Institución Universitaria

generalización de $\vec{B}$ para espira de corriente de n lados

Emmanuel Morales Loaiza

Facultad de Ingeniería, Instituto Tecnológico Metropolitano

Tener en cuenta que esto solo sirve si el punto donde evaluamos esta en el centro de la espira

Cuando estaba estudiando física de campos me di cuenta de que una de las cosas mas aburridoras de calcular es $\vec{B}$ para una espira de regular de n lados,entonces entre trabajo y trabajo, aquí esta la solución a ese pequeño inconveniente.

Para generalizar la espira, tenemos que tener dos factores en cuenta, los lados de la espira (n) y su angulo interno (α) que es el formado por sus vértices.

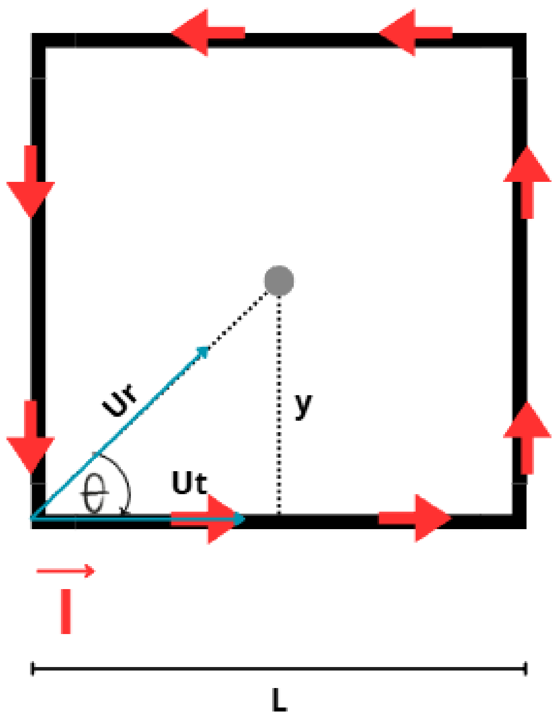
Partamos de la formula de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{||\hat{u_t} \times \hat{u_r}||}{r^2}$$
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{||\hat{u_t}|| * ||\hat{u_r}|| * \sin\theta}{r^2}$$

La magnitud de esos dos vectores es 1:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{\sin\theta}{r^2}$$

para ejemplos simples imaginémonos una espira cuadrada regular:



Lo que pasa que es que todas las espiras de n lados se comportan prácticamente igual, porque a todas las rige la misma ley, lo único que las diferencia es el factor "multiplicativo" que llamo yo, que es la parafernalia de números que acompañan a $\frac{\mu_0 I}{L}$.

Al ojo podemos observar que no sabemos el valor de y, pero si el de x; aquí es donde entra el valor de α que como mencione anteriormente es el angulo entre vértices de la figura, y como la figura es regular, simplemente tomamos este angulo y lo dividimos en dos para hacer el siguiente paso:

$$y = r \sin \frac{\alpha}{2} \rightarrow (1)$$

$$x = r \cos \frac{\alpha}{2} \rightarrow (2)$$

Y si hacemos (1) / (2):

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \frac{\alpha}{2}}{r \cos \frac{\alpha}{2}}$$

se cancelan las r, y sen/cos es tangente:

$$\frac{y}{x} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

Pero si nos ponemos "creativos", x es simplemente tomar la longitud de uno de los lados de la espira y dividirla entre dos:

$$\frac{y}{\frac{L}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$y = \frac{L}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$$

Pero esa y se comporta como un modelo general para todas las espiras de n lados, volvamos a la formula normal:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{\sin \theta}{r^2}$$

$\sin \theta$ no es mas que ver cual es el valor de este en el triangulo planteado por la figura, que no es mas que $\frac{y}{r}$, donde r es la hipotenusa de el triangulo, si remplazamos en la ecuación anterior tenemos lo siguiente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{y}{r} \frac{1}{r^2}$$

Pero recordemos que $y = \frac{L}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{\frac{L}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}{r} \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{L}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{1}{r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I L}{8\pi} \tan\frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{1}{r^3}$$

Y recordar que r es la hipotenusa entonces remplazamos basados en el triangulo de la figura:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I L}{8\pi} \tan\frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Y los limites, son en x si tomamos nuestro eje de referencia, justo la mitad donde esta el punto de prueba tenemos que los limites son los siguientes:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I L}{8\pi} \tan\frac{\alpha}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Y como la integral es una función par, podemos sacar un 2, de manera que la integral queda de la siguiente manera:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I L}{8\pi} \tan\frac{\alpha}{2} 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

El dos que sacamos se va con el 8 de el denominador:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I L}{4\pi} \tan\frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

De aquí pues podemos aplicar sustitución trigonométrica para resolver esa integral:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$x = y\tan\theta \rightarrow dx = y\sec^2\theta d\theta$$

$$\int_a^b \frac{y\sec^2\theta d\theta}{((y\tan\theta)^2+y^2)^{3/2}}$$

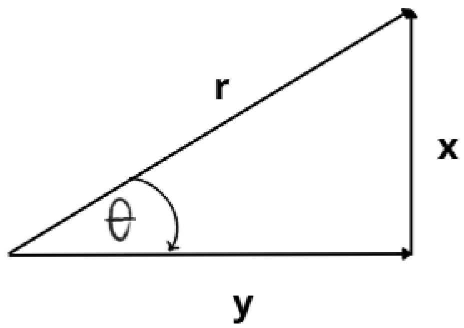
Simplificando va a quedar:

$$\frac{1}{y^2}\int_a^b \frac{d\theta}{\sec\theta}$$

Esa integral es trivial:

$$\frac{1}{y^2}\sin\theta$$

Devolviendo la sustitución trigonométrica a algo conocido, usamos el triangulo:



$$\frac{1}{y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Remplazando entonces en la ecuación original:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 IL}{4\pi}\tan\frac{\alpha}{2}\frac{1}{y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Remplazando y y simplificando:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 IL}{4\pi}\tan\frac{\alpha}{2}\frac{1}{\frac{L^2}{4}\tan^2\frac{\alpha}{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Se van los 4,se cancela una L de arriba con una de el cuadrado de abajo y se va una tangente de arriba con una de abajo:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{\pi L\tan\frac{\alpha}{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\bigg|_0^{\frac{L}{2}}$$

Remplazando en 0, todo se anula pero $x\to\frac{L}{2}$ y remplazamos y por su valor original:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{\pi L\tan\frac{\alpha}{2}}\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+\frac{L^2}{4}\tan^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{\pi L\tan\frac{\alpha}{2}}\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{L^2}{4}(1+\tan^2\frac{\alpha}{2})}}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{\pi L\tan\frac{\alpha}{2}}\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{L^2}{4}\sec^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi L \tan\frac{\alpha}{2}} \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2}\sec\frac{\alpha}{2}}$$

$\frac{L}{2}$ se cancela y queda entonces:

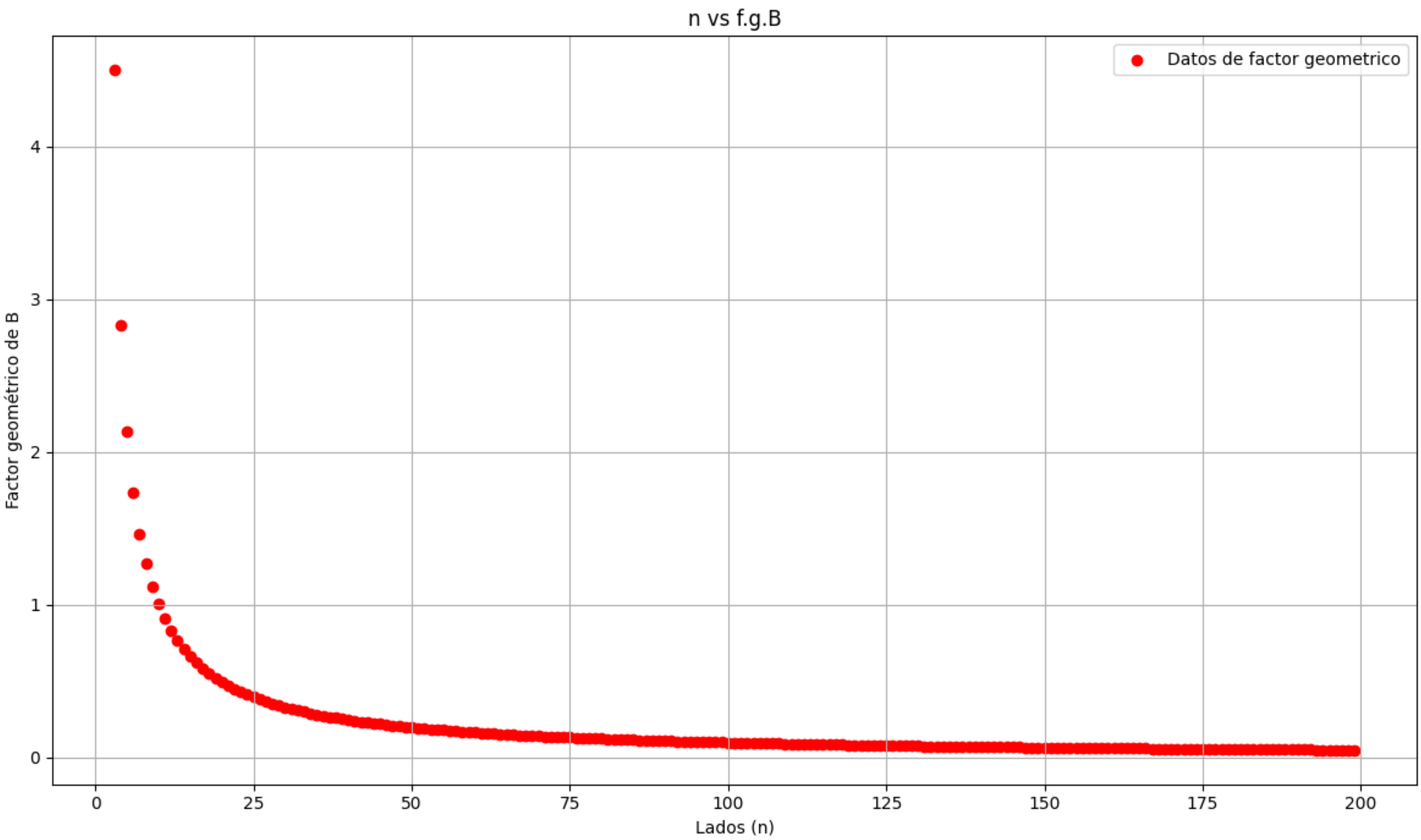
$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{\pi L \tan\frac{\alpha}{2} \sec\frac{\alpha}{2}}$$

Esa seria la contribución general para una de las barras de la figura, simplemente lo que falta es multiplicar ese resultado por los n lados de la espira:

$$\therefore \vec{B} = n[\frac{\mu_o I}{\pi L \tan\frac{\alpha}{2} \sec\frac{\alpha}{2}}]$$

Finalmente esta es la generalización para la espira de corriente de n lados.

tener en cuenta que $n \to \infty$ se tendría que renormalizar, para obtener finalmente $\vec{B}$ de la espira circular.



Como se puede observar en la gráfica cuando $n \to \infty$ el factor geométrico se aproxima a 0, y no es que este mal, respecto a generalizaciones que se hallan hecho previamente, lo que pasa es que las otras trabajan con un circulo y haciendo el r de ese circulo constante,etc; entonces en esa otra generalización cuando $n \to \infty$ se aproxima a π diciendo que se vuelve perfecto, pero en mi caso yo trabajo con cosas que ya me dan, sin recurrir a ese uso de pasos extras.

Pero a fin de cuentas traducen lo mismo, ¿porque? pues muy sencillo, porque yo mantengo L constante y al aproximar en el infinito a 0 implica que también se vuelve perfecto.

Físicamente se traducen en algo único pero en estilos diferentes; la analogía perfecta para este caso es muy sencilla, es como trabajar un angulo en grados o radianes, significan lo mismo físicamente pero en escalas distintas.