МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ

ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Тема 4. Характеристики систем масового обслуговування з очікуванням

План лекції:

Вступ.

Система масового обслуговування (СМО) є математичною моделлю процесу, що протікає в складних технічних та організаційних системах, які виконують функції по обслуговуванню заявок, що надходять до систем. Прикладами складних систем, що доцільно представляти у вигляді СМО, можуть бути: системи технічного захисту інформації, автозаправна станція, автоматична телефонна станція, перукарня, супермаркет, майстерня з ремонту електрообладнання, тощо.

Найбільш розповсюдженими видами систем масового обслуговування є СМО з відмовами та очікуванням.

В лекції розглядаються методи обчислення характеристик багатоканальних СМО з очікуванням: імовірність відмови $P_{\text{відм}}$, відносну пропускну здатність q, абсолютну пропускну здатність A, середню довжину черги $\bar{r}$, середня кількість заявок, пов’язаних з системою $\bar{k}$.

1. Характеристики одноканальної СМО з очікуванням

1.1. Одноканальна СМО з очікуванням з обмеженою чергою

Розглянемо для початку найпростішу з усіх можливих СМО з очікуванням – одноканальну систему ($n = 1$), на яку поступає потік заявок з інтенсивністю λ; інтенсивність обслуговування μ (тобто в середньому безперервно зайнятий канал буде видавати μ обслужених заявок за одиницю часу). Заявка, яка поступила в момент, коли канал зайнятий, стає в чергу та очікує обслуговування.

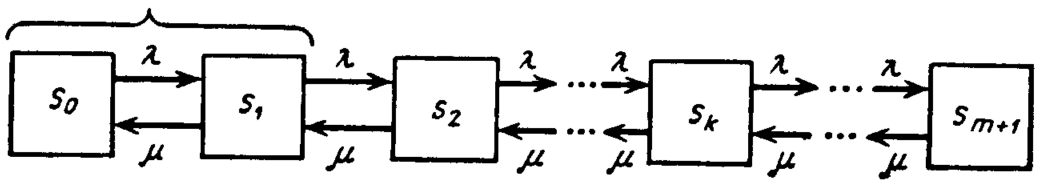


Рис. 2

Припустимо спочатку, що **кількість місць в черзі обмежена кількістю m**, тобто якщо заявка прийшла в момент, коли в черзі вже стоять m заявок, вона залишає систему не обслуженою. В подальшому, спрямувавши m до нескінченності, ми отримаємо характеристики **одноканальної СМО без обмежень по довжині черги**.

Будемо нумерувати стани СМО по числу заявок, які знаходяться в системі (як тих, що обслуговуються, так і тих, що очікують обслуговування):

S_0 - канал вільний,
S_1 – канал зайнятий, черги немає,
S_2 – канал зайнятий, одна заявка стоїть в черзі,
. . . .
S_k – канал зайнятий, $k - 1$ заявок стоять в черзі,
. . . .
S_{m+1} – канал зайнятий, m заявок стоять в черзі.

Граф станів СМО показаний на рис. 2. Інтенсивності потоків подій, які переводять в систему по стрілкам зліва направо, всі дорівнюють λ, а справа наліво – μ. Дійсно, по стрілкам зліва направо систему переводить потік заявок (як тільки прийде заявка, система переходить в наступний стан), справа ж наліво – потік «звільнень» зайнятого каналу, який має інтенсивність μ (як тільки буде обслужена чергова заявка, канал або звільниться, або зменшиться кількість заявок в черзі).

Зображена на рис. 2 схема являє собою схему загибелі та розмноження. Користуючись загальним розв’язанням, наданим для схеми загибелі та розмноження, напишемо вираз граничних імовірностей станів:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = (\lambda/\mu)\, p_0, \\ p_2 = (\lambda/\mu)^2\, p_0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_k = (\lambda/\mu)^k\, p_0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_{m+1} = (\lambda/\mu)^{m+1}\, p_0, \\ p_0 = \dfrac{1}{1+(\lambda/\mu)+(\lambda/\mu)^2+\dots+(\lambda/\mu)^{m+1}}. \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Вводячи позначення $\lambda/\mu = \rho$, перепишемо формули (2.1) у вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = \rho p_0, \\ p_2 = \rho^2\, p_0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_k = \rho^k\, p_0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_{m+1} = \rho^{m+1}\, p_0, \\ p_0 = \dfrac{1}{1+\rho+\rho^2+\dots+\rho^{m+1}} = \\ \quad = [1+\rho+\rho^2+\dots+\rho^{m+1}]^{-1}. \end{array}\right\} \qquad (2.2)$$

Відмітимо, що у знаменнику останньої формули (2.2) стоїть геометрична прогресія з першим членом 1 та знаменником ρ. Підсумовуючи цю прогресію, знаходимо:

$$p_0 = \frac{1}{(1-\rho^{m+2})/(1-\rho)} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}. \qquad (2.3)$$

Таким чином, формули (2.2) остаточно приймуть вигляд:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \\ p_1 = \rho p_0, \\ p_2 = \rho^2\, p_0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_k = \rho^k\, p_0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_{m+1} = \rho^{m+1}\, p_0. \end{array}\right\} \qquad (2.4)$$

Звернемо увагу на те, що формула (2.3) має місце тільки при $\rho \neq 1$ (при $\rho = 1$ вона дає невизначеність виду $0/0$). Але суму геометричної прогресії зі знаменником $\rho = 1$ знайти ще простіше ніж за формулою (2.3): вона дорівнює $m + 2$, і в цьому випадку $p_0 = 1/(m + 2)$. Відмітимо, що той самий результат ми могли б отримати більш складним методом, розкриваючи невизначеність (2.3) за правилом Лопіталя.

Визначимо характеристики СМО: імовірність відмови $P_{\text{відм}}$, відносну пропускну здатність q, абсолютну пропускну здатність A, середню довжину черги $\bar{r}$, середня кількість заявок, пов'язаних з системою $\bar{k}$.

Очевидно, заявка отримує відмову тільки в тому випадку, коли канал зайнятий і всі m місць в черзі – також:

$$P_{\text{відм}} = p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}. \tag{2.5}$$

Знаходимо відносну пропускну здатність:

$$q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}. \tag{2.6}$$

Абсолютна пропускна здатність:

$$A = \lambda q.$$

Знайдемо середню кількість $\bar{r}$ заявок, які знаходяться в черзі. Визначимо цю величину як математичне очікування дискретної випадкової величини R - числа заявок, які знаходяться в черзі:

$$\bar{r} = M[R].$$

З імовірністю p_2 в черзі стоїть одна заявка, з імовірністю p_3 дві заявки, взагалі з імовірністю p_k в черзі стоїть $k - 1$ заявок, нарешті, з імовірністю p_{m+1} в черзі стоїть m заявок. Середня кількість заявок в черзі отримаємо, помноживши кількість заявок в черзі на відповідну імовірність і склавши результати:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= 1\cdot p_2 + 2\cdot p_3 + \dots + (k-1)\cdot p_k + \dots + m\cdot p_{m+1} = \\ &= 1\cdot\rho^2 p_0 + 2\cdot\rho^3 p_0 + \dots + (k-1)\cdot\rho^k p_0 + \dots + m\cdot\rho^{m+1} p_0.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Винесемо в цьому виразі $\rho^2 p_0$ за дужки:

$$\bar{r} = \rho^2 p_0 \left|1 + 2\rho + \dots + (k-1)\rho^{k-2} + \dots m\rho^{m-1}\right|. \tag{2.8}$$

Виведемо формулу для суми, яка стоїть в дужках (цією формулою ми будемо часто користуватись в подальшому). Очевидно, розглянута сума є не що інше, як похідна по p суми

$$\sum = \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^m.$$

А для цього виразу ми можемо скористатися формулою суми геометричної прогресії:

$$\sum = \frac{\rho - \rho^{m1}}{1-\rho}. \tag{2.9}$$

Продиференціюємо (2.9) по ρ:

$$\sum\nolimits_\rho' = \frac{[1-(m+1)\rho^m](1-\rho) + (\rho - \rho^{m+1})}{(1-\rho)^2} =$$

$$= \frac{1-(m+1)\rho^m - \rho + (m+1)\rho^{m+1} + \rho - \rho^{m+1}}{(1-\rho)^2} =$$

$$= \frac{1-(m+1)\rho^m + m\rho^{m+1}}{(1-\rho)^2} = \frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

Отже, вираз для суми, яка стоїть в дужках в правій частині (2.8), знайдено:

$$1 + 2\rho + \ldots + (k-1)\rho^{k-2} + \ldots + m\rho^{m-1} = \frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}. \tag{2.10}$$

Підставляючи його в (2.8), отримаємо:

$$\bar{r} = \rho^2 p_0 \frac{1-\rho^m(m+1+m\rho)}{(1-\rho^2)}.$$

Враховуючи вираз для p_0 з (2.4), маємо:

$$\bar{r} = \rho^2 \frac{(1-\rho)[1-\rho^m(m+1+m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho^2)}$$

або, остаточно,

$$\bar{r} = \frac{\rho^2[1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}. \tag{2.11}$$

Таким чином ми вивели вираз для середнього числа заявок, які очікують обслуговування в черзі.

Виведемо тепер формулу для середнього числа $\bar{k}$ заявок, що перебувають в системі (як тих, що стоять в черзі, так и тих, що знаходяться на обслуговуванні). Будемо розв'язувати задачу наступним чином: розглянемо загальну кількість заявок K, що перебувають в системі, як суму двох випадкових величин: числа заявок, які стоять в черзі, і числа заявок, які знаходяться на обслуговуванні:

$$K = R + \Omega,$$

де R – кількість заявок в черзі, Ω – кількість заявок на обслуговуванні.

За теоремою додавання математичних очікувань

$$\bar{k} = M[K] = M[R] + M[\Omega] = \bar{r} + \bar{\omega},$$

де $\bar{r}$ – середня кількість заявок в черзі, $\bar{\omega}$ - середня кількість заявок під обслуговуванням.

Величину $\bar{r}$ ми тільки що знайшли (2.11). Знайдемо величину $\bar{\omega}$. Так як канал в системі один, то випадкова величина Ω може приймати тільки значення: 0 або 1. Значення 0 вона приймає, якщо канал вільний. Імовірність цього дорівнює

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}.$$

Значення 1 вона приймає, якщо канал зайнятий. Імовірність цього дорівнює

$$1 - p_0 = \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}.$$

Звідси знаходимо математичне очікування числа заявок, які знаходяться на обслуговуванні:

$$\bar{\omega} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}.$$

Таким чином, середня кількість заявок, що перебувають в СМО, буде

$$\bar{k} = \bar{r} + \frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}, \qquad (2.12)$$

де величина $\bar{r}$ визначається за формулою (2.11).

Виведемо вираз ще для однієї важливої характеристики СМО з очікуванням: **середнього часу очікування заявки в черзі**. Позначимо його $\bar{t}_{оч}$. Нехай заявка приходить в систему в якийсь момент часу. З імовірністю p_1 вона прийде в систему під час обслуговування деякої заявки, але перед нею не буде черги, і заявка буде чекати початку свого обслуговування протягом часу $1/\mu$ (середній час обслуговування однієї заявки). З імовірністю p_2 в черзі перед заявкою, що розглядається, буде стояти ще одна, і час очікування в середньому буде дорівнювати $2/\mu$, і т.д. Взагалі, з імовірністю p_k заявка, що надійшла, застане в системі k заявок і буде чекати в середньому k/μ одиниць часу. Тут k може бути будь-яким цілим числом до m. Що стосується $k = m + 1$, тобто випадку, коли заявка, що надійшла, застає канал обслуговування зайнятим і ще m заявок в черзі (імовірність цього p_{m+1}), то час очікування в цьому випадку також дорівнює нулю, тому що заявка не стає в чергу (і не обслуговується). Тому середній час очікування буде:

$$\bar{t}_{\text{ож}} = p_1 \frac{1}{\mu} + p_2 \frac{2}{\mu} + \dots + p_k \frac{k}{\mu} + \dots + p_m \frac{m}{\mu}.$$

Підставляючи сюди вирази для $p_1, \dots, p_m$, отримуємо:

$$\bar{t}_{\text{ож}} = p_0 \rho \frac{1}{\mu} + p_0 \rho^2 \frac{2}{\mu} + \dots + p_0 \rho^k \frac{k}{\mu} + \dots + p_0 \rho^m \frac{m}{\mu} = \\ = \frac{p_0 \rho}{\mu} (1 + 2\rho + \dots + k\rho^{k-1} + \dots + m\rho^{m-1}).$$

Перетворимо суму в дужках, користуючись формулою (2.10):

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{p_0 \rho}{\mu} \frac{1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)}{(1-\rho)^2},$$

Або, виразивши p_0 через ρ:

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho (1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} \frac{1-\rho^m (m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho [1-\rho^m (m+1-m\rho)]}{\mu (1-\rho^{m+2}) (1-\rho)}. \quad (2.13)$$

Порівнюючи цей вираз із формулою (2.11), помічаємо, що

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1}{\rho\mu} \bar{r} = \frac{\bar{r}}{\lambda}, \quad (2.14)$$

Тобто ***середній час очікування дорівнює середньому числу заявок в черзі, поділеному на інтенсивність потоку заявок***.

Виведемо ще формулу для **середнього часу перебування заявки в системі**. Позначимо $T_{\text{сист}}$ випадкову величину – час перебування заявки в СМО. Ця випадкова величина складається з двох доданків (також випадкових):

$$T_{\text{сист}} = T_{\text{оч}} + \Theta,$$

де $T_{\text{оч}}$ - час очікування заявки в черзі, θ - випадкова величина, яка дорівнює часу обслуговування $T_{\text{об}}$, якщо заявка обслуговується, і нулю, якщо вона не обслуговується (отримує відмову).

За теоремою додавання математичних очікувань:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = M[T_{\text{сист}}] = M[T_{\text{оч}}] + M[\Theta],$$

але, в наших позначеннях, $M[T_{\text{оч}}] = \bar{t}_{\text{оч}}$, а $M[\Theta] = q\bar{t}_{\text{об}} = \frac{q}{\mu}$. Звідси знаходимо: $\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + q/\mu$, або, з урахуванням формули (2.4),

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \left(\frac{\bar{r}}{\lambda}\right) + \frac{q}{\mu}. \tag{2.15}$$

Приклад 1. Автозаправна станція (АЗС) являє собою СМО з одним каналом обслуговування (однією колонкою). Майданчик при станції допускає перебування в черзі на заправку не більше трьох автомобілів одночасно ($m = 3$). Якщо в черзі вже знаходяться три автомобіля, черговий автомобіль, який прибув до станції, в чергу не стає, а проїжджає повз неї. Потік автомобілів, які прибувають для заправки, має інтенсивність $\lambda = 1$ (автомобілів за хвилину). Процес заправки продовжується в середньому 1,25 хв. Визначити:

- імовірність відмови;
- відносну та абсолютну пропускну здатності СМО;
- середню кількість автомобілів, які чекають заправку;
- середню кількість автомобілів, які знаходяться на АЗС (включно із тими, що обслуговуються);
- середній час очікування автомобіля в черзі;
- середній час перебування автомобіля на АЗС (включно із обслуговуванням).

Розв'язання. Знаходимо приведену інтенсивність потоку заявок:

$$\mu = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25.$$

За формулами:

$$p_0 = \frac{1 - 1{,}25}{1 - 3{,}05} \approx 0{,}122, \quad p_1 = 1{,}25 \cdot 0{,}122 \approx 0{,}152,$$
$$p_2 = 1{,}25 \cdot 0{,}122 \approx 0{,}191, \quad p_3 = 1{,}25 \cdot 0{,}122 \approx 0{,}238,$$
$$p_4 = 1{,}25 \cdot 0{,}122 \approx 0{,}297.$$

Імовірність відмови $P_{\text{відм}} \approx 0{,}297$.

Відносна пропускна здатність СМО $q = 1 - P_{\text{відм}} = 0{,}703$.

Абсолютна пропускна здатність СМО $A = \lambda q = 0{,}703$ (автомобіля за хв.)

Середня кількість автомобілів в черзі знаходимо за формулою (2.11)

$$\bar{r} = \frac{1{,}25^2[1 - 1{,}25^3(3 + 1 - 3{,}75)]}{(1 - 1{,}25^5)(1 - 1{,}25)} \approx 1{,}56.$$

Тобто середня кількість автомобілів, які очікують в черзі на заправку, дорівнює 1,56.

Додаючи до цієї величини середню кількість автомобілів, які знаходяться під обслуговуванням

$$\overline{\omega} = \frac{1{,}25 - 1{,}25^5}{1 - 1{,}25^5} \approx 0{,}88,$$

отримуємо середню кількість автомобілів, що перебувають в АЗС:

$$\bar{k} = \bar{r} + \overline{\omega} \approx 2{,}44.$$

Середній час очікування автомобіля в черзі, за формулою (2.14) дорівнює

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = 1{,}56 \text{ (хв)}.$$

Додаючи до цієї величини $M[\theta] = \frac{q}{\mu} = 0{,}703/0{,}8 \approx 0{,}88$, отримаємо середній час, який автомобіль проводить на АЗС:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = 1{,}56 + 0{,}88 = 2{,}44 \text{ (хв)}.$$

1.2. Одноканальна СМО з очікуванням з необмеженою чергою.

До цих пір ми розглядали роботу одноканальної СМО з очікуванням при обмеженому числі m місць в черзі. Тепер знімемо це обмеження, тобто спрямуємо m до нескінченності. При цьому кількість можливих станів системи стане нескінченним, і граф станів набуде вигляду, який показаний на рис. 3.

Спробуємо отримати імовірності станів СМО з необмеженою чергою шляхом граничного переходу (при $m \to \infty$) з формул (2.4).

Відмітимо, що при цьому знаменник в останній формулі (2.2) являє собою суму нескінченного числа членів геометричної прогресії. Ця сума збігається тільки, коли прогресія нескінченно спадна, тобто при $p < 1$. Можна абсолютно строго довести, що $p < 1$ є умова, при якій в СМО з очікуванням існує граничний встановлений режим; при $p \geq 1$ такого режиму не існує, і черга при $t \to \infty$ зростає до нескінченності.

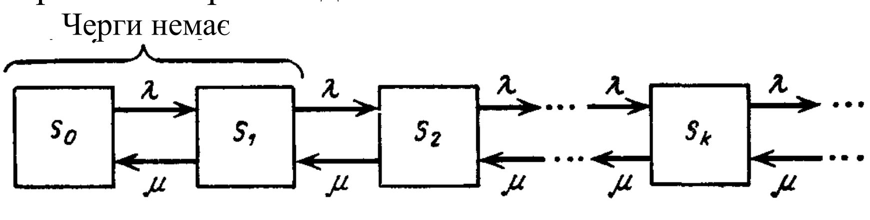


Рис. 3

Припустимо, що

$$\rho = \lambda/\mu < 1,$$

тобто що граничний режим існує. Спрямуємо в формулах (2.4) m до ∞ і виведемо формули для граничних імовірностей станів в СМО без обмежень по довжині черги. Отримаємо:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = 1-\rho, \\ p_1 = \rho(1-\rho), \\ p_2 = \rho^2(1-\rho), \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ p_k = \rho^k(1-\rho), \\ \quad \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

При відсутності обмежень по довжині черги кожна заявка, яка надійшла в систему, буде обслужена, тому $q = 1,\ A = \lambda q = \lambda$. Середню кількість заявок в черзі отримаємо з (2.11) при $m \to \infty$:

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{3.2}$$

Середня кількість заявок в системі за формулою (2.12) при $m \to \infty$ буде дорівнювати

$$\bar{k} = \bar{r} + \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{3.3}$$

Середній час очікування $t_{\text{оч}}$ також отримаємо з формули (2.14) при $m \to \infty$:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho}. \tag{3.4}$$

Або, в іншій формі:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \tag{3.5}$$

Середній час перебування заявки в СМО дорівнює середньому часу очікування $\bar{t}_{\text{обсл}} = 1/\mu$:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\rho}. \tag{3.6}$$

Приклад 2. На залізничну сортувальну гірку прибувають потяги з інтенсивністю $\lambda = 2$ (потяги за годину). Середній час, на протязі якого гірка обробляє потяг, дорівнює 0,4 години. Потяги, які прибули в момент, коли гірка зайнята, стають в чергу і очікують в парку прибуття, де наявні три запасні колії, на кожній з яких може чекати один потяг. Потяг, який прибув в момент, коли всі три запасні колії в парку прибуття зайняті, стає в чергу на зовнішню колію. Всі потоки подій – найпростіші. Знайти:

- середня кількість потягів, які чекають в черзі (як в парку прибуття, так і поза ним);
- середній час очікування потягу в парку прибуття і на зовнішніх коліях;

- середній час перебування потягу на сортувальній станції (включно з очікуванням та обслуговуванням);
- імовірність того, що потяг, який прибув, займе місце на зовнішніх коліях.

Розв'язання. В нашому випадку $\lambda = 2,\ \mu = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5,\ \ \frac{\lambda}{\mu} = p = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8 < 1$, і СМО в середньому «справляється» з потоком заявок, який на неї поступає.

Середня кількість потягів, які чекають черги (як в парку прибуття, так і поза ним), знайдемо за формулою (3.2):

$$\overline{r'} = \frac{0{,}8^2}{1 - 0{,}8} = 3{,}2.$$

Середня кількість потягів, які чекають черги на зовнішніх коліях, підраховуємо так: з імовірністю p_5 поза парком прибуття буде очікувати один потяг, з імовірністю p_6 - два потяга і т.д., з імовірністю $\rho_k(k > 5)$ - $(k - 4)$ потяга.

Середня кількість потягів, які очікують поза парком, буде:

$$\overline{r'} = 1p_5 + 2p_6 + \ldots + (k-4)\ p_k + \ldots = 1\ (1-\rho)\ \rho^5 + 2\ (1-\rho)\ \rho^6 + \ldots +$$
$$+ \ldots + (k-4)\ (1-\rho)\ \rho^k + \ldots = (1-\rho)\ \rho^5\ [1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots].$$

Формулу для нескінченної суми в дужках отримуємо граничним переходом (при $m \to \infty$) з формули (2.10):

$$1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots = \frac{1}{(1-\rho)^2}. \quad (3.7)$$

Звідси

$$\overline{r'} = (1 - \rho)\rho^3 \frac{1}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho^3}{1 - \rho}.$$

Підставляючи сюди $p = 0{,}8$ отримаємо:

$$\overline{r'} = 1{,}64.$$

Імовірність того, що прибуваючий потяг займе місце на зовнішніх коліях, визначається ще простіше: вона дорівнює імовірності того, що довжина черги не меншу трьох, тобто

$$p_4 + p_5 + p_6 + \ldots = (1-\rho)\ \rho^4 + (1-\rho)\ \rho^5 + (1-\rho)\ \rho^6 + \ldots =$$
$$= (1-\rho)\ \rho^4\ (1 + \rho + \rho^2 + \ldots) = \rho^4 = 0{,}8^4 \approx 0{,}41.$$

Середній час очікування в парку прибуття визначаємо, розглядаючи різноманітні гіпотези про кількість потягів, які знаходяться в системі:

$$\frac{1}{\mu}p_1+\frac{2}{\mu}p_2+\frac{3}{\mu}[p_3+p_4+p_5+\dots]=$$
$$=\frac{1}{\mu}\{1-\rho(1-\rho)+2\rho^2(1-\rho)+3[\rho^3(1-\rho)+\rho^4(1-\rho)+\dots]\}=$$
$$=\frac{1}{\mu}[\rho(1-\rho)+2\rho^2(1-\rho)+3\rho^3]=$$
$$=\frac{1}{\mu}[\rho-\rho^2+2\rho^2-2\rho^3+3\rho^3]=\frac{1}{\mu}[\rho+\rho^2+\rho^3]=\frac{1}{\mu}\frac{\rho-\rho^4}{1-\rho}.$$

Для $\rho = 0{,}8$, $\mu = 2{,}5$, отримуємо, що середній час очікування в парку прибутті дорівнює

$$0{,}4\frac{0{,}8-0{,}41}{0{,}2}=0{,}78\ (\text{год})\approx 47\ (\text{хв}).$$

Що стосується середнього часу очікування на зовнішніх коліях, то воно дорівнює

$$\frac{1}{\mu}p\ +\frac{2}{\mu}p_5+\frac{3}{\mu}p_6+\dots=\frac{1}{\mu}(1-\rho)\rho^4+\frac{2}{\mu}(1-\rho)\rho^5+\frac{3}{\mu}(1-\rho)\rho^6+\dots=$$
$$=\frac{(1-\rho)\rho^4}{\mu}[1+2\rho+3\rho^2+\dots]=\frac{(1-\rho)\rho^4}{\mu}\frac{1}{(1-\rho)^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\rho^4}{1-\rho},$$

Тобто для наших чисельних даних,

$$0{,}4\cdot\frac{0{,}41}{0{,}2}=0{,}82\ (\text{год})\approx 49(\text{хв})$$

Середній час перебування потягу на сортувальній станції (рахуючи очікування і обслуговування) буде дорівнювати:

$$\bar{t}_{\text{сист}}=0б82+0б78+0б4=2\ (\text{год}).$$

Задача розв’язана.

2. Характеристики багатоканальних СМО з очікуванням

2.1. Багатоканальна СМО з обмеженою чергою

Розглянемо n-канальну СМО з очікуванням, на яку поступає потік заявок з інтенсивністю λ; інтенсивність обслуговування (для одного каналу) μ; кількість місць в черзі m.

Стан системи будемо нумерувати по кількості заявок, пов'язаних із системою:

$$\text{Черги немає}\begin{cases} S_0 - \text{ всі канали вільні,} \\ S_1 - \text{ один канал зайнятий, інші вільні,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_k - \text{ зайняті } k \text{ каналів, інші вільні,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_n - \text{ зайняті всі } n \text{ каналів,} \end{cases}$$

S_{n+1} – зайняті всі n каналів, одна заявка стоїть в черзі,
. . . .
S_{n+r} – зайняті всі n каналів, r заявок стоять в черзі,
. . . .
S_{n+m} – зайняті всі n каналів, m заявок стоять в черзі.

Граф станів наведено на рис. 1. У кожної стрілки проставлені відповідні інтенсивності потоків подій. Дійсно, по стрілкам зліва направо систему переводить завжди один і той же потік заявок з інтенсивністю λ; по стрілкам справа наліво систему переводить потік обслуговувань, інтенсивність якого дорівнює μ, помножене на кількість зайнятих каналів.

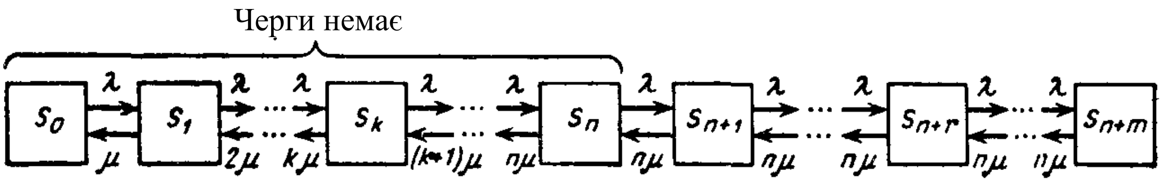


Рис. 1. Граф станів для n-канальної СМО з m-обмеженою чергою

Граф станів являє собою схему загибелі та розмноження, для якої рішення в загальному вигляді вже отримано. Напишемо вирази граничних імовірностей, одразу ж позначаючи $\lambda/\mu = \rho$:

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} p_0, \quad p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} p_0, \quad \ldots, \quad p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0,$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \underline{\frac{\rho^{n+1}}{nn!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}} \right]^{-1}$$

або, сумуючи геометричну прогресію зі знаменником ρ/n підкреслені члени:

$$\left.\begin{aligned}
&p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho/n - (\rho/n)^{m+1}}{1 - \rho/n} \right]^{-1}, \\
&p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \\
&p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \\
&p_{n+1} = \frac{\rho^n}{n \cdot n!} p_0, \\
&p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} p_0, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0.
\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Таким чином, всі імовірності станів знайдені.

Знайдемо деякі характеристики ефективності обслуговування. Заявка, яка надійшла, **отримує відмову**, якщо зайняті всі n каналів та всі m місць в черзі:

$$P_{\text{відм}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0. \tag{1.2}$$

Відносна пропускна здатність (доля обслужених заявок від всіх заявок, що надійшли до системи за певний період часу), як завжди, доповнює імовірність відмови до одиниці:

$$q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0.$$

Абсолютна пропускна здатність СМО буде дорівнювати:

$$A = \lambda q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right). \tag{1.3}$$

Середня кількість зайнятих каналів. Для СМО з відмовами вона співпадала з середньою кількістю заявок, що знаходяться в системі. Для СМО с чергою середня кількість зайнятих каналів не співпадає з середньою кількістю заявок в системі: остання величина відрізняється від першої на середню кількість заявок, які знаходяться в черзі.

Позначимо $\bar{k}$ – середнє число заявок, пов'язаних з системою, $\bar{z}$ – середнє число зайнятих каналів. Кожен зайнятий канал обслуговує в середньому μ заявок за одиницю часу. Тому:

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \lambda/\mu\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!}p_0\right),$$

або

$$\bar{z} = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!}p_0\right). \quad (1.4)$$

Середня кількість заявок в черзі можна визначити безпосередньо, як математичне очікування дискретної випадкової величини, помноживши будь-яке можливе число заявок на імовірність того, що саме це число заявок буде в черзі:

$$\bar{r} = 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \dots + m \cdot p_{n+m} = 1 \cdot \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}p_0 + 2 \cdot \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!}p_0 + \dots +$$
$$+ m \cdot \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!}p_0 = \frac{\rho^{n+1}p_0}{n \cdot n!}\left[1 + 2\frac{\rho}{n} + 3\left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \dots + m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m-1}\right]. \quad (1.5)$$

Введемо позначення $\rho/n = \varkappa$ і перепишемо (1.5) у вигляді:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}p_{0[1+2\varkappa+3\varkappa^2+\dots+m\varkappa^{m-1}]}. \quad (1.6)$$

Обчисливши суму в дужках виразу (1.6), отримаємо:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}p_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1-(m+1)\varkappa+m\varkappa}{(1-\varkappa)^2}. \quad (1.7)$$

Додаючи середню кількість заявок в черзі $\bar{r}$ та середню кількість зайнятих каналів $\bar{z}$, отримаємо **середню кількість заявок, пов'язаних із системою**:

$$\bar{k} = \bar{z} + \bar{r}. \quad (1.8)$$

Середній час очікування заявки в черзі: $\bar{t}_{оч}$. Зробимо ряд гіпотез про те, в якому стані застане систему заявка, що надійшла, та скільки часу їй доведеться чекати обслуговування.

Якщо заявка застане не всі канали зайнятими, їй взагалі не доведеться чекати. Якщо заявка надійде в момент, коли зайняті всі n каналів, а черги немає, їй доведеться чекати в середньому час, який дорівнює $1/n\mu$ (тому що потік звільнень n каналів має інтенсивність $n\mu$). Якщо заявка застане всі канали зайнятими і одну заявку перед собою в черзі, їй доведеться в середньому чекати час $2/n\mu$ (по $1/n\mu$ на кожну заявку, яка стоїть попереду) і т.д. Якщо заявка застане в черзі $(r – 1)$ заявок, їй доведеться чекати в середньому час $r/n\mu$. Якщо заявка, що знову надійшла, застане в черзі вже m заявок, то вона взагалі не буде чекати (але і обслуговуватись не буде). Середній час очікування знайдемо, помноживши кожне з цих значень на відповідну імовірність:

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{1}{n\mu} p_n + \frac{2}{n\mu} p_{n+1} + \dots + \frac{m}{n\mu} p_{n+m-1} =$$
$$= \frac{1}{n\mu}\left[\frac{\rho^n}{n!} p_0 + \frac{2\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 + \dots + \frac{m\rho^{n+m-1}}{n^{m-1} \cdot n!} p_0\right] =$$
$$= \frac{\rho^n p_0}{n \cdot n!\,\mu}\left[1 + \frac{2\rho}{n} + \frac{3\rho^2}{n^2} + \dots + \frac{m\rho^{m-1}}{n^{m-1}}\right].$$

Так само, як і в разі одноканальної СМО з очікуванням, помічаємо, що цей вираз відрізняється від виразу для середньої довжини черги (1.5) тільки множником $1/\rho\mu = 1/\lambda$, тобто

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}. \tag{1.9}$$

Підставляючи сюди вираз для $\bar{r}$, знайдемо:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\rho^n p_0}{n\mu n!} \frac{1-(m+1)\varkappa^m + m\varkappa^{m+1}}{(1-\varkappa)^2}. \tag{1.10}$$

Середній час перебування заявки в системі, так само як і для одноканальної СМО, відрізняється від середнього часу очікування на середній час обслуговування, помножений на відносну пропускну здатність:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = M[T_{\text{оч}}] + M[\theta] = \bar{t}_{\text{оч}} q/\mu. \tag{1.11}$$

Приклад 1. Автозаправна станція (АЗС) з двома колонками ($n=2$) призначена для обслуговування автомобілів. Потік машин, що приїжджають на АЗС, має інтенсивність $\lambda=2$ хв$^{-1}$ (автомобілів за хвилину); середній час обслуговування одного автомобіля

$$\bar{t}_{\text{об}} = \frac{1}{\mu} = 2\ (\text{хв}).$$

Майданчик біля АЗС може вмістити чергу не більше m=3 (автомобілі). Автомобіль, що прибув в момент, коли всі три місця в черзі зайняті, залишає АЗС (отримує відмову). Знайти характеристики СМО:

- імовірність відмови,
- відносну та абсолютну пропускну здатності,

- середню кількість зайнятих колонок,
- середню кількість автомобілів в черзі,
- середній час очікування та перебування автомобіля на АЗС.

Розв'язання. Маємо: $n = 2,\ m = 3,\ \lambda = 2,\ \mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = 0{,}5,\ \rho = 4,\ \varkappa = \rho/n = 2.$

За формулами (1.1) знаходимо:

$$p_0 = \frac{1}{1+\frac{4}{1}+\frac{4^2}{2}+\frac{4^2}{2}\frac{2-2^4}{1-2}} = \frac{1}{125} = 0{,}008.$$

Імовірність відмови:

$$P_{\text{відм}} = p_{n+m} = p_5 = \frac{4^5}{2^3 \cdot 2} p_0 = 64 p_0 = 0{,}512.$$

Відносна пропускна здатність:

$$q = 1 - P_{\text{відм}} = 0{,}488.$$

Абсолютна пропускна здатність:

$$A = q\lambda = 0{,}976 \text{ (автомобіля за хвилину).}$$

Середня кількість зайнятих каналів (колонок):

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{0{,}976}{0{,}5} = 1{,}952$$

(тобто обидві колонки майже весь час зайняті).

Середню кількість машин в черзі знаходимо за формулою (1.7):

$$\bar{r} = \frac{4^3}{2 \cdot 2 \cdot 125} \frac{1 - 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4}{(1-2)^2} = \frac{16}{125} 17 = 2{,}18.$$

Середній час очікування в черзі – за формулою (1.9):

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{2{,}18}{2} = 1{,}09 \text{ (хв).}$$

Середній час перебування автомобіля на АЗС (включно з часом обслуговування):

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + q\bar{t}_{\text{об}} = 1{,}09 + 0{,}976 = 2{,}07 \text{ (хв).}$$

Висновок. Таким чином, ми розглянули функціонування та характеристики n-канальної СМО з очікуванням, коли в черзі одночасно можуть знаходитись не більше m заявок.

2.2. Багатоканальна СМО з необмеженою чергою

Нехай довжина черги не обмежена якимось числом m, а може бути скільки завгодно великою. Граф станів в цьому випадку – нескінченний (рис. 2).

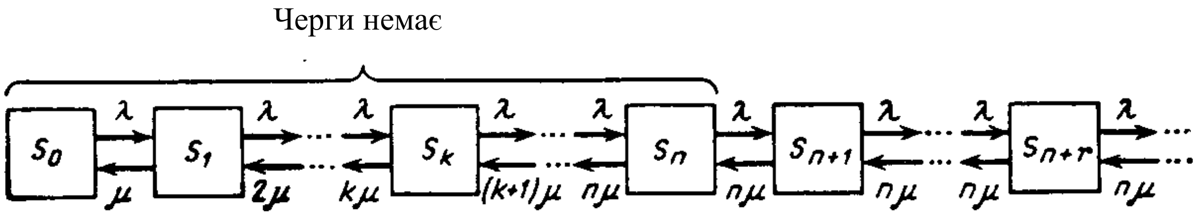


Рис. 2. Граф станів для n-канальної СМО з необмеженою чергою

Імовірності станів можна отримати із формул (1.1) граничним переходом (при $m \to \infty$).

Відмітимо, що сума відповідної геометричної прогресії збігається при $\varkappa = \rho/n < 1$ та розбігається при $\varkappa \geq 1$; відповідно, встановлений режим буде існувати при $\varkappa < 1$, а при $\varkappa \geq 1$ черга буде нескінченно зростати. Припустимо, що $\varkappa < 1$ та спрямуємо у формулах (1.1) величину m до нескінченності. Отримаємо вирази граничних імовірностей станів:

$$\left.\begin{aligned}
p_0 &= \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}\right]^{-1}, \\
p_1 &= \frac{\rho}{1!}\, p_0, \\
p_2 &= \frac{\rho^2}{2!}\, p_0, \\
p_n &= \frac{\rho}{n!}\, p_0, \\
p_{n+1} &= \frac{\rho^{n+1}}{n \; n!}\, p_0, \\
p_{n+2} &= \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!}\, p_0, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
p_{n+r} &= \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}\, p_0, \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

Так як кожна заявка рано чи пізно буде обслужена, то характеристики **пропускної здатності** СМО будуть такими:

$$P_{\text{відм}} = 0, \qquad q = 1, \qquad A = \lambda q = \lambda.$$

Середня кількість заявок в черзі отримаємо із (1.7) при $m \to \infty$:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-x)^2}, \tag{1.13}$$

А **середній час очікування** – із (1.10):

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\rho^n p_0}{n\mu n!(1-x)^2}. \tag{1.14}$$

Середня кількість зайнятих каналів $\bar{z}$ знайдеться, як і раніше, через абсолютну пропускну здатність:

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \tag{1.15}$$

А **середня кількість заявок**, пов'язаних із СМО, – як середня кількість заявок в черзі плюс середня кількість заявок, що знаходяться під обслуговуванням (середня кількість зайнятих каналів):

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}. \tag{1.16}$$

Приклад 2. АЗС з двома колонками (n=2) обслуговує потік автомобілів з інтенсивністю λ=0,8 (автомобіля за хв.). Середній час обслуговування одного автомобіля

$$\bar{t}_{\text{об}} = \frac{1}{\mu} = 2 \text{ (хв)}.$$

В цьому районі немає іншої АЗС, тому черга автомобілів перед АЗС може зростати необмежено. Знайти характеристики СМО.

Розв'язання. Маємо: $n = 2,\ \lambda = 0{,}8,\ \mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = 0{,}5,\ \rho = 1{,}6,\ \varkappa = \frac{\rho}{n} = 0{,}8$ оскільки $\varkappa$<1, черга не зростає безмежно та варто говорити про граничний стаціонарний режим роботи СМО. За формулами (1.11) знаходимо імовірності станів:

$$p_0 = \left[1 + 1{,}6 + 1{,}28 + \frac{4{,}09}{2 \cdot 0{,}4}\right]^{-1} \approx 0{,}111,$$

$$p_1 = 1{,}6 p_0 \approx 0{,}178, \quad p_2 = 1{,}28 p_0 \approx 0{,}142,$$

$$p_3 = \frac{1{,}6^3}{2 \cdot 2!} p_0 \approx 0{,}114, \quad p_4 = \frac{1{,}6^4}{2^2 \cdot 2!} p_0 \approx 0{,}091 \text{ и т. д.}$$

Середня кількість зайнятих каналів знайдемо, поділивши абсолютну пропускну здатність СМО $A = \lambda = 0{,}8$ на інтенсивність обслуговування $\mu = 0{,}5$:

$$\bar{z} = \frac{0{,}8}{0{,}5} = 1{,}6.$$

Імовірність відсутності черги на АЗС:

$$p_0 + p_1 + p_2 \approx 0{,}431.$$

Середня кількість автомобілів в черзі:

$$\bar{r} = \frac{1{,}6^3 \cdot 0{,}111}{2 \cdot 2 \cdot 0{,}42^2} \approx 0{,}71.$$

Середня кількість автомобілів на АЗС:

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z} \approx 0{,}71 + 1{,}6 = 2{,}31$$

Середній час очікування в черзі:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx 0{,}89 \text{ (хв)}.$$

Середній час перебування автомобіля на АЗС:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{об}} \approx 0{,}89 + 2 = 2{,}89 \text{ (хв)}.$$

3. Характеристики багатоканальних СМО з обмеженим часом очікування

Вище ми досліджували СМО з очікуванням, обмеженим тільки довжиною черги (числом m заявок, які одночасно знаходились в черзі). В такій СМО заявка, яка стала в чергу, вже не покидає її і терпляче чекає обслуговування. На практиці нерідко зустрічаються СМО іншого типу, в яких заявка, почекав якийсь час, може піти з черги (так звані «нетерплячі» заявки).

Розглянемо СМО подібного типу, залишаючись в межах марковської схеми. Припустимо, що є n-канальна СМО з очікуванням, в якій кількість місць в черзі не обмежено, але час перебування заявки в черзі обмежено деяким випадковим терміном $T_{оч}$ із середнім значенням $\bar{t}_{оч}$, таким чином, на кожну заявку, яка стоїть в черзі, діє начебто «потік виходів» з інтенсивністю

$$\nu = \frac{1}{t_{оч}}$$

Якщо цей потік пуассоновський, то процес, який протікає в СМО, буде марковським. Знайдемо для нього імовірності станів. Будемо знову нумерувати стани системи по кількості заявок, пов’язаних з системою – як тих що обслуговуються, так і тих, що стоять в черзі:

Черги немає
$$\begin{cases} S_0 \text{ — всі канали вільні,} \\ S_1 \text{ – зайнятий один канал,} \\ S_2 \text{ – зайняті два канала,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_n \text{ – зайняті всі } n \text{ каналів,} \end{cases}$$

S_{n+1} - зайняті всі n каналів, одна заявка стоїть в черзі,

. . . .

S_{n+r} – зайняті всі n каналів, r заявок стоїть в черзі,

. . . .

і т.д.

Граф станів системи показаний на рис. 3.

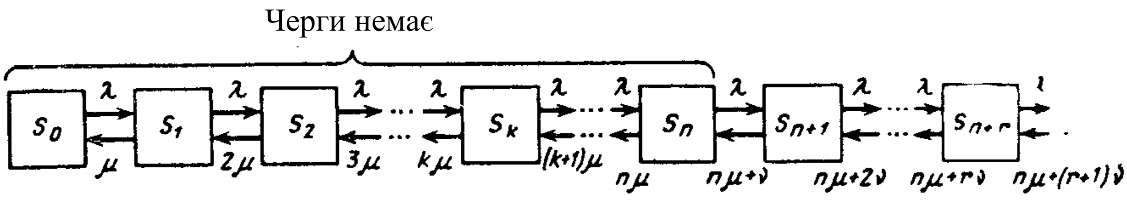


Рис. 3 Граф станів для СМО з чергою та обмеженим часом очікування

Розмітимо цей граф, тобто, проставимо біля стрілок відповідні інтенсивності. Знову, які раніше, у всіх стрілок, які ведуть зліва направо, буде стояти інтенсивність потоку заявок λ. Для станів без черги біля стрілок, які ведуть з них справа наліво, буде, як і раніше, стояти сумарна інтенсивність потоку обслуговування всіх зайнятих каналів. Що стосується станів з чергою, то біля стрілок, які ведуть з них справа наліво буде стояти сумарна інтенсивність потоку обслуговувань всіх n каналів $n\mu$, плюс відповідна інтенсивність потоку виходів з черги. Якщо в черзі стоїть r заявок, то сумарна інтенсивність потоку виходів буде дорівнювати $r\nu$.

Як видно з графу, перед нами знову схема загибелі та розмноження; застосовуючи загальні вирази для граничних імовірностей станів в цій схемі, напишемо:

$$p_1 = \frac{\lambda/\mu}{1!} p_0,$$

$$p_2 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} p_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{(\lambda/\mu)^n \lambda}{n!\,(n\mu + \nu)} p_0,$$

$$p_{n+2} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \frac{\lambda^2}{(n\mu + \nu)(n\mu + 2\nu)} p_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_{n+r} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \frac{\lambda^r}{(n\mu+\nu)(n\mu+2\nu)\dots(n\mu+r\nu)} p_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_0 = \left\{1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\left[\frac{\lambda}{n\mu+\nu} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\lambda^2}{(n\mu+\nu)(n\mu+2\nu)} + \dots + \frac{\lambda^r}{(n\mu+\nu)(n\mu+2\nu)\dots(n\mu+r\nu)} + \dots\right]\right\}^{-1},$$

або, вводячи позначення:

$$\rho=\lambda/\mu, \quad \beta=\nu/\mu,$$

$$\left.\begin{aligned}
&p_0=\left\{1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho}{n+\beta}+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)}+\ldots+\frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)}+\ldots\right]\right\}^{-1},\\
&p_1=\frac{\rho}{1!}\rho_0,\\
&p_2=\frac{\rho^2}{2!}p_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0,\\
&p_{n+1}=\frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho}{n+\beta}p_0,\\
&p_{n+2}=\frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)}p_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_{n+r}=\frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)}p_0,
\end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

Відмітимо деякі **особливості розглянутої СМО з «нетерплячими» заявками** в порівнянні з раніше розглянутою СМО з «терплячими» заявками.

Якщо довжина черги не обмежена заздалегідь ніяким числом та заявки «терплячі» (не виходять з черги), то **стаціонарний граничний режим** існує тільки у випадку $\rho < n$. А при $\rho \geq n$ відповідна геометрична прогресія розбігається, що фізично відповідає необмеженому зростанню черги при ($t\to\infty$). Навпаки, в СМО з «нетерплячими» заявками, які виходять рано чи пізно з черги, встановлений режим обслуговування при $t\to\infty$ досягається завжди, незалежно від наведеної інтенсивності потоку заявок ρ. Це слідує з того, що ряд в знаменнику першої формули (2.1) збігається при будь-яких додатних значеннях ρ і β.

Для СМО з «нетерплячими» заявками поняття «імовірність відмови» не має змісту – кожна заявка стає в чергу, але може і не дочекатись обслуговування, вийшовши раніше.

Відносну пропускну здатність q такої СМО можна обчислити так. Очевидно, що обслужені будуть всі заявки, окрім тих, які вийдуть з черги завчасно. Для цього обчислимо середню кількість заявок в черзі:

$$\bar{r}=1\cdot p_{n+1}+2\cdot p_{n+2}+\ldots+r\cdot p_{n+r}+\ldots. \quad (2.2)$$

На кожну з цих заявок діє «потік виходів» з інтенсивністю ν. Отже, з середньої кількості заявок в черзі в середньому будуть виходити, не дочекавшись обслуговування, $\nu\bar{r}$ заявок за одиницю часу; всього за одиницю часу в середньому буде обслужено

$$A = \lambda - \nu\bar{r} \tag{2.3}$$

заявок. Відносна пропускна здатність СМО буде

$$q = \frac{A}{\lambda} = \frac{\lambda - \nu\bar{r}}{\lambda} = 1 - \frac{\nu}{\lambda}\bar{r}. \tag{2.4}$$

Середня кількість зайнятих каналів $\bar{z}$ як і раніше отримаємо, поділивши абсолютну пропускну здатність на μ:

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda - \nu\bar{r}}{\mu} = \rho - \beta\bar{r}. \tag{2.5}$$

Це дозволяє обчислити середню кількість заявок в черзі $\bar{r}$ без виконання операції суми нескінченного ряду (2.2). Дійсно, із (2.5) отримаємо:

$$\bar{r} = \frac{\rho}{\beta} - \frac{\bar{z}}{\beta}, \tag{2.6}$$

Середню кількість зайнятих каналів, яка входить в цю формулу, можна знайти як математичне очікування випадкової величини Z, яка приймає значення 0,1,2,…,n з імовірністю $p_0, p_1, p_2, \dots, [1 - (p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1})]$:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + n \cdot [1 - (p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1})] = \\ &= p_1 + 2p_2 + \dots + n[1 - (p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1})]. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Ми не будемо виводити формули для середнього часу очікування в черзі, так як для цього потрібні складні математичні викладки.

Відмітимо, що, на відміну від формул для багатоканальних СМО з відмовами та чергами, де сума великого (або нескінченного) числа доданків «згортається за допомогою формул для суми геометричної прогресії, в формулі (2.1) фігурує сума нескінченного ряду, який не є прогресією. Однак ця сума обчислюється наближено, при тому достатньо легко, тому що члени ряду швидко спадають зі збільшенням їх номера. В якості наближеного значення для нескінченної суми береться сума кінцевого числа r–1 членів, а залишок оцінюється наступним чином:

$$\frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)}+\frac{\rho^{r+1}}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+(r+1)\beta)}+\ldots\right]<$$

$$<\frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho^r}{\beta\, 2\cdot\beta\cdot\ldots\cdot r\,\beta}+\frac{\rho^{r+1}}{\beta\cdot 2\,\beta\cdot\ldots\cdot(r+1)\,\beta}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{(\rho/\beta)^r}{r!}+\frac{(\rho/\beta)^{r+1}}{(r+1)!}+\ldots\right]. \qquad (2.8)$$

Можна довести, що нескінченна сума в квадратних дужках менша, ніж $\frac{(\rho/\beta)^r}{r!}e^{\rho/\beta}$і вираз (2.8) менший, ніж

$$\frac{\rho^n}{n!}\frac{(\rho/\beta)^r}{r!}e^{\rho/\beta}.$$

На закінчення відмітимо, що якщо в формулах (2.1) перейти до границі при $\nu\rightarrow 0$ (або, що те саме, при $\beta\rightarrow 0$), то при $p<n$ виходять формули (1.10) для СМО з «терплячими» заявками. Тобто «нетерплячі» заявки стануть «терплячими».

4. Характеристики замкнутих систем масового обслуговування

До цих пір ми розглядали такі СМО, де заявки надходили звідкись з з о в н і і інтенсивність потоку заявок не залежала від стану самої системи. Тепер розглянемо СМО іншого типу – такі, в яких інтенсивність потоку заявок, які надходять, залежить від станів самої СМО. Такі СМО називаються з а м к н у т и м и.

В якості прикладу замкнутої СМО розглянемо наступну систему. Інженер відділу технічного захисту інформації або робітник-наладчик обслуговує n приладів. Кожен прилад може в любий момент вийти з ладу і потребувати обслуговування з боку наладчика. Інтенсивність потоку несправностей кожного приладу дорівнює λ. Прилад, який вийшов з ладу, зупиняється. Якщо в цей момент робітник вільний, він береться за налагодження прилада; на це він витрачає середній час

$$\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu},$$

де μ - інтенсивність потоку обслуговувань (налагоджувань).

Якщо в момент виходу приладу з ладу робітник зайнятий, прилад стає в чергу на обслуговування і чекає, доки робітник не звільниться.

Вимагається знайти імовірності станів даної системи та її характеристики:

- імовірність того, що робітник не буде зайнятим;
- імовірність наявності черги;
- середню кількість приладів, які чекають черги на ремонт і т.д.

Перед нами – своєрідна СМО, де джерелами заявок є прилади, які наявні в обмеженій кількості і які подають або не подають заявки в залежності від свого стану: при виході приладу з ладу він перестає бути джерелом нових заявок. Отже, інтенсивність загального потоку заявок, з яким доводиться мати справу робітнику, залежить від того, скільки є несправних приладів, тобто скільки заявок пов’язано з процесом обслуговування (безпосередньо обслуговуються або стоять в черзі).

Характерною для замкнутої СМО є наявність **о б м е ж е н о ї к і л ь к о с т і д ж е р е л з а я в о к.**

По суті, будь-яка СМО має справу тільки з обмеженою кількістю джерел заявок, але в ряді випадків кількість цих джерел настільки велика, що можна знехтувати впливом станів самої СМО на потік заявок. Наприклад, потік викликів на АТС великого міста виходить, по суті, від обмеженої кількості абонентів, але ця кількість настільки велика, що практично можна вважати інтенсивність потоку заявок незалежною від станів самої АТС (скільки каналів зайнято в даний момент). В замкнутій же СМО джерела заявок, на ряду з каналами обслуговування, розглядаються як елементи СМО.

Розглянемо сформульовану вище задачу про робітника-наладчика в межах загальної схеми марковських процесів.

Система, яка включає робітника і n приладів, має ряд станів, які ми будемо нумерувати по кількості несправних приладів (приладів, пов'язаних з обслуговуванням):

S_0 - всі прилади справні (робітник вільний),

S_1 – один прилад зайнятий, робітник зайнятий його налагодженням,

S_2 – два прилада несправні, один лагодиться, інший чекає черги,

. . . .

S_n – всі n приладів несправні, один лагодиться, *n-1* стоять в черзі.

Граф станів наведений на рис. 4.

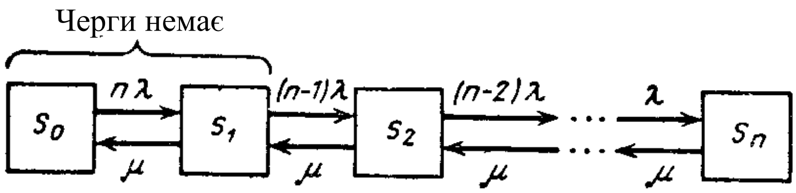


Рис. 4. Граф станів замкнутої СМО

Інтенсивності потоків подій, які переводять систему зі стану в стан, проставлені біля стрілок. Зі стану S_0 в S_1 систему переводить потік несправностей всіх працюючих приладів; його інтенсивність дорівнює $n\lambda$. Зі стану S_1 в S_2 систему переводить потік несправностей вже не n, а n-1 приладів (працюють всього n-1) і т.д. Що стосується інтенсивностей потоків подій, які переводять систему по стрілкам справа наліво, то вони всі однакові – працює весь час один робітник з інтенсивністю обслуговування μ.

Користуючись, як завжди, загальним розв'язанням задачі про граничні імовірності станів для схеми загибелі та розмноження, напишемо граничні імовірності станів:

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= \frac{n\lambda}{\mu}\, p_0, \\
p_2 &= \frac{n(n-1)\lambda^2}{\mu^2}\, p_0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p_n &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1\,\lambda^n}{\mu^n}\, p_0, \\
p_0 &= \frac{1}{1+n(\lambda/\mu)+n(n-1)(\lambda/\mu)^2+\dots+n(n-1)\dots 1\cdot(\lambda/\mu)^n}\,.
\end{aligned}\right\}$$

Ввівши, як і раніше, позначення $\lambda/\mu=\rho$, перепишемо ці формули у вигляді:

$$\left.\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{1+n\rho+n(n-1)\rho^2+\dots+n(n-1)\dots 1\cdot\rho^n}\,, \\
p_1 &= n\rho\, p_0, \\
p_2 &= n(n-1)\rho^2 p_0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p_n &= n(n-1)\dots 1\,\rho^n p_0.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Отже, імовірності станів СМО знайдені.

В силу своєрідності замкнутої СМО, характеристики її ефективності будуть відрізнятися від тих, які ми застосовували раніше для СМО з необмеженою кількістю джерел заявок.

Роль «абсолютної пропускної здатності» в даному випадку відіграє с е р е д н я к і л ь к і с т ь н е с п р а в н о с т е й, які усуваються робітником за одиницю часу. Обчислимо цю характеристику. Робітник зайнятий налагоджуванням з імовірністю

$$P_{\text{зайн}} = 1 - p_0. \qquad (3.2)$$

Якщо він зайнятий, він обслуговує μ приладів (ліквідує μ несправностей) за одиницю часу; отже, абсолютна пропускна здатність системи

$$A = (1 - p_0)\mu. \qquad (3.3)$$

Відносну пропускну здатність для замкнутої СМО ми не обчислюємо, тому що кожна заявка, в решті решт, буде обслужена: $q=1$.

Імовірність того, що робітник не буде зайнятий:

$$P_{\text{віл}} = 1 - P_{\text{зайн}} = p_0. \qquad (3.4)$$

Обчислимо с е р е д н ю к і л ь к і с т ь н е с п р а в н и х с т а н к і в, інакше – середню кількість приладів, пов’язаних з процесом обслуговування.

Позначимо цю середню кількість $\overline{\omega}$. В загалі, величину $\overline{\omega}$ можна обчислити безпосередньо, за формулою

$$\overline{\omega} = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots + n \cdot p_n,$$

але простіше буде знайти її через абсолютну пропускну здатність A. Дійсно, кожен працюючий прилад породжує потік несправностей з інтенсивністю λ; в нашій СМО в середньому працює $n - \overline{\omega}$ приладів; середній потік несправностей, який вони породжують, буде мати середню інтенсивність $(n - \overline{\omega})\lambda$; всі ці несправності усуваються робітником, отже

$$(n - \overline{\omega})\lambda = (1 - p_0)\mu,$$

звідки

$$\overline{\omega} = n - \frac{\mu}{\lambda}(1 - p_0)$$

або

$$\overline{\omega} = n - \frac{1-p_0}{\rho} \tag{3.5}$$

Визначимо тепер середню кількість приладів $\bar{r}$, які чекають налагоджування в черзі. Будемо розмірковувати наступним чином: загальна кількість приладів W, пов’язаних з обслуговуванням, складається з кількості приладів R, які стоять в черзі, плюс кількість приладів Ω, які безпосередньо знаходяться під обслуговуванням:

$$W = R + \Omega.$$

Кількість приладів Ω, які знаходяться під обслуговуванням, дорівнює одиниці, якщо робітник зайнятий, і нуля, якщо він вільний, тобто середнє значення Ω дорівнює імовірності того, що робітник зайнятий:

$$\overline{\omega} = 1 - p_0.$$

Віднімаючи цю величину від середньої кількості $\overline{\omega}$ приладів, пов’язаних з обслуговуванням (несправних), отримаємо середню кількість приладів, які чекають обслуговування в черзі:

$$\bar{r} = n - \frac{1-p_0}{\rho} - (1 - p_0) = n - (1 - p_0)\left(1 + \frac{1}{\rho}\right). \tag{3.6}$$

Зупинимося ще на одній характеристиці ефективності СМО: на продуктивності групи приладів, які обслуговуються робітником.

Знаючи середню кількість несправних приладів $\bar{\omega}$ та продуктивність l справного приладу за одиницю часу, можна оцінити середню втрату L продуктивності групи приладів за одиницю часу за рахунок несправностей:

$$L = \bar{\omega} l.$$

Приклад 1. Робітник обслуговує групу з трьох приладів. Кожен прилад зупиняється в середньому 2 рази за годину. Процес налагоджування займає в робітника, в середньому 10 хвилин. Визначити характеристики замкнутої СМО: імовірність зайнятості робітника; його абсолютну пропускну здатність A; середню кількість несправних приладів; середню відносну втрату продуктивності групи приладів за рахунок несправностей.

Розв'язання. Маємо: $n = 3,\ \lambda = 2,\ \mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1/6} = 6,\ \rho = \lambda/\mu = 1/3.$

За формулами (3.1)

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3 \cdot 1/3 + 3 \cdot 2 \cdot 1/3^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1/3^3} \approx 0{,}346.$$

Імовірність зайнятості робітника:

$$P_{зайн} = 1 - p_0 = 0{,}65.$$

Абсолютна пропускна здатність робітника (середня кількість несправностей, яку він ліквідує за годину):

$$A = 0{,}654 \cdot 6 = 3{,}94.$$

Середня кількість несправних приладів знаходимо за формулою (3.5):

$$\bar{\omega} = 3 - \frac{0{,}654}{1/3} = 1{,}04.$$

Середня відносна втрата продуктивності групи приладів за рахунок несправностей $\bar{\omega}/n = 0{,}347$, тобто за рахунок несправностей група приладів втрачає близько 35% продуктивності.

Розглянемо тепер більш загальний приклад замкнутої СМО: **бригада з m робітників обслуговує n приладів ($m<n$).** Перерахуємо стани системи:

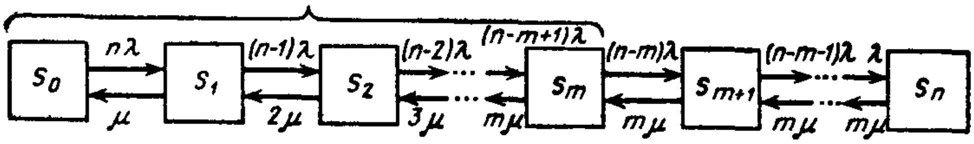
$$\begin{cases} S_0 - \text{ всі прилади працюють, робітники не зайняті,} \\ S_2 - \text{ два прилада зупинилося, два робітника зайняті,} \\ \quad . \\ S_m - \ m \text{ приладів зупинились, всі робітники зайняті,} \end{cases}$$

S_{m+1} – m+1 приладів зупинилися, m з них налагоджуються, один чекає черги,

. . . .

S_n – всі n приладів зупинилися, m з них налагоджуються, n-m чекають черги.

Черги немає



Мал. 5. Граф станів для замкнутої СМО
(m робітників обслуговує n приладів)

Граф станів системи показаний на рис. 5 (інтенсивності потоків подій проставлені біля стрілок). Застосовуючи загальне розв'язання для схеми загибелі та розмноження, знаходимо граничні імовірності станів:

$$p_1 = \frac{n}{1} \frac{\lambda}{\mu} p_0,$$

$$p_2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0,$$

$$p_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m p_0,$$

$$p_{m+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\ldots m\cdot m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} p_0,$$

$$p_{m+2} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m-1)}{1\cdot 2\ldots m\cdot m^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+2} p_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = \frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots m\cdot m^{n-m}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0,$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{n}{1}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\ldots m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m + \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\ldots m\cdot m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots m\cdot m^{n-m}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}.$$

Позначаючи, як завжди, λ/μ=ρ, приведемо формулу до вигляду:

$$\left.\begin{aligned}
&p_0=\Big[1+\frac{n}{1!}\,\rho+\frac{n\,(n-1)}{2!}\,\rho^2+\ldots+\\
&\quad+\frac{n\,(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\,\rho^m+\\
&\quad+\frac{n\,(n-1)\ldots(n-m)}{m!\,m}\,\rho^{m+1}+\ldots+\frac{n\,(n-1)\ldots1}{m!\,m^{n-m}}\,\rho^n\Big]^{-1},\\
&p_1=\frac{n}{1!}\,\rho p_0,\\
&p_2=\frac{n\,(n-1)}{2!}\,\rho^2 p_0,\\
&p_3=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,\rho^3 p_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_m=\frac{n\,(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\,\rho^m p_0,\\
&p_{m+1}=\frac{n\,(n-1)\ldots(n-m)}{m!\,m}\,\rho^{m+1} p_0,\\
&p_{m+2}=\frac{n\,(n-1)\ldots(n-m-1)}{m!\,m^2}\,\rho^{m+2} p_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_n=\frac{n\,(n-1)\ldots1}{m!\,m^{n-m}}\,\rho^n p_0.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.7)$$

Через ці імовірності виражається середня кількість $\bar{z}$ зайнятих робітників:

$$\begin{aligned}\bar{z}&=0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+\ldots+m\cdot(p_m+p_{m+1}+\ldots+p_n)=\\&=p_1+2p_2+\ldots+(m-1)\,p_{m-1}+m\,(1-p_0-p_1-\ldots-p_{m-1}).\end{aligned}\qquad(3.8)$$

Через $\bar{z}$ виражається, в свою чергу, середня кількість приладів, які обслуговуються бригадою за одиницю часу (абсолютна пропускна здатність):

$$A=\bar{z}\mu,\qquad(3.9)$$

А також середня кількість несправних приладів:

$$\bar{\omega}=n-\frac{\bar{z}\cdot\mu}{\lambda}=n-\frac{\bar{z}}{\rho}.\qquad(3.10)$$

Звідси ж знаходиться і середня втрата продуктивності групи приладів за одиницю часу за рахунок несправностей: потрібно помножити кількість несправних приладів $\bar{\omega}$ на продуктивність l одного приладу за одиницю часу.

Приклад 2. Два робітника обслуговують групу з шести приладів. Зупинки кожного (працюючого) прилада стаються, в середньому, через кожні півгодини. Процес налагоджування займає в робітника в середньому 10 хвилин. Визначити характеристики замкнутої СМО:

- середню кількість зайнятих робітників,
- абсолютну пропускну здатність,
- середн кількість несправних приладів.

Розв'язання. Маємо: $n = 6,\ m = 2,\ \lambda = 2, \mu = 1/\bar{t}_{об} = 6,\ \rho = \lambda/\mu = 1/3.$ За формулами (3.7)

$$p_0 = \left(1 + \frac{6}{1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 2^2}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 2^3}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 2^4}\cdot\frac{1}{3^6}\right)^{-1} = \frac{1}{6{,}549} \approx 0{,}153,$$

$$p_1 \approx 6/1\cdot 1/3\cdot 0{,}153 \approx 0{,}306.$$

Звідси середня кількість зайнятих робітникв:

$$\bar{z} = 1p_1 2(1 - p_0 - p_1) = 1\cdot 0{,}153 + 2\cdot 0{,}154 \approx 1{,}235.$$

За формулою (3.9) знаходимо абсолютну пропускну здатність

$$A = 1{,}235\cdot 6 = 7{,}41.$$

За формулою (3.10) знаходимо середню кількість несправних приладів

$$\bar{\omega} = 6 - 7{,}41/2 = 2{,}295.$$

Задача розв’язана.

Заключення.

При дослідженні систем масового обслуговування використовують граф станів та переходів марковського процесу. Дослідження математичної моделі проводиться з метою вирішення задачі аналізу (визначення показників якості обслуговування для конкретної системи) або задачі синтезу (визначення структури або параметрів системи, що має задовольняти поставленим вимогам до системи з точки зору якості обслуговування). Вирішення задач аналізу та синтезу дозволить розробити практичні рекомендації для удосконалення інформаційних систем.

Завідувач кафедри вищої математики,
математичного моделювання та фізики
кандидат фізико-математичних наук, доцент І.В. Замрій