Obliczenia naukowe: Sprawozdanie 1

Szymon Hładyszewski

23 listopada 2025

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

Zadanie polegało na zaimplementowaniu metody bisekcji, która znajdowała miejsca zerowe funkcji. Innymi słowy szukaliśmy rozwiązania równania $f(x) = 0$.

1.2 Rozwiązanie

Implementacja metody bisekcji została wykonana w pliku `zadanie13.jl`. Poniżej znajduje się pseudokod tejże funkcji:

```
function bisection(f, a, b, delta, epsilon)
    fa = f(a)
    fb = f(b)
    e = b - a
    if sgn(a) * sgn(b) > 0
        return (Nothing, Nothing, Nothing, 1)
    end if
    it = 1
    r = a + e
    v = f(r)
    while true do
        e = e / 2
        r = a + e
        v = f(r)
        if abs(e) < delta || abs(v) < epsilon then
            return (r, v, it, 0)
        end if
        if sgn(a) * sgn(v) <= 0 then
            b = r
            fb = v
        else
            a = r
            fa = v
        end if
        it = it + 1
    end while
end function
```

Funkcja ta polega na tym, że w każdym kroku dzieli przedział na pół i wybiera tę połowę, w której znajduje się miejsce zerowe. Proces ten powtarza się aż do osiągnięcia zadanej dokładności δ lub ϵ. Funkcja przyjmuje jako argumenty funkcję f, przedział $[a, b]$, dokładności δ i ϵ. Zwraca przybliżone miejsce zerowe, wartość funkcji w tym miejscu, liczbę wykonanych iteracji oraz kod błędu (0 oznacza brak błędu).

1.3 Wyniki

Wyniki działania funkcji zostały przetestowane w pliku `test.jl`. Widzimy, że działaja one dla każdych zadanych funkcji i parametrów.

1.4 Wnioski

Metoda bisekcji jest skuteczną metodą znajdowania miejsc zerowych funkcji, pod warunkiem, że funkcja jest ciągła na danym przedziale i zmienia znak na jego końcach.

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

Zadanie polegało na zaimplementowaniu metody Newtona, która znajdowała miejsca zerowe funkcji. Innymi słowy szukaliśmy rozwiązania równania $f(x) = 0$.

2.2 Rozwiązanie

Implementacja metody Newtona została wykonana w pliku `zadanie13.jl`. Poniżej znajduje się pseudokod tejże funkcji:

```
function mstycznych(f, pf, x0, delta, epsilon, maxit)
    v = f(x0)
    if abs(v) < epsilon then
        return (x0, v, 0, err = 0)
    end if
    for it from 1 to maxit do
        pfx0 = pf(x0)
        if abs(pfx0) < macheps() then
            return (x0, v, it, err = 2) //pochodna bliska zeru
        end if
        x1 = x0 - v / pfx0
        v = f(x1)
        if abs(x1 - x0) < delta || abs(v) < epsilon then
            return (x1, v, it, err = 0)
        end if
        x0 = x1
    end for
    return (x0, v, maxit, err = 1) //przekroczenie maxit
end function
```

Funkcja ta polega na iteracyjnym przybliżaniu miejsca zerowego za pomocą stycznych do wykresu funkcji. Proces ten powtarza się aż do osiągnięcia zadanej dokładności δ lub ϵ, lub przekroczenia maksymalnej liczby iteracji. Funkcja przyjmuje jako argumenty funkcję f, jej pochodną pf, punkt startowy $x0$, dokładności δ i ϵ, oraz maksymalną liczbę iteracji $maxit$. Zwraca przybliżone miejsce zerowe, wartość funkcji w tym miejscu, liczbę wykonanych iteracji oraz kod błędu (0 oznacza brak błędu).

2.3 Wyniki

Wyniki działania funkcji zostały przetestowane w pliku `test.jl`. Widzimy, że działaja one dla każdych zadanych funkcji i parametrów.

2.4 Wnioski

Metoda Newtona jest skuteczną metodą znajdowania miejsc zerowych funkcji, pod warunkiem, że funkcja jest dostatecznie gładka i punkt startowy jest odpowiednio dobrany.

3 Zadanie 3

3.1 Opis problemu

Zadanie polegało na zaimplementowaniu metody siecznych, która znajdowała miejsca zerowe funkcji. Innymi słowy szukaliśmy rozwiązania równania $f(x) = 0$.

3.2 Rozwiązanie

Implementacja metody siecznych została wykonana w pliku `zadanie13.jl`. Poniżej znajduje się pseudokod tejże funkcji:

```
function msiecznych(f, x0, x1, delta, epsilon, maxit)
    f0 = f(x0)
    f1 = f(x1)
    for it from 1 to maxit do
        if abs(f1) > abs(f0) then
            swap(x0, x1)
            swap(f0, f1)
        end if
        s = (x1 - x0) / (f1 - f0)
        x0 = x1
        f0 = f1
        x1 = x1 - f1 * s
        f1 = f(x1)
        if abs(x1 - x0) < delta || abs(f1) < epsilon then
            return (x1, f1, it, err = 0)
        end if
    end for
    return (x1, f1, maxit, err = 1) //przekroczenie maxit
end function
```

Funkcja ta polega na iteracyjnym przybliżaniu miejsca zerowego za pomocą linii łączącej dwa punkty na wykresie funkcji. Proces ten powtarza się aż do osiągnięcia zadanej dokładności δ lub ϵ, lub przekroczenia maksymalnej liczby iteracji. Funkcja przyjmuje jako argumenty funkcję f, dwa punkty startowe $x0$ i $x1$, dokładności δ i ϵ, oraz maksymalną liczbę iteracji $maxit$. Zwraca przybliżone miejsce zerowe, wartość funkcji w tym miejscu, liczbę wykonanych iteracji oraz kod błędu (0 oznacza brak błędu).

3.3 Wyniki

Wyniki działania funkcji zostały przetestowane w pliku `test.jl`. Widzimy, że działaja one dla każdych zadanych funkcji i parametrów.

3.4 Wnioski

Metoda siecznych jest skuteczną metodą znajdowania miejsc zerowych funkcji, pod warunkiem, że funkcja jest dostatecznie gładka i punkty startowe są odpowiednio dobrane.

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Zadanie polegało na wyznaczeniu miejsca zerowego funkcji $f(x) = sin(x) - (1/2 * x)^2$ za pomocą zaimplementowanych metod: bisekcji, Newtona i siecznych.

4.2 Rozwiązanie

Do wyznaczenia miejsca zerowego funkcji $f(x) = sin(x) - (1/2 * x)^2$ zostały użyte wcześniej zaimplementowane metody. Rozwiązanie zadania zostało zrobione w pliku `zadanie4.jl`. Liczba iteracji dla Newtona i siecznych została wyznaczona eksperymentalnie.

4.3 Wyniki i interpretacja

Poniższa tabela przedstawia uzyskane wyniki:

Metoda	Pierwiastek	Wartość dla tego pierwiastka	Liczba iteracji	kod err
Metoda bisekcji	1.9337539672851562	$-2.7027680138402843 \times 10^{-7}$	16	0
Metoda Newtona(stycznych)	1.933753779789742	$-2.2423316314856834 \times 10^{-8}$	4	0
Metoda siecznych	1.933753644474301	$1.564525129449379 \times 10^{-7}$	4	0

Tabela 1: Wyniki znalezienia miejsca zerowego funkcji $f(x) = sin(x) - (1/2 * x)^2$

4.4 Wnioski końcowe

Na podstawie tabeli widzimy, że wszystkie trzy metody skutecznie znalazły miejsce zerowe funkcji $f(x) = sin(x) - (1/2 * x)^2$. Metoda Newtona i metoda siecznych osiągnęły zadowalającą dokładność w zaledwie 4 iteracjach, podczas gdy metoda bisekcji wymagała 16 iteracji. Warto zauważyć, że metoda Newtona i metoda siecznych są zazwyczaj szybsze od metody bisekcji, ale wymagają znajomości pochodnej funkcji (w przypadku Newtona) lub dwóch punktów startowych (w przypadku siecznych).

5 Zadanie 5

5.1 Opis problemu

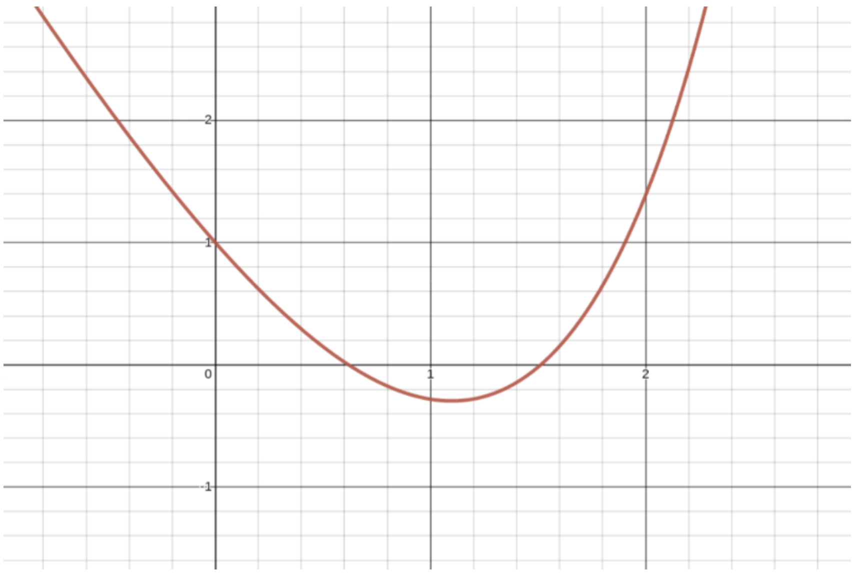
Zadanie polegało na znalezieniu przecięcia się dwóch funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$ przy dokładności $\delta = 10^{-4}$ oraz $\epsilon = 10^{-4}$.

5.2 Rozwiązanie

Aby znaleźć przecięcie się dwóch funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$, należy rozwiązać równanie $3x - e^x = 0$. Do tego celu zostały użyte wcześniej zaimplementowane metody. Rozwiązanie zadania zostało zrobione w pliku `zadanie5.jl`.

5.3 Wyniki i interpretacja

Poniższy obrazek przedstawia wykres funkcji $f(x) = 3x - e^x$. Widzimy, że mamy dwa miejsca zerowe w przedziałach $[0.5, 1.0]$ oraz $[1.0, 2.0]$.



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = 3x - e^x$

Poniższa tabela przedstawia uzyskane wyniki:

Przedział	Pierwiastek	Wartość dla tego pierwiastka	Liczba iteracji	kod err
$[0.5, 1.0]$	0.6190185546875	$-4.883657026022448 \times 10^{-5}$	12	0
$[1.0, 2.0]$	1.51214599609375	$-1.7583570236290313 \times 10^{-5}$	14	0

Tabela 2: Wyniki znalezienia przecięcia się funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$

5.4 Wnioski końcowe

Aby zastosować metodę bisekcji, należało przekształcić oba wzory funkcji do równania $f(x) = 3x - e^x = 0$. Ponadto, należało przeanalizować, na jakich przedziałach spodziewać się można miejsca zerowego. Dopier wtedy można zastosować metodę bisekcji.

6 Zadanie 6

6.1 Opis problemu

Zadanie polegało na znalezieniu miejsc zerowych funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$ z dokładnościami $\delta = 10^{-5}$ oraz $\epsilon = 10^{-5}$. Należało wówczas wykorzystac metodę bisekcji, Newtona i siecznych i przeanalizować co się wydarzy, gdy dla Newtona dla f_1 weźmiemy $x_0 > 1$ a dla f_2 wybierzemy $x_0 >= 1$.

6.2 Rozwiązanie

Do wyznaczenia miejsc zerowych funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$ zostały użyte wcześniej zaimplementowane metody. Rozwiązanie zadania zostało zrobione w pliku `zadanie6.jl`.

6.3 Wyniki i interpretacja

- Metoda bisekcji: przedział $[0.0, 2.0]$
- Metoda Newtona: przybliżenie początkowe: $x_0 = 0.5$, pochodna funkcji: $f_1'(x) = -e^{1-x}$
- Metoda siecznych: przybliżenia początkowe: $x_0 = 0.0$, $x_1 = 2.0$

Rysunek 2: Fragment wykresu funkcji $f(x) = e^{1-x} - 1$

6.4 Wnioski dla funkcji f_1

Wszystkie trzy metody zadziałały poprawnie, zwracając kod błędu $err = 0$. Metoda bisekcji była najszybsza, znajdując pierwiastek w zaledwie jednej iteracji. Świadczy to o tym, że pierwiastek znajdował się dokładnie w połowie zadanego przedziału początkowego. Metoda Newtona i siecznych również zwróciły

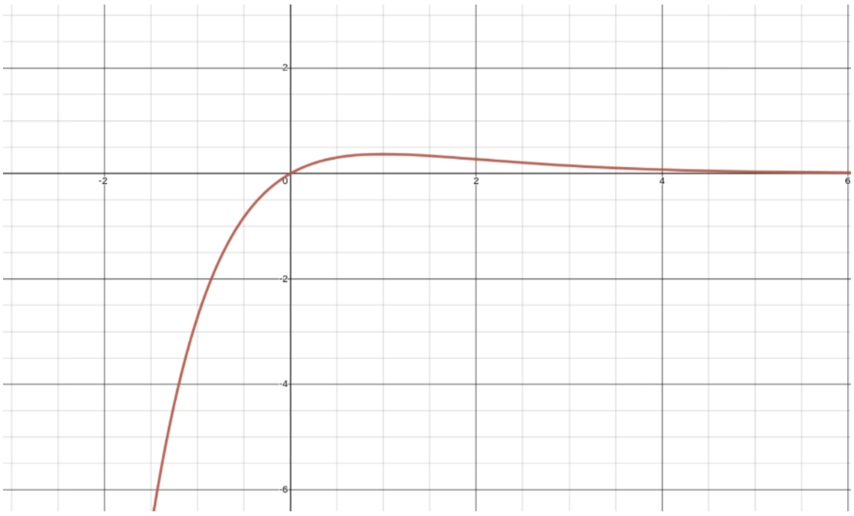
Metoda	Przybliżenie x	Wartość $f(x)$	Iter.	Err
Bisekcji	1.000000000	0.0	1	0
Newtona	0.999999999	1.12×10^{-10}	4	0
Siecznych	1.000001760	-1.76×10^{-6}	6	0

Tabela 3: Wyniki poszukiwania pierwiastka $x \approx 1.0$

poprawne wyniki, potrzebując do tego kolejno 4 i 6 iteracji. Wszystkie 3 metody dały wyniki bardzo bliskie dokładnej wartości pierwiastka $x = 1.0$.

6.5 Rozwiązanie dla funkcji $f_2(x) = x \cdot e^{-x}$

- Metoda bisekcji: przedział $[-1.0, 2.0]$
- Metoda Newtona: przybliżenie początkowe: $x_0 = 0.5$, pochodna funkcji: $f_2'(x) = \frac{1-x}{e^x}$
- Metoda siecznych: przybliżenia początkowe: $x_0 = -1.0$, $x_1 = 1.0$



Rysunek 3: Fragment wykresu funkcji $f(x) = x \cdot e^{-x}$

Tabela 4: Wyniki metod numerycznych dla pierwiastka bliskiego zeru

Metoda	Przybliżenie x	Wartość $f(x)$	Iter.	Err
Bisekcji	7.63×10^{-6}	7.63×10^{-6}	17	0
Newtona	-3.06×10^{-7}	-3.06×10^{-7}	5	0
Siecznych	1.74×10^{-8}	1.74×10^{-8}	18	0

6.6 Wnioski dla funkcji f_2

Wszystkie trzy metody zadziałały poprawnie, zwracając kod błędu $err = 0$. Metoda Newtona była najszybsza, znajdując pierwiastek w 5 iteracjach. Metoda bisekcji potrzebowała 17 iteracji, a metoda siecznych 18 iteracji. Wszystkie trzy metody dały wyniki bardzo bliskie dokładnej wartości pierwiastka $x = 0$.

Wybór punktu startowego $x_0 > 1$ powoduje, że pochodna funkcji f_1 jest bardzo mała. W rezultacie otrzymujemy kod błędu $err = 1$, co oznacza, że nie udało się osiągnąć zadanej dokładności w maksymalnej liczbie iteracji. Oczywiście, gdyy x_0 » 1, to pochodna jest tak mała, że staje się niereprentowalna i w rezultacie otrzymujemy kod błędu $err = 2$.

Wybór punktu startowego $x_0 > 1$, funkcja zwraca niepoprawne wyniki. Wynika to z faktu, że dla x_0 » 1, $f_2(x_0) < \epsilon$ i funkcja kończy działanie przeprowadzając 0 iteracji (lub dla x_0 bliskiego 1, wykonuje kilka iteracji, ale zbliża się do większych wartości x, a nie do pierwiastka). Gdy weźmiemy $x_0 = 1$ to pochodna funkcji f_2 w tym punkcie jest równa 0, co prowadzi do otrzymania kodu błędu $err = 2$.