ЛЕКЦІЯ

Теоретичні основи Петрі-об’єктного моделювання систем

Стеценко И.В. Теоретические основы Петри-объектного моделирования систем / И.В. Стеценко // Математичні машини і системи.– Київ, 2011. - №4. – С.136-148.

Твердження 1

Петрі-об’єктна модель описується стохастичною мережею Петрі, що є об’єднанням мереж Петрі-об’єктів, з яких вона складається:

$$ModelNet = \bigcup_{\tilde{N}} \tilde{N}$$

де $\tilde{N} = (\tilde{\mathbf{P}}_N , \mathbf{T}_N , \tilde{\mathbf{A}}_N , \tilde{\mathbf{W}}_N , \mathbf{K}_N , \mathbf{I}_N , \mathbf{R}_N)$

$$\tilde{\mathbf{P}}_N = \cup_N ({}^{\bullet}\mathbf{T}_N \cup \mathbf{T}_N{}^{\bullet})$$

$\bigcup_{\tilde{N}} \tilde{N}$: $\mathbf{P} = \bigcup_N \tilde{\mathbf{P}}_N$ $\quad \mathbf{T} = \bigcup_N \mathbf{T}_N$ $\quad \tilde{\mathbf{A}} = \bigcup_N \tilde{\mathbf{A}}_N$ $\quad \tilde{\mathbf{W}} = \bigcup_N \tilde{\mathbf{W}}_N$ $\quad \mathbf{K} = \bigcup_N \mathbf{K}_N$ $\quad \mathbf{I} = \bigcup_N \mathbf{I}_N$ $\quad \mathbf{R} = \bigcup_N \mathbf{R}_N$

$$\mathbf{T}_N{}^{\bullet} = \bigcup_{T \in \mathbf{T}_N} T^{\bullet} = \left\{ P \in \mathbf{P} \mid \exists T \in \mathbf{T} : \exists (T, P) \in \tilde{\mathbf{A}}_N \right\}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_N = \mathbf{A}_N \bigcup \mathbf{U}_N \qquad \tilde{\mathbf{W}}_N = \mathbf{W}_N \bigcup \mathbf{w}_N$$

$$U_N = \left\{ (T, P) \mid T \in \mathbf{T}_k , P \in \mathbf{P}_l , w_{k,l} > 0 \right\}$$

- множина дуг Петрі- об'єкта, що з'єднує його з іншими об'єктами через ініціалізацію подій

<u>Наслідок.</u> Петрі-об'єктная модель є обчислюваною.

Твердження 2

Перетворення D^{+} **мережі Петрі-об'єктної моделі** $\bigcup_{\tilde{N}} \tilde{N}$

еквівалентно перетворенню D^{+} **мереж Петрі-об'єктів**

$$\tilde{N} = (\mathbf{T}_N^{\bullet}, \mathbf{T}_N, \tilde{\mathbf{A}}_N, \tilde{\mathbf{W}}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$$

Наслідок. Стан Петрі-об'єктної моделі, який є результатом виходу маркерів з переходів мережі Петрі-об'єктної моделі, описується станом її Петрі-об'єктів:

$$\mathbf{S}^{+}(t_n) = D^{+}\left(\mathbf{S}(t_{n-1})\right) = \begin{pmatrix} D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_1(t_{n-1})) \\ \dots \\ D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_N(t_{n-1})) \\ \dots \\ D^{+}(\tilde{\mathbf{S}}_L(t_{n-1})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_1{}^{+}(t_n) \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{S}}_N{}^{+}(t_n) \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{S}}_L{}^{+}(t_n) \end{pmatrix}$$

Твердження 3

Перетворення D^- **мережі Петрі-об'єктної моделі** $\bigcup_{\tilde{N}} \tilde{N}$

еквивалентно перетворенню D^- **мереж Петрі-об'єктів**

$$\tilde{N} = (\mathbf{T}_N^{\bullet}, \mathbf{T}_N, \tilde{\mathbf{A}}_N, \tilde{\mathbf{W}}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N),$$

для яких у випадку існування спільних позицій Петрі-об'єктів вирішений конфлікт

<u>**Наслідок.**</u>Стан Петрі-об'єктної моделі, який є результатом входу маркерів в переходи мережі Петрі-об'єктної моделі, описується станом її Петрі-об'єктів.

$$\mathbf{S}(t_n) = D^-\left(\mathbf{S}^+(t_n)\right) = \begin{pmatrix} D^-(\tilde{\mathbf{S}}_1^{\ +}(t_n)) \\ \ldots \\ D^-(\tilde{\mathbf{S}}_N^{\ +}(t_n)) \\ \ldots \\ D^-(\tilde{\mathbf{S}}_L^{\ +}(t_n))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_1(t_n) \\ \ldots \\ \tilde{\mathbf{S}}_N(t_n) \\ \ldots \\ \tilde{\mathbf{S}}_L(t_n) \end{pmatrix}$$

Рівняння станів Петрі-об'єктної моделі

<u>Наслідок.</u> Стан Петрі-об'єктної моделі в кожний момент часу описується станом її Петрі-об'єктів:

$$\mathbf{S}(t_n) = \left(D^-\right)^m \left(D^+(\mathbf{S}(t_{n-1}))\right) = \left(D^-\right)^m \begin{pmatrix} D^+(\tilde{\mathbf{S}}_1(t_{n-1})) \\ \dots \\ D^+(\tilde{\mathbf{S}}_N(t_{n-1})) \\ \dots \\ D^+(\tilde{\mathbf{S}}_L(t_{n-1})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(D^-\right)^m \left(D^+(\tilde{\mathbf{S}}_1(t_{n-1}))\right) \\ \dots \\ \left(D^-\right)^m \left(D^+(\tilde{\mathbf{S}}_N(t_{n-1}))\right) \\ \dots \\ \left(D^-\right)^m \left(D^+(\tilde{\mathbf{S}}_L(t_{n-1}))\right) \end{pmatrix}$$

Рівняння станів Петрі-об'єктної моделі

$$t_n = \min_N \tau_N \,,\, t_n \ge t_{n-1}$$

$$\mathbf{S}(t_1) = \begin{pmatrix} \left(D^-\right)^m (\mathbf{S}_1(t_0)) \\ \dots \\ \left(D^-\right)^m (\mathbf{S}_N(t_0)) \\ \dots \\ \left(D^-\right)^m (\mathbf{S}_L(t_0)) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}(t_n) = \begin{pmatrix} \left(D^-\right)^m \left(D^+(\tilde{\mathbf{S}}_1(t_{n-1}))\right) \\ \dots \\ \left(D^-\right)^m \left(D^+(\tilde{\mathbf{S}}_N(t_{n-1}))\right) \\ \dots \\ \left(D^-\right)^m \left(D^+(\tilde{\mathbf{S}}_L(t_{n-1}))\right) \end{pmatrix}$$

$$\forall \tilde{\mathbf{S}}_N(t_n) : \bigvee_{T \in \mathbf{T}_N} Z(T, t_n) = 0$$

Алгоритм імітації Петрі-об’єктної моделі

- Формувати список Петрі-об’єктів;
- Виконати перетворення $\left(D^{-}\right)^{m}$ (метод input());
- Доки не досягнутий момент завершення моделювання
  - Просунути час в момент найближчої події;
  - визначити список конфліктних об’єктів та вибрати об’єкт із списку конфліктних об’єктів;
  - для вибраного об’єкта виконати перетворення $\left(D^{-}\right)^{m} \circ D^{+}$ (методи output(), input(), doT()) ;
  - для всіх інших об’єктів виконати перетворення $\left(D^{-}\right)^{m}$(метод input());
- Вивести результати моделювання.

Матричні рівняння станів Петрі-об'єктної моделі

Матричні рівняння Петрі-об’єктів $\tilde{N} = (\mathbf{T}_N{}^{\bullet}, \mathbf{T}_N, \tilde{\mathbf{A}}_N, \tilde{\mathbf{W}}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$

$$\boldsymbol{\mu}_N(t_n) = \boldsymbol{\mu}_N(t_0) + \mathbf{a}_N \cdot \boldsymbol{\gamma}_N(t_n)$$

$$\boldsymbol{\eta}_N(t_n) = -\mathbf{v}_N(t_n) + \mathbf{v}_N(t_0) + \boldsymbol{\gamma}_N(t_n)$$

$\boldsymbol{\mu}_N(t) = \tilde{\mathbf{M}}(t) + \mathbf{a}_N{}^{+} \cdot \mathbf{v}_N(t)$ - вектор розширеного маркірування Петрі-об’єкта

$\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_N{}^{+} - \mathbf{a}_N{}^{-}$ - матриця інцидентності

$\mathbf{v}_N(t)$ - вектор кількості активних каналів переходів Петрі-об’єкта

$\boldsymbol{\gamma}_N(t_n)$ - вектор кількості входів в переход Петрі-об’єкта за період часу $[t_0, t]$

$\boldsymbol{\eta}_N(t_n)$ вектор кількості виходів з переходів Петрі-об’єкта за період часу $[t_0, t]$

Матричні рівняння станів Петрі-об'єктної моделі

$\boldsymbol{\mu}(t) = \|\mu_P(t)\| \quad \forall P \in \mathbf{P}_N \quad [\boldsymbol{\mu}(t)]_P = [\boldsymbol{\mu}_N(t)]_P$

$\mathbf{v}(t) = \|v_T(t)\| \quad \forall T \in \mathbf{T}_N \quad [\mathbf{v}(t)]_T = [\mathbf{v}_N(t)]_T$

$\boldsymbol{\gamma}(t) = \|\gamma_T(t)\| : \quad \forall T \in \mathbf{T}_N \quad [\boldsymbol{\gamma}(t)]_T = [\boldsymbol{\gamma}_N(t)]_T$

$\boldsymbol{\eta}(t) = \|\eta_T(t)\| : \quad \forall T \in \mathbf{T}_N \quad [\boldsymbol{\eta}(t)]_T = [\boldsymbol{\eta}_N(t)]_T$

$\mathbf{a}^- = \|a^-_{P,T}\| \quad \forall P \in \mathbf{P}_N \quad \forall T \in \mathbf{T}_N \quad [\mathbf{a}^-]_{P,T} = [\mathbf{a}^-_N]_{P,T}$

$\mathbf{a}^+ = \|a^+_{P,T}\| \quad \forall P \in \mathbf{P}_N \quad \forall T \in \mathbf{T}_N \quad [\mathbf{a}^+]_{P,T} = [\mathbf{a}^+_N]_{P,T}$

Фундаментальні рівняння Петрі-об’єктної моделі:

$$\boldsymbol{\mu}(t_n) = \boldsymbol{\mu}(t_0) + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}(t_n)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_n) = -\mathbf{v}(t_n) + \mathbf{v}(t_0) + \boldsymbol{\gamma}(t_n)$$

Дослідження властивостей Петрі-об'єктної моделі

Наслідок Мережа Петрі $ModelNet = \bigcup_{\tilde{N}} \tilde{N}$

Петрі-об'єктної моделі володіє властивістю обмеженості, якщо мережі Петрі

$\tilde{N} = (\mathbf{T}_N{}^{\bullet}, \mathbf{T}_N, \tilde{\mathbf{A}}_N, \tilde{\mathbf{W}}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$ усіх її Петрі-об'єктів володіють властивістю обмеженості.

Наслідок. Мережа Петрі $ModelNet = \bigcup_{\tilde{N}} \tilde{N}$

Петрі-об'єктної моделі є активною, якщо для довільного $t \geq t_0$

хоч одна мережа Петрі $\tilde{N} = (\mathbf{T}_N{}^{\bullet}, \mathbf{T}_N, \tilde{\mathbf{A}}_N, \tilde{\mathbf{W}}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$ з усіх її Петрі-об'єків є активною.

Аналіз обчислювальної складності алгоритму

Обчислювальна складність стохастичної мережі Петрі

$$O(V^2|\mathbf{T}|\cdot time\cdot(|\mathbf{T}|\cdot\left(\underset{T\in\mathbf{T}}{mean}\left|T^{\bullet}\right|+\underset{T\in\mathbf{T}}{mean}\left|{}^{\bullet}T\right|+V\right)+ \\ +K^2(|\mathbf{T}|)+K(|\mathbf{T}|)+\underset{T\in\mathbf{T}}{mean}\left|{}^{\bullet}T\right|+V))$$

Обчислювальна складність Петрі-об’єктної моделі

$$O(V^2|\mathbf{T}|\cdot time\cdot(|\mathbf{T}|/q\cdot\left(\underset{T\in\mathbf{T}}{mean}\left|T^{\bullet}\right|+\underset{T\in\mathbf{T}}{mean}\left|{}^{\bullet}T\right|+V\right)+ \\ +K^2(|\mathbf{T}|/q)+K(|\mathbf{T}|/q)+\underset{T\in\mathbf{T}}{mean}\left|{}^{\bullet}T\right|+V+{}^{1}\!/_{V}(q^2+q)))$$

q - кількість об’єктів

$$\underset{T\in\mathbf{T}}{mean}\left|{}^{\bullet}T\right|=O(1)$$

$$\underset{T\in\mathbf{T}}{mean}\left|T^{\bullet}\right|=O(1)$$

$$V=O(1)$$

$\Rightarrow$

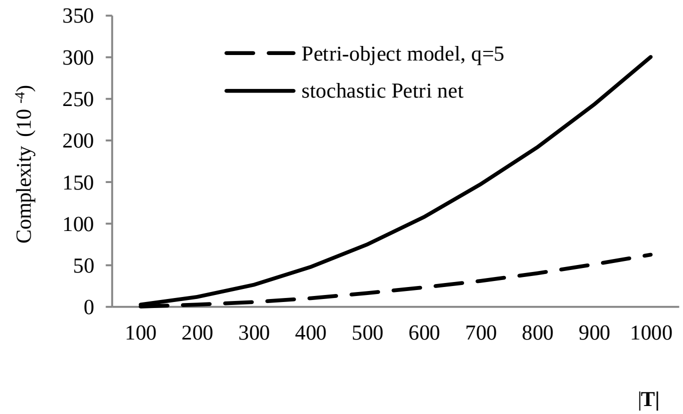
$$O\left(V^2|\mathbf{T}|\cdot time\cdot\left(|\mathbf{T}|+K^2(|\mathbf{T}|)+K(|\mathbf{T}|)\right)\right)$$ для стохастичної мережі Петрі

$$O\left(V^2|\mathbf{T}|\cdot time\cdot\left(|\mathbf{T}|/q+K^2(|\mathbf{T}|/q)+K(|\mathbf{T}|/q)+q^2+q\right)\right)$$ для Петрі-об’єктної моделі

Обчислювальна складність Петрі-об’єктної моделі

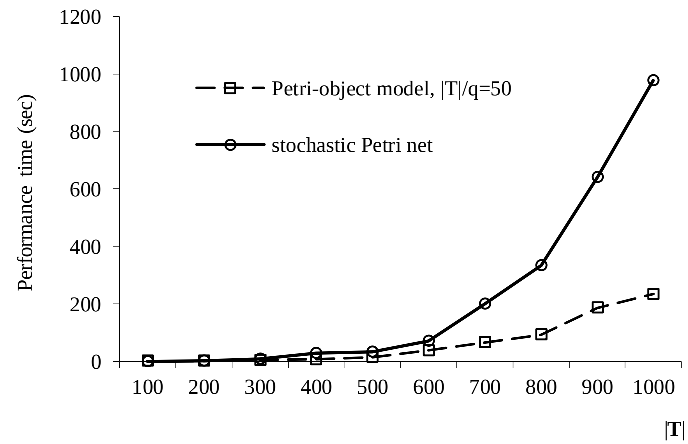
Stetsenko I.V., Dyfuchyn A., Dorosh V.I. Petri-Object Simulation: Software Package and Complexity. Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS’2015). Warsaw (Poland), 2015. P.381-385.

Обчислювальна складність Петрі-об’єктної моделі та стохастичної мережі Петрі, отримана <u>за математичними формулами</u>



q - кількість Петрі-об’єктів в моделі

Обчислювальна складність Петрі-об’єктної моделі та стохастичної мережі Петрі, отримана <u>за результатами експериментальних досліджень</u>



$|\mathrm{T}|/q$ - кількість переходів в одному Петрі-об’єкті

Експериментальне дослідження складності алгоритму в залежності від складності одного об’єкта