Розділ 1.

Завдання 1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & \mu \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

а) $$3A + 4B = \begin{pmatrix} 3 & 3\lambda & 6 \\ 6 & 9 & 12 \\ 3 & -18 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 12 & -8 & 4\mu \\ 0 & 4 & 28 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 3\lambda+8 & 18 \\ 18 & 1 & 12+4\mu \\ 3 & -14 & 40 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & \mu \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3\lambda & 4-2\lambda & 17+\lambda\mu \\ 11 & 2 & 34+3\mu \\ -17 & 18 & 31-6\mu \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & \mu \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & \lambda-12 & 22 \\ \mu-1 & 3\lambda-6\mu-6 & 4\mu-2 \\ 9 & -39 & 32 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda-5 \\ 2 \\ -35 \end{pmatrix}$$

б)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 4\lambda - 24 - 6 - 8\lambda + 24 = 6 - 4\lambda$$

б) $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}^T}{|A|}$ Оскільки $6 - 4\lambda \neq 0$ при $\lambda \in \mathbb{Z}$,

матриця A має обернену до себе матрицю.

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 24 = 36$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8-4) = -4$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -12 - 3 = -15$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -(4\lambda + 12) = -4\lambda - 12$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 - \lambda) = \lambda + 6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4\lambda - 6$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4-4) = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2\lambda$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{6-4\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 36 & -4\lambda-12 & 4\lambda-6 \\ -4 & 2 & 0 \\ -15 & \lambda+6 & 3-2\lambda \end{pmatrix}$$

2) $A \cdot A^{-1} = E$

Знайдемо $A \cdot A^{-1}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 & -4\lambda-12 & 4\lambda-6 \\ -4 & 2 & 0 \\ -15 & \lambda+6 & 3-2\lambda \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6-4\lambda}$$

$$= \frac{1}{6-4\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 6-4\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-4\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Завдання 1.3.

1. $$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 19 \end{cases}$$

Перевіримо на сумісність систему за допомогою теореми Кронекера-Капелі:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}; \quad \hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 4 & -5 & -3 & 19 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}\, \hat{A} = 3$ - система сумісна і має розв'язок (один) а) $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

де: $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \overset{-9}{\cancel{-6}} - 4 - 5 \cancel{+4} - 10 \cancel{+3} =$

$= -24 \neq 0$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & -1 & 1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 19 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -21 - \cancel{19} \overset{-75}{- \cancel{40}} + \cancel{19} - 24 - 35 =$

$= -120$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -7 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 4 & 19 & -3 \end{vmatrix} = 48 \overset{16}{-28} + 19 - 32 \overset{-2}{+} 21 + 38 =$

$\quad 10$

$= 24$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -7 \\ 1 & -1 & 8 \\ 4 & -5 & 19 \end{vmatrix} = \underset{38}{2 \cdot 19} \overset{-13}{-32} + 35 \overset{-45}{-28} + 19 - 80 =$

$\quad 10$

$= -48$

Звідси $x_1 = \cancel{\frac{50}{18}} = \cancel{\frac{25}{9}} = \frac{-120}{-24} = 5$

$x_2 = \cancel{-\frac{66}{18}} = \cancel{-\frac{11}{3}} = -\frac{24}{24} = -1$

$x_3 = \cancel{\frac{118}{18}} = \cancel{\frac{59}{9}} = \frac{48}{24} = 2$

В-дь: $(x_1, x_2, x_3) = (5, -1, 2)$

б) $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 4 & -5 & -3 & 19 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -7 & -1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & -7 & -1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & -16 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ -3x_2 + 2\cdot 3 = 9 \Rightarrow x_2 = -1 \\ -2x_1 + 1 + 2 = -7 \Rightarrow x_1 = 5 \end{cases}$

в) Запишемо систему рівнянь в матричній формі:

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

Знайдемо A^{-1}:

Оскільки $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}^T}{|A|} = -\dfrac{1}{24}\tilde{A}^T$, де

$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, тоді маємо:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 3+5 = 8; \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 7$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5+4 = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -(3+5) = -8$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 6-4 = 2$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -(10+4) = -14$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2+1 = 3$$

$$\therefore A^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & -14 & 3 \end{pmatrix}$$

Звідси $A^{-1}B = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & -14 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -120 \\ 24 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Визначимо матрицю $\tilde{A}$ (системи) на сумісність:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Оскільки $\text{rang}\,\tilde{A} = \text{rang}\,A = 3$ матриці сумісні і система має один тривіальний розв'язок.

а) $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$

де: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 12 \overset{-24}{\cancel{-27}} - 2 - 4 =$

$= -12 \neq 0$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cancel{= 21 + 5 + 6 - 54 - 1 - 14 =}$

$\cancel{= -12}$ $\Delta_1 = 21 + 6 + 6 - 54 - 1 - 14 = -36$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 21 + \overset{16}{36} - 9 - 12 - 14 =$$

$$= 24$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 + 3 + 28 - 63 - 12 - 4 = -12$$

Звідси: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

б) Запишемо систему р-нь в матричній формі $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|}, \text{ де } \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-3) = 1$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = -8$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 1 & -7 & 4 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Знайдемо $A^{-1}B$:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 1 & -7 & 4 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -36 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

б) Знайдемо x_1, x_2, x_3 за допомогою методу Гауса:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow (\ldots) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Звідси $\begin{cases} x_3 = 1 \\ -x_2 + 1 = 3 \Rightarrow x_2 = -2 \\ 2x_1 - 2 + 3 = 7 \Rightarrow x_1 = 3 \end{cases}$

В-дь: $(x_1, x_2, x_3) = (3, -2, 1)$