МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Практичне заняття № 7

Тема. Однопараметрична оптимізація процесів

План проведення заняття

Вступ.
1. Постановка та розв'язання завдання однопараметричної оптимізації процесів аналітичними методами.
2. Постановка та розв'язання завдання однопараметричної оптимізації процесів методом рівномірного пошуку за допомогою Excel.
3. Однопараметрична оптимізація методом половинного ділення інтервалу.
4. Однопараметрична оптимізація методом дихотомії.
Заключення.

Завдання на СРС: Розробити програму та здійснити розрахунки за допомогою Excel приклади 1 та 2 , при $\varepsilon=0{,}0001$
Розробити програму та здійснити розрахунки за допомогою Excel приклади 7 та 8 методом дихотомії, при $\varepsilon=0{,}01$; $\delta=0{,}0099$.

Вступ

Предметом вивчення методів оптимізації є побудова оптимальних рішень за допомогою математичних моделей. При цьому, безпосередньо побудова математичних моделей не розглядається. Побудова оптимального рішення включає в себе обчислення такого значення параметру, що приводить до максимуму або мінімуму задану цільову функцію.

Слід відзначити, що в більшості випадків оптимізаційну задачу неможливо рішити аналітично. Тому для рішення різноманітних оптимізаційних задач розроблені методи численного рішення за допомогою обчислювальної техніки, які і складають суть методів оптимізації.

Існує багато методів пошуку мінімуму або максимуму функції на відрізку. Найбільш відомими є метод рівномірного пошуку, метод ділення інтервалу навпіл, метод дихотомії, золотого перерізу, Фібоначі, метод квадратичної або кубічної апроксимації, тощо. В кожному із цих методів послідовно скорочується інтервал, що містить шуканий екстремум.

Всі методи однопараметричної оптимізації (половинного ділення, дихотомії, золотого перерізу, Фібоначі, апроксимаційні) відрізняються один від одного різними евристиками вибору нового інтервалу на кожному кроці ітераційного алгоритму.

1. Постановка та розв'язання завдання однопараметричної оптимізації процесів аналітичними методами.

Необхідно знайти безумовний мінімум функції $f(x)$ однієї змінної, тобто таку точку $x^* \in R$, що $f(x) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Така задача може бути вирішена аналітично або чисельними (алгоритмічними) методами.

Аналітичне рішення полягає в пошуку точки x, що задовольняє умові

$$\frac{df(x)}{dx} = 0.$$

Приклад 1.

Знайти мінімум функції $f(x)=2x^2 - 12x$

Розв'язання:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

$$4x - 12 = 0$$

$$x^* = 3$$

Відповідь: $x^*=3$

Приклад 2.

Знайти максимум функції $f(x)= -18x^2 + 72x-7$

Завдання виконати самостійно.

2. Постановка та розв'язання завдання однопараметричної оптимізації процесів методом рівномірного пошуку за допомогою Excel.

<u>Алгоритм.</u>

Крок 1. Задати початковий інтервал $L_0 = [a_0, b_0]$, задати N – число обчислень функції.

Крок 2. Обчислити точки $x_i = a_0 + i \cdot \frac{b_0 - a_0}{N+1}, \quad i = 1,2,...,N$.

Крок 3. Обчислити значення функції в точках x_i: $f(x_i), \quad i = 1,2,...,N$.

Крок 4. Серед точок x_i знайти x_k таку, що має найменше значення функції:

$$f(x_k) = \min_{1 \le i \le N} f(x_i).$$

Крок 5. Точка мінімуму $x^*=x_k$ належить інтервалу $x^* \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$. В якості наближеного рішення може бути обрана точка:

$$x^* \approx \frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2}.$$

Слід зазначити, що число обчислень N доцільно обирати із заданої точності:

$$\varepsilon \geq \frac{b_0 - a_0}{N+1}.$$

Приклад 3.
Знайти максимум функції $f(x)=x^3 - 12x^2 - 18x - 16$ при L_0=[-5;10], N=100, використовуючи програму MS Excel.
Побудувати графік.
Розв'язання:

1)У вільній клітинці вводимо нашу функцію, вона матиме вигляд:

y=x^3-12x^2-18x-15

2) Будуємо таблицю залежності y(x)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	-350	-199	-96	-35	-10	-15	-44	-91	-150	-215	-280	-339	-386	-415	-420	-395

3) Шляхом зменшення інтервалів Δх вибираємо найбільш точне максимальне значення функції.

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
y	-10	-9,249	-8,792	-8,623	-8,736	-9,125	-9,784	-10,707	-11,888	-13,321	-15

X	-0,7	-0,69	-0,68	-0,67	-0,66	-0,65	-0,64	-0,63	-0,62	-0,61	-0,6
Y	-8,623	-8,621709	-8,623232	-8,627563	-8,634696	-8,644625	-8,657344	-8,672847	-8,691128	-8,712181	-8,736

x	-0,7	-0,699	-0,698	-0,697	-0,696	-0,695	-0,694	-0,693	-0,692	-0,691	-0,69
y	-8,623	-8,6227441	-8,6225164	-8,6223169	-8,6221455	-8,6220024	-8,6218874	-8,6218006	-8,6217419	-8,6217114	-8,621709

Відповідь: при x є[-0,691;0,690] функція $f(x)$ має максимум

Приклад 4.

Знайти мінімум функції $f(x)=2x^2 - 12x$

Завдання виконати самостійно.

3. Однопараметрична оптимізація методом половинного ділення інтервалу

Метод відноситься до послідовних стратегій і дозволяє виключити із подальшого розгляду на кожній ітерації точно половину даного інтервалу невизначеності. Задається початковий інтервал невизначеності, а алгоритм зменшення інтервалу, являючись, як і в загальному випадку, "гарантуючим" , оснований на аналізі величин функції в трьох точках, рівномірно розподілених на даному інтервалі (що ділять його на чотири рівні частини). Умови закінчення процесу пошуку стандартні: пошук закінчується, коли довжина даного інтервалу невизначеності буде менша встановленої величини.

Алгоритм

Крок 1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0=[a_0,b_0]$ та $l > 0$ – потрібну точність.

Крок 2. Задати k=0.

Крок 3. Обчислити середню точку $x_k^c = \frac{a_k+b_k}{2}$, $|L_{2k}| = |b_k - a_k|$, $f(x_k^c)$.

Крок 4. Обчислити точки: $y_k = a_k + \frac{|L_{2k}|}{4}$, $z_k = b_k - \frac{|L_{2k}|}{4}$ та $f(y_k)$, $f(z_k)$

Зауважимо, що точки y_k, x_k^c, z_k ділять інтервал $[a_k,b_k]$ на чотири рівні частини.

Крок 5. Порівняємо значення $f(y_k)$ та $f(x_k^c)$:

а) якщо $f(y_k) < f(x_k^c)$, виключити інтервал $(x_k^c, b_k]$, прийнявши $b_{k+1}= x_k^c$, $a_{k-1}=a_k$. Середньою точкою нового інтервалу стає точка y_k: $x_{k+1}^c = y_k$ (рис. 1, а), Перейти до кроку 7.

б) якщо $f(y_k) \geq f(x_k^c)$, перейти до кроку 6.

Крок 6. Порівняти $f(z_k)$ з $f(x_k^c)$:

а) якщо $f(z_k) < f(x_k^c)$, виключити інтервал $[a_k, x_k^c)$, прийнявши $a_{k+1}= x_k^c$ $b_{k+1}=b_k$, Середньою точкою нового інтервалу стає точка z_k: $x_{k+1}^c = z_k$ (рис. 1, б), Перейти до кроку 7;

б) якщо $f(z_k) \geq f(x_k^c)$, виключити інтервали$[a_k, y_k)$, $(z_k, b_k]$прийнявши $a_{k+1}= y_k$ $b_{k+1}=z_k$, Середньою точкою нового інтервалу залишається точка x_k^c: $x_{k+1}^c = x_k^c$
(рис. 1, в).

Крок 7. Вирахувати $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ та перевірити умову закінчення:

а) якщо $\left|L_{2(k+1)}\right| \leq l$ процес пошуку закінчується і x^* ϵ $\left|L_{2(k+1)}\right| = |b_{k+1}, a_{k+1}|$.
В якості приблизного рішення можна взяти середину останнього інтервалу: $x^*=x_{k+1}^c$;

б) якщо $\left|L_{2(k+1)}\right| > l$ то прийняти k=k+1 та перейти до кроку 4.

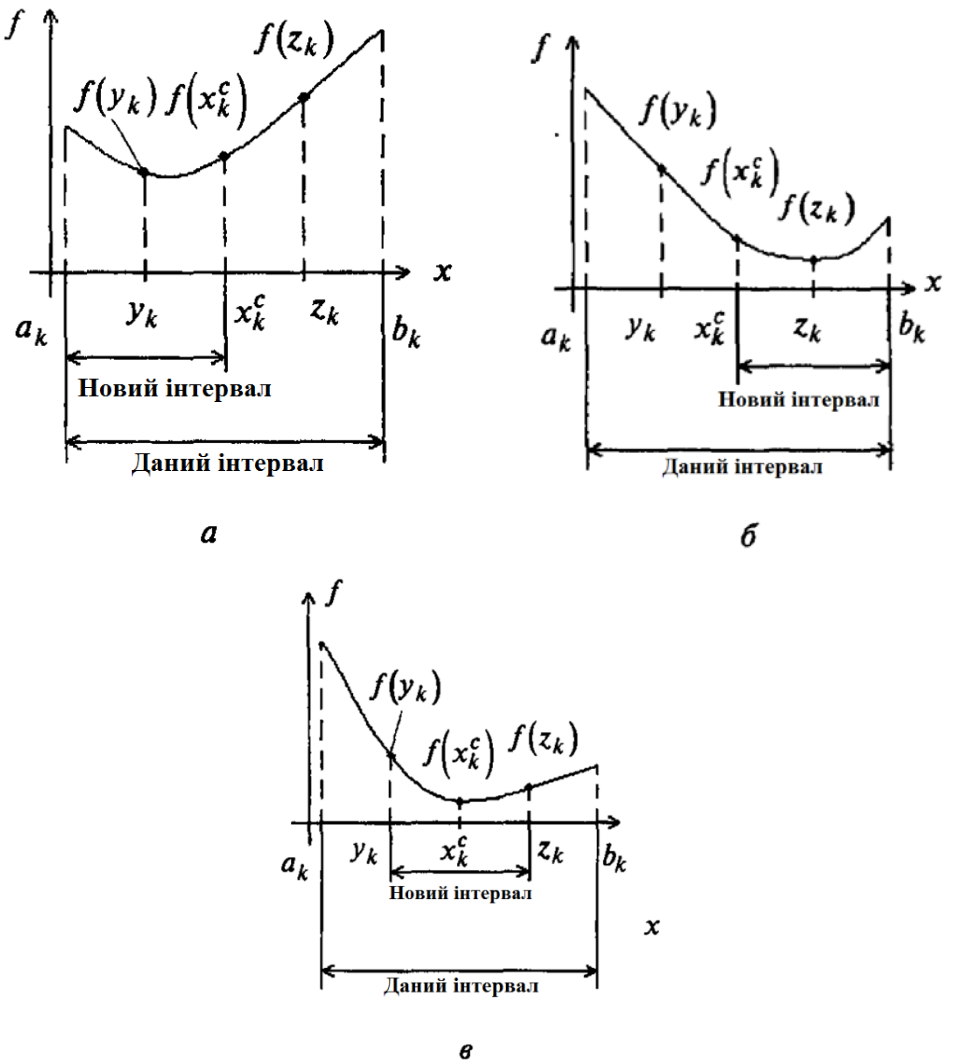

Рис. 1. Оптимізація методом половинного ділення інтервалу

Приклад 5

За допомогою MS Excel знайти мінімум функції $f(x)=2x^2-12x$ методом половинного ділення інтервалу, при L=[0;10]; ε=0.01. Побудувати графік даної функції

Розв'язання.

Алгоритм

1) Побудуємо таблицю та графік функції $f(x)=2x^2-12x$.

x=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y=	0	-10	-16	-18	-16	-10	0	14	32	54

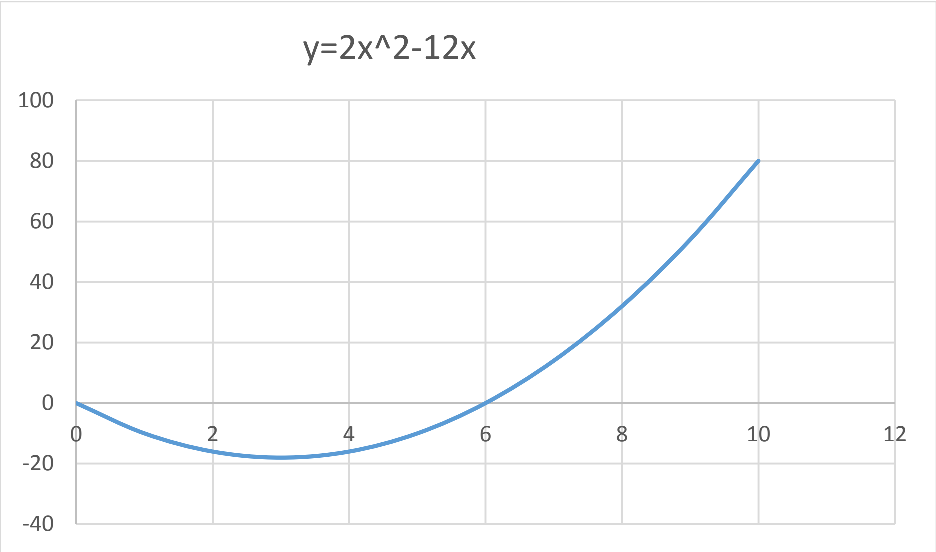

Рис. 2. Графік функції $f(x)=2x^2-12x$

2) Задамо початковий інтервал L=[0;10] (тобто $a_0=0,b_0=10$) і вирахуємо значення функції в даних точках (*f(a)* та *f(b)*) .
3) Знайдемо середину інтервалу (точка C_0) та значення функції (*f(c)*)
4) Якщо *f(a)* < *f(b)* то задаємо новий інтервал [a,c], тобто a:=a і b:=c, в протилежному випадку задаємо інтервал [c,b], тобто a:=c і b:= b.
5) Повторюємо крок 3
6) Поки довжина інтервалу не буде меншою заданої точності повторюємо кроки 3,4.

k=	0	a=	0	b=	10	c=	5	b-a=	10
		f(a)=	0	f(b)=	80	f(c)=	-10		далі
k=	1	a=	0	b=	5	c=	2,5	b-a=	5
		f(a)=	0	f(b)=	-10	f(c)=	-17,5		далі
k=	2	a=	2,5	b=	5	c=	3,75	b-a=	2,5
		f(a)=	-17,5	f(b)=	-10	f(c)=	-16,875		далі
k=	3	a=	2,5	b=	3,75	c=	3,125	b-a=	1,25
		f(a)=	-17,5	f(b)=	-16,875	f(c)=	-17,9688		далі
k=	4	a=	2,5	b=	3,125	c=	2,8125	b-a=	0,625
		f(a)=	-17,5	f(b)=	-17,9688	f(c)=	-17,9297		далі
k=	5	a=	2,8125	b=	3,125	c=	2,96875	b-a=	0,3125

		f(a)=	-17,9297	f(b)=	-17,9688	f(c)=	-17,998		далі
k=	6	a=	2,96875	b=	3,125	c=	3,046875	b-a=	0,15625
		f(a)=	-17,998	f(b)=	-17,9688	f(c)=	-17,9956		далі
k=	7	a=	2,96875	b=	3,046875	c=	3,007813	b-a=	0,078125
		f(a)=	-17,998	f(b)=	-17,9956	f(c)=	-17,9999		далі
k=	8	a=	2,96875	b=	3,007813	c=	2,988281	b-a=	0,039063
		f(a)=	-17,998	f(b)=	-17,9999	f(c)=	-17,9997		далі
k=	9	a=	2,988281	b=	3,007813	c=	2,998047	b-a=	0,019531
		f(a)=	-17,9997	f(b)=	-17,9999	f(c)=	-18		далі
k=	10	a=	2,998047	b=	3,007813	c=	3,00293	b-a=	0,009766
		f(a)=	-18	f(b)=	-17,9999	f(c)=	-18		стоп

Отже, min f(x) є [2,998047;3,007813]

Приклад 6 (самостійно)

За допомогою MS Excel знайти мінімум функції $f(x)= x^3-12x^2-18x-15$ методом половинного ділення інтервалу, при L=[-5;10]; ε=0.01. Побудувати графік даної функції.

4. Однопараметрична оптимізація методом дихотомії.

Вважається, що функція $f(X)$, що мінімізується, унімодальна на відрізку $[a_0, b_0]$, і необхідно знайти мінімум даної функції на заданому відрізку з деякою точністю ε. Обчислюємо дві точки згідно з наступними співвідношеннями:

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0 - \delta}{2}; \qquad x_2 = \frac{a_0 + b_0 + \delta}{2}$$

де $\delta < \varepsilon$. І в кожній із знайдених точок вираховуємо значення функції: $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Далі скорочуємо інтервал невизначеності та отримуємо інтервал $[a_1, b_1]$ таким чином. Якщо $f(x_1)<f(x_2)$, то перепризначаємо межі інтервалу: $a_1=a_0$, $b_1=x_2$.

Якщо $f(x_1)>f(x_2)$, то $a_1=x_1$, $b_1=b_0$.

Далі на отриманому інтервалі $[a_1, b_1]$ обчислюємо наступну пару точок x_1 та x_2. За допомого цих формул обчислюємо новий інтервал, який буде менше попереднього.

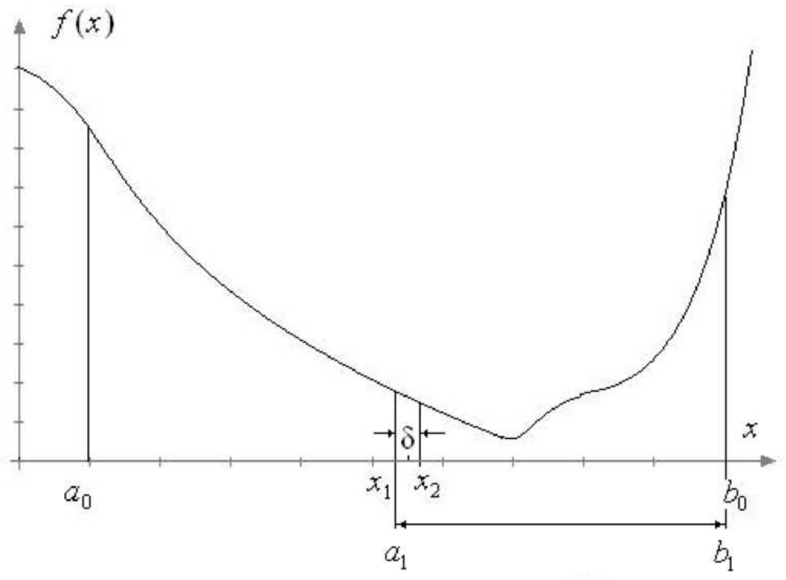

Рис. 3. Метод дихотомії

Дані ітерації з пошуку нового інтервалу доцільно закінчити за умови, коли k-й інтервал буде менше заданої точності:

$$|b_k - a_k| < \varepsilon .$$

Слід відзначити, що в даному методі на кожній ітерації функція f(x) обчислюється двічі. При цьому інтервал, в якому знаходиться екстремум скорочується практично в 2 рази.

Приклад 7

За допомогою MS Excel знайти мінімум функції $f(x)=2x^2-12x$ методом дихотомії, при L=[0;10]; ε=0,01; δ=0,0099. Побудувати графік даної функції.

Приклад 8

За допомогою MS Excel знайти мінімум функції $f(x)= x^3-12x^2-18x-15$ методом дихотомії, при L=[-5;10]; ε=0,01; δ=0,0099. Побудувати графік даної функції.

Час виконання завдання 1 година.

Заключення.

Прийняття рішень завжди передбачає рішення оптимізаційної задачі. Суть рішення такої задачі полягає у відшуканні таких параметрів процесу, що приводять цільову функцію до максимуму чи мінімуму при заданих обмеженнях на зміну параметрів досліджуваного процесу

На даному практичному занятті було надано практичних навичок розв’язання задач оптимізації за допомогою комп’ютерної програми MS Excel.

Завідувач кафедри вищої математики,
математичного моделювання та фізики
кандидат фізико-математичних наук, доцент І.В. Замрій