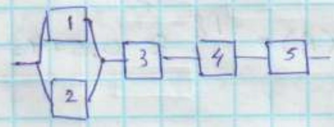
20.2.



$P_1 = P_2 = P_3 = 0.75$

$P_4 = P_5 = 0.9$

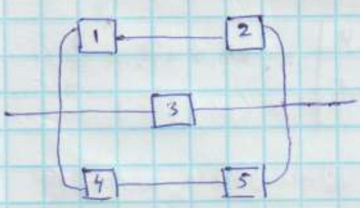
$P = (1 - \bar{P}_1 \bar{P}_2) P_3 P_4 P_5 \Rightarrow \bar{P} = 1 - P$

$\bar{P}_i = 1 - P_i$

$P = (1 - 0.25 \cdot 0.25)\, 0.75 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 0.569531$

$\Rightarrow \bar{P} = 1 - 0.569531 = 0.430469$ В-дь: $\underline{0.430469}$

26.2.



$P = 1 - \overline{P_1 P_2}\, \bar{P}_3\, \overline{P_4 P_5}$

де $\bar{P}_i = 1 - P_i$,

$\overline{P_i P_j} = 1 - P_i P_j$

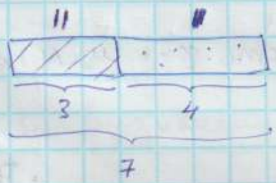
$\bar{P} = 1 - P = \overline{P_1 P_2}\, \bar{P}_3\, \overline{P_4 P_5}$

$\bar{P} = (1 - P_1 P_2)(1 - P_3)(1 - P_4 P_5)$, оскільки $P_i = 0.9$ (за умовою)

маємо: $\bar{P} = (1 - 0.9^2)^2 (1 - 0.9) = 0.00361$

В-дь: $\underline{0.00361}$

26.1.



– бульдозери 2-го типу

– бульдозери 1-го типу

$P(A) = \frac{m}{n}$, де $n = C_7^4$ – кількість способів обрати 4 бульдозери незалежно від типу.

$m = C_3^2 C_4^2$ – кількість способів обрати 4 бульдозери, серед яких 2 - 1-го типу. $\Rightarrow P(A) = \frac{C_3^2 C_4^2}{C_7^4}$ – ймов. обрати 2 бульдозери 1, та 2 типів.

$$P(A) = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{3!4!}{7!} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2}} =$$

$$= \frac{18}{35} \approx 0.5143$$

В-дь: $P(A) = \frac{18}{35} \approx 0{,}5143$

20.1.

$\boxed{1} \cdots \boxed{10}$ $P(A) = \frac{m}{n}$, $n = C_{10}^{6}$,

$m = C_{9}^{6}$

Звідси $P(A) = \frac{C_9^6}{C_{10}^6} = \frac{9!}{3!} \frac{4!}{10!} = \frac{4}{10} = 0.4$

В-дь: 0.4 для а, б.

26.7.

$$f(x) = \begin{cases} C\cos x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Оскільки $\cos(x)$ – ф-я парна, то інтегральна сума на проміжку $(-a; a)$ буде рівна $2S$ на проміжку $(0; a)$.

Знайдемо коефіцієнт C:

Так як $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ – тотожність ф-ї щільності.

В нашому випадку маємо:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} C\cos x\, dx = 1 \sim \frac{1}{2C} = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx \Rightarrow \frac{1}{2C} = \sin x \Big|_0^{\pi/2}$$

$\therefore C = \frac{1}{2}$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x}{2} \cos x\, dx$$

Оскільки інтеграл – ф-я непарна, то інтегральна сума на проміжку $(-a;a)$ рівна 0.

$\therefore M(x) = 0.$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - M^2(x)$$

$$\Rightarrow D(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2}{2}\cos x\,dx - 0^2 = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\,dx$$

так-як $f(x) = \frac{x^2}{2}\cos x \Leftrightarrow f(-x) = \frac{(-x)^2}{2}\cos(-x) = f(x).$

$$D(x) = \left| \begin{matrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} x \sin x\,dx$$

де $x^2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}$,

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x\cos x \Big|_0^{\pi/2} + \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

звідси маємо: $D(x) = \frac{\pi^2}{4} - 2$

$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$. В-дь: $c = \frac{1}{2}$,

$M(x) = 0$,

$D(x) = \frac{\pi^2}{4} - 2$,

$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$.

26.8.

За визначенням $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Для $\lambda = 3$ маємо:

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Знайдемо $\int_0^2 f(x)\,dx$ – з умови завдання.

$I = \int_0^2 3e^{-3x}\,dx = \left(-e^{-3x}\right)\Big|_0^2 = 1 - e^{-6}$. В-дь: $1 - e^{-6}$.

26.9.

$$f(x,y)=\begin{cases} c\,x\cos y, & x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cap y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\\ 0, & x\notin\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup y\notin\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

За визначенням $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$

Звідси маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{\pi/2} c\,x\cos y\,dx\,dy=1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{c}=\int\limits_{0}^{\pi/2} x\,dx\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos y\,dy=\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right)\left(\sin y\Big|_0^{\pi/2}\right)$$

$$\frac{1}{c}=\frac{\pi^2}{8}\cdot 1\Rightarrow \underline{c=\frac{8}{\pi^2}}$$

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$ – за визначенням,

тоді, маємо:

$$F(x,y)=\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{y}\frac{8}{\pi^2}x\cos y\,dx\,dy=\frac{8}{\pi^2}\int\limits_{0}^{x}x\,dx\int\limits_{0}^{y}\cos y\,dy$$

$$F(x,y)=\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x}\right)\left(\sin y\Big|_0^{y}\right)=\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{x^2}{2}\sin y$$

$$\therefore F(x,y)=\left\{\frac{4}{\pi^2}x^2\sin y\right\}_3$$

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x,y)\,dx\,dy$$

– за визначенням.

$$M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\,f(x,y)\,dx\,dy$$

$$M(X)=\frac{8}{\pi^2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{\pi/2}x^2\cos y\,dx\,dy=\frac{8}{\pi^2}\int\limits_{0}^{\pi/2}x^2\,dx\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos y\,dy$$

$$M(X)=\frac{8}{\pi^2}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right)\left(\sin y\Big|_0^{\pi/2}\right)=\frac{\cancel{8}}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^{3}}{\cancel{8}}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{\pi}{3}.$$

$$M(Y) = \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x\, y \cos y \, dx\, dy = \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} x\, dx \int_0^{\pi/2} y \cos y \, dy$$

$$I_x = \int_0^{\pi/2} x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$I_y = \int_0^{\pi/2} y \cos y \, dy = \left| \begin{matrix} u = y & du = dy \\ dv = \cos y\, dy & v = \sin y \end{matrix} \right|$$

$$I_y = y \sin y \Big|_0^{\pi/2} + \cos y \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\Rightarrow M(Y) = \frac{8}{\pi^2} \cdot I_x I_y = \frac{\cancel{8}}{\cancel{\pi^2}} \cdot \frac{\cancel{\pi^2}}{\cancel{8}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\because f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0] \cap y \in (-\infty; 0] \\ \frac{8}{\pi^2} x \cos y, & x \in (0; \frac{\pi}{2}) \cap y \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}; +\infty) \cap y \in [\frac{\pi}{2}; +\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0] \cap y \in (-\infty; 0] \\ 4/\pi^2 \, x^2 \sin y, & x \in (0; \frac{\pi}{2}] \cap y \in (0; \frac{\pi}{2}] \\ \frac{4}{\pi^2} x^2, & x \in (0; \frac{\pi}{2}] \cap y \in (\frac{\pi}{2}; +\infty) \\ \sin y, & x \in (\frac{\pi}{2}; +\infty) \cap y \in (0; \frac{\pi}{2}] \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2}; +\infty) \cap y \in (\frac{\pi}{2}; +\infty) \end{cases}.$$

B-96: $\underline{C = \frac{8}{\pi^2}}$, $\underline{M(X) = \frac{\pi}{3}}$, $\underline{M(Y) = \frac{\pi}{2} - 1}$.

26.3.

Ймовірність виконання робіт бригадами:

2 : 4 : 4 – співвідношення може бути переписано, як: $B_1 = \frac{2}{2+4+4}$, $B_2 = \frac{4}{2+4+4}$, $B_3 = \frac{4}{2+4+4}$

Звідси: $B_1 = \frac{2}{10}$, $B_2 = B_3 = \frac{4}{10}$

$P(A) = P_1 B_1 + P_2 B_2 + P_3 B_3 = 0.2 \cdot 0.8 + 0.96 \cdot 0.4 + 0.9 \cdot 0.4$

Звідси $P(A) = 0.904$. В-дь: 0.904.

26.4.

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = pn$$ – за визначенням

де $p = 0.002$, $n = 1000 \Rightarrow \lambda = 2$

$$P(m>2) = 1 - P(0 \le m \le 2)$$

$$P(0 \le m \le 2) = P_0 + P_1 + P_2 = e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2} = 5e^{-2}$$

$$\Rightarrow P(m>2) = 1 - 4e^{-2}.$$ В-дь: $P(m>2) = 1 - 5e^{-2}$

26.5.

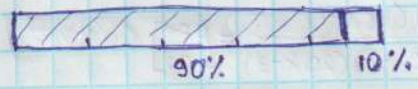
$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = pn$$ – за визначенням,

де $p = 0.005$, $n = 11000 \Rightarrow \lambda = 55$

$$P(m \le 60) = \sum_{k=0}^{60} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{60} \frac{\lambda^k}{k!} \to e^{\lambda}\right) \approx 0.774$$

В-дь: $P(m \le 60) \approx 0.774$

20.4.



Нехай A - кількість робітників найвищого розряду, B - кількість робітників звичайного розряду, тоді

□ - найвищий розряд

⊠ - звичайний розряд

$P(\dot{A}) = \frac{m}{n}$, $n = C_{A+B}^4$, $m = C_A^2 C_B^2 \Rightarrow P(\dot{A}) = \frac{C_A^2 C_B^2}{C_{A+B}^4}$

Нехай X - кількість усіх робітників, звідси маємо: $X = A+B$, оскільки 10% усіх робітників найвищого розряду маємо: $X = 0.1X + 0.9X$, де: $A = 0.1X$, $B = 0.9X$, звідси маємо:

$P(\dot{A}) = \frac{C_{0.1X}^2 C_{0.9X}^2}{C_X^4}$, оскільки $X \geqslant 10$ (за умовою припустимо), маємо:

для $X = 10$: $P(\dot{A}) = \frac{C_{0.1 \cdot 10}^2 C_{0.9 \cdot 10}^2}{C_{10}^4} = \frac{C_1^2 C_9^2}{C_{10}^4}$, оскільки

C_1^2 - не визначено, тоді маємо $X \geqslant 20$, оскільки

$A = 2 \Leftrightarrow \underline{0.1X = 0.1 \cdot 20 = 2}$ - найменше можливе число працівників найвищого класу.

Звідси $P(\dot{A}) = \frac{C_X^2 C_{9X}^2}{C_{10X}^4} \rightarrow \frac{C_{2X}^2 C_{18X}^2}{C_{20X}^4}$, $X \geqslant 1$, $X \in N$

$P(\dot{A}) = \frac{4!(2X)!}{4(2X-2)!} \cdot \frac{(18X)!}{(18X-2)!} \cdot \frac{(20X-4)!}{(20X)!} = \frac{4!}{4} \cdot 2X \cdot (2X-1) \cdot 18X(18X-1) \cdot$

$\cdot \frac{1}{20X(20X-1)(20X-2)(20X-3)} \Rightarrow \frac{27}{5} \cdot \frac{2X(2X-1)(18X-1)}{(20X-1)(20X-2)(20X-3)} = P(\dot{A})$

при $x \to \infty$ имеемо:

$$P(A^{*} | x \to \infty) = \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{27}{5}\cdot\frac{x(2x-1)(18x-1)}{(20x-1)(20x-2)(20x-3)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$P(A^{*} / x \to \infty) = 2\cdot\frac{27}{5}\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}(2-\frac{1}{x})(18-\frac{1}{x})}{\cancel{x^3}(20-\frac{1}{x})(20-\frac{2}{x})(20-\frac{3}{x})} = \frac{27}{5}\cdot\frac{4\cdot18}{20^3}$$

$$P(A^{*} | x \to \infty) = \frac{27\cdot4\cdot2\cdot9}{5\cdot20\cdot20\cdot20} = \frac{3\cdot9\cdot9}{50\cdot100} = \frac{243}{5000} = \frac{486}{10000} = \frac{486}{10^4}$$

В-дь: $P(A^{*}) = \frac{C_{2x}^2 C_{18x}^2}{C_{20x}^4}$, $\forall x \in N$, при $x \to \infty$ $P(A^{*}) = \frac{486}{10^4}$

20.5.

$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $\lambda = np$ – за визначенням.

За умовою: $n = 10\,000$, $p = 0.005$

$\Rightarrow \lambda = 50$; $(10\,000 \cdot 0.005 = 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^1 = 50)$

За умовою $m \in (20; 60)$, тоді:

$$P(20 < m < 60) = e^{-50}\cdot\left(\frac{50^{21}}{21!} + \frac{50^{22}}{22!} + \ldots + \frac{50^{59}}{59!}\right)$$

перепишемо як:

$$P(20 < m < 60) = e^{-50}\cdot\sum_{k=21}^{59}\frac{50^k}{k!} \approx 0.907734$$

В-дь: $P(20 < m < 60) \approx 0.907734$

20.6.

$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, за умовою $\lambda = 2$, тоді

побудуємо закон розподілу ВВ:

$X=k$	m	0	1	2	3	4	5	...	n
$P(X=k)$	$P(m)$	e^{-2}	$2e^{-2}$	$2e^{-2}$	$\frac{2^3}{3!}e^{-2}$	$\frac{2^4}{4!}e^{-2}$	$\frac{2^5}{5!}e^{-2}$	...	$\frac{2^n}{n!}e^{-2}$

За виконання $M(x) = D(x) = \lambda$ для P_m.

В-дь: $\underline{M(x)=2, \quad D(x)=2}$

20.7.

$$f(x) = \begin{cases} c \cos 3x, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}, \text{ де } D: \{ x \in (0; \tfrac{\pi}{6}) \}$$

Оскільки ф-я щільності $f(x)$ задовольняє умові

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, маємо $\int_0^{\pi/6} c \cos 3x\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \int_0^{\pi/6} \cos 3x\,dx$

Звідси $\frac{1}{c} = \int_0^{\pi/6} \cos 3x \frac{d(3x)}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{c} = \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = \sin\theta \Big|_0^{\pi/2} = 1$

$\Rightarrow \boxed{c = 3}$.

$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \Rightarrow M(x) = \int_0 x\, 3 \cos 3x\, \cancel{dx} \cdot \frac{d(3x)}{3\cancel{dx}} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} t \cos t\,dt$

$= \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \cos t\,dt & v = \sin t \end{vmatrix} = \frac{t}{3}\sin t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = \frac{\pi}{6} + \cos t \Big|_0^{\pi/2}$

$\Rightarrow \boxed{M(x) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}}$

$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - M^2(x) = M(x^2) - M^2(x)$

$M^2(x) = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi}{9} + \frac{1}{9}$

$\because D(x) = M(x^2) - M^2(x)$, $M(x^2) = \int_0^{\pi/6} 3x \cdot 3x \cos 3x \cdot \frac{d(3x)}{9dx} \cdot dx$

$M(x^2) = \frac{1}{9}\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\,dt = \begin{vmatrix} u = t^2 & du = 2t\,dt \\ dv = \cos t\,dt & v = \sin t \end{vmatrix} \Rightarrow$

$9M(x^2) = t^2 \sin t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2t \sin t\,dt = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\pi/2} t \sin t\,dt =$

$= \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \sin t\,dt & v = -\cos t \end{vmatrix} = \frac{\pi^2}{4} - 2\left(\underbrace{-t\cos t \Big|_0^{\pi/2}}_{\to 0} + \underbrace{\sin t \Big|_0^{\pi/2}}_{1}\right)$

$\Rightarrow M(x^2) = \frac{\pi^2}{36} - \frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{D(x)} = \frac{\pi^2}{36} - \frac{2}{9} - \frac{\pi^2}{36} + \frac{\pi}{9} - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{\pi}{9} - \frac{1}{3}}$

$\boxed{\sigma(x)} = \sqrt{D(x)} \Rightarrow \sigma(x) = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{9} - \frac{1}{3}}}$

В-дь: $C = 3$, $M(x) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}$, $D(x) = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3}$, $\sigma(x) = \sqrt{\frac{\pi}{9} - \frac{1}{3}}$

20.9.

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,e^{-(x+y)}, & (x \cap y) \in D \\ 0, & (x \cap y) \notin D \end{cases}, \quad D: \{x \in (0;+\infty),\ y \in (0;+\infty)\}$$

За визначенням: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

Звідси, $\frac{1}{c} = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-x}e^{-y}\,dx\,dy = \left(\int\limits_0^{\infty} e^{-t}dt\right)^2$

де $\int\limits_0^{\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$

$\therefore \frac{1}{c} = 1^2 \Rightarrow \boxed{c = 1}$.

$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$ – за визначенням.

Тоді: $F(x,y) = \int\limits_0^{x}\int\limits_0^{y} e^{-x}e^{-y}\,dx\,dy = \int\limits_0^{x} e^{-x}dx \int\limits_0^{y} e^{-y}dy$

$F(x,y) = \left(-e^{-x}\Big|_0^{x}\right)\left(-e^{-y}\Big|_0^{y}\right) = \left(-e^{-x}\right)\left(-e^{-y}\right) = e^{-(x+y)}$

Звідси маємо:

$$\boxed{F(x,y)} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty;0),\ y \in (-\infty;0) \\ e^{-(x+y)}, & x \in (0;+\infty),\ y \in (0;+\infty) \\ e^{-x}, & x \in (0;+\infty),\ y = 0 \\ e^{-y}, & x = 0,\ y \in (0;+\infty) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

В-дь: $c = 1$.

20.8.

За означенням: $N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

з умови маємо: $\mu = 20$, $\sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = 2$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-20)^2}{8}\right)$

Оскільки $P(|X-\mu| \le \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ ∴ μ - параметр можна опустити.

За умовою $\gamma = 0.9 \Rightarrow 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \gamma$ - ймовірність відхилення від мат. сподівання.

∴ $2\Phi\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0.9 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0.45 = P(|X-20| \le \delta)$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, за інтегральною теоремою Лапласа.

Взявши дані з таблиці, отримаємо: $\frac{\delta}{2} \approx 1.65$

звідси $\delta = 2 \cdot 1.65 = 3.3$ В-дь: $\delta = 3.3$

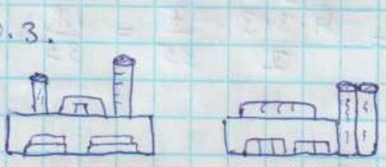
*Note: $P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$

$\Leftrightarrow P(\mu-\delta \le X \le \mu+\delta) = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$

$\Updownarrow$

$P(|X-\mu| \le \delta) = 2\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$.

20.3.



I II

$q_1 = 0.02$ $q_2 = ?$

q_1 - ймовірність браку на 1-й фабриці

q_2 - ймовірність браку на 2-й фабриці.

За умовою $q_1 = 0.02$, q_2 - невідомо, але оскільки поставка шпалер з кожної ф-ки рівноймовірна, маємо: $p = \frac{1}{2} q_1 + \frac{1}{2} q_2$, оскільки допустимий брак p складає не більше 0.03 маємо нерівність:

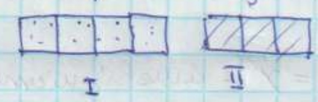
$p = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) < 0.03 \Leftrightarrow q_1 = 0.02$, тоді:

$p = \frac{1}{2}(0.02 + q_2) < 0.03 \Rightarrow q_2 < 2 \cdot 0.03 - 0.02$

$q_2 < 0.04$

В-дь: $q_2 < 0.04$ – допустима ймовірність браку для 2-ї фабрики.

26.6.



Всього бульдозерів I та II типів рівна 7.

I – б. 1-го типу

II – б. 2-го типу

X – кількість бульдозерів 2-го типу, серед 4-х навмання вибраних бульдозерів.

X_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$P_0 = \frac{C_4^4 C_3^0}{C_7^4} = \frac{1}{7!} \cdot \frac{3!\,4!}{1} = \frac{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{1}{35}$$

$$P_1 = \frac{C_4^3 C_3^1}{C_7^4} = \frac{4 \cdot 3}{7!} \cdot \frac{3!\,4!}{1} = \frac{12}{35}$$

$$P_2 = \frac{C_4^2 C_3^2}{C_7^4} = \frac{4!\,3!}{2!\,2!\,2!\,7!} \cdot \frac{4!\,3!}{1} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{35} = \frac{18}{35}$$

$$P_3 = \frac{C_4^1 C_3^3}{C_7^4} = \frac{4}{7!} \cdot \frac{3!\,4!}{1} = \frac{4}{35}$$

$$\sum_i P_i = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{1 + 12 + 18 + 4}{35} = \frac{35}{35} = 1.$$

$$M(x) = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35} =$$

$$= \frac{12}{35} + \frac{36}{35} + \frac{12}{35} = \frac{24 + 36}{35} = \frac{60}{35} = \frac{12}{7} \Rightarrow 1 < \frac{12}{7} < 2$$

$D(x) = \sum_i x_i^2 p_i - M^2(x)$

$\sum_i x_i^2 p_i = 0^2 \cdot \frac{1}{35} + 1^2 \cdot \frac{12}{35} + 2^2 \cdot \frac{18}{35} + 3^2 \cdot \frac{4}{35} = \frac{12}{35} + \frac{72}{35} + \frac{36}{35} =$

$= \frac{90+30}{35} = \frac{120}{35} = \frac{2 \cdot 60}{35} = 2 \cdot \frac{12}{7} = \frac{24}{7}$

$D(x) = \frac{24}{7} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{24 \cdot 7}{49} - \frac{144}{49} = \frac{140 - 144 + 28}{49} = \frac{24}{49}$

В-дь: $M(x) = \frac{12}{7}$, $D(x) = \frac{24}{49}$.

20.10.

n_i	1	2	2	2	2	1	1	N
x_i	58	59	60	61	62	63	64	11

$\gamma = 0.99$

$M(x) = \left(\sum_i x_i n_i\right) : \left(\sum_i n_i\right) = \bar{x}_b$

$\sum_i x_i n_i = 58 + 2 \cdot 59 + 2 \cdot 60 + 61 \cdot 2 + 62 \cdot 2 + 63 + 64 = 669$

$\sum_i n_i = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 11$

$\Rightarrow M(x) = \frac{669}{11} \approx 60.8182 = M_e$ або $\bar{x}_b$

$D(x) = \left(\sum_i (x_i - \bar{x}_b)^2 n_i\right) : \left(\sum_i n_i\right) = D_b$; $\sqrt{D_b} = \sigma_b$

$D(x) = \frac{370}{11} : 11 = \frac{370}{121} = D_b \Rightarrow D_b \approx 3.058$, $\sigma_b \approx 1.74871$

Довірчий інтервал : $(\bar{x}_b - \delta ; \bar{x}_b + \delta)$

де $\delta = \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{N}}$, де t_γ задовольняє рівняння $2\Phi(t_\gamma) = \gamma$

Звідси $\Phi(t_\gamma) = \frac{0.99}{2} = 0.495 \Rightarrow t_\gamma \approx 2.58$

тоді : $\delta = \frac{2.58 \cdot 1.74871}{\sqrt{11}} \approx 1.36032$

$\therefore (60.8182 - 1.36032 ; 60.8182 + 1.36032)$

В-дь : $(59.45788 ; 62.17852) \sim 59.458 < a < 62.179$

26.10

n_i	1	2	1	1	1	1	1	N
x_i	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.54	0.56	8

$$\bar{x}_в = \frac{\sum_i n_i x_i}{\sum_i n} = \frac{1}{N}\sum_i n_i x_i$$

$$D_в = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{\sum_i n} = \frac{1}{N}\sum_i (x_i - \bar{x}_в) n_i$$

Звідси $\bar{x}_в = \frac{1}{8}[0.48 + 2\cdot 0.49 + 0.50 + 0.51 + 0.52 + 0.54 +$
$+ 0.56] = 0.51125$

$$D_в = \frac{1}{8}[(0.48 - 0.51125)^2 + 2(0.49 - 0.51125)^2 +$$
$$+(0.5 - 0.51125)^2 + (0.52 - 0.51125)^2 +$$
$$+(0.52 - 0.51125)^2 + (0.54 - 0.51125)^2 +$$
$$+(0.56 - 0.51125)^2] \Rightarrow D_в = 0.00066$$
$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \approx 0.0257$$

За умовою $\gamma = 0.99$

Довірчий інтервал: $(\bar{x}_в - \delta;\ \bar{x}_в - \delta)$,

де $\delta = \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{N}}$, t_γ – коефіцієнт довіри, який

визначається за ф-ю: $2\Phi(t_\gamma) = \gamma$, Φ – ф-я

Лапласа.

Звідси маємо: $2\Phi(t_\gamma) = 0.99 \Rightarrow \Phi(t_\gamma) = 0.495$
$t_\gamma = 2.58$

тоді $\delta = \frac{2.58 \cdot 0.0257}{\sqrt{8}} \approx 0.0234427$

Довірчий інтервал має вигляд: $(0.487807;\ 0.534693)$

В-дь: $0.488 < a < 0.535$