গণিত

নবম–দশম শ্রেণি

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক ২০১৩ শিক্ষাবর্ষ থেকে

নবম-দশম শ্রেণির পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্ধারিত

গণিত

নবম-দশম শ্রেণি

সহজপাঠ্য, আকর্ষণীয় ও সহজবোধ্য করার জন্য পরিমার্জিত সংস্করণে
প্রয়োজনীয় সংযোজন, পরিবর্ধন, পুনর্লিখন ও সম্পাদনা

ড. মোহাম্মদ কায়কোবাদ
ড. মুহাম্মদ আবদুল হাকিম নিউটন
ড. আতিফ হাসান রহমান
ড. রিফাত শাহরিয়ার
ড. অমল হালদার
ড. মুহম্মদ জাফর ইকবাল

পূর্ববর্তী সংস্করণ রচনা

সালেহ্ মতিন
ড. অমল হালদার
ড. অমূল্য চন্দ্র মণ্ডল
শেখ কুতুবউদ্দিন
হামিদা বানু বেগম
এ. কে. এম. শহীদুল্লাহ্
মোঃ শাহ্জাহান সিরাজ

পূর্ববর্তী সংস্করণ সম্পাদনা

ড. মোঃ আবদুল মতিন
ড. আব্দুস ছামাদ

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড

৬৯-৭০ মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা

কর্তৃক প্রকাশিত

[প্রকাশক কর্তৃক সর্বস্বত্ব সংরক্ষিত]

প্রথম প্রকাশ: অক্টোবর, ২০১২
পরিমার্জিত সংস্করণ প্রকাশ: সেপ্টেম্বর, ২০১৭

প্রচ্ছদ: মেহেদী হক

চিত্রাঙ্কন: ড. মুহাম্মদ আবদুল হাকিম নিউটন

ফন্ট প্রণয়ন: মো. তানবিন ইসলাম সিয়াম

বুক ডিজাইন: ড. মুহাম্মদ আবদুল হাকিম নিউটন, ড. রিফাত শাহরিয়ার

পেইজ মেকাপ: ড. আতিফ হাসান রহমান, অভীক শর্মা চৌধুরী, দিপু দেবনাথ

পরিমার্জিত সংস্করণ সার্বিক সমন্বয়: মোহাম্মদ জয়নাল আবেদীন

গণপ্রজাতন্ত্রী বাংলাদেশ সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য

মুদ্রণে:

প্রসঙ্গ-কথা

ভাষা আন্দোলন ও মুক্তিযুদ্ধের চেতনায় দেশ গড়ার জন্য শিক্ষার্থীর অন্তর্নিহিত মেধা ও সম্ভাবনার পরিপূর্ণ বিকাশে সাহায্য করার মাধ্যমে উচ্চতর শিক্ষার যোগ্য করে তোলা মাধ্যমিক শিক্ষার অন্যতম লক্ষ্য। শিক্ষার্থীকে দেশের অর্থনৈতিক, সামাজিক, সাংস্কৃতিক ও পরিবেশগত পটভূমির প্রেক্ষিতে দক্ষ ও যোগ্য নাগরিক করে তোলাও মাধ্যমিক শিক্ষার অন্যতম বিবেচ্য বিষয়।

জাতীয় শিক্ষানীতি ২০১০ এর লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যকে সামনে রেখে পরিমার্জিত শিক্ষাক্রমের আলোকে প্রণীত হয়েছে মাধ্যমিক স্তরের সকল পাঠ্যপুস্তক। পাঠ্যপুস্তকগুলোর বিষয় নির্বাচন ও উপস্থাপনের ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীর নৈতিক ও মানবিক মূল্যবোধ থেকে শুরু করে ইতিহাস ও ঐতিহ্য চেতনা, মহান মুক্তিযুদ্ধের চেতনা, শিল্প-সাহিত্য-সংস্কৃতিবোধ, দেশপ্রেমবোধ, প্রকৃতি-চেতনা এবং ধর্ম-বর্ণ-গোত্র ও নারী-পুরুষ নির্বিশেষে সবার প্রতি সমমর্যাদাবোধ জাগ্রত করার চেষ্টা করা হয়েছে।

রূপকল্প ২০২১ বর্তমান সরকারের অন্যতম অঙ্গীকার। এই অঙ্গীকারকে সামনে রেখে গণপ্রজাতন্ত্রী বাংলাদেশ সরকারের মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা দেশকে নিরক্ষরতামুক্ত করার প্রত্যয় ঘোষণা করে ২০০৯ সালে প্রত্যেক শিক্ষার্থীর হাতে বিনামূল্যে পাঠ্যপুস্তক তুলে দেওয়ার নির্দেশনা প্রদান করেন। তাঁরই নির্দেশনা মোতাবেক ২০১০ সাল থেকে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড বিনামূল্যে পাঠ্যপুস্তক বিতরণ শুরু করেছে।

একবিংশ শতকের এই যুগে জ্ঞান-বিজ্ঞানের বিকাশে গণিতের ভূমিকা অতীব গুরুত্বপূর্ণ। শুধু তাই নয়, ব্যক্তিগত জীবন থেকে শুরু করে পারিবারিক ও সামাজিক জীবনে গণিতের প্রয়োগ অনেক বেড়েছে। এই সব বিষয় বিবেচনায় রেখে মাধ্যমিক পর্যায়ে নতুন গাণিতিক বিষয় শিক্ষার্থী উপযোগী ও আনন্দদায়ক করে তোলার জন্য গণিতকে সহজ ও সুন্দরভাবে উপস্থাপন করা হয়েছে এবং বেশ কিছু নতুন বিষয় এতে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। বিষয়টি শিক্ষার্থীদের কাছে সহজপাঠ্য, আকর্ষণীয় ও সহজবোধ্য করার জন্য ২০১৭ সালে পাঠ্যপুস্তকটিতে পরিমার্জন, সংযোজন ও পরিবর্ধন করা হয়েছে।

বানানের ক্ষেত্রে অনুসৃত হয়েছে বাংলা একাডেমি কর্তৃক প্রণীত বানানরীতি। পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, চিত্রাঙ্কন, নমুনা প্রশ্নাদি প্রণয়ন ও প্রকাশনার কাজে যারা আন্তরিকভাবে মেধা ও শ্রম দিয়েছেন তাঁদের ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি।

প্রফেসর নারায়ণ চন্দ্র সাহা
চেয়ারম্যান
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

সূচিপত্র

১	বাস্তব সংখ্যা	১
২	সেট ও ফাংশন	২১
৩	বীজগাণিতিক রাশি	৪৩
৪	সূচক ও লগারিদম	৭৫
৫	এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ	৯৩
৬	রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ	১১১
৭	ব্যবহারিক জ্যামিতি	১৩৬
৮	বৃত্ত	১৫২
৯	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	১৭৪
১০	দূরত্ব ও উচ্চতা	১৯৭
১১	বীজগাণিতিক অনুপাত ও সমানুপাত	২০৫
১২	দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ	২২৪
১৩	সসীম ধারা	২৪৯
১৪	অনুপাত, সদৃশতা ও প্রতিসমতা	২৬৬
১৫	ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য	২৮৫
১৬	পরিমিতি	২৯৪
১৭	পরিসংখ্যান	৩২৬
	স্মরণীয় কয়েকজন গণিতবিদ	৩৫৫

অধ্যায় ১

বাস্তব সংখ্যা (Real Numbers)

সংখ্যার ইতিহাস মানব সভ্যতার ইতিহাসের মতই প্রাচীন। পরিমাণকে প্রতীক দিয়ে সংখ্যা আকারে প্রকাশ করার পদ্ধতি থেকে গণিতের উৎপত্তি। গ্রিক দার্শনিক এরিস্টটলের মতে, প্রাচীন মিশরের পুরোহিত সম্প্রদায়ের অনুশীলনের মাধ্যমে গণিতের আনুষ্ঠানিক অভিষেক ঘটে। তাই বলা যায় সংখ্যাভিত্তিক গণিতের সৃষ্টি যীশুখ্রিস্টের জন্মের প্রায় দুই হাজার বছর পূর্বে। এরপর নানা জাতি ও সভ্যতার হাত ঘুরে সংখ্যা ও সংখ্যারীতি অধুনা একটি সার্বজনীন রূপ ধারণ করেছে।

স্বাভাবিক সংখ্যার গণনার প্রয়োজনে প্রাচীন ভারতবর্ষের গণিতবিদগণ সর্বপ্রথম শূন্য ও দশভিত্তিক স্থানীয়মান পদ্ধতির প্রচলন করেন, যা সংখ্যা বর্ণনায় একটি মাইলফলক হিসেবে বিবেচিত হয়। পরে ভারতীয় ও চীনা গণিতবিদগণ শূন্য, ঋণাত্মক, বাস্তব, পূর্ণ ও ভগ্নাংশের ধারণার বিস্তৃতি ঘটান যা মধ্যযুগে আরবীয় গণিতবিদগণ ভিত্তি হিসেবে গ্রহণ করেন। দশমিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সংখ্যা প্রকাশের কৃতিত্ব মধ্যপ্রাচ্যের মুসলিম গণিতবিদদের বলে মনে করা হয়। আবার তাঁরাই একাদশ শতাব্দীতে সর্বপ্রথম বীজগনিতীয় দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান হিসেবে বর্গমূল আকারে অমূলদ সংখ্যার প্রবর্তন করেন। ইতিহাসবিদদের ধারণা খ্রিস্টপূর্ব ৫০০ অব্দের কাছাকাছি গ্রিক দার্শনিকরাও জ্যামিতিক অঙ্কনের প্রয়োজনে অমূলদ সংখ্যা, বিশেষ করে দুই-এর বর্গমূলের প্রয়োজনীয়তা অনুভব করেছিলেন। ঊনবিংশ শতাব্দীতে ইউরোপীয় গণিতবিদগণ বাস্তব সংখ্যাকে প্রণালীবদ্ধ করে পূর্ণতা দান করেন। দৈনন্দিন প্রয়োজনে বাস্তব সংখ্যা সম্বন্ধে শিক্ষার্থীদের সুস্পষ্ট জ্ঞান থাকা প্রয়োজন। এ অধ্যায়ে বাস্তব সংখ্যা বিষয়ে সামগ্রিক আলোচনা করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

- বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস করতে পারবে।
- বাস্তব সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারবে।
- দশমিক ভগ্নাংশের শ্রেণিবিন্যাস করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং ভগ্নাংশকে আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে পারবে।
- অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সদৃশ ও বিসদৃশ দশমিক ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করতে পারবে এবং এতদসংক্রান্ত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস (Classification of Real Numbers)

স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural Number): $1, 2, 3, 4, \ldots$ ইত্যাদি স্বাভাবিক সংখ্যা বা **ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা**। $2, 3, 5, 7, \ldots$ ইত্যাদি **মৌলিক সংখ্যা** এবং $4, 6, 8, 9, \ldots$ ইত্যাদি **যৌগিক সংখ্যা**। দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার গ.সা.গু. 1 হলে এদেরকে পরস্পরের **সহমৌলিক সংখ্যা** বলা হয়। যেমন 6 ও 35 পরস্পরের সহমৌলিক।

পূর্ণসংখ্যা (Integer): শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাকে **পূর্ণসংখ্যা** বলা হয়। অর্থাৎ $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যা।

ভগ্নাংশ সংখ্যা (Fractional Number): $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যাকে **(সাধারণ) ভগ্নাংশ সংখ্যা** বা সংক্ষেপে **ভগ্নাংশ** বলা হয়, যেখানে $q \neq 0$ এবং $q \neq 1$। যেমন $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{4}{6}$ ইত্যাদি (সাধারণ) ভগ্নাংশ সংখ্যা। কোনো (সাধারণ) ভগ্নাংশ $\frac{p}{q}$ এর ক্ষেত্রে $p < q$ হলে ভগ্নাংশটিকে **প্রকৃত ভগ্নাংশ** এবং $p > q$ হলে ভগ্নাংশটিকে **অপ্রকৃত ভগ্নাংশ** বলা হয়। যেমন $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ইত্যাদি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ইত্যাদি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

মূলদ সংখ্যা (Rational Number): $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যাকে **মূলদ সংখ্যা** বলা হয়, যখন p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$। যেমন $\frac{3}{1} = 3, \frac{11}{2} = 5.5, \frac{5}{3} = 1.666\ldots$ ইত্যাদি মূলদ সংখ্যা। যে কোনো মূলদ সংখ্যাকে দুইটি সহমৌলিক সংখ্যার অনুপাত হিসাবেও লেখা যায়। সকল পূর্ণসংখ্যা ও ভগ্নাংশই মূলদ সংখ্যা।

অমূলদ সংখ্যা (Irrational Number): যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$, সে সংখ্যাকে **অমূলদ সংখ্যা** বলা হয়। পূর্ণবর্গ নয় এরূপ যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গমূল কিংবা তার ভগ্নাংশ একটি অমূলদ সংখ্যা। যেমন $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$, $\sqrt{3} = 1.732\ldots$, $\frac{\sqrt{5}}{2} = 1.118\ldots$, ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যা। কোনো অমূলদ সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায় না।

দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা (Decimal Fractional Number): মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যাকে দশমিক দিয়ে প্রকাশ করা হলে একে **দশমিক ভগ্নাংশ** বলা হয়। যেমন, $3 = 3.0, \frac{5}{2} = 2.5, \frac{10}{3} = 3.3333\ldots$, $\sqrt{3} = 1.732\ldots$, ইত্যাদি দশমিক ভগ্নাংশ। দশমিক বিন্দুর পর অঙ্ক সংখ্যা সসীম হলে, এদেরকে **সসীম দশমিক ভগ্নাংশ** এবং অঙ্ক সংখ্যা অসীম হলে, এদেরকে **অসীম দশমিক ভগ্নাংশ** বলা হয়। যেমন, $0.52,\ 3.4152$ ইত্যাদি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ এবং $\frac{4}{3} = 1.333\ldots, \sqrt{5} = 2.123512367\ldots$, ইত্যাদি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ। আবার, অসীম দশমিক ভগ্নাংশগুলোর মধ্যে দশমিক বিন্দুর পর কিছু

অঙ্কের পুনরাবৃত্তি হলে, তাদেরকে **অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ** এবং অঙ্কগুলোর পুনরাবৃত্তি না হলে এদের **অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ** বলা হয়। যেমন, $\frac{122}{99} = 1.2323\ldots, 5.1\dot{6}5\dot{4}$ ইত্যাদি অসীম আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ এবং $0.523050056\ldots, 2.12340314\ldots$ ইত্যাদি অসীম অনাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

বাস্তব সংখ্যা (Real Number): সকল মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যাকে **বাস্তব সংখ্যা** বলা হয়, যেমন নিচের সংখ্যাগুলো বাস্তব সংখ্যা।

$$0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots \qquad \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{4}{3}, \cdots$$

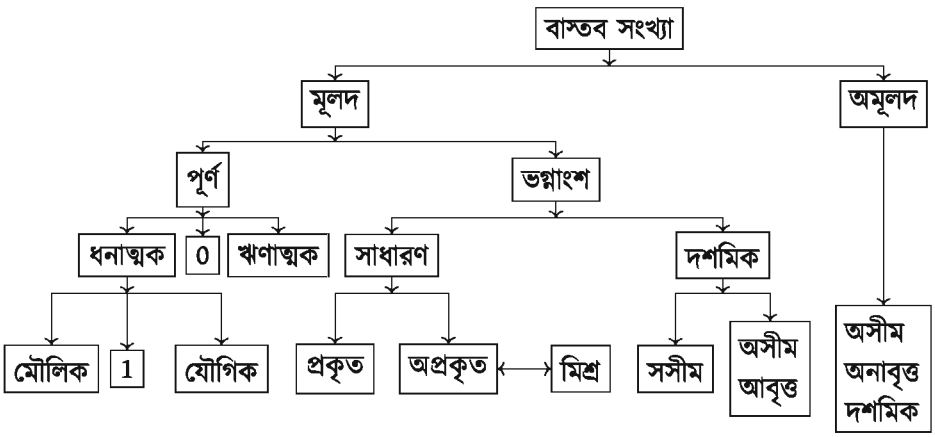
$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \cdots \qquad 1.23, 0.415, 1.3333\ldots, 0.\dot{6}\dot{2}, 4.120345061\ldots$$

ধনাত্মক সংখ্যা (Positive Number): শূন্য থেকে বড় সকল বাস্তব সংখ্যাকে **ধনাত্মক সংখ্যা** বলা হয়। যেমন, $2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{2}, 0.415, 0.\dot{6}\dot{2}, 4.120345061\ldots$ ইত্যাদি ধনাত্মক সংখ্যা।

ঋণাত্মক সংখ্যা (Negative Number): শূন্য থেকে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যাকে **ঋণাত্মক সংখ্যা** বলা হয়। যেমন, $-2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\sqrt{2}, -0.415, -0.\dot{6}\dot{2}, -4.120345061\ldots$ ইত্যাদি ঋণাত্মক সংখ্যা।

অঋণাত্মক সংখ্যা (Non-negative Number): শূন্যসহ সকল ধনাত্মক সংখ্যাকে **অঋণাত্মক সংখ্যা** বলা হয়। যেমন, $0,\ 3, \frac{1}{2}, 0.612, 1.\dot{3},\ 2.120345\ldots$ ইত্যাদি অঋণাত্মক সংখ্যা।

নিচের চিত্রে আমরা বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাস দেখতে পাই।



কাজ: বাস্তব সংখ্যার শ্রেণিবিন্যাসে $\frac{3}{4}, 5, -7, \sqrt{13}, 0, 1, \frac{9}{7}, 12, 2\frac{4}{5}, 1.1234, 0.3\dot{2}\dot{3}$ সংখ্যাগুলোর অবস্থান দেখাও।

উদাহরণ ১. $\sqrt{3}$ এবং 4 এর মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$

মনে করি, $a = \dfrac{\sqrt{3}+4}{2} \approx 2.866$ এবং $b = \dfrac{\sqrt{3}+4+4}{3} \approx 3.244$

স্পষ্টত a ও b উভয়ই বাস্তব সংখ্যা এবং উভয়ই $\sqrt{3}$ অপেক্ষা বড় এবং 4 অপেক্ষা ছোট।

কারন a হলো অসমান সংখ্যা $\sqrt{3}$ এবং 4 এর গড়, এবং b হলো $\sqrt{3},\ 4$ এবং 4 এর গড়।

অর্থাৎ $\sqrt{3} < 2.866 < 4$ এবং $\sqrt{3} < 3.244 < 4$

আবার, a ও b কে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায় না।

$\therefore a$ ও b দুইটি নির্ণেয় অমূলদ সংখ্যা।

আসলে এরূপ অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় করা যায়।

বাস্তব সংখ্যার যোগ ও গুণন প্রক্রিয়ার মৌলিক বৈশিষ্ট্য:

১. $a,\ b$ বাস্তব সংখ্যা হলে, (i) $a+b$ বাস্তব সংখ্যা এবং (ii) ab বাস্তব সংখ্যা

২. $a,\ b$ বাস্তব সংখ্যা হলে (i) $a+b=b+a$ এবং (ii) $ab=ba$

৩. $a,\ b,\ c$ বাস্তব সংখ্যা হলে (i) $(a+b)+c=a+(b+c)$ এবং (ii) $(ab)c=a(bc)$

৪. a বাস্তব সংখ্যা হলে, কেবল দুইটি বাস্তব সংখ্যা 0 ও 1 আছে যেখানে
(i) $0 \neq 1$, (ii) $a+0=0+a=a$ এবং (iii) $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$

৫. a বাস্তব সংখ্যা হলে, (i) $a+(-a)=0$ (ii) $a \neq 0$ হলে, $a\cdot\dfrac{1}{a}=1$

৬. a, b, c বাস্তব সংখ্যা হলে, $a(b+c)=ab+ac$

৭. a, b বাস্তব সংখ্যা হলে $a<b$ অথবা $a=b$ অথবা $a>b$

৮. a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a<b$ হলে, $a+c<b+c$

৯. a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a<b$ হলে, (i) $ac<bc$ যখন $c>0$ (ii) $ac>bc$ যখন $c<0$

প্রতিজ্ঞা: $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

প্রমাণ: ধরি $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

তাহলে এমন দুইটি পরস্পর সহমৌলিক স্বাভাবিক সংখ্যা $p,\ q>1$ থাকবে যে, $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$।

বা, $2=\dfrac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে] অর্থাৎ $2q=\dfrac{p^2}{q}$ [উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত $2q$ পূর্ণসংখ্যা কিন্তু $\dfrac{p^2}{q}$ পূর্ণসংখ্যা নয়, কারন p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা, এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q>1$।

$\therefore 2q$ এবং $\dfrac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $2q \neq \dfrac{p^2}{q}$

$\therefore \sqrt{2}$ কে $\dfrac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যাবে না, অর্থাৎ $\sqrt{2} \neq \dfrac{p}{q}$

$\therefore \sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। $\square$

মন্তব্য: যৌক্তিক প্রমাণের সমাপ্তির চিহ্ন হিসাবে $\square$ ব্যবহার করা হয়।

কাজ: প্রমাণ কর যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ ২. প্রমাণ কর যে, কোনো চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

সমাধান: মনে করি, চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা যথাক্রমে $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$।

ক্রমিক সংখ্যা চারটির গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে পাওয়া যায়,

$$\begin{aligned}
&x(x+1)(x+2)(x+3)+1\\
&= x(x+3)(x+1)(x+2)+1\\
&= (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1\\
&= a(a+2)+1 \text{ [এবার } x^2+3x=a \text{ ধরে]}\\
&= a^2+2a+1 = (a+1)^2\\
&= (x^2+3x+1)^2
\end{aligned}$$

যা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা। সুতরাং যে কোনো চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলের সাথে 1 যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

দশমিক ভগ্নাংশ (Decimal Fractions)

প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায়। যেমন $2 = 2.0,\ \dfrac{2}{5} = 0.4,\ \dfrac{1}{3} = 0.333\ldots$ ইত্যাদি। দশমিক ভগ্নাংশ তিন প্রকার: সসীম, আবৃত্ত এবং অসীম দশমিক ভগ্নাংশ।

সসীম দশমিক ভগ্নাংশ: কোনো সসীম দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানদিকে সসীম সংখ্যক অঙ্ক থাকে। যেমন $0.12,\ 1.023,\ 7.832,\ 54.67,\ \ldots$ ইত্যাদি সসীম দশমিক ভগ্নাংশ।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ: কোনো আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানদিকের অঙ্কগুলোর সব অথবা পরপর থাকা কিছু অংশ বারবার আসতে থাকে। যেমন, $3.333\ldots,\ 2.454545\ldots,\ 5.12765765\ldots$ ইত্যাদি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

অসীম দশমিক ভগ্নাংশ: কোনো অসীম দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানদিকের অঙ্ক কখনো শেষ হয় না, অর্থাৎ দশমিক বিন্দুর ডানদিকের অঙ্কগুলো সসীম হবে না বা অংশবিশেষ বারবার আসবে না। যেমন $\sqrt{2} = 1.4142135624\ldots$, $\sqrt{7} = 2.6457513111\ldots$ ইত্যাদি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ।

মন্তব্য: সসীম দশমিক ও আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ হলো মূলদ সংখ্যা এবং অসীম দশমিক ভগ্নাংশ হলো অমূলদ সংখ্যা। কোনো অমূলদ সংখ্যার মান যত দশমিক স্থান পর্যন্ত ইচ্ছা নির্ণয় করা যায়। কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরকে স্বাভাবিক সংখ্যায় প্রকাশ করতে পারলে, ঐ ভগ্নাংশটি মূলদ সংখ্যা।

কাজ: 1.723, $5.2333\ldots$, 0.0025, $2.1356124\ldots$, $0.01050105\ldots$ এবং $0.450123\ldots$ ভগ্নাংশগুলোকে কারণসহ শ্রেণিবিন্যাস কর।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ

```
6)23(3.833
  18
   50
   48
    20
    18
     20
     18
      2
```

$\frac{23}{6}$ সাধারণ ভগ্নাংশটিকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করি। লক্ষ করি, ভগ্নাংশের লবকে হর দিয়ে ভাগ করে দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করার সময় ভাগের প্রক্রিয়া শেষ হয় নাই। দেখা যায় যে, ভাগফলে একই অঙ্ক 3 বারবার আসে। এখানে $3.8333\ldots$ একটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

যে সকল দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানে একটি অঙ্ক বারবার আসে বা একাধিক অঙ্ক পর্যায়ক্রমে বারবার আসে, এদের **আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ** বলা হয়। আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশে যে অংশ বারবার অর্থাৎ পুনঃপুন আসে, একে **আবৃত্ত অংশ** আর বাকি অংশকে **অনাবৃত্ত অংশ** বলা হয়।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে একটি অঙ্ক আবৃত্ত হলে, সে অঙ্কের উপর পৌনঃপুনিক বিন্দু এবং একাধিক অঙ্ক আবৃত্ত হলে, কেবলমাত্র প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর পৌনঃপুনিক বিন্দু দেওয়া হয়। যেমন, $2.555\ldots$ কে লেখা হয় $2.\dot{5}$ দ্বারা এবং $3.124124124\ldots$ কে লেখা হয়, $3.\dot{1}2\dot{4}$ দ্বারা।

দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পর আবৃত্তাংশ ছাড়া অন্য কোনো অঙ্ক না থাকলে, একে **বিশুদ্ধ পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ** বলা হয় এবং পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পর আবৃত্তাংশ ছাড়া এক বা একাধিক অঙ্ক থাকলে, একে **মিশ্র পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ** বলা হয়। যেমন, $1.\dot{3}$ বিশুদ্ধ পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ এবং $4.2351\dot{1}\dot{2}$ মিশ্র পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশ।

ভগ্নাংশের হরে $2,\ 5$ ছাড়া অন্য কোনো মৌলিক গুণনীয়ক (উৎপাদক) থাকলে, সেই হর দ্বারা লবকে ভাগ করলে, কখনো নিঃশেষে বিভাজ্য হবে না। যেহেতু পর্যায়ক্রমে ভাগ শেষে $1,\ 2,\ \ldots,\ 9$ ছাড়া অন্য কিছু হতে পারে না, সেহেতু এক পর্যায়ে ভাগশেষগুলো বারবার একই সংখ্যা হতে থাকবে। আবৃত্তাংশের অঙ্ক সংখ্যা সবসময় হরে যে সংখ্যা থাকে, এর চেয়ে ছোট হয়।

উদাহরণ ৩. $\dfrac{3}{11}$ ও $\dfrac{95}{37}$ কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: নিচে বামপাশে $\dfrac{3}{11}$ ও ডানপাশে $\dfrac{95}{37}$ কে দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করা হয়েছে।

নিচে আসলে ভাগ করা হয়েছে 3 কে। কিন্তু 3, 11 এর চেয়ে ছোট হওয়ায় ভাগফলে 0 ও দশমিক বিন্দু নেওয়ার পরে 3 এর ডানে 0 বসিয়ে 30 হয়েছে।

```
11)30(0.2727
   22
   ---
    80
    77
    ---
     30
     22
     ---
      80
      77
      ---
       3
```

$$\therefore \frac{3}{11} = 0.2727\ldots = 0.\dot{2}\dot{7}$$

```
37)95(2.567567
   74
   ---
   210
   185
   ---
    250
    222
    ---
     280
     259
     ---
      210
      185
      ---
       250
       222
       ---
        280
        259
        ---
         21
```

$$\therefore \frac{95}{37} = 2.567567\ldots = 2.\dot{5}6\dot{7}$$

নির্ণেয় দশমিক ভগ্নাংশগুলো যথাক্রমে $0.\dot{2}\dot{7}$ এবং $2.\dot{5}6\dot{7}$

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিবর্তন

উদাহরণ ৪. $0.\dot{3}$, $0.\dot{2}\dot{4}$, এবং $42.34\dot{7}\dot{8}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: নিচে $0.\dot{3}$, $0.\dot{2}\dot{4}$, এবং $42.34\dot{7}\dot{8}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করা হয়েছে।

$$\text{প্রথমে} \qquad 0.\dot{3} = 0.3333\ldots$$
$$0.\dot{3} \times 10 = 0.333\ldots \times 10 = 3.333\ldots$$
$$0.\dot{3} \times 1 = 0.333\ldots \times 1 = 0.333\ldots$$

$$\text{বিয়োগ করে, } 0.\dot{3} \times 10 - 0.\dot{3} \times 1 = 3$$
$$0.\dot{3} \times (10 - 1) = 3$$
$$0.\dot{3} \times 9 = 3$$
$$\therefore 0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{এবার} \qquad 0.\dot{2}\dot{4} = 0.24242424\ldots$$
$$0.\dot{2}\dot{4} \times 100 = 0.242424\ldots \times 100 = 24.24242424\ldots$$
$$0.\dot{2}\dot{4} \times 1 = 0.242424\ldots \times 1 = 0.24242424\ldots$$

$$\text{বিয়োগ করে, } 0.\dot{2}\dot{4} \times 99 = 24$$
$$\therefore 0.\dot{2}\dot{4} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$$

$$\text{শেষে} \qquad 42.34\dot{7}\dot{8} = 42.34787878\ldots$$
$$42.34\dot{7}\dot{8} \times 10000 = 42.34787878\ldots \times 10000 = 423478.78787878\ldots$$
$$42.34\dot{7}\dot{8} \times 100 = 4234.7878\ldots \times 100 = 42.34787878\ldots$$

$$\text{বিয়োগ করে, } 42.34\dot{7}\dot{8} \times 9900 = 423478 - 4234 = 419244$$
$$\therefore 42.34\dot{7}\dot{8} = \frac{419244}{9900} = \frac{34937}{825} = 42\frac{287}{825}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ ভগ্নাংশগুলো যথাক্রমে $0.\dot{3} = \frac{1}{3},\ 0.\dot{2}\dot{4} = \frac{8}{33},\ 42.34\dot{7}\dot{8} = 42\frac{287}{825}$

ব্যাখ্যা: উপরের তিনটি উদাহরণ থেকে দেখা যায় যে,

- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পর যে কয়টি অঙ্ক আছে, সে কয়টি শূন্য 1 এর ডানে বসিয়ে প্রথমে আবৃত্ত দশমিক ভগাংশকে গুণ করা হয়েছে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পর যে কয়টি অনাবৃত্ত অঙ্ক আছে, সে কয়টি শূন্য 1 এর ডানে বসিয়ে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে গুণ করা হয়েছে।
- প্রথম গুণফল থেকে দ্বিতীয় গুণফল বিয়োগ করা হয়েছে এবং তাতে ডানপক্ষে পূর্ণসংখ্যা পাওয়া গেছে। এখানে লক্ষণীয় যে, আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক ও পৌনঃপুনিক বিন্দু উঠিয়ে প্রাপ্ত সংখ্যা থেকে অনাবৃত্ত অংশের সংখ্যা বিয়োগ করা হয়েছে।
- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে যতগুলো আবৃত্ত অঙ্ক ছিল ততগুলো 9 লিখে এবং তাদের ডানে দশমিক বিন্দুর পর যতগুলো অনাবৃত্ত অঙ্ক ছিল ততগুলো শূন্য বসিয়ে উপরে প্রাপ্ত বিয়োগফলকে ভাগ

করা হয়েছে।

- আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করায় সাধারণ ভগ্নাংশটির হর হলো যতগুলো আবৃত্ত অঙ্ক ততগুলো 9 এবং 9 গুলোর ডানে দশমিক বিন্দুর পর যতগুলো অনাবৃত্ত অঙ্ক ততগুলো শূন্য। আর সাধারণ ভগ্নাংশটির লব হলো আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দু ও পৌনঃপুনিক বিন্দু উঠিয়ে যে সংখ্যা পাওয়া গেছে, সে সংখ্যা থেকে আবৃত্তাংশ বাদ দিয়ে বাকি অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যা বিয়োগ করে পাওয়া বিয়োগফল।

মন্তব্য: আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সব সময় সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়। সকল আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ মূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ ৫. $5.23\dot{4}5\dot{7}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান:

$$\begin{aligned} 5.23\dot{4}5\dot{7} &= 5.23457457457\ldots \\ 5.23\dot{4}5\dot{7} \times 100000 &= 523457.457457\ldots \\ 5.23\dot{4}5\dot{7} \times 100 &= 523.457457\ldots \\ \hline \text{বিয়োগ করে, } 5.23\dot{4}5\dot{7} \times 99900 &= 522934 \\ \therefore 5.23\dot{4}5\dot{7} &= \frac{522934}{99900} = \frac{261467}{49950} = 5\frac{11717}{49950} \end{aligned}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $5\frac{11717}{49950}$

ব্যাখ্যা: দশমিক অংশে পাঁচটি অঙ্ক রয়েছে বলে এখানে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে প্রথমে 100000 (এক এর ডানে পাঁচটি শূন্য) দ্বারা গুণ করা হয়েছে। আবৃত্ত অংশের বামে দশমিক অংশে দুইটি অঙ্ক রয়েছে বলে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে 100 (এক এর ডানে দুইটি শূন্য) দ্বারা গুণ করা হয়েছে। প্রথম গুণফল থেকে দ্বিতীয় গুণফল বিয়োগ করা হয়েছে। এই বিয়োগফলের একদিকে পূর্ণসংখ্যা অন্যদিকে প্রদত্ত আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের মানের $(100000 - 1000) = 99900$ গুণ। উভয় পক্ষকে 99900 দিয়ে ভাগ করে নির্ণেয় সাধারণ ভগ্নাংশ পাওয়া গেল।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তরের নিয়ম:

নির্ণেয় ভগ্নাংশের লব = প্রদত্ত দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দু বাদ দিয়ে প্রাপ্ত পূর্ণসংখ্যা এবং অনাবৃত্ত অংশ দ্বারা গঠিত পূর্ণসংখ্যার বিয়োগফল।

নির্ণেয় ভগ্নাংশের হর = দশমিক বিন্দুর পরে আবৃত্ত অংশে যতগুলো অঙ্ক আছে ততগুলো নয় (9) এবং অনাবৃত্ত অংশে যতগুলো অঙ্ক আছে ততগুলো শূন্য (0) দ্বারা গঠিত সংখ্যা।

নিচের উদাহরণগুলোতে এ নিয়ম সরাসরি প্রয়োগ করে কয়েকটি আবৃত্ত দশমিককে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করা হলো।

উদাহরণ ৬. $45.2\dot{3}4\dot{6}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: $45.2\dot{3}4\dot{6} = \dfrac{452346 - 452}{9990} = \dfrac{451894}{9990} = \dfrac{225947}{4995} = 45\dfrac{1172}{4995}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $45\dfrac{1172}{4995}$

উদাহরণ ৭. $32.\dot{5}6\dot{7}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: $32.\dot{5}6\dot{7} = \dfrac{32567 - 32}{999} = \dfrac{32535}{999} = \dfrac{3615}{111} = \dfrac{1205}{37} = 32\dfrac{21}{37}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $32\dfrac{21}{37}$

কাজ: $0.\dot{4}\dot{1}$, $3.04\dot{6}2\dot{3}$, $0.0\dot{1}\dot{2}$ এবং $3.31\dot{2}\dot{4}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর কর।

সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ও অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ

দুই বা ততোধিক আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত ও আবৃত্ত উভয় অংশের অঙ্ক সংখ্যা সমান হলে এদের **সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ** বলে। অন্যথায় এদেরকে **অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ** বলে। যেমন $12.\dot{4}\dot{5}$ ও $6.\dot{3}\dot{2}$; $9.45\dot{3}$ ও $125.89\dot{7}$ সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ। আবার, $0.3\dot{4}5\dot{6}$ ও $7.45\dot{7}8\dot{9}$; $6.43\dot{5}\dot{7}$ ও $2.89\dot{3}4\dot{5}$ অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন

কোনো আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের আবৃত্ত অংশের অঙ্কগুলোকে বারবার লিখলে দশমিক ভগ্নাংশের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। যেমন $6.45\dot{3}\dot{7} = 6.45\dot{3}73\dot{7} = 6.453\dot{7}\dot{3} = 6.4537\dot{3}\dot{7}$। এখানে প্রত্যেকটিই একই আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ $6.45373737\ldots$, যেটি একটি অসীম দশমিক সংখ্যা। এই আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিবর্তন করলে দেখা যাবে প্রত্যেকটি সমান।

$$6.45\dot{3}\dot{7} = \frac{64537 - 645}{9900} = \frac{63892}{9900}$$

$$6.45\dot{3}73\dot{7} = \frac{6453737 - 645}{999900} = \frac{6453092}{999900} = \frac{63892}{9900}$$

$$6.4537\dot{3}\dot{7} = \frac{6453737 - 64537}{990000} = \frac{6389200}{990000} = \frac{63892}{9900}$$

সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করতে হলে ভগ্নাংশগুলোর মধ্যে যে ভগ্নাংশটির অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা বেশি, প্রত্যেকটি ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যাকে ওই ভগ্নাংশটির অনাবৃত্ত অংশের অঙ্কের সংখ্যার সমান করতে হবে এবং বিভিন্ন সংখ্যায় আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যাগুলোর ল.সা.গু. যত, প্রত্যেকটি দশমিক ভগ্নাংশের আবৃত্ত অংশ তত অঙ্কের করতে হবে।

উদাহরণ ৮. $5.\dot{6}$, $7.3\dot{4}\dot{5}$, ও $10.78\dot{4}2\dot{3}$ কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত কর।

সমাধান: $5.\dot{6}$, $7.3\dot{4}\dot{5}$, ও $10.78\dot{4}2\dot{3}$ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা যথাক্রমে 0, 1 ও 2। এখানে $10.78\dot{4}2\dot{3}$ এর অনাবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যা দশমিকে সবচেয়ে বেশি এবং এ সংখ্যা 2। তাই সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ করতে হলে প্রত্যেকটি দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 করতে হবে। $5.\dot{6}$, $7.3\dot{4}\dot{5}$, ও $10.78\dot{4}2\dot{3}$ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে আবৃত্ত অংশের সংখ্যা যথাক্রমে 1, 2 ও 3। 1, 2 ও 3 এর ল.সা.গু হলো 6। তাই সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ করতে হলে প্রত্যেকটি দশমিক ভগ্নাংশের আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 6 করতে হবে। সুতরাং $5.\dot{6} = 5.66\dot{6}666\dot{6}$, $7.3\dot{4}\dot{5} = 7.34\dot{5}4545\dot{4}$ ও $10.78\dot{4}2\dot{3} = 10.78\dot{4}2342\dot{3}$। নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশসমূহ যথাক্রমে $5.66\dot{6}666\dot{6}$, $7.34\dot{5}4545\dot{4}$ ও $10.78\dot{4}2342\dot{3}$

উদাহরণ ৯. 1.7643, $3.\dot{2}\dot{4}$, ও $2.78\dot{3}4\dot{6}$ কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত কর।

সমাধান: 1.7643 এ অনাবৃত্ত অংশ বলতে দশমিক বিন্দুর পরের 4টি অঙ্ক, এখানে আবৃত্ত অংশ নেই। $3.\dot{2}\dot{4}$ এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 0 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2, $2.78\dot{3}4\dot{6}$ এ অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 3। এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা সবচেয়ে বেশি হলো 4 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 ও 3 এর ল.সা.গু. হলো 6। প্রত্যেকটি দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 4 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 6।
$\therefore 1.7643 = 1.7643\dot{0}0000\dot{0}$, $3.\dot{2}\dot{4} = 3.2424\dot{2}4242\dot{4}$ ও $2.78\dot{3}4\dot{6} = 2.7834\dot{6}3463\dot{4}$
নির্ণেয় সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশসমূহ $1.7643\dot{0}0000\dot{0}$, $3.2424\dot{2}4242\dot{4}$ ও $2.7834\dot{6}3463\dot{4}$

মন্তব্য: সসীম দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করার জন্য দশমিক বিন্দুর সর্বডানের অঙ্কের পর প্রয়োজনীয় সংখ্যক শূন্য বসিয়ে প্রত্যেকটি দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দুর পরের অনাবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যা সমান করা হয়েছে। আর আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর পরের অনাবৃত অঙ্ক সংখ্যা সমান এবং আবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যা সমান করা হয়েছে আবৃত্ত অঙ্কগুলো ব্যবহার করে। অনাবৃত্ত অংশের পর যে কোনো অঙ্ক থেকে শুরু করে আবৃত্ত অংশ নেওয়া যায়।

কাজ: 3.467, $2.01\dot{2}4\dot{3}$ এবং $7.52\dot{5}\dot{6}$ কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন কর।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের যোগ বা বিয়োগ করতে হলে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন করতে হবে। এরপর সসীম দশমিক ভগ্নাংশের নিয়মে যোগ বা বিয়োগ করতে হবে। সসীম দশমিক ও আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোর মধ্যে যোগ বা বিয়োগ করতে হলে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ করার সময় প্রত্যেকটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে সসীম দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দুর পরের অঙ্ক সংখ্যা ও অন্যান্য আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যার মধ্যে সবচেয়ে বড় যে সংখ্যা সে সংখ্যার সমান। আর আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে যথানিয়মে প্রাপ্ত ল.সা.গু. এর সমান এবং সসীম দশমিক ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে আবৃত্ত অংশের জন্য

প্রয়োজনীয় সংখ্যক শূন্য বসাতে হবে। এরপর সসীম দশমিক ভগ্নাংশের নিয়মে যোগ বা বিয়োগ করতে হবে। এভাবে প্রাপ্ত যোগফল বা বিয়োগফল প্রকৃত যোগফল বা বিয়োগফল হবে না। প্রকৃত যোগফল বা বিয়োগফল বের করতে হলে দেখতে হবে যে সদৃশকৃত দশমিক ভগ্নাংশগুলো যোগ বা বিয়োগ করলে প্রত্যেকটি সদৃশকৃত দশমিক ভগ্নাংশগুলোর আবৃত্ত অংশের সর্ববামের অঙ্কগুলোর যোগ বা বিয়োগে হাতে যে সংখ্যাটি থাকে, তা প্রাপ্ত যোগফল বা বিয়োগফলের আবৃত্ত অংশের সর্বডানের অঙ্কের সাথে যোগ বা অঙ্ক থেকে বিয়োগ করলে প্রকৃত যোগফল বা বিয়োগফল পাওয়া যাবে। এটিই নির্ণেয় যোগফল বা বিয়োগফল হবে।

মন্তব্য:

১. আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের যোগফল বা বিয়োগফলও আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ হয়। এই যোগফল বা বিয়োগফলে অনাবৃত্ত অংশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোর মধ্যে সর্বাপেক্ষা অনাবৃত্ত অংশবিশিষ্ট আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশটির অনাবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যার সমান হবে এবং আবৃত্ত অংশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোর আবৃত্ত অঙ্ক সংখ্যার ল.সা.গু. এর সমান সংখ্যক আবৃত্ত অঙ্ক হবে। সসীম দশমিক ভগ্নাংশ থাকলে প্রত্যেকটি আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে সসীম দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দুর পরের অঙ্ক সংখ্যা ও অন্যান্য আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যার মধ্যে সবচেয়ে বড় যে সংখ্যা সে সংখ্যার সমান।

২. আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন করে ভগ্নাংশের নিয়মে যোগফল বা বিয়োগফল বের করার পর যোগফল বা বিয়োগফলকে আবার দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন করেও যোগ বা বিয়োগ করা যায়। তবে এ পদ্ধতিতে যোগ বা বিয়োগ করলে বেশি সময় লাগবে।

উদাহরণ ১০. $3.\dot{8}\dot{9}$, $2.1\dot{7}\dot{8}$ ও $5.89\dot{7}9\dot{8}$ যোগ কর।

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক হবে 2, 2 ও 3 এর ল.সা.গু. 6। প্রথমে তিনটি আবৃত্ত দশমিককে সদৃশ করা হয়েছে।

$$\begin{array}{rll}
3.\dot{8}\dot{9} & = 3.89\dot{8}9898\dot{9} & \\
2.1\dot{7}\dot{8} & = 2.17\dot{8}7878\dot{7} & \\
5.89\dot{7}9\dot{8} & = 5.89\dot{7}9879\dot{8} & \\
\hline
 & 11.97576574 & [8+8+7+2=25, \text{ এখানে 2 হাতের 2} \\
 & +2 & \text{এখানে 25 এর 2 যোগ হয়েছে}] \\
\hline
 & 11.97\dot{5}7657\dot{6} &
\end{array}$$

নির্ণেয় যোগফল $11.97\dot{5}7657\dot{6}$ বা $11.97\dot{5}7\dot{6}$

মন্তব্য: এই যোগফলে 576576 আবৃত্ত অংশ। কিন্তু কেবল 576 কে আবৃত্ত অংশ করলে মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

দ্রষ্টব্য: সর্বডানে যোগের ধারণা বোঝাবার জন্য এ যোগটি অন্য নিয়মে করা হলো:

$$\begin{array}{ll} 3.\dot{8}\dot{9} & = 3.89\dot{8}9898\dot{9}|89 \\ 2.1\dot{7}\dot{8} & = 2.17\dot{8}7878\dot{7}|87 \\ 5.89\dot{7}9\dot{8} & = 5.89\dot{7}9879\dot{8}|79 \\ \hline & \quad 11.97\dot{5}7657\dot{6}|55 \end{array}$$

এখানে আবৃত্ত অংশ শেষ হওয়ার পর আরও অঙ্ক পর্যন্ত সংখ্যাকে বাড়ানো হয়েছে। অতিরিক্ত অঙ্কগুলোকে একটা খাড়া রেখা দ্বারা আলাদা করে দেওয়া হয়েছে। এরপর যোগ করা হয়েছে। খাড়া রেখার ডানের অঙ্কের যোগফল থেকে হাতের 2 এসে খাড়া রেখার বামের অঙ্কের সাথে যোগ হয়েছে। খাড়া রেখার ডানের অঙ্কটি আর পৌনঃপুনিক বিন্দু শুরু হওয়ার অঙ্কটি একই। তাই দুইটি যোগফলই এক।

উদাহরণ ১১. $8.9\dot{4}7\dot{8}$, 2.346 ও $4.\dot{7}\dot{1}$ যোগ কর।

সমাধান: দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সদৃশ করতে হলে অনাবৃত্ত অংশ 3 অঙ্কের এবং আবৃত্ত অংশ হবে 3 ও 2 এর ল.সা.গু. 6 অঙ্কের। এবার দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে যোগ করা হবে।

$$\begin{array}{ll} 8.9\dot{4}7\dot{8} & = 8.947\dot{8}4784\dot{7} \\ 2.346 & = 2.346\dot{0}0000\dot{0} \\ 4.\dot{7}\dot{1} & = 4.717\dot{1}7171\dot{7} \\ \hline & \quad 16.011019564 \\ & \qquad\qquad +1 \\ \hline & \quad 16.011\dot{0}1956\dot{5} \end{array}$$

[$8+0+1+1=10$, এখানে 1 হাতের 1 এখানে 10 এর 1 যোগ হয়েছে]

নির্ণেয় যোগফল $16.011\dot{0}1956\dot{5}$।

> **কাজ:** যোগ কর: ক) $2.0\dot{9}\dot{7}$ ও $5.12\dot{7}6\dot{8}$ খ) $1.34\dot{5}$, $0.31\dot{5}7\dot{6}$ ও $8.056\dot{7}\dot{8}$

উদাহরণ ১২. $8.2\dot{4}\dot{3}$ থেকে $5.24\dot{6}7\dot{3}$ বিয়োগ কর।

সমাধান: এখানে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 ও 3 এর ল.সা.গু. 6। এখন দশমিক সংখ্যা দুইটিকে সদৃশ করে বিয়োগ করা হলো।

$$\begin{array}{ll} 8.2\dot{4}\dot{3} & = 8.24\dot{3}4343\dot{4} \\ 5.24\dot{6}7\dot{3} & = 5.24\dot{6}7367\dot{3} \\ \hline & \quad 2.99669761 \\ & \qquad\qquad -1 \\ \hline & \quad 2.99\dot{6}6976\dot{0} \end{array}$$

[3 থেকে 6 বিয়োগ করলে হাতে 1 নিতে হবে]

নির্ণেয় বিয়োগফল $2.99\dot{6}6976\dot{0}$।

মন্তব্য: পৌনঃপুনিক বিন্দু যেখানে শুরু সেখানে বিয়োজন সংখ্যা বিয়োজ্য সংখ্যা থেকে ছোট হলে সব সময় সর্বডানের অঙ্ক থেকে 1 বিয়োগ করতে হবে।

দ্রষ্টব্য: সর্বডানের অঙ্ক থেকে 1 কেন বিয়োগ করা হয় তা বোঝাবার জন্য নিচে অন্যভাবে বিয়োগ করে দেখানো হলো:

$$\begin{array}{ll} 8.2\dot{4}\dot{3} & = 8.24\dot{3}4343\dot{4}|34 \\ 5.24\dot{6}7\dot{3} & = 5.24\dot{6}7367\dot{3}|67 \\ \hline & \quad 2.99\dot{6}6976\dot{0}|67 \end{array}$$

নির্ণেয় বিয়োগফল $2.99\dot{6}6976\dot{0}|67$। এখানে দুইটি বিয়োগফলই এক।

উদাহরণ ১৩. $24.45\dot{6}4\dot{5}$ থেকে $16.\dot{4}3\dot{7}$ বিয়োগ কর।

সমাধান:

$$\begin{array}{ll} 24.45\dot{6}4\dot{5} & = 24.45\dot{6}4\dot{5} \\ 16.\dot{4}3\dot{7} & = 16.43\dot{7}4\dot{3} \\ \hline & \quad 8.01902 \\ & \quad -1 \\ \hline & \quad 8.01\dot{9}0\dot{1} \end{array}$$

[6 থেকে 7 বিয়োগ করলে হাতে 1 নিতে হবে]

নির্ণেয় বিয়োগফল $8.01\dot{9}0\dot{1}$

দ্রষ্টব্য: সর্বডানের অঙ্ক থেকে 1 কেন বিয়োগ করা হয় তা বোঝাবার জন্য নিচে অন্যভাবে বিয়োগ করে দেখানো হলো।

$$\begin{array}{ll} 24.45\dot{6}4\dot{5} & = 24.45\dot{6}4\dot{5}|64 \\ 16.\dot{4}3\dot{7} & = 16.43\dot{7}4\dot{3}|74 \\ \hline & \quad 8.01\dot{9}0\dot{1}|90 \end{array}$$

কাজ: বিয়োগ কর: ক) $13.12\dot{7}8\dot{4}$ থেকে 10.418 খ) $23.03\dot{9}\dot{4}$ থেকে $9.12\dot{6}4\dot{5}$

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের গুণ ও ভাগ

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করে গুণ বা ভাগের কাজ সমাধা করে প্রাপ্ত ভগ্নাংশটিকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করলেই আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলোর গুণফল বা ভাগফল হবে। সসীম দশমিক ভগ্নাংশ ও আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের মধ্যে গুণ বা ভাগ করতে হলে এ নিয়মেই করতে হবে। তবে ভাগের ক্ষেত্রে ভাজ্য ও ভাজক দুইটিই আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ হলে, উভয়কে সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ করে নিলে ভাগের কাজ একটু সহজ হয়।

উদাহরণ ১৪. $4.\dot{3}$ কে $5.\dot{7}$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান:

$$4.\dot{3} = \frac{43-4}{9} = \frac{39}{9} = \frac{13}{3}$$

$$5.\dot{7} = \frac{57-5}{9} = \frac{52}{9}$$

$$\therefore 4.\dot{3} \times 5.\dot{7} = \frac{13}{3} \times \frac{52}{9} = \frac{676}{27} = 25.\dot{0}3\dot{7}$$

নির্ণেয় গুণফল $25.\dot{0}3\dot{7}$

উদাহরণ ১৫. $0.2\dot{8}$ কে $42.\dot{1}\dot{8}$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান:

$$0.2\dot{8} = \frac{28-2}{90} = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$$

$$42.\dot{1}\dot{8} = \frac{4218-42}{99} = \frac{4176}{99} = \frac{464}{11}$$

$$\therefore\ 0.2\dot{8} \times 42.\dot{1}\dot{8} = \frac{13}{45} \times \frac{464}{11} = \frac{6032}{495} = 12.1\dot{8}\dot{5}$$

নির্ণেয় গুণফল $12.1\dot{8}\dot{5}$

উদাহরণ ১৬. $2.5 \times 4.3\dot{5} \times 1.2\dot{3}\dot{4}$ কত?

সমাধান:

$$2.5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$4.3\dot{5} = \frac{435-43}{90} = \frac{392}{90}$$

$$1.2\dot{3}\dot{4} = \frac{1234-12}{990} = \frac{1222}{990} = \frac{611}{495}$$

$$\therefore 2.5 \times 4.3\dot{5} \times 1.2\dot{3}\dot{4} = \frac{5}{2} \times \frac{392}{90} \times \frac{611}{495} = \frac{119756}{8910} = 13.440628\ldots$$

নির্ণেয় গুণফল 13.440628 (প্রায়)

কাজ: ক) $1.1\dot{3}$ কে 2.6 দ্বারা গুণ কর। খ) $0.\dot{2} \times 1.\dot{1}\dot{2} \times 0.0\dot{8}\dot{1} =$ কত?

উদাহরণ ১৭. $7.\dot{3}\dot{2}$ কে $0.2\dot{7}$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান:

$$7.\dot{3}\dot{2} = \frac{732-7}{99} = \frac{725}{99}$$

$$0.2\dot{7} = \frac{27-2}{90} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

$$\therefore 7.\dot{3}\dot{2} \div 0.2\dot{7} = \frac{725}{99} \div \frac{5}{18} = \frac{725}{99} \times \frac{18}{5} = \frac{290}{11} = 26.\dot{3}\dot{6}$$

নির্ণেয় ভাগফল $26.\dot{3}\dot{6}$