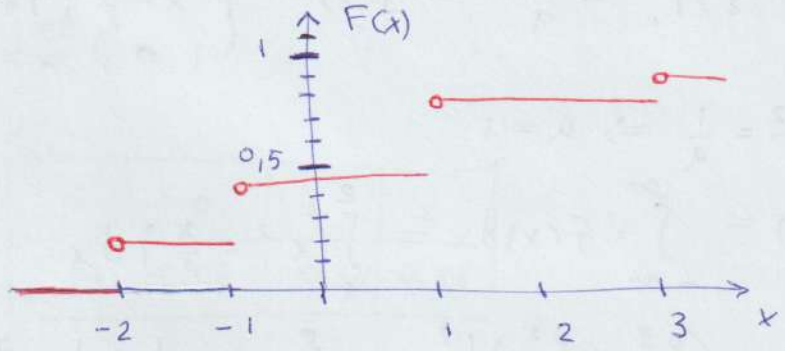
N20

Завдання.

x_i	-2	-1	1	3
p_i	0,2	0,25	0,35	p

$$p = p_4 = 1 - \sum_{i \neq 4} p_i = 0,2$$

Графік ф-і розподілу:



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ 0,2, & -2 < x \leq -1 \\ 0,45, & -1 < x \leq 1 \\ 0,8, & 1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Завдання 2.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ a(x - \frac{1}{2}), & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, звідси маємо:

$$\int_1^2 a(x - \tfrac{1}{2})\,dx = 1 \Rightarrow \int_1^2 (x - \tfrac{1}{2})\,dx = \frac{1}{a}$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{a} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$\frac{4-2}{2} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 1$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$M(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{3} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{28-9}{12} = \frac{19}{12} \qquad \therefore M(x) = \frac{19}{12} \approx 1{,}5834$$

Завдання 3.

$$\begin{cases} p_1 = 0,8 \\ p_2 = 0,7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 0,2 \\ q_2 = 0,3 \end{cases}$$

X_i	0	1	2
$\bar{P}_i$	$\bar{P}_1$	$\bar{P}_2$	$\bar{P}_3$

$\bar{P}_1 = q_1 q_2 = 0,06$

$\bar{P}_2 = p_1 q_2 + q_1 p_2 = 0,38$

$\bar{P}_3 = p_1 p_2 = 0,56$

$\sum_i \bar{P}_i = 1$

X_i	0	1	2
$\bar{P}_i$	0,06	0,38	0,56

$M(x) = \sum_i x_i \bar{P}_i = 1,5$

$D(x) = M(x^2) - M^2(x) = \sum_i x_i^2 \bar{P}_i - 1,5^2 = 0,37$

$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} \approx 0,6083$

Завдання 4.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

якщо $a = 0$, $\sigma = 1$ маємо:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$Y = \frac{X^2}{2} \Rightarrow \Psi(y) = \sqrt{2y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{y}$$

$$\Psi'(y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2y}}$$

Звідси $g(y) = f(\Psi(y)) \cdot |\Psi'(y)|$

і маємо: $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \cdot e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$

Завдання 5.

y_j \ x_i	-1	1	2
1	0,15	0,2	0,15
3	0,25	0,15	P

(i) $P = P_{23} = 1 - \sum_{i,j} p_{ij} \Big|_{ij \neq 23}$

$$r_{xy} = \frac{M(xy) - M(x)M(y)}{\sqrt{D(x)}\sqrt{D(y)}}$$

x_i	-1	1	2
p_i	0,4	0,35	0,25

y_j	1	3
p_j	0,5	0,5

(i) $P = 0,1$

$$M(xy) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 0,65$$

$$M(X) = \sum_i x_i p_i = 0,45$$

$$M(Y) = \sum_j y_j p_j = 2$$

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x) = \sum_i x_i^2 p_i - 0,45^2 = 1,5475$$

$$D(y) = M(y^2) - M^2(y) = \sum_j y_j^2 p_j - 4 = 1$$

$$\therefore r_{xy} = \frac{0,65 - 0,45 \cdot 2}{\sqrt{1,5475}\sqrt{1}} = -0,200967$$