МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Практичне заняття № 1

Тема. Обчислення математичних моделей на основі марківських процесів з дискретними станами та неперервним часом.

План проведення заняття

Вступ.
1. Обчислення математичних моделей процесів, що описуються найпростішим потоком подій.
2. Побудова математичної моделі функціонування систем з дискретними станами на неперервним часом.
3. Знаходження граничних імовірностей станів марківського процесу з дискретними станами та неперервним часом.
4. Моделювання системи диференційних рівнянь Колмогорова на MathCad.
Заключення.

Завдання на СРС: Побудувати математичну модель інформаційної системи, яка розробляється в дипломній (магістерській роботі):

- Описати функціонування досліджуваної системи захисту інформації.
- Описати стани системи та переходи між станами.
- Обґрунтувати, що всі перелічені стани складають повну групу подій.
- Накреслити граф станів системи з вказанням можливих переходів.
- Обґрунтувати, що потік подій – переходів із стану в стан можна вважати найпростішим.
- Розрахувати або обґрунтувати інтенсивності переходів із стану в стан.
- Скласти систему диференційних рівнянь Колмогорова.
- Рішити СДР Колмогорова

Дослідження оформити в друкованому вигляді на листах формату А4. Матеріал структурувати за розділами: Вступ. Розділ 1. Особливості функціонування системи захисту інформації. Розділ 2. Побудова та обґрунтування математичної моделі системи. Розділ 3. Рекомендації щодо моделювання системи. Розділ 4. Практичні рекомендації щодо удосконалення системи. Висновки. Література.

1. Обчислення математичних моделей процесів, що описуються найпростішим потоком подій.

Приклад 1. Середня кількість НСД до локальної обчислювальної мережі підприємства за годину становить 3. Знайти ймовірність того, що за 3 години буде:

1) 5 НСД;
2) менш як 5 НСД;
3) не менш як 5 НСД.

Потік подій вважається найпростішим.

Рекомендації до рішення: застосувати формулу Пуассона:

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

за якою знаходиться імовірність настання *m* подій за час *t*.

Приклад 2. На АТС надходить найпростіший потік викликів з інтенсивністю $\lambda = 1{,}2$ викликів за хвилину. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини:

1) не надійде жодного виклику;
2) надійде рівно один виклик;
3) надійде хоча б один виклик.

2. Побудова математичної моделі функціонування систем з дискретними станами на неперервним часом.

Приклад 3. Побудувати граф станів випадкового процесу, що протікає в системі: пристрій утворено із двох вузлів, кожний з яких у випадковий момент часу може вийти з ладу, після чого негайно починається ремонт вузла, який триває протягом заздалегідь невідомого випадкового часу.

Розв’язання. Можливі стани системи: S1 — обидва вузли справні; S2 — перший вузол ремонтується, а другий справний; S3— другий вузол ремонтується, а перший справний; S4— обидва вузли ремонтуються.

Граф системи наведено на рис. 1.

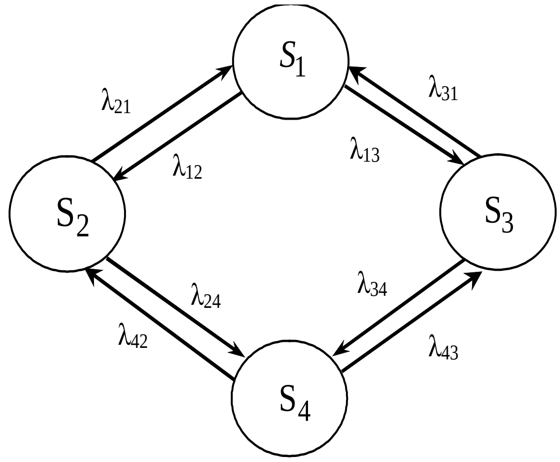

Рис. 1. Граф станів для системи з двох вузлів

Стрілка, що направлена із S1 до S2 означає перехід системи в момент відмови першого вузла; стрілка із S2 до S1 — перехід у момент закінчення ремонту цього вузла. Стрілка, що направлена із S1 до S3 означає перехід системи в момент відмови другого вузла; стрілка із S3 до S1 — перехід у момент закінчення ремонту цього вузла. В стані S4 обидва вузли ремонтуються. Стрілки із S1 до S4 немає, оскільки припускається, що вузли виходять із ладу незалежно один від одного. Також припускається, що обидва вузли одночасно не можуть вийти з ладу.

Система рівнянь Колмогорова, що описує таку систему, складається за такими **правилами**:

Для кожного стану складається своє диференційне рівняння. У лівій частині кожного рівняння має бути похідна ймовірності *i*-го стану. У правій частині — сума добутків імовірностей усіх станів (з яких відбувається перехід до даного стану) на інтенсивності відповідних потоків подій, мінус сумарна інтенсивність усіх потоків, що виводять систему із даного *i*-го стану, помножена на ймовірність цього стану.

Завдання для студентів: самостійно записати систему рівнянь Колмогорова для системи, граф станів та переходів якої зображено на рис. 1.

Система рівнянь Колмогорова для графа рис.1 буде такою:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{21} \cdot p_2(t) + \lambda_{31} \cdot p_3(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot p_1(t); \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{42} \cdot p_4(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{24}) \cdot p_2(t); \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{13} \cdot p_1(t) + \lambda_{43} \cdot p_4(t) - (\lambda_{31} + \lambda_{34}) \cdot p_3(t); \\ \dfrac{dp_4(t)}{dt} = \lambda_{24} \cdot p_2(t) + \lambda_{34} \cdot p_3(t) - (\lambda_{42} + \lambda_{43}) \cdot p_4(t). \end{cases} \quad (1)$$

Так як одне із рівнянь є залежним, то замість будь-якого рівняння треба включити в систему рівняння нормування:

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1. \quad (2)$$

Особливість розв'язання диференціальних рівнянь взагалі полягає в тому, що потрібно задавати так звані початкові умови, у даному випадку — імовірності станів системи в початковий момент $t = 0$. Так, систему (2) маємо розв'язувати за умови, що в початковий момент обидва вузли справні і система перебувала у стані S1, тобто за початкових умов:

$$p_1(0) = 1, \;\; p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0.$$

Рішення системи має виконуватись в будь-якому програмному середовищі. Найкраще таку систему рівнянь вирішувати в MathCad.

Приклад 4. Побудувати систему диференційних рівнянь Колмогорова для марківського процесу, розмічений граф якого представлено на рис. 2.

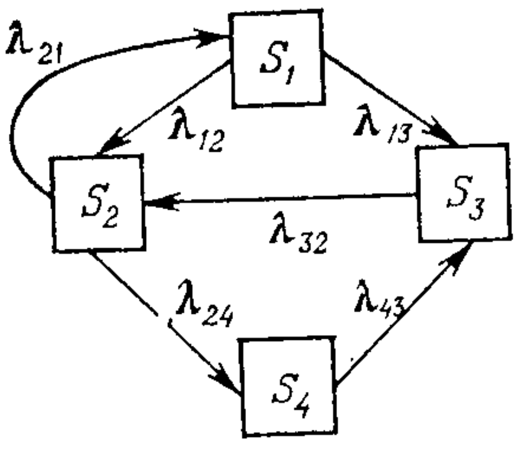

Рис. 2

Розв’язання.

$$\frac{dp_1}{dt} = \lambda_{21} p_2 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})\, p_1,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3 - (\lambda_{24} + \lambda_{21})\, p_2,$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \lambda_{31} p_1 + \lambda_{43} p_4 - \lambda_{32} p_3,$$

$$\frac{dp_4}{dt} = \lambda_{24} p_2 - \lambda_{43} p_4.$$

Примітка. Звернути увагу на те, які доданки брати зі знаком «плюс», а які зі знаком «мінус».

Завдання студентам: В даній системі рівнянь введено помилку. Самостійно знайти помилку.

Приклад 5. Розмічений граф станів системи S представлено на рис. 3. Скласти систему рівнянь Колмогорова та початкові умови для рішення цієї системи, якщо відомо, що в момент часу t=0 система знаходилась в стані S1.

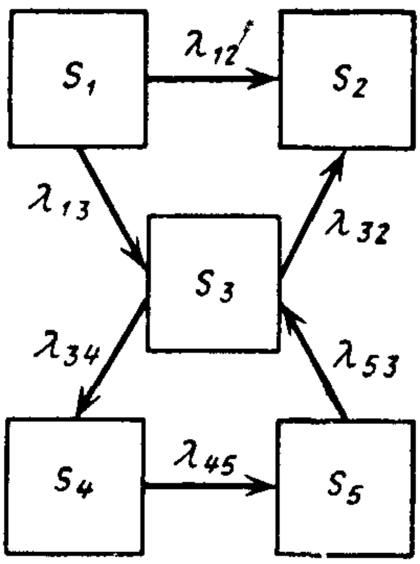

Рис. 3

Розв'язання. Система рівнянь Колмогорова буде такою:

$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})\, p_1,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}\, p_1 + \lambda_{32}\, p_3,$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -(\lambda_{32} + \lambda_{34})\, p_3 + \lambda_{13}\, p_1 + \lambda_{53}\, p_5,$$

$$\frac{dp_4}{dt} = -\lambda_{45}\, p_4 + \lambda_{34}\, p_3,$$

$$\frac{dp_5}{dt} = -\lambda_{53}\, p_5 + \lambda_{45}\, p_4.$$

Початкові умови: t=0; $p_1=1$; $p_2=p_3=p_4=p_5=0$.

Висновки. Рішення системи рівнянь Колмогорова необхідно здійснювати за допомогою обчислювальної техніки. Можна запрограмувати на одній із алгоритмічних мов, застосовуючи метод Рунге-Кутта, або застосувати спеціалізовані програмні середовища MathLab, MahtCad, Maxima, Maple та інші. В результаті рішення будуть отримані імовірності перебування системи у певних станах як функції часу. В результаті аналізу отриманих графіків можна давати практичні реалізації по удосконаленню реальної системи, для якої складена математична модель.

3. Знаходження граничних імовірностей станів марківського процесу з дискретними станами та неперервним часом

Приклад 6. Система технічного захисту інформації має можливі стани S1,S2,S3,S4. Розмічений граф станів та переходів представлено на рис. 4. На рисунку біля кожного ребра графа проставлена інтенсивність переходів λ_{ij}. Обчислити граничні імовірності станів p1,p2,p3,p4.

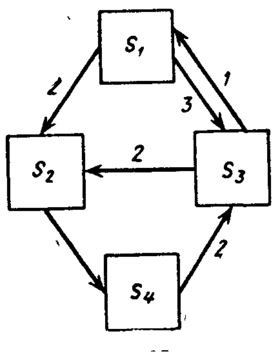

Рис. 4

Розв’язання. Рівняння Колмогорова для імовірностей станів мають вигляд:

$$\frac{dp_1}{dt} = -5p_1 + p_3,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -p_2 + 2p_1 + 2p_3,$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -3p_3 + 3p_1 + 2p_4,$$

$$\frac{dp_4}{dt} = -2p_4 + p_2.$$

Граничні імовірності треба знаходити при $t = \infty$. При цьому настане усталений режим, при якому імовірності не будуть змінюватись. Тому приймаємо $\frac{dp_i}{dt} = 0$.

Система для граничних імовірностей прийме вигляд:

$$\begin{cases} 0 = -5p_1 + p_3; \\ 0 = -p_2 + 2p_1 + 2p_3; \\ 0 = -3p_3 + 3p_1 + 2p_4; \\ 0 = -2p_4 + p_2. \end{cases}$$

Замість останнього рівняння слід вставити рівняння нормування:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Таким чином, необхідно рішити систему із 4 рівнянь з 4 невідомими:

$$\begin{cases} -5p_1 + p_3 = 0; \\ 2p_1 - p_2 + 2p_3 = 0; \\ 3p_1 - 3p_3 + 2p_4 = 0; \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \end{cases}$$

Рішення цієї системи можна здійснити будь-яким методом. В результаті рішення отримаємо:

$$p_1 = 1/24; \quad p_2 = 1/2; \quad p_3 = 5/24; \quad p_4 = 1/4.$$

Висновки: система буде працювати в стані S2 половину від всього часу функціонування системи, а в стані S1 – тільки 1/24 частину.

Приклад 7. Скласти систему рівнянь для граничних імовірностей для системи, що зображена на рис. 5.

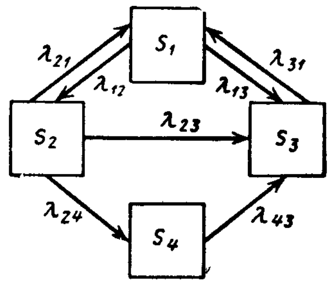

Рис. 5

Розв'язання. Шукана система має вигляд:

$$\lambda_{21} p_2 + \lambda_{31} p_3 = (\lambda_{12} + \lambda_{13}) p_1,$$
$$\lambda_{12} p_1 = (\lambda_{23} + \lambda_{24}) p_2,$$
$$\lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2 + \lambda_{43} p_4 = \lambda_{31} p_3,$$
$$\lambda_{24} p_2 = \lambda_{43} p_4.$$

Приклад 8. Записати алгебраїчні рівняння для граничних імовірностей станів системи, граф якої зображено на рис. 6. Рішити ці рівняння з загальному вигляді.

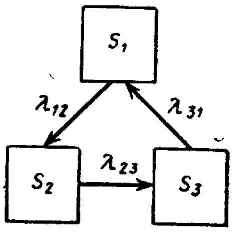

Рис. 6

Розв'язання. Система алгебраїчних рівнянь має вигляд:

$$\lambda_{31} p_3 = \lambda_{12} p_1,$$
$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{23} p_2,$$
$$\lambda_{23} p_2 = \lambda_{31} p_3.$$

Рівняння нормування:

$$p_1+p_2+p_3=1.$$

Складаємо систему з перших двох рівнянь та рівняння нормування. Рішати систему доцільно методом підстановки. Виразимо з перших двох p2 і p3 та підставимо в рівняння нормування:

$$p_1+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}p_1+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}p_1=1,$$

Тоді:

$$p_1=\frac{1}{1+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}}$$

$$p_2=\frac{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}}{1+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}};\quad p_3=\frac{\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}}{1+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}}$$

Рішення отримано.

4. Моделювання системи диференційних рівнянь Колмогорова на MathCad.

Приклад 9. Система складається з двох однакових приладів, які експлуатуються в такому режимі: кожен з приладів в середньому tф=10 діб функціонує, а tр=2 доби в середньому перебуває на регламентних роботах. Скласти математичну модель на основі марківського процесу з дискретними станами та неперервним часом та побудувати графіки залежності $p_i(t)$. В якості станів системи прийняти такі стани:

S1 – обидва прилади функціонують;

S2 – один із приладів знаходиться на регламентних роботах;

S3 – обидва прилади знаходяться на регламентних роботах.

Розв’язання.

Граф станів системи буде мати вигляд на рис. 7.

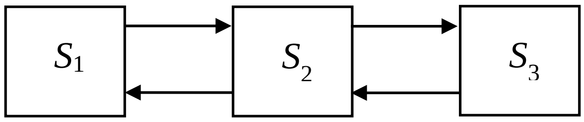

Рис. 7

Інтенсивності переходів:

$$\lambda_{12} = \frac{2}{t_{\Phi}} = 0{,}2; \quad \lambda_{23} = \frac{1}{t_{\Phi}} = 0{,}1; \quad \lambda_{21} = \frac{1}{t_P} = 0{,}5; \quad \lambda_{32} = \frac{2}{t_P} = 1.$$

Система рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{21} \cdot p_2(t); \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot p_2(t) + \lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{32} \cdot p_3(t); \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda_{32} \cdot p_3(t) + \lambda_{23} \cdot p_2(t). \end{cases}$$

Рівняння нормування: $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1.$

Пропонується вирішувати дану систему на MathCad. При цьому третє рівняння системи замінити на рівняння нормування. В результаті рішення побудувати графікі $p_i(t)$ в діапазоні від 0 до 20 діб.

Скріншот рішення на рис. 8.

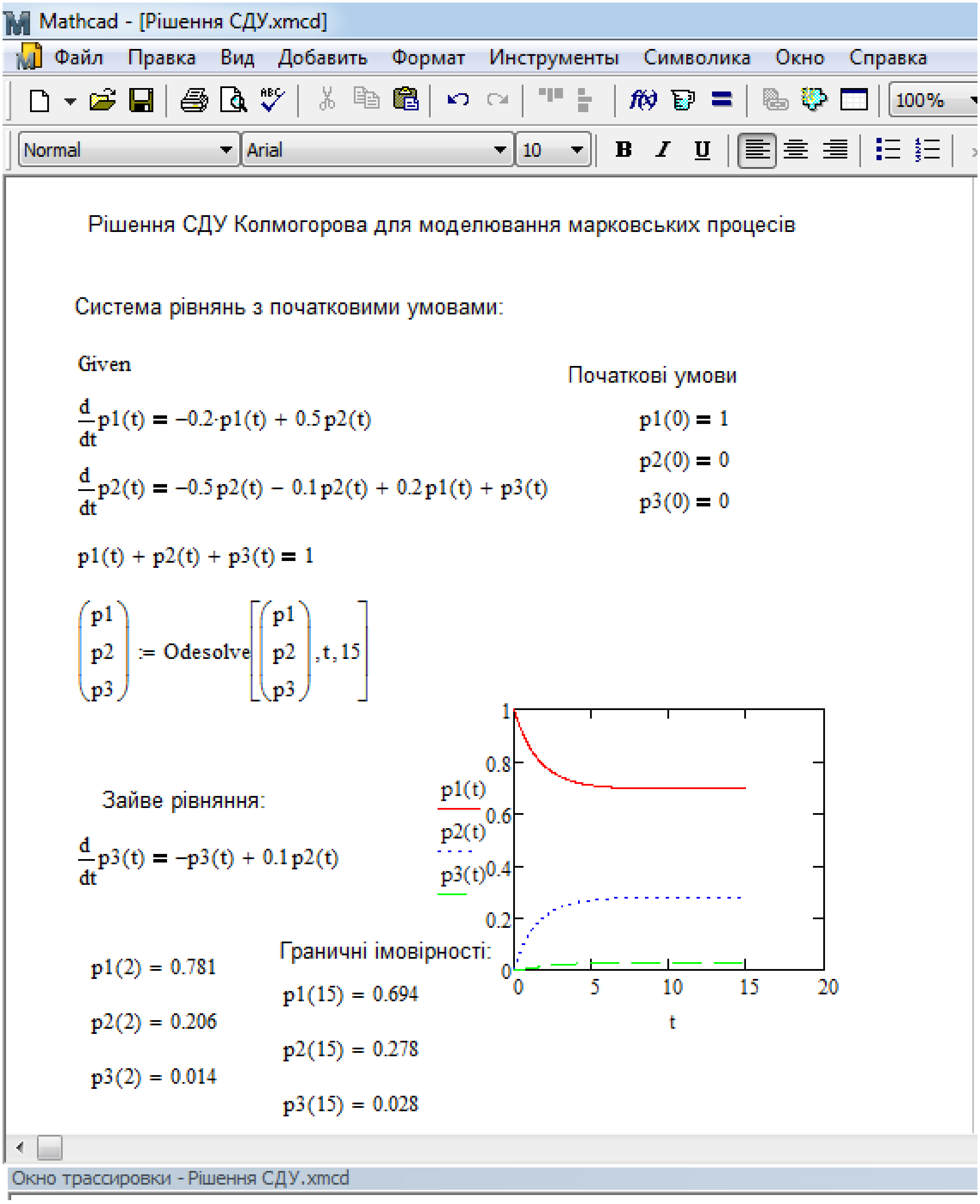

Рис. 8

<u>Висновок.</u> В результаті рішення отримали залежності імовірностей перебування системи в певних станах. Як приклад в програмі визначено значення $p_i(t)$ при t = 2 доби. Після t = 12 діб процес вважається усталеним, тому імовірності не змінюються і будуть дорівнювати граничним імовірностям.

Таким чином, отримане рішення дає можливість промоделювати досліджуваний випадковий процес при різних вихідних даних, що, в свою чергу, надасть можливість підібрати найбільш раціональні значення параметрів системи.

Заключення

Широкий клас реальних технічних та організаційних систем можна звести до марковських процесів. Найбільш розповсюдженими є марківські процеси з дискретними станами та неперервним часом, математичний опис яких базується на диференційних рівняннях Колмогорова. Для дослідження марківських процесів необхідно рішити систему рівнянь Колмогорова та знайти імовірності перебування системи в тому чи іншому стані в залежності від часу. Разом з тим корисними є значення граничних ймовірностей станів.

На даному практичному занятті було надано практичних навичок розвязання таких систем в середовищі MathCad.

Аналіз та дослідження вищезазначених параметрів дозволяють зробити практичні рекомендації по покращенню якості функціонування систем та підвищенню їх ефективності.

Завідувач кафедри вищої математики,

математичного моделювання та фізики

кандидат фізико-математичних наук, доцент І.В. Замрій