Диференціальні рівняння. ПД-11 Гапей М.Ю.

Розрахунково-графічна робота №2
з дисципліни "Вища математика"
з теми "Диференціальні рівняння"
Студента групи ПД - 11
Гопей М.Ю.

N1 (1.1.22)

$$x - xy^2 = y'(4+x^2) \Rightarrow x(1-y^2) = \frac{dy}{dx}(x^2+4)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{1-y^2} = \frac{x\,dx}{4+x^2} \Rightarrow \arcsin y = \ln\sqrt{x^2+4} + C$$

$$y = \sin(\ln\sqrt{x^2+4} + C);$$

N2 (1.2.28)

$$x^2y' + y^2 = xyy';$$

$$x^2y' + y^2 - xyy' = 0 \Rightarrow y'(x^2 - xy) + y^2 = 0$$

$$y = tx \Rightarrow y' = t'x + t;$$

$$(t'x+t)(x^2 - tx^2) + x^2t^2 = 0;$$

$$(t'x+t)(1-t) + t^2 = 0;$$

$$t'x(1-t) + t = 0 \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{-t}{1-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(t-1)dt}{t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow t - \ln|t| + C - \ln x = 0;$$

Обернена заміна $t = \frac{y}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} + \ln\left|\frac{1}{y}\right| + C = 0.$$

N3 1.3.5

$$(9-x^2)y' + 2xy - x^3 = 0;$$

Заміна: $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{2uvx}{9-x^2} = \frac{x^3}{9-x^2};$$

$$\begin{cases} v' = -\frac{2vx}{9-x^2}, \\ u'v = \frac{x^3}{9-x^2}. \end{cases}$$

$$v' = -\frac{2xv}{9-x^2} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{-2x\,dx}{9-x^2};$$

$$\ln|v| = \ln|9-x^2| \Rightarrow v = 9-x^2$$

$$u'(9-x^2) = \frac{x^3}{9-x^2}$$

$$du = \frac{x^3dx}{(9-x^2)^2}; \quad u = \int \frac{x^3dx}{(9-x^2)^2};$$

$$\int \frac{x^3dx}{(9-x^2)^2} = \left| \begin{array}{l} 9-x^2 = \omega, \quad x^2 = 9-\omega \\ d\omega = -2x\,dx \Rightarrow dx = -\frac{d\omega}{2x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left[\frac{9}{\omega^2} - \frac{1}{\omega}\right]d\omega = \frac{1}{2}\ln|\omega| + \frac{9}{2}\omega^{-1} + C$$

Обернена заміна $\Rightarrow$ $\omega = 9-x^2$;

$$u = \frac{1}{2}\ln|9-x^2| + \frac{9}{2}[9-x^2]^{-1} + C;$$

Звідси $y = uv = (9-x^2)\ln\sqrt{9-x^2} + \frac{C}{9-x^2} + \frac{9}{2};$

№4 (1.4.11)

$$xy' - y = xy^3;$$

$$x\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} = x \Rightarrow \text{заміна } z = -\frac{1}{y^2}, \text{ тоді } z' = \frac{y'}{y^3};$$

$$xz' + z = x;$$

$$z = uv, \quad z' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = 1;$$

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0; \\ u'v = 1; \end{cases}$$

$$v' = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow v = \frac{1}{x};$$

$$\frac{du}{dx} = x \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow z = \frac{x}{2} + \frac{c}{x};$$

Обернена заміна $\Rightarrow z = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{-z}};$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{-\frac{x}{2} + \frac{c}{x}}} = \left(\frac{c}{x} - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

N5 (1.5.17)

$$(x^2 + y^2)dy - 2xy\,dx = 0, \quad y(1) = 2;$$

$$(x^2 + y^2)y' - 2xy = 0;$$

Заміна $y = tx$, $y' = t'x + t$;

$$(x^2 + x^2t^2)(t'x + t) = 2x^2t \mid : x^2;$$

$$(1 + t^2)(t'x + t) = 2t$$

$$t'x = \frac{2t}{1+t^2} - t = \frac{2t - t - t^3}{1+t^2} \Rightarrow \frac{1}{t}\left(\frac{1+t^2}{1+t^2}\right) \Rightarrow$$

$$= \left[\frac{A}{t} + \frac{Bx + C}{1+t^2} = \frac{1+t^2}{t(1-t^2)} \Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{2t}{1-t^2}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{t} + \frac{2t}{1-t^2}\right)dt$$

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{t}{1-t^2}\right| + c \Rightarrow x = \frac{ct}{1-t^2}$$

Обернена заміна $\Rightarrow \frac{c\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} = c\frac{xy}{x^2-y^2};$

$$x = c\frac{xy}{x^2-y^2}; \qquad y(1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$1 = c\frac{2}{1-4} \Rightarrow c = -\frac{3}{2};$$

В-дь: частинний розв'язок: $x + \frac{3}{2}\frac{xy}{x^2-y^2} = 0$;

N 6 (1.6.23.)

$$(\ln x + e^{x+y})dx + (e^x + e^y)e^y dy = 0;$$

$$P = \ln x + e^{x+y}, \quad Q = e^{x+y} + e^{2y};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(\ln x + e^{x+y}\right)'_y = e^{x+y};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(e^{x+y} + e^{2y}\right)'_x = e^{x+y};$$

звідси $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; рів. у пов диф.

$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$ – загальний вигляд.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ln x + e^{x+y}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^{x+y} + e^{2y};$$

$$F = \int(\ln x + e^{x+y})dx = x\ln|x| - x + e^{x+y} + \varphi(y)$$

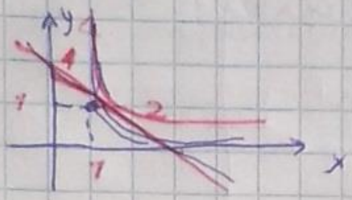
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(x\ln|x| - x + e^{x+y} + \varphi(y)\right)'_y = e^{x+y} + \varphi'_y(y)$$

звідки $\varphi'_y(y) = e^{2y}$ тоді $\varphi = \frac{1}{2}e^{2y} + c$;

$$F = x\ln|x| - x + e^{x+y} + \frac{1}{2}e^{2y} + c.$$

№7 (1.7.29)

рів. дотичної



$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

де $f'(x_0)$ - кут. коеф.

$$-\frac{4}{2}y'x = y \Rightarrow y'x = -\frac{1}{2}y$$

$f(1) = 1$

$$x\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}x^{-1}dx$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|x| + C \Rightarrow y = \frac{C}{\sqrt{x}};$$

№8 (2.1.22)

$y'' = x\sqrt{x-1}$, зробимо заміну $y'' = z'$, тоді $z = y'$

$$y' = \int x\sqrt{x-1}\,dx = \begin{bmatrix} x-1 = t, & dt = dx \\ x = t+1 & \end{bmatrix} = \int (t+1)\sqrt{t}\,dt =$$

$= \int (t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}})dt = \frac{2}{5}\sqrt{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C_1 \Rightarrow$ повертаємось до

заміни: $\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C_1$

$$y = \int \left(\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C_1\right)dx = \int \left(\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C_1\right)dx =$$

$$= \frac{4}{35}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}} + C_1x + C_2;$$

№9 (2.2.28)

$y'' - 2(\operatorname{tg} x)y' = \cos x;$

Заміна 1: $y'' = z'$; $(y' = z)$

$z' - 2\operatorname{tg} x\, z = \cos x;$

Заміна 2: $z = uv$, $z' = u'v + uv'$;

$u'v + uv' - 2uv\operatorname{tg} x = \cos x;$

$u'v + u(v' - 2v\,tg\,x) = \cos x;$

$$\begin{cases} \frac{v'}{v} = 2\,tg\,x; \\ u'v = \cos x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{v} = 2\,tg\,x\,dx; \\ v\frac{du}{dx} = \cos x; \end{cases}$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{\cos^2 x}\right|; \Rightarrow v = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$du = \cos^3 x\,dx = \cos x(1 - \sin^2 x)dx$$

$$u = \int(1 - \sin^2 x)\,d\sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C_1;$$

$$z = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^3 x}{3\cos^2 x} + \frac{C_1}{\cos^2 x};$$

Повертаємося до першої заміни; $z = y'$, тоді

$$y = \int\left[\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^3 x}{3\cos^2 x} + \frac{C_1}{\cos^2 x}\right]dx = -\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x} + \int\frac{1-\cos^2 x}{3\cos^2 x}d\cos x +$$

$$C_1 tg\,x + C_2 = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{3\cos x} - \frac{1}{3}\cos x + C_1\,tg\,x + C_2;$$

N10 (2.3.5)

$$yy'' - 2(y')^2 = 2y^3y';$$

Введемо заміну $y' = p$, тоді $y'' = pp'$;

$$yp\,p' - 2p^2 = 2y^3p \quad |:p$$

$yp' - 2p = 2y^3$ отримали лінійне рівняння I роду.

Метод Лагранжа:

Прирів. лівучастину р-ня до нуля:

$y\frac{dp}{dy} - 2p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{y} \Rightarrow p = y^2\tilde{C}_1$, тоді нехай $\tilde{C} = u$ - невідома нам ф-ія, $p = uy^2$ звідси $p' =$

$p' = u'y^2 + 2yu$ підставимо p і p' в початкове рівняння, отримаємо:

$$\cancel{u'y^3} + \cancel{2y^2u} - \cancel{2y^2u} = 2\cancel{y^3} \Rightarrow du = 2dy \Rightarrow u = 2y + C_1;$$

$p = 2y^3 + C_1y^2 \Rightarrow$ повернемося до заміни $p = y'$

$$\frac{dy}{dx} = 2y^3 + C_1y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2(2y+C_1)} = dx; \quad \int\frac{dy}{y^2(2y+C_1)} = \int dx$$

$C_1 = 0$

$$-\frac{1}{4y^2} = x + C \Rightarrow y^2 = 4(-x+C) \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{C-x};$$

N 11 (3.1.11)

а) $y'' - 4y' + 29y = 0$, нехай $y' = \lambda$, $y'' = \lambda^2$ тоді $y = \lambda^0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 29 = 0$ виведемо повний квадрат:

$(\lambda-2)^2 + 25 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = -5^2 \Rightarrow \lambda = 2 \pm 5i$

$y = e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x)$ де $\lambda = \alpha \pm \beta i$ тоді:

$y = C_1e^{2x}\sin 5x + C_2e^{2x}\cos 5x;$

б) $y'' - 7y' + 10y = 0;$

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-5) = 0$

$y = e^{2x}C_1 + e^{5x}C_2;$

N 12 (3.2.17)

$y''' + 3y'' - 9y' - 27y = 0;$

Нехай $y''' = \lambda^3$ тоді $\lambda^2 = y''$ і т. д. $\lambda^0 = y$.

маємо: $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda - 27 = 0;$

Не важко помітити що один із коренів рівняння є $\lambda = 3$ тоді винесемо за дужки вираз $\lambda + 3$ оскільки він теж задовольняє умову:

$$\lambda^2(\lambda + 3) - 9(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 3)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 3$; $\lambda_{2,3} = -3$; тоді загальний розв'язок матиме вигляд (при двох однакових коренях):

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + C_3 e^{3x};$$

N 13 (3.3.23)

$$y'' + 4y' - 5y = xe^x;$$

Нехай $\lambda^2 = y''$, тоді $\lambda = y'$ і $\lambda^0 = y$

Звідси маємо $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = xe^x$

Звідси метода Лагранжа прирівняємо ліву частину р-ня до нуля, отримаємо:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -5 \end{cases}$$

$y = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 e^{-5x}$; Покладемо $\tilde{C}_1 = Z_1(x)$ і $\tilde{C}_2 = Z_2(x)$, розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} Z_1'(x) y_1 + Z_2'(x) y_2 = 0 \\ Z_1'(x) y_1' + Z_2'(x) y_2' = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

, де $a_0(x)$ коефіцієнт біля λ^2.

тоді матимемо:

$$\begin{cases} Z_1'(x) e^x + Z_2'(x) e^{-5x} = 0; \\ Z_1'(x) e^x - 5 Z_2'(x) e^{-5x} = xe^x. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера:

W – визначник матриці, тоді згідно методу Крамера маємо: $Z_1'(x) = \frac{W_1}{W}$ і $Z_2'(x) = \frac{W_2}{W}$;

$$W = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-5x} \\ e^{x} & -5e^{-5x} \end{vmatrix} = e^{x}(-5e^{-5x} - e^{-5x}) = -6e^{-4x};$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-5x} \\ xe^{x} & -5e^{-5x} \end{vmatrix} = -xe^{-4x}; \qquad Z_1'(x) = \frac{x}{6};$$

$$\Rightarrow$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & xe^{x} \end{vmatrix} = xe^{2x}; \qquad Z_2'(x) = -\frac{x}{6}e^{6x};$$

Звідси маємо:

$$Z_1(x) = \int \frac{x}{6}dx = \frac{x^2}{12} + C_1;$$

$$Z_2(x) = \int\left(-\frac{x}{6}e^{6x}\right)dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{6x}dx & v = \frac{1}{6}e^{6x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{36}xe^{6x} + \frac{1}{216}e^{6x} + C_2 = e^{6x}\left(\frac{1}{216} - \frac{x}{36}\right) + C_2;$$

Запишемо загальний розв'язок диф. рівняння:

$$y = \left(\frac{x^2}{12} + C_1\right)e^{x} + \left[e^{6x}\left(\frac{1}{216} - \frac{x}{36}\right) + C_2\right]e^{-5x};$$

N 14 (3.4.29)

$$y'' - 4y' = 2x^2 + 3x - 1, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = -2;$$

Методом Бернуллі робимо заміну:

1 Спочатку $z' = y''$, тоді $z = uv$ звідки $z' = u'v + uv'$

$$z' - 4z = 2x^2 + 3x - 1;$$

$$u'v + uv' - 4uv = 2x^2 + 3x - 1;$$

Розв'яжемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} v' = 4v; \\ u'v = 2x^2 + 3x - 1. \end{cases}$$

$$\frac{dv}{v} = 4dx \Rightarrow \ln|v| = 4x \Rightarrow v = e^{4x};$$

$$\frac{du}{dx} e^{4x} = 2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow du = \frac{2x^2+3x-1}{e^{4x}} dx;$$

$$u = \int (2x^2 + 3x - 1) e^{-4x} dx = \begin{vmatrix} u = 2x^2+3x-1 & du = (4x+3)dx \\ dv = e^{-4x}dx & v = -\frac{1}{4}e^{-4x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-4x}(2x^2+3x-1) + \frac{1}{4}\int (4x+3)e^{-4x}dx = \begin{vmatrix} u = 4x+3 & du = 4dx \\ dv = e^{-4x} & v = -\frac{1}{4}e^{-4x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-4x}(2x^2+3x-1) + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}(4x+3) - \frac{1}{4}e^{-4x} + C_1 \right] =$$

$$= -\frac{e^{-4x}}{4}(2x^2+3x-1) - \frac{e^{-4x}}{4}(x+1) + C_1 = -\frac{e^{-4x}}{4}(2x^2+4x) + C_1 =$$

$$= -\frac{e^{-4x}}{2}(x^2+2x) + C_1;$$

Повернемося до заміни $z = uv \Rightarrow$ маємо:

$$z = \left(-\frac{e^{-4x}}{2}(x^2+2x) + C_1 \right) e^{4x} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{4}x + C_1 e^{4x};$$

$$y' = -\frac{x^2}{2} - x + C_1 e^{4x};$$

Повернемося ще до однієї заміни $z = y'$ звідси:

$$y = \int \left(-\frac{x^2}{2} - x + C_1 e^{4x} \right) dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{4} e^{4x} + C_2;$$

Знайдемо частинний розв'язок задачі Коші з умови:

$y(0) = 6$ і $y'(0) = -2$;

$$\begin{aligned} y(0) = 6 &\Rightarrow 6 = \frac{C_1}{4} + C_2; \\ y'(0) = -2 &\Rightarrow -2 = C_1; \end{aligned} \Rightarrow C_2 = +0{,}5 + 6 = \frac{13}{2}$$

Запишемо частинний розв'язок:

$$y = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}e^{4x} + \frac{13}{2};$$

N15 (3.5.22)

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{e^x+1};$$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ – перший крок знаходження розв'язку

$\lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$; $\begin{cases}\lambda_1 = 1\\ \lambda_2 = 2\end{cases}$, звідси маємо

$y = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 e^{2x}$ згідно методу Лагранжа покладемо

$\tilde{C}_1 = Z_1(x)$ і $\tilde{C}_2 = Z_2(x)$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} Z_1'(x)e^x + Z_2'(x)e^{2x} = 0 \\ Z_1'(x)e^x + Z_2'(x)2e^{2x} = \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{cases}.$$

Розв'яжемо дану систему з двох рівнянь методом Крамера, для цього знайдемо визначник:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x};$$

Оскільки виз. матриці не рівний нулю – система має два єдиних розв'язки:

$$\frac{W_1}{W} = Z_1'(x) \quad і \quad \frac{W_2}{W} = Z_2'(x).$$

Знайдемо W_1 і W_2:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \frac{e^x}{e^x+1} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{3x}}{e^x+1};$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{e^x+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{e^x+1};$$

За формулою Крамера маємо:

$$Z_1'(x) = \frac{W_1}{W} = -\frac{e^{3x}}{e^x+1} \cdot e^{-3x} = -\frac{1}{e^x+1};$$

$$Z_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{e^{2x}}{e^x+1} \cdot e^{-3x} = \frac{e^{-x}}{e^x+1};$$

звідси:

$$Z_1(x) = -\int \frac{dx}{e^x+1} = -\int \frac{de^x}{e^{2x}+e^x} = \left[\text{нехай } e^x = t \right] =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2+t} = \left[\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow \begin{matrix} \text{очевидно, що} \\ A = 1, \; B = -1 \end{matrix} \right] =$$

$$= -\int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right] dt = -\ln|t| + \ln|t+1| + C_1 = \ln\left| \frac{t+1}{t} \right| + C_1$$

$\Rightarrow$ повертаємось до заміни, тоді $Z_1(x) = \ln\left| \frac{e^x+1}{e^x} \right| + C_1$

$$Z_2(x) = \int \frac{e^{-x}dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-2x}de^x}{e^x+1} = \left[\text{нехай } e^x = t \right] = \int \frac{dt}{t^2(t+1)} =$$

$$= \left[\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{D}{t+1} = \frac{1}{t^2(t+1)} \Rightarrow \frac{At+B}{t^2} + \frac{D}{t+1} = \frac{1}{t^2(t+1)} \right] =$$

$$= \left[\begin{cases} A + D = 0 \\ A + B = 0 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ D = 1 \end{cases} \right] = \int \left[\frac{1-t}{t^2} + \frac{1}{t+1} \right] dt = -\frac{1}{t} + \ln\left| \frac{t+1}{t} \right| + C$$

$\Rightarrow$ обернена заміна: $Z_2(x) = -e^{-x} + \ln\left| \frac{e^x+1}{e^x} \right| + C_2;$

Запишемо загальний розв. диф. рівняння:

$$y = \left[-e^{-x} + \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x} + C_2 \right) \right] e^{2x} + \left[\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x} \right) + C_1 \right] e^x;$$