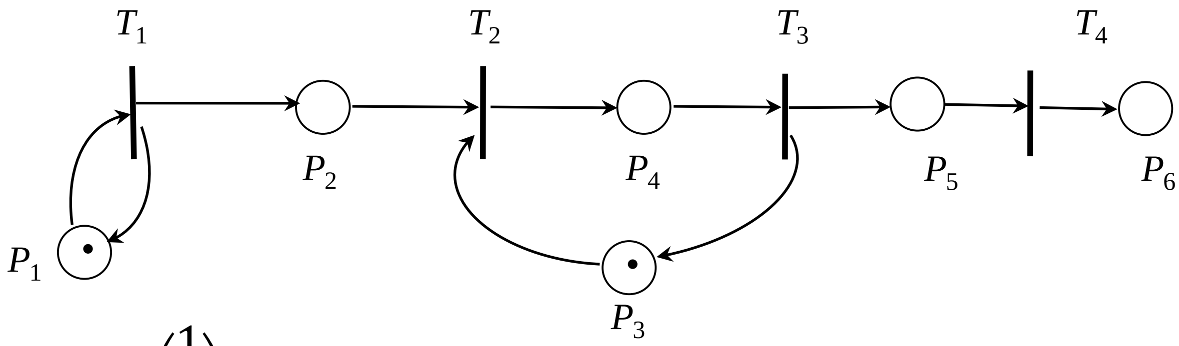
Математична теорія класичних мереж Петрі

Базові публікації

Murata T. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications. // Proceedings of IEEE. – 1989. - Vol.77, No.4. - P.541-580.

Матричний опис базової мережі Петрі



Кількість маркерів в P_3

Кількість зв'язків з T_1 в P_2

Маркірування $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

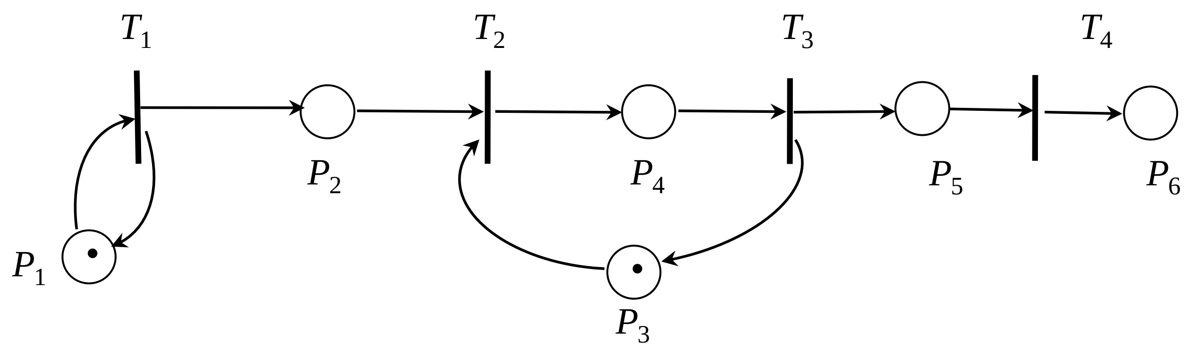
Кількість зв'язків з P_3 в T_2

Кількість зв'язків з P_5 в T_4

Матриця входів $\boldsymbol{a}^- = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0100 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \\ 0000 \end{pmatrix}$

Матриця виходів $\boldsymbol{a}^+ = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 0010 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \end{pmatrix}$

Матричний опис базової мережі Петрі



$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T_3} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{T_4} \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{T_3} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{T_4} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\2\end{pmatrix} \xrightarrow{T_2}$$

$$\xrightarrow{T_2} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix} \xrightarrow{T_3} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix} \xrightarrow{T_4} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\3\end{pmatrix}$$

Матричний опис базової мережі Петрі

Вектор запуску переходу $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Запуск переходу T_3

Умова запуску переходу $\forall i\ \boldsymbol{M}_i \geq (\boldsymbol{a}^- \cdot \boldsymbol{v})_i$

Результат запуску переходу

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{a}^- \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}^+ \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} + (\boldsymbol{a}^+ - \boldsymbol{a}^-) \cdot \boldsymbol{v}$$

Матриця змінювань $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^+ - \boldsymbol{a}^-$

Результат запуску послідовності $T_1 - T_2 - T_1$

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}^{(1)}$$

$$\boldsymbol{M}'' = \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}^{(2)}$$

$$\boldsymbol{M}''' = \boldsymbol{M}'' + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}^{(3)}$$

$$\boldsymbol{M}''' = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{a} \cdot \left(\boldsymbol{v}^{(1)} + \boldsymbol{v}^{(2)} + \boldsymbol{v}^{(3)}\right)$$

$$\boldsymbol{M}''' = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$$

Вектор запуску переходів $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Кількість запусків переходу T_1

Матричне рівняння станів базової мережі Петрі

Результуюче маркірування (після запуску переходів)

Початкове маркірування

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$$

Матриця змінювань

Вектор запуску переходів

Змінювання маркірування

$$\Delta\boldsymbol{M} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$$

Аналітичне дослідження властивостей мереж Петрі

- *k*-обмеженість,
- досяжність,
- збереження,
- активність.

Аналітичне дослідження властивостей мереж Петрі

Властивість	**Визначення**
k – обмеженість	Якщо кількість маркерів в будь-якій позиції мережі Петрі не перевищує k маркерів, то мережа являється k – обмеженою.
досяжність	Досяжністю мережі Петрі називається множина досяжних маркірувань.
збереження	Якщо в мережі Петрі неможливе виникнення і знищення ресурсів, то мережа володіє властивістю збереження.
активність	Якщо з будь-якого досяжного початкового стану можливий перехід в будь-який інший досяжний стан, то мережа Петрі володіє властивістю активності.

'

Збереження (консервативність)

Означення. Якщо існує вектор w, компоненти якого цілі додатні числа, такий що $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{M} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{M}'$ для будь − якого досяжного з початкового маркірування, то мережа Петрі володіє властивістю збереження

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{M} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{M}', \forall \boldsymbol{M}' (\text{досяжного})$$

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{M} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}), \forall\ \boldsymbol{v}$$

$$0 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}, \forall\ \boldsymbol{v}$$

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{a} \qquad \mathbf{0}^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{a}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{w}$$

Твердження. Мережа Петрі володіє властивістю зберігання **тоді і тільки тоді**, коли існує вектор w, компоненти якого цілі додатні числа, такий, що $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{w} = \mathbf{0}, \boldsymbol{w}_i \in Z_+$

S – інваріант мережі Петрі

Розв’язки рівняння

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{w} = \mathbf{0},$$

де $\boldsymbol{w}$ – невідомий вектор розміру $|\mathrm{P}| \times 1$, називають ***S – інваріантом*** мережі Петрі.

S-інваріант, або інваріант стану, дозволяє досліджувати консервативність системи.

Консервативність означає, що існує зважена сума маркірувань позицій мережі Петрі, яка для будь-якого досяжного маркірування залишається незмінною.

Рівняння, які формулюються і розв’язуються в термінах цілих чисел, називають *діофантовими*.

,

Циклічність

<u>Означення.</u> Якщо існує послідовність запусків переходів, така що мережа повертається в початкове маркірування, то функціонування мережі Петрі є циклічним

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{M} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}, \exists\, \boldsymbol{v}$$

$$0 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}, \exists \boldsymbol{v}$$

<u>Твердження.</u> Функціонування мережі Петрі є циклічним **<u>тоді і тільки тоді</u>**, коли існує вектор $\boldsymbol{v}$, компоненти якого <u>цілі невід’ємні числа</u>, такий, що $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}_i \in Z_+$

T – інваріант мережі Петрі

Розв’язки рівняння

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0},$$

де $\boldsymbol{v}$ – невідомий вектор розміру $|\mathrm{T}| \times 1$, називають ***Т– інваріантом*** мережі Петрі.

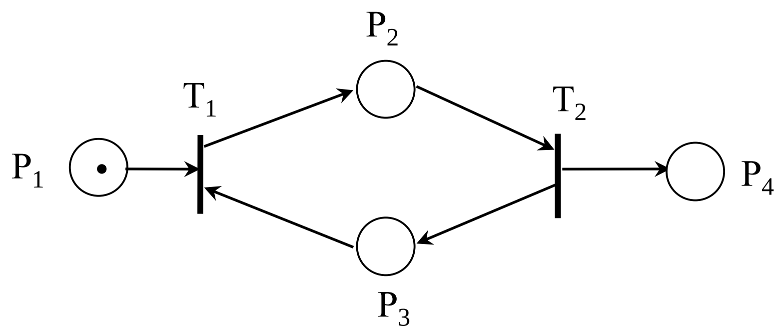
T-інваріант, або інваріант функціонування, означає досяжність початкового маркірування.

Цей інваріант є важливим для дослідження циклічності процесів функціонування.

Циклічність означає існування такої послідовності запусків переходів, що мережа Петрі повертається в початкове маркірування. Наявність *T*-інваріантів гарантує циклічність функціонування системи.

Досяжність

Існування невід'ємного цілого вектора запуску переходів, що задовольняє рівнянню $\boldsymbol{M'}= \boldsymbol{M} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$, є тільки <u>необхідною</u>, але не достатньою умовою



$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M'}= \boldsymbol{M} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_1 - v_2 \\ -v_1 + v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

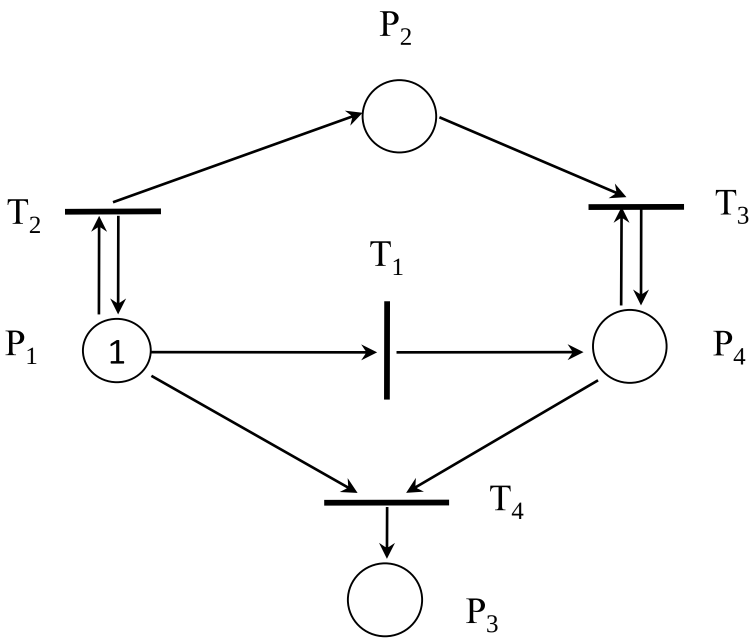
$$\Longrightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{v}= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Проте запуск переходів неможливий оскільки умова запуску не виконана.

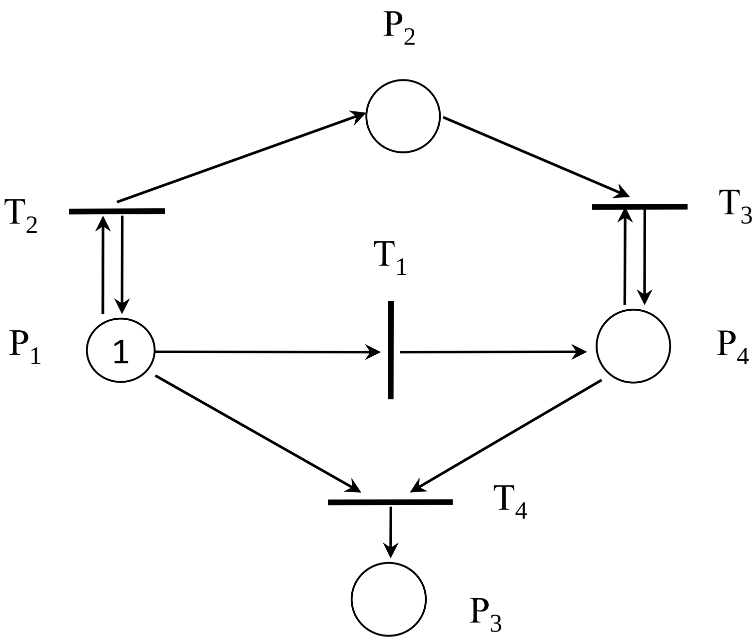
Активність

Рівень активності	Перехід Т має рівень активності А, якщо
0	він ніколи не може бути запущений
1	існує маркірування (досяжне з початкового) , яке дозволяє запуск цього переходу Т
2	для довільного цілого числа n існує послідовність запусків переходів, в якій перехід Т присутній принаймні n раз
3	існує нескінченна послідовність запусків переходів, в якій перехід Т присутній необмежено багато разів
4	якщо для довільного маркірування М, що є досяжним з початкового маркірування, існує послідовність запусків переходів, яка призводить до маркірування, що дозволяє запуск переходу Т

Приклад визначення активності

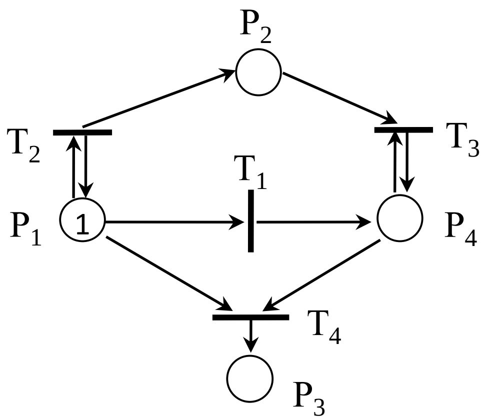


Приклад визначення активності

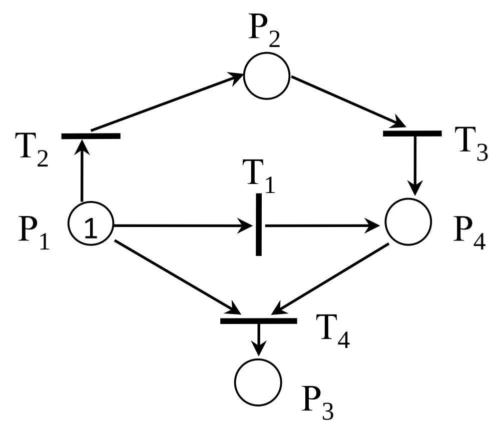


Рівень активності	Перехід
0	T_4
1	T_1
2	T_3
3	T_2

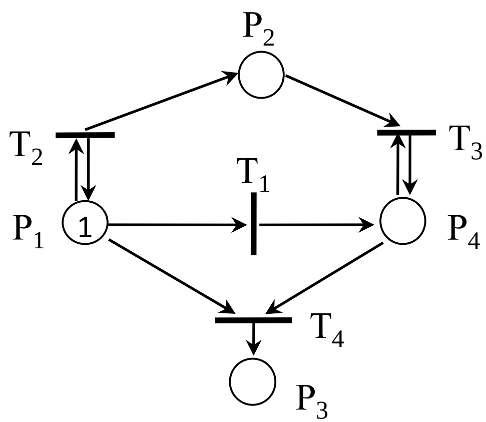
Приклад дослідження Т-інваріантів



$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Приклад дослідження Т-інваріантів

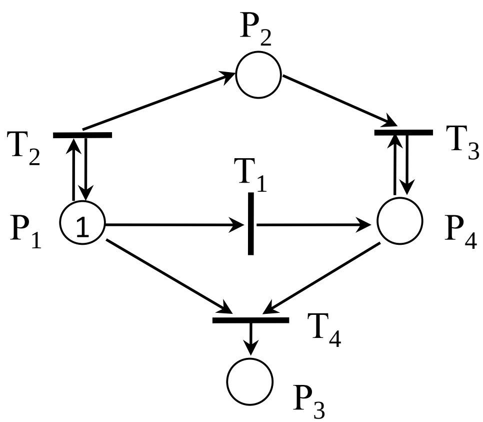


$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=\mathbf{0}\Longrightarrow\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} -v_1-v_4 \\ v_2-v_3 \\ v_4 \\ v_1-v_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

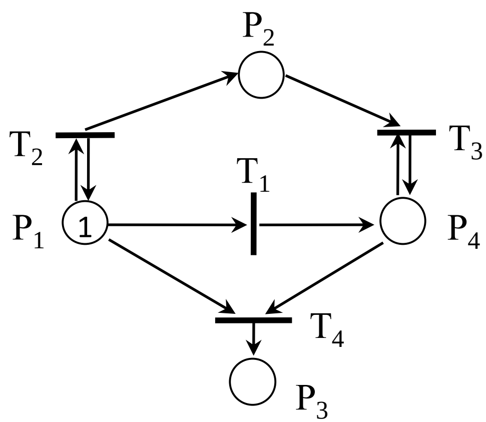
$$\Longrightarrow\begin{cases} v_1=0 \\ v_2=k \\ v_3=k \\ v_4=0 \end{cases}\Longrightarrow T-\text{інварінтів не існує}\,.\,\text{Отже, циклічність не гарантується.}$$

Приклад дослідження S-інваріантів



$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Приклад дослідження S-інваріантів

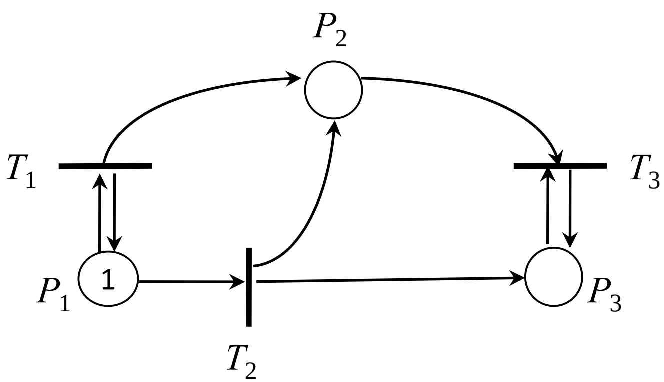


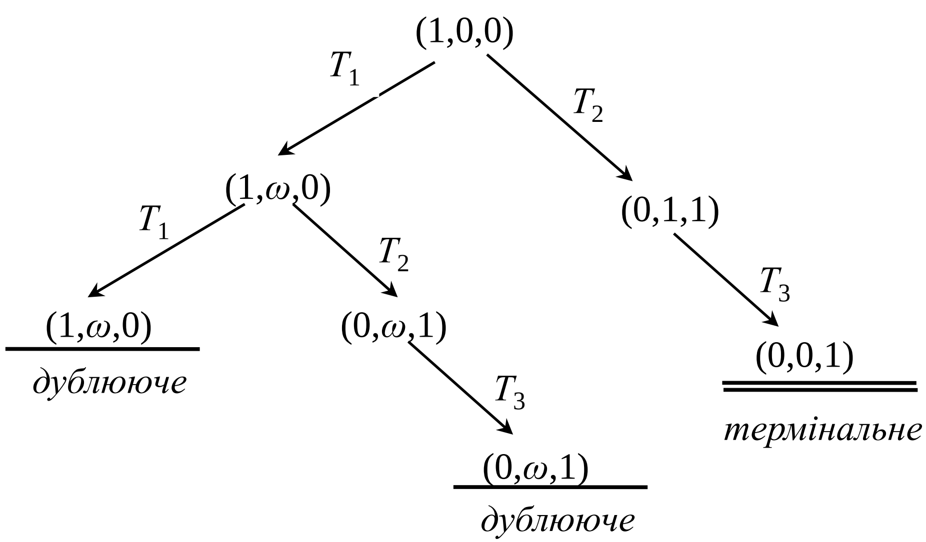
$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -w_1 + w_4 \\ w_2 \\ -w_3 \\ -w_1 + w_3 - w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = 0 \\ w_3 = 0 \\ w_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow S - \text{інварінтів не існує. Отже, консерватівність відсутня.}$$

Дерево досяжності





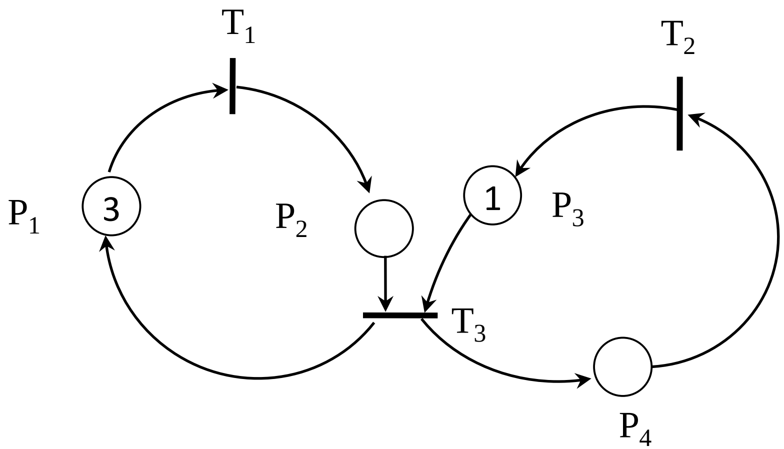
Дерево досяжності представляє множину досяжних маркірувань мережі Петрі. Дерево досяжності розпочинається з початкового маркірування, а закінчується термінальним або дублюючим маркіруванням.

Термінальним маркіруванням називається маркірування, в якому жоден з переходів мережі Петрі не запускається.

Дублюючим маркіруванням називається маркірування, що раніше зустрічалося в дереві досяжності

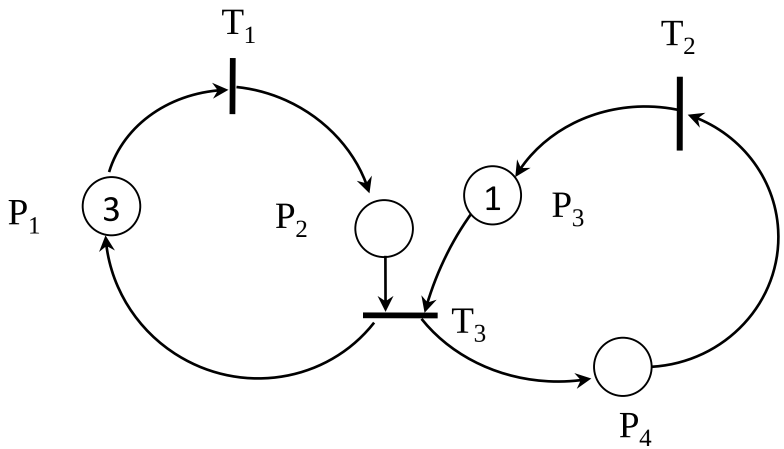
Символ ω в позиції M_j маркірування M з'являється тоді, коли на шляху до маркірування M спостерігається маркірування M', в якому всі значення, крім j-ого, не перевищують значення маркірування M, а j-е значення є меншим. Одного разу з'явившись, символ ω уже не змінюється і не зникає в дереві досяжності: додавання або віднімання від нескінченності є нескінченність.

Приклад «Три основні та один резервний пристрій»



$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад «Три основні та один резервний пристрій»

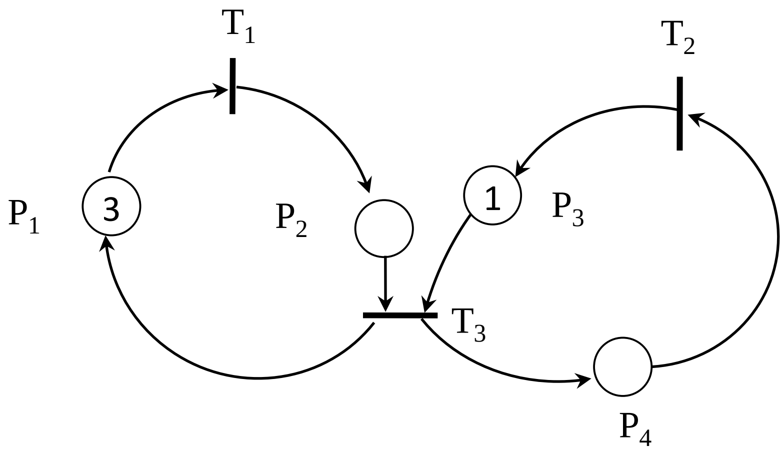


$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-w_1+w_2\\ w_3-w_4\\ w_1-w_2-w_3+w_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}w_1=1\\ w_2=1\\ w_3=1\\ w_4=1\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow S-$ інварінт існує. Отже, консерватівність присутня.

Приклад «Три основні та один резервний пристрій»



$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

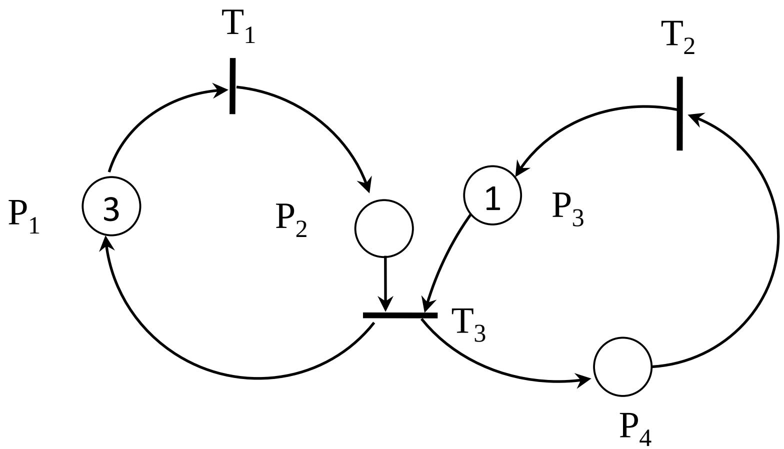
$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{w}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-w_1+w_2\\ w_3-w_4\\ w_1-w_2-w_3+w_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}w_1=1\\ w_2=1\\ w_3=1\\ w_4=1\end{cases}\Rightarrow$$

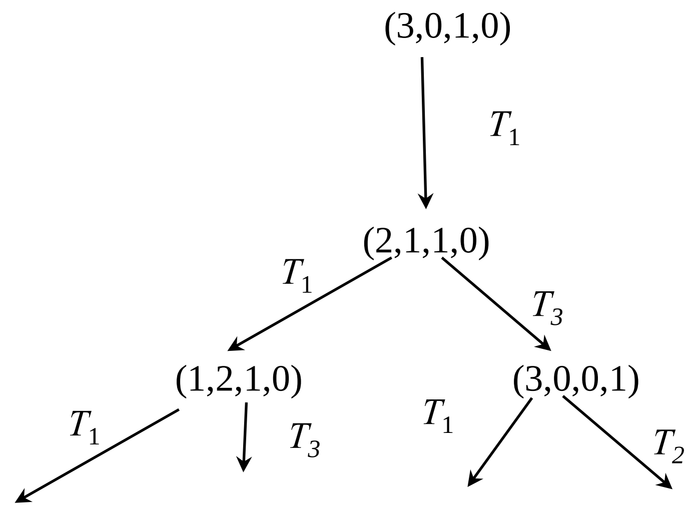
$\Rightarrow S-$ інварінт існує. Отже, консерватівність присутня.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-v_1+v_3\\ v_1-v_3\\ v_2-v_3\\ -v_2+v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}v_1=1\\ v_2=1\\ v_3=1\end{cases}\Rightarrow$$

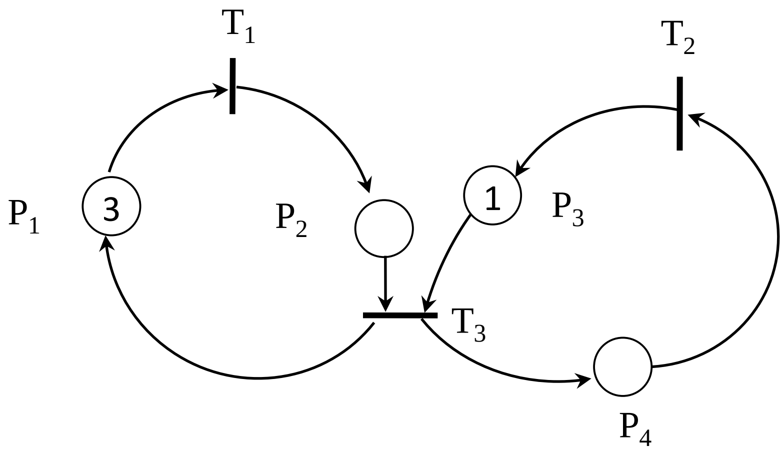
$\Rightarrow\ T-$ інварінт існує. Отже, циклічність гарантується.

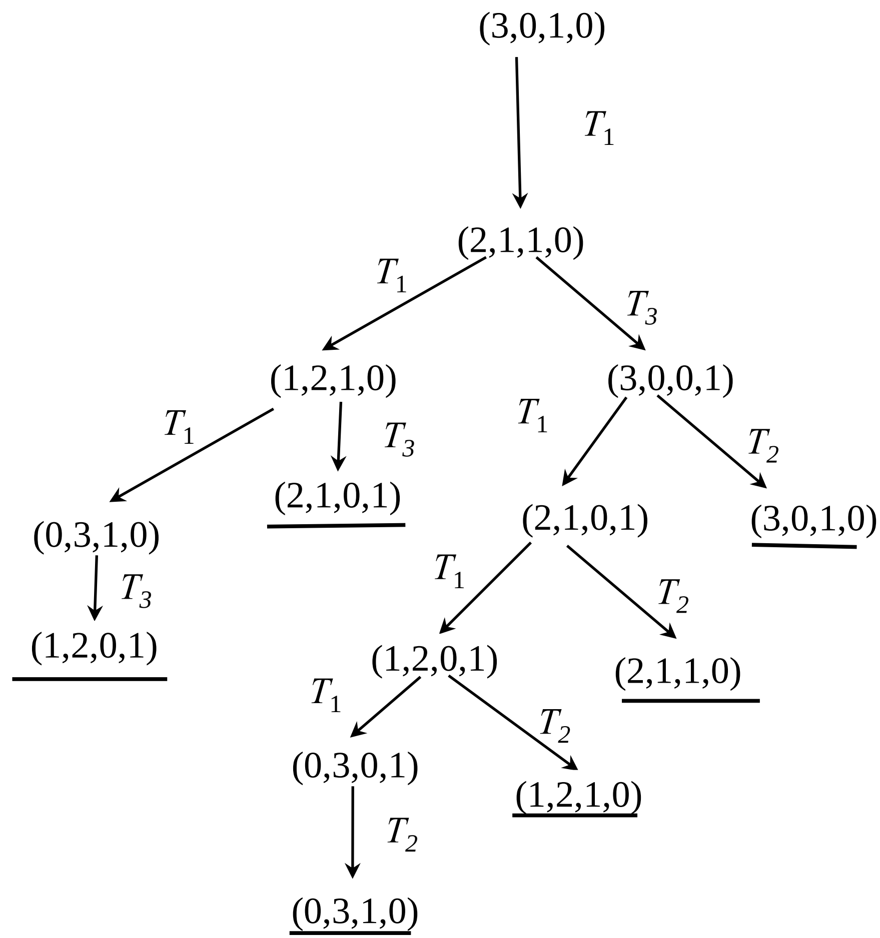
Приклад «Три основні та один резервний пристрій»





Приклад «Три основні та один резервний пристрій»





Порівняння способів аналітичного дослідження властивостей мережі Петрі

Властивість	Спосіб дослідження	
	Матричний підхід	**Дерево досяжності**
k-обмеженість	не досліджується	необхідна і достатня умова
зберігання	необхідна і достатня умова	необхідна і достатня умова
досяжність	тільки необхідна умова	послідовність переходів залишається невідомою
активність	не досліджується	не досліджується