# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

## Практичне заняття № 4

## Тема. Дослідження одноканальних та багатоканальних СМО з відмовами

**План проведення заняття**

Вступ.
1. Рішення задач з використанням математичної моделі одноканальної СМО з відмовами.
2. Побудова графіків та аналіз характеристик систем масового обслуговування.
3. Рішення задач з використанням математичної моделі багатоканальної СМО з відмовами.
4. Аналіз характеристик систем масового обслуговування.
Заключення.

**Завдання на СРС**: Навчитись самостійно виконувати моделювання та розв'язування систем диференційних рівнянь, що описують систему масового обслуговування.

**Вступ.**

Питання для перевірки готовності до заняття.

1. Дайте визначення систем масового обслуговування.

2. Які обмеження накладаються на застосування математичних моделей на основі систем масового обслуговування?

3. Яка інформація є вихідною для моделювання систем масового обслуговування?

4. Яку інформацію можна отримати в результаті моделювання систем масового обслуговування?

5. Які основні критерії використовуються для класифікації систем масового обслуговування?

6. В чому відмінність СМО з відмовами та СМО з чергами?

7. Які основні характеристики СМО можна обчислювати для характеризування їх функціонування?

## 1. Рішення задач з використанням математичної моделі одноканальної СМО з відмовами.

**Приклад 1.** До відділу ТЗІ надходить в середньому 3 заявки в день. Вважати потік заявок найпростішим. Знайти імовірність того, що протягом двох найближчих днів число заявок буде не менше 5.

**Рішення.**

За умовами задачі λ=3 заявки/день, t=2 дня. Для рішення задачі доцільно розглянути протилежну подію: до відділу ТЗІ поступить менше 5 заявок. Тоді за формулою Пуассона отримаємо:

$$P = 1 - \left( \frac{(\lambda T)^0 \cdot e^{-(\lambda T)}}{1} + \frac{(\lambda T)^1 \cdot e^{-(\lambda T)}}{1!} + \frac{(\lambda T)^2 \cdot e^{-(\lambda T)}}{2!} + \frac{(\lambda T)^3 \cdot e^{-(\lambda T)}}{3!} + \frac{(\lambda T)^4 \cdot e^{-(\lambda T)}}{4!} \right) =$$

$$1 - \left( \frac{6^0 \cdot e^{-6}}{1} + \frac{6^1 \cdot e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} + \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} \right) = 1 - 0.2851 = 0.7149.$$

**Приклад 2.**

У відділі ТЗІ залишився один співробітник. Виклики до працівників надходять із інтенсивністю 5 заявок/день. Середній час виконання однієї заявки - 1 година. Вважати потік заявок найпростішим, а тривалість робочого дня 8 годин. Знайти ймовірність того, що під час надходження будь-якої заявки співробітник відділу буде зайнятим виконанням попередньої заявки.

## 2. Побудова графіків та аналіз характеристик систем масового обслуговування.

**Приклад 3.**

У відділі ТЗІ залишився один співробітник. Виклики до працівників надходять із інтенсивністю 4 заявок/день. Середній час виконання однієї заявки – 1,5 години. Вважати потік заявок найпростішим. Вважати, що якщо надійшла заявка до відділу, а вільних працівників немає, то заявка відхиляється та не виконується. Знайти абсолютну пропускну здатність А, відносну пропускну здатність q, ймовірність відмови Рвідм, ймовірність виконання заявки. Побудувати графіки залежності А, q, Рвідм в залежності від λ при таких значеннях t: 1,0; 1,5; 2,0; 2,5. Графіки побудувати в Excel або в MathCad.

## 3. Рішення задач з використанням математичної моделі багатоканальної СМО з відмовами.

**Приклад 1.** Генератор білого шуму для захисту акустичної інформації має у своєму складі 2 блоки, що працюють незалежно. Час безвідмовної роботи визначається показниковим законом. Середній час безвідмовної роботи 1-го блока t1 = 2 роки, 2-го – t2 = 1 рік. Знайти імовірність того, що за 1,5 роки:

а) не відмовить жоден блок;

б) відмовлять обидва блоки;

в) відмовить хоча б один блок.

**Розв'язання.**

В якості події можна прийняти несправність будь-якого блока.

Імовірність безвідмовної роботи за час t кожного блока визначається за показниковим законом:

$p_1(t) = e^{-\lambda_1 \cdot t}$;  $p_2(t) = e^{-\lambda_2 \cdot t}$,

де $\lambda_1$=0,5 рік$^{-1}$; $\lambda_2$=1,0 рік$^{-1}$.

Імовірності безвідмовної роботи блоків за час Т=1,5 роки:

$p_1(T) = e^{-\lambda_1 \cdot T} = e^{-0,5 \cdot 1,5} \approx 0,472.$  $p_2(T) = e^{-\lambda_2 \cdot T} = e^{-1,0 \cdot 1,5} \approx 0,223.$

Імовірності того, що блоки відмовлять за час Т=1,5 роки обчислюються:

$q_1(T) = 1 - p_1(T) = 0,528.$  $q_2(T) = 1 - p_2(T) = 0,777.$

а) імовірність того, що не відмовить жоден блок:

$P_A = p_1(T) \cdot p_2(T) = 0,472 \cdot 0,223 \approx 0,1.$

б) імовірність того, що відмовлять обидва блоки:

$P_Б = q_1(T) \cdot q_2(T) = 0,528 \cdot 0,777 \approx 0,41.$

в) імовірність того, що відмовить будь-який один блок:

$P_В = 1 - P_A - P_Б = 1 - 0,1 - 0,41 = 0,49.$

**Приклад 2.** До відділу ТЗІ, що має три прилади, надходять замовлення на перевірку технічних каналів на можливий витік інформації. Якщо всі прилади зайняті, то новий заказ не приймається. Середній час роботи по одному замовленню складає 2 години. Інтенсивність потоку замовлень – 0,5 заявки за годину. Знайти граничні імовірності станів та показники ефективності роботи відділу ТЗІ.

**Розв'язання.**

1. Судячи з вихідних даних, функціонування відділу ТЗІ можна описати як трьохканальну СМО з відмовами. При цьому: n=3, $\lambda$=0,5 год$^{-1}$; $\mu$=0,5 год$^{-1}$.

2. Показник навантаження:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,5}{0,5} = 1.$$

Показник навантаження ρ=1 показує согласованість вхідного та вихідного потоків заявок кожного каналу обслуговування та визначає стійкість системи масового обслуговування.

3. Імовірність того, що канал вільний (доля часу простоя каналів).

$$p_0 = \frac{1}{\sum \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!}} = 0.375$$

Таким чином, 37.5% часу протягом кожної години канал буде не занятим.Час простою дорівнює

$$t_{пр} = 22.5 \text{ хв.}$$

4. Імовірність того, що 1 канал буде зайнятим:

$p_1 = \rho^1/1!\ p_0 = 1^1/1! \bullet 0.375 = 0.375$

зайнятими будуть 2 канали:

$p_2 = \rho^2/2!\ p_0 = 1^2/2! \bullet 0.375 = 0.188$

зайнятими будуть 3 канали:

$p_3 = \rho^3/3!\ p_0 = 1^3/3! \bullet 0.375 = 0.0625$

5. Імовірність відмови (доля заявок, отримавших відмову).

$$p_{отк} = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{1^3}{3!} 0.375 = 0.0625$$

Таким чином, 6% із числа заявок, що поступили, не приймаються до обслуговування.

6. Імовірність обслуговування заявок (імовірність того, що клієнт буде обслужен).

В системах з відмовами події відмови та обслуговування складають повну групу подій, тому: $p_{отк} + p_{обс} = 1$.

Відносна пропускна спроможність: $q = p_{обс}$.

$$p_{обс} = 1 - p_{отк} = 1 - 0.0625 = 0.938$$

Таким чином, 94% із числа поступивших заявок будуть обслужені. Вважається, що прийнятний рівень обслуговування має бути не менше 90%.

7. Середнє число каналів, зайнятих обслуговуванням (Середнє число зайнятих каналів):

$$n_з = \rho \bullet p_{обс} = 1 \bullet 0.938 = 0.938 \text{ каналів.}$$

Середнє число каналів, що простоюють:

$$n_{пр} = n - n_з = 3 - 0.938 = 2.1 \text{ каналів.}$$

8. Коефіцієнт зайнятості каналів обслуговуванням.

$$K_З = \frac{n_З}{n} = \frac{0.938}{3} = 0.3.$$

Таким чином, система на 30% зайнята обслуговуванням.
9. Абсолютна пропускна спроможність (Інтенсивність вихідного потоку обслужених заявок).
$A = p_{обс} \bullet \lambda = 0.938 \bullet 0.5 = 0.468$ заявок/год.
10. Середній час простою СМО.
$t_{пр} = p_{отк} \bullet t_{обс} = 0.0625 \bullet 2 = 0.125$ час.
11. Середнє число заявок, що обслуговуються.
$L_{обс} = \rho \bullet Q = 1 \bullet 0.938 = 0.938$ ед.
12. Середній час перебування заявки в СМО.
$T_{СМО} = \frac{Q}{\mu} = \frac{0.938}{0.5} = 1.876$ час.
Число заявок, отримавших відмову протягом години:

$$\lambda \bullet p_1 = 0.0313 \text{ заявок в год.}$$

Номінальна продуктивність СМО: 3 / 2 = 1.5 заявок в год.
Фактична продуктивність СМО: 0.468 / 1.5 = 31% від номінальної продуктивності.

## 4. Аналіз характеристик систем масового обслуговування.

**Приклад 3.** Знайти оптимальне число телефонних ліній на підприємстві, щоб виконувалось не менше ніж 90% заявок на телефонні переговори. Дослідження, що проведено на підприємстві показали, що заявки на переговори поступають з інтенсивністю 1,2 заявки за хвилину, а середня тривалість розмови по телефону складає 2 хв. Знайти також імовірність того, що за 3 хв. поступить а) точно 2 заявки; б) не більше 2 заявок.
**Розв'язання.**
Маємо: $\lambda$= 1,2 хв.$^{-1}$ , $\mu$=0,5 хв.$^{-1}$ , $\rho$= $\lambda$/ $\mu$ = 2,4.
Для знаходження оптимального числа каналів будемо використовувати формули для багатоканальної СМО з відмовами:

$$p_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!})^{-1};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \qquad (k = \overline{1,n}).$$

Імовірність відмови в обслуговуванні визначається як імовірність того, що всі канали зайняті, тобто система знаходиться в стані $S_n$:

$$p_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

Відносна та абсолютна пропускні здатності:

$$Q = p_{обс} = 1 - p_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right).$$

Середнє число зайнятих каналів:

$$\overline{n}_3 = \frac{A}{\mu} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right).$$

Обчислимо для різних значень n та впишемо до таблиці значення характеристик системи.

Таблиця 1

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_0$ | 0,294 | 0,159 | 0,116 | 0,1 | 0,094 | 0,092 |
| $p_{отк}$ | 0,706 | 0,847 | 0,677 | 0,406 | 0,195 | 0,024 |
| $p_{обс}$ | 0,294 | 0,153 | 0,323 | 0,594 | 0,805 | 0,976 |
| $\overline{n}_3$ | 0,706 | 0,367 | 0,775 | 1,426 | 1,932 | 2,342 |
| $K_3$ | 0,706 | 0,184 | 0,258 | 0,357 | 0,386 | 0,391 |
| $A$ [мин$^{-1}$] | 0,353 | 0,184 | 0,388 | 0,713 | 0,966 | 1,171 |

Оптимальним числом телефонних ліній можна вважати $n$ = 6, коли виконується 97,6 % заявок. При цьому, кожної хвилини обслуговується приблизно 1,171 заявок.

Для обчислення імовірностей, що за 3 хв. надійдуть рівно 2 заявки та не більше 2 заявок, слід використати формулу Пуассона:

а) $p_2(3) = \frac{(1{,}2 \cdot 3)^2}{2!} e^{-1{,}2 \cdot 3} \approx 0{,}177$,

б) $p_{\leq 2}(3) = p_0(3) + p_1(3) + p_2(3) = \left(1 + \frac{1{,}2 \cdot 3}{1!} + \frac{(1{,}2 \cdot 3)^2}{2!}\right) e^{-1{,}2 \cdot 3} \approx 0{,}03$.

## Заключення

Широкий клас реальних технічних та організаційних систем можна звести до марковських процесів та систем масового обслуговування, математичний опис яких базується на диференційних рівняннях Колмогорова. Для дослідження таких математичних моделей необхідно розв’язати систему рівнянь Колмогорова та знайти імовірності перебування системи в тому чи іншому стані в залежності від часу. Разом з тим необхідно обчислювати характеристики систем масового обслуговування з відмовами: абсолютну пропускну здатність A, відносну пропускну здатність q, ймовірність відмови Pвідм, ймовірність виконання заявки.

Аналіз та дослідження вищезазначених параметрів дозволяють зробити практичні рекомендації по покращенню якості функціонування систем та підвищенню їх ефективності.

Завідувач кафедри вищої математики,
математичного моделювання та фізики
кандидат фізико-математичних наук, доцент І.В. Замрій