МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Тема 2. Математичні моделі на основі марковських випадкових процесів з безперервним та дискретним часом

План лекції:

Вступ.
1. Процес «загибелі та розмноження».
2. Циклічні процеси.
3. Випадковий процес з дискретними станами та дискретним часом.
4. Приклади застосування марківських процесів з дискретним часом.
Заключення.

Завдання на СРС. Розробити математичну модель на основі циклічного марковського процесу реального процесу, що розробляється у Вашій дипломній роботі. Обчислити параметри процесу (граничні імовірності перебування системи в певних станах). Проаналізувати функціонування системи та надати рекомендації з покращення ефективності функціонування.

Вступ

На попередньому занятті розглянута модель марковського випадкового процесу з дискретними станами та неперервним часом. Відмінністю таких систем є те, що переходи із одного стану до іншого стану відбуваються в будь-які випадкові моменти часу. До таких процесів відносяться:

процес функціонування автоматизованих систем управління;
процес функціонування технічних систем захисту інформації;
процес функціонування системи при відбитті атак несанкціонованого доступу;
процеси експлуатації багатомодульних систем та систем з резервуванням.

Модель повинна забезпечувати визначення імовірностей станів. Імовірності станів системи у загальному випадку визначаються інтегруванням системи диференціальних рівнянь, які називаються рівняннями Колмогорова**.**

Але існує широкий клас технічних та організаційних систем, які можна описувати математичними моделями на основі безперервних марковських ланцюгів. Такі системи будуть розглянуті в першій половині лекції.

Способи математичного опису марківських процесів, що протікає в системі, залежать від того, в які моменти часу система здійснює переходи із стану в стан. Система з неперервним часом переходить із стану в стан в будь-який, заздалегідь невідомий момент часу.

Випадковий процес з дискретним часом – це процес, в якому переходи системи із стану в стан можливі тільки у визначені, заздалегідь фіксовані моменти часу t_1, t_2, t_3, … . В проміжки часу між цими моментами система S зберігає свій стан.

Саме таким випадковим марківським процесам і присвячена ця лекція.

1. Процеси «загибелі та розмноження».

Інтенсивності переходів для різних процесів можуть бути постійними або змінними. Рівняння для імовірностей станів являють собою лінійні диференціальні рівняння, які зазвичай розв'язуються на ПЕ

Для визначення імовірностей станів у будь-який момент часу t системи з дискретними станами, в якій відбувається марковський випадковий процес з безперервним часом, необхідно знати:

кількість можливих станів системи n;

початкові стани системи в момент $t = 0$;

матрицю інтенсивностей переходів $\|\lambda_{ij}\|$.

У багатьох практичних задачах існують граничні значення імовірностей станів, які відповідають усталеному режиму функціонування системи:

$$\lim_{t\to\infty} p_i(t) = p_i, (i = 1,2,...,n).$$

В такій системі при $t \to \infty$ встановлюється деякий граничний режим, Він полягає в тому, що система випадковим чином змінює свої стани, але імовірність кожного з них вже не залежить від часу: кожний із станів має постійну імовірність. Ця імовірність може розглядатися як <u>середній відносний час перебування системи у даному стані</u>. Для розрахунку граничних імовірностей станів системи $p_{1,} p_{2,...,} p_n$ використовують рівняння Колмогорова, ліва частина яких дорівнює нулю (тому що похідна від постійної величини дорівнює нулю). Для системи, граф якої наданий на рис. 1, диференціальні рівняння перетворюються в лінійні рівняння:

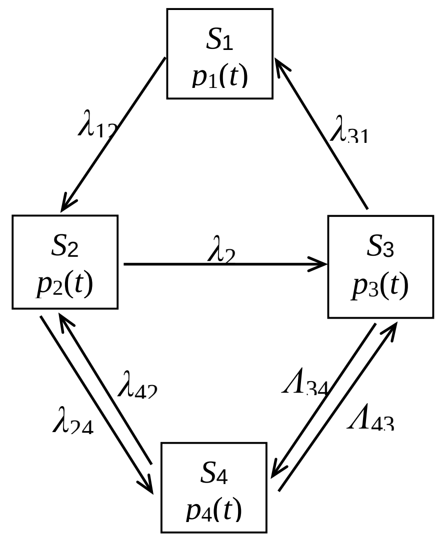

Рис.1.

$$-\lambda_{12} p_1 + \lambda_{31} p_3 = 0;$$
$$-\lambda_{23} p_2 - \lambda_{24} p_2 + \lambda_{12} p_1 + \lambda_{42} p_4 = 0;$$
$$-\lambda_{31} p_3 - \lambda_{34} p_3 + \lambda_{23} p_2 + \lambda_{43} p_4 = 0;$$
$$-\lambda_{42} p_4 - \lambda_{43} p_4 + \lambda_{24} p_2 + \lambda_{34} p_3 = 0;$$

На практиці часто вважають, що усталений режим практично наступає при

$$t \geq \frac{4}{(\lambda_{ij})_{\min}}.$$

Ця умова виконується для багатьох прикладних задач.

При моделюванні різноманітних технічних систем, в тому числі і СТЗІ, широке використання знаходять дві моделі марковських процесів з дискретними станами і безперервним часом: "загибелі та розмноження" і циклічних процесів.

Безперервний марковський ланцюг називається **процесом “загибелі та розмноження”**, якщо її граф станів має вигляд, показаний на рис.2. Тобто всі стани можна витягнути в один ланцюг, в якому кожний із середніх станів (S_2, …, S_{n-1}) пов’язаний прямим та оберненим зв’язком з кожним із сусідніх станів, а крайні стани (S_1, S_n) – тільки з одним сусіднім станом.

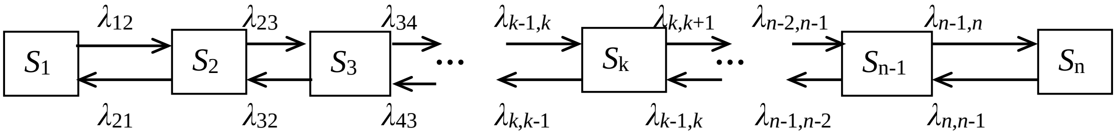

Рис. 2

Термін процесу або схеми “загибелі та розмноження” взято з рішення біологічних задач, де за такою схемою описується процес зміни чисельності популяції.

Прикладами марковських випадкових процесів “загибелі та розмноження” можуть бути:

процес функціонування системи технічного захисту інформації;

процес відмов і відновлення елементів багатомодульних систем;

процес функціонування технологічних ліній щодо виготовлення і ремонту техніки;

процес функціонування різних систем масового обслуговування тощо.

Приклад 1. Три радіоелектронних засоби здійснюють пошук зловмисників. Середній час безвідмовної роботи кожного засобу $t_б$. Пристрій (засіб), що має пошкодження, відразу починає ремонтуватися. Середній час ремонту $t_р$. Визначити імовірність перебування системи у кожному із можливих станів.

<u>Рішення</u>.

Аналіз функціонування системи дозволяє визначити стани системи:

S_1 – всі три засоби справні;

S_2 – один засіб відмовив (ремонтується), два справні;

S_3 – два засоби ремонтуються, один справний;

S_4 – всі три засоби ремонтуються.

Граф станів системи представлено на рис. 3.

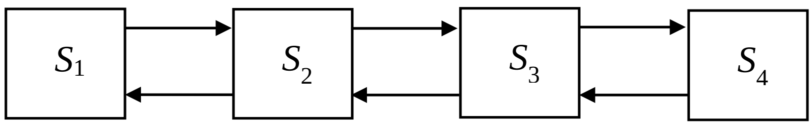

Рис. 3

Схема загибелі та розмноження часто зустрічається в різних практичних задачах. Тому доцільно розглянути систему в загальному вигляді, яка має n станів S_1, S_2, … , S_n , інтенсивності переходів та граф станів представлені на рис. 2. Доцільним вбачається рішити відповідну систему алгебраїчних рівнянь та визначити формули для граничних імовірностей станів.

Запишемо алгебраїчні рівняння для імовірностей станів.

Для першого стану S_1 рівняння має вигляд:

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2 \quad . \tag{1}$$

Рівняння складаються за правилом: вхідні інтенсивності, помножені на імовірності, дорівнюють вихідним.

Для другого стану S_2 рівняння має вигляд:

$$\lambda_{23} p_2 + \lambda_{21} p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3 \ . \tag{2}$$

Підставивши (1) в (2) та скоротивши, отримаємо:

$$\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3 \ . \tag{3}$$

Аналогічно для всіх інших станів:

$$\lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} p_k \ , \quad \text{де } k=2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n. \tag{4}$$

Таким чином, марковський ланцюг з n станами описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} p_1 = \lambda_{2,1} p_2; \\ \quad\quad \ldots \\ \lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} p_k; \\ \quad\quad \ldots \\ \lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} p_k \end{cases} \tag{5}$$

Слід пам'ятати, що замість одного із рівнянь треба добавити рівняння нормування:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \tag{6}$$

Якщо розв'язати систему рівнянь (5), то отримаємо формули для визначення імовірностей станів марковського процесу "загибелі та розмноження":

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{21}\lambda_{32}} + \ldots + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\ldots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{21}\lambda_{32}\ldots\lambda_{n,n-1}}}. \tag{7}$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1; \tag{8}$$

$$p_3 == \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} p_1; \tag{9}$$

та взагалі для k від 2 до n

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k}\lambda_{k-2,k-1}\ldots\lambda_{12}}{\lambda_{k,k-1}\lambda_{k-1,k-2}\ldots\lambda_{21}}\, p_1. \qquad (10)$$

Таким чином, задача «загибелі та розмноження» вирішена в загальному вигляді, тобто виведені формули для граничних імовірностей станів.

Приклад 2. Знайти граничні імовірності станів для процесу «загибелі та розмноження», граф якого показано на рис. 4. Інтенсивності переходів вказані на рисунку поряд із стрілками.

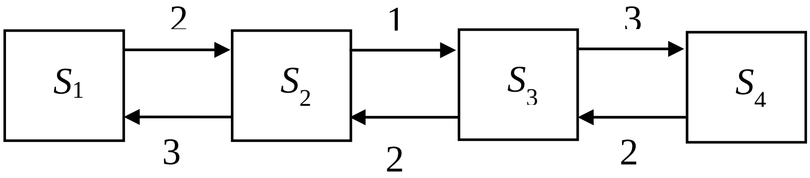

Рис. 4

Розв'язання.
За формулами (7) – (10) отримаємо:

$$p_1 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 1}{3\cdot 2}+\frac{2\cdot 1\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 2}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5},$$

$$p_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{15}, \qquad p_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{15}, \qquad p_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Приклад 3. Прилад складається з трьох вузлів. Потік відмов вузлів пуассонівський. Середній час безвідмовної роботи кожного вузла дорівнює $t_б$. Припускається, що вузол, який відмовив, відразу починає ремонтуватись. Середній час ремонту $t_р$. Закон розподілу цього часу – показниковий. Найти середню продуктивність приладу, якщо при трьох робочих вузлах вона складає 100 %, при двох – 50 %, а при одному прилад взагалі не працює.

Розв'язання.

Перелік станів системи було наведено в прикладі 1. Граф станів приведено на рис. 5.

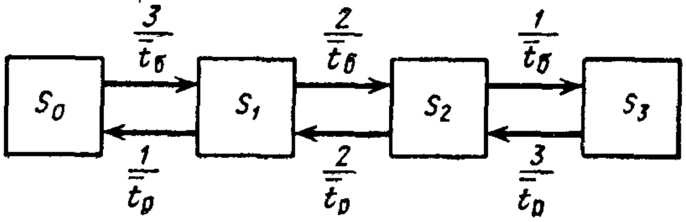

Рис. 5

Так як потоки відмов та ремонтів найпростіші, то $\lambda = 1/T$, де Т – середній час перебування у відповідному стані.

Якщо система знаходиться в стані S_0, то працюють три вузли, кожний з яких може відмовити з інтенсивністю $1/t_б$. Тому інтенсивність переходу із S0 в S1 буде $3/t_б$. Аналогічно знайдені інші інтенсивності переходів, що розмічені на графі.

Використовуючи отримане раніше загальне рішення задачі «загибелі та розмноження» (7) – (10), знаходимо:

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3\left(\frac{t_p}{t_б}\right) + 3\left(\frac{t_p}{t_б}\right)^2 + \left(\frac{t_p}{t_б}\right)^3};$$

$$p_1 = 3\left(\frac{t_p}{t_б}\right)p_0; \qquad p_2 = 3\left(\frac{t_p}{t_б}\right)^2 p_0; \qquad p_3 = \left(\frac{t_p}{t_б}\right)^3 p_0.$$

Для визначення середньої продуктивності необхідно оперувати з конкретними значеннями $t_б$ та $t_р$.

Нехай $t_б$ =10 годин, $t_р$ = 5 годин. Тоді $t_р/t_б$ = 0,5.

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{8}{27}; \qquad p_1 = 3 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{8}{27} = \frac{12}{27};$$

$$p_2 = 3 \cdot 0{,}5^2 \cdot \frac{8}{27} = \frac{6}{27}; \qquad p_3 = 0{,}5^3 \cdot \frac{8}{27} = \frac{3}{27}.$$

Середня продуктивність приладу в усталеному режимі:

$$E = 100\ \%\ p_0 + 50\ \%\ p_1 = 51{,}9\ \%.$$

Таким чином, середня продуктивність приладу буде 51,9 % від номінальної продуктивності. Виходячи з рішення даної задачі, можна надати практичні рекомендації: для збільшення середньої продуктивності приладу необхідно зменшити час ремонту, або збільшити час безвідмовної роботи кожного вузла, або створити прилад із 4-х вузлів при умові, що при двох відмовивших та двох справних прилад буде виконувати свої функції.

Необхідно відзначити, що модель процесу “загибелі та розмноження” використовується для математичного опису систем масового обслуговування.

2.Циклічні марковські процеси

Марковський випадковий процес з безперервним часом, що відбувається в системі з дискретними станами, називається **циклічним,** якщо стани системи пов'язані між собою у кільце (цикл) з односторонніми переходами (рис.5).

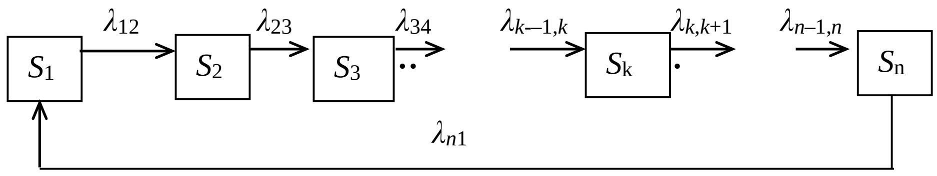

Рис. 5

Приклади марковських випадкових циклічних процесів:

процес функціонування засобів захисту інформації при виявленні атак зловмисників;

процес роботи транспортних засобів при забезпеченні матеріальними засобами.

Приклад 4. Підрозділ підвозу боєприпасів (система *S*) в ходів бою може знаходитися в одному із наступних станів: здійснювати марш за боєприпасами (стан S_1), проводити завантаження боєприпасів (стан S_2), підвозити боєприпаси в підрозділи та розвантажувати їх (стан S_3), знаходитися на привалі (стан S_4), після чого здійснювати марш за боєприпасами. Визначити імовірності станів підрозділу, якщо відомі часові параметри (середній час) перебування підрозділу у різних станах t_1, t_2, t_3, t_4.

Інтенсивності переходів:

$$\lambda_{12} = \frac{1}{t_1}; \quad \lambda_{23} = \frac{1}{t_2}; \quad \lambda_{34} = \frac{1}{t_3}; \quad \lambda_{41} = \frac{1}{t_4}. \qquad (11)$$

Система рівнянь Колмогорова для описаної системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = \lambda_{41} p_4 - \lambda_{12} p_1; \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda_{12} p_1 - \lambda_{23} p_2; \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda_{23} p_2 - \lambda_{34} p_3; \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \end{cases}$$

Система алгебраїчних рівнянь для граничних імовірностей $(t \to \infty)$:

$$\begin{cases} \lambda_{41} p_4 = \lambda_{12} p_1; \\ \lambda_{12} p_1 = \lambda_{23} p_2; \\ \lambda_{23} p_2 = \lambda_{34} p_3; \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \end{cases}$$

Для рішення цієї системи необхідно виразити p2, p3, p4 через p1 та підставити в четверте рівняння системи:

$$\begin{cases} p_4 = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{41}} p_1; \\ p_2 = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1; \\ p_3 = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} p_1. \end{cases} \qquad (12)$$

Після підстановки отримаємо:

$$p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} p_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{41}} p_1 = 1. \Rightarrow \quad p_1 = \frac{1}{1 + \lambda_{12} \cdot \left(\dfrac{1}{\lambda_{23}} + \dfrac{1}{\lambda_{34}} + \dfrac{1}{\lambda_{41}} \right)}. \qquad (13)$$

Таким чином, граничні імовірності можна знайти за формулами (12), (13).

Підставивши значення інтенсивностей переходів (11) отримаємо:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{t_1}(t_2 + t_3 + t_4)}; \qquad p_2 = \frac{t_2}{t_1} p_1; \quad p_3 = \frac{t_3}{t_1} p_1; \quad p_4 = \frac{t_4}{t_1} p_1. \qquad (14)$$

Отже, задача прикладу 4 вирішена.

Якщо використати рішення (12), (13) та розповсюдити їх на будь-яке число станів системи, в якій відбувається циклічний процес, то отримаємо загальне рішення для марковського циклічного процесу:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{1 + \lambda_{12} (\dfrac{1}{\lambda_{23}} + \dfrac{1}{\lambda_{34}} + ... + \dfrac{1}{\lambda_{n,1}})}; \\ p_2 = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1; \\ p_3 = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} p_1; \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ p_k = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{k,k+1}} p_1; \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ p_n = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{n,1}} p_1. \end{cases} \qquad (15)$$

Формули (15) призначені для обчислення граничних імовірностей циклічного процесу. Їх можна привести до більш простого виду, якщо перейти від інтенсивностей до середнього часу перебування системи в стані S_i:

$$\lambda_{i,i+1} = \frac{1}{t_i}, \qquad i = 1,2,...,n-1; \qquad \lambda_{n,1} = \frac{1}{t_n}. \tag{16}$$

Підставивши ці вирази в (15), після простих перетворень отримаємо:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{t_1}{t_1 + t_2 + ... + t_n}; \\ p_2 = \dfrac{t_2}{t_1 + t_2 + ... + t_n}; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p_n = \dfrac{t_n}{t_1 + t_2 + ... + t_n}. \end{cases} \tag{17}$$

Або в загальному вигляді:

$$p_k = \frac{t_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}, \qquad k = 1,2,...,n. \tag{18}$$

Таким чином, граничні імовірності станів в циклічному процесі пропорційні середньому часу перебування системи у відповідному стані.

Приклад 5. Радіочастотний сканер (РЧС) може знаходитись в одному із таких станів:

S_1 – справний, працює;

S_2 – несправний, проводиться пошук несправності;

S_3 – несправність локалізована, виконується ремонт;

S_4 – ремонт завершено, проводиться настройка та підготовка до пуску.

Всі потоки подій – найпростіші. Середній час безвідмовної роботи сканера дорівнює 0,5 доби. Ремонт сканера здійснюється в середньому 6 годин. Пошук несправностей в середньому займає 0,5 години. Після ремонту РЧС налаштовується та готується до пуску в середньому 1 годину.

Знайти граничні імовірності станів.

Розв’язання.

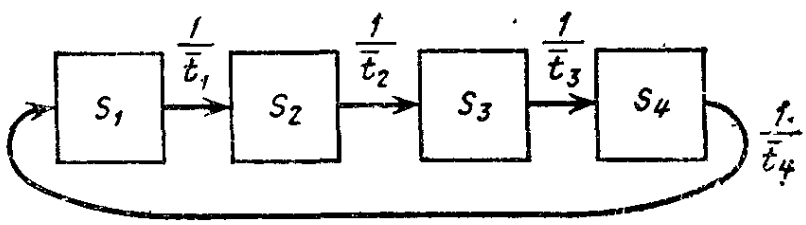

Рис. 6

Граф станів має вигляд циклічного процесу (рис. 6).

Середній час перебування системи в кожному із станів:

$$t_1 = 1/2; \quad t_2 = 1/48; \quad t_3 = 1/4; \quad t_4 = 1/24. \quad \text{(одиниці виміру – доба)}$$

За формулами (17) отримаємо:

$$p_1 = 24/39 = 0{,}615; \quad p_2 = 1/39 = 0{,}026; \quad p_3 = 12/39 = 0{,}308; \quad p_4 = 2/39 = 0{,}051.$$

Таким чином, якщо процес зводиться до простого циклічного з односторонніми переходами, то обчислення граничних імовірностей зводиться до обчислення середнього часу t_i та використання формул (17).

В більшості реальних систем відбуваються **розгалужені циклічні процеси**. Вони аналогічні циклічним процесам, але граф станів в деяких вузлах розгалужується.

Приклад 6. РЧС може знаходитись в одному з таких станів:

S_1 – справний, працює;

S_2 – несправний, проводиться пошук несправності;

S_3 – несправність виявилась незначною і усувається своїми силами;

S_4 – несправність виявилась серйозною та усувається бригадою фахівців;

S_5 – ремонт завершено, проводиться настройка та підготовка до пуску.

Процес, що відбувається в системі – марковський (всі потоки подій – найпростіші). Нехай:

t_1 – середній час безвідмовної роботи сканера;

t_2 – середній час пошуку несправностей;

t_3 – середній час ремонту своїми силами;

t_4 – середній час ремонту бригадою фахівців;

t_5 – середній час налаштування та підготовки сканера до пуску.

Припустимо, що несправність РЧС може бути ліквідована своїми силами з імовірністю $\boldsymbol{P}$. Тоді, з імовірністю ($\mathbf{1} - \boldsymbol{P}$) необхідно буде викликати бригаду фахівців для виконання ремонту сканера. Робота бригади оплачується в розмірі **k** грн за годину.

Необхідно знайти граничні імовірності станів та визначити середні затрати на послуги ремонтної бригади за добу.

Розв'язання. Будуємо розмічений граф станів (рис. 7). Якщо із певного стану виходить тільки одна стрілка, то інтенсивність переходу по цій стрілці дорівнює одиниці поділеній на середній час перебування системи в цьому стані. Якщо із певного стану виходить дві стрілки, то загальна інтенсивність виходу із цього стану буде такою ж. При цьому, інтенсивність переходу по кожній з двох стрілок буде дорівнювати інтенсивності помноженій на імовірність того, що перехід буде здійснено саме по цій стрілці.

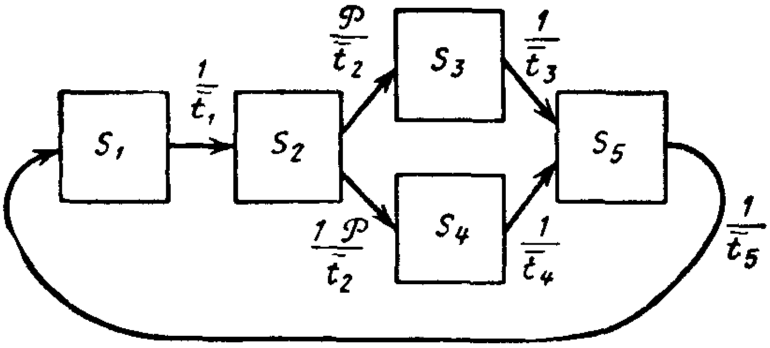

Рис. 7

Рівняння для граничних імовірностей станів будуть такими:

$$\begin{cases} \frac{1}{t_1} p_1 = \frac{1}{t_2} p_2; \\ \frac{P}{t_2} p_2 = \frac{1}{t_3} p_3; \\ \frac{1-P}{t_2} p_3 = \frac{1}{t_4} p_4; \\ \frac{1}{t_3} p_3 + \frac{1}{t_4} p_4 = \frac{1}{t_5} p_5; \\ \frac{1}{t_5} p_5 = \frac{1}{t_1} p_1. \end{cases} \qquad (19)$$

Також рівняння нормування: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1.$ (20)

В системі (19) одне рівняння можна відкинути (доцільно відкинути найскладніше четверте). В інших треба виразити p_2, p_3, p_4, p_5 через p_1.

$$p_2 = \frac{t_2}{t_1} p_1,$$

$$p_3 = \frac{P \cdot t_3}{t_2} p_2 = \frac{P \cdot t_3}{t_2} \cdot \frac{t_2}{t_1} p_1 = \frac{P \cdot t_3}{t_1} p_1,$$

$$p_4 = \frac{(1-P) \cdot t_4}{t_2} p_2 = \frac{(1-P) \cdot t_4}{t_2} \cdot \frac{t_2}{t_1} p_1 = \frac{(1-P) \cdot t_4}{t_1} p_1,$$

$$p_5 = \frac{t_5}{t_1} p_1.$$

Підставляючи в (20), отримаємо:

$$p_1 \left(1 + \frac{t_2}{t_1} + \frac{P \cdot t_3}{t_1} + \frac{(1-P) \cdot t_4}{t_1} + \frac{t_5}{t_1} \right) = 1.$$

Після перетворень отримаємо:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{t_1}{t_1 + t_2 + P \cdot t_3 + (1-P) \cdot t_4 + t_5}; \\ p_2 = \dfrac{t_2}{t_1 + t_2 + P \cdot t_3 + (1-P) \cdot t_4 + t_5}; \\ p_3 = \dfrac{P \cdot t_3}{t_1 + t_2 + P \cdot t_3 + (1-P) \cdot t_4 + t_5}; \\ p_4 = \dfrac{(1-P) \cdot t_4}{t_1 + t_2 + P \cdot t_3 + (1-P) \cdot t_4 + t_5}; \\ p_5 = \dfrac{t_5}{t_1 + t_2 + P \cdot t_3 + (1-P) \cdot t_4 + t_5}. \end{cases}$$

Таким чином, середня доля часу, яку система проводить в стані S_4 (ремонт бригадою фахівців) дорівнює p_4. Тому за годину система проводить в цьому стані в середньому p_4 годин. Тоді, середні затрати на бригаду будуть складати:

$$C = 24 \cdot k \cdot p_4.$$

Слід звернути увагу на структуру імовірностей p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 в схемі розгалуженого циклічного процесу. Вони, також як і у випадку простого циклу, являють собою відношення середнього часу перебування системи в станах до суми всіх таких часів. Але для розгалужених станів цей середній час множиться на імовірність переходу по даній стрільці (P або $1 - P$). Користуючись цим правилом можна зразу ж записувати граничні імовірності станів для будь-якого розгалуженого циклічного процесу.

3. Випадковий процес з дискретними станами та дискретним часом.

Припустимо, що мається фізична система S, що може знаходитись в таких станах:

S1, S2, S3, … , Sn.

При цьому переходи системи із стану в стан можливі тільки в моменти:

$t_1, t_2, t_3, \ldots$

Будемо називати ці моменти кроками або етапами процесу та розглядати випадковий процес в системі як функцію цілочисленого аргумента 1, 2, 3, … , тобто номера кроку.

Випадковий процес, що протікає в системі, полягає в тому, що в послідовні моменти часу t_1, t_2, t_3, … система S перебуває в тому чи іншому стані та переходить в інший стан. Наприклад:

$$S_1 \to S_3 \to S_5 \to S_4 \to S_2 \to S_1 \to S_5 \to S_2 \to \ldots$$

В загальному випадку система може не тільки переходити, а і залишатись в попередньому стані. Наприклад:

$$S_1 \to S_1 \to S_2 \to S_3 \to S_3 \to S_3 \to S_4 \to S_1 \to \ldots$$

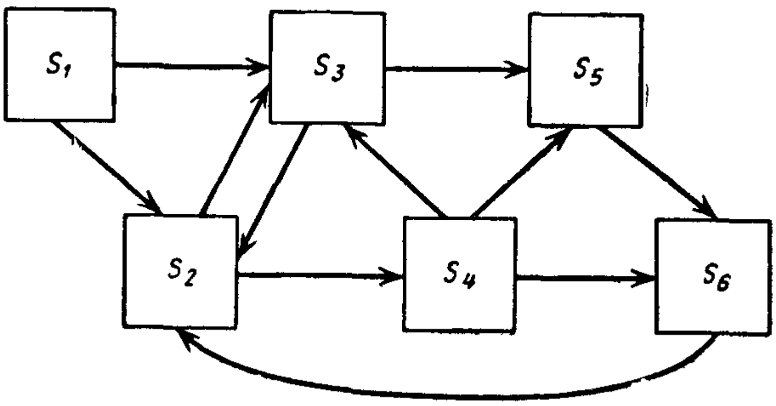

Рис. 8

Будемо позначати $S_i^{(k)}$ подію, що полягає в тому, що після k кроків система знаходиться в стані Si. При любому k події

$S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, \ldots, S_i^{(k)}, \ldots, S_n^{(k)}$

складають повну групу подій.

Процес, що протікає в системі, можна представити як послідовність подій. Наприклад:

$S_1^{(0)}, S_2^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(3)}, S_3^{(4)}, \ldots$

Така випадкова послідовність отримала назву марківського ланцюга, якщо для кожного кроку імовірність переходу із Si в стан Sj не залежить від того, коли і як система перейшла в стан Si.

Марківський ланцюг характеризується (описується) імовірностями станів.

Суть імовірностей станів полягає в такому. Нехай в будь-який момент часу (після будь-якого, k-го кроку) система може бути в одному із станів:

S1, S2, … , Sn,

тобто виконується одна із несумісних подій:

$S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, S_3^{(k)}, \ldots, S_n^{(k)}$

Позначимо імовірності цих подій після 1-го кроку:

$p_1(1) = P(S_1^{(1)}); \quad p_2(1) = P(S_2^{(1)}); \quad p_n(1) = P(S_n^{(1)}).$

Імовірності після 2-го кроку:

$p_1(2) = P(S_1^{(2)}); \quad p_2(2) = P(S_2^{(2)}); \quad p_n(2) = P(S_n^{(2)}).$

Імовірності після k-го кроку:

$p_1(k) = P(S_1^{(k)}); \quad p_2(k) = P(S_2^{(k)}); \quad p_n(k) = P(S_n^{(k)}).$

Очевидно, що для кожного кроку k виконується умова:

$p_1(k) + p_2(k) + p_3(k) + \ldots + p_n(k) = 1.$

Будемо називати імовірності $p_1(k)$, $p_2(k)$, …, $p_n(k)$ імовірностями станів в системі з дискретним часом.

Таким чином, якщо вдасться обчислити імовірності станів в системі, то за цими імовірностями можна буде характеризувати систему.

Поставимо задачу: знайти імовірності станів системи для будь-якого k.

Стани системи доцільно представляти у вигляді графа (рис. 9), де стрілками позначені можливі переходи із стану в стан за один крок.

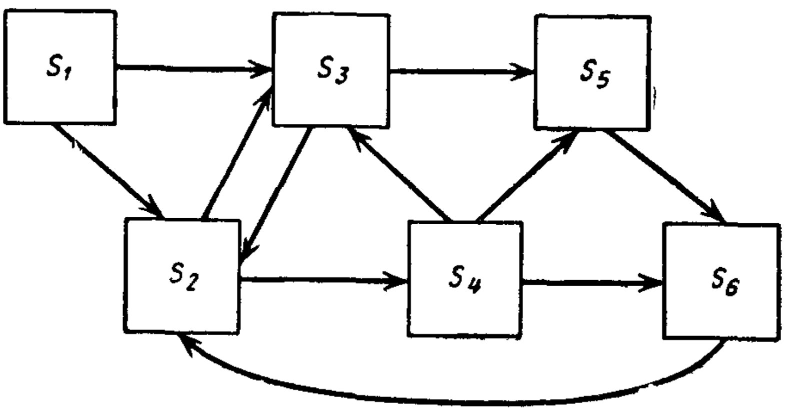

Рис. 9

Випадковий процес можна уявити так, що уявлена точка випадково блуждає по графу та перескакує із стану в стан в моменти часу t_1, t_2, t_3, …, а в деякі моменти часу може залишитись в попередньому стані.

Наприклад, послідовність переходів

$S_1 \to S_3 \to S_2 \to S_2 \to S_3 \to S_5 \to S_6 \to S_2 \to \ldots$

Можна представити на графі станів як послідовність різних положень точки. На рис. 10. пунктирними стрілками показані можливі переходи. Затримка системи в S2 на третьому кроці зображена стрілкою-петлею, що виходить із S2 та повертається в нього.

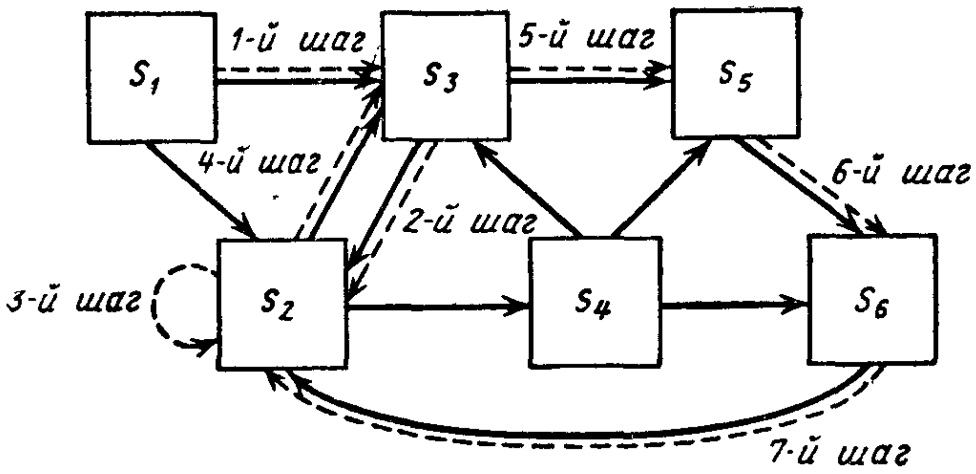

Рис. 10

Для будь-якого кроку (момента часу t_1, t_2, t_3, …(або номера k) існують імовірності переходу системи із будь-якого стану Si в стан Sj. Деякі із цих імовірностей дорівнюють нулю: там де немає стрілки на графі станів та переходів. Будемо називати ці імовірності **перехідними імовірностями.** Марківський ланцюг називається однорідним, якщо перехідні імовірності не залежать від кроку. В протилежному випадку – неоднорідним.

Розглянемо однорідний марківський ланцюг.

Нехай система S має n можливих станів S1, S2, … , Sn. Припустимо, що відомі перехідні імовірності Pij переходу із Si в Sj. Імовірність Pii – це імовірність затримки системи в стані Si. Запишемо всі ці імовірності у вигляді прямокутної матриці.

$$\|P_{ij}\| = \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1j} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2j} & \ldots & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{i1} & P_{i2} & \ldots & P_{ij} & \ldots & P_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nj} & \ldots & P_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Деякі Pij=0. Це означає, що перехід із Si в Sj за один крок неможливий.

Очевидним є те, що для такої матриці сума елементів в кожному рядку дорівнює 1.

При використанні марківських ланцюгів часто доцільним є використання графу станів, у якого біля стрілочок проставлені відповідні імовірності. (рис. 11). Такий граф будемо називати розміченим графом станів.

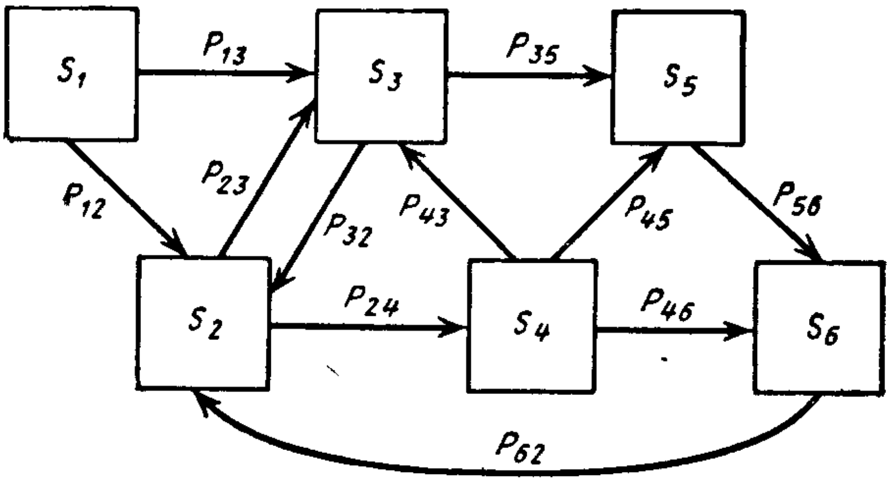

Рис. 11

На графі станів не проставлені імовірності Pii, що позначають затримку для i-го стану. Їх можна обчислити таким чином:

$$P_{11}=1-(P_{12}+P_{13}),$$
$$P_{22}=1-(P_{23}+P_{24}),$$
$$P_{33}=1-(P_{32}+P_{35}),$$
$$P_{44}=1-(P_{43}+P_{45}+P_{46}),$$
$$P_{55}=1-P_{56},$$
$$P_{66}=1-P_{62}.$$

Якщо із декого стану не виходить жодної стрілки, то такий стан називається тупіковим, а імовірність затримки для такого стану дорівнює одиниці.

Якщо відомо розмічений граф, то можна знайти імовірності станів після k-го кроку:

$$p_1(k),\ p_2(k),\ \dots,\ p_n(k).$$

Розв’язання.

Припустимо, що в початковий момент система знаходиться у якомусь визначеному стані, наприклад Sm. Тоді, в початковий момент часу будемо мати:

$p_1(0)=0$, $p_2(0)=0$, … , $p_m(0)=1$, $p_n(0)=0$.

Знайдемо імовірності станів після 1-го кроку. Ми знаємо, що перед першим кроком система знаходиться в стані Sm.

Тоді за перший крок система перейде в стани S1, S2, …, Sm, … , Sn з імовірностями:

$$P_{m1},\ P_{m2},\ \dots,\ P_{mm},\ \dots,\ P_{mn}.$$

Ці імовірності записані в m-му рядку матриці перехідних імовірностей.

Таким чином, імовірності станів після першого кроку будуть:

$$p_1(1)=P_{m1},\quad p_2(1)=P_{m2},\quad \dots,\quad p_m(1)=P_{mm},\quad p_n(1)=P_{mn}. \qquad (1)$$

Імовірності станів після другого кроку:

$$p_1(2), p_2(2), \dots, p_n(2)$$

будемо обчислювати за формулою повної імовірності з гіпотезами:

- після 1-го кроку система була в стані S1;
- після 1-го кроку система була в стані S2;
- . . . .
- після 1-го кроку система була в стані Si;
- . . . .
- після 1-го кроку система була в стані Sn.

Імовірності гіпотез відомі. Це імовірності $p_i(1)$.

Умовні імовірності переходу в стан Si при кожній гіпотезі також відомі та записані у відповідному рядку матриці {Pij}. За формулою повної імовірності знайдемо:

$$\left.\begin{array}{l} p_1(2)=p_1(1)P_{11}+p_2(1)P_{21}+\dots+p_n(1)P_{n1}; \\ p_2(2)=p_1(1)P_{12}+p_2(1)P_{22}+\dots+p_n(1)P_{n2}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_i(2)=p_1(1)P_{1i}+p_2(1)P_{2i}+\dots+p_n(1)P_{ni}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n(2)=p_1(1)P_{1n}+p_2(1)P_{2n}+\dots+p_n(1)P_{nn}, \end{array}\right\}$$

Або в загальній формі:

$$p_i(2)=\sum_{j=1}^{n} p_j(1)P_{ji} \qquad (i=1,\dots,n). \qquad (2)$$

Очевидно, що після третього кроку імовірності перебування системи в певних станах обчислюються:

$$p_i(3)=\sum_{j=1}^{n} p_j(2)P_{ji},$$

Для k-го кроку імовірності обчислюються:

$$p_i(k)=\sum_{j=1}^{n} p_j(k-1)P_{ji} \qquad (i=1,\dots,n). \qquad (3)$$

Таким чином, імовірності перебування системи в певних станах після k-го моменту часу $p_i^{(k)}$ можна обчислити за рекурентною формулою (3) через обчислені заздалегідь імовірності $p_i^{(k-1)}$. А ті, в свою чергу, обчислюються через імовірності $p_i^{(k-2)}$.