МАРШРУТИ ТА ОБХОДИ В ГРАФАХ

1. Маршрути в графі

Означення. ***Маршрутом*** M *в графі* $G=(V,E)$ *називається така послідовність вершин і ребер, які чергуються:*

$$M: v_1, e_1, v_2, e_2, ..., e_{k-1}, v_k,$$

в який будь-які два сусідніх елементи інцидентні. В орієнтованому графі v_i *- початок ребра* e_i*,* v_{i+1} *- кінець ребра* e_i

Зауваження. Це означення є загальним для псевдо-, мульти-, і орграфів. Для "звичайного" графа досить вказати тільки послідовність $v_1, v_2, ..., v_k$ його вершин або послідовність $e_1, e_2, ..., e_k$ його ребер.

Очевидно, маршрут M можна задавати послідовністю вершин, а також послідовністю ребер.

Означення. *Вершина* v_1 *називається* ***початком маршруту****, вершина* v_k *називається* ***кінцем маршруту****. Вершини, інцидентні ребрам маршруту, крім початкової і кінцевої, називаються внутрішніми або проміжними.*

Оскільки різні ребра маршруту можуть бути інцидентними одній і тій самій вершині, початок або кінець може одночасно виявитися і внутрішньою вершиною.

Зауваження. Вважається, що орієнтований маршрут орієнтований від початку до кінця.

Для будь-якого ребра, що належить маршруту M, будемо говорити, що маршрут M проходить через це ребро, аналогічно, для будь-якої вершини, що належить маршруту M, будемо говорити, що маршрут M проходить через цю вершину.

Означення. *Маршрут* $M: v_1, v_2, ..., v_k$*, який має початок* v_1 *і кінець* v_k*, називається* ***сполучним****. Маршрут* M *називається* ***замкненим****, якщо його початок і кінець збігаються:* $v_1 = v_k$*. В противному випадку маршрут називається* ***відкритим****. Ділянкою маршруту* M *називається відрізок* $e_i, e_{i+1}, ..., e_j$ *маршруту* M *який є маршрутом.*

Означення. *Маршрут* M *називається* ***ланцюгом****, якщо всі його ребра різні. Маршрут* M *називається* ***простим ланцюгом****, якщо всі його вершини різні.*

Означення. *Замкнений ланцюг називається* ***циклом****. Замкнений простий ланцюг називається* ***простим циклом****. Граф без циклів називають* ***ациклічним****.*

Для орграфів ланцюг називається *шляхом***, а цикл –** ***контуром.***

Зауваження. Фактично циклом вважається циклічно впорядкована послідовність вершин і ребер, у якій два сусідніх ребра мають загальну вершину.

Означення. ***Довжиною маршруту*** *(ланцюга, простого ланцюга) називається число ребер у порядку їхнього проходження.*

Маршрут, що складається з однієї вершини, має нульову довжину.

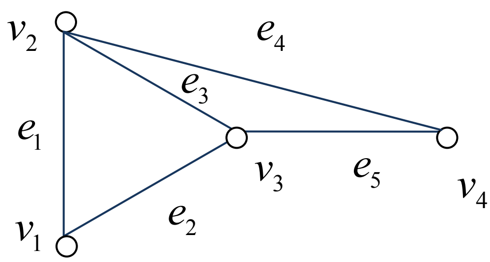
Означення. *Мінімальна довжина простого ланцюга з початком* v_i *і кінцем* v_j *називається* ***відстанню*** $d\left(v_i, v_j\right)$ *між цими вершинами.*

Означення. ***Діаметром графа*** G *називається відстань між двома найбільш віддаленими одна від одної вершинами.*

Приклад 1. Нехай $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$$E=\left\{e_1=\left(v_1, v_2\right), e_2=\left(v_1, v_3\right), e_3=\left(v_2, v_3\right), e_4=\left(v_2, v_4\right), e_5=\left(v_3, v_4\right)\right\}.$$

В графі виділимо наступні маршрути:



v_1, v_2, v_4 – маршрут з вершини v_1 до вершини v_4 довжини 2 – простий ланцюг,

v_1, v_3, v_2, v_4 – маршрут з вершини v_1 до вершини v_4 довжини 3 – простий ланцюг,

v_1, v_3, v_2, v_4, v_3 – ланцюг довжини 4, який не є простим (всі ребра різні, але вершина v_3 зустрічається двічі),

v_1, v_2, v_3 – простий ланцюг довжини 2,

v_1, v_2, v_3, v_1 – простий цикл,

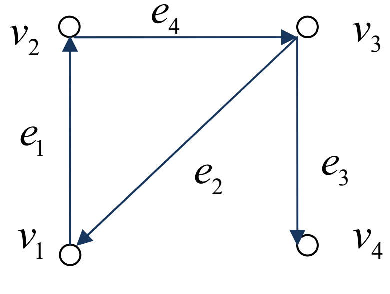
v_1, v_2, v_4, v_2 – маршрут довжини 3, який не є ланцюгом, ні простим ланцюгом (ребро $\left(v_1, v_4\right)$ і вершина v_2 зустрічаються двічі).

Відстань $d\left(v_1, v_4\right)$ між вершиною v_1 і вершиною v_4 дорівнює 2.

Приклад 2. Нехай $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$$\vec{E}=\left\{e_1=\left(v_1, v_2\right), e_2=\left(v_3, v_1\right), e_3=\left(v_3, v_4\right), e_4=\left(v_2, v_3\right)\right\}.$$

В графі виділимо наступні маршрути:



v_1, v_2 – простий шлях з вершини v_1 до вершини v_2 довжини 1,

v_1, v_2, v_3 – простий шлях з вершини v_1 до вершини v_3 довжини 2.

v_1, v_2, v_3, v_1 – простий контур довжини 3.

<u>Теорема</u> (про число маршрутів довжини k, які з'єднують будь-яку пару вершин графа). *Нехай $A = A(G)$ – матриця суміжності графа $G = (V, E)$ і $|V| = n$. Тоді $(A^k)_{ij}$ є число маршрутів довжини k від v_i до v_j.*

<u>Доведення.</u> Використаємо індукцію по k.

Для $k=1$ маршрут довжини 1 саме є ребром G, отже, результат теореми при $k=1$ випливає з означення матриці суміжності A.

Нехай результат теореми має місце для k-1. $(A)_{ij} = a_{ij}$, $(A^{k-1})_{ij} = L_{ij}$, тоді

$$(A^k)_{ij} = (A^{k-1} \cdot A)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} L_{is} \cdot a_{sj},$$

де L_{is} – число маршрутів довжини $k=1$ від v_i до v_j, a_{sj} – число маршрутів довжини 1 від v_s до v_j. Отже, $L_{is} \cdot a_{sj}$ – число маршрутів довжини k від v_i до v_j, де v_s – передостання вершина маршруту.

Звідси випливає, що $\sum_{s=1}^{n} L_{is} \cdot a_{sj}$ є число маршрутів довжини k від v_i до v_j. □

Наслідки з теореми:

<u>Наслідок 1.</u> *Маршрут від вершини v_i до вершини v_j $(i \neq j)$ в графі $G = (V, E)$ існує тоді і тільки тоді, коли (i, j)-й елемент матриці $A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ не дорівнює нулю.*

<u>Наслідок 2.</u> *Маршрут від вершини v_i до вершини v_j в графі $G = (V, E)$ існує тоді і тільки тоді, коли (i, j)-й елемент матриці $A + A^2 + \ldots + A^{n-1} + A^n$ не дорівнює нулю.*

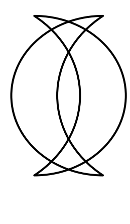
2. Обходи в графах

1) Ейлерові графи

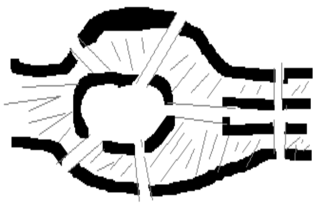
<u>Означення.</u> Цикл *називається* ***ейлеровим****, якщо кожне ребро графа бере участь у його утворенні один раз. Граф, що містить ейлерові цикли, називається* ***ейлеровим.***

<u>Зауваження.</u> Ейлерів цикл можна вважати слідом пера, що вичерчує цей граф, не відриваючись від паперу. Таким чином, ейлерові графи – це такі графи, які можна зобразити одним розчерком пера, причому процес зображення, починається і кінчається в одній і тієї ж точці.

<u>Приклад 17</u> ейлерового циклу: шаблі (знак) Магомета.

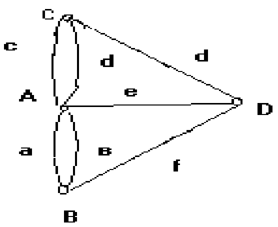


При яких умовах граф містить цикл, який проходить через кожне його ребро, встановив Леонард Ейлер в 1736 році. Задача про існування ейлерового циклу виникла в т.зв. «Задачі про кенігсберзькі мости». Розташування мостів у м. Кенигсберзі в часи Эйлера мало вид:



B

У задачі потрібно пройти кожен міст по одному разу і повернутися у початкову частину міста. Побудуємо граф задачі, у якому кожної частині міста відповідає вершина, а кожному мосту – ребро, інцидентне вершинам, що відносяться до частин, які з'єднуються.



Обходу мостів відповідає послідовність ребер графа задачі, у якій два сусідніх ребра мають загальну вершину, тобто маршрут. Оскільки наприкінці обходу треба повернуться у початкову частину міста і на кожному мосту треба побувати по одному разі, цей маршрут є простим циклом, що містить усі ребра, тобто ейлеровим.

Постановка і розв’язання цієї задачі Л. Ейлером знаменувала початок розробки теорії графів.

<u>Теорема Ейлера</u>. *Скінченний неорієнтований граф G є ейлеровим тоді й тільки тоді, коли ступені всіх його вершин парні.*

Щоб знайти хоча б один ейлерів цикл в ейлеровому графі G, тобто занумерувати ребра графа числами 1, 2 ..., $|E|$ так, щоб номер, привласнений ребру, вказував, яким за рахунком це ребро проходиться в ейлеровому циклі, можна скористатися наступним алгоритмом.

Алгоритм Флері

Крок 1. Починаючи з довільної вершини u, привласнити довільному ребру (u,v) номер 1. Потім викреслити ребро (u,v) і перейти у вершину v.

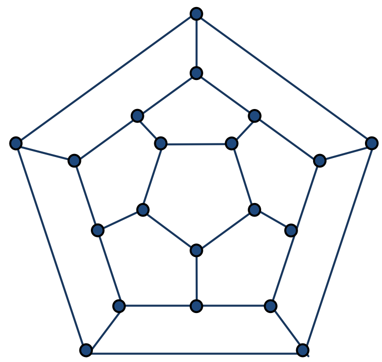
Крок k *для будь-якого* $k>1$. Нехай w – вершина, в яку перейшли в результаті виконання попереднього кроку, і k – номер, привласнений деякому ребру на цьому кроці. Вибрати будь-яке ребро, інцидентне вершині w, привласнити вибраному ребру номер $k+1$ і викреслити його.

Повторювати крок k доти, поки не всі ребра викреслені.

2) Гамільтонові графи

<u>Означення.</u> Простий цикл *називається* ***гамільтоновим****, якщо кожна вершина графа бере участь у його утворенні один раз. Граф, що містить гамільтонові цикли, називається* ***гамільтоновим.*** *Гамільтоновим називають і простий ланцюг, що містить кожну вершину графа.*

Слово «гамільтоновий» в цих означеннях пов'язане з ім'ям відомого ірландського математика У. Гамільтона, яким в 1859 році запропонована наступна гра «Кругосвітня подорож». Кожній з 20 вершин додекаедра (див. малюнок) приписано назву одну з крупних міст миру. Потрібно, переходячи від одного міста до іншого по ребрах додекаедра відвідати кожне місто точно один раз і повернутися в початкове місто.



__Теорема Оре__. (О.Оре) *Якщо для будь-якої пари* u, v *несуміжних вершин графа* G *виконується рівність* $d(u)+d(v) \geq |V|$, *то* G *– гамільтоновий граф.*

Якщо в графі G порядку n зафіксувати одну вершину і обхід завжди починати з неї, то будь-якому гамільтоновому циклу очевидним чином буде выдповыдати перестановка елементів множини V. Тим самим знайти гамільтоновий цикл або переконатися у відсутності такого циклу можна шляхом перебору $(n-1)!$ перестановок. Якщо граф G гамільтоновий, то виконати цей перебір в повному об'ємі доведеться тільки у разі крайньої невдачі – коли потрібна, тобто така, що відповідає гамільтонову циклу перестановка зустрінеться останньою в цьому процесі. Якщо ж G – негамільтоновий граф, то діючи так само, доведеться у будь-якому випадку перевірити все $(n-1)!$ перестановок. На жаль, алгоритмів знаходження гамільтонового циклу не існує, тому на практиці застосовують різні алгорітми часткового перебору. Крім того, в загальному випадку, немає способу визначення гамільтоновості графа.

У багатьох прикладних задачах потрібно будувати гамільтоновий ланцюг, а не цикл. Граф, що містить такий ланцюг, називається ***трасованим***.