

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Практичне заняття № 5

Тема. Дослідження одноканальних та багатоканальних систем масового обслуговування з чергами

План проведення заняття

Вступ.

1. Рішення задач з використанням математичної моделі одноканальної СМО з чергами.

2. Аналіз характеристик систем масового обслуговування.

Заклучення.

3. Рішення задач з використанням математичної моделі багатоканальної СМО з чергами.

4. Аналіз характеристик систем масового обслуговування.

Заклучення.

Завдання на СРС: Розв'язати задачу № 3, проаналізувати характеристики СМО, надати рекомендації щодо підвищення ефективності функціонування відділу ТЗІ.

Вступ.

Питання для перевірки готовності до заняття.

1. Дайте визначення систем масового обслуговування.

2. Які обмеження накладаються на застосування математичних моделей на основі систем масового обслуговування?

3. Яка інформація є вихідною для моделювання систем масового обслуговування?

4. Яку інформацію можна отримати в результаті моделювання систем масового обслуговування?

5. Які основні критерії використовуються для класифікації систем масового обслуговування?

6. В чому відмінність СМО з відмовами та СМО з чергами?

7. В чому відмінність математичної моделі СМО з обмеженими та необмеженими чергами?

8. Які основні характеристики СМО можна обчислювати для оцінювання ефективності їх функціонування?

1. Рішення задач з використанням математичної моделі одноканальної СМО з чергами.

Приклад 1.

У відділі ТЗІ залишився один співробітник. Виклики до працівників надходять із інтенсивністю 4 заявок/день. Середній час виконання однієї заявки – 1,5 години. Вважати потік заявок найпростішим, тривалість робочого дня 8 годин, дисципліна обслуговування заявок – СМО з обмеженою чергою (число місць в черзі дорівнює 2). Знайти ймовірність того, що під час надходження будь-якої заявки співробітник відділу буде зайнятим виконанням попередньої заявки.

Приклад 2.

У відділі ТЗІ залишився один співробітник. Виклики до працівників надходять із інтенсивністю 4 заявок/день. Середній час виконання однієї заявки – 1,5 години. Вважати потік заявок найпростішим, тривалість робочого дня 8 годин, дисципліна обслуговування заявок – СМО з обмеженою чергою (число місць в черзі дорівнює m). Вивести аналітичні вирази для характеристик системи в залежності від кількості місць в черзі. Побудувати графіки

- Абсолютної пропускної здатності $A=f(m)$;
- Відносної пропускної здатності $q=f(m)$;
- Середнього числа заявок в системі $L_{\text{сист}}=f(m)$;
- Середнього часу перебування заявки в системі $T_{\text{сист}}=f(m)$;
- Середньої довжини черги $L_{\text{оч}}=f(m)$;
- Середнього часу перебування заявки в черзі $T_{\text{оч}}=f(m)$;
- Імовірності відмови в обслуговуванні $P_{\text{відм}}=f(m)$.

Знайти найменше число місць в черзі для виконання нормативних вимог: відносна пропускна здатність системи повинна перевищувати 0,95.

2. Аналіз характеристик систем масового обслуговування.

Приклад 3.

У відділі ТЗІ залишився один співробітник. Виклики до працівників надходять із інтенсивністю $\lambda=4$ заявок/день. Середній час виконання однієї заявки – $t_{\text{обсл}}=1,5$ години. Вважати потік заявок найпростішим. Вважати, що якщо надійшла заявка до відділу, а працівник зайнятий виконанням попередньої

заявки, то заявка не відхиляється, а потрапляє до черги (яка є необмеженою). Обчислити характеристики системи з необмеженою чергою.

- Абсолютної пропускної здатності A ;
- Відносної пропускної здатності q ;
- Середнього числа заявок в системі $L_{\text{сист}}$;
- Середнього часу перебування заявки в системі $T_{\text{сист}}$;
- Середньої довжини черги $L_{\text{оч}}$;
- Середнього часу перебування заявки в черзі $T_{\text{оч}}$;
- Імовірності відмови в обслуговуванні $P_{\text{відм}}$.

Порівняти результати розрахунків із СМО з обмеженою чергою (приклад 2).

Провести моделювання характеристик СМО для різних значень $t_{\text{обсл}}$. Побудувати відповідні графіки. Надати практичні рекомендації щодо підвищення ефективності функціонування відділу ТЗІ.

3. Рішення задач з використанням математичної моделі багатоканальної СМО з чергами.

Приклад 1. Комплексна система захисту (КСЗ) інформаційної системи підприємства працює цілодобово та реагує на несанкціоновані доступи до інформації, які поступають в систему з інтенсивністю 0,9 раз на годину. Комплексна система захисту інформації виконує заходи щодо ліквідації НСД протягом 0,7 годин в середньому. Вважається, що коли до системи надійшов новий НСД, а КСЗ зайнята обслуговуванням попереднього НСД, то КСЗ буде реагувати на НСД тільки після завершення всіх заходів щодо усунення попереднього НСД.

Визначити показники ефективності роботи КСЗ:

- інтенсивність потоку обслуговування;
- середнє число заявок в черзі;
- інтенсивність навантаження каналу обслуговування;
- імовірність того, що канал вільний;
- середнє число заявок в системі;
- середній час перебування заявки в черзі;
- середній час перебування заявки в системі.

Зробити висновки.

Виконати дослідження ефективності роботи СМО при зміні $T_{\text{об}}$ від 0,2 год. до 1,6 год. через 0,2 год. Побудувати графіки характеристик ефективності СМО від $T_{\text{об}}$.

Рішення.

Комплексну систему захисту можна описати математичною моделлю: одноканальна СМО з необмеженою чергою. Таким чином, параметри системи: число каналів $n=1$, число місць у черзі $m = \infty$.

Інтенсивність вхідного потоку $\lambda = 0,9 \text{ год.}^{-1}$, середній час обслуговування $T_{об}=0,7 \text{ год.}$, інтенсивність потоку обслуговування:

$$\bar{T}_{об} = \frac{1}{\mu}, \quad (4.1)$$

$$\mu = 1/0,7 = 1,429.$$

Таким чином, навантаження системи

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{T}_{об}, \quad (4.2)$$

$$\rho = 0,9/1,429 = 0,63, \text{ или } \rho = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63.$$

Середнє число заявок, що очікують обслуговування:

$$\bar{N}_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad (4.3)$$

$$\bar{N}_{оч} = 0,63^2/(1 - 0,63) = 1,073.$$

Так як $\rho < 1$, то черга заявок не може нескінченно зростати. Таким чином, граничні імовірності існують. Імовірність того, що КСЗ вільна p_0 , розраховується за такою формулою:

$$p_k = \rho^k(1 - \rho); k = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_0 = 1 - \rho. \quad (4.4)$$

$$p_0 = 1 - 0,63 = 0,37.$$

Тоді імовірність того, що КСЗ зайнята $p_{зан} = 1 - 0,37 = 0,63$.

Середнє число заявок в системі розраховується за такою формулою:

$$\bar{N}_{сист} = \bar{N}_{оч} + \bar{N}_{об} = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad (4.5)$$

$$\text{де } \bar{N}_{об} = \rho; \bar{N}_{сист} = 0,63/1 - 0,63 = 1,703 \text{ або } \bar{N}_{сист} = 0,63 + 1,073 = 1,703.$$

Середній час перебування заявки в черзі (середній час зловмисних дій, на які не реагує комплексна система захисту)

$$\bar{T}_{оч} = \frac{\bar{N}_{оч}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}, \quad (4.6)$$

$$\bar{T}_{оч} = 1,073/0,63 = 0,63^2/(0,9(1 - 0,63)) = 0,63/(1,429(1 - 0,63)) = 1,19.$$

Середній час перебування заявки в системі (від появи до усунення комплексною системою захисту разом з очікуванням)

$$\bar{T}_{сист} = \bar{T}_{оч} + \bar{T}_{об} = \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{N}_{сис} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \quad (4.7)$$

$$\bar{T}_{сист} = 0,7 + 1,19 = 0,63/(0,9(1 - 0,63)) = 1,703/0,9 = 1/(1,429(1 - 0,63)) = 1,89.$$

Висновки. Очевидно, що швидкість обслуговування комплексною системою захисту заявок, що являють собою НСД, є невисокою. Це обумовлено тим, що час на очікування обслуговування (1,19 год.) перевищує час на обслуговування (0,7 ч). Час очікування заявки на обслуговування дорівнює часу, що триває від появи НСД до початку реагування системи на цей НСД. Таким чином, кожний НСД, що надходить до інформаційної мережі підприємства залишається без уваги Комплексної системи захисту протягом 1,19 год.

Для підвищення ефективності КСЗ необхідно зменшити час обслуговування одного НСД або розпаралелити роботу системи захисту, що дасть можливість збільшити число каналів обслуговування.

4. Аналіз характеристик систем масового обслуговування.

Приклад 2. Відділ ТЗІ має у своєму штаті 4 консультанти, які здійснюють консультації фахівців свого підприємства та віддалених філіалів за допомогою багатоканального телефону. За статистичними даними за добу поступає в середньому 320 запитів на консультації. Середня тривалість однієї консультації дорівнює 5 хв. Довжина черги не має перевищувати 6 вхідних дзвінків, які очікують своєї черги в порядку надходження. Вважається, що потоки заявок та обслуговування найпростіші.

Визначити характеристики обслуговування групи консультантів в усталеному режимі:

- Імовірність простою каналів;
- Імовірність відмови, імовірність обслуговування;
- Середнє число зайнятих каналів;

- Середнє число заявок в черзі;
- Середнє число заявок в системі;
- Абсолютну пропускну спроможність;
- Відносну пропускну спроможність;
- Середній час очікування заявки в черзі;
- Середній час заявки в системі;
- Середній час заявки під обслуговуванням.

Рішення. Роботу групи консультантів можна описати за допомогою багатоканальної СМО з обмеженою чергою з параметрами $n = 4$ (число каналів), $m = 6$ (число місць в черзі).

Інтенсивність вхідного потоку, (заявок в хвилину):

$$\lambda = \frac{320}{60 \cdot 24} = \frac{2}{9}$$

Інтенсивність потоку обслуговування, (одна заявка за 5 минут) $\mu = 1/5$.

Характеристики роботи даної СМО в усталеному режимі:

Показник навантаження на один канал:

$$\psi = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{2/9}{4 \cdot 1/5} = \frac{5}{18}$$

Тоді граничні імовірності визначаються за такими формулами:

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \psi^k + \frac{n^n}{n!} \frac{\psi^{n+1} (1 - \psi^m)}{1 - \psi} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{4^0}{0!} (5/18)^0 + \frac{4^1}{1!} (5/18)^1 + \frac{4^2}{2!} (5/18)^2 + \frac{4^3}{3!} (5/18)^3 + \frac{4^4}{4!} (5/18)^4 + \frac{4^4}{4!} \frac{(5/18)^5 (1 - (5/18)^6)}{1 - 5/18} \right)^{-1} \approx 0,328.$$

Інші імовірності:

$$p_k = \frac{n^k}{k!} \psi^k p_0, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

$$p_k = \frac{n^n}{n!} \psi^k p_0, \quad k = 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

Імовірність простою каналів: $p_0 \approx 0,328$.

Імовірність відмови в обслуговуванні

$$p_r = p_{10} = \frac{4^4}{4!} (5/18)^{10} \cdot 0,328 \approx 0,000009.$$

Відносна пропускна спроможність (Імовірність обслуговування)

$$Q = 1 - p_r = 1 - 0,000009 = 0,99999.$$

Абсолютна пропускна спроможність

$$A = \lambda Q = 0,99999 \cdot \frac{2}{9} = 0,22222.$$

Середнє число зайнятих каналів

$$N_s = \frac{A}{\mu} = 0,22222 \cdot 5 = 1,1111.$$

Середнє число заявок в черзі

$$N_{line} = \frac{n^n}{n!} \psi^{n+1} \frac{1 - \psi^m (m + 1 - m\psi)}{(1 - \psi)^2} p_0 = \frac{4^4}{4!} (5/18)^5 \frac{1 - (5/18)^6 (6 + 1 - 6 \cdot (5/18))}{(1 - 5/18)^2} \cdot 0,328 \approx 0,018.$$

Середнє число заявок в системі

$$N = N_s + N_{line} = 1,111 + 0,018 = 1,129.$$

Середній час заявки під обслуговуванням (хвилин)

$$T_s = \frac{N_s}{\lambda} = \frac{1,1111}{2/9} = 4,99995$$

Середній час заявки в черзі (хвилин)

$$T_{line} = \frac{N_{line}}{\lambda} = \frac{0,018}{2/9} = 0,081$$

Середній час заявки в системі (хвилин)

$$T = T_s + T_{line} = 4,99995 + 0,081 \approx 5,08$$

Висновок. Результати досліджень характеристик ефективності багатоканальної СМО показали, що для даної системи імовірність відмови в обслуговування заявки наближається до нуля: $P_{відм}=0,000009$. Така висока ефективність досягається тим, що система має 4 канали, та 6 місць в черзі. Але найвагоміший внесок в ефективність системи вносить швидкість обслуговування заявок. Так наприклад, показник навантаження на один канал дорівнює $\psi=\lambda/\mu=5/18$. Разом з тим, середнє число зайнятих каналів дорівнює 1,1111. Це свідчить про значний час простою каналів обслуговування.

Таким чином, описана система має високу якість надання послуг клієнтам, але вартість обслуговування доволі висока.

Задачі для самостійного рішення

Приклад 1. Комплексна система захисту (КСЗ) інформаційної системи підприємства працює цілодобово та реагує на несанкціоновані доступи до інформації, які поступають в систему з інтенсивністю 0,9 раз на годину. Комплексна система захисту інформації виконує заходи щодо ліквідації НСД протягом 0,7 годин в середньому. Вважається, що коли до системи надійшов новий НСД, а КСЗ зайнята обслуговуванням попереднього НСД, то КСЗ буде реагувати на НСД тільки після завершення всіх заходів щодо усунення попереднього НСД.

Визначити показники ефективності роботи КСЗ:

- інтенсивність потоку обслуговування;
- середнє число заявок в черзі;
- інтенсивність навантаження каналу обслуговування;
- імовірність того, що канал вільний;
- середнє число заявок в системі;
- середній час перебування заявки в черзі;

- середній час перебування заявки в системі.

Зробити висновки.

Виконати дослідження ефективності роботи СМО при зміні $T_{об}$ від 0,2 год. до 1,6 год. через 0,2 год. Побудувати графіки характеристик ефективності СМО від $T_{об}$.

Приклад 2. Відділ ТЗІ має у своєму штаті 4 консультанти, які здійснюють консультації фахівців свого підприємства та віддалених філіалів за допомогою багатоканального телефону. За статистичними даними за добу поступає в середньому 320 запитів на консультації. Середня тривалість однієї консультації дорівнює 5 хв. Довжина черги не має перевищувати 6 вхідних дзвінків, які очікують своєї черги в порядку надходження. Вважається, що потоки заявок та обслуговування найпростіші.

Визначити характеристики обслуговування групи консультантів в усталеному режимі:

- Імовірність простою каналів;
- Імовірність відмови, імовірність обслуговування;
- Середнє число зайнятих каналів;
- Середнє число заявок в черзі;
- Середнє число заявок в системі;
- Абсолютну пропускну спроможність;
- Відносну пропускну спроможність;
- Середній час очікування заявки в черзі;
- Середній час заявки в системі;
- Середній час заявки під обслуговуванням.

Заключення

Широкий клас реальних технічних та організаційних систем можна звести до систем масового обслуговування, математичний опис яких базується на диференційних рівняннях Колмогорова. Для дослідження таких математичних моделей необхідно розв'язати систему рівнянь Колмогорова та знайти імовірності перебування системи в тому чи іншому стані в залежності від часу. Разом з тим необхідно обчислювати характеристики систем масового обслуговування з відмовами: абсолютну пропускну здатність A , відносну пропускну здатність q , ймовірність відмови $P_{відм}$, ймовірність виконання заявки.

Аналіз та дослідження вищезазначених параметрів дозволяють розробити практичні рекомендації щодо покращення якості функціонування систем та підвищення їх ефективності.

Завідувач кафедри вищої математики,
математичного моделювання та фізики
кандидат фізико-математичних наук, доцент

І.В. Замрій