МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Практичне заняття № 9

Тема. Аналітичні методи оптимізації першого порядку

План проведення заняття
Вступ.

1. Знаходження похідних функцій багатьох змінних.
2. Знаходження екстремумів функцій.
3. Знаходження найбільшого та найменшого значень області.

Заключення.

Завдання на СРС:
Виконати приклад 1 і приклад 2 із точністю ε=0,01.

Вступ

До методів оптимізації 1-го порядку відносяться аналітичні та чисельні методи, що використовують значення першої похідної від цільової функції.

Для оптимізації функцій однієї змінної $y = f(x)$, аналітичний метод оптимізації вивчався в курсі Вищої математики. Він полягає в тому, що функція в точці екстремуму має нульову похідну. Тому для пошуку екстремуму треба взяти похідну, прирівняти до нуля, рішити отримане рівняння та найти точу x^*, в якій функція приймає екстремум. Для того, щоб визначити тип екстремуму: максимум чи мінімум, треба взяти другу похідну та перевірити її знак в точці x^*. Якщо вона додатна, то екстремуму є мінімумом, якщо від'ємна – то максимумом.

У випадку умовної оптимізації, тобто пошуку екстремуму на заданому відрізку, треба перевіряти значення функції в локальних екстремумах в середині відрізка та значення функції на кінцях відрізка.

Сьогодні ми розглянемо аналітичні методи оптимізації аналогічні вищезазначеним, але для функцій кількох змінних. Саме такі функції найчастіше використовуються у практичній діяльності інженерів, менеджерів, бізнесменів та інших спеціалістів різних галузей.

Наприклад, температура повітря T залежить від часу її вимірювання t та координат x, y, z точки M, в якій вимірюють температуру. Отже, температура залежить від чотирьох змінних тобто $T = f(x, y, z, t)$

1. Знаходження похідних функцій багатьох змінних.

Завдання 1.1. Знайти всі похідні другого порядку від функції:

a) $z=\dfrac{2x}{y+1}$; b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; c) $z=2x^2y-3y^2$;

d) $z=5x^3+3y^4+10$; e) $z=x\ln y-y^2\ln x$; f) $z=e^{2x+3y}$;

g) $z=(3x+2y)^5$.

Приклад виконання: $z=\frac{2x}{y+1}$

$z'_x=\frac{2}{y+1}$ $z''_{xx}=0$

$z'_y=-\frac{2x}{(y+1)^2}$ $z''_{yy}=\frac{4x}{(y+1)^3}$

$z''_{xy}=-\dfrac{2}{(y+1)^2}$

Завдання 1.2. Знайти похідні

a) Знайти похідні z'''_{yxx} та $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x(\partial y)^3}$ – функції $z=3x^4y^5$.

b) Знайти похідні z'''_{xyy} та z'''_{xxy} – функції $z=xe^{2x+y^2}$.

Приклад виконання: $z=3x^4y^5$

$z'_y=15x^4y^4$; $z''_{yx}=60x^3y^4$; $z'''_{yxx}=180x^2y^4$

$z'_x=-12x^3y^5$; $z''_{xy}=60x^3y^4$; $z'''_{xyy}=240x^3y^3$; $z^4_{xy^3}=720x^3y^2$.

Завдання 1.3. Для заданої функції знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ та градієнт в точці M_0

a) $u = \ln\sqrt{2x^2+2y^2}$; $\vec{l} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_0(1,-1)$;

b) $z = 2x^2 - 3y^2$; $\vec{l} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_0(0,-2)$;

c) $u = x^3 + y^3 - 3xy$; $\vec{l} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_0(2,1)$;

d) $u = 3x^2 + 2y^3 + z^2$; $\vec{l} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_0(2,-2,1)$.

Приклад виконання:

Частинну похідну функції $u = f(x,y,z)$ **за напрямом вектора** $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ знаходять за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2)$$

$$\text{де } \cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|};\ \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|};\ \cos\gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}.$$

Напрям найбільшої швидкості зміни функції $u = f(x,y,z)$ співпадає з напрямом вектора (його називають ***градієнтом функції*** u**)**

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}, \qquad (3)$$

а величина цієї найбільшої швидкості дорівнює довжині цього вектора, тобто

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \qquad (4)$$

$u = \ln\left(\sqrt{2x^2+2y^2}\right)$;

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$;

$$|l| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$\cos\alpha = \frac{l_x}{|l|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \alpha = 30°$

$\cos\beta = \frac{l_y}{|l|} = \frac{1}{2}$; $\quad \beta = 60°$

$grad\ u = \frac{x}{x^2+y^2} \times \cos\alpha + \frac{y}{x^2+y^2} \times \cos\beta = \frac{\sqrt{3}x}{2(x^2+y^2)} + \frac{1}{2(x^2+y^2)}$

Завдання 1.4. Знайти повний диференціал функції

a) $z = e^{\frac{x}{y}}$; b) $u = xy + 2yz - z^2x$; c) $u = 3x^2 + 4y^2 + z^2$;

d) $w = x + 2y + 5\left(x^2 + y^2 - 3\right)$; e) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}$;

f) $w = \sqrt{y^2 - 4x}$; g) $u = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$.

Приклад виконання:

$u = xy + 2yz - z^2x$

$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y + \frac{\partial u}{\partial z}\partial z$

$\frac{\partial u}{\partial x} = y - z^2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2y - 2zx$;

Відповідь:

$\partial u = (y - z^2)\partial x + (x + 2z)\partial y + (2y - 2zx)\partial z$

2. Знаходження екстремумів функцій.

Завдання 2.1. Знайти екстремуми функцій

a) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; b) $z = e^{x-y} \cdot \left(x^2 - 2y^2\right)$;

c) $z = e^{\frac{x}{2}} \cdot (x + y^2)$; d) $u = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$;

e) $w = x^3 + y^3 - 3xy$; f) $u = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

g) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$; h) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Приклад виконання:

$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

$a_{11} = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9$; $a_{22} = \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6$;

$a_{12} = \frac{\partial z}{\partial x \partial y} = -1$<0

$a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2 = 2 \times 2 - 1 = 3 > 0;$

$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0, \\ -x + 2y - 6 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4, \\ y = 1. \end{cases}$

Відповідь: т(-4;1) – мінімум.

Завдання 2.2 Знайти умовні екстремуми функцій

a) $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$;

b) $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $3x + y - 2 = 0$;

c) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$;

d) $w = xy^2$ при $x + 2y = 1$;

e) $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Приклад виконання:
$\omega = xy^2; \qquad x + 2y = 1;$
$L = xy^2 + \lambda(x + 2y - 1);$

$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + \lambda = 0; \\ 2xy + 2\lambda = 0; \\ x + 2y - 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} \lambda = -y^2; \\ 2xy + 2(y^2) = 0; \\ x + 2y - 1 = 0; \end{cases} \qquad 2y(1 - 2y) - 2y^2 = 0;$

$2y - 4y^2 - 2y^2 = 0;$
2y-$6y^2 = 0;$
$2y(1 - 3y) = 0;$
$y = 0 \qquad y = \frac{1}{3}$
$x = 1 \qquad x = \frac{1}{3}$

Маємо 4 точки: $\mathrm{M}_1(1;0), \mathrm{M}_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Перевіримо дані точки

$$\Delta(M_k)=\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_k) & \varphi'_y(M_k) \\ \varphi'_x(M_k) & L''_{xx}(M_k) & L''_{xy}(M_k) \\ \varphi'_y(M_k) & L''_{xy}(M_k) & L''_{yy}(M_k) \end{vmatrix}$$

$\varphi'_x = 1;$
$\varphi'_y = 2$
$L''_{xx} = 0 \qquad L''_{yy} = 2x \quad L''_{xy} = 2y$

$$\Delta M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2y \\ 2 & 2y & 2x \end{vmatrix} = -(2x-4y)+2(2y) = 8y-2x$$

т$\mathrm{M}_1(1;0)$ – min бо $\Delta M < 0$
т$\mathrm{M}_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$–, *max* бо $\Delta M > 0$

3. Знаходження найбільшого та найменшого значень області.

Завдання 3. Знайти найбільше та найменше значення функції в області *D*

a) $z = 1 + x + 12y;\ D = \left\{x \ge 0;\ y \ge 0;\ x + y \le 1\right\};$

b) $z = x^2 y;\ D = \left\{x^2 + y^2 \le 1\right\}.$

Приклад виконання:

Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в трикутнику, обмеженому лініями $x = 0,\ y = 0;\ x + y = 6.$

Розв'язування. Спочатку знайдемо критичні точки всередині області:

$$z'_x = 2xy(4-x-y) - x^2 y = xy(8-3x-2y),$$
$$z'_y = x^2(4-x-y) - x^2 y = x^2(4-x-2y).$$

Згідно з необхідними умовами існування екстремуму функції двох змінних маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} xy(8-3x-2y)=0 \\ x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}.$$

Всередині області $x \ne 0$ та, $y \ne 0$ тому

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

В критичній точці $M_1(2,\ 1)$ маємо $z(2,\ 1) = 4.$

Тепер проведемо дослідження функції на межі трикутника. На прямій $x+y=6$ змінна $y=6-x$ і функція z приймає вигляд

$$z=x^2(6-x)\cdot(4-x+x-6)=2x^2(x-6),\ x\in[0,\ 6].$$

Знайдемо найбільше та найменше значення цієї функції однієї змінної x на замкненому відрізку $[0,6]$: $z'=6x^2-24x$.

Із рівності $z'=0$ знаходимо: $6x(x-4)=0$, звідси випливає, що $x_1=4$ та $x_2=0$. Отже, $z(4)=-64$. При $x=0$ та $x=6$: $z(0)=0$, $z(6)=0$.

На прямій $y=0$ маємо $z=0$.

Отже, задана функція Z має найбільше значення в точці $M_1(2,\ 1)$ всередині області, найменше значення – в точці $M_2(4,\ 2)$ на межі області.

Найбільше значення $\max\limits_{\bar{D}} z=z(2,\ 1)=4$;

Найменше значення $\min\limits_{\bar{D}} z=z(4,2)=-64$.

Час виконання завдання 1 година.

Заключення

В питаннях управління підприємствами зв'язку, а також в інших галузях, в бізнесі, менеджменті, аудиті використовуються функцій кількох змінних.

Сьогодні ми вивчили функції багатьох змінних вигляду $f(x,\ y,\ z,\ t)$, способи їх задання, області визначення та значень, границю та неперервність, похідні функції та застосування їх до розв'язування різних задач. А саме, як визначати максимальні та мінімальні значення функцій багатьох змінних вигляду $f(x,\ y,\ z,\ t)$, а також вирішувати задачі оптимізації, коли цільова функція задана як функція багатьох змінних.

Вивчені теоретичні положення складають основу аналітичних методів оптимізації 1-го порядку. Вони можуть бути застосовані тільки у випадку, коли цільова функція задана аналітично, є неперервною в заданій області та має першу частинну похідну по всім аргументам.

Завідувач кафедри вищої математики,
математичного моделювання та фізики
кандидат фізико-математичних наук, доцент І.В. Замрій