

# **ЛЕКЦІЯ 4**

## **Формалізація процесів функціонування дискретно- подійних систем мережею масового обслуговування**

Інна Вячеславівна Стеценко

д.т.н., проф., професор кафедри ІПІ

НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

# Термінологія

- У моделях масового обслуговування об'єкти, що підлягають обслуговуванню, називають замовленнями.
- Замовлення проходять одну або декілька операцій (фаз) обслуговування у певній послідовності.
- Послідовність, в якій об'єкти проходять фази обслуговування, називають маршрутом слідування замовлення. Маршрут слідування може бути заданий детерміновано або із заданими ймовірностями у місцях розгалуження.
- Система масового обслуговування (СМО) – це один чи декілька однакових пристроїв обслуговування та черга перед ними (одна!). Одна СМО виконує одну операцію (фазу) обслуговування замовлення.
- Мережа масового обслуговування - це сукупність систем масового обслуговування із заданим маршрутом слідування.
- Розрізняють мережі МО замкнуті і розімкнуті. У замкнутих, замовлення проходять обслуговування за заданим маршрутом (детермінованим чи ймовірнісним) нескінченно, повертаючись знову і знову до операцій обслуговування, які вже проходили. У розімкнутих, замовлення надходять ззовні з заданою часовою затримкою та з заданим маршрутом слідування в одну із СМО мережі масового обслуговування.
- Одне з розширень мережі МО передбачає використання різних типів замовлень в одній моделі. Кожний тип замовлень обслуговується по заданих для нього параметрах.

# Параметри та вхідні змінні мережі МО

- Кількість СМО.
- Для кожної СМО:
  - кількість пристроїв,
  - обмеження на чергу (або його відсутність),
  - параметри часу обслуговування.
- Для замкнутої мережі МО - кількість замовлень, які циркулюють в мережі
- Для розімкнутої мережі МО – параметри інтервалу надходження нового замовлення
- Для маршруту слідування
  - ймовірності слідування з однієї СМО в іншу,
  - для розімкнутої мережі, ймовірності надходження замовлення ззовні до однієї зі СМО,
  - наявність блокування маршруту між СМО та умова блокування

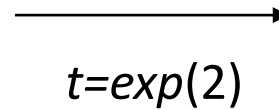
# Вихідні характеристики

- Ймовірність відмови
- Середнє завантаження пристроїв
- Середня довжина черги
- Середнє очікування в черзі

?? Якими змінними можна описати поточний стан мережі масового обслуговування

# Елементи мережі масового обслуговування

Надходження запитів ззовні



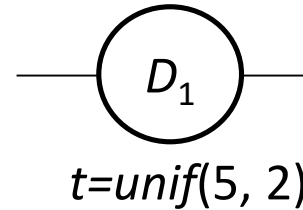
Надходження запитів на обслуговування з заданою часовою затримкою. Якщо надходження запитів ззовні немає, то цей елемент може бути відсутнім.

Параметри:

$t$  - часова затримка в умовних одиницях часу, між послідовними надходженнями запитів на обслуговування, яка може бути вказана детермінованим значенням або випадковою величиною з заданим законом розподілу. Для мережі без зовнішнього надходження має бути вказана кількість запитів, що циркулюють в ній.

# Елементи мережі масового обслуговування

Пристрій обслуговування



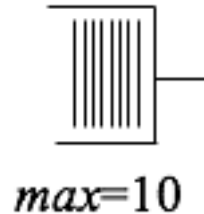
Пристрій, названий  $D_1$ , обробляє запити по одному з часовою затримкою  $t$ .

Параметри:

$t$  - часова затримка в умовних одиницях часу, необхідна для обробки одного запиту, яка може бути вказана детермінованим значенням або випадковою величиною з заданим законом розподілу.

# Елементи мережі масового обслуговування

Черга



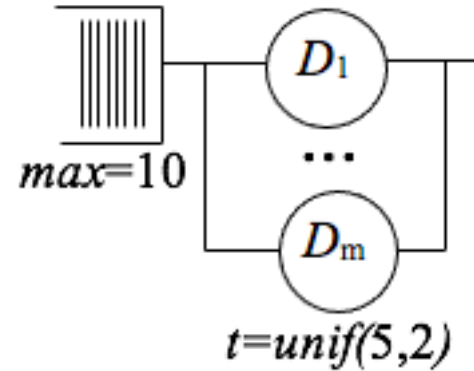
Накопичувач запитів, що очікують звільнення пристроя обслуговування.

Параметри:

*max* – обмеження на кількість місць в черзі, яке може бути задане цілим числом. За замовчуванням (тобто якщо параметр не вказаний), кількість місць в черзі не обмежена.

# Елементи мережі масового обслуговування

Система масового обслуговування (СМО)



Один або кілька ідентичних пристроїв з чергою перед ними. Черга є складовою частиною СМО, тому з'єднання між чергою та пристроями не дуга, а відрізок.

Параметри:

$m$  - кількість пристроїв у СМО



# Елементи мережі масового обслуговування

Дуга



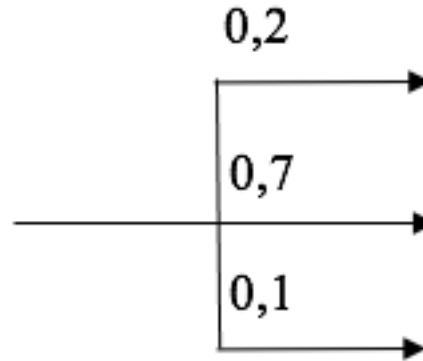
Маршрут слідування запиту до наступної СМО

Параметри:

За замовчуванням ймовірність слідування по маршруту 1.

# Елементи мережі масового обслуговування

Розгалуження маршруту



Маршрут слідування запиту до однієї з наступних СМО, вибір якої здійснюється за заданими ймовірностями.

Параметри:

Ймовірності вибору кожного маршруту слідування, які у сумі складають 1.

# Елементи мережі масового обслуговування



Маршрут слідування запиту до однієї з наступних СМО, вибір якої здійснюється за заданими пріоритетами.

Параметри:

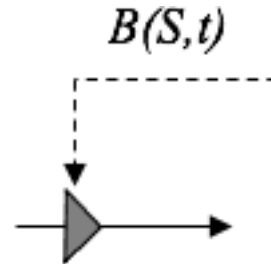
Пріоритет вибору кожного маршруту слідування, заданий цілим числом. Чим більше значення, тим більший пріоритет вибору маршруту. Якщо слідування по маршруту з найвищим пріоритетом неможливе, то обирається маршрут з більш низьким пріоритетом.

Приклад: основний та резервний пристрої обслуговування (основний має більш високий пріоритет).

Подумайте: маршрут з пріоритетом можна реалізувати умовою блокуванням маршруту.

# Елементи мережі масового обслуговування

Блокування маршруту



Встановлює блокування маршруту слідування у наступну СМО, якщо  $B(S, t)=1$ . Запит залишається у пристрої, з якого намагається вийти. Пристрій переходить у стан блокований (час обробки запиту завершився, але залишити пристрій немає можливості). Маршрут відкритий тільки за умови  $B(S, t) = 0$ .

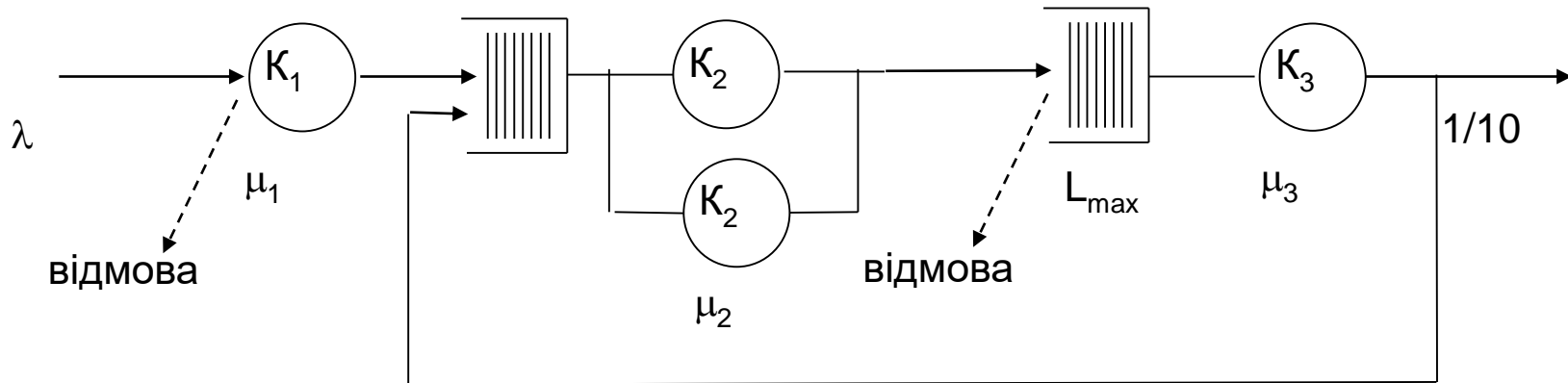
Параметри:

$B(S, t)$  – предикат, який в найбільш загальному випадку залежить від стану  $S$  моделі та/або поточному моменту часу  $t$ .

Наприклад, якщо умовою блокування маршруту є досягнення черги свого обмеження  $L_{\max}$ , то предикат має вигляд:

$$B(S, t) = (L_j(t) = L_{\max})$$

# Приклад формалізованого представлення мережі масового обслуговування



?? Скільки тут СМО? Які вони – багатоканальні чи одноканальні?

?? Чи є тут розгалуження маршруту? Якщо так, то які ймовірності визначені для нього?

# Послідовність дій, виконуваних для формалізації системи засобами мережі масового обслуговування

**Для того, щоб представити систему мережею масового обслуговування потрібно:**

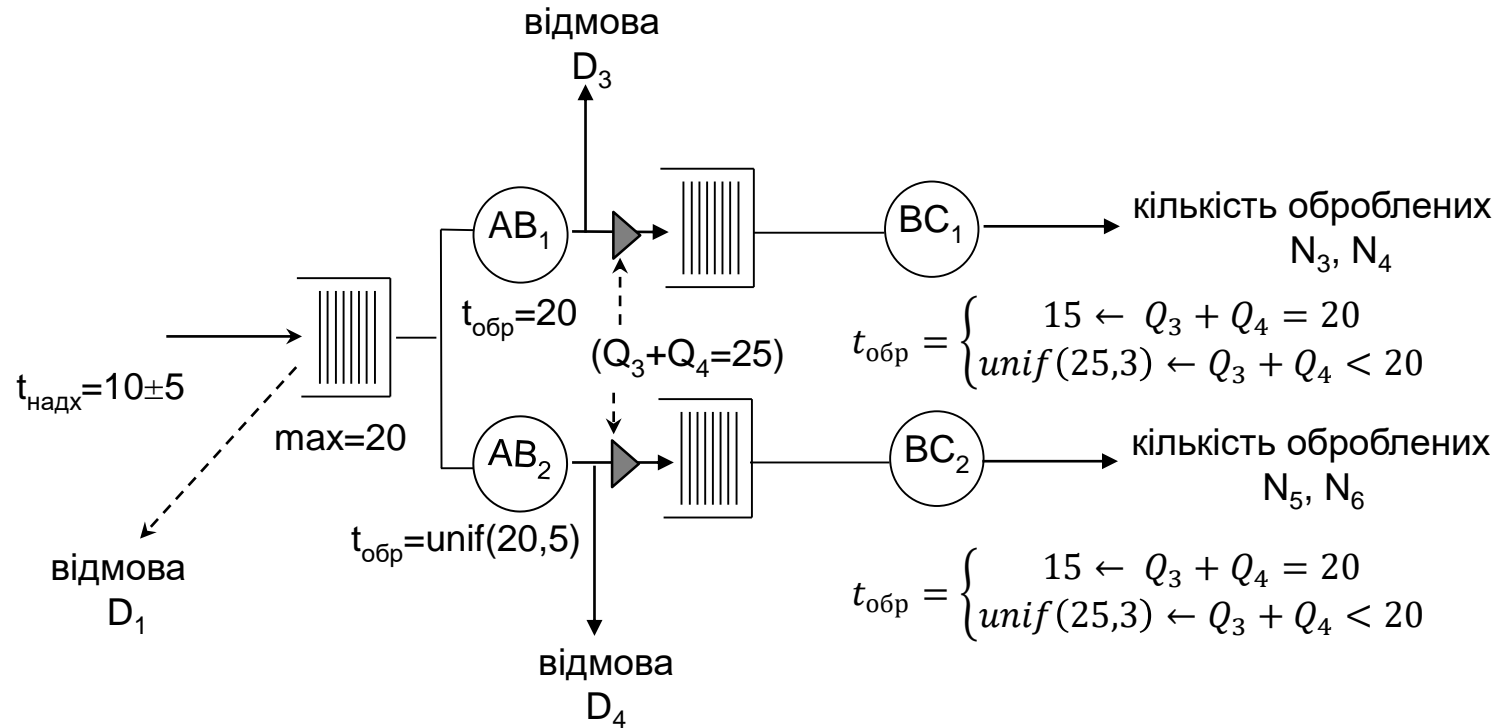
- з'ясувати, що в системі є об'єктом обслуговування;
- виділити елементи процесу обслуговування об'єктів і кожному елементу поставити у відповідність СМО;
- для кожної СМО визначити кількість пристроїв та наявність черги;
- з'єднати СМО у відповідності до процесу обслуговування;
- визначити маршрут проходження об'єкту обслуговування від однієї СМО до іншої;
- визначити умови надходження в кожну СМО (ймовірність вибору маршруту та інші);
- визначити наявність блокування маршруту та умови блокування;
- визначити числові значення параметрів кожної СМО;
- визначити числові значення параметрів зовнішнього потоку на обслуговування;
- визначити стан мережі масового обслуговування на початку моделювання.

# Приклад: Система передачі даних

Система передачі даних забезпечує передачу пакетів даних із пункту *A* в пункт *C* через транзитний пункт *B*. У пункті *A* пакети надходять через  $10 \pm 5$  мс. Тут вони буферизуються в накопичувачі ємністю 20 пакетів і передаються по будь-якій із двох ліній *AB1*-за час 20 мс або *AB2*-за час  $20 \pm 5$  мс. У пункті *B* вони знову буферизуються в накопичувачі ємністю 25 пакетів і далі передаються по лініях *BC1* (за  $25 \pm 3$  мс) і *BC2* (за 25 мс). При цьому пакети з *AB1* надходять у *BC1*, а з *AB2* - у *BC2*. Щоб не було переповнення накопичувача, у пункті *B* вводиться граничне значення його ємності - 20 пакетів. При досягненні чергою граничного значення відбувається підключення резервної апаратури і час передачі знижується для ліній *BC1* і *BC2* до 15 мс.

Метою моделювання є визначення ймовірності підключення резервної апаратури, відсотку пакетів, які не передались через завантаження ліній зв'язку, та статистичних характеристик черг пакетів у пункті *A* та у пункті *B*.

# Формалізована модель системи передачі даними



Статистичні характеристики черг пакетів у пункті А та у пункті В =

статистичні х-ки черг  $Q_1, Q_3, Q_4$  (середнє, відхилення, максимальне та мінімальне значення)

Відсоток пакетів, які не передались через завантаження ліній зв'язку =

Ймовірності підключення резервної апаратури =  $(D_1 + D_3 + D_4) / (D_1 + D_3 + D_4 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6) \cdot 100\%$

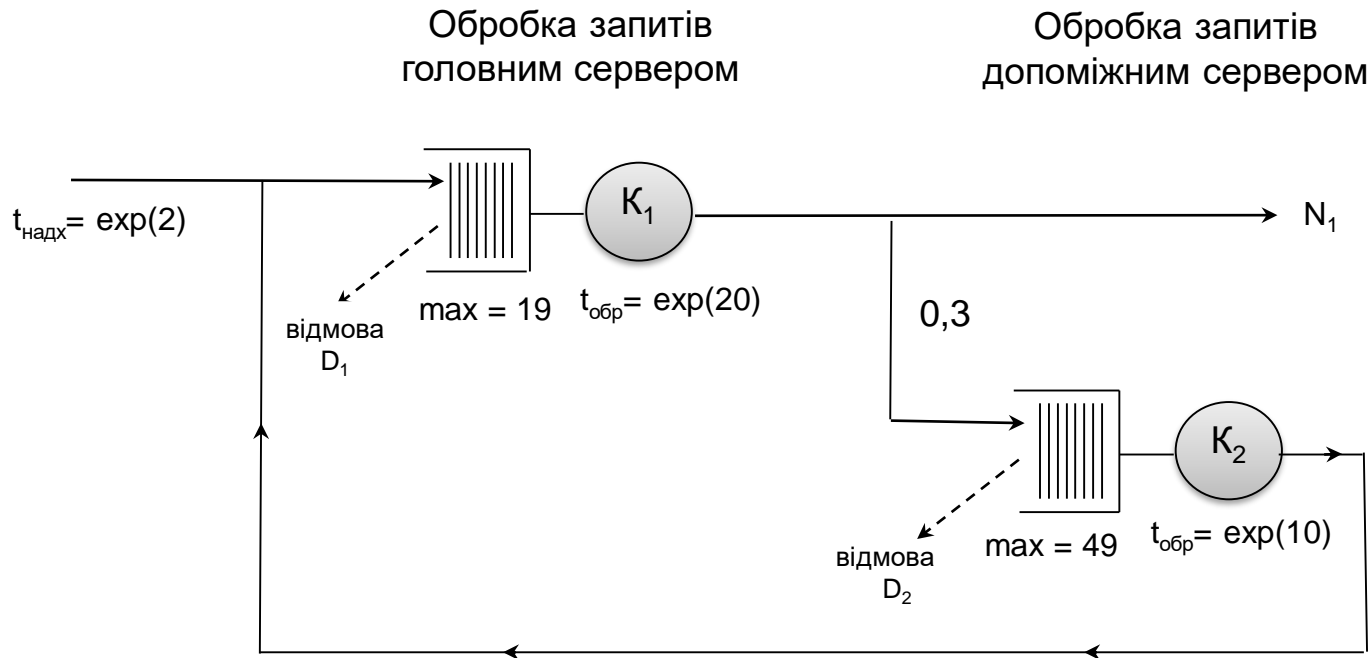


# Приклад. Інформаційна система

Інформаційна система надає інформацію про динаміку продажів торгової компанії, що має філії у різних країнах світу. Інформація агрегується та зберігається на двох серверах. З інформаційною системою працюють аналітики, які намагаються скласти прогнози та вчасно передбачити падіння попиту на певні види товарів. Запити від аналітиків надходять в середньому через 2 хвилини, з імовірністю 0,3 необхідна інформація знаходиться на головному сервері. У противному випадку потрібна додаткова інформація, щоб отримати яку головний сервер виконує запит на інший сервер. Час обробки запиту головним сервером складає в середньому 20 хвилин. Обробка запиту на іншому сервері триває в середньому 10 хвилин. Одночасно на головному сервері можуть перебувати 20 запитів, на допоміжному – 50 запитів. Через використання спільних даних обробка запитів виконується по одному на кожному з серверів. Після одержання інформації з допоміжного сервера головний сервер знову намагається обробити запит.

Метою моделювання є визначення середнього та максимального часу очікування відповіді на запит аналітиком, а також частку необроблених запитів.

# Формалізована модель обробки запитів інформаційною системою



Середній час очікування відповіді на запит =  
 (загальний час очікування в черзі  $L_1$  + загальний час очікування в черзі  $L_2$  +  
 загальний час роботи пристрою  $K_1$  + загальний час роботи пристрою  $K_2$ )/ $N_1$   
 Частка необроблених запитів =  $(D_1 + D_2) / N_1$

# Приклад. Модель обслуговування клієнтів у відділенні банку

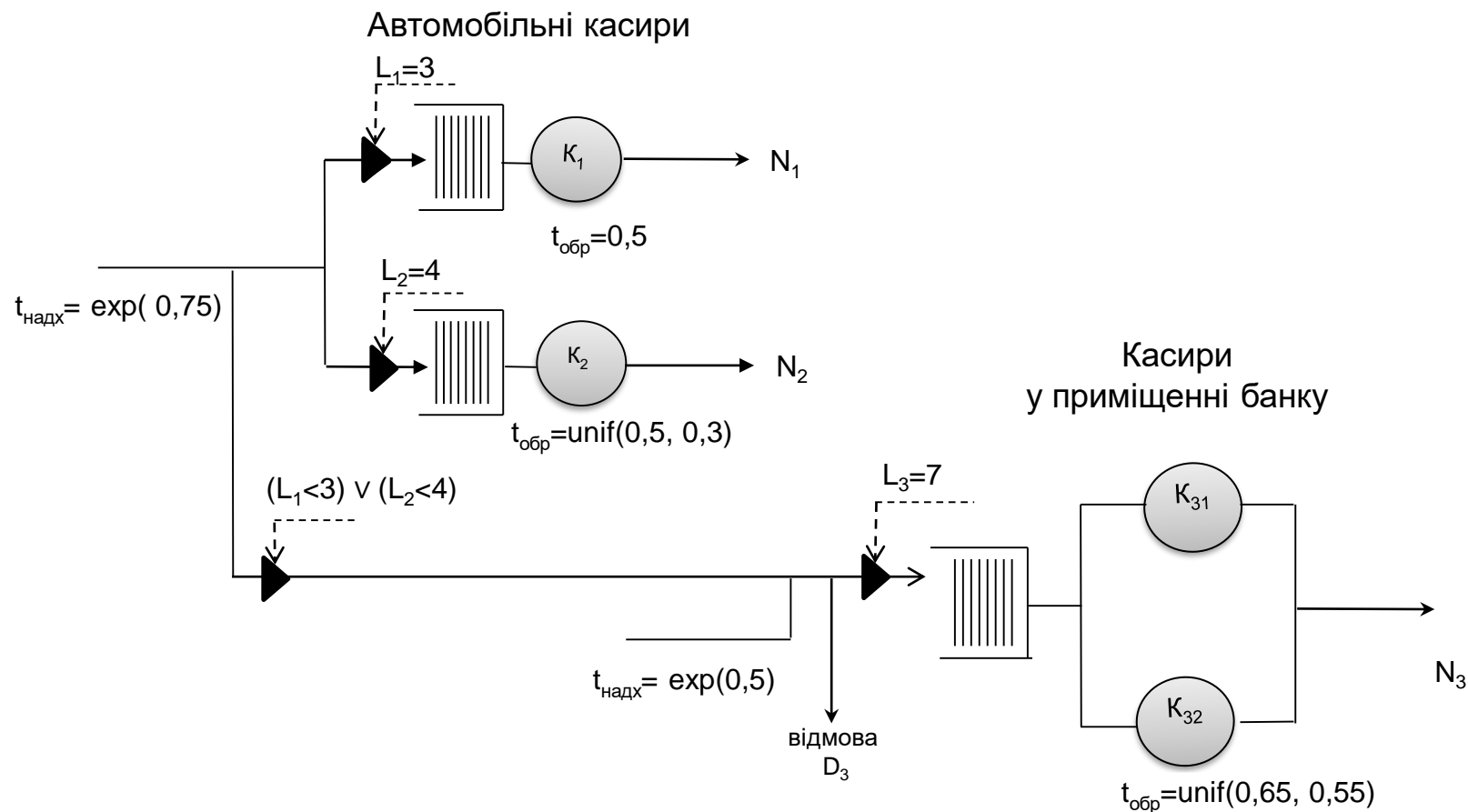
Розглядається модель банку, у якому два касири сидять у приміщенні, а два обслуговують клієнтів, що під'їжджають на автомобілях. Частина клієнтів, що надходять у банк, намагається спочатку обслуговуватись у автомобільних касирів. Час між надходженнями клієнтів цих клієнтів має експоненціальний закон розподілу з математичним сподіванням 0,75 хвилини.

У черзі до першого касира можуть знаходитись три автомобілі, а в черзі до другого – чотири. Час обслуговування першим автомобільним касиром нормально розподілено з математичним сподіванням 0,5 хвилини і середньоквадратичним відхиленням 0,25 хвилини. Тривалість обслуговування другим касиром розподілена рівномірно на інтервалі  $0,2 \div 1,0$  хвилини. Якщо клієнт, який приїхав на автомобілі, не може стати в чергу до автомобільних касирів через відсутність вільного місця, він залишає машину на стоянці і йде до касирів, що сидять у приміщенні банку.

Інша частина клієнтів йде зразу на обслуговування до касирів у приміщенні банку і стають в одну чергу з клієнтами, що прибули на автомобілях. Інтервал між їхніми прибуттями розподілений за експоненціальним законом з математичним сподіванням 0,5 хвилини. До обох касирів стоїть одна черга. У черзі не може стояти більше 7 клієнтів. Клієнти, що прийшли в банк, коли черга заповнена повністю, не обслуговуються і залишають банк. Час обслуговування в обох касирів у помешканні банку має рівномірний розподіл на інтервалі  $(0,1; 1,2)$  хвилини.

Метою моделювання є визначення завантаження автомобільних касирів і касирів у приміщенні банку, середніх довжини черг, а також ймовірності того, що клієнт піде з банку не обслугованим.

# Формалізована модель обслуговування клієнтів у відділенні банку



Завантаження автомобільних касирів визначається завантаження пристроїв  $K_1$  та  $K_2$

Завантаження касирів у приміщенні банку визначається завантаженням пристроїв  $K_{31}$  та  $K_{32}$

Середні довжини черг визначаються середніми довжинами черг  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$

Ймовірність того, що клієнт залишить банк необслугованим  $= D_3 / (N_1 + N_2 + N_3)$

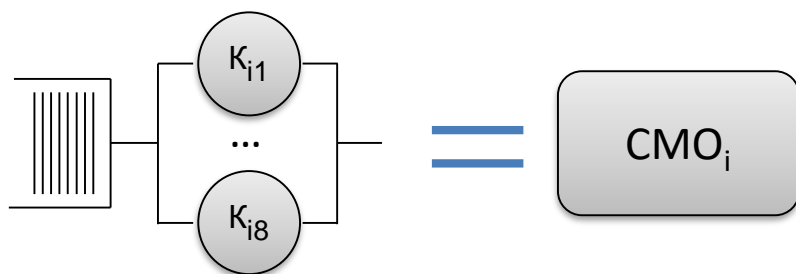
## Приклад. Модель транспортної системи

Транспортний цех об'єднання обслуговує три філії  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Вантажівки везуть вироби з  $A$  в  $B$  і з  $B$  в  $C$ , повертаючись потім в  $A$  без вантажу. Навантаження займає в середньому 20 хвилин, переїзд з  $A$  в  $B$  триває в середньому 30 хвилин, навантаження в  $B$  - 20 хвилин, переїзд в  $C$  - 40 хвилин, і переїзд в  $A$  - 10 хвилин. Якщо до моменту навантаження в  $A$  і  $B$  відсутні вироби, вантажівки йдуть далі по маршруту.

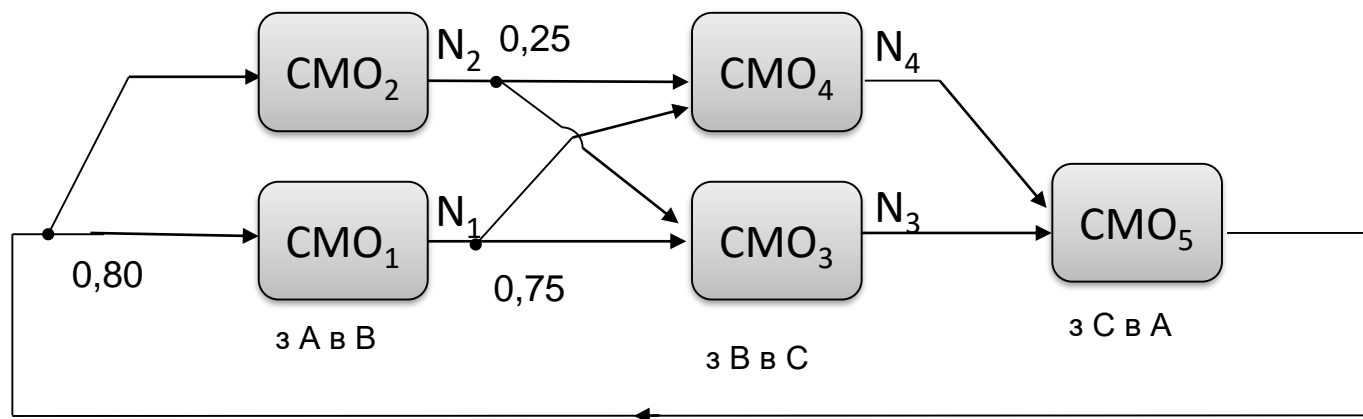
На лінії працює 8 вантажівок. Ймовірність того, що вироби на момент навантаження відсутні в  $A$  – 0,2, відсутні в  $B$  – 0,25.

Метою моделювання є визначення частоти порожніх перегонів вантажівок з  $A$  в  $B$  та з  $B$  в  $C$ .

# Формалізована модель транспортної системи



8-канальна система масового обслуговування з необмеженою чергою



$$t_1 = \exp(20) + \exp(30)$$

$$t_3 = \exp(20) + \exp(40)$$

$$t_5 = \exp(10)$$

$$\text{state}_{\text{cmo5}} = 8$$

$$t_2 = \exp(30)$$

$$t_4 = \exp(40)$$

Частота порожніх перегонів вантажівок з А в В =  $N_2 / (N_2 + N_1)$

Частота порожніх перегонів вантажівок з В в С =  $N_4 / (N_4 + N_3)$

# Обмеження на область застосування формалізму мереж масового обслуговування

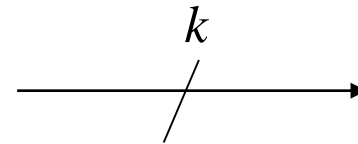
- Процеси обслуговування, в яких є ресурси для обслуговування і об'єкти, які обслуговуються.
- Всі події в системі відбуваються виключно з об'єктами (а не з ресурсами).
- Об'єкти під час обслуговування **повністю** займають ресурс.
- Перетворення, які відбуваються з об'єктом при обслуговуванні, не враховуються
- Кількість об'єктів за результатами обслуговування не змінюється (об'єкти не діляться, не зникають, не знищуються).

Для задачі, що не вкладається у формалізм мережі масового обслуговування, слід розглянути можливість застосування іншого формалізму (мережа Петрі, Петрі-об'єктна модель, або дискретно-подійна система).

Для будь-якої дискретно-подійної системи можна побудувати алгоритм імітації з просуванням часу до найближчої події та змінюванням стану моделі за подійним підходом

# Розширення формалізму мереж масового обслуговування: групування та розгрупування замовлень

Дуга з числовим параметром  $k$



Групування елементів у вказаній кількості

Параметри:

Якщо на дузі вказаний параметр  $k$ , то  $k$  запитів перетворюються на дузі в 1 запит (грубуються), що спрямовується далі по маршруту.

Якщо на дузі вказаний параметр  $1/k$ , то 1 запит перетворюється у  $k$  запитів (розгруповується), що спрямовуються далі по маршруту.



# Приклад задачі, що не вкладається у формалізм мережі масового обслуговування

Розглянемо систему керування запасами товарів одного типу деякого торгового підприємства.

Відомо, що попит на товари виникає через випадкові інтервали часу із середнім значенням  $t_{\text{надх}}$ . При наявності товару в запасі покупець, що надійшов, здійснює покупку, інакше підраховується невдоволений попит покупців на товар. Максимальний рівень запасу товарів, що зберігається, складає  $N$  товарів. Стратегія прийняття рішень про поповнення запасів складається у періодичному перегляді стану запасі з визначеним часом  $t_{\text{контролю}}$ . Якщо при перегляді стану запасів товару виявилось, що кількість товарів у запасі менша за  $m$  штук, то приймається рішення про поповнення запасу товарів і здійснюється замовлення на доставку товарів. Доставка товарів здійснюється протягом відомого часу  $t_{\text{доставки}}$ . Кількість товарів, що доставляються, доводить запас до максимального рівня запасів.

Метою моделювання є визначення такої стратегії прийняття рішень, що забезпечує найбільш ефективне функціонування торгового підприємства.

# Формалізм дискретно-подійної системи: виділення подій

Виділимо події, які відбуваються в підсистемі обслуговування покупців:

- надійшов покупець;
- покупка одиниці товару;
- товар відсутній.

Виділимо події, які відбуваються в підсистемі прийняття рішень про поповнення запасу:

- контроль стану запасу;
- прийняття рішення про достатній стан запасу;
- прийняття рішення про недостатній стан запасу;
- поповнення запасу;
- періодичність контролю запасів.