МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ
ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Практичне заняття № 3

Тема. Моделювання багатомодульних систем за допомогою марківських процесів з використанням MathCad.

План проведення заняття

Вступ.
1. Побудова математичної моделі функціонування багатомодульних систем на основі процесів загибелі та розмноження.
2. Розв’язання системи диференційних рівнянь Колмогорова на MathCad.
3. Побудова математичної моделі на основі марківского циклічного процесу та моделювання на MathCad (для самостійного виконання).
Заключення.

Завдання на СРС: Навчитись самостійно розв’язувати системи диференційних рівнянь Колмогорова на MathCad без допомоги зразка розрахунку.

Вступ.

Питання для перевірки готовності до заняття.

1. Дайте визначення марківського випадкового процесу з дискретними станами та неперервним часом.

2. Які обмеження накладаються на застосування математичних моделей на основі марківських процесів?

3. Яка інформація є вихідною для моделювання марківських процесів?

4. Яку інформацію можна отримати в результаті моделювання марківських процесів?

5. Сформулюйте мету моделювання марківських процесів.

6. В чому суть математичної моделі процесу загибелі та розмноження?

7. В чому суть математичної моделі циклічного марківського процесу?

1. Побудова математичної моделі функціонування багатомодульних систем на основі процесів загибелі та розмноження.

Сутність функціонування багатомодульної системи полягає в такому. Нехай система складається із n різних модулів, які функціонують одночасно та всі разом вирішують глобальне завдання. Кожний модуль не є абсолютно надійним. Тому модулі виходять з ладу. Згідно системи технічного обслуговування будемо вважати, що модуль, який вийшов з ладу виводиться із загального обчислювального процесу та потрапляє на ремонт, де ремонтується в середньому tв діб, де tв – середній час відновлення модуля.

Загальний обчислювальний процес (або інший виробничий процес) організовано таким чином, що задачі відмовившого модуля перерозподіляються на інші працездатні модулі. При цьому вважається, що кожний модуль має відповідний резерв (надмірність) в обчислювальній потужності, пам’яті, швидкодії, тощо. Саме використовуючи цю надмірність модуль має змогу виконувати всі свої завдання та частину завдань тих модулів, що знаходяться на ремонті.

Функціонування системи відбувається за схемою марківського процеса «загибелі та розмноження» (рис. 1).

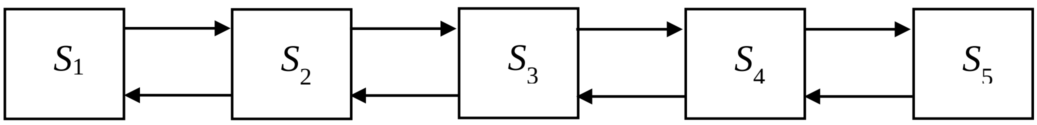

Рис. 1. Процес функціонування 5-модульної системи з умовою мінімального числа модулів 2

Розглянемо 5-модульну систему. Будемо вважати, що для виконання глобального завдання в системі повинно функціонувати не меньше 2 модулів. Тобто, якщо відмовило 3 модуля і вони знаходяться на ремонті, то 2 справних модулі можуть перерозподілити між собою всі задачі та виконувати глобальне завдання. Проте у випадку, коли відмовило 4 модуля, то один, що залишився справним не зможе виконувати всі завдання. В цьому випадку система не виконує глобальне завдання, знаходиться в стані повної відмови.

Таким чином, стани системи можна призначити такими:

S1 – всі п’ять модулів справні та функціонують;

S2 – один із модулів відмовив, знаходиться на ремонті; всі інші 4 модулі справні та функціонують;

S3 – два будь-яких модулі відмовили та знаходяться на ремонті; всі інші 3 модулі справні та функціонують;

S4 – три будь-яких модулі відмовили та знаходяться на ремонті; інші 2 модулі справні та функціонують;

S5 – стан повної відмови системи: чотири будь-яких модулі відмовили та знаходяться на ремонті; останній справний модуль відключено, він знаходиться в режимі очікування запуску загального обчислювального процесу після того, як відремонтується один із модулів.

Переходи із стану в стан відбуваються внаслідок виходу з ладу одного із модулів (перехід на один стан вправо по графу), або в момент часу, коли відремонтується один із модулів, що перебувають в ремонті (перехід вліво по графу).

Будемо вважати, що середній час напрацювання модуля на відмову tо. Середній час відновлення модуля дорівнює tв.

Тоді, згідно з теорією процесу «загибелі та розмноження» інтенсивності переходів:

$$\lambda_{12} = \frac{5}{t_O}; \quad \lambda_{23} = \frac{4}{t_O}; \quad \lambda_{34} = \frac{3}{t_O}; \quad \lambda_{45} = \frac{2}{t_O}; \qquad (1)$$

$$\lambda_{21} = \frac{1}{t_B}; \quad \lambda_{32} = \frac{2}{t_B}; \quad \lambda_{43} = \frac{3}{t_B}; \quad \lambda_{54} = \frac{4}{t_B}. \qquad (2)$$

Система рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{21} \cdot p_2(t); \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot p_2(t) + \lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{32} \cdot p_3(t); \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = -(\lambda_{32} + \lambda_{34}) \cdot p_3(t) + \lambda_{23} \cdot p_2(t) + \lambda_{43} \cdot p_4(t); \\ \dfrac{dp_4(t)}{dt} = -(\lambda_{43} + \lambda_{45}) \cdot p_4(t) + \lambda_{34} \cdot p_3(t) + \lambda_{54} \cdot p_5(t); \\ \dfrac{dp_5(t)}{dt} = -\lambda_{54} \cdot p_5(t) + \lambda_{45} \cdot p_4(t). \end{cases} \qquad (3)$$

Рівняння нормування: $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) + p_5(t) = 1.$ (4)

Початкові умови для рішення системи диференційних рівнянь:

$$p_1(0)=1;\ \ p_2(0)=0;\ \ p_3(0)=0;\ \ p_4(0)=0;\ \ p_5(0)=0. \qquad (5)$$

Це означає, що система починає працювати в стані S1, коли всі модулі справні та функціонують.

Висновки. Рішення системи рівнянь Колмогорова необхідно здійснювати за допомогою обчислювальної техніки. Можна запрограмувати на одній із алгоритмічних мов, застосовуючи метод Рунге-Кутта, або застосувати спеціалізовані програмні середовища MathLab, MahtCad, Maxima, Maple та інші. В результаті рішення будуть отримані імовірності перебування системи у певних станах як функції часу. В результаті аналізу отриманих графіків можна давати практичні реалізації по удосконаленню реальної системи, для якої складена математична модель.

2. Розв'язання системи диференційних рівнянь Колмогорова на MathCad.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь Колмогорова (3) для марківського процесу, що описує функціонування 5-модульної системи, граф станів та переходів якої представлено на рис. 1.

Вважати, що to=10 діб, tв=2 доби.

Розв'язання.

Підставимо значення to, tв у вирази для інтенсивностей переходів (1) та (2). Отримаємо матрицю інтенсивностей переходів:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

де λ_{ij} – елемент матриці, що знаходиться в і-тому рядку та j-тому стовбчику та дорівнює інтенсивності переходу від Si до Sj.

Підставляючи (6) в (3) отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -0{,}5 \cdot p_1(t) + 0{,}5 \cdot p_2(t); \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -0{,}9 \cdot p_2(t) + 0{,}5 \cdot p_1(t) + p_3(t); \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = -1{,}3 \cdot p_3(t) + 0{,}4 \cdot p_2(t) + 1{,}5 \cdot p_4(t); \\ \dfrac{dp_4(t)}{dt} = -1{,}7 \cdot p_4(t) + 0{,}3 \cdot p_3(t) + 2 \cdot p_5(t); \\ \dfrac{dp_5(t)}{dt} = -2 \cdot p_5(t) + 0{,}2 \cdot p_4(t). \end{cases} \qquad (7)$$

Рішення цієї системи доцільно виконати в MathCad.

Пропонується четверте рівняння системи замінити на рівняння нормування. В результаті рішення побудувати графікі $p_i(t)$ в діапазоні від 0 до 20 діб.

Скріншот рішення на рис. 2.

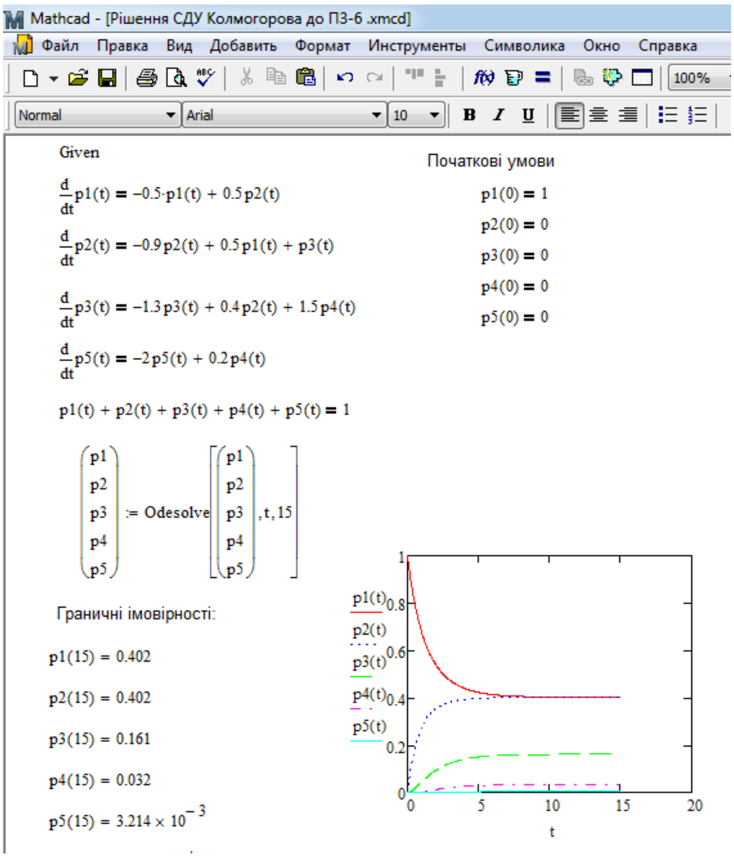

Рис. 2

Тепер доцільно вирішити алгебраїчну систему рівнянь та знайти граничні імовірності перебування системи в станах Si.

Підставляючи в (7) нульові значення похідних від імовірностей, отримаємо:

$$\begin{cases} -0{,}5\cdot p_1+0{,}5\cdot p_2=0; \\ -0{,}9\cdot p_2+0{,}5\cdot p_1+p_3=0; \\ -1{,}3\cdot p_3+0{,}4\cdot p_2+1{,}5\cdot p_4=0; \\ -1{,}7\cdot p_4+0{,}3\cdot p_3+2\cdot p_5=0; \\ -2\cdot p_5+0{,}2\cdot p_4=0. \end{cases} \tag{8}$$

Відкинемо четверте рівняння та добавимо рівняння нормування (4) та отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -0{,}5\cdot p_1+0{,}5\cdot p_2=0; \\ -0{,}9\cdot p_2+0{,}5\cdot p_1+p_3=0; \\ -1{,}3\cdot p_3+0{,}4\cdot p_2+1{,}5\cdot p_4=0; \\ -2\cdot p_5+0{,}2\cdot p_4=0; \\ p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1. \end{cases} \tag{9}$$

Для системи лінійних алгебраїчних рівнянь (9) розширена матриця системи має вигляд:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -1{,}3 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рішення системи отримано за допомогою матричного методу рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь на Excel:

	-0,5	0,5	0	0	0	0
	0,5	-0,9	1	0	0	0
Арозш=	0	0,4	-1,3	1,5	0	0
	0	0	0	0,2	-2	0
	1	1	1	1	1	1

	-1,981	-0,785	-0,295	0,201	0,402	p1=	0,401929
	0,019	-0,785	-0,295	0,201	0,402	p2=	0,401929
Аоберн=	1,008	0,686	-0,118	0,080	0,161	p3=	0,160772
	0,868	0,804	0,643	0,016	0,032	p4=	0,032154
	0,087	0,080	0,064	-0,498	0,003	p5=	0,003215

Висновок. В результаті рішення отримали залежності імовірностей перебування системи в певних станах. Обчислення граничних імовірностей двома методами та збіжність результатів дають можливість стверджувати що рішення виконано вірно.

Таким чином, отримане рішення дає можливість промоделювати досліджуваний випадковий процес при різних вихідних даних, що, в свою чергу, надасть можливість підібрати найбільш раціональні значення параметрів системи.

3. Побудова математичної моделі на основі марківского циклічного процесу та моделювання на MathCad (для самостійного виконання).

Завдання. Багатофункціональний пошуковий прилад із комплекту системи технічного захисту інформації призначено для вирішення таких завдань:

1) Виявлення факту роботи і локалізація місця розташування радіовипромінювальних спеціальних технічних засобів, що створюють потенційно небезпечні, з точки зору витоку інформації, радіовипромінювання.

2) Виявлення та локалізація місця розташування спеціальних технічних засобів, що працюють з випромінюванням в інфрачервоному діапазоні

3) Виявлення та локалізація місця розташування спеціальних технічних засобів, що використовують для добування і передачі інформації провідні лінії різного призначення, а також технічних засобів обробки інформації, що створюють наводки інформативних сигналів на поруч розташовані провідні лінії або стікання цих сигналів в лінії мережі електроживлення.

4) Виявлення та локалізація місця розташування джерел електромагнітних полів з переважною наявністю магнітної складової поля, трас прокладки прихованої електропроводки, яка придатна для установки закладних пристроїв, а також дослідження технічних засобів, що оброблюють мовну інформацію.

5) Виявлення найбільш вразливих місць, з точки зору виникнення віброакустичних каналів витоку інформації, а також оцінка ефективності систем віброакустичного захисту приміщень.

6) Виявлення найбільш вразливих місць, з точки зору виникнення каналів витоку акустичної інформації, а також оцінка ефективності звукоізоляції приміщень.

Прилад може функціонувати в одному із таких режимів:

1) високочастотного детектора-частотоміра;

2) скануючого аналізатора провідних ліній;

3) детектора інфрачервоних випромінювань;

4) детектора низькочастотних магнітних полів;

5) віброакустичного приймача;

6) акустичного приймача.

За інструкціями з Керівництва по експлуатації приладу використання приладу можливе лише за послідовного включення перелічених режимів роботи. Після виконання шостого режиму прилад необхідно відключити на час близько 2-х годин. За статистикою використання приладу середній час роботи в кожному режимі:

t_1=2 год., t_2=1,5 год., t_3=0,5 год., t_4=2,5 год., t_5=2 год., t_6=1,5 год.

Виконати самостійно:

1. Побудувати граф станів випадкового процесу, що описує функціонування приладу.

2. Розрахувати інтенсивності переходів із стану в стан.

3. Записати систему диференційних рівнянь Колмогорова.

4. Записати алгебраїчну систему рівнянь для розрахунку граничних імовірностей.

5. Розрахувати граничні імовірності перебування системи в певних станах.

6. Рішити систему диференційних рівнянь Колмогорова та побудувати графіки $P_i(t)$, де i=1,2,…,7.

7. Порівняти результати п. 5 та п. 6. Зробити висновки.

Для обчислення використовувати MathCad, або інше програмне середовище.

Час виконання завдання 1 година.

Заключення

Широкий клас реальних технічних та організаційних систем можна звести до марковських процесів, математичний опис яких базується на диференційних рівняннях Колмогорова. Для дослідження марківських процесів необхідно розв’язати систему рівнянь Колмогорова та знайти імовірності перебування системи в тому чи іншому стані в залежності від часу. Разом з тим корисними є значення граничних ймовірностей станів. На даному практичному занятті було надано практичних навичок розв’язання таких систем в середовищі MathCad.

Аналіз та дослідження вищезазначених параметрів дозволяють зробити практичні рекомендації по покращенню якості функціонування систем та підвищенню їх ефективності.

Завідувач кафедри вищої математики,

математичного моделювання та фізики

кандидат фізико-математичних наук, доцент І.В. Замрій