МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ
ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Практичне заняття № 11

Тема. Складання математичних моделей задач лінійного програмування та рішення їх графічним методом

План проведення заняття

Вступ.
1. Складання математичних моделей для задач лінійного програмування.
2. Рішення задач лінійного програмування графічним методом.
3. Самостійне рішення задач ЛП графічним методом.
Заключення.

Завдання на СРС: 1. Навчитись самостійно розробляти математичні моделі задач, що підлягають під клас лінійного програмування. Засвоїти графічний метод рішення задач ЛП, ознайомитись з симплекс-методом рішення здач ЗЛП та ознайомитись з пошуком рішення ЗЛП на Excel.

2. Рішити одну задачу ЛП графічним методом (стор. 6 – 7). Номер варіанта обрати за списком групи. Проаналізувати рішення, зробити висновки.

Вступ.

<u>Питання для перевірки готовності до заняття</u>.

1. Дайте визначення класу задач лінійного програмування.

2. Із яких складових складається математична модель задачі ЛП?

2. Які обмеження накладаються на застосування математичних моделей ЗЛП?

3. Яка інформація є вихідною для моделювання ЗЛП?

4. Яку інформацію можна отримати в результаті моделювання ЗЛП?

5. Які основні методи рішення задач лінійного програмування?

6. В чому відмінність ЗЛП від задач нелінійного програмування?

7. Які основні висновки можна зробити після рішення задачі лінійного програмування?

1. Складання математичних моделей для задач лінійного програмування.

Фірма має можливість випускати n видів продукції $\Pi_j(j=\overline{1,n})$. Під час її виготовлення використовуються ресурси P_1, P_2 и P_3. Розміри допустимих затрат ресурсів обмежені величинами b_1, b_2 и b_3. Розходи ресурсу *i*-го $(i=\overline{1,3})$ виду на одиницю продукції j-го виду складає a_{ij} одиниць. Ціна одиниці продукції *j*-го виду дорівнює c_j умовних одиниць.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ \hline c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6000 \\ 0.5 & 1 & 5 & 0.5 & 5000 \\ 0.5 & 0.5 & 20 & 0.5 & 9000 \\ \hline 80 & 100 & 300 & 80 & \end{array}\right)$$

Необхідно:

1) Скласти математичну модель задачі, що дозволяє знайти збалансований за ресурсами план випуску продукції, що забезпечить фірмі максимальний прибуток;
2) Проаналізувати результати рішення задачі та надати практичні рекомендації керівництву фірми щодо подальшого розвитку виробництва.

Рішення

Позначим через X_1 , X_2 , X_3-- число одиниць продукції Π_1, Π_2, Π_3, що планується до випуску, а через f -- величину прибутку від реалізації цієї продукції. Тоді, враховуючи значення прибутку від одиниці продукції Π_1=80 у.о., Π_2=100 у.о., Π_3=300 у.о., запишемо сумарну величину прибутку - цільову функцію - в такому вигляді:

$$f = 80X_1 + 100X_2 + 300X_3. \quad (1)$$

Змінні X_1, X_2 , X_3 мають задовільняти обмеженням, що накладаються на розход ресурсів на випуск продукції. Так, витрати ресурсу P_1 на виконання плану (X_1 , X_2 , X_3) складають (X_1 +X_2 +X_3) од., де X_1 - витрати ресурсу P_1 на выпуск X_1 од. продукции Π_1; X_2 - витрати ресурсу P_1 на выпуск X_2 од. продукції Π_2 і т.д. Зрозуміло, що вказана сумма не може перевищувати запас ресурсу P_1 в 6000 од., тобто

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 6000. \quad (2)$$

Аналогічно одержимо обмеження на витрати ресурсів P_2 и P_3:

$$0.5\,X_1 + X_2 + 5X_3 \leq 5000. \quad (3)$$

$$0.5X_1 + 0.5X_2 + 20X_3 \leq 9000. \qquad (4)$$

За смислом задачі змінні X_1, X_2 , X_3 не можуть бути від'ємними числами:

$$X_j \geq 0 \quad (j=1,3) \qquad (5)$$

Співвідношення (1) - (5) складають математичну модель поставленої задачі лінійного програмування.

Таким чином, математично задача зводиться до знаходження числових значень X_1*, X_2*, X_3* змінних X_1, X_2 , X_3 , що задовільнять лінійним нерівностям (2) - (5) та дозволяють досягти максимум лінійної функції (1).

2. Рішення ЗЛП графічним методом.

Фірма випускає два види продукції $П_1$ та $П_2$. Причому фірма може випустити x_1 одиниць продукції $П_1$ та x_2 одиниць продукції $П_2$. За рахунок реалізації фірма отримує прибуток: 2 у.о. від продажу кожної одиниці продукції $П_1$ та 3 у.о. від продажу кожної одиниці продукції $П_2$.

На виготовлення продукції $П_1$ та $П_2$ витрачаються комплектуючі трьох видів: P_1, P_2, P_3. Причому наявність комплектуючих на складі фірми обмежена: $P_1 \leq 100$; $P_2 \leq 360$; $P_3 \leq 120$. На виготовлення одиниці продукції $П_1$ витрачається 1 од. P_1, 6 од. P_2 та 1 од. P_3. На виготовлення одиниці продукції $П_2$ витрачається 1 од. P_1, 3 од. P_2 та 2 од. P_3.

Знайти програму виробництва фірми (x_1^*, x_2^*), що забезпечить максимальний прибуток фірми.

Рішення.

Математична модель задачі буде мати такий вигляд:

Фірма випускає x_1 товарів першого виду та x_2 товарів другого виду.

Цільова функція, що описує прибуток:

$$P = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \qquad (6)$$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 360 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (7)$$

Необхідно знайти јоптимальну програму виробництва (x_1^*, x_2^*).

Графічний метод рішення полягає в тому, що в декартовій площині x_2Ox_1 будуємо області , що відповідають обмеженням (7). Одержимо випуклий багатокутник, що відповідає області допустимих рішень. Тепер треба вибрати таку точку в даній області, щоб P → max.

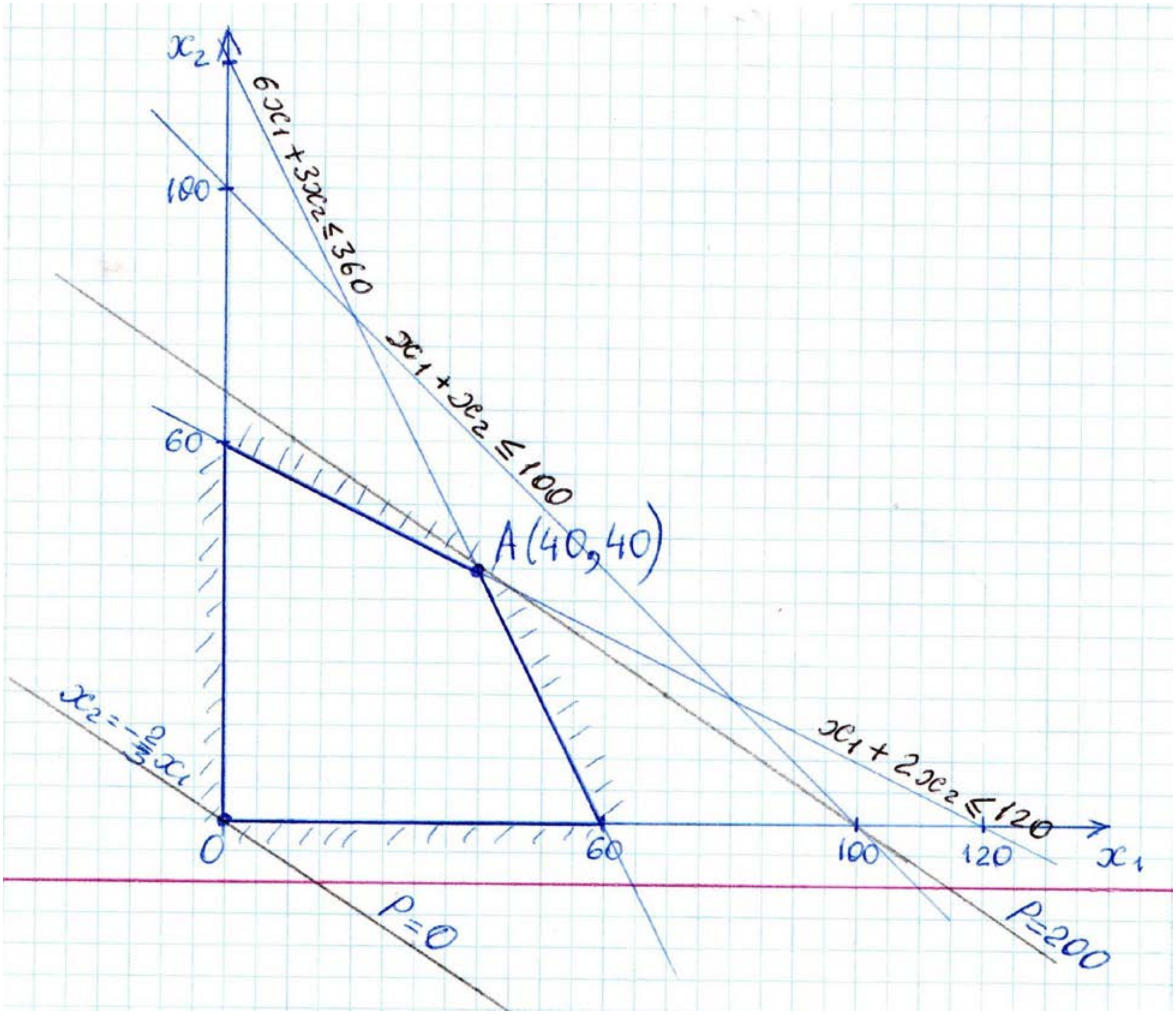

Рис. 1. Графічний метод рішення ЗЛП

На рис. 1 точка А є перетином двох прямих:

$$\begin{cases} 6x_1+3x_2=360 \\ x_1+x_2=120 \end{cases}$$

Таким чином, т. А має координати (40, 40).

Далі через точку О проводимо пряму лінію $2x_1+3x_2=0$. Ця пряма відповідає нульовому прибутку P=0. Тепер робимо паралельний здвиг цієї лінії максимально вверх так, щоб лінія проходила принаймні через одну точку випуклого багатокутника допустимих рішень. В даному випадку лінія буде проходити через т. А (40, 40). Тому програма виробництва з максимальним прибутком буде:

x_1=40, x_2=40. При цьому P=200 у.о.

Зауваження 1. В теорії ЛП доведена теорема, що оптимальна точка буде в одній з вершин багатокутника. При цьому для пошуку оптимальної точки необхідно здійснити умовний перебір вершин багатокутника. Починати треба з точки О(0,0). Далі необхідно рухатись в одну із сусідніх вершин, в якій значення P буде найбільшим. Коли в усіх сусідніх вершинах значення цільової функції P буде менше ніж в поточній вершині, то поточна вершина і буде оптимальною точкою, в якій значення P буде максимальним.

Зауваження 2. Графічним методом доцільно рішати задачі на площині (коли два види продукції). У випадку, коли в задачі три види продукції, то задача рішається в тривимірному просторі. За рахунок обмежень можна отримати випуклий багатогранник, а пошук оптимума також здійснюється за рахунок умовного перебору вершин багатогранника. Задачі в 4, 5, 6 та більш вимірному просторі не вирішуються графічним методом. В такому випадку краще застосовувати симплекс-метод.

3. Самостійне рішення задач ЛП графічним методом.

Розв’язати геометрично (або упевнитись у нерозв’язності) наступні задачі лінійного програмування:

Варіант 1. $F = 7x_1 + 6x_2 \to \max$ $2x_1 + 5x_2 \ge 10$ $5x_1 + 2x_2 \ge 10$ $x_1 \le 6$ $x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 4.** $F = x_1 + 2x_2 \to \max$ $2x_1 + x_2 \le 14$ $-3x_1 + 2x_2 \le 9$ $3x_1 + 4x_2 \ge 27$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 7.** $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max$ $3x_1 - 2x_2 \ge -6$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 \le 3$ $x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0.$
Варіант 2. $F = 3x_1 - 2x_2 \to \max$ $2x_1 + x_2 \le 11$ $-3x_1 + 2x_2 \le 10$ $3x_1 + 4x_2 \ge 20$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 5.** $F = 7x_1 - 2x_2 \to \max$ $5x_1 - 2x_2 \le 3$ $x_1 + x_2 \ge 1$ $-3x_1 + x_2 \le 3$ $2x_1 + x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 8.** $F = 2x_1 - 4x_2 \to \max$ $8x_1 - 5x_2 \le 16$ $x_1 + 3x_2 \le 2$ $2x_1 + 7x_2 \ge 9$ $x_1, x_2 \ge 0.$
Варіант 3. $F = 5x_1 - 3x_2 \to \min$ $3x_1 + 2x_2 \ge 6$ $2x_1 - 3x_2 \ge -6$ $x_1 - x_2 \le 4$ $4x_1 + 7x_2 \le 28$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 6.** $F = 2x_1 + x_2 \to \max$ $x_1 - 2x_2 \ge 4$ $5x_1 + 2x_2 \ge 10$ $4x_1 - 3x_2 \le 12$ $7x_1 + 4x_2 \le 28$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 9.** $F = x_1 + 2x_2 \to \max$ $5x_1 - 2x_2 \le 4$ $x_1 - 2x_2 \ge -4$ $x_1 + x_2 \ge 4$ $x_1, x_2 \ge 0.$

Варіант 10. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max$ $x_1 - 4x_2 \le 4$ $3x_1 + 2x_2 \le 6$ $-x_1 + x_2 \le 1$ $x_1 + 2x_2 \ge 2$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 14.** $F = 7x_1 + x_2 \to \max$ $x_1 + x_2 \le 14$ $3x_1 - 5x_2 \le 15$ $5x_1 + 3x_2 \ge 21$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 18.** $F = 2x_1 + x_2 \to \max$ $x_1 - x_2 \ge 4$ $x_1 + x_2 \ge 10$ $4x_1 - x_2 \le 12$ $7x_1 + x_2 \le 7$ $x_1, x_2 \ge 0.$
Варіант 11. $F = 2x_1 - x_2 \to \max$ $x_1 - x_2 \ge -3$ $6x_1 + 7x_2 \le 42$ $2x_1 - 3x_2 \le 6$ $x_1 + x_2 \ge 4$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 15.** $F = 7x_1 - x_2 \to \min$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $5x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 + 5x_2 \ge 5$ $0 \le x_1 \le 4$ $0 \le x_2 \le 4.$	**Варіант 19.** $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max$ $3x_1 - 2x_2 \ge -6$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 \le 3$ $x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0.$
Варіант 12. $F = 5x_1 + x_2 \to \max$ $x_1 + 7x_2 \ge 7$ $-2x_1 + x_2 \le 6$ $2x_1 + 5x_2 \ge 10$ $5x_1 + 2x_2 \ge 10$ $7x_1 + x_2 \ge 7$ $x_1 \le 6$ $x_2 \le 7$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 16.** $F = x_1 + x_2 \to \min$ $3x_1 + x_2 \ge 8$ $x_1 + 2x_2 \ge 6$ $x_1 - x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 20.** $F = 2x_1 - 4x_2 \to \max$ $8x_1 - 5x_2 \le 16$ $x_1 + 3x_2 \ge 2$ $2x_1 + 7x_2 \le 9$ $x_1, x_2 \ge 0.$
Варіант 13. $F = x_1 - x_2 \to \max$ $-x_1 + x_2 \ge 8$ $8x_1 + 5x_2 \le 80$ $x_1 - 2x_2 \le 2$ $x_1 + 4x_2 \ge 4$ $x_1, x_2 \ge 0.$	**Варіант 17.** $F = x_1 + 3x_2 \to \max$ $-x_1 + x_2 \le 3$ $4x_1 + 3x_2 \le 20$ $x_1, x_2 \ge 0.$	

Заключення

Широкий клас реальних оптимізаційних задач можна звести до задач лінійного програмування. Задачі ЛП мають лінійну цільову функцію та лінійні обмеження. Зазвичай на змінні накладаються вимоги невід'ємності. Такі задачі найбільш розповсюджені в економіці, в управлінні підприємствами, при обгрунтуванні прийняття рішень, тощо.

Основним методом рішення ЗЛП є симплекс-метод. Даний метод є аналітичним методом, він заснований на методі Жордано-Гауса, за яким можна рішати системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Симплекс-метод дозволяє за припустиме число ітерацій знайти оптимальні значення вектору змінних параметрів. Коли змінних параметрів

Завідувач кафедри вищої математики,
математичного моделювання та фізики
кандидат фізико-математичних наук, доцент І.В. Замрій