$$\int_0^1 x^x\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}$$

$$\int_0^x f(z)\frac{dz}{x}$$

С.А. Зюбин, Т.В. Тарбокова, В.М. Шахматов

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебники Томского политехнического университета

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ

Содержание

Введение

Задача вуза, как известно, состоит не только в том, чтобы передать студенту определенную сумму знаний, но и в том, чтобы научить его творчески мыслить, подготовить к жизни и практической работе в будущих условиях.

Главным действующим лицом в университетском образовании является студент. Задача повышения качества обучения и воспитания неразрывно связана с проблемой активизации его познавательной деятельности. Студент должен стать активным участником образовательного процесса. Важные резервы повышения качества обучения, качества знаний студентов, развития творческого мышления заключаются в совершенствовании учебного процесса, который невозможен без активной учебной деятельности студентов. Практика показывает, что научить творческому характеру мышления с помощью таких традиционных форм учебного процесса, как лекции, практические и лабораторные занятия, не всегда представляется возможным. Необходимым условием формирования творческого характера мышления студента является его непосредственное участие в данном виде творчества.

Современный школьник нередко по-настоящему прикасается к творчеству через систему внеклассных мероприятий: кружки, факультативы и, конечно, олимпиады. Придя в вуз, он иногда встречает эмоционально обедненный и в чем-то достаточно рутинный учебный процесс. Тогда студент может забыть о творчестве на два – три младших курса, пока не будет накоплена база для профессионального творчества (особенно это типично для втузов, где математика лишь общеобразовательный предмет). Но природа не терпит пустоты, и вектор творческих устремлений студента направляется на другие виды деятельности, – и к старшим курсам студент для науки может быть потерян.

Проблема загрузки способного первокурсника, привития вкуса к углубленному изучению предметов, вкуса к научному исследованию, постоянной работе над собой не может решаться только в рамках аудиторных занятий: нужна четкая отлаженная система внеаудиторной работы, тесно переплетающаяся с аудиторным учебным процессом. Требуется создание постоянно действующей системы внеаудиторной работы как элемента учебной деятельности кафедр, ориентированной на работу не с единицами, а с десятками и сотнями студентов. Такой системой является вузовское олимпиадное движение.

Вузовское олимпиадное движение необходимо уже хотя бы потому, что существуют школьные олимпиады. И в этом частном факте: школьное образование – школьные олимпиады, высшее образование – вузовские олимпиады, наглядно проявляется непрерывность и преемственность всей системы образования в целом.

Чуть более 30 лет прошло с начала проведения ежегодных Всесоюзных (Всероссийских) олимпиад «Студент и научно-технический прогресс». Эта олимпиада включает в себя предметные олимпиады, конкурсы курсовых и дипломных работ, смотры-конкурсы результатов производственных и педагогических практик, конкурсы по специальности. В частности, олимпиада по математике предусматривает несколько туров, начиная с внутривузовского и кончая Всероссийским. Заключительные Всероссийские туры проводятся отдельно для студентов математических специальностей и для студентов, обучающихся на специальностях, где математика является важным, но не профилирующим предметом (здесь участвуют, в основном, студенты втузов). Очевидно, что существенно изменилась внеаудиторная работа при математических кафедрах большинства вузов страны, появились подготовительные формы такой работы: кружки, семинары по решению нестандартных задач. Тем самым создана система непрерывной творческой подготовки студентов по математике в масштабах всей страны.

Проблема творчества в системе современного образования России, как и в любой другой стране, несомненно, актуальна. И решить эту проблему успешно помогает олимпиадное движение. Математическую олимпиаду нельзя рассматривать как просто усложненную контрольную работу. Целью олимпиады, кроме повышения интереса участников к изучению математики, является выявление особо глубоких и прочных знаний, умений, навыков, способности к неалгоритмизированному мышлению, нестандартности подходов, реактивности мышления. Поэтому ценность олимпиады для участников заключается, как это ни странно, в тех задачах, с которыми они не справились. Именно нерешенные задачи стимулируют углубленное изучение курса, напряженный поиск решений, именно они позволяют реально оценить собственные силы и возможности. Таким образом, олимпиада свою цель выполнила, если ее участник понял, что к олимпиаде нужно готовиться. Понял и предпринял определенные шаги в этом направлении.

Издание перед олимпиадой сборника «подготовительных задач» является старой доброй традицией математического олимпиадного движения в России, так как для успешного участия в олимпиадах требуется определенная предварительная подготовка с использованием специальной литературы. К сожалению, этой специальной литературы, призванной оказать студенту помощь в подготовке к олимпиаде, катастрофически не хватает. Этот пробел в какой-то степени устраняет данный сборник олимпиадных задач по высшей математике, который позволит приобщить как можно больше студентов к решению задач проблемного характера, оценить свои возможности, что особенно важно для студентов первого курса. Основу сборника составляют задачи (их более трехсот) из всех основных областей математики, предлагавшиеся студентам первого и старших курсов на внутривузовских (ТГПУ, ТПУ) и областных (г. Томск) турах олимпиады по математике как предмету и как специальности за последние пять-семь лет. Кроме задач для самостоятельного решения, в учебном пособии приведено около пятидесяти задач с решениями или указаниями. Задачи на областной тур составлялись или подбирались преподавателями кафедр математики ТГУ, ТПУ, ТГАСУ, ТУСУРа, ТГПУ, за что составители данного сборника выражают им свою признательность.

Данный задачник может стать полезным для самостоятельной работы студентов, для кружковых и семинарских занятий по решению нестандартных задач, в ходе подготовки к олимпиадам. Отдельные задачи могут быть использованы преподавателями на лекциях и практических занятиях, при комплектовании индивидуальных заданий.

Приглашаем Вас к чтению этого сборника, а вернее, к работе с ним, так как для того, чтобы научиться решать задачи, их нужно решать!

А предлагаемые задачи как нельзя лучше соответствуют данной цели.

Дерзайте и удачи Вам!

Составители.

Внутривузовский тур

ТПУ, 1998 год, 1 курс

1. Вычислите определитель Δ^{1998}, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 & c \\ c & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & c & 0 & a \end{vmatrix},$$

если a, b, c - разные корни уравнения $x^3 + px + q = 0$.

2. Найдите кратчайшее расстояние между графиками функций $y = e^{1998x}$ и $y = \dfrac{\ln x}{1998}$.

3. Докажите существование предела $\sqrt{1998 + \sqrt{1998 + \sqrt{1998 + \ldots}}}$ и вычислите его.

4. Докажите, что $\dfrac{1}{1998} < \ln\dfrac{1998}{1997} < \dfrac{1}{1997}$.

5. Дана функция $y = \left(x^{1998} - 1\right)^{1998}$. Найдите $y^{(1998)}(1)$.

6. Покажите, что при $x \to \infty$ бесконечно большие функции $\int\limits_0^x e^{t^{1998}} dt$ и $\dfrac{e^{x^{1998}}}{1998x^{1997}}$ эквивалентны.

7. Докажите неравенство $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{1998^2} < 1$.

8. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные и дифференцируемые на отрезке [1997, 1998] функции. Докажите, что у графика функции

$$y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(1997) & g(1997) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(1998) & g(1998) \end{vmatrix}$$

есть хотя бы одна горизонтальная касательная.

9. Докажите, что $e^{-999^2} < \int\limits_0^1 e^{1998^2\left(t^2-t\right)}dt < 1$.

10.Вычислите значение выражения $\sqrt{\underbrace{111...1}_{1998\ раз}-\underbrace{222...2}_{999\ раз}}$.

ТПУ, 1999 год, 1 курс

1. Вычислите определитель n – го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x & \dots & x & x \\ y & 1 & x & x & \dots & x & x \\ y & y & 1 & x & \dots & x & x \\ y & y & y & 1 & \dots & x & x \\ y & y & y & y & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & y & \dots & y & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Докажите, что для треугольной пирамиды высоты H, имеющей взаимно перпендикулярные боковые ребра a, b, c, справедливо соотношение: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{H^2}$.

3. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}\left(A^n-E\right)\right)$, где

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Докажите, что последовательность $2,\quad 2+\frac{1}{2},\quad 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\dots$

имеет предел. Найдите предел данной последовательности.

5. Студенты иногда используют ошибочный прием вычисления производной дроби, полагая, что $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$. Для каких функций это действительно справедливо?
6. Исследуйте на непрерывность функцию $y = \lim\limits_{n\to\infty}[x\ arctg\ (n\ ctgx\ )]$.
7. На параболе $y = x^2$ найдите точку, нормаль в которой отсекает от параболы сегмент наименьшей площади.
8. Постройте график функции $y = \pm x\sqrt{100 - x^2}$.

ТПУ, 2000 год, 1 курс

1. Последовательность $\{a_k\}$ задана первыми двумя членами a_1=1998, a_2=1999 и условием $a_{k+2} = a_{k+1}/a_k$ $(k = 1,2,3,...;\ k \in N)$. Найдите a_{2000}.
2. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2 \pi\sqrt{n^2 + n}$.
3. Пусть непрерывная функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (0,1), причем $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Докажите, что существуют такие числа $a, b \in (0, 1)$, что $a \neq b$ и $f'(a)\cdot f'(b) = 1$.
4. Вокруг эллипса описаны два различных прямоугольника. Докажите, что их диагонали равны.
5. Найдите функции $f(x)$, удовлетворяющие тождеству: $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \quad (x \neq 1)$.
6. Что больше: $1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + ... + 1/\sqrt{36}$ или $1 + 1/\sqrt[3]{2} + 1/\sqrt[3]{3} + ... + 1/\sqrt[3]{27}$?
7. Вычислите определитель n – го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_{22}+1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & a_{nn}+1 \end{vmatrix}.$$

8. Докажите тождество Лагранжа:

$$([a,\ b],[a,\ b]) = |\bar{a}|^2 \cdot |\bar{b}|^2 - (a,\ b)^2.$$

ТПУ, 2001 год, 1 курс

1. Какой наибольший объем может иметь правильная четырехугольная пирамида, длина бокового ребра которой равна1 см?

2. Найдите угол между поверхностями $x^2+y^2+z^2-2ax=0$ и $x^2+y^2+z^2-2by=0$ в точках их пересечения.

3. Постройте графики функций $f(x)=\pm\sqrt{x^2(100-x^2)}$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\ldots+10x_{10}=55 \\ x_2+2x_3+3x_4+\ldots+10x_1=55 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{10}+2x_1+3x_2+\ldots+10x_9=55. \end{cases}$$

5. Найдите k, если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k-(n-1)^k}{n^{2000}}=2001$, где k - натуральное число.

6. Сравните функции $f(x)=(1+\frac{1}{\sqrt{x}})^{-x}$ и $g(x)=\exp(\frac{1}{2}-\sqrt{x})$ при $x\to\infty$.

7. Найдите $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{100}$.

8. Постройте кривую, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $\rho = \dfrac{3}{1-2\cos\varphi}$.

ТПУ, 2002 год, 1 курс

1. Дана квадратная матрица размером $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ddots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

При каком n определитель матрицы равен **2002**.

2. Дана последовательность $\{a_n\}$: $a_n = \alpha^n + \beta^n$, где α и β корни уравнения $Ax^2 + Bx + C = 0$. Найдите A, B и C, если $a_{n+2} = 2002a_{n+1} + 2001a_n$.

3. В трехмерном пространстве укажите все пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при которых система

$$\begin{cases} [\vec{x}, \vec{a}] = \vec{A}, \\ (\vec{x}, \vec{b}) = B, \end{cases}$$

имеет решения, и найти эти решения ($\vec{A}$ – данный вектор, B – данное число).

4. Докажите неравенство

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{2003001}<2.$$

5. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы на отрезке $[2001,2002]$. Докажите, что график функции

$$y=\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ f(2001) & \varphi(2001) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) \\ f(2002) & \varphi(2002) \end{vmatrix}$$

имеет по крайней мере одну горизонтальную касательную.

6. Найдите наименьшее целое b, при котором уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2, связанных условием $x_1 \cdot x_2 = 1$.

7. Вычислите предел $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2m}(n!\,\pi x)\right)$.

8. Найдите кратчайшее расстояние между графиками функций

$$y=e^{2002x} \quad \text{и} \quad y=\frac{\ln x}{2002}.$$

ТПУ, 2003 год, 1 курс

1. На координатной плоскости расположен квадрат $ABCD$, вершины A и B которого лежат на кривой $y=x^2$, а вершины C и D – на линии $y=4-x$. Найдите длину стороны квадрата.
2. Решите задачу Тартальи: разделить число восемь на две такие части, чтобы произведение их произведения на их разность было максимальным. Как разделить подобным образом любое вещественное число?

3. окажите, что при любом целом n число
$2003+n^5+n^4-n^3-n^2$ дает при делении на 6 остаток 5.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на промежутке $(0,2]$, если функция

$$f(x)=\min\left(\frac{9}{4}-\frac{x}{2};\ x^2-x+\frac{4}{3}\right).$$

5. Докажите, что

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \le \sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}.$$

В каком случае справедливо равенство?

6. Вычислите суммы $S_n=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$ и
$Q_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)$.

7. Вычислите определитель $\Delta=\begin{vmatrix} x_1^2 & 1 & 1 \\ 1 & x_2^2 & 1 \\ 1 & 1 & x_3^2 \end{vmatrix}$, где x_1, x_2, x_3 – различные корни многочлена $P(x)=8x^3-4x+1$.

8. Найдите вещественную функцию $f(x)$, если для $\forall x$
$2f(x+2)+f(-x-1)=(x+2)^2$

ТПУ, 2004 год, 1 курс

1. В матрице A столбцы являются попарно ортогональными векторами. Докажите, что абсолютная

величина определителя матрицы A равна произведению длин векторов-столбцов.

2. Докажите, сто уравнение $x^4+5x^3+6x^2-4x-16=0$ имеет ровно два решения.

3. Вычислите без таблиц тригонометрических функций и калькулятора $\sin 18^{\circ}$.

4. Вокруг эллипса описаны два различных прямоугольника. Докажите, что их диагонали равны.

5. Площади четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны S и S' соответственно. Докажите, что если внутри четырехугольника $ABCD$ существует точка O, для которой $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{D'A'}$, то $S=2S'$.

6. Пусть $a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$, $n\in\mathbb{N}$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

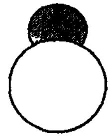
7. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(tgx)-\sin(\sin x)}{tgx-\sin x}$.

8. Последовательность $\{a_n\}$ задается так: $a_1=1$, $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$ для каждого $n=1,2,3,\ldots$. Найдите число, которое меньше всех членов последовательности с четными номерами и одновременно дольше всех её членов с нечетными номерами.

ТПУ, 2005 год, 1 курс

1. Найдите зависимость площади заштрихованной фигуры от расстояния между центрами окружностей. R_2 – радиус большей окружности, R_1 – радиус меньшей окружности, t - расстояние

между центрами.



2. Докажите, что если в гармоническом ряде $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ отбросить все слагаемые, в знаменателе которых хотя бы один раз встречается цифра 7, то получившийся ряд станет сходящимся.

3. Вычислите интеграл: $\iint\limits_D \frac{\cos(x^2y-y^2x)\sin(x^2y+y^2x)}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$,

где $D\cdot R^2 \geq x^2+y^2$.

4. Известно, что дифференциальное уравнение $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ является уравнением в полных дифференциалах, а функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные по x и y, являются однородными нулевой степени однородности. Докажите, что $u(x,y)=x\,P(x,y)+y\,Q(x,y)=C$ есть общее решение уравнения.

5. Выбирают наудачу один из $n!$ членов разложения определителя n - го порядка. Какова вероятность P_n при $n \to \infty$, что он не содержит элементов главной диагонали?

6. Найдите кривую, у которой длина отрезка касательной между осями равна a.

7. При каких значениях параметров a, b система уравнений

$$\begin{cases} |z-i|=a, \\ z\cdot z^* + 2(a^2+b^2)|\,z\,| + (a^2-b^2)^2 = 0 \end{cases}$$

имеет решение?

8. Самолет движется на высоте H над поверхностью земли по прямой с постоянной скоростью V (кривизной земли пренебречь). С постоянной скоростью $U > V$ его преследует самонаводящаяся ракета, которая вылетает в момент времени, когда самолет пролетает прямо над ракетой. Ракета постоянно держит курс на самолет. За какое время ракета собьёт самолет?

ТПУ, 1998 год, старшие курсы

1. Вычислите интеграл $J = \int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + 1998 x)dx$.

2. Найдите сумму ряда $1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$.

3. Отыщите первообразную функцию неопределённого интеграла $\int \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2} dx$.

4. Найдите уравнение кривой $y = f(x)$, если площадь, заключённая между осью OY, этой кривой и перпендикуляром, опущенным из любой точки M кривой на ось ординат, равна 1/3 площади прямоугольника, образованного перпендикулярами из этой точки M на оси координат и отрезками осей координат от начала координат до точек пересечения с ними перпендикуляров.

5. Докажите, что
$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\exp(-1998x^2) - \exp(-1997x^2)}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1997}{1998}.$$

6. Известно, что знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Докажите истинность (или ложность) следующих высказываний: а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ сходится.

7. Луг, имеющий форму квадрата со стороной a, равномерно покрыт травой с плотностью ρ. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать сено в центр луга, если работа по транспортировке груза массой m на расстояние x равна γmx $(0<\gamma<1)$?
8. Хозяин бежит по кругу радиуса R со скоростью V. Собака, находящаяся в центре круга, начинает бежать к хозяину с его же скоростью так, что она всегда находится на прямой, соединяющей хозяина с центром круга. В какой момент времени собака догонит хозяина?
9. Вычислите интеграл $J=\int_0^{\pi} tg(x+ia)dx$.
10. Три человека A, B и C сходятся в трехсторонней дуэли. Известно, что для A вероятность попасть в цель равна 0.3, для C – 0.5, а для B – 1. Дуэлянты могут стрелять в любого противника по выбору. Первым стреляет A, вторым – B, затем – C и т.д. в циклическом порядке (раненый выбывает из дуэли), пока не останется один человек. Какой должна быть стратегия A и почему?
11. Найдите решение задачи Коши:
$$(y')^2-(y+x^2)y'+x^2y=0,\quad y(1)=1.$$

ТПУ, 1999 год, старшие курсы

1. Тяжелая цепь длины l, наполовину свисающая со стола, сползает вниз под действием силы тяжести. Коэффициент трения равен k. Найдите время, за которое вся цепь сползёт со стола. При каком значении k цепь не начнёт сползать?
2. Докажите неравенство $\int_0^1 \frac{z\,dz}{\cos z}<\ln 2$.
3. Если кирпичи класть друг на друга, сдвигая каждый в одном и том же направлении относительно предыдущего, но так, чтобы они не

падали, получится изогнутый “козырёк”. Какова его максимальная ширина?

4. Докажите, что если оси двух пересекающихся парабол перпендикулярны, то четыре точки пересечения принадлежат одной окружности.
5. Вся плоскость случайным образом раскрашена в два цвета. Можно ли найти на ней:

   а) две точки одинакового цвета, удалённые друг от друга ровно на один метр;

   б) две точки разного цвета, удалённые друг от друга ровно на один метр?

6. На странице книги печатный лист должен занимать S квадратных сантиметров. Поля сверху и снизу должны быть по a сантиметров, а справа и слева - по b сантиметров. Вычислите наиболее экономные размеры бумаги.
7. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)dz$.
8. При каких условиях система n обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка может быть сведена к одному дифференциальному уравнению n – го порядка?

ТПУ, 2000 год, старшие курсы

1. Найдите сумму n первых членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,e^{k-1}$.
2. Найдите область аналитичности и особые точки функции $f(z)$, заданной рядом $f(z)=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^{2^k}$.
3. Найдите функции $f(x)$, удовлетворяющие тождеству $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$, $(x\neq 1)$.

4. Докажите, что комплексные числа a и b удовлетворяют условию $a^2 = 2b \neq 0$ тогда и только тогда, когда корни многочлена $x^2 + ax + b$ образуют на комплексной плоскости две вершины равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого вершина прямого угла расположена в начале координат.

5. Найдите представление функции $f(x) = \int\limits_x^{\infty} t^{-1} e^{x-t}\,dt, \quad x > 0$, рядом Тейлора по степеням $1/x$. Какова область сходимости полученного ряда? Исследуйте поведение остатка ряда $r_n(x)$ при $x \to \infty$ в соответствующей формуле Тейлора.

6. Какова вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + 2bx + c = 0$ вещественны?

7. Вычислите интеграл $\int\limits_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$, взятый по отрезку винтовой линии $x = a\cos,\ y = a\sin\varphi,\ z = \dfrac{h}{2\pi}$ от точки $A(a,0,0)$ до точки $B(a,0,h)$.

8. Решите уравнение $y^2 (y^{|})^2 - 2xyy^{|} + 2y^2 - x^2 = 0$.

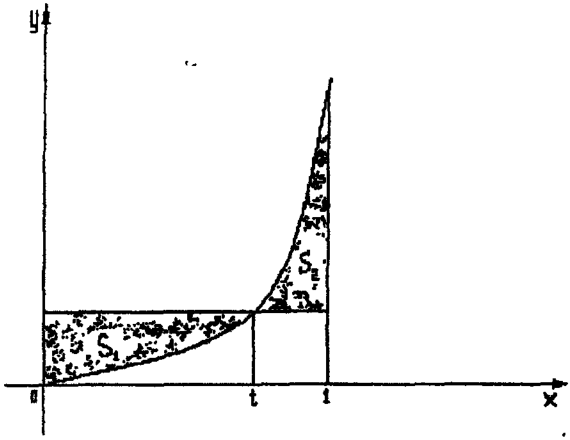
ТПУ, 2001 год, старшие курсы

1. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + 2001\,x)dx$.

2. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1)}{(n+2)\cdot n! \cdot 2^{n-1}}$.

3. Преобразуйте уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, приняв за независимые переменные $u = x + y,\ v = x - y$ и за новую функцию $w = xy - z$.

4. На отрезке $[0,\ 1]$ задана функция $y = x^2$. При каких положениях точки $t \in [0,\ 1]$ сумма площадей S_1 и S_2 (см. рисунок) имеет наименьшее и наибольшее значения?



5. Испытание состоит в подбрасывании монеты до тех пор, пока не выпадет "решетка". Какую долю от всех подбрасываний составляет появление "орла", если число монет в испытании и количество испытаний может быть бесконечным?

6. Сколько вещественных корней имеет многочлен $1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}$?

7. Вычислите интеграл $J = \int\limits_0^{\pi} tg(x + i\alpha)dx, \quad \alpha \neq 0$.

8. Фирма решила ежемесячно ассигновать по сто тысяч долларов на производство некоторой продукции. Пусть средняя заработная плата в фирме 2000 \$, а стоимость сырья – 1000 \$. Требуется определить, какое количество рабочих k и какое количество сырья C необходимы для получения наибольшего объёма продукции Q, если известно, что он им прямо пропорционален, а коэффициент пропорциональности равен 5.

ТПУ, 2002 год, старшие курсы

1. Найдите первообразную функцию $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\,dx$.

2. *Функция* $f(x)$ *определена и не возрастает на отрезке* $[0;1]$. Докажите, что для любого $\alpha \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx \ge \alpha \int_0^1 f(x)dx.$$

3. Луг, имеющий форму квадрата со стороной *a*, равномерно покрыт скошенной травой с плотностью ρ. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать все сено в центр луга, если работа по транспортировке груза массой m на расстояние x равна $\gamma m x$ $(0<\gamma<1)$?

4. Найдите угол между касательными, проведенными к интегральным кривым дифференциального уравнения

$y'y^2 + x^3 + yx = 0$ в точках $A(-1;1)$ и $B(2;2)$.

5. Докажите неравенство $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dots+\dfrac{1}{2001^2}<1$.

6. Найдите сумму ряда $1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^9}{9!}+\dots$.

7. Вычислите предел $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

8. Решите уравнение $y'\cos y = \dfrac{\sin y}{1-x^2}+1+x$.

ТПУ, 2003 год, старшие курсы

1. Разложите в ряд Маклорена функцию
$$f(x)=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}.$$

2. Найдите общий вид всех многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным 1, которые делятся без остатка на сумму всех своих производных.

3. В шаре радиуса a вырезано отверстие с квадратным сечением, сторона которого также равна a. Ось отверстия совпадает с диаметром шара. Найдите площадь вырезанной поверхности шара.

4. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\cdot\sin(2\pi en!)\right]$.

5. Выбирают наудачу один из $n!$ членов разложения определителя n - го порядка. Какова вероятность P_n при $n\to\infty$, что он не содержит элементов главной диагонали?

6. Найдите решение задачи Коши
$$(y')^2-(y+x^2)\,y'+x^2y=0,\qquad y(1)=1.$$

7 Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\right).$

8. Докажите справедливость равенства
$$div\left(|\vec r|^n\cdot\vec r\right)=(n+3)\cdot|\vec r|^n.$$

ТПУ, 2004 год, старшие курсы

1. Какой наименьший периметр может иметь выпуклый 32- угольник, все вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги со стороной

клетки 1?

2. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$

3. Найдите функцию $y = f(x)$, являющуюся при $x > 0$ решением дифференциального уравнения $x\,y' + y + 2xy = 1$ и принимающую в точке $x = 1$ значение 1.

4. Найдите экстремумы определенной в $\mathbb{R}^2$ функции

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2.$$

5. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$,

$a\in\mathbb{R},\quad a = const.$

6. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\,dx$.

7. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной дугами парабол $x^2 = a\,y,\quad x^2 = b\,y,\quad y^2 = c\,x,\quad y^2 = d\,x$, где $0 < a < b,\ 0 < c < d$; a, b, c, d – $const.$

8. Для произвольной квадратной матрицы A определим $\sin A$ с помощью степенного ряда: $\sin A = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1}$.

Существует ли такая 2×2 матрица A, что $\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2004 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

ТПУ, 2005 год, старшие курсы

1. Найдите площадь фигуры, занимающей область плоскости XoY, определенную неравенством: $\dfrac{\pi}{2} \le arctg\dfrac{y}{x-2} - arctg\dfrac{y}{x+2} \le \dfrac{5\pi}{6}$.

2. Докажите, что $\int\limits_1^e \sqrt{\ln x}\,dx + \int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx = e.$

3. Найдите уравнения семейства линий, ортогональных интегральным кривым дифференциального уравнения:

$$yy' + x + y'\sin(1/y') = 0.$$

4. Рассмотрим криволинейный интеграл : $\int\limits_L (-ydx + xdy + 2005dz)$, где L произвольная кривая, соединяющая точки $A(2004, 2004, 2004)$ и $B(2005, 2005, 2005)$. Существует ли функция $\mu(x, y, z)$, отличная от тождественного нуля, такая, что интеграл $\int\limits_L \mu(x, y, z)(-ydx + xdy + 2005dz)$ не зависит от вида кривой L ?

5. Колода игральных карт содержит 52 карты, разделяющиеся на 4 различные масти по 13 карт в каждой. Предположим, что колода тщательно перетасована, так что вытаскивание любой карты одинаково вероятно. Какое наименьшее число карт надо взять из колоды, чтобы вероятность того, что среди них встретятся хотя бы две карты одинакового наименования, была более 0,5 ?

6. Вычислите сумму ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

7. Дано уравнение:

$$y^{(IV)} - 4ay''' + (6a^2 + 2b^2)y'' - 4a(a^2 + b^2)y' + (a^2 + b^2)^2 y =$$

$= a \cdot \exp(bx)$, где a и b положительные действительные числа.

Найдите общее решение.

Внутривузовский тур

ТГПУ, 1997 год, 1 курс

1. Что больше: 127^{23} или 513^{18}?
2. Постройте график функции $y = x\,\mathrm{sgn}(\cos x)$.
3. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2}$, $(a > 0, b > 0)$.
4. При каком значении a функция $f(x) = |x| + a^2 - 2(a+1)|x|$ дифференцируема в точке $x = 0$?
5. Определите наибольшее значение произведения m – й и n – й степеней $(m > 0, n > 0)$ двух положительных чисел, сумма которых постоянна и равна a.
6. Докажите, что если p – простое число, больше трех, то $p^2 - 1$ делится на 24.
7. Определите $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$, если $f(x) = \left|\ln|x|\right|$, $(x \neq 0)$.

ТГПУ, 1998 год, 1 курс

1. Изобразите графически решение неравенства $|x| + |y| \le 1$.

2. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $(a>0, b>0)$.

3. Докажите равенство $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

4. В шар радиуса R впишите цилиндр наибольшего объема.

5. Постройте график функции $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

6. Найдите на кривой $y=x^3$ точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1,-1)$ и $B(2,8)$.

7. На сколько нулей оканчивается число $500!$?

ТГПУ, 1999 год, 1 курс

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

2. Покажите, что функция $f(x)=|x-a|\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - непрерывная функция и $\varphi(a)\neq 0$ не имеет производной в точке a.

3. Что больше: $\dfrac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}$ или $\dfrac{\alpha}{\beta}$, если $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$?

4. Докажите, что касательные к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, проведенные через концы одного и того же диаметра, параллельны.

5. Докажите, что если числа p, p^2+2 - простые, то p^3+2 - простое число.

6. Выведите формулу для суммы:

$$P_n = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}.$$

7. Постройте график функции $y=x^x$.

ТГПУ, 2000 год, 1 курс

1. Докажите, что всякий многочлен нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень.
2. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.
3. Выведите формулу для суммы
   $S_n = ch(x)+2ch(2x)+\ldots+nch(nx)$.
4. Докажите справедливость равенства:
   $[a,[b,c]] = b(a,c)-c(a,b)$.
5. Найдите кратчайшее и наибольшее расстояния точки $A(2,0)$ от окружности $x^2+y^2=1$.
6. Постройте график функции $y = x^{\frac{1}{x}}$.
7. Докажите, что выражение n^2-n+9 ни при каком $n\in\mathrm{N}$ не делится на 49.

ТГПУ, 2001 год, 1 курс

1. Докажите, что не существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}(x-|x|)$.
2. Найдите $f'(0)$, если $f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000)$.
3. Покажите, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.
4. Выведите формулу для суммы:
   $Q_n = 1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}$.
5. Постройте график функции $y = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
6. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\frac{1}{x}, & \textit{если } x\neq 0 \\ 0, & \textit{если } x=0\end{cases}$,

   $n\in\mathrm{N}$ в точке $x=0$ имеет производные до n – ого
   $n\in\mathrm{N}$ порядка включительно и не имеет производной $(n+1)$ – ого порядка.

7. Найдите все натуральные n, для которых дробь $\dfrac{19n+17}{7n+11}$ равна целому числу.

ТГПУ, 1997 год, старшие курсы

1. Оцените интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{(1+x)(1+x^3)}\,dx$.
2. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2n}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{2n}+\cos 2\dfrac{\pi}{2n}+\ldots+\cos(n-1)\dfrac{\pi}{2n}\right)$.
3. Докажите, что если дифференцируемая функция $u=f(x,y)$ удовлетворяет уравнению $x\,\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=nu$, то она является однородной функцией порядка n.
4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$.
5. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной лепестком кривой $\varphi=\sin(\pi\rho)$, $\rho\in[0,1]$.
6. Докажите, что тройка чисел 5, 11, 12 не может быть решением уравнения $x^n+y^n=z^n$ ни при каком $n\in\mathbf{N}$.
7. Найдите $f(x)$, если $f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$, $(x>0)$.

ТГПУ, 1998 год, старшие курсы

1. В каком случае интеграл $\int P\left(\dfrac{1}{x}\right)e^x\,dx$, где $P\left(\dfrac{1}{x}\right)=a_0+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_n}{x^n}$ и $a_0,a_1,\ldots,a_n$ – постоянные, представляет собой элементарную функцию?

2 Докажите, что длина дуги эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ равна длине одной волны синусоиды $y=c\sin\dfrac{x}{b}$, где

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

3. Полагая $z = z(x, y)$, решите уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

4. Чему равна $f^{(1000)}(0)$, где $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$.

5. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $|x|^n + |y|^n = a^n$, $(n > 0, a > 0)$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{1 + n^2 x^2}$.

7. Решите уравнение $x^3 - [x] = 3$, где $[x]$ – целая часть x

ТГПУ, 1999 год, старшие курсы

1. Найдите точки экстремума функции $\Phi(x) = \int\limits_a^x \dfrac{\cos t}{t} dt$,

   $\left(x > 0, 0 < a < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Докажите равенство $\lim\limits_{n \infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$.

3. Покажите, что функция $z = x^n f\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$, где f – произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = nz$.

4. Разложите в степенной ряд функцию $f(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

5. Приближенно вычислите произведение $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$.

6. Докажите равенство $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$.

7. Решите уравнение $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$.

ТГПУ, 2000 год, старшие курсы

1. Найдите производную функции $\Phi(x)=\int\limits_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\ln t}$, $(x>0)$.
2. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.
3. Покажите, что функция $f(x)=\sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0,0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$, однако не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.
4. Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{90}$ в целых числах.
5. Найдите сумму ряда Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.
6. Найдите $f(x)$, если $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$.
7. Докажите, что для любых положительных чисел x и y выполняется соотношение $\sqrt[3]{4(x+y)}\geq\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$.

ТГПУ, 2001 год, старшие курсы

1. Найдите интеграл $\int[x]\,|\sin\pi x|\,dx$, $(x\geq 0)$.
2. Докажите равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$.
3. Полагая $z=z(x,y)$, решите уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.
4 В какой точке поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ нормаль к ней образует равные углы с осями координат?

5. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$.

6. Вычислите сумму ряда: $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \ldots$.

7. Докажите, что если P и Q – многочлены степени n, то либо $P^2 \equiv Q^2$, либо степень многочлена $P^2 - Q^2$ не меньше n.

Областной тур

ТПУ, 1995 год, 1 курс, предмет

1. Найдите определитель квадратной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Вокруг эллипса описаны два различных прямоугольника. Докажите, что их диагонали равны.
3. Какую форму и почему принимает поверхность чая в цилиндрическом стакане, если чай сильно размешать вращательным движением и вынуть ложечку?
4. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$.

5. Парадокс: решим уравнение $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = a$ так: $x^a = a$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt[a]{a}$, что для $a = 2$ и $a = 4$ дает одинаковый ответ $x = \sqrt{2}$. Но тогда $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2 = 4$, то есть $2 = 4$.

Объясните парадокс.

6. Найдите все дифференцируемые функции $f:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$, удовлетворяющие тождеству
$$f(x+y)\equiv f(x)+f(y)+xy(x+y).$$
7. Сколько вещественных корней имеет многочлен
$$1+x+x^2/2+\ldots+x^n/n\,?$$
8. Сколькими способами можно выбрать среди натуральных чисел от 1 до 100 три числа, сумма которых делится на 3?

ТГАСУ, 1996 год, 1 курс, предмет

1. «От сосны к березе, повернуть направо, пройти столько же, сделать отметку. От сосны к дубу, повернуть налево, пройти столько же, сделать отметку. Копать посередине». С этими указаниями известного флибустьера Роджерса вы прибыли на остров. Береза цела, дуб есть, сосна пропала. Можно ли найти клад?
2. На столе лежат двое круглых плоских часов. Найдите уравнение линии, по которой движется середина отрезка, соединяющего концы минутных стрелок.
3. Найдите A^{100}, если $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$.
4. $x_1=0$, $x_{n=1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x_n}$, где $n=1,2,3,\ldots$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел и найдите его.
5. Функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $q(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и имеют конечные производные на (a,b). Покажите, что график функции $F(x)=\begin{vmatrix}f(x)&\varphi(x)&q(x)\\f(a)&\varphi(a)&q(a)\\f(b)&\varphi(b)&q(b)\end{vmatrix}$

имеет по крайней мере одну горизонтальную касательную на (a,b).

6. Сколько точек экстремума имеет функция $f(x) = x^{\sin x}$ на промежутке $(0,1]$?

7. Найдите расстояние между графиками функций $y = e^{1996x}$ и $y = \frac{1}{1996} \cdot \ln x$.

8. Найдите первообразную для функции

$$y = \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}.$$

ТУСУР,1997 год, 1 курс, предмет

1. Что можно сказать о порядке матрицы A и ее определителе detA, если det(2A) = bdetA, где b - некоторое число?
2. У квадратной матрицы A порядка n элементы $a_1^2, a_2^3, a_3^4, \dots, a_{k-1}^k, \dots, a_{n-1}^n$ и a_n^1 равны единице, а остальные элементы равны нулю. Решите матричное уравнение $AX = A^{n-1}$.

3. Найдите уравнение общего перпендикуляра скрещивающихся прямых $(L_1): \left\{ \begin{matrix} x - y + z - 8 = 0 \\ 2x - 3y + z - 14 = 0 \end{matrix} \right\}$ и

$$(L_2): \left\{ \begin{matrix} x = t - 1 \\ y = 1 \\ z = 5 - 2t \end{matrix} \right\}.$$

4. На сторонах треугольника ΔABC построены три равносторонних треугольника (вовне ΔABC). O_1, O_2, O_3 - центры тяжести построенных треугольников. Докажите, что $\Delta O_1O_2O_3$ равносторонний.

5. Можно ли поместить в квадрат 1×1 некоторое число

непересекающихся (и не касающихся) кругов, сумма радиусов которых больше 1997? Ответ обоснуйте.

6. Найти функцию $f(x)$, определенную на всей числовой оси, кроме точек $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, если для любого x справедливо соотношение $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$

7. $f(x)$ - периодическая с периодом $T = 1$ функция, определенная на всей числовой оси, такая, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) + x - [x]\right) = 0$, где $[x]$ - целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

8. Из пункта А, находящегося от прямолинейной дороги на расстоянии $AO = S_1$ надо доставить груз в пункт В (по дороге $OB = S_2$). Скорость по бездорожью в k раз меньше скорости по дороге. По какому маршруту надо ехать, чтобы время доставки груза было наименьшим? Какой длины путь при этом надо проехать?

9. Докажите, что уравнение $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0$ имеет хотя бы один вещественный корень, если дано, что $c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \cdots + \frac{1}{n+1}c_n = 0$.

10. Докажите, что любая непрерывная плоская кривая длины 1 может быть покрыта прямоугольником площади меньше 0,25. Привести пример линии длины 1, которую нельзя покрыть прямоугольником площади меньше 0,25. Какова наименьшая площадь прямоугольника, которым может быть покрыта кривая длины L.

ТГУ, 1998 год, 1 курс, предмет

1. Докажите, что $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ является целым лишь при

$n=1$. Но при $n>1$ число H_n сколь угодно мало отличается от некоторых целых чисел.

2. Покажите, что для $n\in N$ $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

3. Докажите, что сумма площадей любых трех граней тетраэдра больше площади четвертой грани.

4. Постройте график функции $y=\lim\limits_{n\to\infty} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin^2(n!\pi\cdot x))$.

5. Разделите с помощью циркуля и линейки угол 19^o на 19 равных частей.

6. Сколько действительных корней имеет уравнение $e^x=ax^2$?

7. Докажите, что последовательность $2;\ 2+\frac{1}{2};\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}};\ \ldots$

имеет предел, и найдите этот предел.

8. Найдите дифференцируемую функцию $f\colon R\to R$, удовлетворяющую для любых x, y равенству $f(x{,}y)=y\,f(x)+x\,f(y)$.

ТГПУ, 1999 год, 1 курс, предмет

1. Решите уравнение:
$(x+1)^5+(x+2)^5+\ldots+(x+1999)^5=0$

2. Найдите предел $P=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

3. В левом нижнем углу квадратной доски размера 7x7 стоит король. За один ход он может продвинуться либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, или на одну клетку по диагонали – вправо и вверх. Сколькими различными путями король может попасть в правый верхний угол доски, если ему запрещается посещение центральной клетки?

4. Существует ли такая непрерывная числовая функция $f(x)$, определённая на всей числовой оси, что $f(f(x)) = e^{-x}$, $\forall x \in R$?

5. Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{1999}$.

6. Не вычисляя, оцените, что больше: π^e или e^π.

7. Для каких векторов $\vec{b}$ выполняется равенство:
$$((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}) \times \vec{b} = \underbrace{(\ldots((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}) \times \ldots \times \vec{b})}_{2000\ раз\ \vec{b}}\ ?$$

8. Пусть p – простое число ($p > 2$). Докажите, что числитель дроби $\frac{m}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1}$ (то есть m) делится нацело на p.

9. Два коридора шириной a и b соответственно пересекаются под прямым углом. Определить наибольшую длину шеста, который можно перенести из одного коридора в другой горизонтально.
10. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью:
$$\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} + \frac{|z|}{c} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

ТПУ, 2000 год, 1 курс, предмет

1. Найдите максимум выражения
$$M = \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$, где x_i - переменные, $(i = \overline{1,n})$.

2. Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 0}\left(\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x}(A^n - E)\right)$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Докажите, что луч света, параллельный оси симметрии параболы, отражаясь от параболы, пройдёт через её фокус.
4. На плоскости даны три непересекающиеся круга разных радиусов. К каждой паре из них проведены общие касательные, которые пересекаются в некоторой точке. Покажите, что полученные три точки лежат на одной прямой.
5. Исследуйте на непрерывность функцию $y=\lim\limits_{n\to\infty}\left[x\,arctg(n\,ctg\,x)\right]$ и постройте её график.
6. Дифференцируема ли в точке $x=0$ функция

$$f(x)=\sqrt[3]{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}\ ?$$ (Считается, что $\sqrt[3]{-u}=-\sqrt[3]{u}$ при $u>0$).

7. Найдите функцию $f(x)$, удовлетворяюшую условиям

$$\begin{cases} f'(x)=f'(x-1), \\ f(x)+f(x-1)=x. \end{cases}$$

8. Найдите $\int\frac{x^2}{(au+bv)^2}dx$, где $u=x\sin x+\cos x$, $v=\sin x-x\cos x$.

ТГАСУ, 2001, 1 курс, предмет

1. Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании треугольника остаётся вдвое больше другого. Какую линию описывает третья вершина? Постройте эту линию.

2. Найдите максимальную площадь треугольника, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$.

3. Пусть функции $f(x), g(x), h(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и

имеют конечные производные на промежутке (a, b). Докажите, что существует точка $c \in (a, b)$, такая, что определитель $\Delta = 0$,

$$\text{если } \Delta = \begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}.$$

4. Найдите предел последовательности
$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

5. При каких значениях α уравнение $x^6 + 6\alpha x + 5 = 0$ имеет вещественные корни?

6. К реке шириной a метров построен под прямым углом канал шириной $в$ метров. Какой наибольшей длины суда могут входить в этот канал?

7. Докажите, что число $n^4 + 4$ не может быть простым при $n > 1$.

ТУСУР, 2002, 1 курс, предмет.

1. Докажите, что для высоты h треугольной пирамиды с взаимно перпендикулярными боковыми ребрами a, b, c справедливо соотношение $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{h^2}$.

2. Найдите определитель матрицы $\left(E - A^k\right)^m$, если

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$ k, m – натуральные числа.

3. Найдите функцию $f(x)$, определенную на всей числовой оси, кроме точек $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, если для любого x справедливо соотношение $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$.

4. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_1 = 1, \; a_{n+1} = 2 + \frac{4}{a_n}.$$

Докажите существование $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и найдите его.

5. Найдите кратчайшее расстояние между линиями $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 1$ и $y = x^2$, и наименее удаленные точки на них.

6. Сколько раз дифференцируема в нуле функция

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cdot \sin\frac{1}{x} & при \quad x \neq 0 \\ 0 & при \quad x = 0 \end{cases}$$

и сколько её производных непрерывны в нуле?

7. Необходимо перевезти груз из пункта A в пункт B. Расстояние AO от A до прямолинейной дороги OB равно s_1 $(AO = s_1)$, по дороге $OB = s_2$. Расход горючего по бездорожью в k раз больше, чем по дороге. При каком маршруте расход топлива будет наименьшим? Соотношение s_1 и s_2 произвольно.

8. При каких значениях параметра a график функции

$$y = f(x) = 2 - 2x - 2x\sqrt{-\sin^4 a\pi x} + x\left(5^{\sqrt{\log_5 4}} - 4^{\sqrt{\log_4 5}}\right)$$

имеет ровно три точки графика в области (D): $(y+1)^2 \le 4x$.

ТГУ, 2003, 1 курс, предмет

1. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба. Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.

2. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(1)=6, \quad P(14)=14$.

3. В эллипс с полуосями a и b впишите треугольник максимальной площади. Найдите эту площадь.

4. Вычислите $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{9}\cdot\sqrt[27]{27}\cdot\ldots$.

5. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin(2\pi e\cdot n!)$.

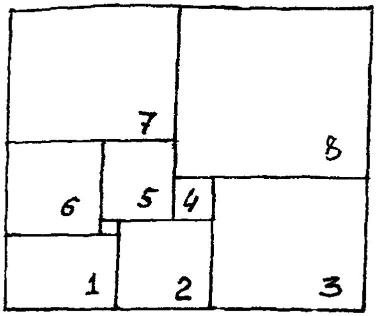
6. Докажите, что если все корни многочлена $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с действительными коэффициентами действительны, то и все его производные имеют лишь действительные корни.

7. Докажите, что $\left|\sqrt{2-\dfrac{p}{q}}\right| \ge \dfrac{1}{4q^2}$, где $p,\ q\in\mathbb{N}$.

8. Решите уравнение $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

ТГПУ, 2004, 1 курс, предмет

1. Прямоугольник разрезан на девять квадратов. Восемь из них пронумерованы числами от 1 до 8, как показано на рисунке. Длина стороны самого маленького (непронумерованного) квадрата равна 1. Чему равны длины сторон остальных квадратов?



2. Найти наименьшее натуральное значение k, при котором система

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 + kx_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + kx_n = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AD = 5$ и $AB = 4$ проведёт отрезок EF, соединяющий точку E стороны BC с точкой F стороны CD. Точки E и F выбраны так, что $\dfrac{|BE|}{|EC|} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{|CF|}{|EF|} = \dfrac{1}{5}$. Известно, что точка M, точка пересечения диагонали AC с отрезком EF делит этот отрезок в отношении $\dfrac{|MF|}{|ME|} = \dfrac{1}{4}$. Найдите диагонали параллелограмма.

4. Дано: парабола $y^2 = 2px$, её фокус F и произвольная точка $M_0(x_0;\, y_0)$ на параболе; луч l, выходящий из точки M_0 и параллельный оси параболы (ось Ox); касательная к параболе в точке M_0. Докажите, что указанная касательная составляет равные углы с прямой FM_0 и лучом l.

5. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+\ldots+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}\right)$$

6. Точка движется по прямой так, что средняя скорость за любой промежуток времени равна среднему арифметическому скоростей на концах промежутка. Докажите, что точка движется с постоянным ускорением.

7. Необходимо закупить некоторое количество одинаковых сферических колб общей вместимостью 100 л. Стоимость одной колбы складывается из стоимости труда мастера, пропорциональной квадрату площади поверхности колбы, и стоимости материала, пропорциональной площади её поверхности. При этом колба объёмом в 1 л обходится в 1 руб. 25 коп., и в этом случае стоимость труда мастера составляет 20% стоимости колбы. Какое максимальное число колб и какого объёма можно заказать на 120 рублей?

ТПУ, 2005, 1 курс, предмет

1. Квадратные матрицы A и B удовлетворяют условиям:

$$A^2 = A\,,\quad B^2 = B\,,\quad AB = BA.$$

Найдите все значения, которые может принимать $\det(A-B)$.

2. Коэффициенты многочленов $P_k(x) = a_{1k} + a_{2k}x + a_{3k}x^2$, $k = 1,\ 2,\ 3$ удовлетворяют условиям

$$a_{1k}a_{1l} + a_{2k}a_{2l} + a_{3k}a_{3l} = \begin{cases} 0, & \text{если}\quad k \ne l \\ 1, & \text{если}\quad k = l \end{cases}.$$

Найдите $P_1^2(x)+P_2^2(x)+P_3^2(x)$.

3. Радиусы двух окружностей равны 1 и 3, расстояние между

центрами окружностей равно 10. Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих множество точек данных окружностей.

4. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin(2\pi e n!)$.

5. Докажите, что при $x\in\left(0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство

$x\cdot\cos x < 0{,}6$.

6. Тяжелый шар осторожно кладут в наполненную водой вазу, имеющую форму сегмента параболоида вращения. Размеры вазы заданы: a - глубина вазы, $x^2 = 2py$ - уравнение линии пересечения внутренней поверхности вазы с плоскостью, проходящей через ось вазы. Размер шара выбран так, чтобы он вытеснил как можно больше воды. Найдите радиус шара как функцию p и a.

7. Бесконечная последовательность (вещественных) чисел $a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots$ получается почленным сложением двух геометрических прогрессий. Может ли эта последовательность начинаться с таких чисел: $a)$ $1,\ 1,\ 3,\ 5$; $b)$ $1,\ 2,\ 3,\ 5$; $c)$ $1,\ 2,\ 3,\ 4$. Если может, то найдите такие последовательности.

ТПУ, 1995 год, старшие курсы, предмет

1. Найдите матрицу, обратную к квадратной матрице размера $n\times n$:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix},\quad (a\neq 0).$$

2. Найдите функции $f(x)$, удовлетворяющие при $x\neq 0$

и $x \neq 1$ тождеству $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right) \equiv x$.

3. Вычислите предел $A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

4. Функция $y(x)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0,\infty)$, причем $y(x)>0$, $y'(x)>0$. Докажите, что если сходится интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{y+y'}$, то сходится и $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{y}$.

5. На круг радиуса R намотана гибкая нерастяжимая нить длины $2\pi R$. Найдите площадь, которую заметает эта нить при ее полном сматывании с круга.

6. Найдите $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \max(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$

7 Пусть $\Im(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $0<z<1$. Докажите, что

$\Im(z)+\Im(1-z)=\frac{\pi^2}{6}-\ln z \ln(1-z)$.

8. Автобусные билеты имеют номера от 000000 до 999999. Сколько среди них счастливых, то есть таких, у которых сумма трех первых цифр равна сумме трех последних?

ТГАСУ, 1996 год, старшие курсы, предмет

1. На лобовом стекле автомобиля укреплены два дворника длиной L каждый, вращающиеся вокруг двух точек, которые отстоят друг от друга также на расстоянии L. Каждый дворник подметает один полукруг. Какую площадь подметают оба дворника?
2. Асимптотика интеграла от быстро растущих функций. Пусть $f(x)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ на $[a, +\infty)$ и

существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=C$. Докажите, что при

$x\to+\infty$ $\quad\int\limits_a^x f(t)dt \sim \dfrac{1}{2-C}\cdot\dfrac{f^2(x)}{f'(x)}$, и получите асимптотику

интеграла $\int\limits_a^x t^t\,dt$.

3. Вычислите интеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{(1+x^2)\cdot(1+x^{1996})}$.

4. Определите скорость, с которой метеорит ударяет о Землю, предполагая, что он падает прямолинейно с неограниченно большого расстояния из состояния покоя и при его движении к Земле ускорение обратно пропорционально квадрату его расстояния от центра Земли (радиус Земли взять равным $6{,}4\cdot10^6$ м).

5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y''y+y'^2=x'y+xy' \\ x'y+xy'=1 \end{cases}$.

6. Убедитесь, что при малых x и y имеет место приближенная формула $\quad arctg\,\dfrac{1+x+y}{1-x+y}\approx\dfrac{\pi}{4}+x-xy$.

7. Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_n^{1990}x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_n^{1996}x^n$ имеют одинаковые ненулевые радиусы сходимости. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{U_n}{6^n}$?

8. Известно, что функция $f(x)$ определена и возрастает при $0\le x\le b$, а ее производная $f'(x)$ убывает при $0<x\le b$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}f'\left(\dfrac{b}{n}\right)$ сходится.

ТУСУР, 1997 год, старшие курсы, предмет

1. Пусть $\|a_{ij}(n)\|$ есть n-ая степень матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$: $A^n = \|a_{ij}(n)\|$. Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$, и найдите его.
2. Дано параметрическое уравнение эллипса:
$\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{cases}$, $\varphi\in[0, 2\pi]$. Зная, что $\rho^2 = x^2+y^2$, студент вычисляет площадь эллипса так:
$$S = 4(\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2 d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\,d\varphi = \frac{5\pi}{2}.$$ Известно, однако, что $S=\pi ab = 2\pi$. В чем ошибка студента? Исправьте ошибку и доведите решение до конца.
3. Найдите объем тела $u^2+v^2+w^2\le R^2$, если $u, v, ,w$ - координаты точки относительно базиса $\vec{e}_1 = 2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{e}_2=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{e}_3=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.
4. Докажите тождество $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$.
5. Последовательность $\{x_n\}$ с положительными членами монотонно возрастает и ограничена. Докажите, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ сходится.
6 Найдите минимальное расстояние между поверхностями $z=x^2+y^2$ и $x+y-z=5$.
7. В $\mathbf{R}^n$ даны n попарно ортогональных плоскостей $A_{1k}x_1+A_{2k}x_2+\ldots+A_{nk}x_n=0$, $(k=1, 2, \ldots, n)$. Чему равен модуль определителя матрицы $A=\|A_{ik}\|$, $(i, k=1, 2, \ldots, n)$.

8. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} tgn$, где $n \in N$.

9. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)-3^{-n}}$ с точностью до 0,01 (требуется дать ответ, а не оценку ошибки).

10. Пусть $f(x) > 0$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Покажите, что $\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{f(x)}{\int\limits_1^x f(t)dt} \right) dx$ расходится.

ТГУ, 1998 год, старшие курсы, предмет

1. Докажите, что если в гармоническом ряде $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ вычеркнуть все члены, знаменатели которых содержат цифру 9, то оставшаяся часть ряда будет сходящейся.

2. Докажите, что число Эйлера e является иррациональным.

3. Определите площадь сечения эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ плоскостью $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 0$.

4 В кубический ящик с ребром a кладут два шара и ящик закрывают крышкой. Какими должны быть радиусы шаров, чтобы их суммарный объем был максимальный.

5. Подберите форму сосуда (поверхность вращения) так, чтобы сосуд можно было использовать в качестве водяных часов (метки образуют равномерную шкалу). Предполагается известным закон Торричелли: жидкость из сосуда вытекает со скоростью $k\sqrt{2gh}$, где h - высота уровня воды над отверстием.

6. Постройте график функции $y = x^x$, $x \in (0,1]$, и вычислите площадь криволинейной трапеции с точностью до 10^{-5}.

7. Найдите $f^{(1998)}(0)$ функции $f(x) = \dfrac{x \sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

8. Докажите, что объем тела, ограниченного поверхностью S, равен $V = \frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_S (\bar{r}, \bar{n}_0)ds$, где $\bar{r}$ - радиус – вектор точки M поверхности, а $\bar{n}_0$ нормальный единичный вектор к поверхности в точке M.

ТГПУ, 1999 год, старшие курсы, предмет

1. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее свойствами:
   а) его 1/2 - это квадрат целого числа;
   б) его 1/3 – это куб целого числа:
   в) его 1/5 – это пятая степень целого числа.

2. Векторы a, b, и c удовлетворяют условию $a + b + c = 0$. Докажите, что $[a,b] = [c,a] = [b,c]$

3. Докажите, что если в определителе D порядка n все элементы равны 1 или - 1, то при $n \geq 3$ имеем $|D| \leq (n-1)(n-1)!$

4. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 + \sin\alpha\cos x)\cdot\frac{dx}{\cos x}$.

5. Исследуйте на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + a^2})$, $a \in R, a = \text{const}$.

6. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной дугами парабол $x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = cx, y^2 = dx$, где $0 < a < b,\ 0 < c < d$.

7. Найдите все функции $u(x, y)$, удовлетворяющие для $\forall x, y \in R$ уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

8. Покажите, что для криволинейных интегралов второго рода неверна, вообще говоря, формула среднего значения: $\int\limits_{AB} f(x,y)dx = f(\xi,\eta)\int\limits_{AB} dx$, где AB – гладкая кривая, $f(x,y)$ – непрерывная вдоль AB функция, (ξ,η) – некоторая точка кривой AB.

9. Снегопад начался до полуночи и продолжался, не усиливаясь и не ослабевая. Снегоочистительная машина начала работать в полночь и, убирая за равные промежутки времени равные количества снега, расчистила за первые 2 часа работы 10 км пути, а за следующие 2 часа работы – ещё 5 км пути. Когда начался снегопад?

10. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)dx.$

ТПУ, 2000 год, старшие курсы, предмет

1. Разделите число 2000 на три положительных слагаемых X,Y,Z так, чтобы произведение $P = X^{1999}\cdot Y^{2000}\cdot Z^{2001}$, было наибольшее.

2. Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & \cdots & E_{n-1} \\ E_1 & E_2 & E_3 & \cdots & E_0 \\ E_2 & E_3 & E_4 & \cdots & E_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{n-1} & E_0 & E_1 & \cdots & E_{n-2} \end{vmatrix}$, где E_k - k–ый корень n – ой степени из единицы.

3. Вычислите предел $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2m}(n!\pi x))$.

4. Вычислите интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{d}{dx}(arctg\frac{1}{x})dx$.

5. Самолет вылетел с экватора, держа курс строго на северо-восток Какое расстояние он пролетит, приземлившись на северном полюсе? (Земля имеет форму шара радиуса $R = 6400$ км.)

6. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 x^{nx}\,dx$.

7. Невесомый сосуд в виде усеченного, срезанного по среднему сечению конуса ($x \geq 0$), стоит на меньшем донышке. Уравнение боковой поверхности $(z + 1)^2 = x^2 + y^2$, а донышка - $z = 0$. В сосуд наливается вода. При какой высоте воды в сосуде сосуд опрокинется? (Получите уравнение для определения этой высоты).

8. Самолет движется по прямой с постоянной скоростью V. Со скоростью $U > V$ его преследует самонаводящаяся ракета, в начальный момент находящаяся на расстоянии S по перпендикуляру к его пути. Ракета постоянно держит курс на самолет. За какое время ракета собьёт самолет?

ТГАСУ, 2001 год, старшие курсы, предмет

1. Докажите неравенство $\int\limits_0^1 \frac{x}{\cos x}\,dx < \ln 2$.

2. Докажите, что функция

$$U(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

имеет в точке O (0,0) частные производные, но не дифференцируемые в этой точке.

3. Докажите, что $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln \frac{b+1}{a+1}$.

4. Найдите решение задачи Коши $(y')^2 - (y + x^2)y' + x^2 y = 0, \quad y(1) = 1$.

5. Решите уравнение $y'' + \frac{y}{x^4} = 0$.

6 Рассмотрим непрерывную на $0 < x \leq 1$ функцию $f(x) = x^x$. Легко доказать, что $\lim\limits_{x \to \infty} x^x = 1$. Поэтому можно считать, что

$f(x)=x^x$ задана и непрерывна на $0 \le x \le 1$.

Докажите, что $\int\limits_0^1 x^x dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

7. Прямая $y = ax + b$ пересекает график дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ в трех различных точках. Докажите, что между крайними точками пересечения найдется точка x, в которой $f''(x)=0$.

ТУСУР, 2002, старшие курсы, предмет

1. Найдите $I = \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{ax^2+b}}$.

2. Через диаметр основания прямого кругового цилиндра с радиусом R и высотой H проведена плоскость под углом α к плоскости основания $(H \ge R\,tg\alpha)$. Найдите отношение объёмов получившихся частей разбиения цилиндра

3. Докажите, что $z = f(x+\varphi(y))$, где f и φ дважды дифференцируемые функции, удовлетворяют уравнению

$$z'_x \cdot z''_{xy} = z'_y \cdot z''_{xx}.$$

4. Решите задачу Коши: $(1-x)\left(y\,y'' - (y')^2\right) - y\,y' = 0$, $y(0)=1,\ y'(0)=-2$.

5. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n}$.

6. Исследуйте на сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & при\quad n\neq 3k,\\ -\dfrac{3}{n} & при\quad n=3k,\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & при\quad n\neq 3k,\\ -\dfrac{2}{n} & при\quad n=3k,\end{cases}$$

то есть ряды, полученные из гармонического умножением членов ряда с номерами, кратными числу 3, на -3 и -2 соответственно.

7. Дано, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ сходятся при любом $x\neq 2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Исследуйте на сходимость (абсолютную и условную) ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}\quad и\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}.$$

8. Кюре сказал служке: «Я встретил троих прихожан. Произведение их возрастов (количество лет целое) равно 2450. Сумма их возрастов равна удвоенному Вашему возрасту. Прихожан каких возрастов я встретил?». Через час служка ответил, что данные условия не позволяют дать однозначный ответ. Тогда кюре добавил: «Старший из них старше меня». После этого служка, зная возраст кюре, назвал возраст прихожан. Сколько лет кюре? Ответ подробно обоснуйте.

ТГУ, 2003, старшие курсы, предмет

1. Вычислите $\int\limits_0^1 \ln x\cdot\ln(1-x)\,dx$.

2. Найдите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$.

3. Найдите $(arctgx)^{(2003)}$ – производную 2003 порядка.

4. Докажите, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 6^{\frac{2-3n-n^2}{2}}$ является иррациональным числом.

5. Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ пересекается плоскостью $Ax+By+Cz=0$. Найдите площадь сечения.

6. Рассеянная секретарша заклеила 6 писем в не надписанные конверты. Затем подписала их произвольным образом. Какова вероятность того, что хотя бы одно письмо попадёт к своему адресату?

7. Вычислите $\iint\limits_S \left(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right)dS$, где

S – поверхность $x^2+y^2=z^2, \quad 0\le z\le h,$

$\vec{v}\left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)$ – единичная внешняя нормаль к S.

8. Можно ли из точки O направить в пространство 15 лучей так, чтобы угол между любыми двумя был больше 60° ?

ТГПУ, 2004, старшие курсы, предмет

1. Вычислите сумму $\cos\frac{\pi}{101}+\cos\frac{3\pi}{101}+\cos\frac{5\pi}{101}+\ldots\cos\frac{99\pi}{101}$.

2. Докажите, что $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s(s+1)\ldots(s+n)}$, где $s>0$.

3. Найдите решение уравнения $\frac{dU(x)}{dx} = U(x) + \int\limits_0^1 U(x)\,dx$

с начальным условием $U(0)=1$.

4. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью

$$\frac{|u|}{a}+\frac{|v|}{b}+\frac{|w|}{c}=1, \quad (a>0,\ b>0,\ c>0),$$

если u, v, w – координаты точки относительно базиса:

$$\vec{e}_1=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{e}_2=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ \vec{e}_3=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}.$$

5. Докажите, что $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\alpha_n$,

где $C=\mathrm{const}$ (постоянная Эйлера), а $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

6. Пьяница стоит на расстоянии одного шага от пропасти. Он шагает случайным образом либо к краю утёса, либо от него. На каждом шагу вероятность отойти от края равна $2/3$, а шаг к краю имеет вероятность $1/3$. Какова вероятность того, что через пять шагов пьяница стоит на утёсе?

7. Функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими производными по x и по y и удовлетворяет условиям:

$$f(0, 0)=0, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le 2004|x-y|, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 2003|x-y|.$$

Докажите, что $|f(2004, 2003)| \le 2004^2$

ТПУ, 2005, старшие курсы, предмет

1. Найдите площадь фигуры, занимающей область плоскости XOY, определенную неравенством $\frac{\pi}{2} \le arctg\frac{y}{x-2}-arctg\frac{y}{x+2} \le \frac{5\pi}{6}$

2. Докажите, что $\int_1^e \sqrt{\ln x}\, dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e.$

3. Найдите уравнения семейства линий, ортогональных интегральным кривым дифференциального уравнения:

$$yy' + x + y' \sin(1/y') = 0.$$

4. Рассмотрим криволинейный интеграл : $\int_L (-ydx + xdy + 2005dz)$,

где L произвольная кривая, соединяющая точки $A(2004, 2004, 2004)$ и $B(2005, 2005, 2005)$. Существует ли функция $\mu(x, y, z)$, отличная от тождественного нуля, такая, что интеграл $\int_L \mu(x, y, z)(-ydx + xdy + 2005dz)$ не зависит от вида кривой L ?

5. Колода игральных карт содержит 52 карты, разделяющиеся на 4 различные масти по 13 карт в каждой. Предположим, что колода тщательно перетасована, так что вытаскивание любой карты одинаково вероятно. Какое наименьшее число карт надо взять из колоды, чтобы вероятность того, что среди них встретятся хотя бы две карты одинакового наименования, была более $0,5$?

6. Вычислите сумму ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

7. Дано уравнение:

$$y^{(IV)} - 4ay''' + (6a^2 + 2b^2)y'' - 4a(a^2 + b^2)y' + (a^2 + b^2)^2 y =$$

$= a \cdot \exp(bx)$, где a и b положительные действительные числа.

Найдите общее решение.

ТГУ, 1997 год, 1 курс, специальность

I

Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

Приведите пример функции, определенной на всей числовой прямой и только в одной точке дифференцируемой.

Постройте график функции $y = tg(2\,arctgx)$.

Найдите расстояние от точки $(4,0)$ до параболы $y^2 - 2x = 0$.

Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$, где n - натуральное число?

Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании треугольника остается вдвое больше другого. Какую линию описывает третья вершина?

. Задан многочлен с целыми коэффициентами, принимающий значение в пяти различных целочисленных точках. Докажите, что этот многочлен не имеет ни одного целого корня.

. На эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ найдите такую точку, чтобы площадь треугольника, ограниченного касательной к эллипсу в этой точке и осями координат, была наименьшей.

9. Дано, что $a^5 - a^3 + a = 2$, $a \in \mathbf{R}$. Докажите, что $3 < a^6 < 4$.
10. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей оси, причем $f(f(x)) = x$. Докажите, что существует точка x_0, в которой $f(x_0) = x_0$

ТГПУ,1998 год, 1 курс, специальность

1. Решите уравнение

$$2\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)(x+5)}}}}=x.$$

2. Докажите, что середину сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
3. Найдите предел, к которому стремится положительный корень уравнения $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x-1=0$ при $n\to\infty$.
Около квадрата со стороной 1997 описан ромб. Найдите его диагонали, если известно, что они равны различным целым числам.
4. Дана периодическая с периодом $T=1$ функция, определенная на всей числовой оси, такая, что $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+x-[x])=0$, где $[x]$ - целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

5 Найдите все значения параметра a $(a>1)$, для каждого из которых график функции $f(x)=a^x$ касается прямой $y=x$.

6. В равносторонний треугольник вписаны окружности равных радиусов, касающиеся друг друга. Найдите предел отношения площади, занимаемой всеми вписанными кругами, к площади треугольника, когда число кругов неограниченно возрастает.
7. Что больше $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{36}}$ или $1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{27}}$?

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z+t=6 \\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-z^2}+\sqrt{16-t^2}=8. \end{cases}$$

9. Докажите, что для $\forall x>0$, $\forall y>0$ имеет место неравенство,

$$y\ln\frac{x}{y}\le x-y.$$

10. Докажите неравенство $n!<n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+1}$.

2. Биссектрисы данного выпуклого четырехугольника своими пересечениями образуют новый четырехугольник внутри данного. Биссектрисы этого нового четырехугольника опять образуют четырехугольник и так далее. Найдите пределы, к которым стремятся углы этих четырехугольников.

ТГУ, 1999 год, 1 курс, специальность

1. Докажите, что уравнение $a^2+b^2=c^k$ имеет решение в области целых положительных чисел при любом целом $k>0$.
2. Найдите x, если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1999}}{n^x-(n-1)^x}=\dfrac{1}{2000}$.
3. Пусть задано простое число p. Найдите натуральные числа x, y $(x\neq y)$ такие, что $\dfrac{2}{p}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.
4. Пусть A - квадратная матрица второго порядка и k – натуральное число, $k>2$. Докажите, что если $A^k=0$, то $A^2=0$.
5. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(0;1)$, причем $f(0)=f(1)=0$ и $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$. Используя формулу Тейлора, докажите, что $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geq 8$.
6. Пусть $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x>0$. Докажите, что $f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$. Найдите числа A и B.
7. Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$, где n - натуральное число.
8. Найдите множество точек плоскости, из которых гипербола, лежащая в этой плоскости, видна под прямым углом.
9. Верно ли следующее утверждение: касательная к гиперболе в произвольной точке образует вместе с двумя асимптотами гиперболы треугольник, площадь которого не зависит от точки касания?
10. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей оси, причем $f(f(x))=x$ для любого x. Докажите, что существует точка x_0 такая, что

$f(x_0) = x_0$.

Дополнительные вопросы

1. Кто был первым лектором по математике:
   - В Томском технологическом институте?
   - В Томском университете?
2. Кого из томских математиков почтили мемориальной доской? Что Вы о нем знаете?
3. Кто из великих математиков посетил Томский университет?

ТГПУ, 2000 год, 1 курс, специальность

1. Что больше: $\sqrt[1999]{1999!}\cdot\sqrt[2001]{2001!}$ или $\left(\sqrt[2000]{2000!}\right)^2$?
2. Пусть функция $f(x)$ определена на числовой прямой и удовлетворяет неравенству: $|f'(x)| < k < 1$ для $\forall x \in \mathbf{R}$, $k = const$. Докажите, что найдется, и притом единственная точка x^*, для которой $f(x^*) = x^*$ (неподвижная точка для функции $f(x)$).
3. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на числовой прямой, и уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ тоже не имеет вещественных корней.
4. Вычислите $\left\{\sqrt{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}\right\}^{2000}$.
5. Найдите расстояние между графиками функций $y = e^{2000x}$ и $y = \dfrac{1}{2000}\ln x$.
6. Последовательность $\{a_n\}$ задается условиями: $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + \dfrac{1}{n(n-1)}}$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

7. Вычислите $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

8. Точки A и B движутся равномерно по пересекающимся прямым, не сталкиваясь. В каждый момент времени проведем через точки A и B прямую. Докажите, что объединение всех этих прямых есть внешность некоторой параболы.

ТГУ, 2001 год, 1 курс, специальность

1. Известно, что в наборе из 32 одинаковых по виду монет есть две фальшивые монеты, которые отличаются от остальных по весу (настоящие монеты равны по весу друг другу, и фальшивые монеты также равны по весу друг другу). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более 4 взвешиваний на чашечных весах без гирь?
2. В пространстве отмечено n различных точек. Докажите, что существует прямая, все проекции точек на которую различны.
3. Решите уравнение $[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\ldots+[\sqrt[3]{x^3-1}]=400$.
4. Докажите, что если натуральное число n больше единицы, то число n^n-n^2+n-1 делится на $(n-1)^2$.
5. Докажите, что существуют числа A и B, удовлетворяющие при любом $n\in N$ равенству $a_1+a_2+\ldots+a_n=A\operatorname{tg}n+Bn$, где $a_k=\operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1)$, $k=1,\ldots,n$.
6. Существует ли многочлен $P(x)$ 2001-й степени такой, что $P(x^2-1)$ делится на $P(x)$?
7. В квадратной матрице A столбцы являются попарно ортогональными векторами. Докажите, что абсолютная величина определителя матрицы A равна произведению длин векторов-столбцов.
8. Пусть a и b – действительные числа, для которых имеет место равенство: $a+e^a=b+e^b$. Верно ли, что $\sin a=\sin b$?

ТГПУ, 2002, 1 курс, специальность

1. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} f(0)=f(1)=0 \\ f''(x)>f(x)+f'(x) \end{cases} \quad \forall x\in[0,1] .$$

Докажите, что $f(x)<0 \quad \forall x\in[0,1]$.

2. Найдите максимальный элемент последовательности $a_n=\dfrac{2002^n}{n!}$.

3. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на R и для любой арифметической прогрессии a,b,c,d выполняется неравенство:

$$|f(d)-f(a)|\geq \pi\,|f(c)-f(b)|,$$

то f – постоянная функция.

4. Дан эллипс $Э_1$ с полуосями a и b $(a>b)$. По эллипсу $Э_1$ строится эллипс $Э_2$, фокусами которого служат концы малой оси эллипса $Э_1$, а малой осью – большая ось эллипса $Э_1$. По эллипсу $Э_2$ аналогичным образом строится эллипс $Э_3$ и т.д. Обозначим ε_n эсцентриситет эллипса $Э_n$. Докажите, что последовательность $\{\varepsilon_n\}$ имеет предел, и найдите этот предел

5. Найдите все значения параметра $a\in R$, при которых уравнение

$$1+\sin ax=\cos x$$

имеет единственное решение.

6. Рассмотрим единичный четырехмерный куб, то есть множество точек $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4$ таких, что $0\leq x_i\leq 1$ при $i=1,2,3,4$. Сечение куба гиперплоскостью $x_1+x_2+x_3+x_4=2$

является трехмерным многогранником. Найдите число вершин, ребер, граней этого многогранника и нарисуйте его.

7. Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0,1)$ и $0<\alpha<1$.

Что больше $I_1=\alpha\int\limits_0^1 f(x)dx$ или $I_2=\int\limits_0^\alpha f(x)dx$?

8. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

ТГУ, 2003, 1 курс, специальность

1. Дан набор чисел $\{0,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\}$. Известно, что среди любых четырех чисел из этого набора есть равные, а среди любых пяти чисел равных не более трех. Найдите количество нулей в этом наборе.

2. Докажите, что $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n\text{ раз}}-\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ раз}}}=\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ раз}}$.

3. Точка O – центр правильного n-угольника на плоскости; A_1, $A_2,\ldots,A_n$ – его вершины. Найдите сумму $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}$.

4. Докажите, что существует бесконечно много пар рациональных чисел (x,y), удовлетворяющих условиям $x^x=y^y$, $x>0$, $y>0$, $x\neq y$.

5. По окружности выписаны числа 1, 2, 3. Затем между каждыми двумя соседними числами вставили их сумму (в результате получилось шесть чисел: 1, 3, 2, 5, 3, 4). Потом повторили эту

операцию еще 5 раз. Теперь вдоль окружности стоят 192 числа. Найдите их сумму.

6. Докажите, что $e^x > 1+\ln(1+x)$ при $x>0$.

7. Докажите, что последовательность

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n\text{ корней}}$$ сходится и найдите ее предел.

8. Постройте график функции $f(x) = \mathrm{tg}(2\,\mathrm{arctg}\,x)$.

ТПУ, 2004, 1 курс, специальность

1. Найдите наибольшее из чисел: $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \cdots,\ \sqrt[n]{n},\ \cdots$

2. Докажите, что последовательность

$$\sqrt{1}, \sqrt{1+\sqrt{1}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \cdots, \sqrt{\underbrace{1+\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{1}}_{n\text{ - раз}}}, \cdots$$

имеет предел, и найдите его.

3. Может ли квадрат целого числа оканчиваться тремя одинаковыми цифрами, отличными от нуля? *(Какими тремя одинаковыми цифрами, отличными от нуля, может оканчиваться квадрат целого числа?)*

4. Пусть $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$ функция, дифференцируемая на интервале (a,b), причем $f(0)=0,\ f(1)=1$. Докажите , что существует такие числа $a,\ b \in (0,1)$, что

$$a \neq b \quad и \quad f'(a)\cdot f'(b) = 1 \ .$$

5. Пусть $f(x) = (1-x+x^2)/(1+x+x^2)$. Найдите $f^{(n)}(0),\ n = 1,2,\cdots$.

6. Лампочка висит под центром круглого абажура (в виде круглого диска), на 10 *см* ниже его и в 50 *см* от стены. Радиус абажура 15 *см*.
Найдите границу тени абажура на стене.

7. Решите уравнение:
$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2004x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Докажите неравенство
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}.$$

ТГУ, 2005, 1 курс, специальность

1. На плоскости отмечено n различных точек. Докажите, что существует прямая, лежащая в этой плоскости, все проекции точек на которую различны.

2. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, причем $f\left(f\left(x\right)\right) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что существует точка $x_0 \in \mathbb{R}$, в которой $f\left(x_0\right) = x_0$.

3. Существует ли многогранник с 25 ребрами?

4. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ число $n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)+1$ является квадратом некоторого натурального числа.

5 Найдите предел последовательности, определенной следующим

образом: $x_{n+1}=\dfrac{x_n+a/x_n}{2}$, $n\geq 1$, $x_1>0$, $a>0$.

6. Существует ли нелинейная функция, определенная на всей вещественной оси и имеющая производные всех порядков, такая, что при любом $n\in\mathbb{N}$ ее n-ая производная всюду по модулю не превосходит $1/2^n$?

7. Пусть $p(x)$ – многочлен степени n и пусть

$$p(a)\geq 0,\ p'(a)\geq 0,\ldots,\ p^{(n-1)}(a)\geq 0,\ p^{(n)}(a)>0.$$

Докажите, что действительные корни уравнения $p(x)=0$ не превосходят a.

8. Пусть α, β, γ – корни многочлена x^3+px+q. Вычислите

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}.$$

ТГУ, 1997 год, старшие курсы, специальность

1. Вычислите интеграл $J=\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$, $(a>0,\quad b>0)$.
2. Докажите, что если $0<n<m$, то $\dfrac{m-n}{m}<\ln\dfrac{m}{n}<\dfrac{m-n}{n}$.
3. Найдите объем тела, ограниченного поверхностью $$\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}+\frac{|z|}{c}=1,\quad a>0,\ b>0,\ c>0.$$
4. Исследуйте на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$,

$a\in\mathbf{R}$, $a=const$.

5. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, и пусть

$f(a+b-x)=f(x)$. Докажите, что $\int\limits_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)dx$.

6. Вычислите интеграл $J=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

7. Докажите, что если $\alpha<\beta$ и $p(x)$ - многочлен с действительными коэффициентами, то равенство $p(\sin x)=\cos x$ на $[\alpha;\beta]$ невозможно.

8. Функция $f(x)$ не убывает на $[0;+\infty]$, и для любого $T>0$ интегрируема на $[0;T]$, причем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty f(t)\,dt=C$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$.

9. Докажите, что если в определителе D порядка n все элементы равны 1 или -1, то при $n\geq 3$ имеем $|D|\leq(n-1)(n-1)!$.

10. Найдите все дифференцируемые функции, удовлетворяющие функциональному уравнению $f(x)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$.

ТГПУ, 1998 год, старшие курсы, специальность

1. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$.

2. Докажите иррациональность числа $e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

3. Вычислите интеграл $J=\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(1+x^\alpha)(1+x^2)}$.

4. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

5. Докажите, что решение задачи Коши $y'' - x^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ является положительной функцией.

6. Докажите, что на множестве **C** верно $f(x) = (x^{3k} + x^{3l+1} + x^{3m+2})\vdots(x^2 + x + 1)$, $k, l, m > 0$.

7. Найдите все дифференцируемые на числовой прямой функции $f(x)$ такие, что $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\alpha x + \beta y)$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ - константы, $\alpha + \beta = 1$.

8. Найдите все функции $u(x;y)$, удовлетворяющие для $\forall x, y \in \mathbf{R}$ уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

9. Снегопад начался до полуночи и продолжался, не усиливаясь и не ослабевая. Снегоочистительная машина начала работать в полночь, и убирая за равные промежутки времени равные количества снега, счистила за первые 2 часа работы 10 км пути, а за следующие 2 часа работы – еще 5 км пути. Когда начался снегопад?

10. Пространственное тело T состоит из всех точек, находящихся на расстоянии не большем r от данного выпуклого многогранника S. Пусть $V(r)$ – объем этого тела. Найдите предел $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{V(r)}{r^3}$.

ТГУ, 1999 год, старшие курсы, специальность

1. Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 = c^k$ имеет решение в области целых положительных чисел при любом целом $k > 0$.
2. Как следует провести прямую через центр правильного семиугольника, чтобы сумма квадратов расстояний его вершин от данной прямой была наименьшей?
3. Квадратные матрицы A и B второго порядка удовлетворяют условиям $A^n = B^{n+1} = (A+B)^{n+2} = 0$, где n - натуральное число, $n > 2$. Вычислите $AB + BA$.

4. Докажите, что уравнение $x^6 + ax^5 + bx^4 + c = 0$, где a, b, c - вещественные числа и $c \neq 0$, имеет, по крайней мере, два комплексных (не вещественных) корня.
5. Докажите, что уравнение $x^x = y^y$ $(x > 0,\ y > 0)$ имеет бесконечно много рациональных решений $(x; y)$, где $x \neq y$.
6. Существует ли предел $\lim\limits_{n \to \infty} \cos(\ln n)$?
7. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(0;1)$, причем $f(0) = f(1) = 0$ и $\min\limits_{x \in [0,1]} f(x) = -1$. Используя формулу Тейлора, докажите, что $\max\limits_{x \in [0;1]} f''(x) \geq 8$.
8. Докажите, что уравнение $\sum\limits_{n=0}^{2n} \dfrac{x^k}{k!} = 0$ не имеет вещественных корней.
9. Числа 1, 9, 8, 1 являются соответственно первым, вторым, третьим и четвертым членами последовательности, в которой каждый из последующих членов равен последней цифре суммы четырех предшествующих ему членов. Могут ли в этой последовательности встретиться числа 1, 2, 3, 4 идущие подряд?
10. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0;1]$, существуют $f'(x)$, $f''(x)$ внутри этого отрезка, $f(0) = f(1) = 0$, $|f''(x)| \leq 1$. Найдите наибольшее (и наименьшее) значение, которое может принимать такая функция.

ТГПУ, 2000 год, старшие курсы, специальность

1. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее свойствами.
   1) его 1/2 - это квадрат целого числа,
   2) его 1/3 – это куб целого числа,
   3) его 1/5 – это пятая степень целого числа.
2. Докажите, что если в определителе D порядка n все элементы равны или -1, то при $n \geq 3$ имеем $|D| \leq (n-1)(n-1)!$.

3. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi} \ln(1+\sin\alpha\cos x)\dfrac{dx}{\cos x}$.

4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$,

$a \in \mathbf{R}$, $a = \text{const}$.

5. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной дугами парабол $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = cx$, $y^2 = dx$, где $0 < a < b$, $0 < c < d$.

6. Найдите все функции $u(x,y)$, удовлетворяющие для $\forall x,y \in \mathbf{R}$ уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

7. Покажите, что для криволинейных интегралов второго рода неверна, вообще говоря, формула среднего значения: $\int\limits_{AB} f(x,y)dx = f(\xi,\eta)\int\limits_{AB} dx$, где AB – гладкая кривая, $f(x,y)$ - непрерывная вдоль AB функция, (ξ,η) - некоторая точка кривой AB .

8. Снегопад начался до полуночи и продолжался, не усиливаясь и не ослабевая. Снегоочистительная машина начала работать в полночь и, убирая за равные промежутки времени равные количества снега, счистила за первые 2 часа работы 10 км пути, а за следующие 2 часа работы – еще 5 км пути. Когда начался снегопад?

ТГУ, 2001 год, старшие курсы, специальность

1. Пусть $f(x,y)$ – вещественная функция двух переменных, непрерывная по каждой из переменных x, y в отдельности и монотонная по y. Докажите, что функция $f(x,y)$ непрерывна и по совокупности переменных.

2. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} + \frac{1}{\sqrt{nn}}\right).$$

3. Пусть $x(t)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,\pi]$ функция, такая, что $x(0) = x(\pi) = 0$. Докажите, что
$$\int_0^{\pi} (x'^2(t) - x^2(t))\,dt \geq 0.$$

4. Докажите, что если натуральное число n больше единицы, то число $n^n - n^2 + n - 1$ делится на $(n-1)^2$.

5. Проводится круговой турнир по настольному теннису (ничьих нет) среди n участников. Докажите, что сумма квадратов выигрышей всех участников равна сумме квадратов проигрышей всех участников.

6. Синусы углов треугольника рациональны. Докажите, что их косинусы также рациональны.

7. Существует ли многочлен $P(x)$ 2001-й степени такой, что $P(x^2-1)$ делится на $P(x)$?

8. В квадратной матрице A столбцы являются попарно ортогональными векторами. Докажите, что абсолютная величина определителя матрицы A равна произведению длин векторов-столбцов.

ТГПУ, 2002, старшие курсы, специальность

1. Для произвольной квадратной матрицы A определим $\sin A$ с помощью степенного ряда: $$\sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2\nu+1}.$$

Существует ли такая 2×2 матрица A, что $\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2002 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

2. Найдите x, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2001}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2002}$.

3. Найдите все функции, удовлетворяющие условию:
$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 2x_1x_2$ для $\forall x_1, x_2 \in R$.

4. Найдите экстремумы определенной в R^2 функции
$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$.

5. Докажите, что если для любых действительных x и $a \neq 0$ выполняется равенство

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

то $f(x)$ - периодическая функция. Найдите ее период.

6. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1-0} (1-x)^{p+1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p x^n$, где $p \in \mathrm{N} \cup \{0\}$.

7. Пусть α и β корни многочлена $g(x) = x^2 + cx + d$, $g(x) \in \mathrm{Z}[x]$, ($g(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами). Многочлен

$$f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \in \mathrm{Z}[x].$$

Докажите, что $(f(\alpha) + f(\beta)) \in \mathrm{Z}$ и что для

$$\forall\, a, b \in \mathrm{Z}, \qquad \left(f\left(a+\sqrt{b}\right) + f\left(a-\sqrt{b}\right)\right) \in \mathrm{Z}.$$

8. Человек рассеянный шел домой вверх по течению реки со скоростью в 1,5 раза большей, чем скорость течения, и держал в руках палку и шляпу. Он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой, и продолжал идти с той же скоростью. Вскоре он заметил ошибку, бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью вдвое большей, чем шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно выудил ее из воды, повернулся и пошел вверх по течению с первоначальной скоростью. Через 10 минут после того, как он поймал шляпу, он встретил плывущую по ручью палку. На сколько минут он пришел бы домой раньше, если бы не перепутал палку со шляпой?

ТГУ, 2003, старшие курсы, специальность

1. Дан набор чисел $\{0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$. Известно, что среди любых четырех чисел из этого набора есть равные, а среди любых пяти чисел равных не более трех. Найдите количество нулей в этом наборе.

2. Докажите, что если в гармоническом ряде $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ отбросить все слагаемые, в знаменателе которых хотя бы один раз встречается цифра 7, то оставшийся ряд станет сходящимся.

3. Найдите кратчайшее расстояние между графиками функций $y=x^2+4$ и $y=-x^2+12x-32$.

4. Вычислите

$$\underbrace{\sin\ln i^{\frac{\sin\ln i^{\frac{\sin\ln i^{\cdot^{\cdot^{\frac{\sin\ln i^{\frac{\sin\ln i^{i}}{i}}}{i}}}}}{i}}}{i}}}_{2003\,\textit{раза}}$$

где i – мнимая единица.

5. Квадратная матрица A такова, что в каждом её столбце есть ровно два ненулевых элемента: диагональный, который больше единицы и некоторый недиагональный, равный единице. Может ли матрица A быть вырожденной?

6. Докажите, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{\frac{2-n-n^2}{2}}$ является иррациональным числом.

7. Даны вещественные числа c_0, c_1, ..., c_n такие, что

$c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\ldots+\frac{c_n}{n+1}=0$. Докажите, что многочлен $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$ имеет хотя бы один вещественный корень.

8. На отрезке $[0,1]$ задана функция $f(x)=x^2$. При каких положениях точки $t\in[0,1]$ сумма площадей S_1+S_2 имеет наибольшее и наименьшее значения? Найдите эти значения.

ТПУ, 2004, старшие курсы, специальность

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x \cos(t^2)\,dt}{x}$.

2. Докажите, что существует многочлен $P(x)$ такой, что $\forall n\in\mathbb{N}$ верно равенство $\int\limits_{n-1}^{n} P(x)dx = n^4$ и найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}k^4$.

3. Покажите, что сумма $S(x)$ ряда $x^2+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(x^{2n}-x^{2n-2}\right)$, членами которого являются непрерывные всюду функции, имеет точки разрыва. Объясните причину их существования.

4. Найдите e^A для матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha & 0\end{pmatrix}$.

5. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$.

6. Луг, имеющий форму квадрата со стороной a, равномерно покрыт скошенной травой с плотностью ρ. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать всё сено в центр луга, если работа по

транспортировке груза массой m на расстояние x равна $\gamma m x$, $(0<\gamma<1)$?

7. Вычислите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}$, где $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$.

8. Дано уравнение: $y'''' - 8y''' + 56y'' - 160y' + 400y = 2\cdot\exp(4x)$.

Известно, что один корень характеристического уравнения равен $(2-4i)$. Найдите общее решение дифференциального уравнения.

ТГУ, 2005, старшие курсы, специальность

1. В пространстве отмечено n различных точек. Докажите, что существует прямая, все проекции точек на которую различны.

2. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция, причем $f(f(x))=x$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Докажите, что существует точка $x_0\in\mathbb{R}$, в которой $f(x_0)=x_0$.

3. Докажите существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{n+a}\frac{\sin x}{x}dx$ $(a>0)$ и вычислите его.

4. Докажите, что если $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\alpha$, то $x^n+\dfrac{1}{x^n}=2\cos n\alpha$.

5. Найдите предел последовательности, определенной следующим образом: $x_{n+1}=\dfrac{x_n+a/x_n}{2}$, $n\ge 1$, $x_1>0$, $a>0$.

6. Докажите, что следующая краевая задача не имеет другого решения, кроме $y(x) \equiv 0$: $\begin{cases} y'' = e^x y, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$

7. Дана матрица A размера 2005×2005

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите определитель матрицы $A - \lambda E$, где E – единичная матрица размера 2005×2005.

8. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \cos a_n$.

Байкальская математическая олимпиада студентов технических вузов ИрГТУ, 2004, 1 курс

1. Докажите, что решение $y(x)$ задачи Коши:

$$y' = \frac{0,5 + \sqrt{xy}}{1 + x + y} + \frac{\sin^2(xy + 1)}{2}, \quad y(0) = 0 \text{ при } x \geq 0$$

удовлетворяет условию $0 \leq y(x) \leq x$. *(5 баллов)*

2. Докажите неравенство $x > \ln(1 + x)$, где $x > 0$. *(3 балла)*

3. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$. *(3 балла)*

4. Вычислите $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}^{2004}$, где i – мнимая единица. *(4 балла)*

5. Даны числа $m_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$; $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = M$ и числа $x_i > 1$, $i = 1,\ldots,n$.

Докажите, что $\dfrac{m_1 \ln x_1 + \ldots + m_n \ln x_n}{M} < \ln \dfrac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{M}$. *(6 баллов)*

6. Несколько человек сидят по кругу так, что у каждого из них имеется по одному соседу справа и слева. Каждый из сидящих располагает определённым количеством шиллингов. У первого на один шиллинг больше, чем у второго, у второго на один шиллинг больше, чем у третьего, и так далее. Первый из сидящих отдаёт один шиллинг второму, второй – два шиллинга третьему и т.д.. Каждый отдаёт следующему на один шиллинг больше, чем получил сам, до тех пор, пока это возможно. В результате, у одного из сидящих денег оказалось в четыре раза больше, чем у его соседа. Сколько всего было людей и сколько шиллингов было сначала у самого бедного из них. *(6 баллов)*

7. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - xy' - y = 0.$$ *(3 балла)*

Байкальская математическая олимпиада студентов технических вузов ИрГТУ, 2004, старшие курсы

1. Отрезок длиной l перемещается так, что его концы расположены на параболе Q: $y = x^2$, при этом середина отрезка, точка M, описывает линию L. При каком значении l площадь фигуры, ограниченной линиями Q и L равна 1. *(5 баллов)*

2. Вычислите:

$$Z = \max_{0\le x\le 1}\left(\min_{0\le y\le 1}(x+y-1)^2\right) - \min_{0\le y\le 1}\left(\max_{0\le x\le 1}(x+y-1)^2\right).$$ *(3 балла)*

3. Вычислите:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+1/2}+\ldots+\frac{2^{n/n}}{n+1/n}\right).$$ *(6 баллов)*

4. На бесконечной плоскости случайным образом выбраны три точки. Найдите вероятность того, что они являются вершинами тупоугольного треугольника. Предполагается, что вероятность лежать на одной прямой равна нулю. *(3 балла)*

5. Вычислите сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$. *(6 баллов)*

6. Вычислите: $J(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2xy\,dx$, если $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *(4 балла)*

7. Найдите на комплексной плоскости область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left|\frac{z-i}{z-1}\right|^n.$$ *(3 балла)*

Всероссийская дистанционная математическая олимпиада для студентов технических вузов. 21-22 сентября 2004 г. Новочеркасск, ЮРГТУ (НПИ)
Пробный вариант

1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (с коэффициентом подобия λ). Если длины сторон ΔABC a, b, c, то соответствующие стороны $\Delta A_1B_1C_1$ имеют длины $3a+b+c,\ a+3b+c,\ a+b+3c$. Определите вид треугольников найдите λ.

2. Изобразите множество точек (x, y) на плоскости, координаты

которых удовлетворяют неравенству: $\sqrt{2-y}\sqrt{y-4x^2} \geq 2x\sqrt{y}$.

Найдите площадь получившейся фигуры.

3. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(2nx)}\, dx$.

4. Найдите $y(x)$ из уравнения $\int\limits_{-x}^{x} t\; y(t)\; dt \;=\; y(x)+x^2+1$.

5. При каком $n \in \mathbb{N}$ $y^{(n)}(2) = 36$, если $y(x) = \ln\left((x-1)^{2x}\right)$?

6. Вычислите интеграл: $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x^3+y^3}$, $D:\ \begin{cases} x+y \geq 1, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$

7. Докажите, что если $5z^4 - 4iz^3 + 4iz + 5 = 0$, то $|z| = 1$.

8. Случайная величина ξ имеет непрерывную плотность $f(x)$ вида

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x \leq 0,\ x > \pi, \\ ax,\ 0 < x \leq \pi/2, \\ b\sin x,\ \pi/2 < x \leq \pi, \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Найдите вероятность $P\{\xi > 2\pi/3\}$.

Всероссийская дистанционная математическая олимпиада для студентов технических вузов. 21-22 сентября 2004 г. Новочеркасск, ЮРГТУ (НПИ)

1. Не пользуясь общей теорией кривых второго порядка, докажите, что кривая $x^2+y^2+xy=3$ – эллипс. Через центр этого эллипса проведите прямую так, чтобы сумма квадратов расстояний от вершин эллипса до прямой была а) минимальной; б) максимальной.

2. Два прямых конуса имеют общее основание, ограниченное

эллипсом с полуосями a и b $((a > b)$, и расположены по раз стороны от него. Высота одного конуса h, другого – H $(h \le H)$. Найдите наибольшее расстояние между прямыми, содержащими образующие этих конусов.

3. Найдите предел последовательности $x_n = \frac{1}{n^{p-2}} \sum_{k=n^p}^{(n+1)^p} \frac{1}{\sqrt[p]{k}}$ $(p \in N,\ p \ge 2)$.

4. Найдите $n \in N$ $(n > 1)$ из уравнения $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + nx^n} = \frac{\ln(2n+6)}{n-1}$.

5. Найдите $\lim_{n\to\infty}(1 - \cos(\pi / n)) \sum \frac{i^2 + j^2}{n^2 + i^2 + j^2}$, где сумма составлена по всем целым i и j таким, что $i \ge 0,\ j \ge 0,\ i^2 + j^2 \le n^2$.

6. Найдите все непрерывные функции $f(x),\ x \in R$, если

$$\iint_D x f\left(\frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dxdy = a^2 (f(a) + \sin a - 1)/3,$$

$a \ge 0,\ D: x^2 + y^2 \le a^2,\ |y| \le x / \sqrt{3},\ x \ge 0$.

7. Докажите, что решение задачи Коши $y' = \frac{x(1 + \sin^2 y)}{(1 + \sin^2 y)x^4 + y^2 + 1}$, $y(0) = 0$, удовлетворяет для $\forall x \ge 0$ неравенству $0 \le y(x) < \pi / 4$.

8. При каких $a \geq 0$ система уравнений $\begin{cases} \left| z+z^{-1} \right| = a, \\ \left| z-i \right| = 1, \end{cases}$ имеет решение? Найдите его.

9. В параболический сегмент с основанием $2a = 1$ высотой $h = 1$ вписан круг, одна из точек касания совпадает с центром основания. В сегмент наудачу бросаются $n > 3$ точек. Какова вероятность, что не менее трех из них попадут в круг? При каком наименьшем n в круг попадут в среднем не менее трех точек?

Задачи с решениями

Векторная и линейная алгебра

1. Матрицей Грама системы векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называется квадратная матрица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\bar{a}_1,\bar{a}_1) & (\bar{a}_1,\bar{a}_2) & \cdots & (\bar{a}_1,\bar{a}_n) \\ (\bar{a}_2,\bar{a}_1) & (\bar{a}_2,\bar{a}_2) & \cdots & (\bar{a}_2,\bar{a}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{a}_n,\bar{a}_1) & (\bar{a}_n,\bar{a}_2) & \cdots & (\bar{a}_n,\bar{a}_n) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \left(\bar{a}_i, \bar{a}_j\right) \text{ -}$$

скалярные произведения соответствующих векторов. Доказать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда определитель матрицы Γ равен нулю.

Решение. *Необходимость.* Пусть векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ линейно зависимы, т.е. $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0$ (*), причем, по крайней мере, одно из $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Умножим скалярно обе части (*) сначала на $\bar{a}_1$, затем на $\bar{a}_2$, и так далее. Получим

(1) $\lambda_1 (\bar{a}_1, \bar{a}_1) + \lambda_2 (\bar{a}_1, \bar{a}_2) + \dots + \lambda_n (\bar{a}_1, \bar{a}_n) = 0$

(2) $\lambda_1 (\bar{a}_2, \bar{a}_1) + \lambda_2 (\bar{a}_2, \bar{a}_2) + \dots + \lambda_n (\bar{a}_2, \bar{a}_n) = 0$

... .

(n) $\lambda_1 (\bar{a}_n, \bar{a}_1) + \lambda_2 (\bar{a}_n, \bar{a}_2) + \dots + \lambda_n (\bar{a}_n, \bar{a}_n) = 0$

Равенства (1) – (n) будем рассматривать как систему уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Чтобы нашлось нетривиальное решение системы, надо, чтобы ее определитель был равен 0: $\det\Gamma = 0$. *Достаточность* доказывается аналогично.

2. Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 - четыре луча, исходящие из одной точки, α_{ij} - угол между лучами l_i, l_j. Показать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_{12} & \cos\alpha_{13} & \cos\alpha_{14} \\ \cos\alpha_{21} & 1 & \cos\alpha_{23} & \cos\alpha_{24} \\ \cos\alpha_{31} & \cos\alpha_{32} & 1 & \cos\alpha_{34} \\ \cos\alpha_{41} & \cos\alpha_{42} & \cos\alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Поставим в соответствие лучам l_i единичные векторы $\bar{l}_i$, ($i = 1, 2, 3, 4$). Они линейно зависимы, поэтому можно воспользоваться результатом задачи 1.

3. Доказать, что каковы бы ни были элементы определителя третьего порядка, все его члены разложения не могут иметь одинаковые знаки.
Решение. Обозначив элементы определителя через a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и раскрыв его, предположим, что все шесть слагаемых имеют одинаковые знаки, например, положительны. Тогда, (1) $a_{11}a_{22}a_{33} > 0$, (2) $a_{12}a_{23}a_{31} > 0$, (3) $a_{13}a_{21}a_{32} > 0$, (4) $a_{13}a_{22}a_{31} < 0$, (5) $a_{12}a_{21}a_{33} < 0$, (6) $a_{11}a_{23}a_{32} < 0$. Перемножив почленно неравенства (1- 4), получим $a_{11}a_{23}a_{32}(a_{13})^2(a_{22})^2(a_{31})^2 a_{21}a_{12}a_{33} < 0$. Последнее неравенство противоречит (5) - (6). Аналогичное противоречие получаем, предположив, что все шесть слагаемых в разложении определителя отрицательны.

4. Пусть даны k k - разрядных чисел, каждое из которых делится на данное число m нацело. Рассмотрим определитель k - ого порядка, составленный следующим образом: каждая строка его - k цифр по порядку соответствующего числа. Доказать, что определитель тоже делится на m нацело.

Решение. Пусть данные числа имеют вид:
$a_{11}a_{12}\ldots a_{1k}$, $a_{21}a_{22}\ldots a_{2k}$, ……, $a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kk}$, где a_{ij} - цифра, стоящая в j - ом разряде i - го числа. Имеем определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c} \textit{умножаем первый столбец на } 10^k, \\ \textit{второй на } 10^{k-1},\ldots, \textit{предпоследний на } 10, \\ \textit{и складываем с последним столбцом} \end{array} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{11}a_{12}\ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{21}a_{22}\ldots a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kk} \end{vmatrix}$$, который делится на m, так как каждый элемент последнего столбца делится на m.

5. Дан треугольник $\Delta A_1A_2A_3$. На его сторонах (или продолжениях сторон) берутся произвольные точки $L \in A_1A_2$, $M \in A_2A_3$, $N \in A_3A_1$. Известно, что $\frac{A_1L}{LA_2} = \lambda$, $\frac{A_2M}{MA_3} = \mu$, $\frac{A_3N}{NA_3} = \nu$. Доказать, что необходимым и достаточным условием того, что точки L, M, N лежат на одной прямой, является $\lambda\mu\nu = -1$.

Решение. Обозначим $A_i(x_i, y_i)$, где $i = 1,2,3$, $L(x_6, y_6)$, $M(x_5, y_5)$, $N(x_4, y_4)$. Имеем $x_6 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_6 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$,

$x_5 = \frac{x_2 + \mu x_3}{1+\mu}$, $y_5 = \frac{y_2 + \mu y_3}{1+\mu}$, $x_4 = \frac{x_3 + \nu x_1}{1+\nu}$, $y_4 = \frac{y_3 + \nu y_1}{1+\nu}$. Чтобы точки L, M, N лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы $S_{\Delta LMN} = 0$, то есть

$\frac{1}{2}\left|(x_4y_5 + x_5y_6 + x_6y_4) - (x_4y_6 + x_6y_5 + x_5y_4)\right| = \ldots$

$\ldots = \frac{1}{2}\left|S_{\Delta A_1A_2A_3} + \lambda\mu\nu S_{\Delta A_1A_2A_3}\right| = 0$. Последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda\mu\nu = -1$.

6. Определить геометрическое место вершин парабол

$$y = x^2 - \frac{4mx}{1+m^2} + \frac{1+4m^2+m^4}{(1+m^2)^2}, \text{ где } -\infty < m < +\infty.$$

Решение. Представим уравнение параболы в виде

$y = \left(x - \frac{2m}{1+m^2}\right) + \frac{1+m^4}{(1+m^2)^2}$, откуда параметрические уравнения

вершин: $x = \frac{2m}{1+m^2}$, $y = \frac{1+m^4}{(1+m^2)^2}$. Чтобы исключить параметр m,

выразим из первого уравнения $\frac{m}{1+m^2}$ через x, возведем результат в

квадрат и сложим с y. Получим $2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y = \frac{2m^2+1+m^4}{(1+m^2)^2} = 1$.

Отсюда ответ: геометрическое место точек, являющихся вершинами

данных парабол, есть парабола $y = 1 - \frac{x^2}{2}$.

Предел, производная, исследование функций

7. При каких условиях уравнение $x^3 + hx + q = 0$ имеет:

а) один действительный корень, б) два действительных корня?

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^3 + hx + q$, $y' = 3x^2 + p$. Тогда

а) если $p \geq 0$, то функция монотонно возрастает и, следовательно, исследуемое уравнение имеет единственный корень.

б) Пусть $p < 0$. Тогда экстремум функции достигается в двух точках

$x_1 = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Ясно, что уравнение будет иметь три действительных корня только в случае, если значения функции в точках экстремума будут противоположны по знаку, то есть

$y(x_1)y(x_2) < 0$. Отсюда получим искомое условие $27q^2 + 16p^3 < 0$.

8. Построить график функции $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$.

Решение. Рассмотрим поведение функции $y(x)$ на различных промежутках: а) $0 \le x < 1$;

$$y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x^n}{n} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n}\right) = 1.$$

б) $x = 1$; $\quad y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1.$

в) $1 < x < 2$; $\quad y = \lim\limits_{n\to\infty} x\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^n} + \frac{x^n}{2^n}} = x.$

г) $x = 2$; $\quad y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot 2} = 2.$

д) $x > 2$; $\quad y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \left(\frac{2}{x}\right)^n + 1} = \frac{x^2}{2}.$

е) $-2 \le x \le -1$ – предела не существует.

ж) $x < -2$; $\quad y = \frac{x^2}{2}.$

9. Доказать, что функция $y = 2\mathrm{arctg}\, x - \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ равна 0 при $|x| < 1$ и равна $4\mathrm{arctg}\, x - \pi$ при $|x| > 1$.

Решение. Вычислим производную от функции $y(x)$:

$$y' = \frac{2}{1+x^2}\left(1 - sign(1 - x^2)\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{1+x^2}, & если\ |x| > 1 \\ 0, & если\ |x| < 1. \end{cases} \quad \text{Но тогда}\quad y = \begin{cases} 4arctgx + c_2, & если\ |x| > 1 \\ c_1, & если\ |x| < 1 \end{cases}.$$

Постоянные c_1 и c_2 определим, вычислив значения $y(0)$ и $y(1)$. Так как $y(0)$, то и $c_1 = 0$. Так как функция $y = 2\mathrm{arctg}\, x - \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ непрерывна в точке $x = 1$, то $4\mathrm{arctg}1 + c_2 = 0$ и $c_2 = -\pi$.

10. Доказать, что существуют единственные $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, такие, что $a < b$ и $\sin(\cos a) = a$, $\cos(\sin b) = b$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sin(\cos x) - x$, где $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Имеем: $y(0) = \sin 1 > 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$.

$y' = [\cos(\sin\ x)](-\sin\ x) - 1 < 0$ в $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому существует, при том единственная, точка $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, в которой $y(a) = \sin(\cos a) - a$, откуда $\sin(\cos a) = a$. Аналогично решается вторая часть задачи.

11. Известно, что существуют оба экстремума функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, а прямая, проходящая через экстремальные точки, проходит и через начало координат. Определить зависимость между коэффициентами a, b, c, d.

Решение. Имеем $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ (*). Оба корня уравнения (*) существуют, обозначим их x_1 и x_2. Условия принадлежности точек (x_1, y_1), $(0, 0)$, (x_1, y_2) одной прямой запишем в виде:

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d}{ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d}$. После очевидных тождественных преобразований получим: $(x_1 - x_2)[ax_1x_2(x_1 + x_2) + bx_1x_2 - d] = 0$. Так как $x_1 \neq x_2$, имеем $ax_1x_2(x_1 + x_2) + bx_1x_2 - d = 0$. Воспользовавшись теоремой Виета, получим $a \cdot \frac{c}{3a}\left(-\frac{2b}{3a}\right) + b \cdot \frac{c}{3a} - d = 0$ или

$bc - 9ad = 0$.

12. Найти многочлен наименьшей степени, принимающий максимальное значение 6 при $x = 1$ и минимальное значение 2 при $x = 3$.

Решение. Так как $p'(1) = p'(3) = 0$, то $p'(x)$ – многочлен степени не меньше, чем 2 и $p(x)$ – многочлен степени не меньше, чем 3. Положив $p'(x) = A(x-1)(x-3) = A(x^2 - 4x + 3)$, из условий $p''(1) < 0$ и $p''(3) > 0$ получим $A > 0$. Далее получим

$$p(x) = A\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right) + B, \text{ откуда } p(1) = \frac{4}{3}A + B = 6 \text{ и } p(3) = B = 2.$$

Следовательно, $B = 2$ и $A = 3$. Окончательно, $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

13. Дано $S_1 = \sqrt{2}$, $S_{n+1} = \sqrt{2 + S_n}$. Доказать, что последовательность $\{S_n\}$ имеет предел, и найти этот предел.

Решение. Пусть $S_n < 2$. Тогда S_{n+1}, очевидно, тоже меньше 2. Так как $x + 2 > x^2$ прн $0 < x < 2$, то $S_{n+1} > S_n$. Поэтому $\{S_n\}$ ограничена сверху и монотонно возрастает. Обозначив её предел S, получим $S = \sqrt{S+2}$, или $S^2 = S + 2$, откуда либо $S = -1$, либо $S = 2$. Первый случай невозможен, так что $S = 2$.

14. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность такая, что $x_0 = 25$, $x_n = arctg\, x_{n-1}$. Доказать, что она имеет предел, и найти этот предел.

Решение. Пусть $y(x) = arctg\, x$. При $x = 0$ $y(x) = 0$; при $x > 0$

$$y'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} < 1, \text{ так что при } x > 0 \quad y(x) < x \quad \text{Поэтому}$$

последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает; для каждого n $x_n > 0$, так что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a$. Переходя к пределу в соотношении $x_{n+1} = arctg\, x_n$ (что возможно в силу непрерывности функции $y(x)$ на $(-\infty, +\infty)$, имеем $a = \operatorname{arctg} a$, откуда $a = 0$.

15. Существует ли функция, значение которой конечно в каждой точке отрезка $[0,1]$, но не ограниченная в любой окрестности любой точки этого отрезка?

Решение. Такой функцией $f(x)$ является, например, функция, равная 0 для любого иррационального x, а для рационального x, представленного в виде несократимой дробн $\frac{p}{q}$, равная q.

16. Определить λ и μ таким образом, чтобы имело место равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right)=0.$

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(\lambda x+\mu))=0$, откуда $\lambda=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ (в данном случае $\lambda=-1$), $\mu=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-\lambda x)$ (в данном случае $\mu=0$).

17. Пусть $f(x)$ – нечётная дифференцируемая на промежутке $(-\infty,+\infty)$ функция. Доказать, что а) $f'(x)$ – четная функция. б) Верно ли обратное утверждение?

Решение. Дифференцируя почленно равенство $f(-x)=-f(x)$, получаем $f'(-x)=f'(x)$. В обратную сторону утверждение неверно. В этом легко убедиться, взяв, например, функцию $f(x)=x+1$.

18. Функция f (x) имеет на полуоси $(0,+\infty)$ непрерывную производную, f (0) = 1, $|f(x)|\le e^{-x}$ при всех $x\ge 0$. Доказать, что существует такая точка x_0, что $f'(x_0)=-e^{-x_0}$.

Решение. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$. Имеем $\varphi(0)=0$; при $x\ge 0$ $\varphi(x)\le 0$ и $\varphi(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Поэтому существует точка x_0, в которой функция $\varphi(x)$ достигает наименьшего значения; в точке x_0 производная функция $\varphi'(x_0)=0$, то есть $f'(x_0)+e^{-x_0}=0$ и $f'(x_0)=-e^{-x_0}$.

19. Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале (- a, a), и пусть последовательность $f^{(n)}(x)$ сходится равномерно на интервале (- a, a). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(0)=1$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x)$.

Решение. Пусть $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x)$. Почленно интегрируя, получим $\int\limits_0^x g(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)\right) = g(x) - 1$. Отсюда видно, что $g(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $g'(x) = g(x)$ и начальному условию $g(0) = 1$, то есть $g(x) = e^x$.

Интегральное исчисление

20. Определить объём тора (тела, полученного вращением круга радиуса R вокруг не пересекающей его оси). Расстояние от центра круга до оси равно d.

Решение. Пусть тор получается вращением окружности $y = d \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ относительно оси Ox; тогда его объём равен

$$\pi \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(d + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(d - \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 4\pi d \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 4\pi dR^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi = 2\pi^2 dR^2 .$$

21. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^\alpha\right)}$ не зависит от величины α.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^\alpha\right)} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^\alpha\right)} + \int\limits_1^\infty \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^\alpha\right)} = J_1 + J_2 .$$

Сделаем в первом интеграле замену $x = 1/y$; тогда

$$J_1 = \int\limits_1^\infty \frac{dy}{\left(1 + y^2\right)\left(1 + y^{-\alpha}\right)}; \qquad J_1 + J_2 = \int\limits_1^\infty\left(\frac{1}{1 + x^\alpha} + \frac{x^\alpha}{1 + x^\alpha}\right)\frac{dx}{1 + x^2} = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2},$$

что не зависит от величины α.

22. Доказать, что если уравнение $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + .. + c_n x_n^n = 0$ имеет коэффициенты c_i $(i = 0, 1, .., n)$ такие, что

$\frac{c_0}{1}+\frac{c_1}{2}+\ldots+\frac{c_{n-1}}{n}+\frac{c_n}{n+1}=0$, то оно имеет по крайне мере один действительный корень, заключенный между нулем и единицей.

Решение. Обозначим левую часть уравнения $P_n(x)$. Проинтегрируем обе части равенства $P_n(x)=0$,

получим: $c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\ldots+\frac{c_{n-1}}{n}x^n+\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}+A=0$. Левую часть этого уравнения обозначим $P_{n+1}(x)$. Имеем $P_{n+1}(x)=0$. Функция $P_{n+1}(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля на отрезке $[0;1]$ (дифференцируема, непрерывна, и $P_{n+1}(0)=A$, $P_{n+1}(1)=A+0=A$). Тогда найдется точка $x_0\in[0;1]$, в которой $P'_{n+1}(x_0)=P_n(x_0)=0$.

23. Подобрать форму сосуда (поверхность вращения) так, чтобы сосуд можно было использовать в качестве водяных часов (понижение уровня воды в сосуде x должно быть строго пропорционально времени t).

Решение. Пусть $x=F(y)$ – площадь поперечного сечения сосуда. За время dt должно вытечь $F(y)dx$ воды. С другой стороны, за это же время вытекает $k\sqrt{2gh-2gx}\,dt$ воды. Имеем: $F\,dx=k\sqrt{2gh-2gx}\,dt$. Но,

по условию, $dt=c\,dx$ и $F=\pi y^2$. Откуда уравнение поверхности сосуда:

$\pi y^2=ck\sqrt{2g}\,(h-x)^{\frac{1}{2}}$. Или $y^4=a^4(h-x)$.

24. Известно, что $y=g(x)$ непрерывна на $(-\infty,\infty)$ и существует $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx$. Доказать, что $\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx$.

Решение.

$$\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_{-\infty}^{-1}g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx+\int_{-1}^{0}g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx+\int_{0}^{1}g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx+$$

$$+\int_1^{\infty} g\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \left|\begin{matrix} y = x-\dfrac{1}{x}, & x_{1/2} = \dfrac{y}{2} \pm \dfrac{\sqrt{y^2+4}}{2} \\ x^2-xy-1=0, & dx = \dfrac{dy}{2} \pm \dfrac{ydy}{2\sqrt{y^2+4}} \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} g(y)\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy + \int_0^{\infty} g(y)\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} g(y)\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy + \int_0^{\infty} g(y)\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2\sqrt{y^2+4}}\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}dy - \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}dy.$$ Последние два интеграла

сходятся ($g(y)$ - интегрируема, а $\left|\dfrac{y}{\sqrt{y^2+4}}\right| < 1$) и равны. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\left(y-\frac{1}{y}\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy.$$

25. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $[0;1]$ и вогнута. Кроме того, $f'(1) < 2f(x)$ на этом отрезке. Показать, что

$$\int_0^1 f(x)dx > 0$$

Решение. Воспользуемся формулой Тейлора

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \dfrac{f''(\theta)(x-1)^2}{2!}$. Так как $f(x)$ дважды

дифференцируема на $[0;1]$ и вогнута, ее вторая производная неотрицательна, $f''(\theta) \ge 0$, $\theta \in (0;1)$ и третье слагаемое в разложении неотрицательно Тогда $f(x) \ge f(1) + f'(1)(x-1)$. По условию

$\frac{f'(1)}{2} > f(1)$, поэтому $f(x) < \frac{f'(1)}{2} + f'(1)(x-1) = f'(x - \frac{1}{2})$. Отсюда

$$\int_0^1 f(x)dx > f'(1)\int_0^1 (x - \tfrac{1}{2})dx = f'(1)\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2}\bigg|_0^1 = 0.$$

26. Внутри непрерывной выпуклой замкнутой кривой взята точка и через нее проведены хорды. Доказать, что если хорда отсекает сегмент наименьшей (наибольшей) площади, то данная точка является серединой хорды. Справедливо ли обратное утверждение? Какие результаты вытекают из данного утверждения для окружности.

Решение. Введем полярную систему координат, поместив полюс в данную точку O. Пусть уравнение кривой $\rho = \rho(\varphi)$. Следует показать, что $\rho(\varphi_0) = \rho(\varphi_0 + \pi)$, где φ_0 - угол, при котором хорда отсекает наименьшую или наибольшую площадь. Исследуем на экстремум функцию $S(\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\pi}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

$S'(\varphi_0) = \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} = \frac{1}{2}\left[\rho^2(\varphi_0 - \pi) - \rho^2(\varphi_0)\right] = 0$. Отсюда следует $\rho(\varphi_0 + \pi) = \rho(\varphi_0)$, что означает, что точка O лежит на середине хорды.

27. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, которая получается при вращении линии $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}$ вокруг оси OX, $x \in [0;\infty)$.

Решение.

$$V = \sum_{k=0}^{\infty}\pi\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-2x}\sin x dx = \pi\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{e^{-2x}(-2\sin x - \cos x)}{5}\right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} =$$

$$= \pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-2(2k+1)\pi} + e^{-2(2k\pi)}}{5} =$$

$$= \frac{\pi}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-2(2k+1)\pi} + e^{-4k\pi}\right) = \frac{\pi}{5}\left(1 + \frac{1}{e^{2\pi}} + \frac{1}{e^{4\pi}} + \cdots\right) = \frac{\pi}{5\left(1 - \frac{1}{e^{2\pi}}\right)} = \frac{\pi e e^{2\pi}}{5(e^{2\pi} - 1)}$$

28. Пусть функция   периодическая с периодом ω и интегрируемая на каждом конечном отрезке действительной оси. Доказать, что необходимым и достаточным условием периодичности функции $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ с тем же самым периодом является $\int_0^\omega f(t)dt = 0$.

Решение. Имеем $F(x+\omega) = \int_0^{x+\omega} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+\omega} f(t)dt$.

Тогда $F(x+\omega) - F(x) = = \int_x^{x+\omega} f(t)dt = \int_0^\omega f(t)dt$ в силу периодичности функции $f(x)$, откуда доказательство очевидно.

29. Найти все функции $f(x) \geq 0$, определенные на $[0;1]$ и такие, что $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $\int_0^1 xf(x)dx = A$, $\int_0^1 x^2 f(x)dx = A^2$, где A - данное действительное число.

Решенне. Имеем $\int_0^1 A^2 f(x)dx = A^2$ (1); $\int_0^1 2Axf(x)dx = 2A^2$ (2); $\int_0^1 x^2 f(x)dx = A^2$ (3) Сложим (1) и (3) и вычтем (2), получим $\int_0^1 \left[A^2 f(x) - 2Axf(x) + x^2 f(x)\right]dx = 0$ или $\int_0^1 (A-x)^2 f(x)dx = 0$. Но такое равенство возможно только в случае $f(x) \equiv 0$.

30. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$?

Решение. Ряд сходится, если сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$.

Но $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1$, и исходный ряд сходится.

31. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^x}$.

Решение. Рассмотрим $f(x)\ln^2 3=\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-nx}=\frac{1}{3^x-1}$ при $x > 0$

Нетрудно проверить, что данный ряд можно дважды почленно продифференцировать на промежутке $(0,.\infty)$, так что

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^{nx}}=\frac{3^x(3^x+1)}{(3^x-1)} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=f'(1)=\frac{3}{2}.$$

32. Известно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi}{90}$. Вычислить $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию и возьмем интеграл по частям. Имеем: $\frac{x^3}{e^x-1}=x^3\cdot\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. Так как $x\in[0;\infty]$, $e^{-x}<1$, разложим дробь $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ по степеням e^{-x}:

$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-nx}+\ldots$. Но тогда $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}=$

$$= \int_0^\infty x^3(e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} + \ldots)dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x^3, & dv = (e^{-x} + e^{-2x} + \ldots)dx \\ du = 3x^2dx, & v = -(e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + \ldots) \end{matrix} \right| =$$

$$= -x^3(e^{-x} + \tfrac{1}{2}e^{-2x} + \ldots)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 3x^2(e^{-x} + \tfrac{1}{2}e^{-2x} + \ldots)dx = \ldots$$

$$\ldots = -6\left(e^{-x} + \frac{1}{2^4}e^{-2x} + \ldots + \frac{1}{n^4}e^{-nx} + \ldots\right)\Bigg|_0^\infty = 6 \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

33. Исходя из выражения $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\ (1+x^{2^{n-1}}) = \dfrac{1-x^{2^n}}{1-x}$, **вычислить сумму**

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}} + \ldots$$

Решение. Прологарифмируем данное выражение: $\ln(1+x) + \ln(1+x^2) + \ln(1+x^4) + \ln(1+x^{2^{n-1}}) = \ln(1-x^{2^n}) - \ln(1-x)$, а результат продифференцируем:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}-1}}{1+x^{2^{n-1}}} = -\frac{2^n x^{2^n-1}}{1-x^{2^{n-1}}} + \frac{1}{1-x}.$$

Умножив обе части последнего равенства на x, получим: $\dfrac{x}{1+x} + \dfrac{2x^2}{1+x^2} + \dfrac{4x^4}{1+x^4} + \ldots + \dfrac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}} = \dfrac{x}{1-x} - \dfrac{2^n x^{2^n}}{1-x^{2^{n-1}}}$. Очевидно, $x \neq \pm 1$.

34. Цепь под влиянием собственного веса принимает форму кривой $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$. Показать, что при малых x можно заменить цепную линию параболой $y=\frac{x^2}{2a}+a$.

Решение. Разложив функцию $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ по степеням x, получим:

$$y=\frac{a}{2}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2a^2}+\ldots+1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2a^2}-\ldots)=\frac{a}{2}(2+\frac{x^2}{a^2}+\ldots)=$$
$$\frac{x^2}{2a}+a+o(x^2).$$

35. Доказать, что $n!>\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Решение. Данное неравенство эквивалентно неравенству: $e^n>\frac{n^n}{n!}$.

Но, разложив e^n по степеням n (это возможно, так как область сходимости ряда для e^x $(-\infty;\infty)$), убеждаемся, что правая часть неравенства - только одно из слагаемых в разложении e^n.

36. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$, $k\in\mathrm{N}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}-\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)}\right].$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)\ldots(i+k)}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\right],$$

откуда при $n\to\infty$ $\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}=\frac{1}{k\cdot k!}$

37. Определить порядок убывания общего члена и исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \ln^p(\sec\frac{\pi}{n})$.

Решение. $a_n = \ln^p(\sec\frac{\pi}{n}) = \ln^p(1+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}+\frac{5}{24}\frac{\pi^4}{n^4}+\ldots) \sim$

$$\left[\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}+\frac{5}{24}\frac{\pi^4}{n^4}+\ldots\right]^p \sim \left[\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}+o\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)\right]^p \sim \frac{1}{2^p}\frac{\pi^{2p}}{n^{2p}}+o\left(\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2p}\right) \sim \frac{1}{n^{2p}}.$$

Поэтому при $p>\frac{1}{2}$ ряд сходится.

38. Обозначим $\ln\ln n = \ln_2 n$, $\ln\ln\ln n = \ln_3 n, \ldots$. Доказать теорему: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если для некоторых m, a, c

$|u_n| < \dfrac{c}{n\ln n\ln_2 n\ln_3 n\ldots\ln_{m-1} n(\ln_m n)^a}$, $a>1$ и расходится, если

$|u_n| > \dfrac{c}{n\ln n\ln_2 n\ln_3 n\ldots\ln_{m-1} n(\ln_m n)^a}$, $a<1$.

Указание. Рассмотреть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, где

$v_n = \dfrac{c}{n\ln n\ln_2 n\ln_3 n\ldots\ln_{m-1} n(\ln_m n)^a}$. Можно показать, что члены этого ряда, начиная с некоторого номера k, положительны и монотонно убывают. Поэтому сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ можно выяснить, воспользовавшись интегральной теоремой Коши:

$$\int_k^{\infty} \frac{c\,dx}{x\ln x\ln_2 x\ln_3 x\ldots\ln_{m-1} x(\ln_m x)^a} = \left.\frac{c(\ln_m x)^{1-a}}{1-a}\right|_k^{\infty} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c(\ln_m k)^{1-a}}{a-1}, & \text{если } a>1 \\ \infty, & \text{если } a<1. \end{cases}$$

Далее воспользоваться признаком сравнения.

39. Показать, что $\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-n}$, (считаем $x^x = 1$ при $x=0$).

Решение. Имеем $x^x = e^{x\ln x}$, поэтому $\int_0^1 x^x\,dx = \int_0^1 e^{x\ln x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^1 x^k(\ln x)^k\,dx$. Рассмотрим интеграл $F(n,k) = \int_0^1 x^n(\ln x)^k\,dx = \left.\frac{x^{n+1}(\ln x)^k}{n+1}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{kx^n(\ln x)^{k-1}}{n+1}\,dx =$

$= -\frac{k}{n+1}F(n,k-1)$, для $n\ge 0, n\in \mathrm{N}, k\ge 1, k\in \mathrm{N}$. Откуда

$F(k,k) = = (-1)^k k!(k+1)^{-k}F(k,0) = (-1)^k k!(k+1)^{-k}\int_0^1 x^k\,dx$

$(-1)^k k!(k+1)^{-(k+1)}$.

Наконец, $\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}$.

40. Вдоль прямого шоссе на расстоянии 500 метров друг от друга стоят два дома. В каждом из них можно поселить до 20 человек. Как следует расселить 30 человек и где выбрать на шоссе место для остановки автобуса, чтобы все они вместе тратили на путь до нее как можно меньше времени?

Решение. Выбрав систему координат XOY так, что ось OX направлена вдоль шоссе и расположение первого дома соответствует $x=0$, обозначим через x координату остановки, а через y - количество жильцов в первом доме. Согласно условиям задачи, надо минимизировать функцию $S(x,y) = xy + (500-x)(30-y)$, заданную в области $0 \le x \le 500$, $0 \le y \le 30$. Действуя по стандартной методике, получим $S_{\min} = 500$. Это наименьшее значение функция достигает в точках (0,20) и (500,10). Откуда следует вывод: остановку надо делать возле одного из домов, в котором и следует поселить 20 человек.

41. Пусть функция $f(x,y)$, определенная в круге $x^2 + y^2 \le 1$ и имеющая непрерывные частные производные, удовлетворяет неравенству $|f(x)| \le A$. Доказать, что найдется такая точка в круге, в которой $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \le (2A)^2$.

Решение. Допустим, что для всех точек (x,y) круга $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = (\mathit{gradf}\,)^2 > (2A)^2$. Построим теперь кривую L наискорейшего подъема (или спуска), проходящую через точку $(0,0)$. Так как $\mathit{gradf} \ne 0$ в круге, то $f(x,y)$ внутри круга не имеет экстремумов и поэтому кривая L выходит на границу круга, причем ее длина не меньше 1. Для элементарного участка Δl кривой gradf совпадает по направлению с Δl, поэтому $\Delta f = |\mathit{gradf}| \cdot \Delta l = \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \Delta l$ и

$f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(0,0) = \int\limits_L |\mathit{gradf}| dl$,. где $(\tilde{x},\tilde{y})$ - точка кривой L, лежащая на границе круга. Но так как, по предположению, $|\mathit{gradf}| > 2A$, то

$f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(0,0) = \int\limits_L |\mathit{gradf}|\, dl > 2A \int\limits_L dl \le 2A$. Откуда

$f(\tilde{x},\tilde{y}) > f(0,0) + \int\limits_L |\mathit{gradf}|\, dl \ge f(0,0) + 2A$. Но, по условию,

$|f(0,0)| \le A$, поэтому $f(\tilde{x},\tilde{y}) > 2A - A = A$. С другой стороны, по условию, и на границе $f(\tilde{x},\tilde{y}) \le A$. Полученное противоречие и доказывает, что в круге имеется точка (x,y), в которой

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \le (2A)^2.$$

42. По поверхности, заданной уравнением $z = x^2 + 2y^2$, движется точка в направлении наискорейшего спуска. Начальное положение точки имеет координаты $(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Найти путь, пройденный точкой до окончания спуска.

Решение. Пусть масса точки $m = 1$. Тогда по закону сохранения энергии $g(z_0 - z) = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$, откуда

$$\sqrt{2g}\,dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_0 - z}}$$ и

$$\sqrt{2g} \cdot t = \int\limits_{M_0(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2})}^{O(o,o,o,)} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{z_0 - z}}\,dz.$$ Наискорейший спуск происходит, когда интеграл в правой части последнего равенства минимален. Эта задача является классической задачей вариационного исчисления. Имеем: $\Phi = F + \lambda(z)\varphi$, где $F = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{z_0 - z}}$, $\lambda(z)$ - множитель Лагранжа, $\varphi = x^2 + 2y^2 - z$. Уравнения Эйлера

принимают вид: $\begin{cases} \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \end{cases}$, откуда уравнения линии наискорейшего спуска: $\begin{cases} x^2+2y^2-z=0 \\ y-\frac{1}{2}x^2=0 \end{cases}$ и сам путь

$$L=\left|\int_0^1 \sqrt{1+x^2+(2x+3x^3)^2}\,dx\right|=\frac{5\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{4}.$$

43. Какой интеграл больше: $\int_0^1 x^x dx$ или $\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy$?

Решение. Имеем: $\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy = \int_0^1 dy\int_0^1 (xy)^{xy}\,dx = \left|\begin{matrix} xy=z \\ x=\dfrac{z}{y}\end{matrix}\right| =$

$$\int_0^1 \frac{dy}{y}\int_0^y z^z\,dz = \left|\begin{matrix} \int_0^y z^z dz=u, & du=y^y dy \\ \dfrac{dy}{y}=dv, & v=\ln y\end{matrix}\right| = \ln y\int_0^y z^z dz\Bigg|_{y=0}^{y=1} -$$

$$-\int_0^1 y^y\ln y\,dy.$$ Тогда $\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy - \int_0^1 x^x dx = \ln y\int_0^y z^z dz\Bigg|_{y=0}^{y=1} -$

$$-\int_0^1 y^y(\ln y+1)dy = \ln y\int_0^y z^z dz\Bigg|_{y=0}^{y=1} - y^y\Big|_0^1 = 0,$$ так как $y^y\Big|_0^1 = 0,$

и $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^y z^z dz$.

44. Найти наибольшее значение функции в замкнутой области, ограниченной плоскостями $-3x+2y-z=1$, $2x-y+3z=-2$, $-x+y+2z=-1$, $x+y+11z=3$, $x+y+11z=7$.

Решение. Видно, что данная область есть отрезок прямой $\begin{cases} -3x+2y-z=1 \\ 2x-y+3z=-2 \end{cases}$, заключенный между плоскостями $x+y+11z=3$ и $x+y+11z=7$. Так как функция $u=2x+y+5z$ линейно зависит от своих аргументов, то наибольшее значение должно достигаться на одном из концов отрезка. Имеем $u_{max}=34$ в точке $(-18,-18,2)$.

45. Пусть $f(x_1,x_2)$ – функция двух переменных, каждая из которых может принимать только два значения: 0 и 1. Показать, что $f(x_1,x_2)$ можно представить в виде $f(x_1,x_2)=$
$=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_1x_2$, где a_i – постоянные $(i=0,1,2,3)$.
Решение. Имеем: $f(0,0)=a_0$, $f(1,0)=a_0+a_1$, $f(0,1)=a_0+a_2$, $f(1,1)=a_0+a_1+a_2+a_3$. Рассматривая полученные равенства как систему уравнений относительно a_i, видим, что она совместна, так как ее определитель отличен от нуля.

Дифференциальные уравнения

46. Известно, что $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+tg^2 x$. Найти $f(x)$ при $0<x<1$.
Решение. Обозначим $\sin^2 x=y$. Тогда

$$f'(y)=1-2y-\frac{y}{1-y}=-2y+\frac{1}{1-y},$$

$$f(y)=\int\left(-2y+\frac{1}{1-y}\right)dy=-y^2-\ln(1-y)+c$$

$$f(x)=-(x^2+\ln(1-x))+c \quad \text{при } 0<x<1.$$

47. Доказать, что при $a>b>1$ выполняется неравенство $a^{b^a}>b^{a^b}$.
Решение. После двойного логарифмирования неравенство приводится к виду $\ln\ln a+a\ln b>\ln\ln b+b\ln a$ или, если обозначить $x=\dfrac{\ln a}{\ln b}>1$,

$y=\ln b>0$, к виду $\ln x>y\left(xe^{y}-e^{xy}\right)$. Пусть $\varphi(x,y)=xe^{y}-e^{xy}$, тогда $\varphi_y'(x,y)=xe^{y}-xe^{xy}<0$, так что $\varphi(x,y)<\varphi(x,0)=x-1$. Если $\varphi(x,y)\le 0$, то $\ln x>y\varphi(xy)$. Тогда $\varphi(x,y)=e^{y}\left(x-e^{(x-1)y}\right)>0$ и $(x-1)y<\ln x$, то есть снова $\ln x>(x-1)y>y\varphi(x,y)$.

48. Решить уравнение $\int\limits_0^1 f(tx)dt = nf(x)$.

Решение. Имеем: $\int\limits_0^1 f(tx)dt = \left|\begin{matrix} tx=z \\ dt=\dfrac{dz}{x}\end{matrix}\right| = \int\limits_0^x f(z)\dfrac{dz}{x}$. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $\int\limits_0^x f(z)dz = nxf(x)$.

Дифференцируя обе части последнего равенства по x, получим $f(x)=nf(x)+nxf'(x)$, откуда $f(x)=cx^{\frac{1-n}{n}}$.

49. Решить уравнение $y'\cos y=x-\sin y$.

Решение. Обозначим $\sin y=z$. Тогда исходное уравнение примет вид : $z'-x=z$. Откуда $z=\left(xe^{x}-e^{x}+c\right)e^{-x}$, откуда $\sin y=x-1+ce^{-x}$.

50. Доказать, что уравнение $y'+py=q(x)$, где $p\neq 0$ – постоянная, а $q(x)$ – периодическая с периодом T функция, имеет одно периодическое решение (с тем же периодом).

Решение. Очевидно, общее решение уравнения имеет вид $y(x)=\left(C+\int\limits_0^x q(t)e^{pt}dt\right)e^{-px}$. Чтобы решение было периодическим, необходимо, чтобы для любого x выполнялось:

$$\left(C+\int\limits_0^{x+T}q(t)e^{pt}dt\right)e^{-p(x+T)}=\left(C+\int\limits_0^{x}q(t)e^{pt}dt\right)e^{-px}$$, или

$$\left(C+\int\limits_0^{x+T}q(t)e^{pt}dt\right)e^{-pT}=C+\int\limits_0^{x}q(t)e^{pt}dt.$$ (*) Так как

$q(x)$ – периодическая функция, то $\int\limits_0^{x+T}q(t)e^{pt}dt=$

$$\int\limits_0^{T}q(t)e^{pt}dt+\int\limits_T^{x+T}q(t)e^{pt}dt=\left|t=z+T\right|=$$

$$=\int\limits_0^{T}q(t)e^{pt}dt+\int\limits_0^{x}q(z+T)e^{p(z+T)}dz=\int\limits_0^{T}q(t)e^{pt}dt+e^{pT}\int\limits_0^{x}q(z)e^{pz}dz$$ и

равенство (*) примет вид $\left(C+\int\limits_0^{T}q(t)e^{pt}dt\right)e^{-px}=C$. Откуда $C=$

$\dfrac{e^{-pt}}{1-e^{-pt}}\int\limits_0^{T}q(t)e^{pt}dt$. При таком значении постоянной C решение $y(x)$ дифференциального уравнения будет единственным и периодическим с периодом T.

51. Поверхность $z(x,y)$, у которой средняя кривизна равна нулю, называется минимальной. Известно, что координаты точек таких поверхностей удовлетворяют уравнению:

$(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=0$, где $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $r=\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$,

$s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $t=\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$. Найти минимальные поверхности вращения.

Решение. Известно, что поверхность вращения имеет уравнение вида: $z(x,y)=f(x^2+y^2)$. Обозначив $x^2+y^2=r^2$, имеем $z=f(r^2)$

и $p=\dfrac{dz}{d(r^2)}\cdot 2x$, $q=\dfrac{dz}{d(r^2)}\cdot 2y$, $r=2\dfrac{dz}{d(r^2)}+\dfrac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot 4x^2$,

$$s=\frac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot 4xy,\qquad t=2\frac{dz}{d(r^2)}+\frac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot 4y^2.$$

Подставляя p, q, r, s, t в исходное уравнение, получим: $4\dfrac{dz}{d(r^2)}+$

$4\dfrac{d^2z}{d(r^2)^2}\cdot r^2+\left(\dfrac{dz}{d(r^2)}\right)^2\cdot r^2=0$. (*) Но так как $\dfrac{dz}{d(r^2)}=\dfrac{1}{2r}\dfrac{dz}{dr}$,

$\dfrac{d^2z}{d(r^2)^2}=\dfrac{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dz}{dr}}{4r^2}$, то (*) принимает вид: $\dfrac{1}{r}\dfrac{dz}{dr}+\dfrac{d^2z}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{dz}{dr}\right)^2=0$.

Решая это уравнение, получим функции, задающие искомые поверхности: $z(x,y)=c_1\ln(r+\sqrt{r^2-c_1^{\,2}})+c_2$.

52. Известно, что $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+tg^2x$. Найти $f(x)$ при $0<x<1$.

Решение. Обозначим $\sin^2 x=y$. Тогда

$$f'(y)=1-2y-\frac{y}{1-y}=-2y+\frac{1}{1-y},$$

$$f(y)=\int\left(-2y+\frac{1}{1-y}\right)dy=-y^2-\ln(1-y)+c,$$

$$f(x)=-(x^2+\ln(1-x))+c \quad \text{при } 0<x<1.$$

53. Доказать, что краевая задача $\begin{cases} y''=e^x y, & x\in(0,1)\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$ не имеет другого решения, кроме $y(x)\equiv 0$.

Решение. Если $y(x)\neq 0$, то либо при некотором $x_1\in(0,1)$ $\max\limits_{x\in(0,1)} y(x)=y(x_1)>0$ и тогда $y''(x)\le 0$ (*), либо при некотором

$x_2 \in (0,1)$ $\min\limits_{x \in (0,1)} y(x) = y(x_2) < 0$, и тогда $y''(x) \geq 0$ (**). Но в силу исследуемого уравнения должно быть $y''(x_1) = e^{x_1} y(x_1) > 0$, $y''(x_2) = e^{x_2} y(x_2) < 0$, что противоречит неравенствам (*) и (**).

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Томский политехнический университет

С. А. Зюбин, Т. В. Тарбокова,
В. М. Шахматов

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие
Издание второе, дополненное
и переработанное

Издательство ТПУ

Томск 2005

Литература

1. Садовничий В. А., Подколзин А.С. Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: Наука, 1978.
2. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике: Т.1, 2, 3. – М.: ОГИЗ, 1947.
3. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. – М.: ИЛ, 1963.
4. Тоноян Г. А., Сергеев В. Н. Студенческие математические олимпиады. – Ереван: ЕГУ,1985.
5. Сергеев В. Н. Сборник олимпиадных задач по высшей математике. – Омск: ОПИ, 1975.
6. Шубин М. А. Задачи студенческих математических олимпиад. – М.. МГУ,1975.
7. Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: МГУ,1987.
8. Избранные задачи по математике из журнала «American Mathematical Monthly» : Сборник. Пер.с англ. / Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

Сергей Александрович Зюбин

Татьяна Васильевна Тарбокова

Валерий Михайлович Шахматов

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Издание второе, дополненнос и переработанное

Макет и верстка В. М. Шахматова

Научный редактор

доктор физико-математических наук,

профессор К. П. Арефьев

Подписано к печати 06. 06. 2005

Формат $60 \times 84/16$. Бумага офсетная.

Печать RISO. Усл. печ. л. 6.03. Уч.-изд. л. 5,35.

Тираж 200 экз. Заказ 881. Цена свободная.

Издательство ТПУ. 634050, Томск, пр. Ленина, 30.