}$

Ruang Sampel Kontinu

3. Eksperimen : Pemilihan 1 mahasiswa secara random, dicatat IPK- nya.
Hasil : Bilangan real antara 0 dan 4
Ruang sampel : $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$
Peristiwa : $A = \text{IPK di atas 3} = \{3 < x \leq 4\}$
 : $B = \text{IPK di bawah 2} = \{0 \leq x < 2\}$

Beberapa Peristiwa :

- a) Union (Gabungan) : $A \cup B$ adalah himpunan semua elemen yang ada di dalam A atau di dalam B
- b) Interaksi (Irisan) : $A \cap B$ adalah himpunan semua elemen yang ada di dalam A dan di dalam B
- c) Komplemen : A^c adalah himpunan semua elemen di luar A.

Contoh :

- 1) Jika sebuah dadu dilemparkan, misalkan :
 $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2,4,6\}$, maka :
- a) $A^c = \{2,4,6\} = C$
 - b) $A \cup B = \{1,3,5\} = A$
 - c) $A \cap B = \{1\} = B$
 - d) $A \cup C = \{1,2,3,4,5,6\} = S$
 - e) $A \cap C = \emptyset$
 - f) $B \cup C = \{1,2,4,6\}$
 - g) $B^c = \{2,3,4,5,6\}$
 - h) $B^c \cap A = \{3,5\}$
- 2) Jika x menunjukkan IPK seorang mahasiswa, dan misalkan $A = \{3 < x \leq 4\}$, $B = \{0 \leq x < 2\}$, $C = \{1,5 \leq x \leq 3\}$, maka :
- a) $A \cup B \cup C = \{0 \leq x \leq 4\} = S$
 - b) $A \cap B = \emptyset$
 - c) $A \cup C = \{1,5 \leq x \leq 4\}$
 - d) $A \cap C = \emptyset$
 - e) $B \cap C = \{1,5 \leq x < 2\}$
 - f) $B \cup C = \{0 \leq x \leq 3\}$
 - g) $A^c = \{0 \leq x \leq 3\} = B \cup C$

B. PROBABILITAS SUATU PERISTIWA

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}, 0 \leq P(A) \leq 1$$

$n(A)$ = banyak elemen dalam peristiwa A

$n(S)$ = banyak elemen ruang sampel

- $P(A) = 0 \rightarrow$ tidak mungkin terjadi

- $P(A) = 1 \rightarrow$ pasti terjadi
- $P(S) = 1$
- $P(\Phi) = 0$

HUKUM-HUKUM PELUANG :

- 1) $P(A^c) = 1 - P(A)$
- 2) Jika A dan B saling asing ($A \cap B = \Phi$), maka : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 3) Jika A dan B tidak saling asing ($A \cap B \neq \emptyset$), maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Contoh :

- 1) Jika A = kejadian hujan dan diramalkan $P(A) = 90\% = 0,9$ maka peluang tidak hujan = $P(A^c) = 1 - P(A) = 10\% = 0,1$

- 2) Eksperimen : pelemparan 2 dadu

Ruang sampel :

$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
 $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$

.....,
 $(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$$n(S) = 6^2 = 36$$

- a) Peluang mendapatkan jumlah 7 atau 11

A = jumlah dadu 7 = $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \rightarrow$
 $n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

B = jumlah dadu 11 = $\{(5,6), (6,5)\} \rightarrow n(B) = 2, P(B) = \frac{2}{36}$

A dan B saling asing maka : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{8}{36}$

- b) Peluang jumlah dadu paling sedikit 5

A = Jumlah dadu paling sedikit 5

A^c = Jumlah dadu paling banyak 4

= $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$

$$n(A^c) = 6 \rightarrow P(A^c) = \frac{6}{36}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 6/36 = \frac{30}{36}$$

- 3) Sebuah kartu diambil secara random dari dek kartu bridge, $n(S) = 32$
A = Kartu yang terambil adalah Hati $\rightarrow n(A) = 13, P(A) = 13/52 = \frac{1}{4}$
B = Kartu yang terambil adalah Berlian $\rightarrow n(B) = 13, P(B) = 13/52 = \frac{1}{4}$

C = Kartu yang terambil adalah As $\rightarrow n(C) = 4, P(C) = 4/52 = \frac{1}{13}$

a) A dan B saling asing, maka : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

b) A dan C tidak saling asing, maka : $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$

4) Probabilitas bahwa seorang mahasiswa akan mendapat nilai A, B, C, D atau E adalah masing-masing : 0,17 ; 0,26 ; 0,40 ; 0,11 ; 0,06.

a) Probabilitas bahwa seorang mahasiswa akan mendapat nilai A atau B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,17 + 0,26 = 0,43$

b) Probabilitas bahwa seorang mahasiswa tidak akan mendapat nilai E : $P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 0,06 = 0,94$

5) Tabel di bawah ini menyajikan data gaji bulanan dan umur karyawan suatu perusahaan :

Gaji (Rp) \ Umur (Th)	< 500 rb B₁	500 rb – 1 jt B₂	> 1 jt B₃	Jumlah
13 – 30 A₁	20	27	12	59
31 – 50 A₂	22	35	23	80
> 50 A₃	12	14	15	41
jumlah	54	76	50	180
	n(B1)	n(B2)	n(B3)	n(S)

Hitung probabilitas bahwa seorang karyawan yang dipilih secara random dari perusahaan itu :

a) (Usia < 31) atau (Gaji > 1 juta) adalah :

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup B_3) &= P(A_1) + P(B_3) - P(A_1 \cap B_3) \\
 &= 59/180 + 50/180 - 12/180 \\
 &= 97/180
 \end{aligned}$$

b) (Usia > 50 tahun) dan (Bergaji antara 500 ribu – 1 juta) :

$$P(A_3 \cap B_2) = 14/180$$

ANALISIS DALAM KOMBINATORIK DALAM PROBABILITAS

1. **KOMBINASI** → Tidak memperhatikan urutan

$${}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. **PERMUTASI** → Memperhatikan urutan

$${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Contoh :

ATURAN PERKALIAN

- 1) Nomor plat mobil di negara X terdiri atas 3 angka diikuti dengan 2 huruf kapital. Angka pertama tidak boleh 0. Berapa banyak nomor plat yang dapat dibuat?

Jawab :

Banyak cara : $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 608400$ cara

Berapa peluang sebuah mobil mempunyai nomor plat dengan 3 angka yang sama?

Jawab :

Banyak mobil yang mempunyai nomor plat dengan 3 angka yang sama = $9 \cdot 26 \cdot 26$

$$\text{Jadi peluangnya} = \frac{9 \cdot 26 \cdot 26}{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26} = \frac{1}{100}$$

- 2) Password (sandi lewat) sistem komputer panjangnya 6 karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka. Huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak password yang dapat dibuat?

a) Jika karakter boleh sama

b) Jika karakter tidak boleh ada yang sama

Jawab :

Banyak huruf (A - Z) = 26

Banyak angka (0 - 9) = 10

Jadi banyak karakter = 36

a) Jika karakter boleh sama, maka banyak password yang dibuat = $36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 36^6$

b) Jika karakter tidak boleh ada yang sama → Permutasi

$$\text{Banyak password} = 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \text{ atau } {}_{36}P_6 = \frac{36!}{(36-6)!} = \frac{36!}{30!}$$

- 3) Dari 8 bit (= 1 byte) yang dibangkitkan secara acak, berapa peluang bahwa byte tersebut tidak dimulai dengan 11 ?

Jawab :

A = kejadian byte dimulai dengan 11

A^c = kejadian byte tidak dimulai dengan 11

$$n(A) = 2^6 = 64$$

$$n(S) = 2^8 = 256$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{64}{256} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Maka, } P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{192}{256}$$

- 4) Dari 8 bit yang dibangkitkan secara acak, berapa peluang bahwa bit-bit tersebut memuat paling sedikit satu buah bit nol ?

Jawab :

→ A = kejadian bahwa byte memuat paling sedikit 1 bit 0.

A^c = kejadian bahwa byte memuat semuanya bit 1

$$n(A^c) = 1$$

$$n(S) = 2^8 = 256$$

$$P(A^c) = 1/256$$

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256} \end{aligned}$$

→ B = byte yang memuat 3 bit 1

$$n(B) = \binom{8}{3} = 56$$

$$P(B) = \frac{56}{256}$$

- 5) Sebuah klub beranggota 8 pria dan 10 wanita. Berapa banyak cara memilih panitra yang terdiri dari 6 orang dengan jumlah wanita lebih banyak dari pria ?

Jawab :

Total = 18 orang → 8P , 10 W

Dipilih 6 orang, dengan jumlah W > Jumlah P

- GW, 0P → banyak cara = $\binom{10}{6} \binom{8}{0} = \frac{7.8.9.10}{1.2.3.4} = 210$
- SW, 1P → banyak cara = $\binom{10}{5} \binom{8}{1} = \frac{6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5} \cdot 8 = 2016$

- $4W, 2P \rightarrow \text{banyak cara} = \binom{10}{4} \binom{8}{2} = \frac{5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6} \cdot 28 = 5880$

Banyak cara total = $210 + 2016 + 5880 = 8106$

6) Dari 12 orang pelamar kerja, 5 dari TK, 4 dari IF, 3 dari TI. Jika 2 orang yang akan diterima, hitung probabilitas bahwa yang diterima :

a) 1 IF, 1 TI

b) Dua-duanya IF

c) Tidak ada IF

Jawab :

$$n(S) = \binom{12}{2} = \frac{11.12}{2} = 66$$

a) 1 IF, 1 TI $\rightarrow n = \binom{5}{0} \binom{4}{1} \binom{3}{1} = 12 \rightarrow P = \frac{12}{66}$

b) 2 IF $\rightarrow n = \binom{5}{0} \binom{4}{2} \binom{3}{0} = \frac{3.4}{2} = 6 \rightarrow P = \frac{6}{66}$

c) 0 IF :

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow 2 \text{ TK, } 0 \text{ TI} \rightarrow n = \binom{5}{2} \binom{3}{0} = 10 \\ \rightarrow 1 \text{ TK, } 1 \text{ TI} \rightarrow n = \binom{5}{1} \binom{3}{1} = 15 \\ \rightarrow 0 \text{ TK, } 2 \text{ TI} \rightarrow n = \binom{5}{0} \binom{3}{2} = 3 \end{array} \right\} P = \frac{28}{66}$$

PROBABILITAS BERSYARAT

Notasi :

$P(B | A)$ = Peluang terjadinya kejadian B, jika diketahui kejadian A telah terjadi.

Rumus : (Jika A & B adalah peristiwa yang Dependen)

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Dari rumus tersebut, didapat :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) \text{ atau } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$$

Jika A, B dan C adalah 3 peristiwa yang Dependen, maka :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A \cap B)$$

Jika A, B dan C saling bebas (Independen), maka :

a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

b) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Contoh :

1) Sebuah kotak berisi 5 bola putih, 8 Merah. Tiga bola diambil berturut-turut, hitung probabilitas :

a) bola I Putih, II Merah, III Merah

b) bola I, II, II semuanya Merah

Jawab :

→ Dengan pengembalian (Independen)

a) $P(PMM) = P(P) \cdot P(M) \cdot P(M)$
 $= 5/13 \cdot 8/13 \cdot 8/13$

b) $P(MMM) = P(M) \cdot P(M) \cdot P(M)$
 $= 8/13 \cdot 8/13 \cdot 8/13$

→ Tanpa pengembalian (Dependen)

a) $P(PMM) = P(P) \cdot P(M | P) \cdot P(M | P \cap M)$
 $= 5/13 \cdot 8/12 \cdot 7/11$

b) $P(MMM) = P(M) \cdot P(M | M) \cdot P(M | M \cap M)$
 $= 8/13 \cdot 7/12 \cdot 6/11$

- 2) Jika diketahui data dari 200 orang yang usianya > 50 tahun adalah sebagai berikut :

JK \ TENSI	HIPERTENSI	NORMAL	JUMLAH
Laki-laki	60	20	80
Perempuan	75	45	120
	135	65	200

Jika dipilih 1 orang secara random, hitung :

- Probabilitas orang tersebut Laki-laki/ Perempuan
- Probabilitas orang tersebut mengidap Hipertensi/ Normal
- Jika yang terpilih ternyata Perempuan, berapa probabilitas dia Hipertensi
- Jika yang terpilih ternyata Normal, berapa probabilitas dia Laki-laki

Jawab :

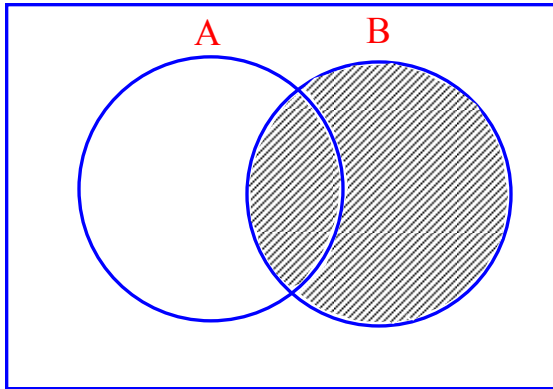
$$\text{a) } P(L) = 80/200 \quad P(P) = \frac{120}{200}$$

$$\text{b) } P(H) = 135/200 \quad P(N) = \frac{65}{200}$$

$$\text{c) } P(H | P) = \frac{P(H \cap P)}{P(P)} = \frac{75}{120}$$

$$\text{d) } P(L | N) = \frac{P(L \cap N)}{P(N)} = \frac{20}{65}$$

TEOREMA BAYES



$B = (B \cap A) + (B \cap A^c)$ sehingga :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) \\ = P(A) \cdot P(B | A) + P(A^c) \cdot P(B | A^c)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(B)} \text{ atau}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(A) \cdot P(B | A) + P(A^c) \cdot P(B | A^c)}$$

Contoh :

- 1) Suatu daerah D diketahui penduduk yang usianya diatas 20 tahun terdiri dari 60% Perempuan yang 15% nya tidak lulus SLTA dan 40% Laki-laki yang 10% nya tidak lulus SLTA. Jika dipilih seorang warga diatas 20 tahun,

- Berapa peluang dia tidak lulus SLTA
- Jika ternyata yang terpilih tidak lulus SLTA, berapa peluang dia Laki-laki?

Jawab :

$$\text{Diket : } P(W) = 60\% = 0,6 \rightarrow P(T|W) = 15\% = 0,15$$

$$P(P) = 40\% = 0,4 \rightarrow P(T|P) = 10\% = 0,10$$

W = wanita

P = Pria

T = tidak lulus

$$\begin{aligned} \text{a) } P(T) &= P(W) \cdot P(T|W) + P(P) \cdot P(T|P) \\ &= (0,6) \cdot (0,15) + (0,4) \cdot (0,1) \\ &= 0,09 + 0,04 \\ &= 0,13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(P|T) &= \frac{P(P).P(T|P)}{P(T)} = \frac{(0,4).(0,1)}{0,13} \\
 &= \frac{0,04}{0,13} \\
 &= \frac{4}{13}
 \end{aligned}$$

2) Suatu pabrik mempunyai 4 mesin, yaitu M_1 , M_2 , M_3 dan M_4 . Dari total produksi :

M_1 memproduksi 20%

M_2 memproduksi 15%

M_3 memproduksi 40%

M_4 memproduksi 25%

Diketahui bahwa :

4% produksi M_1 adalah cacat (C)

5% produksi M_2 adalah cacat (C)

6% produksi M_3 adalah cacat (C)

7% produksi M_4 adalah cacat (C)

Secara random, dipilih sebuah produk & ternyata cacat.

a) Berapa peluang produk cacat tersebut diproduksi M_2 ?

b) Berapa peluang produk cacat tersebut diproduksi M_3 ?

BAB IV

DISTRIBUSI VARIABEL RANDOM CACAH

VARIABEL RANDOM :

→ adalah cara membuat harga angka untuk setiap elemen ruang sampel.

Variabel ada 2, yaitu :

1. Variabel Random Diskrit/ Cacah
2. Variabel Random Kontinu

Contoh :

- 1) Eksperimen : pelemparan 1 mata uang 3x

S {MMM, MMB, BBB, MBM, BMB, BMM, BBM}

Misalkan : x = banyak M dalam tiap elemen, maka x = 0, 1, 2, 3

x = 0 = {BBB}

x = 1 = {MBB, BMB, BBM}

x = 2 = {MMB, MBM, BMM}

x = 3 = {MMM}

Tabel distribusi probabilitas x :

Harga x	0	1	2	3
Prob x = f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

 = 1

- 2) Sebuah dadu dilemparkan 2x

Misalkan : x = jumlah titik dadu dalam kedua lemparan itu, maka

x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Tabel distribusi probabilitas x :

Harga x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Prob x = f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

a) $P(x > 8) = P(x=9) + P(x=10) + P(x=11) + P(x=12)$

$$= \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{10}{36}$$

b) $P(4 < x < 7) = P(x=5) + P(x=6)$

$$= \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36}$$

3) Eksperimen : 8 bit (1 byte) dibangkitkan secara acak.

Variabel random y = banyak bit 1 dalam byte

$$y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

$$y = 0 \rightarrow n = c(8,0) = 1$$

$$y = 1 \rightarrow n = c(8,1) = 8$$

$$y = 2 \rightarrow n = c(8,2) = 28$$

$$y = 3 \rightarrow n = c(8,3) = 56$$

$$y = 4 \rightarrow n = c(8,4) = 70$$

$$y = 5 \rightarrow n = c(8,5) = 56$$

$$y = 6 \rightarrow n = c(8,6) = 28$$

$$y = 7 \rightarrow n = c(8,7) = 8$$

$$y = 8 \rightarrow n = c(8,8) = 1$$

$$n(S) = \text{banyak cara membangkitkan 8 bit (0 \& 1)} \\ = 2^8 = 256$$

Tabel distribusi probabilitas x :

Harga y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Prob = $f(y)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

HARGA HARAPAN & VARIANSI

A. HARGA HARAPAN/ EKSPEKTASI

Notasi :

$$\text{Mean } x = \text{Harga harapan } x = E(x) = \mu_x$$

$$E(x) = \sum x \cdot f(x)$$

- Mean sampel = $\bar{x} \rightarrow$ dihitung berdasarkan observasi dalam sampel yang diambil dari populasi.
- $E(x) \rightarrow$ dihitung dari model/ distribusi probabilitas populasi tersebut.

Contoh :

1) Tabel distribusi probabilitas x :

x	0	1	2	3	Jumlah
$f(x)$	0,1	0,2	0,4	0,3	1
$x \cdot f(x)$	0	0,2	0,8	0,9	1,9

$$\sum x \cdot f(x) = E(x)$$

Atau :

$$E(x) = \sum x.f(x) \\ = 0.(0,1) + 1.(0,2) + 2.(0,4) + 3.(0,3) = 1,9$$

2) Tabel distribusi probabilitas y :

y	-2	-1	0	2	Jumlah
f(y)	0,25	0,15	0,2	0,4	1,0
y.f(y)	-0,5	-0,15	0	0,8	0,15

↓
 $\sum y.f(y) = E(y)$

Atau :

$$E(y) = \sum y.f(y) \\ = (-2).(0,25) + (-1).(0,15) + 0.(0,2) + 2.(0,4) = 0,15$$

SIFAT-SIFAT EKSPEKTASI

- 1) $E(a) = a$
- 2) $E(bx) = b.E(x)$
- 3) $E(x+a) = E(x) + a$
- 4) $E(bx+a) = b.E(x) + a$
- 5) $E(c x^2 + bx + a) = c.E(x) + b.E(x^2) + a$

B. VARIANSI DAN DEVIASI STANDAR

VARIANSI :

$$Var(x) = E(x - \mu)^2 = E(x^2) - \mu^2 \text{ atau } Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = \sum x^2.f(x)$$

DEVIASI STANDAR :

$$Ds(x) = \sigma_x = \sqrt{var(x)}$$

SIFAT-SIFAT :

VARIANSI	DEVIASI STANDAR
1. $var(x) \geq 0$	1. $Ds(x) \geq 0$
2. $var(x+a) = var(x)$	2. $Ds(x+a) = Ds(x)$
3. $var(bx) = b^2.var(x)$	3. $Ds(bx) = b.Ds(x)$
4. $var(bx+a) = b^2.var(x)$	4. $Ds(bx+a) = b.Ds(x)$

Contoh :

1. Diketahui : distribusi probabilitas sbb

x	1	2	3	4	5	Jml
f(x)	0,10	0,25	0,20	0,15	0,3	1

Hitung :

- Mean x
- Variansi x
- Deviasi standar x
- Jika $y = 4x - 2$, hitung : $E(y)$, $\text{var}(y)$ & $Ds(y)$

Jawab :

x	1	2	3	4	5	Jml
f(x)	0,10	0,25	0,20	0,15	0,3	1
x.f(x)	0,10	0,50	0,60	0,60	1,50	3,30
$x^2 \cdot f(x)$	0,10	1,00	1,80	2,40	7,50	12,8

$$= \sum x \cdot f(x)$$

$$= \sum x^2 \cdot f(x)$$

a) Mean $x = E(x) = \sum x \cdot f(x) = 3,30$

b) $\text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$
 $= 12,8 - (3,3)^2$
 $= 12,8 - 10,89$
 $= 1,91$

c) $Ds(x) = \sqrt{\text{var}(x)} = 1,38$

d) $y = 4x - 2$

$$\begin{aligned} E(y) &= E(4x - 2) \\ &= 4 \cdot E(x) - 2 \\ &= 4 \cdot (3,3) - 2 \\ &= 13,2 - 2 \\ &= 11,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(y) &= \text{var}(4x - 2) \\ &= 4^2 \cdot \text{var}(x) \\ &= 16 \cdot (1,91) \\ &= 30,56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ds(y) &= Ds(4x - 2) \\ &= 4 \cdot Ds(x) \\ &= 4 \cdot (1,38) = 5,52 \end{aligned}$$

2. Diketahui tabel distribusi probabilitas x

x = banyak komputer yang terjual dalam 1 hari

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Hitung :

- a) Banyak komputer yang diharapkan terjual rata-rata dalam 1 hari
= $E(x)$
b) Deviasi standar $x = Ds(x)$

Jawab :

x	0	1	2	3	4	5	Jml	
f(x)	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	1	
x.f(x)	0	0,1	0,4	0,9	0,8	0,5	2,7	= $E(x)$
$x^2 \cdot f(x)$	0	0,1	0,8	2,7	3,2	2,5	9,3	= $E(x^2)$

a) $E(x) = \sum x \cdot f(x) = 2,7$

b) $Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$
 $= 9,3 - (2,7)^2$
 $= 2,01$

$$Ds(x) = \sqrt{var(x)} = \sqrt{2,01} = 1,42$$

Misalkan keuntungan : Rp. 100.000,- untuk tiap unit komputer yang terjual dan misalkan biaya tetap untuk tiap hari : Rp. 20.000,- maka : keuntungan bersih $U = 100.000x - 20.000$

- c) Keuntungan bersih yang diharapkan dalam 1 hari :

$$\begin{aligned} E(U) &= E(100.000x - 20.000) \\ &= 100.000 \cdot E(x) - 20.000 \\ &= 100.000 \cdot (2,7) - 20.000 \\ &= 270.000 - 20.000 \\ &= 250.000 \end{aligned}$$

d) $Ds(U) = Ds(100.000x - 20.000)$
 $= 100.000 \cdot Ds(x)$
 $= 100.000 \cdot (1,42)$
 $= 142.000$

DISTRIBUSI BERSAMA 2 VARIABEL RANDOM

$$P(X=x, Y=y) = f(x,y)$$

Contoh :

Sebuah rak buku memuat 5 buku Algoritma, 4 buku Statistika dan 2 buku Basis data. Diambil 2 buku secara acak dan misalkan variabel random :

x = banyak buku Algoritma yang terambil = {0,1,2}

y = banyak buku Statistika yang terambil = {0,1,2}

Tentukan distribusi probabilitas bersama x dan y !

A S B

- $f(0,0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{4}{0}\binom{2}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{1}{55}$
- $f(0,1) = \frac{\binom{5}{0}\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{8}{55}$
- $f(0,2) = \frac{\binom{5}{0}\binom{4}{2}\binom{2}{0}}{\binom{11}{2}} = \frac{6}{55}$
- $f(1,0) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{0}\binom{2}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{10}{55}$
- $f(1,1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{0}}{\binom{11}{2}} = \frac{20}{55}$
- $f(1,2) = 0$
- $f(2,0) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{0}\binom{2}{0}}{\binom{11}{2}} = \frac{10}{55}$
- $f(2,1) = 0$, $f(2,2) = 0$

Tabel distribusi probabilitas bersama x dan y

$x \backslash y$	0	1	2	Jml
0	$\frac{1}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{6}{55}$	$\frac{15}{55}$
1	$\frac{10}{55}$	$\frac{20}{55}$	0	$\frac{30}{55}$
2	$\frac{10}{55}$	0	0	$\frac{10}{55}$
Jml	$\frac{21}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{6}{55}$	1

$f(y)$

$f(x)$

KOVARIANSI & KORELASI

→ menunjukkan ukuran hubungan antara x & y

KOVARIANSI → masih tergantung satuan pengukuran x & y

$$\text{Kov}(x,y) = E(XY) - E(x).E(y)$$

$$E(XY) = \sum x.y.f(x,y)$$

KORELASI → tidak tergantung satuan pengukuran

$$\text{Kor}(x,y) = \frac{\text{Kov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

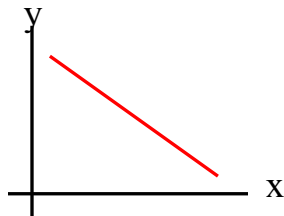
$$\sigma_x = Ds(x)$$

$$\sigma_y = Ds(y)$$

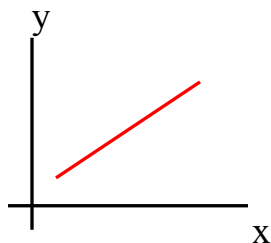
SIFAT_SIFAT KORELASI :

1) $-1 \leq \text{Kor}(x,y) \leq 1$

- $\text{Kor} < 0 \rightarrow x \text{ \& y berbanding terbalik : } x \geq, y \leq$



- $\text{Kor} > 0 \rightarrow x \text{ \& y berbanding lurus : } x \leq, y \geq$



2) Jika variabelnya ditambah bilangan konstan dan dikalikan bilangan konstan :

- Tandanya sama \rightarrow korelasinya tetap

$$\begin{array}{l} \text{Ex : } U = ax + b \\ \quad V = cy + d \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} U = ax + b \\ V = cy + d \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Kov}(U,V) = \text{kov}(x,y) \\ \text{Kor}(U,V) = \text{kor}(x,y) \end{array}$$
- Tandanya beda :

$$\begin{array}{l} \text{Ex : } U = ax + b \\ \quad V = cy - d \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} U = ax + b \\ V = cy - d \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Kov}(U,V) = a.c.\text{kov}(x,y) \\ \text{Kor}(U,V) = \text{kor}(x,y) \end{array}$$

3) Var x dan y dikatakan Independen jika $f(x,y) = f(x).f(y)$, untuk semua x & y

4) Jika x dan y Independen, maka :

$$E(xy) = E(x).E(y)$$

sehingga

$$\text{Kov}(x,y) = 0$$

dan

$$\text{Kor}(x,y) = 0$$

Contoh :

1) Diberikan 2 variabel x dan y, dengan distribusi probabilitas bersama sbb:

$x \backslash y$	-1	0	1	
1	0,10	0,15	0,10	0,35
2	0,05	0,10	0,05	0,20
3	0,10	0,15	0,20	0,45
	0,25	0,40	0,35	

Hitung :

- $E(x)$ dan $E(y)$
- $\text{Var}(x)$ dan $\text{Var}(y)$, $\text{Kov}(xy)$ dan $\text{Kor}(xy)$
- Jika $u = 2x+1$, $v = 3y-1$ berapakah korelasi (u,v) ?
- Apakah x & y Independen ?

Jawab :

Tabel distribusi probabilitas x :

x	1	2	3	Jumlah	
f(x)	0,35	0,20	0,45	1	
x.f(x)	0,35	0,40	1,35	2,10	= E(x)
$x^2.f(x)$	0,35	0,80	4,05	5,02	= E ² (x)

a) $E(x) = \sum x.f(x) = 2,10$

b) $\text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$$\begin{aligned}
&= 5,20 - (2,10)^2 \\
&= 5,20 - 4,41 \\
&= 0,79 \\
\sigma_x = Ds(x) &= \sqrt{0,79} = 0,89
\end{aligned}$$

Tabel distribusi probabilitas y :

y	-1	0	1	Jumlah	
f(y)	0,25	0,40	0,35	1	
y.f(y)	-0,25	0	0,35	0,10	= E(y)
y ² .f(y)	0,25	0	0,35	0,60	= E ² (y)

a) $E(y) = \sum x.f(y) = 0,10$

b) $Var(y) = E(y^2) - [E(y)]^2$
 $= 0,60 - (0,1)^2$
 $= 0,60 - 0,01$
 $= 0,59$

$$\sigma_y = Ds(y) = \sqrt{0,59} = 0,77$$

c) $E(xy) = \sum xy.f(xy)$
 $= 1.(-1)(0,10) + 1.0(0,15) + 1.1(0,10) +$
 $2.(-1)(0,05) + 2.0(0,10) + 2.1(0,20) +$
 $3.(-1)(0,10) + 3.0(0,15) + 3.1(0,20)$
 $= -0,1 + 0,1 - 0,1 + 0,1 - 0,3 + 0,6$
 $= 0,3$

$$\begin{aligned}
Kov(xy) &= E(xy) - E(x).E(y) \\
&= 0,3 - (2,10)(0,10) \\
&= 0,3 - 0,21 \\
&= 0,09
\end{aligned}$$

$$Kor(xy) = \frac{Kov(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0,09}{(0,89).(0,77)} = \frac{0,09}{0,68} = 0,13$$

$$Kor(u,v) = Kor(x,y) = 0,13$$

d) $f(1,-1) = f(x=1).f(y=1)$?
 $0,10 = (0,35).(0,25)$?
 $0,01 \neq 0,875$

\therefore x dan y tidak Independen

BAB V

DISTRIBUSI VARIABEL RANDOM CACAH KHUSUS

1) DISTRIBUSI SERAGAM (UNIFORM)

Jika variabel random $x = x_1, x_2, \dots, x_k$ mempunyai probabilitas yang sama, maka : $f(x;k) = \frac{1}{k}$

Mean x :

$$\mu = \frac{\sum xi}{k}$$

Variansi x :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (xi - \mu)^2}{k}$$

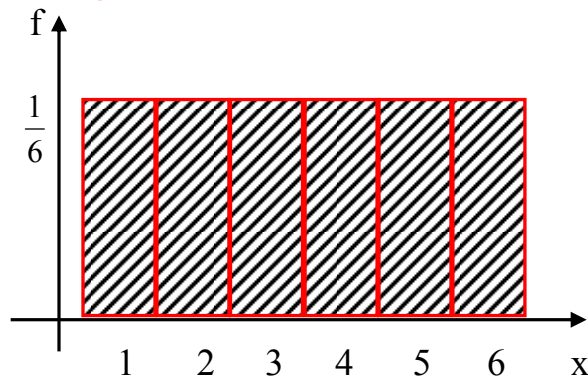
Contoh :

Eksperimen : pelemparan 1 dadu

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$f(x;6) = \frac{1}{6}$ untuk $x = 1, 2, 3, \dots, 6$

Histogram :



Mean x :

$$\mu = \frac{\sum xi}{k} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$

Var x:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(1-3,5)^2 + (2-3,5)^2 + (3-3,5)^2 + (4-3,5)^2 + (5-3,5)^2 + (6-3,5)^2}{6} \\ &= \frac{35}{12}\end{aligned}$$

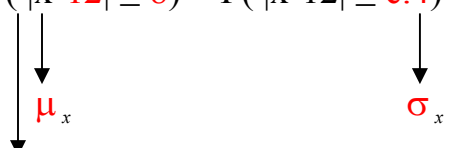
PERSAMAAN CHEBYSHEV :

Jika diketahui x adalah variabel random dengan mean $= \mu_x$, deviasi standar $= \sigma_x$, maka untuk sembarang konstanta $c > 0$ berlaku :

$$P(|x - \mu_x| \geq c \cdot \sigma_x) \leq \frac{1}{c^2}$$

Contoh :

1) Misalkan x adalah suatu variabel random diskret dengan mean 12 dan variansinya 16 maka : $\text{var}(x) = 16 \rightarrow \sigma_x = 4$

$$\text{a) } P(|x - 12| \geq 8) = P(|x - 12| \geq c \cdot 4) \rightarrow c = 2 \leq \frac{1}{c^2} = \frac{1}{4}$$


$$P(-8 \geq x - 12 \geq 8) = P(4 \geq x \geq 20) = P[(x \leq 4) \text{ atau } (x \geq 20)]$$

$$\text{b) } P(|x - 12| \geq 12) = P(|x - 12| \geq c \cdot 4) \rightarrow c = 3 \leq \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$P(-12 \geq x - 12 \geq 12) = P(0 \geq x \geq 24) = P[(x \leq 0) \text{ atau } (x \geq 24)]$$

BERNOULLI TRIALS :

Percobaan yang hanya mempunyai 2 hasil yang mungkin (sukses - gagal)

Contoh :

- 1) Anak
 - Laki-laki
 - Perempuan
- 2) Ujian
 - Lulus
 - Tidak lulus
- 3) Sakit
 - Sembuh
 - Tidak sembuh

Bernoulli Trials mempunyai 3 sifat :

- 1) Tiap trial menghasilkan 1 dari 2 hasil yang mungkin S dan T
- 2) $P(S) = p$ tetap dari trial ke trial $\rightarrow P(T) = 1 - p$
- 3) Trial-trial Independen 1 dengan yang lain

Contoh :

- 1) Peluang seorang petembak jika menembak mengenai sasarannya 0,7.
Jika dia menembak 4 kali, berapa peluang tembakannya kena sasaran minimal 1 kali ?

Jawab :

$$P(K) = 0,7 \rightarrow P(T) = 0,3$$

A = kena sasaran minimal 1 kali

A^c = tidak kena sasaran sama sekali
 $= \{TTTT\}$

$$P(A^c) = P(T) \cdot P(T) \cdot P(T) \cdot P(T) = (0,3)^4$$

$$\rightarrow P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - (0,3)^4$$

B = kena sasaran 2 kali

$= \{KKTT, KTKT, KTTK, TTKK, TKTK, TKKT\}$ ada 6

$$P(B) = 6 \cdot (P(K) \cdot P(K) \cdot P(T) \cdot P(T)) \\ = 6 \cdot (0,7) \cdot (0,7) \cdot (0,3) \cdot (0,3)$$

2) DISTRIBUSI BINOMIAL \rightarrow Tabel I

Adalah Bernoulli Trial yang diulang-ulang sebanyak n kali

Ada 2 hasil yang mungkin \rightarrow 'sukses' (S)

\searrow
'tidak sukses' (T)

Jika variabel random :

x = banyak 'sukses' dalam n trial

$P(S) = p$ dan $P(T) = 1 - p = q$

Distribusi probabilitas x :

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Mean x : $\mu = n \cdot p$

Var x : $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$

Deviasi standar : $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Tabel I : $P(x \leq c) = b(c; n; p)$

Contoh :

1) Probabilitas bahwa seseorang pasien penderita penyakit jantung akan sembuh adalah 0,4. Jika 10 orang diketahui terserang penyakit jantung, berapa probabilitas :

- a) 3 orang yang sembuh
- b) Paling banyak 3 orang yang sembuh
- c) Paling sedikit 3 orang yang sembuh

Jawab :

a) $P(x=3) = \binom{10}{3} \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^7$ atau dengan Tabel I (Binomial) :

$$\begin{aligned} P(x=3) &= P(x \leq 3) - P(x \leq 2) \\ &= 0,382 - 0,167 \\ &= 0,215 \end{aligned}$$

b) Paling banyak 3 berarti : 0, 1, 2, 3.

$$\begin{aligned} &= P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) \\ &= \binom{10}{0} \cdot (0,4)^0 \cdot (0,6)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0,4)^1 \cdot (0,6)^9 + \binom{10}{2} \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^8 + \\ &\quad \binom{10}{3} \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^7 \\ &= \dots \end{aligned}$$

atau dengan Tabel I

$$\begin{aligned} P(x \leq 3) &= b(3; 10; 0,4) \\ &= 0,382 \end{aligned}$$

c) Paling sedikit 3 berarti : 3, 4, 5, ..., 10 = A

$$A^c = 0, 1, 2$$

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) \\ &= \binom{10}{0} \cdot (0,4)^0 \cdot (0,6)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0,4)^1 \cdot (0,6)^9 + \binom{10}{2} \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^8 \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) \text{ atau dengan Tabel I}$$

$$\begin{aligned} P(x \geq 3) &= 1 - P(x \leq 2) \\ &= 1 - 0,167 \\ &= 0,833 \end{aligned}$$

Rata-rata = mean x :

$$\mu = n \cdot p = 10 \cdot (0,4) = 4$$

Variansi x :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= n.p.q = n.p.(1-q) \\ &= 10.(0,4).(0,6) = 2,4\end{aligned}$$

Deviasi standar x :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2,4} = 1,55$$

2) Diketahui bahwa seseorang yang memasuki universitas akan menyelesaikan kuliah (tamat) adalah 0,8, maka dari 5 orang mahasiswa, hitung probabilitas :

a) Tidak ada yang tamat

x = banyak mahasiswa yang tamat

$$P = 0,8 \rightarrow 1 - P = 0,2$$

$$P(x=0) = \binom{5}{0} (0,8)^0 \cdot (0,2)^5 = (0,2)^5 \approx 0,000$$

b) Paling sedikit 1 yang tamat : $P(x \geq 1)$

$$= 1 - P(x=0)$$

$$= 1 - (0,2)^5 \approx 1$$

c) 2 yang tamat

$$P(x=2) = \binom{5}{2} (0,8)^2 \cdot (0,2)^3 = (0,2)^3 \approx 0,051$$

3) DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Pengambilan sampel tanpa pengembalian

Fungsi probabilitas :

$$f(x) = P(X=x) = \frac{\binom{a}{x} \binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\text{Mean } (x) = \mu = n \cdot \frac{a}{N}$$

$$\text{Var } (x) = \sigma^2 = n \cdot \frac{a}{N} \cdot \frac{b}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

$$b = N - a$$

Contoh :

1) Dalam sebuah kotak ada 10 bola Merah, 40 bola Hijau. Diambil 3 bola secara random tanpa pengembalian.

Misalkan : x = banyak bola Merah yang terambil

$$\bullet P(x=0) = \frac{\binom{10}{0} \binom{40}{3}}{\binom{50}{3}} = 0,504$$

$$\bullet P(x=1) = \frac{\binom{10}{1} \binom{40}{2}}{\binom{50}{3}} = 0,398$$

$$\bullet P(x=2) = \frac{\binom{10}{2} \binom{40}{1}}{\binom{50}{3}} = 0,092$$

$$\bullet P(x=3) = \frac{\binom{10}{3} \binom{40}{0}}{\binom{50}{3}} = 0,006$$

$$P(0 \leq x \leq 3) = 1,0$$

Mean x :

$$\mu = \sum x \cdot f(x)$$

$$= 0 \cdot (0,504) + 1 \cdot (0,398) + 2 \cdot (0,092) + 3 \cdot (0,006) = 0,6 \text{ atau}$$

$$\mu = n \cdot \frac{a}{N} = 3 \cdot \frac{10}{50} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) : \sigma^2 &= E(x^2) - (E(x))^2 \\ &= [0^2 \cdot (0,504) + 1^2 \cdot (0,398) + 2^2 \cdot (0,092) + 3^2 \cdot (0,006)] - (0,6)^2 \\ &= 0,46 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= n \cdot \frac{a}{N} \cdot \frac{b}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} \\ &= 3 \cdot \frac{10}{50} \cdot \frac{40}{50} \cdot \frac{50-3}{50-1} \\ &= \frac{12}{25} \cdot \frac{47}{49} = \frac{564}{1225} = 0,46 \end{aligned}$$

4) DISTRIBUSI POISSON → Tabel III

Distribusi Binomial → untuk $n < 30$

Untuk nilai-nilai n yang besar, tapi P sangat kecil mendekati 0, dan $\lambda = n.p \rightarrow$ Distribusi Poisson.

Fungsi probabilitas Distribusi Poisson :

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \quad e = 2,718$$

Mean = λ

Variansi = λ

Tabel II :

$$P(I, \lambda) = P(x \leq i) = \sum_{x=0}^i \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

Contoh :

1) Suatu proses produksi diketahui mempunyai kemungkinan 2% menghasilkan produk yang cacat. Jika 100 produk diperiksa, maka hitung probabilitas :

a) 2 produk yang cacat

b) lebih dari 2 produk yang cacat.

Jawab :

Binomial, tapi $n = 100$ cukup besar dan $P = 0,02$ cukup dekat dengan 0, maka gunakan distribusi poisson. (Tabel II). Mean = $\lambda = n.p = 2$

a) $P(x=2) = P(x \leq 2) - P(x \leq 1)$

$$= 0,677 - 0,406$$

$$= 0,271$$

b) $P(x > 2) = 1 - P(x \leq 2)$

$$= 1 - 0,677$$

$$= 0,323$$

BAB VI

DISTRIBUSI NORMAL & SAMPEL RANDOM

A. DISTRIBUSI NORMAL

Definisi :

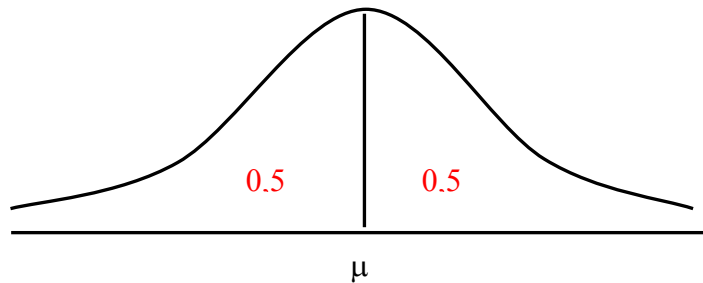
Suatu variabel random kontinu x dikatakan berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 . Jika x mempunyai fungsi distribusi probabilitas :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Notasi :

$$N(\mu, \sigma^2)$$

Grafik kurva normal :

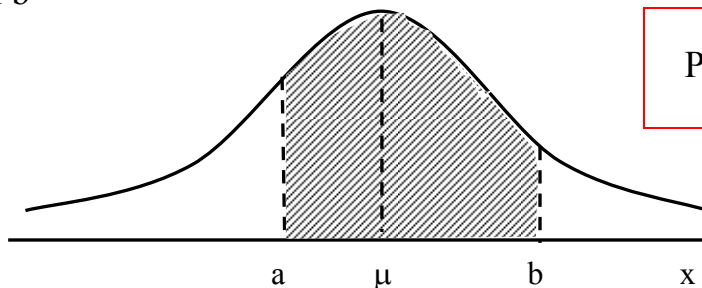


$$P(x \leq \mu) = 0,5$$

$$P(x \geq \mu) = 0,5$$

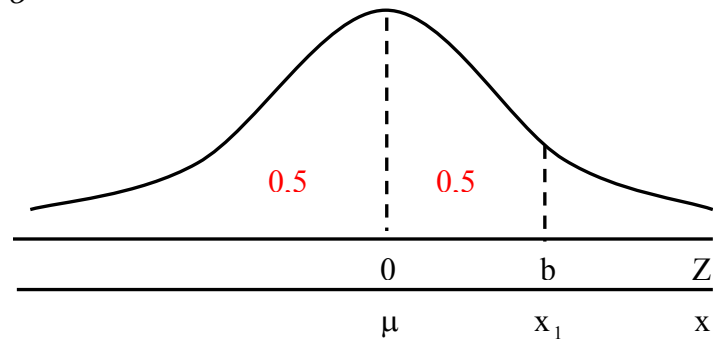
$$\text{Luas kurva normal : } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Luas kurva normal antara $x=a$ & $x=b$ = probabilitas x terletak antara a dan b



$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow N(0,1) = \text{Distribusi Normal Standar}$$

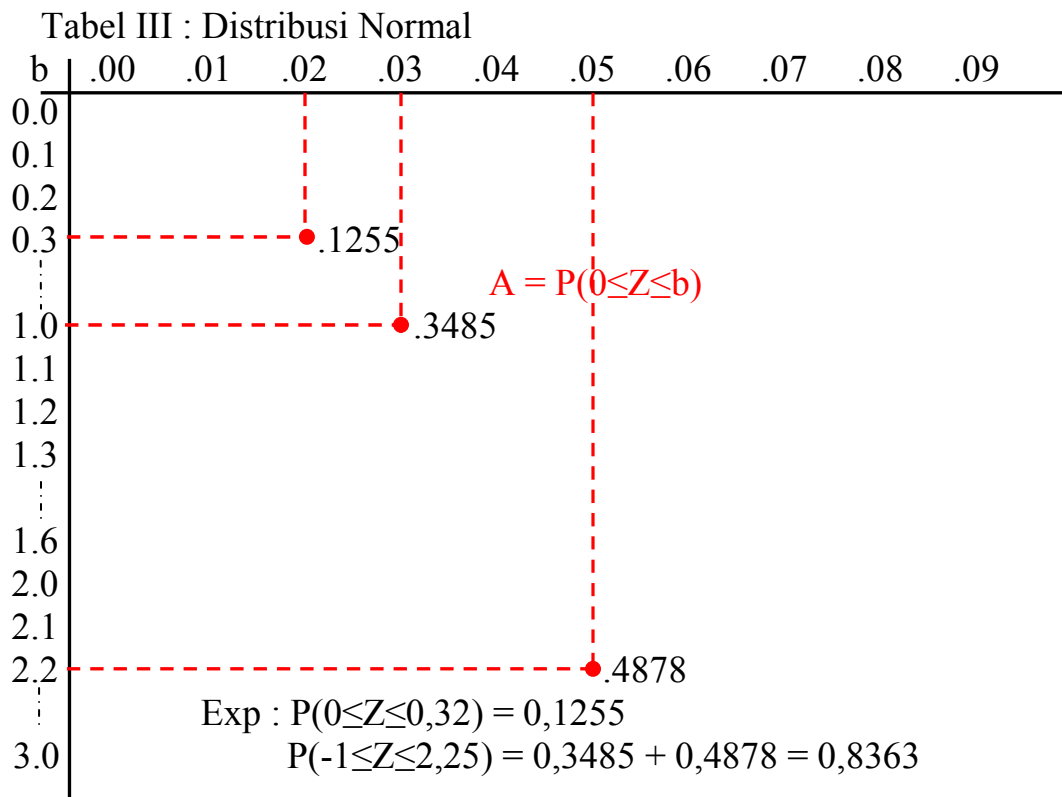


$Z > 0$ jika $x > \mu$

$Z < 0$ jika $x < \mu$

Simetri : $P(0 \leq Z \leq b) = P(-b \leq Z \leq 0)$

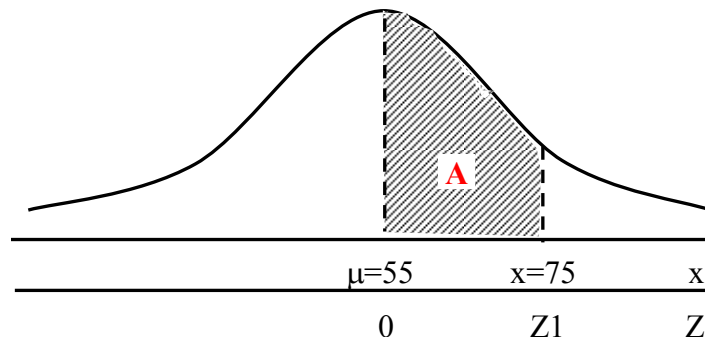
$$P(\mu \leq x \leq x_1) = P\left(\frac{\mu - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right) \\ = P(0 \leq Z \leq b)$$



Contoh :

1. Diketahui data berdistribusi normal dengan mean $\mu = 55$ dan deviasi standar = 15

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(55 \leq x \leq 75) &= P(0 \leq Z \leq \frac{75-55}{15}) \\
 &= P(0 \leq Z \leq \frac{20}{15}) \\
 &= P(0 \leq Z \leq 1,33) \\
 &= 0,4082 \quad (\text{Tabel III})
 \end{aligned}$$



$$\text{Atau : } Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{75 - 55}{15} = 1,33$$

$$\text{Tabel III} \rightarrow A = 0,4082$$

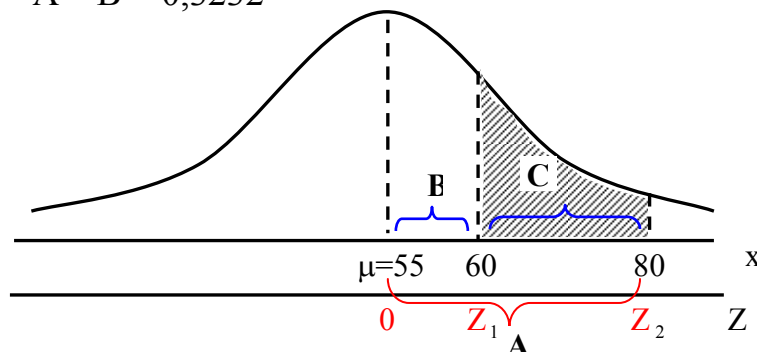
$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(60 \leq x \leq 80) &= P(\frac{60-55}{15} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{80-55}{15}) \\
 &= P(0,33 \leq Z \leq 1,67) \\
 &= P(0 \leq Z \leq 1,67) - P(0 \leq Z \leq 0,33) \\
 &= 0,4525 - 0,1293 = 0,3232
 \end{aligned}$$

$$\text{Atau } C = A - B$$

$$Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 55}{15} = 0,33 \rightarrow B = 0,1293$$

$$Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 55}{15} = 1,67 \rightarrow A = 0,4525$$

$$C = A - B = 0,3232$$



$$c) P(40 \leq x \leq 60) = A + B$$

$$= P\left(\frac{40-55}{15} \leq Z \leq \frac{60-55}{15}\right)$$

$$= P(-1,00 \leq Z \leq 0,33)$$

$$= P(-1,00 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0,33)$$

$$= 0,3412 + 0,1293$$

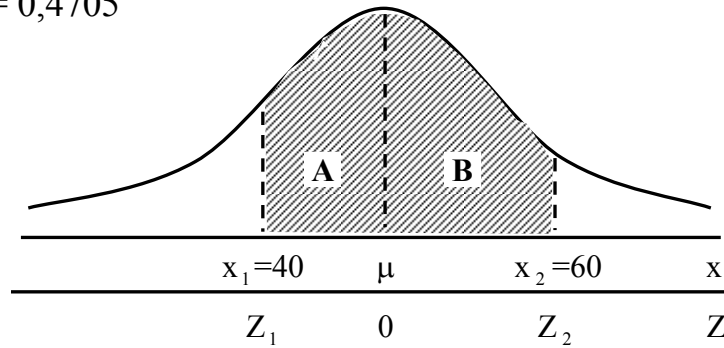
$$= 0,4705$$

$$\text{Atau : } Z_1 = \frac{40-55}{15} = -1,00$$

$$\rightarrow A = 0,3412$$

$$Z_2 = \frac{60-55}{15} = 0,33$$

$$\rightarrow B = 0,1293$$

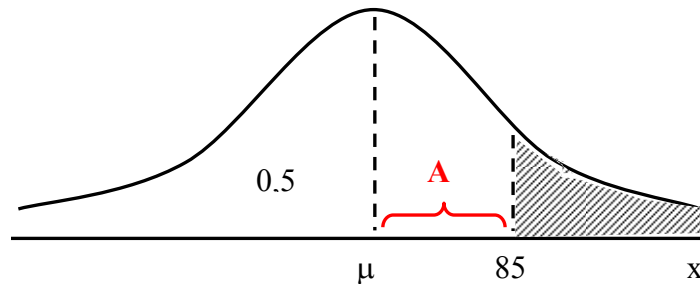


$$d) P(x \leq 40) = 0,5 - A$$

$$= 0,5 - 0,3412$$

$$= 0,1588$$

$$e) P(x \geq 85)$$



$$P(\mu \leq x \leq 85) = P(0 \leq Z \leq \frac{85-55}{15})$$

$$A = P(0 \leq Z \leq 2,00)$$

$$P(x \geq 85) = 0,5 - A$$

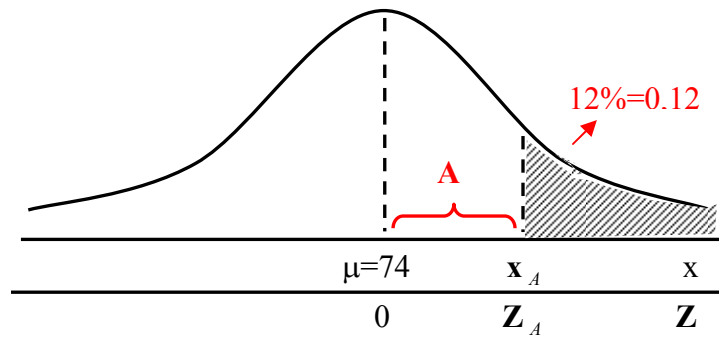
$$= 0,5 - 0,4772$$

$$= 0,0288$$

$$\begin{aligned} f) P(x \leq 85) &= 0,5 + A \\ &= 0,5 + 0,4772 = 0,9772 \end{aligned}$$

- 2) Diketahui rata-rata hasil ujian adalah 74 dengan simpangan baku 7. Jika nilai-nilai peserta ujian berdistribusi normal dan 12% peserta nilai tertinggi mendapat nilai A, berapa batas nilai A yang terendah ?

Jawab :

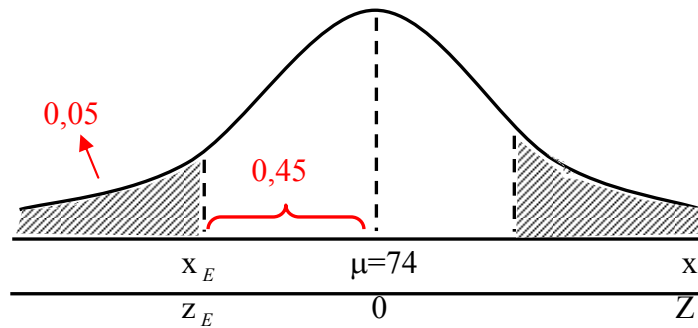


$$\begin{aligned} A &= P(\mu \leq x \leq x_A) = 0,5 - 0,12 \\ &= P((\mu \leq z \leq z_A) = 0,38 \rightarrow Z = 1,175 \end{aligned}$$

$$z_A = \frac{x_A - \mu}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} x_A &= z_A \cdot \sigma + \mu \\ &= (1,175) \cdot 7 + 74 = 82,225 \end{aligned}$$

Jika 5% peserta terendah mendapat nilai E, berapa batas atas nilai E ?



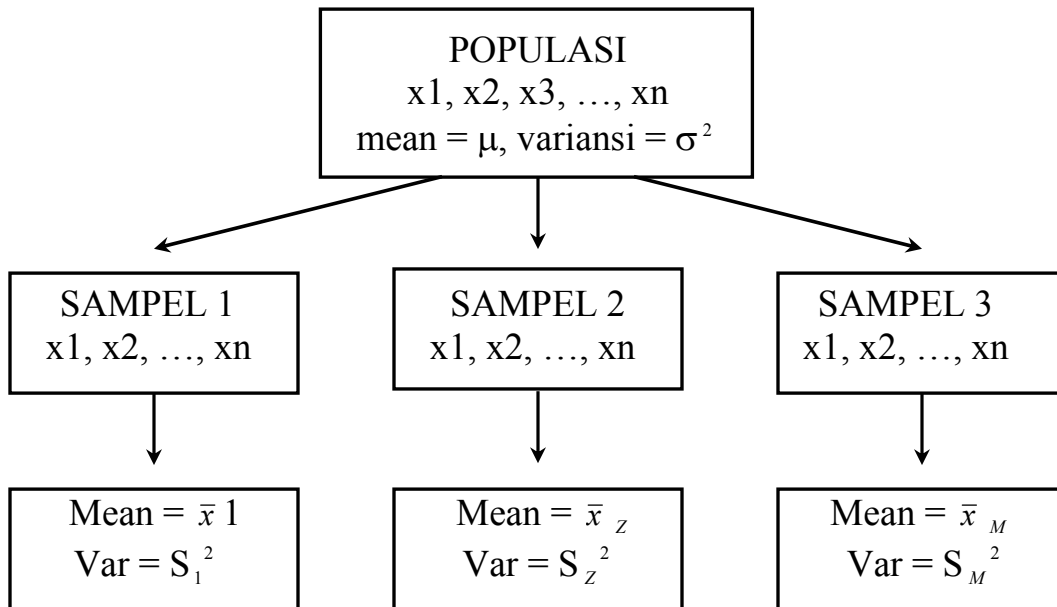
$$\begin{aligned} P(x_E \leq x \leq 0) &= 0,45 \\ P(Z_E \leq Z \leq 0) &= Z_E = -1,645 \rightarrow (x < \mu) \\ Z_E &= \frac{x_E - \mu}{\sigma} \\ x_E &= Z_E \cdot \sigma + \mu \\ &= (-1,645) \cdot 7 + 74 = 62,485 \end{aligned}$$

B. SAMPEL RANDOM & DISTRIBUSI SAMPLING

Definisi :

Sampel Random adalah sampel yang diambil dari suatu populasi dan tiap elemennya mempunyai peluang yang sama untuk terambil.

Distribusi Sampling :



Sifat Distribusi Sampling :

1. Jika sampel random dengan n elemen diambil dari suatu populasi dengan mean μ dan variansi σ^2 , maka distribusi sampling harga mean mempunyai mean $= \mu_{\bar{x}}$ dan variansi $= \sigma_{\bar{x}}^2$
2. Jika populasinya berdistribusi normal, maka distribusi sampling harga mean berdistribusi normal juga
3. Jika sampel-sampel random diambil dari suatu populasi yang berdistribusi sembarang dengan mean μ dan variansi σ^2 , maka untuk $n > 30$:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1) \rightarrow \text{Teorema Limit Pusat}$$

Sampel Random :

1. Dengan Pengembalian :

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

dan

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

atau

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. Tanpa Pengembalian :

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \quad \text{dan} \quad \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Jika N sangat besar relative terhadap n, (N tidak disebutkan), maka :

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{atau} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Dalam Distribusi Sampling :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \sim N(0,1)$$

Contoh :

1) Suatu sampel random dengan 60 mahasiswa diambil dari suatu populasi dengan N orang mahasiswa yang mempunyai IQ rata-rata (mean = 120) dan variansi = 280. (sampel diambil tanpa pengembalian)

c) Jika N = 400, hitung :

(i) $P(110 \leq \bar{X} \leq 125)$

(ii) $P(\bar{X} \geq 130)$

d) Jika N sangat besar, hitung : $P(110 \leq \bar{X} \leq 125)$

Jawab :

Diketahui : $\mu = 120$ $\sigma^2 = 280$

a) Jika N = 400 :

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 120$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{280}{60} \cdot \frac{400-60}{400-1} = 3,977$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{3,977} = 1,995 \approx 2$$

$$\Rightarrow P(110 \leq \bar{X} \leq 125)$$

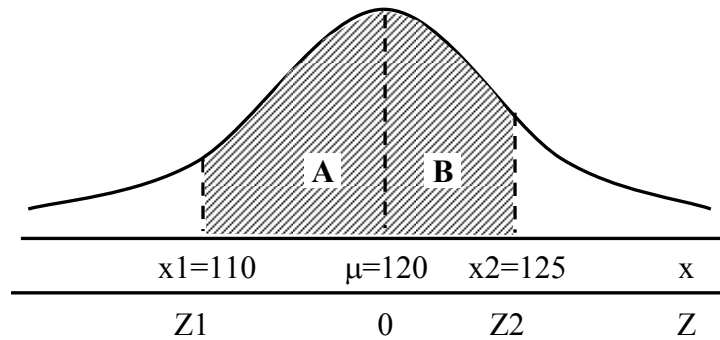
$$= P\left(\frac{110 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{125 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{110-120}{2} \leq Z \leq \frac{125-120}{2}\right)$$

$$= P(-5,00 \leq Z \leq 2,50)$$

$$= 0,5 + 0,4938$$

$$= 0,9938$$



$$\rightarrow P(\bar{X} \geq 130)$$

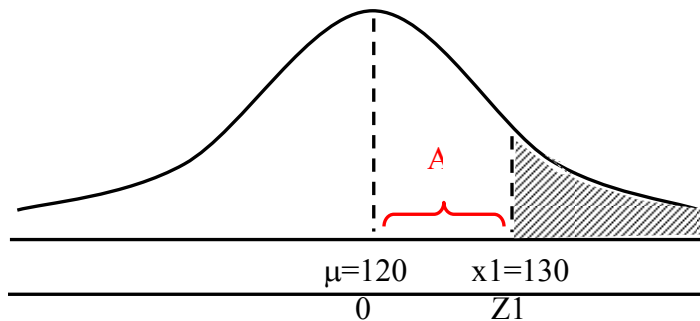
$$\rightarrow P(120 \leq \bar{X} \leq 130)$$

$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{130-120}{2}\right)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 5,00)$$

$$A = 0,5$$

$$\rightarrow P(\bar{X} \geq 130) = 0,5 - 0,5 = 0$$



b) Jika N sangat besar (relative terhadap $n = 60$)

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 120$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{280}{60} = 4,667$$

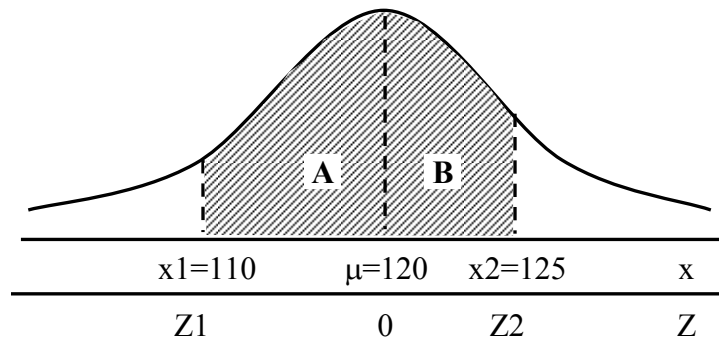
$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{4,667} = 2,16$$

$$P(110 \leq \bar{X} \leq 125) = P\left(\frac{110-120}{2,16} \leq Z \leq \frac{125-120}{2,16}\right)$$

$$= P(-4,63 \leq Z \leq 2,31)$$

$$= 0,5 + 0,4896$$

$$= 0,9896$$



- 2) Suatu sampel dengan 40 elemen diambil dari suatu populasi dengan mean = 41,4 dan variansi = 84,64. Hitung probabilitas bahwa mean sampel terletak antara 40 dan 45.

Jawab :

Diketahui : $\mu = 41,4$, $\sigma^2 = 84,64$, $n = 40$

N tidak disebutkan (anggap bahwa N besar sekali)

Distribusi sampling harga mean :

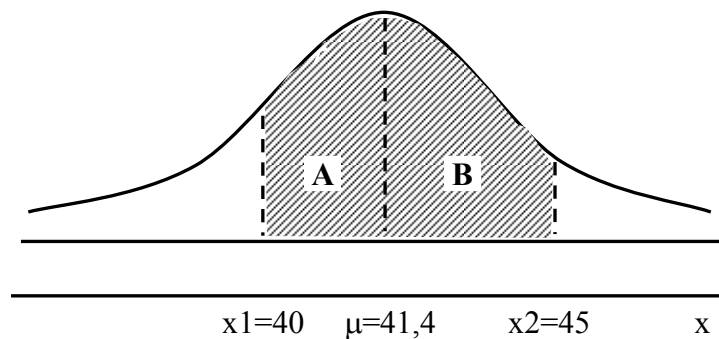
$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 41,4 \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{84,64}{40} = 2,116 \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{2,116} = 1,45$$

$$P(40 \leq \bar{x} \leq 45) = P\left(\frac{40 - 41,4}{1,45} \leq Z \leq \frac{45 - 41,4}{1,45}\right)$$

$$= P(-0,97 \leq Z \leq 2,48)$$

$$= 0,3340 + 0,4934$$

$$= 0,8274$$

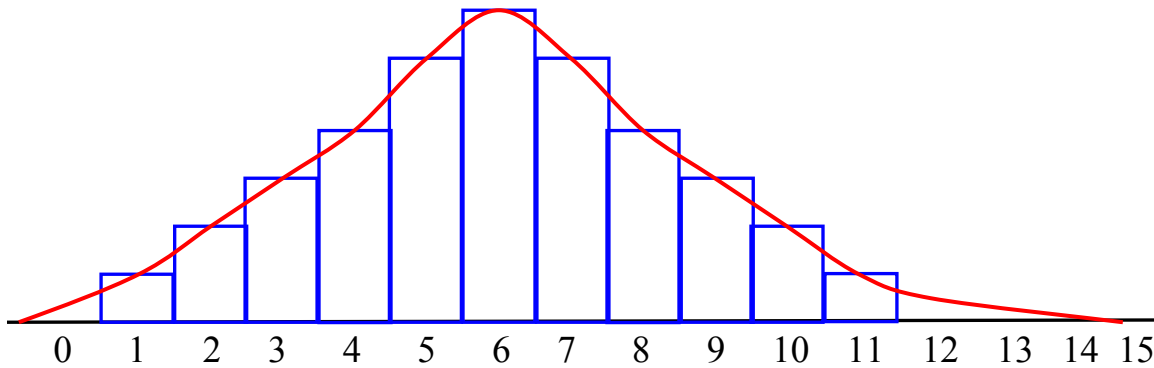


C. PENDEKATAN NORMAL UNTUK BINOMIAL

Distribusi Binomial :

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x} \quad n < 30$$

Exp : Pendekatan normal untuk binomial dengan $n = 15$, $p = 0,4$



Menurut Teorema Limit Pusat :

Jika x suatu variable random binomial dengan mean $\mu = np$ dan variansi $\sigma^2 = n.p(1-p)$ Jika n cukup besar ($n > 30$) dan p tidak terlalu dekat dengan 0 atau 1, maka :

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{n.p(1-p)}} \sim N(0,1)$$

$$P[a \leq x \leq b] = P\left[\frac{(a - 0,5) - n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}} \leq Z \leq \frac{(b + 0,5) - n.p}{\sqrt{n.p(1-p)}} \right]$$

Contoh :

- 1) Suatu pabrik/ perusahaan pembuat CD menghasilkan 10% CD yang cacat/ rusak. Jika 100 CD dipilih secara random, berapa probabilitas terdapat :

- 8 CD yang rusak
- Paling sedikit 12 CD yang rusak
- Paling banyak 5 CD yang rusak

Jawab :

x = banyak CD yang rusak

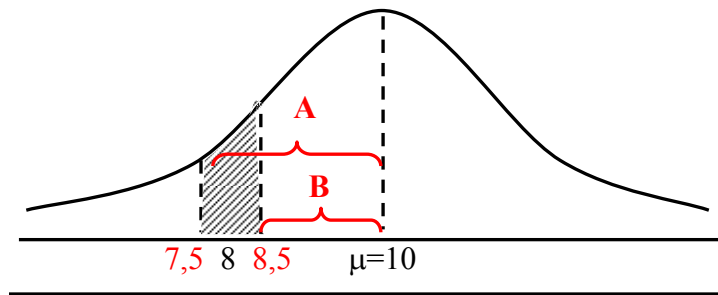
$x \sim \text{Bin}(100; 0,1)$ $n = 100$, $p = 0,1$

$\mu = n.p = 100.(0,1) = 10$

$\sigma^2 = n.p.(1-p) = 100.(0,1).(0,9) = 9$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{9} = 3$$

a) $P(x=8)$ = Luas kurva normal antara $x_1 = 7,5$ dan $x_2 = 8,5$



$$Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{7,5 - 10}{3} = -0,83$$

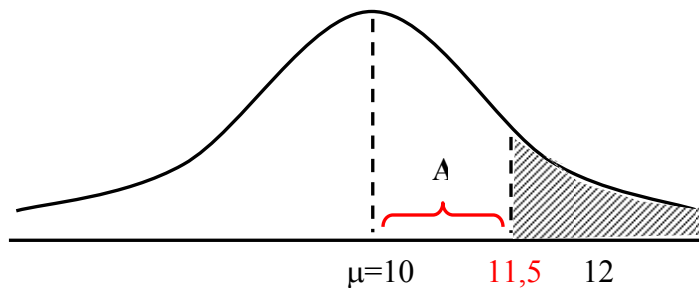
$$\rightarrow A = 0,2967$$

$$Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{8,5 - 10}{3} = -0,50$$

$$\rightarrow B = 0,1915$$

$$\begin{aligned} P(x=8) &= A - B \\ &= 0,2967 - 0,1915 \\ &= 0,1052 \end{aligned}$$

b) $P(x \geq 12)$ = Luas kurva normal dari $x = 11,5$ ke kanan

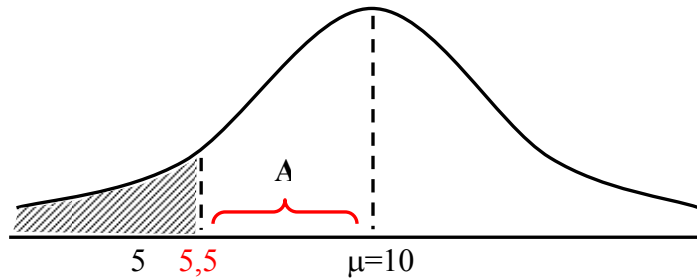


$$Z = \frac{11,5 - 10}{3} = \frac{1,5}{3} = 0,50$$

$$\rightarrow A = 0,1915$$

$$P(x \geq 12) = 0,5 - 0,1915 = 0,3085$$

c) $P(x=5)$ = Luas kurva normal dari $x = 5,5$ ke kiri



$$Z = \frac{5,5 - 10}{3} = -1,50$$

$$\rightarrow A = 0,4332$$

$$P(x \leq 5) = 0,5 - 0,4332 = 0,0668$$

2) Dalam ujian pilihan ganda, tersedia 200 pertanyaan dengan 4 alternatif jawaban dan hanya 1 jawaban yang benar. Jika seseorang memilih jawaban secara random, berapa peluang dia lulus ujian (syarat lulus : benar paling sedikit 60)

Jawab :

x = banyak jawaban yang benar

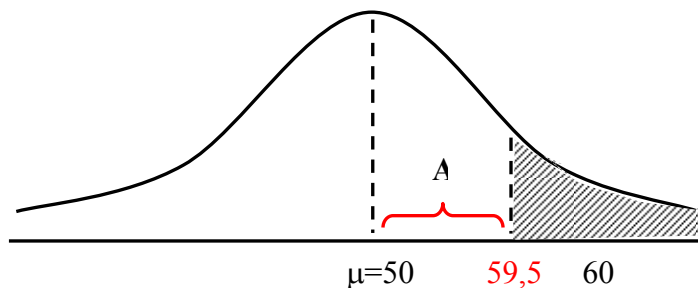
$$P = 0,25 = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - p = 0,75$$

$$x \sim \text{Bin}(200; 0,25)$$

$$\mu = n.p(1-p) = 200(0,25).(0,75) = 37,5$$

$$\rightarrow \sigma = 6,13$$

$P(x \geq 60)$ = Luas kurva normal dari $x = 59,5$ ke kanan



$$Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{59,5 - 50}{6,13} = 1,55$$

$$\rightarrow A = 0,4394$$

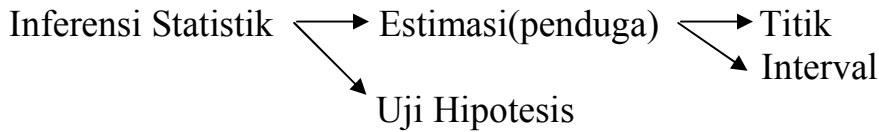
$$P(x \geq 60) = 0,5 - 0,4394$$

$$= 0,0606$$

$$= 6,06 \%$$

BAB VII

INFERENSI STATISTIK



A) ESTIMASI (PENDUGA)

1. Estimasi Titik

- Statistik adalah kuantitas yang dihitung dari observasi sampel
- Parameter adalah setiap karakteristik distribusi populasi
- Estimasi titik adalah suatu statistik yang digunakan sebagai harga estimasi suatu parameter.

Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n suatu sampel random dari populasi dengan mean μ dan variansi σ^2 .

- Estimasi titik untuk parameter μ adalah mean sampel:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

- Estimasi titik untuk parameter σ^2 adalah variansi sampel:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

- Dalam eksperimen Binomial dengan trial, x = banyak “sukses” dalam n trial dan P = probabilitas “sukses”, maka estimasi titik untuk P adalah :

$$\bar{P} = \frac{x}{n}$$

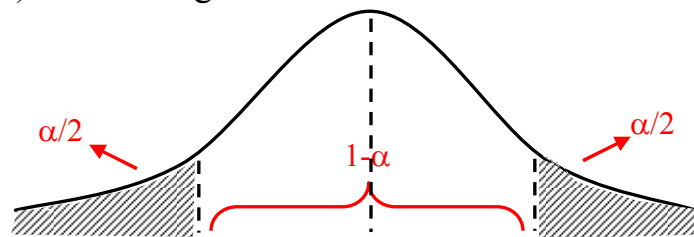
2. Estimasi Interval

Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n adalah sampel random dari suatu populasi dengan θ adalah parameter yang tidak diketahui harganya. Jika :

$$P(B \leq \theta \leq A) = 1 - \alpha$$

maka :

- Interval $[B, A]$ disebut interval konfidensi (selang kepercayaan) $(1 - \alpha)$ untuk parameter θ
- $(1 - \alpha)$ disebut tingkat konfidensi



B) UJI HIPOTESIS

- Hipotesis adalah pernyataan tentang karakteristik suatu populasi
- Uji Hipotesis : H_0 Vs H_1
 - H_0 = hipotesis nol = pernyataan awal
 - H_1 = hipotesis alternatif = pernyataan yang akan dibuktikan
- Kesimpulan : H_0 diterima atau H_0 ditolak
- Ada 2 tipe kesalahan :
 - Kesalahan tipe I : Menolak H_0 padahal H_0 benar
 - Kesalahan tipe II : Menerima H_0 padahal H_0 salah

INFERENSI STATISTIK UNTUK POPULASI SEMBARANG (SAMPEL BESAR/ $n \geq 30$)

A. ESTIMASI

1. Estimasi Interval Mean suatu populasi

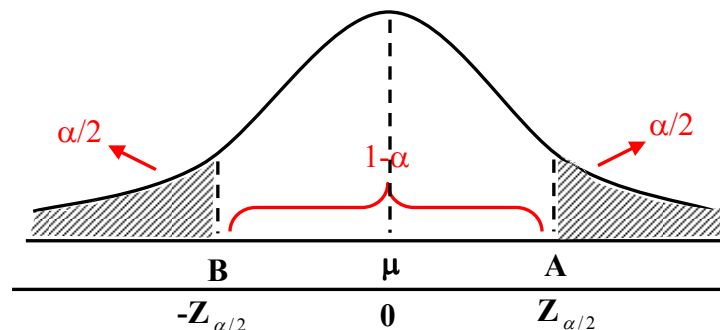
Misalkan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ suatu sampel random dan suatu populasi dengan μ yang tidak diketahui dan variansi σ^2 . Jika \bar{x} adalah mean sampel itu, maka $\mu_{\bar{x}} = \mu$ dan $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, maka menurut teorema

Limit pusat :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



Maka Interval konfidensi $(1 - \alpha)$ untuk μ adalah :

$$\left[\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

atau $B \leq \mu \leq A$ dengan $B = \bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $A = \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Jika variansi populasi (σ^2) tidak diketahui, maka Interval konfidensi $(1 - \alpha)$ untuk μ adalah :

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

dengan S = Deviasi standar sampel

→ Tingkat Konfidensi :

$$(1 - \alpha) = 90\% \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05$$

$$P(0 \leq Z \leq Z_{\alpha/2}) = 0,45 \rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,05} = 1,64$$

$$(1 - \alpha) = 95\% \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025$$

$$P(0 \leq Z \leq Z_{\alpha/2}) = 0,475 \rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$$

$$(1 - \alpha) = 99\% \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005$$

$$P(0 \leq Z \leq Z_{\alpha/2}) = 0,495 \rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0,005} = 2,57$$

Contoh :

- 1) Untuk mengestimasi rata-rata lama studi mahasiswa suatu universitas, diambil sampel random 200 mahasiswa yang baru wisuda, diketahui rata-rata lama studinya 5,6 tahun dan deviasi standar 2,3 tahun. Tentukan interval konfidensi 95% untuk μ (semua mahasiswa) !

Jawab :

Diketahui :

$$\bar{x} = 5,6 \quad S = 2,3 \quad n = 200$$

$$1 - \alpha = 95\% \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$$

Interval konfidensi 95% untuk μ :

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$5,6 - 1,96 \cdot \frac{2,3}{\sqrt{200}} \leq \mu \leq 5,6 + 1,96 \cdot \frac{2,3}{\sqrt{200}}$$

$$5,6 - 0,32 \leq \mu \leq 5,6 + 0,32$$

$$5,28 \leq \mu \leq 5,92$$

- 2) Suatu sampel random dengan 150 keluarga di daerah A menunjukkan rata-rata pengeluaran perbulannya adalah Rp. 950.000,- dan deviasi standar Rp. 250.000,-. Interval konfidensi 99% untuk μ (semua keluarga) adalah :

Diket :

$$\bar{x} = 950.000 \quad S = 250.000 \quad n = 150$$

$$1 - \alpha = 99\% \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow Z_{\alpha/2} = 2,57$$

Interval konfidensi 99% untuk μ :

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$950.000 - 2,57 \cdot \frac{250.000}{\sqrt{150}} \leq \mu \leq 950.000 + 2,57 \cdot \frac{250.000}{\sqrt{150}}$$

$$950.000 - 52.460 \leq \mu \leq 950.000 + 52.460$$

$$897.540 \leq \mu \leq 1.002.460$$

Menentukan Ukuran Sampel

Jika kesalahan estimasi: $\mu - \bar{x} \leq D$, interval konfidensi $1-\alpha$ untuk μ :

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu - \bar{x} \leq Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu - \bar{x} \leq D = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \left[\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{D} \right]$$

maka ukuran sampel yang harus diambil :

$$n = \left[\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{D} \right]^2$$

Contoh :

- 1) Pimpinan perusahaan alat elektronik ingin mengestimasi tahan hidup alat elektronik hasil produksinya, dia ingin hasil estimasinya tidak boleh salah lebih dari 30 jam, dengan tingkat konfidensi 95%. Berapa ukuran sampel yang harus dia gunakan ? Anggap bahwa deviasi standar populasinya 250 jam.

Jawab :

$$\text{Diket : } \mu - \bar{x} \leq 30 \rightarrow D = 30$$

$$\sigma = 250 \quad 1-\alpha = 95\% \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$n = \left[\frac{(1,96) \cdot 250}{30} \right]^2 = 266,78$$

Jadi agar kesalahan estimasi $(\mu - \bar{x}) \leq 30$ jam, maka ukuran sampel yang digunakan adalah : $n \geq 267$

2. Estimasi Interval Untuk Proporsi Suatu Populasi

Jika x adalah variable random binomial (n,p) maka interval konfidensi $(1-\alpha)$ untuk p adalah :

$$\frac{x}{n} - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} \leq P \leq \frac{x}{n} + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}$$

$$\text{Ukuran sampel : } n = \frac{1}{4} \left[\frac{Z_{\alpha/2}}{D} \right]^2$$

Contoh :

- 1) Jika 61 dari 90 petani (yang merupakan sampel random dari petani di suatu daerah) adalah buruh tani, maka hitunglah interval konfidensi 90% untuk buruh tani di antara semua petani di daerah itu !

Jawab :

Diket : $n = 90$, $x = 61$

$1-\alpha = 90\% \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,64$

Interval konfidensi 90% untuk p adalah :

$$\frac{61}{90} - 1,64 \sqrt{\frac{\frac{61}{90}(1-\frac{61}{90})}{90}} \leq p \leq \frac{61}{90} + 1,64 \sqrt{\frac{\frac{61}{90}(1-\frac{61}{90})}{90}}$$

$$0,65 \leq p \leq 0,71$$

- 2) Kita ingin mengestimasi proporsi keluarga di DIY yang masih hidup di bawah garis kemiskinan. Kesalahan estimasi tidak boleh lebih besar dari 0,03 dengan tingkat konfidensi 95%, berapa ukuran sampel yang diperlukan ?

Jawab :

$$n = \frac{1}{4} \left[\frac{Z_{\alpha/2}}{D} \right]^2 \quad 1-\alpha = 95\% \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$D = 0,03$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1,96}{0,03} \right]^2 \approx 1067$$

B. UJI HIPOTESIS

1. Uji Hipotesis Untuk Mean Populasi

Langkah-langkah dalam Uji Hipotesis :

a) Hipotesis, ada 3 kasus :

$$(1) H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$(2) H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu > \mu_0$$

$$(3) H_0: \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu < \mu_0$$

b) Tingkat signifikansi : α

c) Statistik Penguji :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad \text{atau} \quad Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \quad \text{jika } \sigma \text{ tidak diketahui}$$

d) Daerah Penolakan/ Daerah Kritik

$$(1) H_0 \text{ ditolak jika } Z > Z_{\alpha/2} \text{ atau } Z < -Z_{\alpha/2}$$

$$(2) H_0 \text{ ditolak jika } Z > Z_{\alpha}$$

$$(3) H_0 \text{ ditolak jika } Z > -Z_{\alpha}$$

e) Hitungan Z

f) Kesimpulan.

Contoh :

1) Ujian satistika telah diadakan beberapa tahun dengan nilai rata-rata 60 dan deviasi standar 8. Sekelompok mahasiswa yang terdiri dari 50 mahasiswa diberi pelajaran dengan metode baru, diperoleh hasil ujian dengan nilai rata-rata 70. Apakah cukup alasan untuk mengatakan bahwa metode baru dapat menaikkan rata-rata hasil ujian dengan tingkat sign $\alpha = 1\%$?

Jawab :

$$\text{Diket : } \mu_0 = 60 \quad \sigma = 8 \quad \bar{x} = 70 \quad n = 50 \quad \alpha = 1\%$$

a) Hipotesis :

$$(2) H_0: \mu \leq 60 \quad \text{Vs} \quad H_1: \mu > 60$$

b) Tingkat sign $\alpha = 1\% = 0,01$

c) Statistik Penguji :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

d) Daerah Penolakan :

$$(2) H_0 \text{ ditolak jika } Z > Z_{\alpha} = Z_{0,01} = 2,33$$

e) Hitungan Z

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{70 - 60}{8 / \sqrt{50}} = 8,84$$

f) Kesimpulan :

Karena $Z = 8,84 > Z_{\alpha} = 2,33$ maka H_0 **ditolak** (H_1 diterima) artinya metode baru dapat meningkatkan rata-rata nilai ujian.

Kesalahan yang mungkin diperbuat : Tipe I (H_0 ditolak padahal mungkin H_0 benar).

- 2) Rata-rata yang diperlukan siswa baru untuk mendaftar di suatu universitas pada waktu yang lalu adalah 20 menit. Suatu cara pendaftaran baru dengan menggunakan computer sedang dicobakan. Bila sampel acak dengan 40 mahasiswa membutuhkan rata-rata waktu mendaftarkan diri 17 menit dengan simpangan baku 9,4. Menggunakan cara baru ini, apa yang dapat anda simpulkan ? ($\alpha = 2\%$)

Jawab :

Diket : $\mu_0 = 20$, $n = 40$, $\bar{x} = 17$, $S = 9,4$ $\alpha = 2\% = 0,02$

a) Hipotesis :

(3) $H_0: \mu \geq 20$ vs $H_1: \mu < 20$

b) Tingkat sign $\alpha = 2\%$

c) Statistik Penguji :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

d) Daerah Penolakan :

(3) H_0 ditolak jika $Z < -Z_{\alpha} = -Z_{0,02} = -2,05$

e) Hitungan Z :

$$Z = \frac{17 - 20}{9,4 / \sqrt{40}} = -2,02$$

f) Kesimpulan :

Karena $Z = -2,02 > -Z_{\alpha} = -2,05$ maka H_0 tidak ditolak (H_0 diterima) artinya cara pendaftaran baru tidak lebih cepat dibandingkan dengan cara yang lama.

Kesalahan yang mungkin diperbuat : Tipe II

- 3) Suatu perusahaan pembuat perlengkapan olah raga membuat tali pancing sintetis yang menurut pembuatnya rata-rata dapat menahan beban 8 kg dengan simpangan baku 0,5 kg. Diambil sampel random 50 tali, diuji dan ternyata rata-rata daya tahannya 7,8 kg. Apakah anda mempercayai pernyataan pembuatnya ? ($\alpha = 0,01$)

Jawab :

$$\bar{x} = 7,8 \quad \mu_0 = 8 \quad \sigma = 0,5 \quad n = 50$$

a) Hipotesis :

$$H_0: \mu = 8 \text{ kg} \quad \text{Vs} \quad \mu \neq 8 \text{ kg}$$

b) Tingkat sign $\alpha = 0,01$

c) Statistik Penguji

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

d) Daerah Penolakan :

$$H_0 \text{ ditolak jika } Z > Z_{\alpha/2} = 2,57 \text{ atau } Z < -Z_{\alpha/2} = -2,57$$

e) Hitungan Z :

$$Z = \frac{7,8 - 8,0}{0,5 / \sqrt{50}} = -2,828$$

f) Kesimpulan :

Karena $Z = -2,828 < -Z_{\alpha/2} = -2,57$ maka H_0 ditolak (H_1 diterima) artinya bahwa rata-rata daya tahan $\neq 8$ kg.

2. Uji Hipotesis Untuk Proporsi

Langkah-langkah :

a) Hipotesis :

$$(1) H_0: P = P_0 \quad \text{Vs} \quad H_1: P \neq P_0$$

$$(2) H_0: P \leq P_0 \quad \text{Vs} \quad H_1: P > P_0$$

$$(3) H_0: P \geq P_0 \quad \text{Vs} \quad H_1: P < P_0$$

b) Tingkat sign α

c) Statistik Penguji :

$$Z = \frac{\frac{x}{n} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1 - P_0)}{n}}}$$

d) Daerah Penolakan :

(1) H_0 ditolak jika $Z > Z_{\alpha/2}$ atau $Z < -Z_{\alpha/2}$

(2) H_0 ditolak jika $Z > Z_{\alpha}$

(3) H_0 ditolak jika $Z < -Z_{\alpha}$

e) Hitung Z

f) Kesimpulan.

Contoh :

1) Dinyatakan bahwa 5% dari karyawan di perusahaan A akan mengundurkan diri setelah 1 tahun kerja. Diambil sampel random 100 karyawan, diperoleh fakta bahwa 3 orang yang mengundurkan diri. Kesimpulan apa yang dapat anda ambil ? ($\alpha = 5\%$)

Jawab :

Diket : $P_0 = 5\%$, $n = 100$, $x = 3$, $\bar{P} = \frac{3}{100} = 0,03$, $\alpha = 5\%$

a) Hipotesis :

(3) $H_0: P \geq 5\%$ Vs $H_1: P < 5\%$

b) Tingkat sign : $\alpha = 5\%$

c) Statistika Penguji :

$$Z = \frac{\frac{x}{n} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

d) Daerah Kritik :

(3) H_0 ditolak jika $Z < -Z_{\alpha} = -1,64$

e) Hitung Z :

$$Z = \frac{\frac{3}{100} - 0,05}{\sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{100}}} = \frac{-0,02}{0,022} = -0,92$$

f) Kesimpulan :

Karena $Z = -0,92 > -Z_{\alpha} = -1,64$ maka H_0 tidak ditolak (H_0 diterima) artinya proporsi karyawan yang mengundurkan diri tidak kurang dari 5%.

BAB VIII

INFERENSI STATISTIK UNTUK POPULASI NORMAL (SAMPEL KECIL & BESAR)

A. ESTIMASI

1. Estimasi Interval untuk Mean

Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n adalah sampel random dari populasi yang berdistribusi normal dengan mean $= \mu$ dan var $= \sigma^2$, keduanya tidak diketahui, maka :

- Interval konfidensi $(1 - \alpha)$ untuk μ dengan $n < 30$ adalah :

$$\bar{x} - t_{(n-1; \alpha/2)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{(n-1; \alpha/2)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

NB :

- Jika σ^2 diketahui, maka S diganti dengan σ Dan $t_{(n-1; \alpha/2)}$ diganti $Z_{\alpha/2}$ atau interval konfidensi $(1 - \alpha)$ menjadi :

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Untuk n besar ($n \geq 30$) maka $t_{(n-1; \alpha/2)} = Z_{\alpha/2}$

Contoh :

Data berikut ini menunjukkan waktu (dalam detik) yang dicatat dalam renang gaya bebas 100 m dalam sampel random dengan 10 perenang di DIY:

54,3 50,9 66,5 59,5 62,1
60,9 84,5 66,6 77,8 64,5

Hitung interval konfidensi 90% untuk waktu rata-rata μ renang gaya bebas 100 m semua perenang DIY !

Jawab :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 64,76$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$db = n-1 = 9 \rightarrow t(9; 0,05) = 1,833$$

Interval konfidensi 90% untuk μ adalah :

$$\bar{x} - t_{(9; 0,05)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{(9; 0,05)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$64,76 - (1,833) \cdot \frac{10,096}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 64,76 + (1,833) \cdot \frac{10,096}{\sqrt{10}}$$

$$58,91 \leq \mu \leq 70,61$$

2. Estimasi Interval untuk Variansi

Interval konfidensi $(1 - \alpha)$ untuk σ^2 adalah :

$$\frac{(n-1) \cdot S^2}{X^2_{(k; \alpha/2)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) \cdot S^2}{X^2_{(k; 1-\alpha/2)}} \quad k = n - 1$$

X^2 = distribusi Chi-Kuadrat \rightarrow Tabel V

Contoh :

- 1) Kita ingin mengestimasi variansi IQ suatu populasi pelajar SLTA di suatu daerah dengan menghitung interval konfidensi 90% untuk σ^2 . Kita lakukan tes IQ untuk suatu sampel random 20 orang pelajar dan diperoleh : $S^2 = 214,1$.

$$\alpha = 0,10$$

$$db = k = n-1 = 20 - 1 = 19$$

$$\text{Tabel V} \rightarrow X^2_{(n-1; \alpha/2)} = X^2_{(19; 0,05)} = 30,144$$

$$X^2_{(n-1; 1-\alpha/2)} = X^2_{(19; 0,95)} = 10,117$$

maka interval konfidensi 90% untuk σ^2 Adalah :

$$\frac{19 \cdot (214,1)}{30,144} \leq \sigma^2 \leq \frac{19 \cdot (214,1)}{10,117}$$

$$134,9 \leq \sigma^2 \leq 402,1$$

- 2) (Renang gaya bebas)

$$\alpha = 5\% = 0,05$$

$$k = n-1 = 10 - 1 = 9$$

$$S^2 = 101,929$$

$$\text{Tabel V} \rightarrow X^2_{(9; 0,025)} = 19,0228$$

$$X^2_{(9; 0,975)} = 2,7004$$

Interval konfidensi 95% untuk σ^2 adalah :

$$\frac{9 \cdot (101,929)}{19,0228} \leq \sigma^2 \leq \frac{9 \cdot (101,929)}{2,7004}$$

$$48,224 \leq \sigma^2 \leq 339,71 \quad \text{atau} \quad 6,94 \leq \sigma \leq 18,43$$

B. UJI HIPOTESIS

1. UJI HIPOTESIS UNTUK MEAN POPULASI NORMAL

Langkah-langkah :

a) Hipotesis :

$$(1) H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$(2) H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu > \mu_0$$

$$(3) H_0: \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu < \mu_0$$

b) Tingkat sign α

c) Statistik penguji :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad \text{jika } \sigma \text{ tidak diketahui}$$

atau

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{jika } \sigma \text{ diketahui}$$

d) Daerah Penolakan :

$$(1) H_0 \text{ ditolak jika : } t > t_{(n-1; \alpha/2)} \text{ atau } t < -t_{(n-1; \alpha/2)}$$

$$\text{atau : } Z > Z_{\alpha/2} \text{ atau } Z < -Z_{\alpha/2}$$

$$(2) H_0 \text{ ditolak jika : } t > t_{(n-1; \alpha)} \text{ atau } Z > Z_{\alpha}$$

$$(3) H_0 \text{ ditolak jika : } t < -t_{(n-1; \alpha)}$$

$$\text{atau } Z < -Z_{\alpha}$$

e) Hitungan Z atau t

f) Kesimpulan.

Contoh :

1) Suatu sampel acak, 8 rokok merk A mempunyai rata-rata kadar ter 18,6 mg dan simpangan baku 2,4 mg. Apakah ini sesuai dengan pernyataan pabriknya bahwa rata-rata kadar ter tidak melebihi 17,5 mg ? (gunakan $\alpha = 0,01$ & anggap bahwa kadar ter berdistribusi normal)

Jawab :

$$\text{Diketahui : } n = 8, \quad \bar{x} = 18,6 \quad S = 2,4 \quad \mu_0 = 17,5$$

a) Hipotesis :

$$(2) H_0: \mu \leq 17,5 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu > 17,5$$

b) Tingkat sign $\alpha = 0,01$

c) Statistik penguji

$$\sigma \text{ tidak diketahui} \rightarrow t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

d) Daerah kritik :

$$H_0 \text{ ditolak jika } t > t_{(n-1;\alpha)} = t_{(7;0,01)} = 2,998$$

e) Hitungan t :

$$t = \frac{18,6 - 17,5}{2,4/\sqrt{8}} = 1,296$$

f) Kesimpulan :

Karena $t = 1,296 < t_{(n-1;\alpha)} = 1,998$ maka H_0 tidak ditolak (H_0 diterima) artinya bahwa rata-rata kadar ter tidak melebihi 17,5 mg.

- 2) Suatu sampel random dengan 15 kaleng oli yang bertuliskan “1 liter”, didapat berat rata-ratanya adalah 0,97 liter dengan deviasi standar 0,12. Dengan menggunakan $\alpha = 0,05$, kesimpulan apa yang dapat ditarik ? (anggap bahwa disrtibusi isi kaleng normal)

$$\text{Diket : } n = 15 \quad \bar{x} = 0,97 \quad S = 0,12 \quad \mu_0 = 1,0$$

a) Hipotesis :

$$H_0 : \mu \geq 1,0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < 1,0$$

b) $\alpha = 0,05$

c) Statistik penguji :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}, \sigma \text{ tidak diketahui}$$

d) Daerah kritik :

$$H_0 \text{ ditolak jika } t < -t_{(n-1;\alpha)} = -t_{(14;0,05)} = -1,761$$

e) Hitungan t :

$$t = \frac{0,97 - 1,0}{0,12/\sqrt{15}} = \frac{-0,03}{0,031} = -0,97$$

f) Kesimpulan :

Karena $t = -0,97 > -t_{(n-1;\alpha)} = -t_{(14;0,05)} = -1,761$ maka H_0 tidak ditolak (H_0 diterima) artinya rata-rata isi kaleng tidak kurang dari 1 liter.

2. UJI HIPOTESIS UNTUK VARIANSI POPULASI NORMAL

Langkah-langkah :

a) Hipotesis :

$$(1) H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ vs } H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$(2) H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \text{ vs } H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$(3) H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \text{ vs } H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

b) Tingkat signifikansi α

c) Statistik Penguji

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

d) Daerah Penolakan :

$$(1) H_0 \text{ ditolak jika } X^2 > X^2_{(n-1; \alpha/2)} \text{ atau } X^2 > X^2_{(n-1; 1-\alpha/2)}$$

$$(2) H_0 \text{ ditolak jika } X^2 > X^2_{(n-1; \alpha)}$$

$$(3) H_0 \text{ ditolak jika } X^2 > X^2_{(n-1; 1-\alpha)}$$

e) Hitung X^2

f) Kesimpulan.

Contoh :

- 1) Diketahui deviasi standar tahan hidup baterai adalah 25 jam. Setelah digunakan proses produksi baru, dari sampel random dengan 20 baterai didapat deviasi standarnya 30 jam. Apakah cukup alasan untuk mempercayai bahwa proses produksi baru memperbesar variabilitas tahan hidup hasil produksi ? (Gunakan $\alpha=0,05$ dan anggap bahwa tahan hidup baterai berdistribusi normal)

Jawab :

$$\sigma_0^2 = 25^2, \quad S^2 = 30^2, \quad n = 20$$

$$a) \text{ Hipotesis } H_0: \sigma^2 \leq 25^2 \quad \text{Vs} \quad H_1: \sigma^2 > 25^2$$

$$b) \text{ Tingkat sign } \alpha = 0,05$$

c) Statistik Penguji :

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

d) Daerah Penolakan :

$$H_0 \text{ ditolak : } X^2 > X^2_{(19; 0,05)} = 30,14$$

e) Hitungan :

$$X^2 = \frac{19(30)^2}{(25)^2} = 27,36$$

f) Kesimpulan :

Karena $X^2 = 27,36 < 30,14$ maka H_0 tidak ditolak (H_0 diterima) artinya bahwa proses produksi baru tidak menaikkan variabilitas tahan hidup baterai.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

SOAL-SOAL DISTRIBUSI FREKUENSI

TABEL DISTRIBUSI FREKUENSI TINGGI BADAN :

Kelas	Tinggi	Frekuensi
1	148 - 152	6
2	153 - 157	11
3	158 - 162	14
4	163 - 167	9
5	168 - 172	5
6	173 - 177	3
7	178 - 182	2

N = 50

TABEL DISTRIBUSI FREKUENSI NILAI :

Kelas	Nilai	Frekuensi
1	19,5 - 29,5	7
2	29,5 - 39,5	9
3	39,5 - 49,5	16
4	49,5 - 59,5	21
5	59,5 - 69,5	14
6	69,5 - 79,5	9
7	79,5 - 89,5	4
8	89,5 - 99,5	3
9	99,5 - 109,5	1

Hitunglah :

1. Mean
2. Median
3. Kuartil ke-1
4. Kuratil ke-3
5. Desil ke-8
6. Persentil ke-70
7. Modus
8. Variansi
9. Simpangan Baku
10. Simpangan rata-rata
11. Simpangan Kuartil

PROBABILITAS

A. KAIDAH PENAMBAHAN (RULE OF ADDITION)

1. Dalam suatu permainan kita memilih sebuah kartu dari sebanyak 25 kartu bridge yang ada. Berapakah probabilitasnya akan terpilih satu kartu berwarna HITAM atau kartu KING (raja).
2. Sebuah dadu dilempar 1 kali, berapakah probabilitasnya akan diperoleh keluar ANGKA GENAP atau keluar ANGKA YANG DAPAT DIBAGI 3.
3. Seorang mahasiswa memiliki probabilitas lulus dalam statistik = 0,6, dalam matematika = 0,4, dan lulus kedua matakuliah tersebut 0,24.
Hitunglah : probabilitasnya bahwa mahasiswa tersebut akan lulus dalam statistik atau matematika atau keduanya.
4. Sebuah kelas memiliki sebanyak 120 siswa, dimana 60 diantaranya belajar bahasa Perancis dan Spanyol.
Bila dari kelas tersebut dipilih secara Random, maka berapakah probabilitasnya :
 - a. Dia belajar bahasa Perancis atau Spanyol
 - b. Dia sama sekali tidak belajar bahasa Perancis ataupun Spanyol.

B. KAIDAH PENAMBAHAN UNTUK MUTUALLY EXCLUSIVE

5. Dua buah dadu dilempar satu kali, berapakah probabilitasnya akan keluar
 - a. Jumlah mata dadu 4 atau lebih kecil dari 4
 - b. Jumlah mata dadu 5
 - c. Jumlah mata dadu 7 atau lebih besar dari 7.
6. Seorang pelamar menerima panggilan untuk ujian lisan di 3 perusahaan X dan Y atau Z. Sesuai dengan taksirannya maka pelamar tersebut memiliki probabilitas diterima pada perusahaan X = $\frac{2}{5}$, perusahaan Y = $\frac{3}{10}$, dan perusahaan Z = $\frac{1}{10}$.
Dari data di atas berapakah probabilitasnya :
 - a. Pelamar tersebut tidak akan diterima di salah satu perusahaan

tersebut.

- b. Pelamar tersebut tidak diterima di perusahaan X atau Y
- c. Pelamar tersebut diterima disalah satu perusahaan tersebut.

C. PELUANG BERSYARAT

D. KAJIDAH PERKALIAN UNTUK PERISTIWA YANG DEPENDENT

- 7. Dua buah kartu diambil satu persatu secara random dari sejumlah 52 kartu bridge(kartu yang telah diambil tidak dikembalikan lagi). Hitunglah probabilitasnya dari 2 kali penambilan tersebut, bila pengambilan pertama keluar kartu 1 AS dan pengambilan kedua juga 1 kartu As.
- 8. Dalam sebuah kelas terdapat 20 orang siswa, dimana 5 diantaranya pakai baju PUTIH, 10 siswa memakai baju MERAH, dan 5 lainnya memakai baju BIRU. Jika dipilih secara random 3 orang siswa satu persatu, maka hitunglah probabilitasnya :
 - a. Pertama terpilih memakai baju MERAH
Kedua terpilih memakai baju PUTIH
Ketiga terpilih memakai baju BIRU
 - b. Tiga siswa yang terpilih memakai baju MERAH semua
 - c. Bila telah terilih 3 siswa secara random, maka hitunglah probabilitasnya terdapat 2 siswa memakai baju MERAH dan 1 siswa memakai baju PUTIH.
- 9. Seorang mahasiswa memiliki probabilitas lulus dalam ujian statistik = 0,6. Namun bila dia telah lulus ujian statistik, maka probabilitas lulus dalam ujian matematika = 0,8. Berapakah probabilitasnya dia akan lulus dalam ujian statistik dan matematika.

E. KAJIDAH PERKALIAN UNTK PERISTIWA INDEPENDEN

Peristiwa A dan B dikatakan bersifat independen bila terjadinya peristiwa yang satu (A) tidak akan mempengaruhi peristiwa-peristiwa lainnya (B). Jadi dapat berarti pula bahwa terjadi atau tidaknya

peristiwa A, maka probabilitasnya peristiwa B akan sama saja, sehingga $P(A|B) = P(B)$. Jadi $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

SOAL 10 :

Seorang siswa mengambil 3 mata kuliah tingkat sarjana yaitu matakuliah A, B dan C. Probabilitas siswa tersebut lulus matakuliah A = 0,5, matakuliah B = 0,6 dan C = 0,75.

Hitunglah :

- Siswa tersebut lulus dalam matakuliah diatas
- Siswa tersebut lulus dalam matakuliah A dan B
- Siswa tersebut lulus sedikitnya 2 matakuliah.

F. THEOREMA BAYES

SOAL 11 :

Perusahaan mainan anak-anak di Jepang memproduksi sejenis mainan dari plastik dengan menggunakan 3 mesin yaitu mesin A, B dan C. Dari seluruh produksi mainan yang dihasilkan mesin A memproduksi 200 unit, B = 200 unit dan C = 100 unit. Diketahui pula bahwa produksi mainan yang rusak dari mesin A = 5%, B = 10% dan C = 2%. Jika dari total produksi mainan yang berjumlah 500 unit mainan dipilih 1 buah produk secara random, maka hitunglah :

- Probabilitas bahwa produk yang terpilih tersebut **Rusak** $P(X)$
- Probabilitas produk yang terpilih tersebut **Baik** $P(X)$
- Bila produk yang terpilih tersebut ternyata **Rusak**, maka berapakah probabilitasnya diproses oleh **mesin B**.
- Bila produk yang dipilih tersebut ternyata **Baik**, maka berapakah probabilitasnya diproses oleh mesin **A atau C**.

G. TEORI PERMUTASI – KOMBINASI (PROBABILITAS LANJUT)

SOAL 12 :

Bila kita memiliki 3 elemen A, B, C. Berapa jumlah permutasi yang dapat dibentuk?

SOAL 13 :

Hitunglah jumlah permutasi yang dapat dibentuk dari 2 huruf yang diambil dari sebanyak 4 huruf A, B, C, D.

SOAL 14 :

Berapakah kemungkinan jumlah kombinasi yang dapat dibuat bila ada 4 orang A, B, C, D ingin membuat suatu panitia yang terdiri dari 3 orang saja.

SOAL 15 :

Seorang siswa diminta untuk menjawab 8 dari 10 pertanyaan yang diberikan. Hitunglah kombinasi soal yang mungkin dapat dibuatnya dalam ujian tersebut.

SOAL 16 :

5 buah kartu dipilih secara random dari sejumlah kartu bridge (52 buah). Hitunglah probabilitasnya akan diperoleh :

- a. 4 kartu AS dan 1 kartu lainnya
- b. 4 kartu AS dan 1 kartu King (Raja)
- c. 3 kartu berangka 10 dan 2 kartu Jacks
- d. Paling sedikit diperoleh 1 kartu AS.

**MENGHITUNG MEAN, VARIANCE DAN STANDAR DEVIASI
PADA KASUS-KASUS DISTRIBUSI PROBABILITAS
VARIABEL RANDOM**

SOAL 17 :

Sebuah mata uang dilempar sebanyak 3 kali. Berikut distribusi probabilitas keluarnya muka (M)

xi	0	1	2	3
F(xi)	1/8	3/8	3/8	1/8

Hitunglah :

- a. Mean $E(x)$
- b. Variansi (τ^2)
- c. Standar deviasi $\sqrt{\tau^2}$

SOAL 18 :

Data dibawah ini ini menunjukkan jmlah buku ang dipinjam pada perpustakaan UPN Veteran setiap harinya.

Xi(000)	26	30	35	24	20
Prob	0,30	0,20	0,15	0,10	0,25

Hitunglah :

- Rara-rata jumlah buku yang dipinjam tiap harinya
- Variansi

SOAL 19 :

Seorang petani ingin memutuskan apakah dia akan menanam padi atau tidak karena adanya kemarau yang cukup panjang. Bila dia memutuskan akan menanam padi maka akan menghasilkan beras sebanyak 2,5 ton dengan harga jual per kg Rp. 400,- tetapi bila hujan tidak turun maka petani tersebut mengalami kerugian sebesar Rp. 500.000,- karena panennya gagal. Bila probabilitasnya akan turun hujan = 0,40. Jika petani memutuskan menanam padi apakah menguntungkan atau tidak?

SOAL 20 :

Seorang calon pengusaha mempunyai harapan untuk memperoleh keuntungan setiap bulannya Rp. 250.000,-. Probabilitas pengusaha tersebut memperoleh keuntungan = 0,6 serta besarnya keuntungan yang diperoleh Rp. 500.000,-

Berapakah kerugian yang mungkin dideritanya seandainya dia tetap mengharapkan keuntungan setiap bulannya Rp. 250.000,-

DISTRIBUSI BINOMIAL : $C_r^n P^r q^{n-r}$

SOAL 21 :

Andaikan 2 buah dadu dilempar 3 kali.

Hitunglah probabilitasnya akan diperoleh :

- Jumlah mata dadu 10 keluar 2 kali
- Jumlah mata dadu 5 keluar 1 kali
- Jumlah mata dadu 12 keluar paling sedikit 1 kali

SOAL 22 :

Diperoleh informasi bahwa probabilitas mahasiswa memperoleh nilai A=0,30. B=0,40, nilai C=0,60 untuk matakuliah Statistik.

Apabila dipilih secara random 5 mahasiswa, hitunglah probabilitasnya

- 3 diantaranya memperoleh nilai C
- 2 diantaranya memperoleh nilai A dan B
- Semua memperoleh nilai B

DISTRIBUSI NORMAL :

$$Z = \frac{x_i - \mu}{\tau}$$

μ : nilai rata-rata populasi

x_i : nilai variabel random

τ : standard deviasi populasi

SOAL 23 :

Seorang siswa memperoleh nilai ujian matakuliah A=60, sedangkan nilai rata-rata kelas=65 dan standard deviasi=10.

Pada matakuliah B ia memperoleh nilai ujian=62, sedangkan nilai rata-rata kelas=66 dan standard deviasi=5

Pertanyaan : Pada matakuliah manakah siswa tersebut berada pada posisi yang lebih baik ?

SOAL 24 :

Sebuah pabrik bola lampu setiap bulannya rata-rata memproduksi sebanyak 25.000 unit bola lampu dengan standard deviasi=4000 unit. Bila produksi lampu selama satu periode tertentu dianggap berdistribusi normal, maka hitunglah probabilitas akan diperoleh :

- Tingkat produksi perbulan antara 26.000 – 27.5000
- Tingkat produksi kurang dari 27.000 unit
- Tingkat produksi lebih dari 30.000 unit

SOAL 25 :

Ujian negara statistik pada akhir tahun 1990 diikuti sebanyak 2.000 peserta dengan rata-rata nilai ujian=58 dari variansi=100. Bila distribusi nilai ujian dianggap berdistribusi normal, maka hitunglah probabilitas :

- Peserta yang memperoleh nilai ($X_i \geq 70$)
- Bila nilai ujian untuk lulus=53,5 maka berapa persen yang tidak lulus

- c. Bila terdapat 5% peserta yang memperoleh nilai A, maka berapa nilai minimal (terendah) untuk memperoleh nilai A

PENDEKATAN DISTRIBUSI NORMAL MENJADI DISTRIBUSI BINOMIAL

SOAL 26 :

Bila diketahui bahwa 64% anggota MPR yang dipilih memiliki umur 50 tahun. Jika dari anggota MPR tersebut dipilih 100 orang anggota secara random maka berapakah probabilitasnya :

- Bahwa proporsi dari anggota MPR tersebut $\leq 60\%$ nya berumur 50 tahun
- Bahwa proporsi dari anggota MPR tersebut berkisar antara 70% - 75% nya berumur 50 tahun

SOAL 27 :

Pengawas produksi ban Bridgestone menemukan bahwa rata-rata produksi ban yang cacat mencapai 2% dari total produksi yang ada. Bila dari seluruh produksi tersebut diambil sebanyak 400 ban secara random (acak), maka berapakah probabilitasnya :

- Ban yang cacat $\leq 3\%$ ($X_i \leq 3\%$)
- Ban yang cacat antara 1,5% - 2,5 %

DISTRIBUSI SAMPLING MEAN :

SOAL 28 :

Pabrik alat elektronik SONY memproduksi sejenis adaptor yang memiliki rata-rata umur pemakaian = 800 jam (μ) dengan standar deviasi = 400 jam (S).

Hitunglah probabilitasnya bila dipilih 16 sampel secara random akan memiliki umur rata-rata :

- Kurang dari 775 jam
- Antara 780 jam – 820 jam
- Lebih dari 810 jam

SOAL 29 :

Bila rata-rata IQ dari seluruh mahasiswa baru di UPN = 110 dengan standar deviasi = 10 (IQ dianggap berdistribusi normal)

- Hitunglah probabilitas mahasiswa tersebut memiliki $IQ \geq 112$
- Hitunglah probabilitas dari 36 mahasiswa, rata-rata memiliki $IQ \geq 112$

- c. Hitunglah probabilitas dari 100 mahasiswa, rata-rata memiliki $IQ \geq 112$

ESTIMASI MEAN POPULASI

SOAL 30 :

Taksirlah rata-rata IQ mahasiswa di UPN bila dari sebanyak 100 sampel mahasiswa dipilih secara random memperlihatkan rata-rata IQ = 112 dan variance = 100

- Gunakan derajat kepercayaan 95%
- Gunakan derajat kepercayaan 99%

SOAL 31 :

Dari hasil sampel survey terhadap 900 petani di daerah KLATEN, memperlihatkan bahwa rata-rata pertahun pengeluaran keluarga untuk pakaian Rp. 500.000,- dengan deviasi standar (S) = Rp. 10.000,-

- Hitunglah interval estimasi bila derajat kepercayaan = 95%
- Dengan derajat kepercayaan barapakah supaya diperoleh hasil estimasinya adalah 49.500 – 50.500

TEST HIPOTESA MEAN POPULASI (LARGE SAMPLE ≥ 30)

SOAL 32 :

Pabrik Ban “Dunlop” menyatakan bahwa rata-rata pemakaian ban RADIAL G-800 tahan sampai 50 bulan dengan standar deviasi = 5 bulan. Untuk menguji hipotesa (pernyataan) tersebut maka lembaga konsumen mengambil sebanyak 100 ban G-800 dan setelah diuji ternyata rata-rata pemakaian = 40 bulan.

Pertanyaan :

Ujilah dengan $\alpha = 5\%$, apakah pernyataan pabrik tersebut benar bahwa rata-rata pemakaian (μ) = 50 bulan ?

Apakah saudara mendukung pernyataan pabrik tersebut ?

SOAL 33 :

Soal diatas selesaikan dengan menggunakan 1 sisi pengujian !

**TEST HIPOTESA MEAN POPULASI (SMALL SAMPLE < 30)
DENGAN DISTRIBUSI t**

SOAL 34 :

Pabrik assembling sepeda motor bebek Honda mengatakan bahwa rata-rata penggunaan 1 liter bensin dapat menempuh jarak 100 km untuk tipe motor Kharisma. Untuk menguji pernyataan tersebut, lembaga konsumen mengambil sampel sebanyak 25 sepeda motor. Hasil pengujian menunjukkan bahwa 1 liter dapat menempuh rata-rata 75 km dengan standar deviasi = 10 km.

Pertanyaan :

Ujilah dengan $\alpha = 1\%$, apakah lembaga konsumen akan menerima atau menolak pernyataan pabrik tersebut ?