

1 Approssimazione alla differenze finite

Il nostro obiettivo è approssimare soluzioni di equazioni differenziali, cioè trovare una funzione (o qualche approssimazione discreta a questa funzione) che soddisfa una data relazione tra vari suoi derivati su una determinata regione di spazio e/o tempo, insieme ad alcune condizioni al contorno lungo i bordi di questo dominio. In generale questo è un problema difficile, e solo raramente si può trovare una formula analitica per la soluzione. Un metodo alle differenze finite procede sostituendo le derivate nelle equazioni differenziali con approssimazioni alle differenze finite. Ciò fornisce un sistema algebrico ampio ma finito di equazioni da risolvere luogo l'equazione differenziale, qualcosa che può essere fatto su un computer.

Prima di affrontare questo problema, consideriamo innanzitutto la domanda più basilare di come possiamo approssimare le derivate di una funzione nota solo con formule alle differenze finite basate sui valori della funzione stessa in punti discreti. Oltre a fornire una base per il successivo sviluppo di metodi alle differenze finite per la risoluzione di equazioni differenziali, questo ci permette di studiare diversi concetti chiave come l'*ordine di accuratezza* di un'approssimazione nell'impostazione più semplice possibile.

Sia $u(\bar{x})$ una funzione di una variabile che, se non diversamente indicato, sarà sempre essere considerato continua, il che significa che possiamo derivare la funzione più volte e ogni derivata è una funzione limitata ben definita su un intervallo contenente un particolare punto di interesse \bar{x} .

Supponiamo di voler approssimare $u'(\bar{x})$ con un'approssimazione alle differenze finite solo sui valori di u in un numero finito di punti vicino a \bar{x} . Una scelta ovvia sarebbe quella di usare

$$D_+ u(\bar{x}) \equiv \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h} \quad (1.1)$$

per piccoli valori di h . Questo è motivato dalla definizione standard di derivata come il valore limite di questa espressione per $h \rightarrow 0$. Nota che $D_+ u(\bar{x})$ è la pendenza della retta che interpola u nei punti \bar{x} e $\bar{x} + h$ (vedi Figura 1.1).

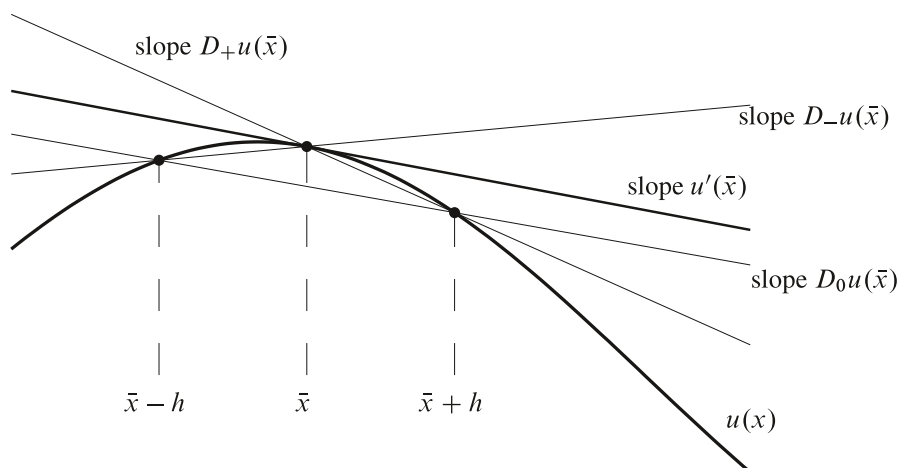


Figura 1.1: Varie approssimazioni di $u'(\bar{x})$ interpretato come pendenza di rette secanti.

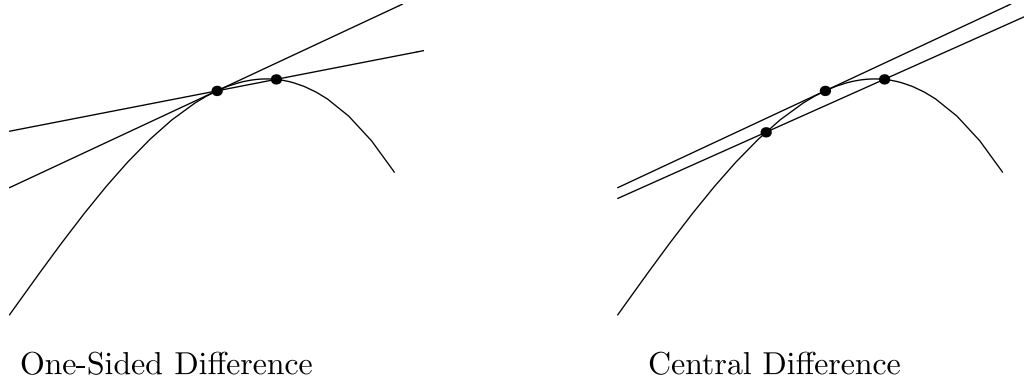


Figura 1.2: Approssimazioni alle differenze finite.

L'espressione (1.1) è un'approssimazione *a un lato* di u' poiché u è valutato solo per valori di $x \geq \bar{x}$. Un'altra approssimazione a un lato sarebbe

$$D_- u(\bar{x}) \equiv \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h}. \quad (1.2)$$

Ognuna di queste espressioni fornisce un'approssimazione *del primo ordine* di $u'(\bar{x})$, cioè che la grandezza dell'errore è approssimativamente proporzionale a h stesso.

Un'altra possibilità è usare l'*approssimazione centrata*

$$D_0 u(\bar{x}) \equiv \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} - h)}{2h} = \frac{1}{2} (D_+ u(\bar{x}) + D_- u(\bar{x})). \quad (1.3)$$

Questa è la pendenza della retta che interpola u a $\bar{x} - h$ e $\bar{x} + h$ ed è semplicemente la media delle due approssimazioni a un lato sopra definite. Dalla Figura 1.1 dovrebbe essere chiaro che ci aspetteremmo che $D_0 u(\bar{x})$ dia un'approssimazione migliore di una delle due approssimazioni a un lato. In effetti questo fornisce un'approssimazione *del secondo ordine* – l'errore è proporzionale a h^2 e quindi è molto più piccolo dell'errore in un'approssimazione del primo ordine quando h è piccolo.

Un'altra approssimazione possibile è

$$D_3 u(\bar{x}) \equiv \frac{1}{6h} [2u(\bar{x} + h) + 3u(\bar{x}) - 6u(\bar{x} - h) + u(\bar{x} - 2h)]. \quad (1.4)$$

Potrebbe non essere chiaro da dove provenga o perché dovrebbe approssimare u' , ma in realtà risulta essere un'approssimazione del terzo ordine – l'errore è proporzionale a h^3 quando h è piccolo.

Il nostro primo obiettivo è quello di sviluppare metodi sistematici per derivare tali formule e analizzare la loro accuratezza e valore relativo. Per prima cosa vedremo un tipico esempio di come gli errori in queste formule vengano confrontati.

Esempio 1.1. Sia $u(x) = \sin(x)$ e $\bar{x} = 1$; quindi stiamo provando ad approssimare $u'(1) = \cos(1) = 0.5403023$. La Tabella 1.3 mostra l'errore $Du(\bar{x}) - u'(\bar{x})$ per diversi valori di h per ognuna delle espressioni sopra.

h	$D_+u(\bar{x})$	$D_-u(\bar{x})$	$D_0u(\bar{x})$	$D_3u(\bar{x})$
1.0e-01	-4.2939e-02	4.1138e-02	-9.0005e-04	6.8207e-05
5.0e-02	-2.1257e-02	2.0807e-02	-2.2510e-04	8.6491e-06
1.0e-02	-4.2163e-03	4.1983e-03	-9.0050e-06	6.9941e-08
5.0e-03	-2.1059e-03	2.1014e-03	-2.2513e-06	8.7540e-09
1.0e-03	-4.2083e-04	4.2065e-04	-9.0050e-08	6.9979e-11

Figura 1.3: Errori di diverse approssimazioni alla differenze finite di $u'(\bar{x})$.

Osserviamo che D_+u e D_-u si comportano in modo simile anche se si presenta un errore che all'incirca il negativo dell'altro. Questo si evince dalla Figura 1.1 e spiega perché D_0u , la media di entrambi, ha un errore che è molto più piccolo degli errori di entrambi.

Notiamo che

$$\begin{aligned} D_+u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) &\approx -0.42h, \\ D_0u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) &\approx -0.09h^2, \\ D_3u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) &\approx 0.007h^3, \end{aligned}$$

confermando che questi metodi sono rispettivamente del primo, secondo e terzo ordine di accuratezza.

La Figura 1.4 mostra questi errori in funzione di h in una scala log-log. Questo è un buon modo per raffigurare gli errori quando ci aspettiamo che essi si comportino come una potenza di h , poiché se l'errore $E(h)$ si comporta come

$$E(h) \approx Ch^p$$

allora

$$\log|E(h)| \approx \log|C| + p \log h.$$

Così in una scala log-log l'errore si comporta linearmente con una pendenza che è uguale a p , l'ordine di accuratezza.

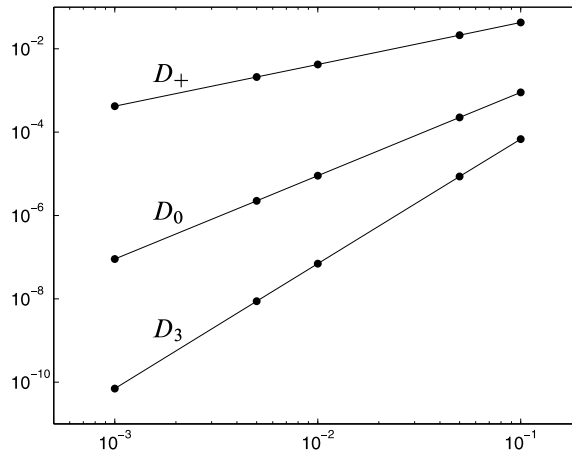


Figura 1.4: Gli errori in $Du(\bar{x})$ della Tabella 1.3 raffigurati in funzione di h in una scala log-log.

1.1 Errore di troncamento

L'approccio standard per analizzare l'errore in un'approssimazione alle differenze finite è fare l'espansione di Taylor di u in un intorno di \bar{x} , cioè:

$$u(\bar{x} + h) = u(\bar{x}) + hu'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2u''(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^3u'''(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4), \quad (1.5a)$$

$$u(\bar{x} - h) = u(\bar{x}) - hu'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2u''(\bar{x}) - \frac{1}{6}h^3u'''(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4). \quad (1.5b)$$

Queste espansioni sono valide sotto l'ipotesi che u sia sufficientemente continua.

La (1.5a) ci permette di calcolare

$$D_+u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h} = u'(\bar{x}) + \frac{1}{2}hu''(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^2u'''(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^3).$$

Richiamiamo il fatto che \bar{x} è un punto fissato e quindi $u''(\bar{x})$, $u'''(\bar{x})$, etc., sono costanti fissate indipendenti da h . Dipendono da u ovviamente, ma anche la funzione è fissata al variare di h .

Per h sufficientemente piccola, l'errore sarà dominato dal primo termine $\frac{1}{2}hu''(\bar{x})$ e tutti gli altri termini saranno trascurabili rispetto a questo termine, quindi ci aspettiamo che l'errore si comporti come il prodotto di una costante per h , dove questa costante è $\frac{1}{2}u''(\bar{x})$.

Notare che nell'Esempio 1.1, dove $u(x) = \sin(x)$, abbiamo $\frac{1}{2}u''(1) = -0.4207355$, che è in accordo con il comportamento visto nella Tabella 1.3.

Allo stesso modo, dalla (1.5b) possiamo calcolare che l'errore in $D_-(\bar{x})$ è

$$D_-u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) = -\frac{1}{2}hu''(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^2u'''(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^3),$$

che è anche in accordo con le aspettative.

Combinando la (1.5a) e la (1.5b) si ha

$$u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} - h) = 2hu'(\bar{x}) + \frac{1}{3}h^3u'''(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^5)$$

e quindi

$$D_0u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) = \frac{1}{6}h^2u'''(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4). \quad (1.6)$$

Questo conferma l'accuratezza del secondo ordine di questa approssimazione e nuovamente è in accordo con quanto visto nella Tabella 1.3, visto che nell'Esempio 1.1 avevamo che

$$\frac{1}{6}u'''(\bar{x}) = -\frac{1}{6}\cos(1) = -0.09005038.$$

Notiamo che tutti i termini dispari spariscono dalla espansione in serie di Taylor (1.6) per $D_0u(\bar{x})$. Questo è tipico delle approssimazioni *centrali* e tipicamente porta ad una approssimazione di ordine superiore.

Per analizzare D_3u abbiamo bisogno di espandere $u(\bar{x} - 2h)$ come

$$u(\bar{x} - 2h) = u(\bar{x}) - 2hu'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(2h)^2u''(\bar{x}) - \frac{1}{6}(2h)^3u'''(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4). \quad (1.7)$$

Combinando questa con la (1.5a) e la (1.5b) si mostra che

$$D_3u(\bar{x}) = u'(\bar{x}) + \frac{1}{12}h^3u^{(4)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4), \quad (1.8)$$

dove $u^{(4)}$ è la derivata quarta di u .

1.2 Calcolo dell'approssimazione alle differenze finite

Supponiamo di volere calcolare l'approssimazione alle differenze finite di $u'(\bar{x})$ basata su un qualche insieme di punti dato. Possiamo usare le serie di Taylor per calcolare una formula appropriata, usando il *metodo dei coefficienti indeterminati (metodo delle variazioni delle costanti?)*.

Esempio 1.2. Supponiamo di usare l'approssimazione *a un lato* di $u'(\bar{x})$ basata su $u(\bar{x})$, $u(\bar{x} - h)$ e $u(\bar{x} - 2h)$ della forma

$$D_2 u(\bar{x}) = au(\bar{x}) + bu(\bar{x} - h) + cu(\bar{x} - 2h). \quad (1.9)$$

Possiamo determinare i coefficienti a, b e c per fornire la migliore accuratezza possibile facendo l'espansione in serie di Taylor e raccogliendo i termini. Usando la (1.5b) e la (1.7) in (1.9) si ha

$$D_2 u(\bar{x}) = (a + b + c)u(\bar{x}) - (b + 2c)hu'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(b + 4c)h^2u''(\bar{x}) - \frac{1}{6}(b + 8c)h^3u'''(\bar{x}) + \dots$$

Se questo dovendo essere d'accordo con $u'(\bar{x})$ di ordine elevato, abbiamo bisogno che

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0, \\ b + 2c &= -\frac{1}{h}, \\ b + 4c &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Potremmo richiedere che anche i coefficienti di ordine superiore siano uguali a zero, ma poiché ci sono solo tre incognite a, b e c , non possiamo soddisfare più di tre condizioni. Risolvendo il sistema lineare (1.10) si ha

$$a = \frac{3}{2}h, \quad b = -\frac{2}{h}, \quad c = \frac{1}{2}h$$

così la formula diventa

$$D_2 u(\bar{x}) = \frac{1}{2h}[3u(\bar{x}) - 4u(\bar{x} - h) + u(\bar{x} - 2h)]. \quad (1.11)$$

Questa approssimazione è usata, per esempio, nei sistemi di equazioni con matrice

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

per i problemi ai bordi con condizioni di Neumann nel bordo sinistro (Tecnica III).

L'errore di approssimazione è

$$\begin{aligned} D_2 u(\bar{x}) - u'(\bar{x}) &= -\frac{1}{6}(b + 8c)h^3u'''(\bar{x}) + \dots \\ &= \frac{1}{12}h^2u'''(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ci sono altri modi di calcolare la stessa approssimazione alle differenze finite. Un modo è quello di approssimare la funzione $u(x)$ con qualche polinomio $p(x)$ e quindi usare $p'(\bar{x})$ come un'approssimazione di $u'(\bar{x})$. Se determiniamo il polinomio interpolando la u con un appropriato insieme di punti, allora otterremo lo stesso metodo alle differenze finite visto sopra.

Esempio 1.3. Per calcolare il metodo dell'Esempio 1.2 in questo modo, consideriamo $p(x)$ il polinomio quadratico che interpola u in $\bar{x}, \bar{x} - h$ e $\bar{x} - 2h$, e quindi calcoliamo $p'(\bar{x})$. Il risultato è esattamente (1.11).

1.3 Derivate del secondo ordine

Le approssimazioni della derivata seconda $u''(x)$ può essere ottenuta in maniera analoga. L'approssimazione alle differenze centrali del secondo ordine è data da

$$\begin{aligned} D^2 u(\bar{x}) &= \frac{1}{h^2} [u(\bar{x} - h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x} + h)] \\ &= u''(\bar{x}) + \frac{1}{12} h^2 u^{(4)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Poiché questa è un'approssimazione alle differenze centrali simmetrica, tutti i termini di ordine dispari di semplificano. Questa approssimazione può essere anche ottenuta con il metodo dei coefficienti indeterminati, o alternativamente calcolando la derivata seconda del polinomio quadratico che interpola $u(x)$ in $\bar{x} - h, \bar{x}$ e $\bar{x} + h$.

Un altro modo per calcolare approssimazioni a derivate di più alto ordine è applicare ripetutamente il metodo alle differenze del primo ordine. Proprio come la derivata seconda di u' , possiamo vedere $D^2 u(\bar{x})$ come la differenza delle differenze del primo ordine. Infatti,

$$D^2 u(\bar{x}) = D_+ D_- u(\bar{x})$$

poiché

$$\begin{aligned} D_+(D_- u(\bar{x})) &= \frac{1}{h} [D_- u(\bar{x} + h) - D_- u(\bar{x})] \\ &= \frac{1}{h} \left[\left(\frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h} \right) - \left(\frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h} \right) \right] \\ &= D^2 u(\bar{x}). \end{aligned}$$

Alternativamente, $D^2 u(\bar{x}) = D_- D_+ u(\bar{x})$, o possiamo vederlo come una differenza centrale di differenze centrali, se usiamo un passo $\frac{h}{2}$ in ogni approssimazione centrale della derivata prima. Se definiamo

$$\hat{D}_0 u(x) = \frac{1}{h} \left(u\left(x + \frac{h}{2}\right) - u\left(x - \frac{h}{2}\right) \right),$$

allora troviamo che

$$\hat{D}_0(\hat{D}_0 u(x)) = \frac{1}{h} \left[\left(\frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h} \right) - \left(\frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h} \right) \right] = D^2 u(\bar{x}).$$

1.4 Derivate di alto ordine

Le approssimazione alle differenze finite alle derivate di alto ordine possono essere ottenute usando qualunque dei metodi visti in precedenza. Ripetere le approssimazioni alle differenze alle derivate di basso ordine è un metodo particolarmente semplice.

Esempio 1.4. Come esempio, mostriamo due differenti approssimazioni di $u'''(\bar{x})$. La prima non è centrata ed è del primo ordine

$$\begin{aligned} D_+ D^2 u(\bar{x}) &= \frac{1}{h^3} (u(\bar{x} + 2h) - 3u(\bar{x} + h) + 3u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)) \\ &= u'''(\bar{x}) + \frac{1}{2} h u^{(4)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

La prossima approssimazione è centrata e del secondo ordine di accuratezza:

$$\begin{aligned} D_0 D_+ D_- u(\bar{x}) &= \frac{1}{2h^3} (u(\bar{x} + 2h) - 2u(\bar{x} + h) + 2u(\bar{x} - h) - u(\bar{x} - 2h)) \\ &= u'''(\bar{x}) + \frac{1}{4} h^2 u^{(5)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

Un altro modo di ottenere approssimazioni alle differenze finite per le derivate di alto ordine è tramite l'interpolazione con polinomi di grado sufficientemente elevato basati sui valori delle funzioni calcolate nei punti della griglia (stencil points) e quindi calcolando la derivata appropriata di questo polinomio. Di solito questo è poco maneggevole da fare. Un metodo più semplice che si presta bene all'automatismo è usare il metodo dei coefficienti indeterminati, come illustrato nella Sezione 1.2 per un'approssimazione della derivata del primo ordine e come spiegato meglio nella prossima sezione.

1.5 Un metodo generale per derivare i coefficienti

Il metodo illustrato nella Sezione 1.2 può essere esteso per calcolare i coefficienti delle differenze finite per il calcolo di un'approssimazione di $u^{(k)}(\bar{x})$, la k -esima derivata di $u(x)$ valutata in \bar{x} , basata in una griglia (stencil) arbitraria di n ($> k + 1$) punti x_1, \dots, x_n . Di solito \bar{x} è uno dei punti della griglia, ma non necessariamente.

Supponiamo che $u(x)$ sia sufficientemente regolare, cioè, almeno di classe C^{n+1} nell'intervallo che contiene \bar{x} e i punti della griglia, così che l'espansione di Taylor sotto riportata sia valida. L'espansione in serie di Taylor di u , centrata in \bar{x} e calcolata nei punti della griglia x_i è

$$u(x_i) = u(\bar{x}) + (x_i - \bar{x})u'(\bar{x}) + \dots + \frac{1}{k!}(x_i - \bar{x})^k u^{(k)}(\bar{x}) + \dots \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Vogliamo trovare una combinazione lineare di questi valori che è in accordo con $u^{(k)}(\bar{x})$ al meglio possibile. Quindi vogliamo che

$$c_1 u(x_1) + c_2 u(x_2) + \dots + c_n u(x_n) = u^{(k)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^p), \quad (1.15)$$

dove p è il più grande possibile. (Osserviamo che qui h è una misura dell'ampiezza della griglia. Se stiamo derivando approssimazioni in griglie con punti equispaziati, allora h l'ampiezza della griglia, ma più in generale è un'ampiezza media della griglia, tale che $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - \bar{x}| \leq Ch$ per qualche costante piccola C .)

Seguendo il metodo usato nella Sezione 1.2, scegliamo i coefficienti c_i tali che

$$\frac{1}{(i-1)!} \sum_{j=1}^n c_j (x_j - \bar{x})^{(i-1)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i-1 = k, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.16)$$

A patto che i punti x_j siano distinti, questo sistema di Vandermonde $n \times n$ è non singolare e ha un'unica soluzione. Se $n \leq k$ (troppo pochi punti nella griglia), allora il membro a destra e la soluzione sono entrambi il vettore nullo, ma per $n > k$ i coefficienti danno un'appropriata approssimazione alle differenze finite.

Quanto è accurato questo metodo? Il membro a destra è un vettore che ha 1 nella $i = k + 1$ -esima riga, che assicura che questa combinazione lineare approssima la k -esima derivata. Lo 0 nelle altre componenti del membro a destra assicura che i termini

$$\left(\sum_{j=1}^n c_j (x_j - \bar{x})^{(i-1)} \right) u^{(i-1)}(\bar{x})$$

si cancellino nella combinazione lineare delle serie di Taylor per $i - 1 \neq k$. Per $i - 1 < k$ questo è necessario per avere anche un'accuratezza del primo ordine dell'approssimazione alle differenze finite. Per $i - 1 > k$ (che è possibile solo se $n > k + 1$), questo permette di cancellare dei termini di ordine alto nell'espansione e maggiore del primo ordine di accuratezza. In generale ci aspettiamo che l'ordine di accuratezza dell'approssimazione alle differenze finite sia almeno $p \geq n - k$. Potrebbe essere anche più alta se i anche termini di alto ordine si cancellano (come spesso accade con le approssimazioni centrali, per esempio).

2 Equazione di Burgers

L'equazione di Burgers è un'equazione quasi-lineare¹ definita come

$$u_t + uu_x = 0 \quad (2.1)$$

dove si osserva che la velocità dell'onda, c , è una funzione di u , cioè $c = c(u)$.

Consideriamo quindi il seguente problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

Attraverso questo problema si può vedere che le soluzioni (dette **forti**) esistono fino a certi tempi t e dopo non esistono più.

La forma caratteristica del problema 2.2 è

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ x(\xi, 0) = \xi \end{cases}$$

Dalla prima si ha che

$$\frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u(x, t) = \text{cost.} \quad \begin{matrix} u(x, 0) = u_0(x) \\ \Rightarrow \end{matrix} u(x, t) = u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall t > 0 \quad (2.3)$$

che equivale a dire che u è costante lungo le curve caratteristiche e che quindi

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) = \text{cost.} \Rightarrow x(t) = u(x, t)t + a \quad \begin{matrix} x(\xi, 0) = \xi \\ \Rightarrow \end{matrix} x(\xi, t) = u(x, t)t + \xi. \quad (2.4)$$

Allora

$$u(x, t) = u(x(\xi, t), t) = u(x(\xi, 0), 0) = u(\xi, 0) = u_0(\xi) \Rightarrow x(\xi, t) = u_0(\xi)t + \xi$$

e quindi valgono le due relazioni

$$u(x(\xi, t), t) = u_0(\xi) \quad \forall t > 0 \quad (2.5)$$

$$x(\xi, t) = u_0(\xi)t + \xi \quad \forall t > 0. \quad (2.6)$$

Poiché u dipende dal parametro ξ (infatti $u = u_0(\xi)$), troviamo u in funzione di x e t , cioè esplicitiamo ξ in funzione di x e t ; usiamo la 2.6 per ricavare ξ in funzione di x e t ; tuttavia osserviamo che la ξ è anche un argomento della $u_0(\xi)$, che può essere di tipo non lineare.

Allora, sia

$$F_t(\xi) = x(\xi, t) = \xi + u_0(\xi)t$$

¹cioè i coefficienti delle derivate parziali di u di ordine massimo, dipendono da u stessa, oltre che dalle variabili indipendenti e sono lineari; ad esempio nel caso di PDE del primo ordine sono del tipo $\sum c_i(x, u)u_{x_i} = f(x, u)$.

e troviamo per quali valori di ξ e t esiste la funzione inversa di $F_t(\xi)$, F_t^{-1} , così da poter esplicitare $\xi = F_t^{-1}(x, t)$.

Poiché una funzione monotona è invertibile (e la sua inversa è anche monotona), studiamo la monotonicità di F_t ; poiché F_t è una funzione regolare, per studiare la monotonicità basta studiare il segno della derivata prima al variare di ξ e t

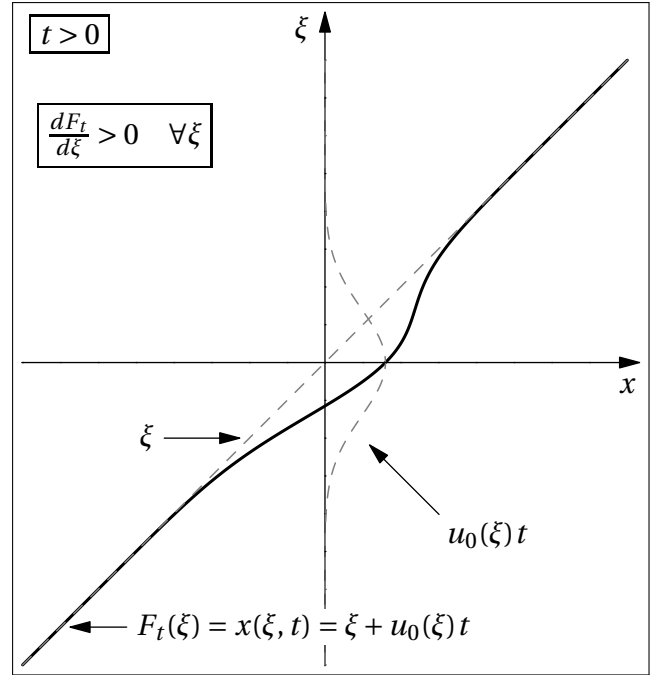
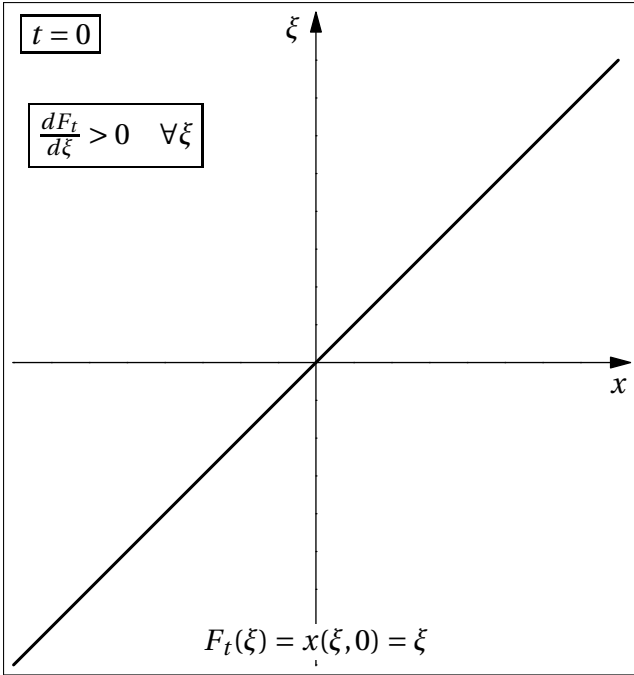
$$\frac{dF_t}{d\xi} = 1 + u'_0(\xi)t \quad \left(= \frac{dx}{d\xi} \right). \quad (2.7)$$

Se $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dF_t}{d\xi} = 1 > 0 & \Rightarrow F_t(=x) \text{ monotona crescente } \forall \xi \in \mathbb{R} \Rightarrow F_t \text{ è invertibile } \forall \xi \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow u = u_0(\xi) = u_0(\xi(x, t)) = u_0(F_t^{-1}(x, t)) = \tilde{u}(x, t). \end{aligned}$$

Se $t > 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{dF_t}{d\xi} > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow 1 + u'_0(\xi)t > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow F_t(=x) \text{ monotona crescente } \forall \xi \in \mathbb{R} \Rightarrow F_t \text{ è invertibile } \forall \xi \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow u = u_0(\xi) = u_0(\xi(x, t)) = u_0(F_t^{-1}(x, t)) = \tilde{u}(x, t). \end{aligned}$$

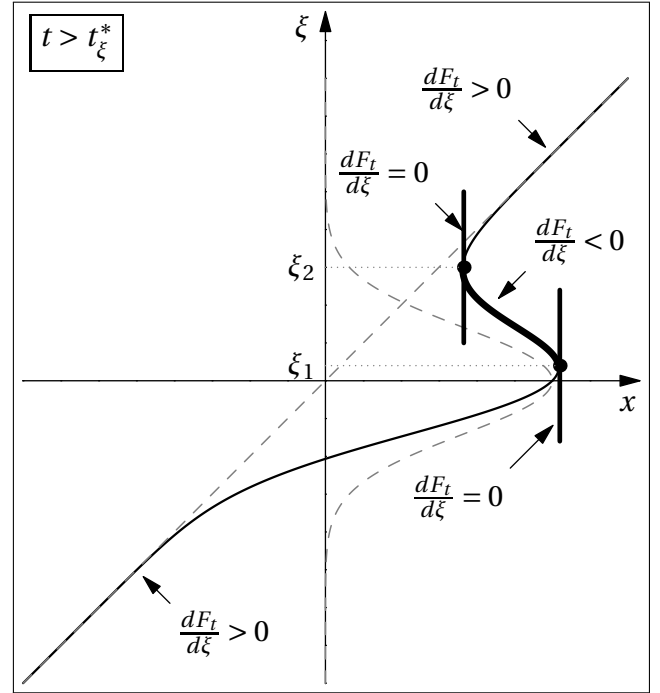
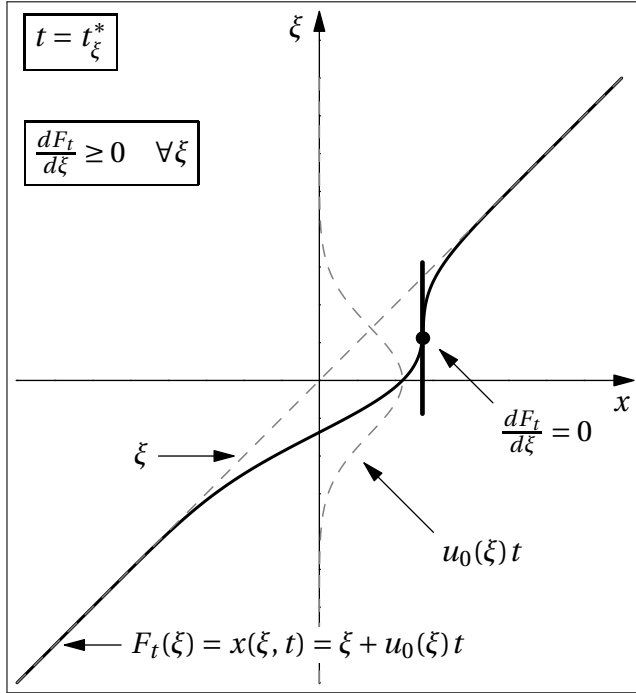


Se $u'(\xi) \geq 0$ allora

$$\frac{dF_t}{d\xi} > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + u'_0(\xi)t > 0 \quad \forall t > 0$$

Se $\exists \xi \in \mathbb{R} : u'_0(\xi) < 0$ allora (per la regolarità di u e di F_t)

$$\exists t_\xi^* : \frac{dF_t}{d\xi} < 0 \quad \forall t > t_\xi^* \quad \Leftrightarrow \quad \left(\exists \xi_1, \xi_2, t_\xi^* : \frac{dF_t}{d\xi} < 0 \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2] \quad \forall t > t_\xi^* \right)$$



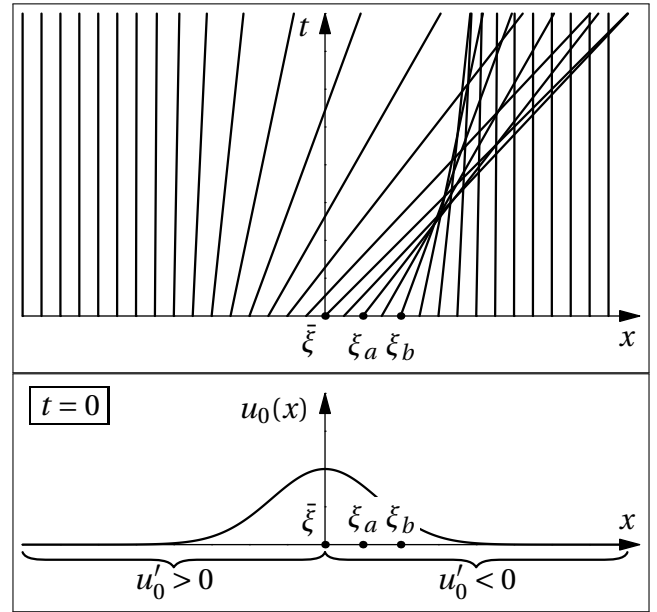
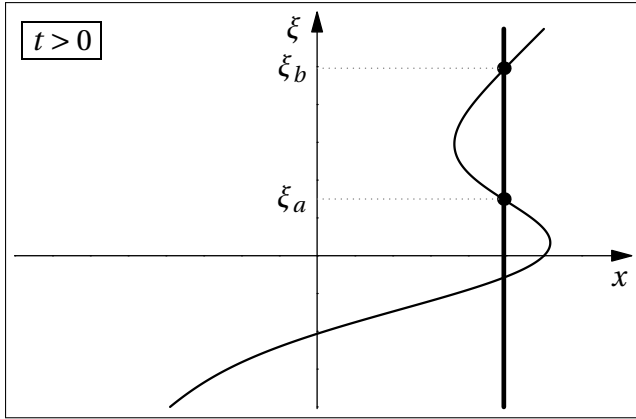
Nel piano (x, t) le curve (rette) caratteristiche hanno la pendenza pari a $u_0(\xi)$. Infatti, osserviamo, innanzitutto, che per $t = 0$ si ha

$$x(\xi, 0) = \xi \Rightarrow x = \xi \Rightarrow u_0(\xi) = u(\xi, 0) = u(x(\xi, 0), 0) = u(x, 0) = u_0(x)$$

cioè per $t = 0$ i valori delle x coincidono con i valori delle ξ (x e ξ variano linearmente). Osserviamo, inoltre, che maggiore è la velocità $u_0(\xi)$ (cioè più ci avviciniamo al massimo della funzione $u_0(\xi)$) maggiore è la pendenza (coefficiente angolare) delle caratteristiche, che risulteranno più schiacciate sull'asse x , mentre per i valori di ξ tali che $u_0(\xi)$ assume valori minori, le caratteristiche risulteranno avere una pendenza quasi verticale. Se con $\bar{\xi}$ indichiamo il valore $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $u_0(\bar{\xi}) = \max_{\xi \in \mathbb{R}}(u_0(\xi))$, poiché le caratteristiche avranno pendenza crescente per ogni $\xi \leq \bar{\xi}$ (dove $u_0(\bar{\xi})$ è la pendenza massima) e pendenza decrescente per ogni $\xi > \bar{\xi}$, allora esiste almeno un punto del piano (x, t) (ovviamente con $x = \xi > \bar{\xi}$, cioè nella regione dove $u'_0 < 0$) tale che una caratteristica con pendenza $u_0(\xi_a)$ interseca una caratteristica con pendenza $u_0(\xi_b)$, con $\xi_a < \xi_b$; in tale punto si ha

$$x(\xi_a, t) = \xi_a + u_0(\xi_a)t = \xi_b + u_0(\xi_b)t = x(\xi_b, t)$$

che equivale a dire che esistono due valori distinti di ξ a cui corrisponde un solo valore della x e poiché la u rimane costante lungo le rette caratteristiche, allora la u assumerà due valori distinti nel punto $(x(\xi_a, t), t) = (x(\xi_b, t), t)$ (in altre parole, in tale punto la u non è monodroma (che assume un solo valore) e si crea un accavallamento della u su se stessa).



Il profilo dell'onda si muoverà con una velocità che è proporzionale all'altezza del profilo stesso (il punto in corrispondenza del massimo, $u_0(\bar{\xi})$, si muoverà con velocità maggiore di tutti gli altri punti), con il risultato di avere una parte del profilo che si allunga, mentre un'altra parte che si accorcia, deformando il profilo iniziale.

Allora esiste t tale che un punto del profilo, che chiameremo A , presenterà un flesso verticale e tale t si ottiene quando

$$\frac{dF_t}{d\xi} = 1 + u'_0(\xi)t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{u'_0(\xi)},$$

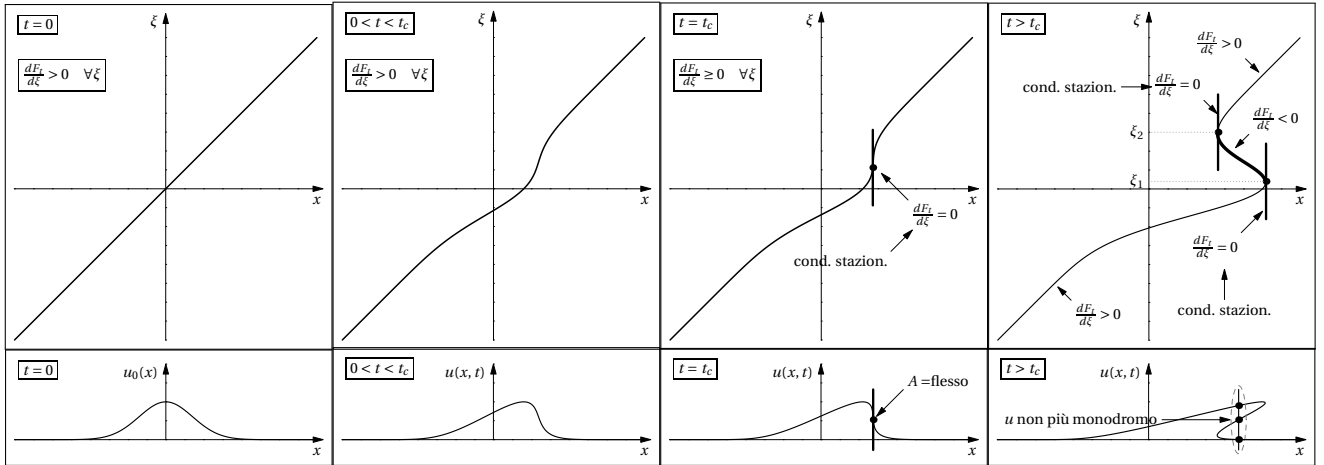
che è detta **condizione di stazionarietà**, cioè quando la funzione u cessa di essere invertibile per un certo valore di ξ ; superato tale istante il profilo non è più monodromo e quindi all'aumentare di ξ , in generale, non aumenta anche la x , che può decrescere. Ovviamente tale $t > 0$ si ottiene quando $u'_0 < 0$, ovvero nella regione di accavallamento.

Per ottenere il flesso verticale, cioè il punto A , poiché, come abbiamo visto nelle Figure precedenti, esistono più valori di t e di ξ (nelle Figure precedenti ξ_1 e ξ_2) tali che $\frac{dF_t}{d\xi} = 0$, allora si deve calcolare il minimo tempo della condizione di stazionarietà, detto **tempo critico**

$$t_c = \min_{u'_0(\xi) < 0} \left(-\frac{1}{u'_0(\xi)} \right).$$

Se $t < t_c$, allora esiste la soluzione **forte** del problema di Burgers;

se $t > t_c$, allora non esiste la soluzione **forte (classica)**, ovvero non esiste una soluzione monodroma (in questo caso si forma una discontinuità e si ha la soluzione "debole" del problema di Burgers).



Nelle figure di seguito, il risultato finale in 2D e 3D rispettivamente.

