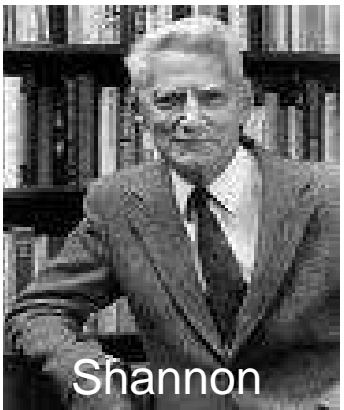
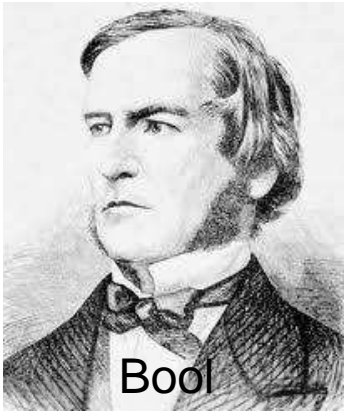


Mata Kuliah :Sistem Digital



Aljabar Boolean

About...

- Didefinisikan sebagai himpunan unsur, himpunan operator, dan sejumlah aksioma yang tidak perlu dibuktikan
- Dikembangkan oleh George Bool (1854) dan dilanjutkan oleh C.E. Shannon (1939)
- Memperkenalkan dua nilai boolean (disebut juga aljabar switch) yang dipakai luas di teknologi elektronika dan komputer

Definisi Aljabar Boolean

Simbol	keterangan	Contoh
=	Relasi ekuivalen yang memenuhi prinsip substitusi	$a=b$
+	Operator OR	$a+b$
.	Operator AND	$a.a$
—	Operator NOOT	\bar{a}

Sifat-Sifat

- Closure pada operasi dot(.) dan plus (+)
- Elemen identitas = $\text{dot}(1)$; $\text{plus}(0)$
- Komutatif terhadap operasi dot dan plus
- Distributif
 - $\text{dot} \rightarrow \text{plus} : a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$
 - $\text{plus} \rightarrow \text{dot} : a+(b.c)=(a+b).(a.c)$
- Untuk setiap unsur x terdapat x' ($x=1;x'=0$)
- Minimal terdapat dua unsur x dan y ($x \neq y$)

Prinsip Dualisme

jika dalam suatu ekspresi dilakukan pertukaran operator AND dengan OR atau sebaliknya, dan diikuti dengan pertukaran nilai 0 dengan 1 atau sebaliknya, maka kedua ekspresi itu benar

$$1 + 0 = 1 ; 0 \cdot 1 = 0$$

$$x + 1 = 1 ; x \cdot 0 = 0$$

Postulat Aljabar Boolean

1. Bersifat Closure
2. $x + 0 = x$; $x \cdot 1 = x$ (*identitas*)
3. $x + y = y + x$; $x \cdot y = y \cdot x$ (*komutatif*)
4. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
 $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ (*distributif*)
5. $x + x' = 1$; $x \cdot x' = 0$ (*inverse*)

Teorema 1 :

$$\mathbf{x + x = x \text{ dan } x \cdot x = x}$$

$$\mathbf{x + x = x}$$

$$x + x = (x + x) \cdot 1 \quad \text{P2}$$

$$= (x + x) \cdot (x + x') \quad \text{P5}$$

$$= x + x \cdot x' \quad \text{P4}$$

$$= x + 0 \quad \text{P5}$$

$$= x \quad \text{P2}$$

$$\mathbf{x \cdot x = x}$$

$$x \cdot x = x \cdot x + 0 \quad \text{P2}$$

$$= (x \cdot x) + (x \cdot x') \quad \text{P5}$$

$$= x \cdot (x + x') \quad \text{P4}$$

$$= x \cdot 1 \quad \text{P5}$$

$$= x \quad \text{P2}$$

Teorema 2 :

$$x + 1 = 1 \text{ dan } x \cdot 0 = 0$$

$$x + 1 = 1$$

$$x + 1 = 1 \cdot (x + 1) \quad \text{P2}$$

$$= (x + x') \cdot (x + 1) \quad \text{P5}$$

$$= x + x' \cdot 1 \quad \text{P4}$$

$$= x + x' \quad \text{P5}$$

$$= 1 \quad \text{P2}$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot 0 = 0 + x \cdot 0 \quad \text{P2}$$

$$= (x \cdot x') + (x \cdot 0) \quad \text{P5}$$

$$= x \cdot (x' + 0) \quad \text{P4}$$

$$= x \cdot x' \quad \text{P5}$$

$$= 0 \quad \text{P2}$$

Teorema 3 :

$$(x')' = x$$

P5 tentang komplemen Unsur;
 x' adalah komplemen x ; dan
 $(x')'$ adalah komplemen dari x' ;
dengan demikian $(x')' = x$



Teorema 4 :

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

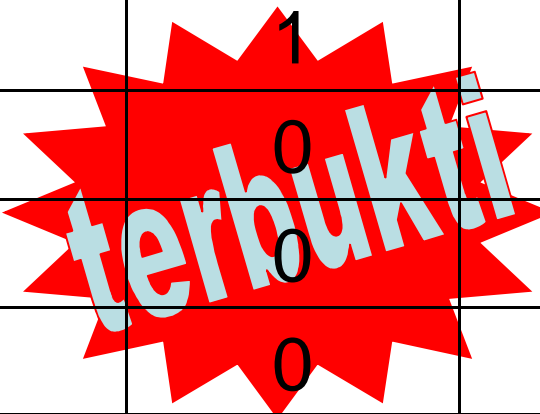
$$x.(y.z)=(x.y)z$$

x	y	z	$x+(y+z)$	$(x+y)+z$	$x.(y.z)$	$(x.y).z$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Teorema 5 :

$$(x+y)' = x'.y' ; (x.y)' = x'+y'$$

x	y	x'	y'	(x+y)'	x'.y'	(x.y)'	x'+y'
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0



Teorema ini dikenal juga dengan
Teorema de Morgan

Teorema 6 :

$$x + x.y = x \text{ dan } x.(x+y) = x$$

$$x + x.y = x$$

$$x + x.y = x.1 + x.y \quad \text{P2}$$

$$= x.(1 + y) \quad \text{P4}$$

$$= x.1 \quad \text{P2}$$

$$= x \quad \text{P2}$$

$$x.(x+y) = x$$

$$x.(x+y) = (x+0).(x+y) \quad \text{P2}$$

$$= x + (0.y) \quad \text{P4}$$

$$= x + 0 \quad \text{P2}$$

$$= x \quad \text{P2}$$

Teorema ini dikenal juga dengan

Teorema Absorpsi

Fungsi Boolean

- Terbentuk dari:
 - gabungan variabel biner
 - operator OR atau AND
- Fungsi boolean mempunyai makna bila bernilai 1
- Nilai fungsi boolean tergantung dari nilai variabel biner dan operator penyusun
- Cara paling cepat mencari nilai fungsi adalah dengan TABEL KEBENARAN

Uji Nyali...!!!

- Carilah nilai x, y, z untuk agar fungsi-fungsi berikut bernilai 1
 - $F1 = xyz'$
 - $F2 = x + y'z$
 - $F3 = xy' + x'y$
 - $F4 = x'y'z + x'yz + xy'$
- Lakukan uji coba dengan menggunakan software EWB dan tulis hasil uji coba pada tabel kebenaran!

$$F1 = xyz'$$

x	y	z	z'	xyz'
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

KESIMPULAN:

Fungsi $F1=xyz'$ bernilai 1 jika $x=1, y=1, z=0$

$$F2 = x + y'z$$

x	y	z	y'	y'z	x+y'z
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
KESIMPULAN ?				0	0
				0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

$$F3 = xy' + x'y$$

x	y	z	x'	y'	xy'	x'y	F3
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0

KESIMPULAN ?

$$F4 = x'y'z + x'yz + xy'$$

x	y	z	x'	y'	x'y'z	x'yz	xy'	F4
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	KESIMPULAN ?					0
1	1	1						0

Manipulasi Aljabar Fungsi

- Suatu fungsi boolean sering tersusun dari literal (variabel penyusun) yang berulang, sehingga fungsi menjadi kompleks dan mahal
- Dengan postulat dan teorema, fungsi tersebut dapat direduksi sehingga jumlah literal minimum tanpa merubah nilai fungsi

Contoh

$$F1 = x + x'y$$

$$= (x + x')(x + y)$$

$$= 1.(x + y)$$

$$= x + y$$

Uji dengan EWB!!!

x	y	x'	x'y	x+x'y
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Contoh

$$F2 = x \cdot (x' + y)$$

$$= x \cdot x' + x \cdot y$$

$$= 0 + x \cdot y$$

$$= x \cdot y$$

Uji dengan EWB!!!

x	y	x'	x'+y	x.(x'+y)
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

x	y	x.y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

berapa?

$$\mathbf{F3 = xy+x'z+yz}$$

$$F3 = x.y+x'.z+y.z$$

$$= x.y+x'.z+y.z.(x+x')$$

$$= x.y+x'.z+x.y.z+x'.y.z$$

$$= x.y.(1+z)+x'z(1+y)$$

$$= x.y.1+x'z.1$$

$$= xy + x'z$$

$xy+x'z+yz = xy+x'z$; benarkah?

x	y	z	x'	xy	x'z	yz	$xy+x'z+yz$	$xy+x'z$
0	0	0	1	0	0	0		
0	0	1	1	0	1	0		
0	1	0	1	0	0	0		
0	1	1	1	0	1	1		
1	0	0	0	0	0	0		
1	0	1	0	0	0	0		
1	1	0	0	1	0	0		
1	1	1	0	1	0	1		

Uji dengan EWB!!!

catatan

Tak jarang dalam penyederhanaan fungsi boolean kita memerlukan Komplemen dari fungsi.

Untuk menentukan komplemen suatu fungsi, digunakan teori De Morgan yang dikembangkan Menjadi banyak variabel.

Caranya:

ikat sejumlah variabel menjadi satu variabel sehingga terbentuk sistem dua variabel yang memenuhi teorema De Morgan

Carilah komplemen :

$$F = (A+B+C)$$

$$P = A+B$$

$$(A+B+C)' = (P+C')$$

$$= P'.C'$$

$$= (A+B)'.C'$$

$$= A'.B'.C'$$

Tentukan Komplemen Fungsi

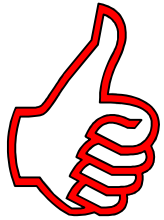
$$F1 = x'yz' + x'y'z$$

$$\begin{aligned} F1' &= (x'yz' + x'y'z)' \\ &= (x'yz')' \cdot (x'y'z)' \\ &= (x + y' + z) \cdot (x + y + z') \end{aligned}$$

$$F2 = x(y'z' + yz)$$

$$\begin{aligned} F2' &= x' + (y'z' + yz)' \\ &= x' + (y'z')' \cdot (yz)' \\ &= x' + (y + z) \cdot (y' + z') \end{aligned}$$

tips



Komplemen fungsi boolean yang lebih kompleks dapat dilakukan dengan prinsip dualisme (mengganti operator AND dengan OR atau sebaliknya, kemudian komplemenkan masing-masing literalnya)

$$F1 = x'yz' + x'y'z$$

$$\text{Dual } F1 \text{ -----} > (x' + y + z') \cdot (x' + y' + z)$$

$$\text{Kompl tiap literal ---} > (x + y' + z) \cdot (x + y + z')$$

$$F2 = x(y'z' + yz)$$

$$\text{Dual } F2 \text{ -----} > x + (y' + z') \cdot (y + z)$$

$$\text{Kompl tiap literal ---} > x' + (y + z) \cdot (y' + z')$$

Bentuk Standar vs Kanonik

Bentuk Standar	Bentuk Kanonik
Penulisan fungsi boolean dengan bentuk bebas tanpa pola tertentu	Fungsi Boolean yang dinyatakan dalam bentuk jumlah minterm atau perkalian maxterm
Mudah dalam penulisan namun sukar dimanipulasi	Lebih mudah dimanipulasi karena sudah punya pola baku

Bentuk Minterm 2 variabel

- Jika ada 2 variabel x dan y dikombinasikan dengan operator AND, maka akan diperoleh 4 kemungkinan kombinasi yaitu:

$x'y'$ $x'y$
 xy' xy

Tabel minterm 2 literal			
x	y	term	simbol
0	0	$x'y'$	m_0
0	1	$x'y$	m_1
1	0	xy'	m_2
1	1	xy	m_3

Bentuk minterm 3 variabel

- Jika 3 variabel x , y dan z dikombinasikan dengan operator AND, maka akan diperoleh 8 kemungkinan kombinasi yaitu:

$x'y'z'$	$xy'z'$
$x'y'z$	$xy'z$
$x'yz'$	xyz'
$x'yz$	xyz

Tabel Minterm 3 literal

x	y	z	term	simbol
0	0	0	$x'y'z'$	m_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2
0	1	1	$x'yz$	m_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4
1	0	1	$xy'z$	m_5
1	1	0	xyz'	m_6
1	1	1	xyz	m_7

Bentuk Maxterm 2 variabel

- Jika ada 2 variabel x dan y dikombinasikan dengan operator OR, maka akan diperoleh 4 kemungkinan kombinasi yaitu:

$$\begin{array}{ll} x'+y' & x'+y \\ x+y' & x+y \end{array}$$

Tabel maxterm 2 literal			
x	y	term	simbol
0	0	$x'+y'$	M_3
0	1	$x'+y$	M_2
1	0	$x+y'$	M_1
1	1	$x+y$	M_0

Bentuk maxterm 3 variabel

- Jika 3 variabel x , y dan z dikombinasikan dengan operator OR, maka akan diperoleh 8 kemungkinan kombinasi yaitu:

$$x' + y' + z'$$

$$x + y' + z'$$

$$x' + y' + z$$

$$x + y' + z$$

$$x' + y + z'$$

$$x + y + z'$$

$$x' + y + z$$

$$x + y + z$$

Tabel Maxterm 3 literal

x	y	z	term	simbol
0	0	0	$x'+y'+z'$	M₇
0	0	1	$x'+y'+z$	M₆
0	1	0	$x'+y+z'$	M₅
0	1	1	$x'+y+z$	M₄
1	0	0	$x+y'+z'$	M₃
1	0	1	$x+y'+z$	M₂
1	1	0	$x+y+z'$	M₁
1	1	1	$x+y+z$	M₀

Fungsi Boolean dalam minterm

- Suatu fungsi boolean dapat dinyatakan dalam bentuk minterm dengan memilih nilai fungsi 1 dalam tabel minterm
- Fungsi tersebut selanjutnya ditulis termnya/symbolnya dalam bentuk penjumlahan berulang
- Komplemen fungsi adalah term yang tidak termasuk dalam penjumlahan berulang

x	y	z	term	simbol	F
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	1
0	0	1	$x'y'z$	m_1	1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	0
0	1	1	$x'yz$	m_3	0
1	0	0	$xy'z'$	m_4	0
1	0	1	$xy'z$	m_5	1
1	1	0	xyz'	m_6	1
1	1	1	xyz	m_7	0

Dengan melihat nilai fungsi = 1, maka **fungsi kanonik** dapat ditulis :

$$F = (x'y'z') + (x'y'z) + (xy'z) + (xyz'); \text{ -----> bentuk term}$$

$$F = m_0 + m_1 + m_5 + m_6; \text{ -----> bentuk simbol}$$

$$F = \Sigma(0,1,5,6) \text{ -----> bentuk simbol penjumlahan berulang}$$

$$F' = \Sigma(0,1,5,6) \text{ -----> komplemen}$$

Fungsi Boolean dalam maxterm

- Suatu fungsi boolean dapat dinyatakan dalam bentuk minterm dengan memilih nilai fungsi 1 dalam tabel maxterm
- Fungsi tersebut selanjutnya ditulis termnya/symbolnya dalam bentuk perkalian berulang
- Komplemen fungsi adalah term yang tidak termasuk dalam penjumlahan berulang

x	y	z	term	simbol	F
0	0	0	$x'+y'+z'$	M_7	0
0	0	1	$x'+y'+z$	M_6	1
0	1	0	$x'+y+z'$	M_5	0
0	1	1	$x'+y+z$	M_4	0
1	0	0	$x+y'+z'$	M_3	1
1	0	1	$x+y'+z$	M_2	0
1	1	0	$x+y+z'$	M_1	0
1	1	1	$x+y+z$	M_0	1

Dengan melihat nilai fungsi = 1, maka **fungsi kanonik** dapat ditulis :

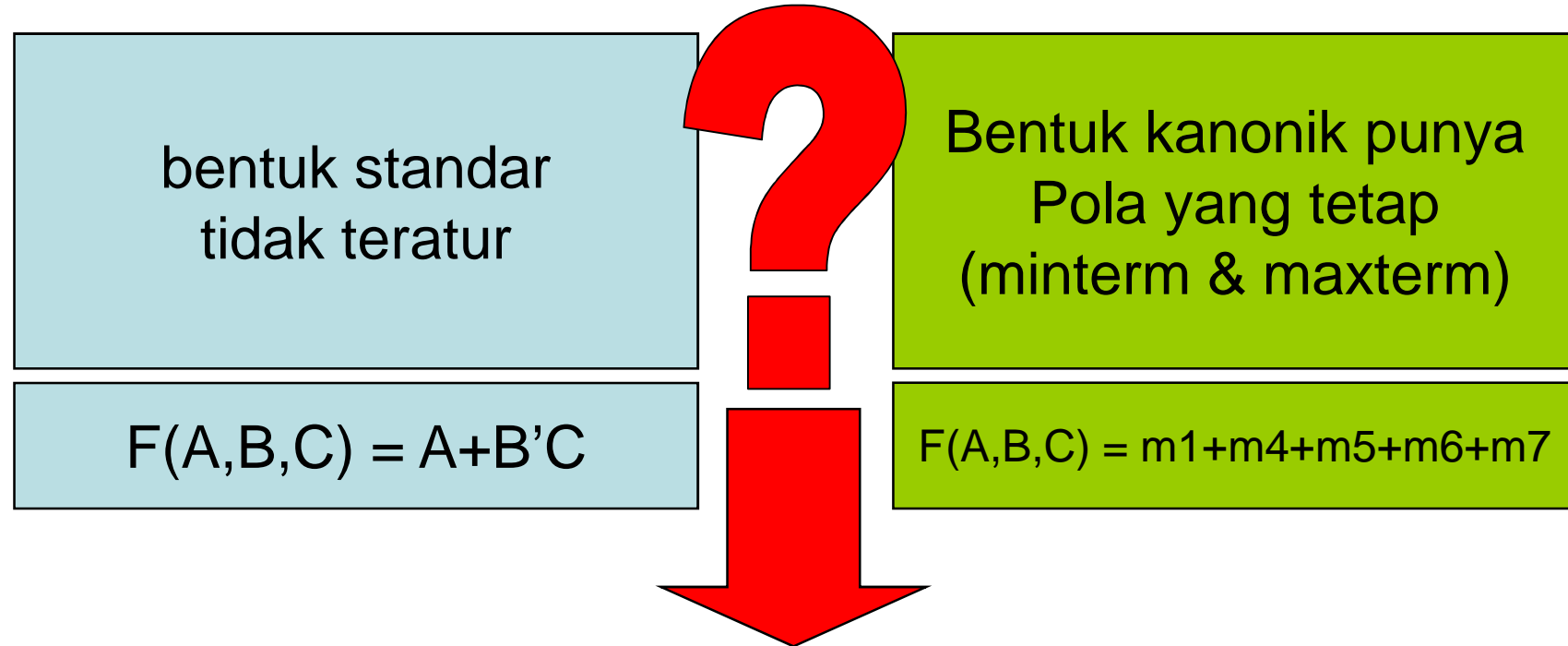
$$F = (x'+y'+z) \cdot (x+y'+z') \cdot (x+y+z); \text{-----}>\text{bentuk term}$$

$$F = M_6 + M_3 + M_0; \text{-----}>\text{bentuk simbol}$$

$$F = \Pi(0,3,6) \text{-----}> \text{bentuk simbol perkalian berulang}$$

$$F' = \Pi(1,2,4,5,7) \text{-----}> \text{komplemen}$$

Kendalanya...



**KONVERSI DARI BENTUK STANDAR
KE BENTUK KANONIK**

Bentuk Standar → Minterm

- Kembangkan sebuah literal secara **distributif operasi dot to plus** sebanyak literal yang menyusun fungsi tersebut
- Faktor distributif yang digunakan adalah $(x+x')$ yang selalu bernilai 1
- Untuk mempertegas jumlah literal, dalam setiap fungsi harus ditulis lengkap literal penyusunnya
exp : $F(x,y,z) \rightarrow$ fungsi F dengan 3 literal

Ubah $F(A,B,C) = A+B'C$ ke minterm

Term A dikembangkan menjadi minterm 3 literal

$$\begin{aligned} &= A(B+B')(C+C') \\ &= (AB+AB')(C+C') \\ &= AB(C+C')+AB'(C+C') \\ &= ABC+ABC'+AB'C+AB'C' \\ &= \underline{AB'C'+AB'C+ABC'+ABC} \end{aligned}$$

Term $B'C$ dikembangkan menjadi minterm 3 literal

$$\begin{aligned} &= B'C.(A+A') \\ &= AB'C+A'B'C \\ &= \underline{A'B'C+AB'C} \end{aligned}$$

Selanjutnya, kedua literal tersebut digabungkan. Minterm diurut mulai indeks yang kecil ke besar, jika ada minterm sama maka ditulis satu saja.

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A'B'C+AB'C'+AB'C+ABC'+ABC \\ &= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 \\ &= \Sigma (1, 4, 5, 6, 7) \end{aligned}$$

Bentuk Standar → Maxterm

- Kembangkan sebuah literal secara **distributif operasi plus to dot** sebanyak literal yang menyusun fungsi tersebut
- Faktor distributif yang digunakan adalah $(x.x')$ yang selalu bernilai 0
- Untuk mempertegas jumlah literal, dalam setiap fungsi harus ditulis lengkap literal penyusunnya
exp : $F(x,y,z) \rightarrow$ fungsi F dengan 3 literal

Ubah $F(x,y,z) = xy+x'z$ ke maxterm

$F(x,y,z) = xy+x'z$ dikembangkan dengan distributif plus to dot

$$= xy + x'z$$

$$= (xy+x').(xy+z)$$

$$= (x'+xy).(z+xy)$$

$$= (x'+x).(x'+y).(z+x).(z+y) \text{ -----} \rightarrow x'+x = 1$$

$$= (x'+y).(z+x).(z+y) \text{ -----} \rightarrow \text{terbentuk 3 term}$$

Tiap term dikembangkan menjadi 3 literal dengan distributif plus to dot

$$(x'+y) = (x'+y)+z.z' = \underline{(x'+y+z).(x'+y+z')}$$

$$(z+x) = (z+x)+y.y' = (z+x+y).(z+x+y') = \underline{(x+y+z).(x+y'+z)}$$

$$(z+y) = (z+y)+x.x' = (z+y+x).(z+y+x') = \underline{(x+y+z).(x'+y+z)}$$

Selanjutnya, kedua literal tersebut digabungkan. Minterm diurut mulai indeks yang kecil ke besar, jika ada maxterm sama maka ditulis satu saja.

$$F(A,B,C) = (x+y+z) . (x+y'+z) . (x'+y+z) . (x'+y+z')$$

$$= M_0 + M_2 + M_4 + M_5$$

$$= \Pi (0, 2, 4, 5)$$

Tugas Kelompok