Рівняння стохастичної мережі Петрі

Формальний опис стохастичної мережі Петрі

•[Murata T. (1989). Petri Nets: Properties, Analysis and Applications*, Proceedings of IEEE*, vol.77 (4), 541-580.]
•[Zaitsev D. A. (2004). Invariants of Timed Petri Nets, *Cybernetics and Systems Analysis,* vol. 40, pages226–237 (2004)]
•[Stetsenko I.V. (2012) State equations of stochastic timed Petri nets with informational relations. *Cybernetics and Systems Analysis, v*ol. 48(5), 784–797]

Мережа Петрі:

$$N = (\mathbf{P}_N, \mathbf{T}_N, \mathbf{A}_N, \mathbf{W}_N, \mathbf{K}_N, \mathbf{I}_N, \mathbf{R}_N)$$

$\mathbf{P}_N = \{P\}$ - множина позицій

$\mathbf{T}_N = \{T\}$ - множина переходів $\qquad \mathbf{P}_N \bigcap \mathbf{T}_N = \varnothing$

$\mathbf{A}_N \subseteq (\mathbf{P}_N \times \mathbf{T}_N \bigcup \mathbf{T}_N \times \mathbf{P}_N)$ - множина дуг

$\mathbf{W} : \mathbf{A} \bigcup \mathbf{I} \to \mathrm{N}$ - кратності дуг

$\mathbf{K} = \{(c_T, b_T) \,|\, T \in \mathbf{T}, c_T \in N, b_T \in [0;1]\}$ - пріоритети та ймовірності запуску переходів

$\mathbf{R} : \mathbf{T} \to \Re_+$ - часові затримки в переходах

${}^\bullet T,\ T^\bullet$ - множина вхідних та множина вихідних позицій перехода *T*

${}^\bullet P,\ P^\bullet$ - множина вхідних і множина вихідних переходів позиції *P*

Стан стохастичної мережі Петрі

Stetsenko I.V. (2012) State equations of stochastic timed petri nets with informational relations. Cybernetics and Systems Analysis. Vol. 48, no. 5, 784–797.

$\mathbf{S}(t) = (\mathbf{M}(t), \mathbf{E}(t))$ - стан стохастичної мережі Петрі в момент часу *t*

$\mathbf{M}(t) = \left\{ M_P(t) \mid M_P(t) \in Z_+, P \in \mathbf{P} \right\}$ - стан позицій

$\mathbf{E}(t) = \left\{ E_T(t) \mid T \in \mathbf{T} \right\}$ - стан переходів

$E_T(t) = \left\{ \left[E_T(t)\right]_q \mid \left[E_T(t)\right]_q \in \Re_+, q \in \mathrm{N} \right\}$ - стан переходу *T*,
q – номер запланованої події виходу маркерів з переходу в момент часу *t*

$E_T(t) = \{\infty\}$ якщо найближчим часом не очікується вихід маркерів з переходу

$$\mathbf{S}(t) \in \left\{ \mathbf{S}(t) \mid \left(M_P(t) \geq 0 \forall P \in \mathbf{P} \right) \wedge \left(\left[E_T(t)\right]_q \geq 0 \forall T \in \mathbf{T}, \forall q = 1, \ldots \left| E_T(t) \right| \right) \right\}$$

Визначення моменту найближчої події

$$\tau_T(t) = \min_q \left[E_T(t)\right]_q,$$ - момент запланованої найближчої події для переходу T на поточний момент часу

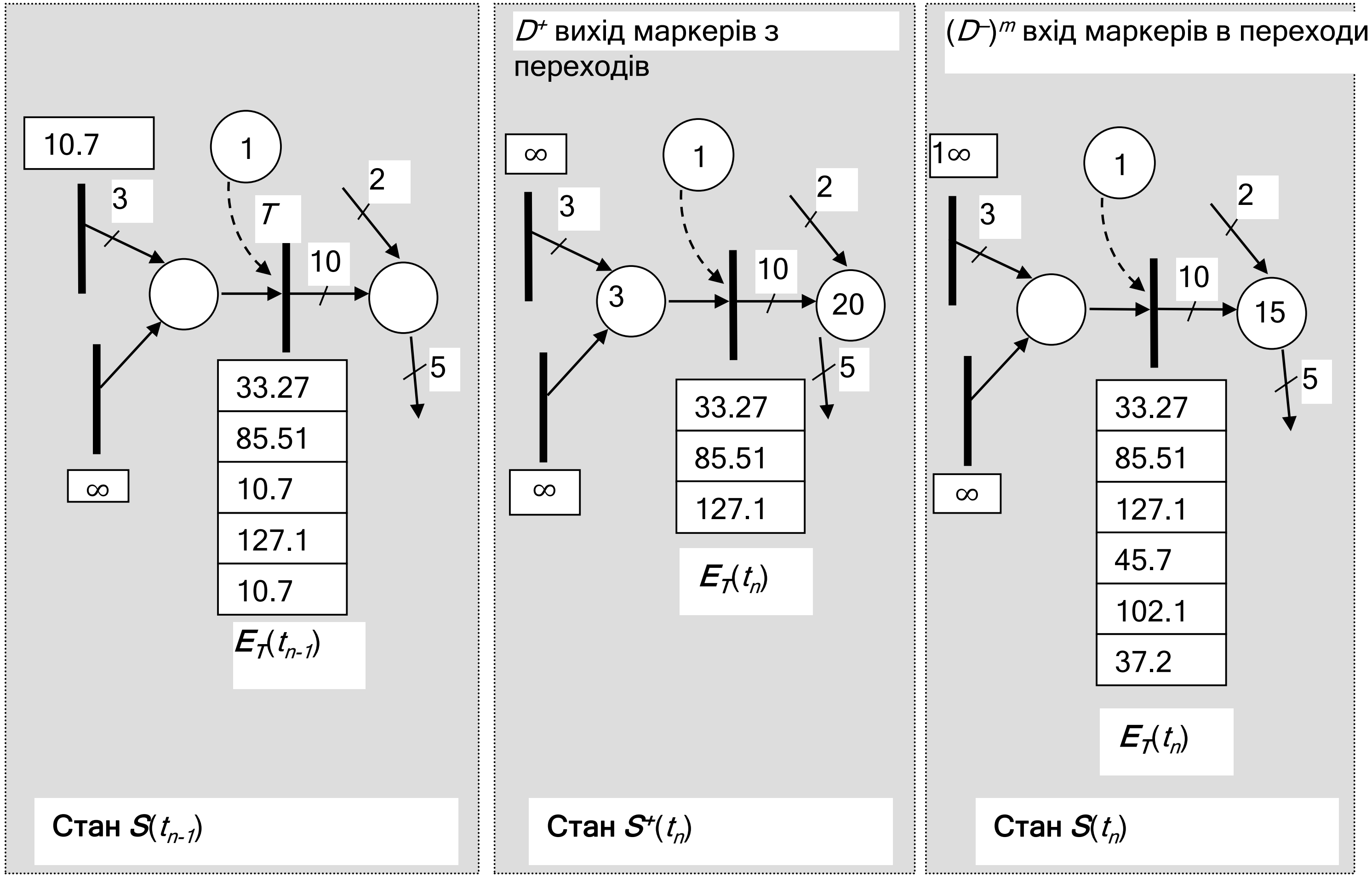
$$t' = \min_T \tau_T(t), t' \geq t$$ - момент запланованої найближчої події для мережі Петрі на поточний момент часу

$$t_n = \min_T \left(\min_q \left[E_T(t_{n-1})\right]_q \right), t_n \geq t_{n-1}$$

- визначення моменту найближчої події для мережі Петрі на поточний момент часу

Змінювання стану стохастичної мережі Петрі з часовими затримками

Змінювання стану мережі Петрі в момент часу t_n=10,7



$$\mathbf{S}(t_{n-1}) \rightarrow \mathbf{S}^{+}(t_n) \rightarrow \mathbf{S}(t_n)$$

Вихід маркерів з переходів

$Y : \mathbf{T} \times \Re \to \{0;1\}$ - предикат, що визначає для кожного переходу співпадіння моменту найближчої події з поточним моментом часу

$$(\tau_T(t) = t') \Rightarrow Y(T, t') = 1,$$
$$(\tau_T(t) \neq t') \Rightarrow Y(T, t') = 0.$$

$\forall P \in \mathbf{P}$ $\quad M_P^+(t') = M_P(t) + \sum_{T \in {}^\bullet P} Y(T, t') \cdot W_{T,P} \mid s_T(t) \mid,$ - змінювання стану позиції *P*

$\forall T \in \mathbf{T} \mid Y(T, t') = 1$ $\quad E_T^+(t') = \begin{cases} \{\infty\} \leftarrow |s_T(t)| = |E_T(t)|, \\ E_T'(t') = E_T(t) \setminus \{[E_T(t)]_q \mid q \in s_T(t)\} \leftarrow |s_T(t)| \neq |E_T(t)|, \end{cases}$

- змінювання стану переходу *T*

$D^+ : \mathbf{E}(t) \times \mathbf{M}(t) \to \mathbf{E}(t') \times \mathbf{M}(t')$ - перетворення стану стохастичної мережі Петрі

$\mathbf{S}(t') = D^+(\mathbf{S}(t))$ - змінювання стану стохастичної мережі Петрі

Вхід маркерів в переходи

$Z : T \times \Re \to \{0;1\}$ - предикат, що визначає для кожного переходу умову виконання запуску

$$\left(\forall P \in {}^{\bullet}T \quad M_P^{+}(t') \geq W_{P,T}\right) \Rightarrow Z(T, t') = 1$$

$$\left(\exists P \in {}^{\bullet}T \quad M_P^{+}(t') < W_{P,T}\right) \Rightarrow Z(T, t') = 0$$

$\Psi(t') = \{T \mid Z(T, t') = 1, T \in \mathbf{T},\}$ - множина переходів, для яких виконана умова запуску

$\Psi'(t') = \overline{\mathbf{T}_\Psi} \bigcup \tilde{\mathbf{T}}_\Psi$ - множина перехо**<u>дів</u>**, що не містять спільні позиції з іншими, та переходів, вибраних в результаті вирішення конфлікту

$X : \mathbf{T} \times \Re \to \{0;1\}$ - предикат, що визначає для кожного переходу приналежність до множини переходів, вибраних в результаті вирішення конфлікту

$$T \in \Psi'(t') \Rightarrow X(T, t') = 1$$

$$T \notin \Psi'(t') \Rightarrow X(T, t') = 0$$

Вхід маркерів в переходи

$$\forall P \in \mathbf{P} \qquad M_P(t') = M_P^+(t') - \sum_{T \in P^\bullet \setminus P^\circ} W_{P,T} \cdot X(T,t'),$$ - змінювання стану позиції *P*

$$\forall T \in \mathbf{T} \mid X(T,t') = 1 \qquad E_T(t') = \begin{cases} \{t' + R_T\} \leftarrow \tau_T = \infty \\ E_T^+(t') \bigcup \{t' + R_T\} \leftarrow \tau_T < \infty \end{cases}$$

- змінювання стану переходу *T*

$$D^- : \mathbf{E}(t') \times \mathbf{M}(t') \to \mathbf{E}(t') \times \mathbf{M}(t')$$ - перетворення стану стохастичної мережі Петрі

$$D^-(\mathbf{S}(t'))$$ - змінювання стану стохастичної мережі Петрі

Багатократний вхід маркерів в переходи

$$\left(D^{-}\right)^{m} = D^{-} \circ D^{-} \circ D^{-} \ldots \circ D^{-}$$

$$m : \left(D^{-}\right)^{m} (\mathbf{S}(t')) : \bigvee_{\mathrm{T}} Z(T, t') = 0$$

$$M_{P}(t') = M_{P}^{+}(t') - \sum_{T \in {}^{\bullet}P \setminus {}^{\circ}P} W_{P,T} \cdot u_{T}(t'),$$

$$\{u_{T}(t')\} : \quad \left(u_{T}(t') \le \min_{P \in {}^{\bullet}T} \left\{ \frac{M_{P}^{+}(t')}{W_{P,T}} \right\} \right) \wedge \left(\exists P \in {}^{\bullet}T : \sum_{T \in P^{\bullet} \setminus P^{\circ}} W_{P,T} \cdot u_{T}(t') > \max_{T \in P^{\bullet} \setminus P^{\circ}} \left(M_{P}^{+}(t') - W_{P,T} \right) \right)$$

Багатократний вхід маркерів в переходи

$$\forall P \in \mathbf{P} \quad M_P(t') = M_P^+(t') - \sum_{T \in {}^{\bullet}P \setminus {}^{\circ}P} W_{P,T} \cdot u_T(t'),$$

$$\forall T \in \mathbf{T} \qquad E_T(t') = \begin{cases} \underbrace{\{t' + R_T\} \cup \ldots \cup \{t' + R_T\}}_{u_T(t')} \leftarrow \tau_T(t') = \infty \\ E_T^+(t') \cup \underbrace{\{t' + R_T\} \cup \ldots \cup \{t' + R_T\}}_{u_T(t')} \leftarrow \tau_T(t') < \infty \end{cases}$$

Рівняння станів стохастичної мережі Петрі з часовими затримками, з конфліктними та багатоканальними переходами

$$\begin{cases} t_n = \min\limits_T \tau_T(t_{n-1}), t_n \geq t_{n-1}, \\ \mathbf{S}(t_1) = \left(D^-\right)^m \left(\mathbf{S}(t_0)\right), \\ \mathbf{S}(t_n) = \left(D^-\right)^m \left(D^+(\mathbf{S}(t_{n-1}))\right), \\ n = 2,3\ldots \end{cases}$$

$\tau_T(t) = \min\limits_q \left[E_T(t)\right]_q$ - найближчий момент виходу маркерів з переходу

$D^+(\mathbf{S}(t_{n-1}))$ - перетворення стану мережі Петрі, пов'язане з виходом маркерів з переходів,

$\left(D^-\right)^m(\mathbf{S}(t_n))$ - перетворення стану мережі Петрі, пов'язане з входом маркерів в переходи

m - кількість входів маркерів в переходи, за якої досягається стан мережі Петрі при якому жоден з переходів мережі Петрі не запускається

$$m : \left(D^-\right)^m(\mathbf{S}(t_n)) : \bigvee_{\mathrm{T}} Z(T, t_n) = 0$$

$$\left(\forall P \in {}^\bullet T \quad M_P^+(t_n) \geq W_{P,T}\right) \Rightarrow Z(T, t_n) = 1$$

$$\left(\exists P \in {}^\bullet T \quad M_P^+(t_n) < W_{P,T}\right) \Rightarrow Z(T, t_n) = 0$$

Аналіз обчислювальної складності

Stetsenko I.V., Dyfuchyn A., Dorosh V.I. Petri-Object Simulation: Software Package and Complexity. Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS’2015). Warsaw (Poland), 2015. P.381-385.

$$O\left(\left|\mathbf{T}\right|^{2} \cdot V \cdot timeMod \cdot \left(\underset{T\in\mathbf{T}}{mean}\left|T^{\bullet}\right| + V + V \cdot \left|\mathbf{T}\right| \cdot \underset{T\in\mathbf{T}}{mean}\left|{}^{\bullet}T\right| + V^{2} \cdot \left|\mathbf{T}\right| + V \cdot K^{2}\right)\right)$$

$$V = \underset{T\in\mathbf{T}}{mean}\, v_{T}$$ - середня кількість активних каналів переходу

$$K = mean\left|\mathbf{T}_{\Psi}\right|$$ - середня кількість конфліктних переходів

Матричний опис стану стохастичної мережі Петрі

$$a^{+}_{P,T} = \begin{cases} W_{T,P}, T \in {}^{\bullet}P \\ 0, T \notin {}^{\bullet}P \end{cases}$$ - матриця виходів

$$\mathbf{a}^{+} = \left\| a^{+}_{T,P} \right\|$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{+} - \mathbf{a}^{-}$$

$$a^{-}_{P,T} = \begin{cases} W_{P,T}, T \in P^{\bullet} \setminus P^{\circ} \\ 0, T \notin P^{\bullet} \setminus P^{\circ} \end{cases}$$ - матриця входів

$$\mathbf{a}^{-} = \left\| a^{+}_{T,P} \right\|$$

$$\mathbf{v}(t) = \left\| v_T(t) \right\|$$ - вектор кількості активних каналів переходів

$$v_T(t) = \begin{cases} \left| E_T(t) \right|, \tau_T < \infty, \\ 0, \tau_T = \infty. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left\| \gamma_T(t) \right\|$$ - вектор кількості входів в переходи за період часу $[t_0, t]$

$$\sum_{j=1}^{n} Z(T, t_j) \cdot u_T(t_j) = \gamma_T(t_n)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \left\| \eta_T(t) \right\|$$ - вектор кількості виходів з переходів за період часу $[t_0, t]$

$$\sum_{j=1}^{n} Y(T, t_j) \cdot | s_T(t_{j-1}) | = \eta_T(t_n)$$

$$\mathbf{M}(t) = M_P(t)$$ - вектор маркірування

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{M}(t) + \mathbf{a}^{+} \cdot \mathbf{v}(t)$$ - вектор розширеного маркірування

!!!!! враховує не тільки маркери, які в позиціях, але й маркери, які очікують виходу з переходів

Матричні рівняння станів стохастичної мережі Петрі з часовими затримками, з багатоканальними та конфліктними переходами, з інформаційними зв’язками

$$\mathbf{M}(t_n)+\mathbf{a}^{+}\cdot\mathbf{v}(t_n)-\left(\mathbf{M}(t_0)+\mathbf{a}^{+}\cdot\mathbf{v}(t_0)\right)=\mathbf{a}^{+}\cdot\boldsymbol{\gamma}(t_n)-\mathbf{a}^{-}\cdot\boldsymbol{\gamma}(t_n)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_n)=-\mathbf{v}(t_n)+\mathbf{v}(t_0)+\boldsymbol{\gamma}(t_n)$$

В термінах вектора розширеного маркірування:

$$\boldsymbol{\mu}(t_n)=\boldsymbol{\mu}(t_0)+\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}(t_n)$$

Аналогічне базовому, але сформульованого для розширеного маркірування та вектора кількості входів в перехід

$$\boldsymbol{\eta}(t_n)=-\mathbf{v}(t_n)+\mathbf{v}(t_0)+\boldsymbol{\gamma}(t_n)$$

Додаткове рівняння формулює залежність між кількістю запусків, кількістю входів в переходи та кількістю виходів з переходів

Порівняння матричних рівнянь станів стохастичної мережі Петрі з часовими затримками з відомими рівняннями станів мереж Петрі

$I=\varnothing \quad \Rightarrow \quad P^{\circ}=\varnothing \quad \Rightarrow$ Матричні рівняння станів стохастичної мережі Петрі з часовими затримками без інформаційних зв'язків

$\chi_T(t_n)=\min\{\gamma_T(t_n),\eta_T(t_n)\}$ - кількість завершених запусків переходу

$\boldsymbol{\eta}(t_n)=\boldsymbol{\gamma}(t_n)=\boldsymbol{\chi}(t_n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t_n)=\mathbf{v}(t_0),\ \Delta\boldsymbol{\mu}=\Delta\mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{M}=\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\chi}(t_n)$

$R_T=0 \ \Rightarrow \ v_T(t)=0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\mu}(t)=\mathbf{M}(t),\ \boldsymbol{\eta}(t_n)=\boldsymbol{\gamma}(t_n) \ \Rightarrow \ \mathbf{M}(t_n)=\mathbf{M}(t_0)+(\mathbf{a}^+-\mathbf{a}^-)\cdot\boldsymbol{\chi}(t_n) \ \Rightarrow \ \mathbf{M}_n=\mathbf{M}_0+\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{x} \ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Фундаментальне рівняння станів базової мережі Петрі

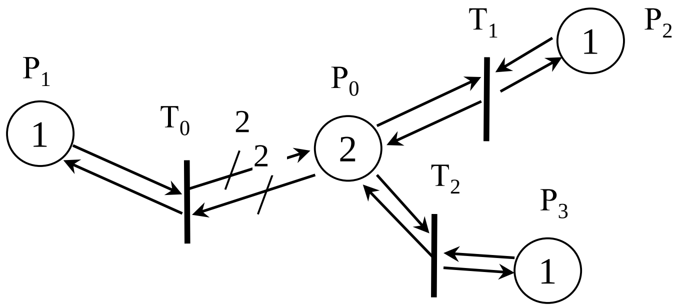
$R_T=const \ \Rightarrow \ t_n=t_0+n\cdot\Delta t$

$\Delta t=1,\ t_0=0 \ \Rightarrow \ t_n=n$

$\mathbf{M}(n)-\mathbf{M}(0)=(\mathbf{a}^+-\mathbf{a}^-)\cdot\boldsymbol{\gamma}(n)-\mathbf{a}^+\cdot(\mathbf{v}(n)-\mathbf{v}(0)) \ \Rightarrow \ \mathbf{M}(n)-\mathbf{M}(0)=\mathbf{a}^+\cdot(\boldsymbol{\gamma}(n)-\mathbf{v}(n)+\mathbf{v}(0))-\mathbf{a}^-\cdot\boldsymbol{\gamma}(n) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \mathbf{M}(n)-\mathbf{M}(0)=\mathbf{a}^+\cdot\boldsymbol{\eta}(n)-\mathbf{a}^-\cdot\boldsymbol{\gamma}(n) \quad \Rightarrow$ Фундаментальне рівняння станів детермінованої мережі Петрі з часовими затримками

Приклад



$\mathbf{T} = \{T_0, T_1, T_2\}$

$\mathbf{P} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$

$\mathbf{A} = \{(P_0, T_0), (T_0, P_0), (P_0, T_1), (T_1, P_0), (P_0, T_2), (T_2, P_0), (P_1, T_0), (T_0, P_1), (P_2, T_1), (T_1, P_2), (P_3, T_2), (T_2, P_3)\}$

$\mathbf{K} = \{(0, 1.0), (0, 1.0), (0, 1.0)\}$

$\mathbf{R} = \{1.0 \mp 0.5, 1.0 \mp 0.5, 1.0 \mp 0.5\}$

$\mathbf{I} = \varnothing$

$\mathbf{W} = \{2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

$\mathbf{S}^{+}(\mathbf{0.0}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{\infty\} \\ \{\infty\} \\ \{\infty\} \end{pmatrix} \right\}$

$P_0 \geq 2, P_1 \geq 1 \Longrightarrow Z(T_0, 0.0) = 1$

$P_0 \geq 1, P_2 \geq 1 \Longrightarrow Z(T_1, 0.0) = 1$

$P_0 \geq 1, P_3 \geq 1 \Longrightarrow Z(T_2, 0.0) = 1$

$\Psi = \{T_0, T_1, T_2\}$ P_0 - конфліктна позиція, можливі варіанти T_0 або $\{ T_1, T_2 \}$

Припустимо вибір пав на $\{ T_1, T_2 \}$

$\Psi' = \{T_1, T_2\} \Longrightarrow \mathrm{X}(T_1) = 1, \quad \mathrm{X}(T_2) = 1$

D^{-} :

$M_{P_0}(0.0) = 2 - (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 0$

$M_{P_1}(0.0) = 1 - 0 = 1$

$M_{P_2}(0.0) = 1 - 1 \cdot 1 = 0$

$M_{P_3}(0.0) = 1 - 1 \cdot 1 = 0$

$E_{T_0}(0.0) = \{\infty\}$

$E_{T_1}(0.0) = \{0.0 + 0.7\}$

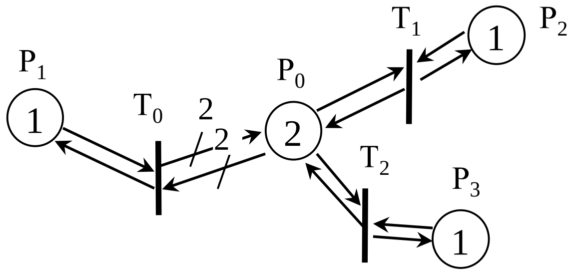
$E_{T_2}(0.0) = \{0.0 + 1.2\}$

$\mathbf{S}(\mathbf{0.0}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{\infty\} \\ \{0.7\} \\ \{1.2\} \end{pmatrix} \right\}$

$Z(T_0, 0.0) = 0$

$Z(T_1, 0.0) = 0$

$Z(T_2, 0.0) = 0$



$t_1 = \min\{\infty, 0.7, 1.2\} = 0.7$

D^+ :

$\Upsilon(T_0, 0.7) = 0$

$\Upsilon(T_1, 0.7) = 1$

$\Upsilon(T_2, 0.7) = 0$

$M_{P_0}(0.7) = 0 + 1 \cdot 1 = 1$ $E_{T_0}(0.7) = \{\infty\}$

$M_{P_1}(0.7) = 1 + 0 = 1$ $E_{T_1}(0.7) = \{\infty\}$

$M_{P_2}(0.7) = 0 + 1 \cdot 1 = 1$ $E_{T_2}(0.7) = \{1.2\}$

$M_{P_3}(0.7) = 0 + 0 = 0$

$$\mathbf{S}^+(\mathbf{0.7}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{\infty\} \\ \{\infty\} \\ \{1.2\} \end{pmatrix} \right\}$$

$P_0 < 2, P_1 \geq 1 \Longrightarrow Z(T_0, 0.0) = 0$ $\Psi = \{T_1\} \Longrightarrow X(T_1) = 1$

$P_0 \geq 1, P_2 \geq 1 \Longrightarrow Z(T_1, 0.0) = 1$

$P_0 < 1, P_3 \geq 1 \Longrightarrow Z(T_2, 0.0) = 0$

D^- :

$M_{P_0}(0.7) = 1 - 1 \cdot 1 = 0$ $E_{T_0}(0.7) = \{\infty\}$

$M_{P_1}(0.7) = 1 - 0 = 1$ $E_{T_1}(0.7) = \{0.7+0.9\}$

$M_{P_2}(0.7) = 1 - 1 \cdot 1 = 0$ $E_{T_2}(0.7) = \{1.2\}$

$M_{P_3}(0.7) = 0 - 0 = 0$

$$\mathbf{S}(\mathbf{0.7}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{\infty\} \\ \{1.6\} \\ \{1.2\} \end{pmatrix} \right\}$$

$Z(T_0, 0.7) = 0$

$Z(T_1, 0.7) = 0$

$Z(T_2, 0.7) = 0$