МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Тема 7. Лінійне програмування.

Методи рішення задач лінійного програмування

План лекції:

Вступ.
1. Постановка задач лінійного програмування і дослідження їх структури
2. Приклади на складання математичних моделей задач
3. Симплекс-метод рішення задач лінійного програмування.
4. Рішення задач лінійного програмування за допомогою Excel.
5. Метод штучних змінних.
Заключення.

Література

1. Лавров Є. А., Перхун Л. П., Шендрик В. В. Математичні методи дослідження операцій: підручник. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212 с.
2. Пічкур В.В., Капустян О.В., Собчук В.В. Теорія динамічних систем (навчальний посібник). – Луцьк: Вежа-друк, 2020 – 348 с.
3. Махней О.В. Математичне моделювання. - Івано-Франківськ, 2015. - 372 с.
4. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: "Центр учбової літератури", 5 видання, 2006. - 422 с.
5. Дякон В. М., Ковальов Л. Є. Моделі і методи теорії прийняття рішень : Підручник. – К.: АНФ ГРУП, 2013. – 604 с.

Завдання на СРС:.

1. Вивчити матеріал лекції, підготуватись до практичного заняття.
2. Скласти математичні моделі задач та рішити задачі № 2, 4, 5 (із переліку задач в п.2 цієї лекції) за допомогою Excel.

Вступ

Більшість оптимізаційних задач на практиці можна звести до задач лінійного програмування. Задача лінійного програмування — задача оптимізації з лінійною цільовою функцією та допустимою множиною обмеженою лінійними рівностями або нерівностями.

Лінійне програмування або лінійна оптимізація (LP, англ. Linear Programming) — метод досягнення найліпшого виходу (такого як найбільший прибуток або найменша вартість) у математичній моделі чиї вимоги представлені через лінійні відношення. Лінійне програмування є особливим випадком математичного програмування (математичної оптимізації).

Більш формально, лінійне програмування є технікою для оптимізації лінійної цільової функції, що обмежена лінійними рівняннями і лінійними нерівностями. Її допустима множина є опуклим політопом, який є множиною визначеною як перетин скінченної кількості півпростірів, кожен з яких визначає лінійна нерівність. Її цільова функція є дійсно-значима афінна функція визначена на цьому багатограннику. Алгоритм лінійного програмування знаходить точку на багатограннику де ця функція набуває найбільшого чи найменшого значення якщо така точка існує.

Лінійне програмування (та дослідження задачі лінійного програмування) є однією із найрозвинутиших галузей математичного програмування та теорії оптимізації. Загальна постановка задачі лінійного програмування, та один із підходів до її розв'язання (ідея розрішаючих множників або двоїстих оцінок) вперше наведено в роботі радянського вченого Канторовича Л. В. в 1939. В цій же роботі намічено один із методів розв'язання задачі — метод послідовного зменшення нев'язок.

Для оптимізації лінійних цільових функцій застосовують методи лінійного програмування. Найбільш розповсюдженим є симплекс-метод рішення задач лінійного програмування. Для дослідника найважливішим етапом є складання математичної моделі задачі, що вирішується. Після цього етапу можна вирішувати задачу за допомогою спеціальних пакетів прикладних програм.

1. Постановка задач лінійного програмування та дослідження їх структури

Більшість задач, що розв’язуються методами дослідження операцій, можна сформулювати так [2]:

максимізувати

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.1.1}$$

при обмеженнях

$$
\begin{aligned}
&g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1; \\
&... \\
&g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m,
\end{aligned}
\tag{1.1.2}
$$

де $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — цільова функція, або критерій ефективності (наприклад, прибуток від виробництва якихось видів продукції, вартість перевезень тощо); $X = \{x_1, ..., x_n\}$ — змінні параметри; $g_1(X), ..., g_m(X)$ — функції, що визначають обмеження на наявні ресурси.

Форми запису задачі ЛП. Задачу лінійного програмування можна записати так:

максимізувати
$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \tag{1.1.3}$$

при обмеженнях:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\
&... \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m; \\
&x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; ...; \quad x_n \ge 0.
\end{aligned}
\tag{1.1.4}
$$

Останні обмеження називають умовами невід’ємності змінних.

Якщо всі обмеження задачі ЛП мають вигляд строгих рівностей

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\
&... \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m,
\end{aligned}
\tag{1.1.6}
$$

то форму запису називають канонічною.

<u>У матричній формі</u> задача ЛП записується так:

максимізувати

$$C^T X \tag{1.1.7}$$

$$
\begin{aligned}
&AX \le B; \\
&X \ge 0,
\end{aligned}
\tag{1.1.8}
$$

де A — матриця обмежень розміром $(m \times n)$; B — вектор-стовпець довільних членів; X — вектор змінних; $C^T = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ — вектор (рядок) коефіцієнтів цільової функції.

Допустимою множиною розв’язків задачі (1.1.3)—(1-1-5) зветься множина Я (х) усіх векторів х, що задовольняють умови (1.1.4) і (1.1.5).

Множина Л (х) являє собою опуклу многогранну множину або опуклий многогранник.

$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 \ge$

Розв'язок x_0 є ***оптимальним***. якщо він задовольняє умові $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$, для всіх $\mathbf{x} \in R(\mathbf{x})$

Оскільки пошук гпіп Дх) еквівалентний пошуку $\max[-f(\mathbf{x})]$, то за дачу ЛП завжди можна звести до еквівалентної задачі максимізації.

Розширена форма задачі ЛП. Для розв'язання задачі ЛП треба переходити від обмежень — нерівностей до обмежень у формі рівнянь. Для цього у кожну нерівність вводять по одній вільній змінній $x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+2} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0,$ щоб перетворити її в рівність. У та кому вигляді задачу ЛП називають ***розширеною*** і записують так:'

максимізувати $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \ldots + 0x_{n+m}$ (1.1.9)

при обмеженнях:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_1; \ \ldots\ldots \ \ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 1x_{n+m} = b_m \quad \textbf{(1.1.10)}$$

У матричній формі ця задача має такий вигляд:

максимізувати $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ (1.1.11)

при обмеженнях:

$$\mathbf{A}^{m\times n}\mathbf{x}_1 + \mathbf{E}^{m\times m}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}; \quad (1.1.12)$$

де

$$\mathbf{E}^{m\times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \ldots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Допустимі базисні розв'язки

Нехай обмеження задачі ЛП задано у формі рівностей (рівнянь)

$$\mathbf{A}^{(m\times n)}\mathbf{x}^{(n\times 1)} = \mathbf{b}^{(m\times 1)}. \quad (1.1\ 13)$$

Припустимо, що $m<n$ і ранг матриці **A** дорівнює ***m.*** Виберемо з матриці $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n]$ m лінійно незалежних стовпців, які позначимо через $\mathbf{B}^{(m\times m)}$'. Матриця **B** утворює базис системи. Сукупність стовпців матриці **A,** що лишилися, позначимо через **D.** Тоді $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{D}]$

Сукупність змінних, пов'язаних з матрицею **B,** позначимо через $\boldsymbol{x_h}$**,** а пов'язаних з матрицею **D — через** $\mathbf{x}_D$. Тоді

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Bx}_h + \mathbf{Dx}_D \quad (1.1.14)$$

Оскільки **B** — невироджена квадратна матриця, то існує обернена до неї $\mathbf{B}^{-1}$. Множачи обидві частини (1.1.14) на $\mathbf{B}^{-1}$.дістанемо

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Bx}_h + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Dx}_D = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Звідси

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Dx}_D. \quad (1\ 1.15)$$

Змінні $\mathbf{x}_h$ — базисні, а $\mathbf{x}_D$ — небазисні.

Співвідношення (1.1.15) визначають повну множину розв'язків системи лінійних рівнянь (1.1.13). У розгорнутому вигляді ці співвідношення можна записати так:

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j\in J_{\text{неб}}} a_{ij}x_j, i \in I_б;$$

$$x_j = a_j, j \in I_{\text{неб}}, \quad (1.1.16)$$

де $I_б$ —- множина індексів базисних векторів; $I_{неб}$— множина індексів небазисних векторів; a_{i0} — i-та компонента вектора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$; a_{ij} $(j \in I_{неб})$ — рядок матриці $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}'$. Якщо покласти для всіх небазисних змінних нульові значення, то одержимо базисний розв'язок $x_i = a_{i0}, \ i \in I_б$.

Якщо базисний розв'язок задовольняє умові невід'ємності, то він зветься допустимим (ДБР).

Якщо серед компонент $x_i, \ i \in I_б$ немає нульових, то базисний розв'язок зветься ***невиродженим.***

Справедлива така основна теорема лінійного програмування, що встановлює місце розташування оптимальних розв'язків.

ТЕОРЕМА 1.1. ***Якщо цільова функція набуває максимального значення в деякій точці допустимої множини R_1, то вона набуває цього значення в крайній точці R_1. Якщо цільова функція набуває максимального значення більш, ніж в одній крайній точці, то вона набуває цього ж самого значення в будь-якій їх опуклій комбінації.***

2. Приклади на складання математичних моделей задач [2]

Записати математичні моделі наступних задач

Задача №1

Механічний цех може виготовляти за зміну 600 деталей №1 або 1200 деталей №2. Виробнича потужність термічного цеху, куди ці деталі поступають на термообробку у той же день, дозволяє обробити за зміну 1200 деталей №1 або 800 деталей №2. Ціни на деталі однакові. Потрібно визначити щоденну виробничу програму випуску деталей, яка максимізує товарну продукцію підприємства, при таких додаткових умовах:

а) обидва цехи працюють одну зміну;

б) механічний цех працює три зміни, а термічний — дві зміни;

в) підприємство працює у дві зміни, при цьому деталей №1 повинно бути виготовлено не більше 800 шт., та деталей №2 — не більше 1000 шт.

Задача №2

Із пункту ***А*** в пункт ***В*** щоденно відправляються пасажирські та швидкі потяги. В табл. 1.1 наведено кількість вагонів різних типів, із яких щоденно можна комплектувати потяги, і кількість пасажирів, на яких розраховані вагони. Визначити оптимальне число швидких і пасажирських потягів, при якому кількість пасажирів, що перевозяться, буде максимальна.

Таблиця 1.1

Вагон	Парк вагонів	Потяг		Число пасажирів
		ШВИДК	пасажирський	
Багажний	12	1	і	
Поштови	18	1	-	-
Жорсткий	89	5	8	58
Купейний	79	6	4	40
М’який	35	4	2	32

Задача №3

Розв’язати задачу 2 при умові, що пропускна спроможність дороги обмежує число пасажирів потягу до шести в день.

Задача №4

Три механізми I, II та III можуть виконувати три види ґрунтових робіт ***А, В*** та ***С.*** В табл. 1.2 вказані ресурси робочого часу кожного механізму, продуктивність механізмів при виконані різних робіт і вартість однієї години праці механізму.

а) визначити максимальне завантаження механізмів при максимальному сумарному об’ємі виконаних робіт;

б) визначити оптимальне завантаження устаткування, що забезпечує максимальний об’єм робіт при дотриманні умови комплектності а: Ь: с = 1: 2: 3.

в) знайти оптимальне завантаження устаткування, що забезпечує мінімізацію сумарних витрат, при об’ємі робіт а = 6000 м^3, b = 50 000 м^3 с = 8000 м^3.

Таблиця 1.2

Механізми	Продуктивність, м^3/г			Питома вартість грн./г			Ресурси часу
	A	***B***	***C***	***A***	***B***	**c**	

I	**зо**	20	40	20	40	**зо**	400
II	20	**зо**	50	3О	20	50	300
III	60	40	20	50	30	60	280

Задача №5

Авіакомпанія для організації пасажирських перевезень між центром ***Ц*** і чотирма містами ***Г1. Г₂, Гз, Г4***, має в розпорядженні три групи літаків. Перша група складається з 10 чотирьохмоторних, друга — з 25 двомоторних літаків нового зразка, і третя - з 40 двомоторних літаків старого зразка. Кількість пасажирів, що перевозяться одним літаком даного типу по кожному маршруту за 1 місяць, і пов'язані з цим експлуатаційні витрати на 1 літак (тис. грн.) вказані в таблиці 1.3. Кількість пасажирів, яких потрібно перевозити по кожному маршруту складає відповідно 40, 50, 40, 30 тис. людей, а вартість одного квитка коштує відповідно 20, 15, 18 та 30 грн. Розподілити літаки по маршрутах, виходячи з умови досягнення максимального прибутку авіакомпаній.

Задача №6

Нафтопереробний завод одержує 4 напівфабрикати: 400 тис. л. ал- килата, 250 тис. л. крекінг-бензину, 350 тис. л. бензину прямої перегонки і 100 тис. л ізопентану. В результаті змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюються три сорти авіаційного бензину: бензин А (2:3:5:2), бензин В (3:1:2:1) та бензин С (2:2:1:3). Вартість бензину кожного сорту дорівнює 120 грн., 100 грн., та 150 грн.

а) визначити співвідношення компонентів, при якому буде досягнута максимальна вартість всієї продукції;

б) визначити оптимальне співвідношення, виходячи з умови максимального використовування компонентів.

Таблиця 1.3

Тип літака	Кількість пасажирів/Експлуатаційні витрати			
	Ц-Г1	***Ц-Г2***	***Ц-Г3***	***Ц-Г4***
I	16/1,2	30/0,8	19/1,5	25/1,6
II	20/1,4	25/1,5	17/2,0	16/2,9
III	25/1,0	18/1,1	20/1,8	20/1,7

Задача №7

На підприємство поступило дві партії фанери, причому перша партія містить 400 листів, а друга — 250 листів фанери. З них виготовляються комплекти, що включають 4 деталі 1-го типу, 3 деталі 2- го типу і 2 деталі 3-го типу. Один лист фанери кожної партії може розкроюватися трьома способами. Кількість деталей кожного типу, яка виходить при розкрої одного листа за тим або іншим способом, представлена в таблиці 1.4. Вимагається розкроїти матеріал так, щоб забезпечити виготовлення максимального числа комплектів

Тип деталі	Кількість деталей, шт.						
	R1	***R2***	***R3***	***R1***	***R2***	***R3***	***R4***
1-й	0	6	***9***	6	5	4	0
2-й	5	3	***4***	5	3	2	6
3-й	12	14	0	7	4	5	7

Задача №8

Підприємство може працювати по п'яти технологічних процесах (Т,, T_2, T_3, T_4, T_5), причому кількість одиниць продукції, що випускається, по різних технологічних процесах за 1 одйницю часу відповідно дорівнює 300, 260, 320, 400 і 450 шт. У процесі виробництва враховуються такі виробничі чинники: сировина, електроенергія, зарплата і накладні витрати. Витрати відповідних чинників при роботі по різних технологічних процесах протягом 1 одиниці часу вказані в табл. 1.5.

Знайти програму максимального випуску продукції.

Таблиця 1.5

Виробничі фактори	Витрати при різних технологіях					Ліміт
	TI	***T2***	***T3***	***T4***	***T5***	
сировина	15	20	12	14	18	2000
електроенергія	0,2	0,3	0,15	0,25	0,3	300
накладні витрати	4	5	6	3	2	1000
зарплата	6	3	4	6	3	1600

Задача №9

Механічний завод при виготовленні трьох різних деталей використовує токарні, фрезерні і строгальні верстати. При цьому обробку кожної деталі можна вести трьома різними технологічними способами Ті, T_2, T_3. В таблиці 1.6 вказані норми часу при обробці деталі на відповідному верстаті кожним технологічним способом, а також ресурси кожної групи верстатів. Прибуток від продажу кожного виду виробу складає відповідно 22, 18 і 30 грн.

а) скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, що забезпечує максимальний прибуток;

б) вважаючи, що між кількістю деталей, що випускаються, має виконуватися співвідношення комплектності 1:2:1, визначити виробничу програму, що забезпечує виготовлення максимального числа комплектів;

в) вирішити задачу (а), якщо число деталей II не має перевищувати 100 одиниць.

Таблиця 1.6.

Тип станка	Норми часу на обробку деталей, г.									Ресурс часу
	I			II			III			
	T1	***T2***	***Ti***	***TI***	***T2***	***T3***	***T1***	***T*2**	***T3***	
Токарний	1	0,9	1,1	1,2	1,5	-	0,9	-	-	200
Фрезерний	0,8	0,8	1,3	0,9	1,1	1,3	1,1	0,8	-	400
Строгальний	-	0,7	1	0,7	-	1,3	1,3	0,8	-	300

Задача №10

Для виготовлення сплаву із свинцю, цинку, олова певного складу використовується сировина у вигляді п'яти сплавів з тих самих металів, відмінних складом і вартістю 1 кг (табл. 1.7).

а) визначити, яку кількість сплаву кожного виду потрібно узяти, щоб виготовити при мінімальній собівартості сплав, що містить 20% свинцю, 30% цинку і 50% олова?

б) вирішити ту саму задачу при таких обмеженнях на склад сплаву: олово — від 40% до 60% і цинку — від 20% до 30%.

в) вирішити ту саму задачу при таких обмеженнях на склад сплаву: олово -— не більше 40% і цинку — не менше 20%.

Таблиця 1.7

Тип сплаву	Вміст металу, %			Питома вартість
	Свинець	***Цинк***	***Олово***	
I	15	40	45	8
11	10	80	10	17
III	**ЗО**	**зо**	40	10
IV	40	25	35	12
V	10	70	20	15

Задача №11

Деталі ***A, B. C*** можна обробляти на трьох верстатах (I, II, III). В табл. 1.8 вказані норми витрат часу на обробку верстатом відповідної деталі, вартість 1 години роботи верстата і граничний час роботи верстата. Припускаючи, що будь-яка деталь може оброблятися на будь- якому з верстатів, визначити оптимальну виробничу програму по одному з таких критеріїв:

1) максимуму товарної продукції (Т);

2) максимуму сумарного прибутку (П);

3) мінімуму сумарних витрат на обробку (S) при плані випуску деталей ***A*** 300 шт., ***B*** 500 шт., ***C*** 100 шт.;

4) максимуму числа комплектів, що включають 3 деталі ***A,*** 2 деталі ***B*** і 1 деталь С;

5) максимум П при заданому асортименті 3:2: 1;

6) максимум П при заданій кількості деталей: ***A*** — 200 шт., ***B*** — 400 шт., ***C*** — 600 шт.;

7) максимум завантаження верстатів при заданому асортименті 3:2:1;

8) максимальне число деталей ***A, B, C*** при однаковому часі роботи всіх верстатів;

9) максимум П за умови, що кожний верстат обробляє тільки одну деталь і за планом передбачений випуск всіх трьох деталей;

10) максимум сумарної продуктивності за умови п. 9 і однаковому часі роботи всіх верстатів.

Таблиця 1.8

Верстати	Норми витрат часу				
	A	*B*	*C*	Вартість 1 години, грн-	Час роботи верстата
1	0,3	0,1	0,2	зо	50
II	0,5	0,2	0,4	20	60
III	0,4	0,5	0,3	15	40

Задача №12

Використовуючи дані таблиці 1.8 і припускаючи, що кожна деталь послідовно обробляється на кожному верстаті, скласти виробничу програму по одному з таких критеріїв:

1) максимуму П;
2) максимуму Т;
3) максимуму П при умові, що деталей ***A*** — не менше 300 шт., деталей ***B*** — не більше 200 шт.;
4) максимум Т при заданому асортименті 3:2: 1;
5) мінімум ***S*** при заданому асортименті 1:2:3.

Задача №13

Для будівництва домів на 100 будівельних майданчиках вибрали 5 типових проекти. По кожному із проектів відомі тривалість закладки фундаментів і будівництва решти частини споруди, а також житлова площа споруди (табл. 1.9). Паралельно можна вести закладку 10 фундаментів і будівництво 15 домів.

Скласти план будівництва, максимізуючий ввід житлової площі протягом року (300 робочих днів), при умові, що домів 2 типу має бути побудовано не менше 10.

Таблиця 1.9

Види робіт	Тривалість виконання (дні) для типового проекту				
	1 проект	2 проект	3 проект	4 проект	5 проект
Закладка фундаменту	20	зо	35	зо	40
Решта робіт	40	20	60	35	25
Житлова площа,	3000	2000	5000	4000	6000

Задача №14

Завод виробляє два типи продукції: велосипеди і мотоцикли. При цьому цех по складанню велосипедів має потужність 100 тис. штук в рік, цех по складанню мотоциклів — 30 тис. штук. Механічні цехи заводу обладнані взаємозамінними обладнаннями, і одна група цехів може виробляти або деталі для 120 тис. велосипедів, або деталі для 40 тис. мотоциклів, або іншу комбінацію деталей, обмежену цими даними. Інша група механічних цехів може випускати або деталі для 80 тис. велосипедів, або для 60 тис. мотоциклів, або іншу допустиму [1X] комбінацію. У результаті реалізації кожної тисячі велосипедів завод отримує прибуток у **20** тисяч гривень, а КОЖНОЇ ТИСЯЧІ МОТОЦИКЛІВ — **ЗО** тисяч гривень.

Знайти таке поєднання випуску продукції, яке дасть найбільшу суму прибутку.

Задача №15

На підприємстві для виробництва двох видів продукції використовується 4 види обладнання, у кількості, заданій у таблиці 1.10.

Організувати випуск продукції, так, щоб чистий доход від виробництва був максимальний.

Таблиця 1 10

Вид вироб-го обладнання	Кіл-сть обладнання, необхідного для виготовлення 1-ці продукції!		Обсяг обладнання
	1 вид	2 вид	
A	3	2	12
B	1	2	8
C	5	0	16
D	0	4	12
Чистий прибуток 1-ці продукції!', у.о	3	4	*

Задача №16

Для виготовлення продукції двох видів ***П1, П₂*** необхідно використовувати чотири види сировини ***Si, S₂, S₃, S₄.*** Кількість одиниць сировини необхідних для виготовлення одиниці кожного із видів продукції, відома і задана в таблиці 1.11.

Необхідно скласти такий план випуску продукції ***П1,П₂,*** при якому прибуток підприємства від реалізації всієї продукції був би максимальним.

Таблиця 1.11

Вид сировини	Запаси сировини	Вид продукції	
		П1	***П2***
S1	19	2	3
S2	13	2	1
S3	15	0	3
S4	18	3	0
Прибуток	*	7	5

3. Симплекс-метод рішення задач лінійного програмування.

Оптимізаційна задача лінійного програмування має таку математичну модель:

Максимізувати $f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max$ (1)

при обмеженнях:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1; \\ ... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m, \end{cases} \quad (2)$$

де $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – цільова функція, або критерій ефективності досліджуваного процесу (наприклад, прибуток виробництва);

$X = \{x_1 x_2, ..., x_n\}$ – змінні параметри;

$g_1(X), ..., g_m(X)$ – функції, що визначають обмеження на наявні ресурси.

Зазвичай накладаються також обмеження невід'ємності на змінні x_i.

Слід відзначити, що цільова функція $f(X)$ та функції обмежень $g_j(X)$ є лінійними. Тому, в загальному вигляді можна використовувати форму запису задачі ЛП в матричному вигляді:

Максимізувати $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \max$

(3)

при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \quad (4)$$

а також $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ...,\ x_n \ge 0.$ (5)

Доцільно ввести до розгляду такі матриці:

$X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор (вектор-стовбець)

$C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ – матриця коефіцієнтів цільової функції;

$B = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$ – вектор-стовбець правих частин обмежень;

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матриця коефіцієнтів системи обмежень.

При таких позначеннях задача ЛП формулюється так:

Максимізувати $f(X) \to \max$ (знайти вектор змінних X, який приводить $f(X)$ до максимуму) при обмеженнях $A{\cdot}X \le B$, $x_i \ge 0$, $i = 1,2,\dots,n$.

Припустимо, що обмеження задачі зведені до такого вигляду, що в матриці A є одинична підматриця, її вільні члени додатні. Іншими словами, нехай матриця обмежень має вигляд:

$$\mathbf{A}_1 x_1 + \dots + \mathbf{A}_n x_n + \mathbf{e}_1 x_{n+1} + \dots + \mathbf{e}_m x_{n+m} = \mathbf{A}_0 = [\,a_{i0}]$$

Для рішення задачі симплекс-методом на кожній ітерації заповнюють симплекс-таблицю (табл.. 1).

Таблиця 1

C			c_1	c_2	c_3	…	c_j	…	c_n
	$\mathbf{B_x}$	$\mathbf{A_0}$	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	…	$\mathbf{A_j}$	…	$\mathbf{A_n}$
c_1	x_1	A_{1o}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
C_i	x_i	A_{io}	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
C_m	x_m	A_{mo}	a_{m1}	A_{m2}	a_{m3}	…	a_{mj}	…	a_{mn}
	Δ		Δ_1	Δ_2	Δ_3	…	Δ_j	…	Δ_n

Останній рядок таблиці індексний. Він потрібний для знаходження направляючого стовпця. Зрозуміло, для всіх базисних векторів $\{A_i\}$, $i = 1,\dots,m$ оцінки $\Delta_i = a_{0i} = 0$.

Значення цільової функції a_{00} визначається із співвідношення:

$$a_{00} = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot x_i^{(k)}$$

У стовпчику $\mathbf{B_x}$ записуємо базисні змінні $\{x_i\}$ $i=1,..., m.$ їх значення визнаються стовпчиком вільних членів a_{i0}, тобто
$x_i=a_{i0},\ i=1, 2,...,m$ г.

Напрямні рядок $\mathbf{A}_i$ і стовпець $\mathbf{A}_j$ позначаються стрілками.

Отже, алгоритм розв'язання задачі ЛП табличним симплекс- методом складається з етапів.

1. Розраховують і заповнюють початкову симплекс-таблицю з допустимим одиничним базисом, включаючи індексний рядок.

2. За напрямний стовпець беруть $\mathbf{A}_j$, для якого

$$\Delta_j = a_{0j} = \min_k \{a_{0k} | a_{0k} < 0\}$$

3. Напрямний рядок А вибирають із умови

$$\frac{a_{i0}^{(k)}}{a_{ij}^{(k)}} = \min_{1 \le r \le m} \{\frac{a_{r0}^{(k)}}{a_{rj}^{(k)}} \Big| a_{rj}^{(k)} > 0\}$$

4. Виконують один крок (ітерацію) методу повного виключення Гауса із напрямним елементом a_{ij}, для чого використовують співвідношення (1.2.16)—(1.2.18). Зокрема, елементи індексного рядка нової таблиці обчислюють згідно з формулою

$$a_{00}^{(k+1)} = a_{00}^{(k)} - \frac{a_{i0}^{(k)} a_{0j}^{(k)}}{a_{ij}^{(k)}},\quad a_{0l}^{(k+1)} = a_{0l}^{(k)} - \frac{a_{il}^{(k)} a_{0j}^{(k)}}{a_{ij}^{(k)}},\ l=1,2,..., n.$$

5. Якщо всі $\Delta_l^{(k+l)} \ge 0,\ l=1,...,n,$ то новий базисний розв'язок $x_i=$
$a_{i0}^{(k+l)},\ i \in I_б^{(k+l)}$ - оптимальний. У протилежному разі переходять до етапу 2 й виконують чергову ітерацію.

6. Другий, третій та четвертий етапи повторюють доти, доки одна з ітерацій не закінчиться одним з двох випадків:

а) всі $a_{0l} \ge 0$ - Це ознака (критерій) оптимальності базисного розв'язку останньої симплекс-таблиці;

б) знайдеться такий $a_{0j}=\Delta_j<0$, що всі елементи цього стовпця

$a_{rj} \le 0,\ r = 1,...,n.$ Це ознака необмеженості цільової функції $z = \sum_j^n c_j x_j$
на множині допустимих розв'язків задачі.

Приклад 1.

Максимізувати $x_1+x_2,$ при обмеженнях:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 18; \\ x_1 + 2x_2 &\le 16; \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Розширена форма задачі має такий вигляд: максимізувати x_1+x_2, при обмеженнях:

$$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 18;$$
$$1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 16.$$

Оскільки $A_0>0$, а вектори A_3, A_4, утворюють одиничний базис, то задачу можна розв'язувати методом симплекс-таблиць.

Перша ітерація. Складаємо й заповнюємо початкову симплекс- таблицю (табл. 2).

Таблиця 2

c_i			1	1	0	0
	B_x	A_{i0}	A_1	A_2	A_3	A_4
0	x_3	18	**2**	1	1	0
0	x_4	16	1	2	0	1
	Δ	0	-1	-1	0	0

Напрямний стовпець – перший $(\Delta_2=\Delta_1<0)$.

Склавши відношення

$$\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ie}}\right\}$$

визначаємо

напрямний рядок вигляду

Для цього знаходимо

$$\min\{18/2; 16/1\} = 9.$$

Отже, напрямний рядок перший напрямний елемент $a_{11}=2$. Виконавши першу ітерацію симплекс-методу, одержимо табл. 3.

Таблиця 3

c_i			1	1	0	0
	B_x	a_{i0}	A_1	A_2	A_3	A_4
1	x_1	9	1	0.5	0.5	0
0	X_4	7	0	**1.5**	-0.5	1
	Δ	9	0	-0.5	0.5	0

Друга ітерація. Як бачимо з табл. 3, напрямний стовпець – другий $(\Delta_2<0)$, а напрямний рядок – другий, оскільки

$$\min\{9/0.5; 7/1.5\} = 14/3$$

Виконавши чергову ітерацію симплекс-методу, отримаємо симплекс-таблицю 4.

Таблиця 4

c_i			1	1	0	0
	B_x	a_{i0}	A_1	A_2	A_3	A_4
1	x_1	20/3	1	0	2/3	-1/3
1	x_2	14/3	.0	1	-1/3	2/3
	Δ	34/3	0	0	1/3	1/3

Оскільки в індексному рядку табл. 4 всі оцінки невід’ємні, то знайдемо оптимальний розв’язок: $x_{1опт}=20/3,\ x_{2опт}=14/3.$

Відповідне значення ц. ф. дорівнює $max\ (x_1+x_2)=34/3.$

4. Рішення задач лінійного програмування за допомогою Excel

За допомогою Excel можна рішати задачу ЛП таким чином (рис. 1):

1) ввести в певний рядок назви змінних x1, x2, …, xn;

2) виділити під ним наступний рядок для значень цих змінних. Ввести нульові значення;

3) ввести рядок коефіцієнтів цільової функції;

4) ввести у певну клітину формулу для значення цільової функції;

5) ввести матрицю обмежень А;

6) ввести в певний стовбець справа від матриці А значення лівих частин нерівностей обмежень;

7) вести в певний стовбець ще правіше вектор-стовбець В (правих частин нерівностей обмежень);

8) вибрати команду меню «Данные» → «Поиск решений». У вікні, що відкрилось ввести адреси клітини цільової функції, змінних та обмежень (рис. 2). Натиснути «Найти решение» і в таблиці, у визначеному рядку з’являться значення невідомих x_i, що приводять цільову функцію до екстремуму.

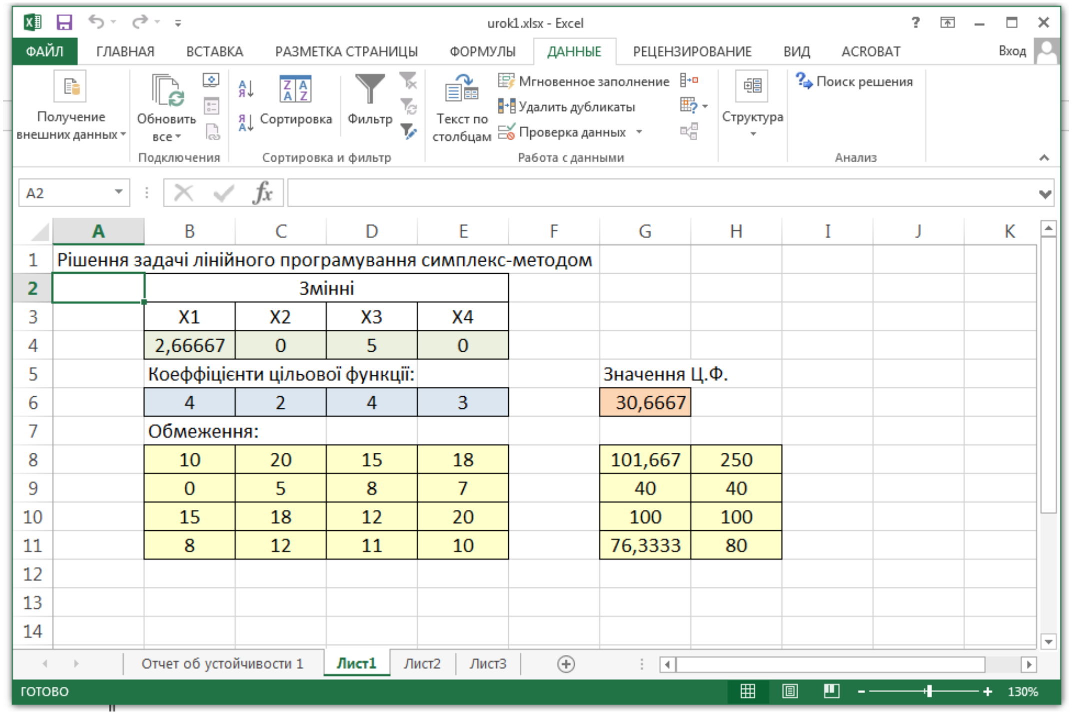

Рис. 1. Симплекс-метод рішення ЗЛП в Excel

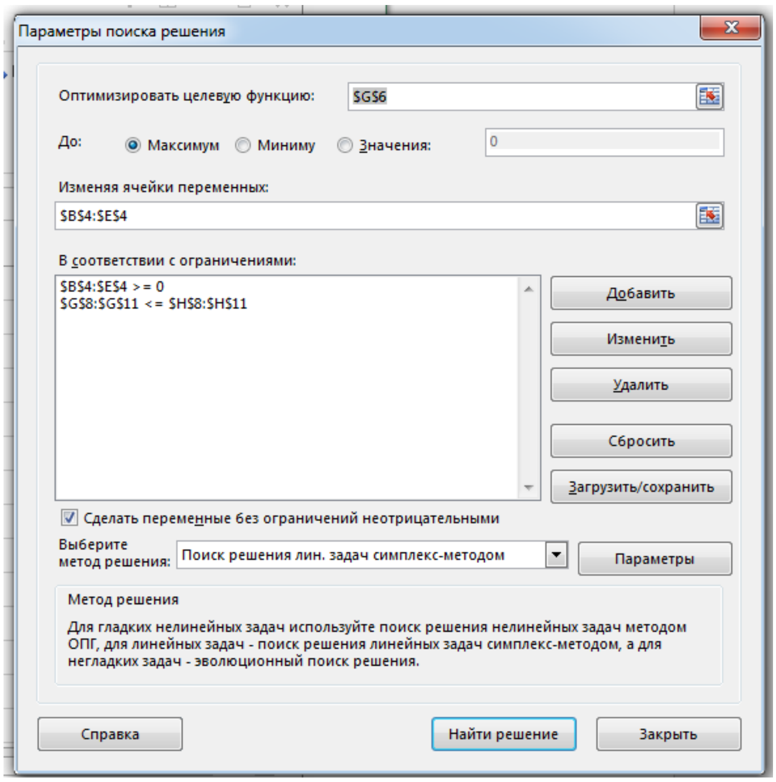

Рис. 2. Вікно Поиск решения в меню Данные

5. Метод штучних змінних [2]

У загальному випадку, коли деякі обмеження мають знак $\geq \otimes$, наприклад:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i,$

де $i = 1, 2,..., m,$то для зведення цих обмежень до стандартного ви

гляду рівнянь вільні змінні треба віднімати. Тоді розширена форма задачі матиме такий вигляд:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_1; \quad (1.3.1)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... - 1x_{n+m} = b_m.$$

Вільні змінні $\{x_{n+1}, ..., x_{n+m}\}$ у цьому разівже неможливо використати як початковий базис, оскільки $x_{n+1}<0,..., x_{n+m}<0.$ Тому в рівняння

(1.3.1) додатково вводять штучні змінні $x_{n+m+1},...x_{n+2m}$.іДі змінні не

мають нічого спільного з реальною задачею, і тому їх треба вивести з базису якнайшвидше. Для цього після початку ітерацій штучним

змінним у цільовій функції приписують для задач максимізації дуже великі за модулем від'ємні коефіцієнти $(-M)$, де $M>>c_i$ $(i = 1, 2,..., m)$.

В разі розв'язання задач мінімізації штучні змінні вводять у цільову функцію з великими додатніми коефіцієнтами $+M.$

Знаки штучних змінних $x_{n+m+1},...x_{n+2m}$ мають збігатися із знаками

відповідних членів. Штучні змінні створюють початковий базисний розв'язок. Застосувавши симплекс-метод, треба вивести із базису усі штучні змінні. Якщо вдається довести (чи показати), що штучні змінні повністю вивести із базису неможливо, то це означає, що задача не має розв'язків, тобто її обмеження суперечні.

Якщо на поточній ітерації із базису виводиться штучна змінна, то в наступній симплекс-таблиці відповідний їй стовпець можна видалити, в подальших ітераціях він не братиме участі.

Приклад 1.3.1:

мінімізувати $f(x)=2x_1+3x_2,$

при обмеженнях:

$$2x_1 + x_2 \geq 16;$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 16;$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Застосувавши вільні змінні $x_3,$ $x_4,$ x_5 приходимо до розширеної

форми задачі:

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 16;$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 16.$$

Як бачимо, змінні $x_3,$ x_4 утворюють недопустимий базисний

розв'язок:

$x_3 = -16<0; x_4 = -16<0.$

Тому вводимо в обмеження і в цшьову функцію штучні змінні $x_5,$

x_6 і приходимо до такої задачі: мінімізувати

$\{2x_1 + 3x_2 + Mx_5 + Mx_6\}$,

при обмеженнях: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 16; \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 16. \end{cases}$

Очевидно, початковий базисний розв'язок $x_5^* = 16;\ x_6^* = 16$. Оскіль ки A_5, A_6 утворюють одиничний базис, а всі $a_{i0} > 0$, то застосуємо для розв'язання метод симплекс-таблиць (табл. 1.3.1).

Таблица 1.3.1

c_i			2	3	0	0	M	M
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
M	X_5	16	**2**	1	-1	0	1	0
M	X_6	16	1	2	0	-1	0	1
		$32M$	$3M$-2	$3M$-3	$-M$	$-M$	0	0

Перша ітерація. Елементи індексного рядка обчислюємо так:

$$a_{05} = a_{06} = 0;$$

$$a_{01} = 2M + M - 2 = 3M - 2;$$

$$a_{02} = M + 2M - 3 = 3M - 3;$$

$$a_{00} = 16M + 16M = 32M.$$

Оскільки маємо задачу мінімізації, то напрямний стовпець визначаємо за найбільшим додатнім елементом індексного рядка:

$$a_{0j} = \max_{1 \le k \le n} \{a_{0k} | a_{0k} > 0\}.$$

Напрямний стовпець A_1, напрямний рядок — перший, оскільки $\min\{16/2; 16/1\} = 8$

Виконуємо одну ітерацію симплекс-методу. В результаті дістанемо табл. 1.3.2.

Таблиця 1.3.2

c_i			2	3	0	0	M	M
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
2	X_1	8	1	0. 5	-0.5	0	0.5	0
M	X_6	8	0	**1. 5**	0.5	-1	-0.5	1
		$8M$+16	0	1.5M-2	0.5M-1	$-M$	-0.5M+1	0

Друга ітерація. Оскільки $a_{02} = 1.5M - 2 > a_{0j}\ (j \neq 2)$, то напрямний сто впець другої ітерації A_2. Напрямний рядок — другий, оскільки $\min\{8/0.5; 8/1.5\} = 16/3$

Виконаємо одну ітерацію симплекс-методу (напрямний елемент: 1.5). В результаті дістанемо табл. 1.3.3.

Таблиця 1.3.3

c_i			2	3	0	0	M	M
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
2	x_1	16/3	1	0	1/3	-2/3	-1/3	2/3
3	x_2	16/3	0	1	-2/3	1/3	2/3	-1/3
		80/3	0	0	-4/3	-1/3	4/3-M	1/3-M

Як бачимо, в табл. 1.3.3 всі штучні змінні виведено з базису, отже, маємо початковий ДБР. Оскільки в індексному рядку табл. 1.3.3 всі оцінки для небазисних векторів $a_{0j}<0$, то знайдено оптимальний

розв'язок:

$x_{1опт}=16/3,\ x_{2опт}=16/3.$

Відповідне значення цільової функції: $\mathrm{Min}(2x_1+3x_2)=2\,x_{1опт}+3\,x_{2опт}=80/3.$

Заключення

Таким чином, більшість оптимізаційних задач на практиці можна звести до задач лінійного програмування. Для оптимізації лінійних цільових функцій застосовують методи лінійного програмування. Найбільш розповсюдженим є симплекс-метод рішення задач лінійного програмування.

Для дослідника найважливішим етапом є складання математичної моделі задачі, що вирішується. Після цього етапу можна вирішувати задачу за допомогою спеціальних пакетів прикладних програм.

Окрему подяку за допомогу у формуванні даного матеріалу висловлюю доктору технічних наук, професору Зайченко Олені Юріївні, професору кафедри математичних методів системного аналізу Інституту проблем системного аналізу Національного технічного університету України «КПІ».

Завідувач кафедри вищої математики,
математичного моделювання та фізики
кандидат фізико-математичних наук, доцент І.В. Замрій

Додаток до Лекції 7 МММОП

Завдання для самостійного виконання [2]

Розв'язати геометрично (або упевнитись у нерозв'язності) наступні задачі ЛП:

1.1

$$F = 7x_1 + 6x_2 \to \max$$
$$2x_1 + 5x_2 \ge 10$$
$$5x_1 + 2x_2 \ge 10$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_2 \le 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.2

$$F = 3x_1 - 2x_2 \to \max$$
$$2x_1 + x_2 \le 11$$
$$-3x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 20$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.3

$$F = 5x_1 - 3x_2 \to \min$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$2x_1 - 3x_2 \ge -6$$
$$x_1 - x_2 \le 4$$
$$4x_1 + 7x_2 \le 28$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.3.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$2x_1 + x_2 \le 14$$
$$-3x_1 + 2x_2 \le 9$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 27$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.4.

$$F = 7x_1 - 2x_2 \to \max$$
$$5x_1 - 2x_2 \le 3$$
$$x_1 + x_2 \ge 1$$
$$-3x_1 + x_2 \le 3$$
$$2x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.5.

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 - 2x_2 \ge 4$$
$$5x_1 + 2x_2 \ge 10$$
$$4x_1 - 3x_2 \le 12$$
$$7x_1 + 4x_2 \le 28$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.6.

$$F = 2x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$3x_1 - 2x_2 \ge -6$$
$$x_1 + x_2 \ge 3$$
$$x_1 \le 3$$
$$x_2 \le 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.7

$$F = 2x_1 - 4x_2 \to \max$$
$$8x_1 - 5x_2 \le 16$$
$$x_1 + 3x_2 \le 2$$
$$2x_1 + 7x_2 \ge 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.8.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$5x_1 - 2x_2 \le 4$$
$$x_1 - 2x_2 \ge -4$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.9.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$x_1 - 4x_2 \le 4$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.10.

$$F = 2x_1 - x_2 \to \max$$
$$x_1 - x_2 \ge -3$$
$$6x_1 + 7x_2 \le 42$$
$$2x_1 - 3x_2 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.11.

$$F = 5x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 + 7x_2 \ge 7$$
$$-2x_1 + x_2 \le 6$$
$$2x_1 + 5x_2 \ge 10$$
$$5x_1 + 2x_2 \ge 10$$
$$7x_1 + x_2 \ge 7$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_2 \le 7$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.12.

$$F = x_1 - x_2 \to \max$$
$$-x_1 + x_2 \ge 8$$
$$8x_1 + 5x_2 \le 80$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2$$
$$x_1 + 4x_2 \ge 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.13

$$F = 7x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \le 14$$
$$3x_1 - 5x_2 \le 15$$
$$5x_1 + 3x_2 \ge 21$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.14

$$F = 7x_1 - x_2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \ge 3$$
$$5x_1 + x_2 \ge 5$$
$$x_1 + 5x_2 \ge 5$$
$$0 \le x_1 \le 4$$
$$0 \le x_2 \le 4.$$

1.15

$$F = x_1 + x_2 \to \min$$
$$3x_1 + x_2 \ge 8$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$x_1 - x_2 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.16

$$F = x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$-x_1 + x_2 \le 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 20$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.17

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 - x_2 \ge 4$$
$$x_1 + x_2 \ge 10$$
$$4x_1 - x_2 \le 12$$
$$7x_1 + x_2 \le 7$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.18

$$F = 2x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$3x_1 - 2x_2 \ge -6$$
$$x_1 + x_2 \ge 3$$
$$x_1 \le 3$$
$$x_2 \le 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.19.

$$F = 2x_1 - 4x_2 \to \max$$
$$8x_1 - 5x_2 \le 16$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 2$$
$$2x_1 + 7x_2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

1.20.

$$F = -3x_1 + 6x_2 \to \min$$
$$5x_1 - 2x_2 \le 4$$
$$x_1 - 2x_2 \ge -4$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$