

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

## Практичне заняття № 2

**Тема. Моделювання марківських процесів з дискретним часом.**

### План проведення заняття

Вступ.

1. Побудова математичної моделі на основі однорідного марківського процесу з дискретним часом.
2. Побудова математичної моделі на основі неоднорідного марківського процесу з дискретним часом.

Заключення.

**Завдання на СРС:** Розробити програму та здійснити розрахунки на Excel задачі 1 та визначити імовірності перебування системи в станах після проведення 12 послідовних атак.

### Вступ.

Питання для перевірки готовності до заняття.

1. Дайте визначення марківського випадкового процесу з дискретними станами та дискретним часом.
2. Які обмеження накладаються на застосування математичних моделей на основі марківських процесів з дискретним станом?
3. Яка інформація є вихідною для моделювання марківських процесів?
4. Яку інформацію можна отримати в результаті моделювання марківських процесів?
5. Сформулюйте мету моделювання марківських процесів.
6. В чому полягають особливості побудови математичної моделі на основі марківського процесу з дискретним часом?

# 1. Побудова математичної моделі на основі однорідного марківського процесу з дискретним часом.

## Завдання 1.

На об'єкт здійснюється кілька атак у моменти часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Можливі стани цілі:

$S_1$  – об'єкт не уражений;

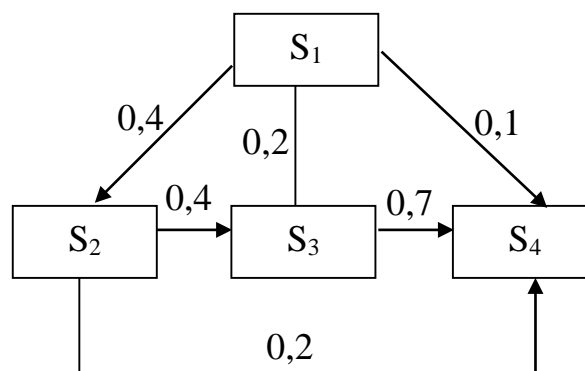
$S_2$  – об'єкт отримав незначні ушкодження;

$S_3$  – об'єкт має обмежену працездатність;

$S_4$  – об'єкт повністю уражений.

До початку здійснення атак об'єкт знаходиться у стані  $S_1$ .

Розміщений граф станів цілі має вигляд:



Визначити кількість атак, що забезпечать ураження об'єкта з імовірністю не менше 0,8.

## 1. Підготовка та введення вихідних даних

Із графа станів:  $P_{12} = 0,4$ ;  $P_{13} = 0,2$ ;  $P_{14} = 0,1$ ;  $P_{11} = 1 - (P_{12} + P_{13} + P_{14}) = 0,3$ ;

$P_{21} = 0$ ;  $P_{22} = 0,4$ ;  $P_{23} = 0,4$ ;  $P_{24} = 0,2$ ;

$P_{31} = 0$ ;  $P_{32} = 0$ ;  $P_{33} = 0,3$ ;  $P_{34} = 0,7$ ;

$P_{41} = 0$ ;  $P_{42} = 0$ ;  $P_{43} = 0$ ;  $P_{44} = 1$ ;

Таким чином, матриця перехідних ймовірностей має вигляд:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

## 2. Розв'язання задачі.

## 3. Аналіз результатів та їх використання при обґрунтуванні рішень:

- проаналізувати отримані результати.

- визначити кількість атак, необхідних для ураження об'єкта з імовірністю не менше заданої.

**Завдання 2.** В приміщенні для переговорів відділ технічної безпеки здійснює пошук закладних пристроїв. За агентурними даними відомо, що зловмисники заклали 4 електроакустичних прилади. Фахівці відділу планують

здійснити п'ять послідовних тестів. Визначити імовірності перебування системи з чотирьох приладів у наступних станах:

- $S_1$  – всі прилади цілі;
- $S_2$  – виявлено один прилад;
- $S_3$  – виявлено два прилади;
- $S_4$  – виявлено три прилади;
- $S_5$  – виявлено чотири прилади,

якщо відомі перехідні імовірності (імовірності виявлення відповідної кількості електроакустичних приладів при переході із стану до стану в процесі здійснення тестів):  $P_{12}=0,25$ ;  $P_{13}=0,20$ ;  $P_{14}=0,10$ ;  $P_{15}=0,05$ ;  $P_{23}=0,30$ ;  $P_{24}=0,25$ ;  $P_{25}=0,10$ ;  $P_{34}=0,40$ ;  $P_{35}=0,15$ ;  $P_{45}=0,60$ .

## 2. Побудова математичної моделі на основі неоднорідного марківського процесу з дискретним часом.

### Завдання 3.

Зловмисники здійснюють атаки на систему захисту об'єкту, яка в початковий момент часу є справною та функціонує на 100 % (стан  $S_1$ ). За статистикою функціонування системи захисту під час здійснення атак можна зробити висновок, що після першої атаки працездатність системи захисту може знизитися на 30% з імовірністю 0,5 (стан  $S_2$ ); на 50% з імовірністю 0,2 (стан  $S_3$ ) та на 70% з імовірністю 0,1 (стан  $S_4$ ).

Враховуючи, що від першої атаки до другої імовірності переходу із стану до стану не змінюються, а під час другої атаки імовірність переходу із  $S_1$  до  $S_2$  дорівнює 0,4, із  $S_2$  до  $S_3$  – 0,3, із  $S_3$  до  $S_4$  – 0,6, визначити:

- 1) імовірності різних станів після першої та другої атаки;
- 2) середню працездатність (математичне сподівання працездатності) системи захисту об'єкта.

### **Час виконання завдання 1 година.**

### **Заключення**

Широкий клас реальних технічних та організаційних систем можна звести до марковських процесів з дискретними станами та дискретним часом. В таких системах переходи із стану в стан відбуваються у чітко регламентовані моменти часу. Для дослідження таких процесів необхідно знайти імовірності перебування системи в тому чи іншому стані в залежності від часу. На даному практичному занятті було надано практичних навичок розв'язання таких завдань для аналізу функціонування систем технічного захисту інформації.

Аналіз та дослідження вищезазначених параметрів дозволяють зробити практичні рекомендації по покращенню якості функціонування систем та підвищенню їх ефективності.

Завідувач кафедри вищої математики,  
математичного моделювання та фізики  
кандидат фізико-математичних наук, доцент

І.В. Замрій