Розділ 3.

Завдання 3.1.

а) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-10)} =$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x-10} = \frac{1}{8}$

б) $\lim_{x \to -3} \frac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12} = \lim_{x \to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(2x+5)}{\cancel{(x+3)}(3x-4)} = \frac{1}{13}$

в) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$

г) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-\frac{2}{x^4}+\frac{4}{x^5}}{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^5}} = \left[\frac{1}{-0}\right] = -\infty$

д) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{7x-2+\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0$

е) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+4)}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} =$

$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}{x-2-(4-x)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}{2}$

$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} = 7$

ж) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x} = \left\{\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{4}{x+4}\right)^{x}\right\}^3$

Звідси маємо $\left(1+\frac{4}{x+4}\right)^{x} = \left(1+\frac{4}{x+4}\right)^{\frac{4}{x+4}\cdot\frac{x(x+4)}{4}}$

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x} = \left\{\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{4}{x+4}\right)^{\frac{x+4}{4}} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x+4}\right\}^3$

Звідси маємо: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{x+4}} = e^{12}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)}$

$\therefore$ маємо: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+7} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{5+\frac{7}{x}} = \frac{2}{5}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x+1) = \infty$

але оскільки $\frac{2}{5} < 1$ маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Використаємо властивість при $x\to 0$:

$1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 1-\cos 8x = \frac{(8x)^2}{2} = 32x^2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{32x^2}{3x^2} = \frac{32}{3}$

Завдання 3.2.

1. $y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$; $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$

$y' = 10x^4 + 12x^{-4} - x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2. $y = \sqrt[3]{3x^4+2x-5} + \frac{4}{(x-2)^5}$

$y' = \frac{1}{3}(3x^4+2x-5)^{-\frac{2}{3}} \cdot (12x^3+2) - 20(x-2)^{-6}$

3. $y = \sin^3(2x) \cdot \cos(8x^5)$

$y' = 3\sin^2(2x)\cos(2x)\cdot 2 \cdot \cos(8x^5) +$
$+ \sin^3(2x)\cdot(-\sin(8x^5)\cdot 40x^4$

4. $y = \text{arcctg}^2(5x) \cdot \ln(x-4)$

$y' = 2\,\text{arcctg}(5x)\cdot\left(-\frac{5}{1+25x^2}\right)\cdot \ln(x-4) +$
$+ \text{arcctg}^2(5x)\cdot\frac{1}{x-4}$

5. $y = tg^4(3x)\cdot \arcsin(2x^3)$

$y' = 4\,tg^3(3x)\cdot\frac{3}{\cos^2(3x)}\cdot\arcsin(2x^3) +$
$+ tg^4(3x)\cdot\frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}$

6. $y = \frac{\log_5(3x-7)}{ctg(7x^3)}$; $[\log_a u]'_u = \frac{u'}{\log_e a \cdot u}$

$y' = \frac{3}{\ln 5 \cdot (3x-7)}\cdot\frac{1}{ctg(7x^3)} +$ де $\log_e a = \ln a$

$+ \log_5(3x-7)\cdot\left(-ctg^{-2}(7x^3)\cdot\frac{-1}{\sin^2(7x^3)}\cdot 21x^2\right)$

7. $y = \frac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$; $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$y' = e^{\arccos^3 x} \cdot 3\arccos^2 x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x+5}} +$

$+ e^{\arccos^3 x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\cdot(x+5)^{-\frac{3}{2}}\right)$

8. $y = (x-3)^4 \arccos(5x^3)$

$y' = 4(x-3)^3 \cdot \arccos(5x^3) +$

$+ (x-3)^4 \cdot \left(-\frac{15x^2}{\sqrt{1-25x^6}}\right)$

9. $y = \frac{\operatorname{arcctg}^4(5x)}{\operatorname{sh}\sqrt{x}}$; $\operatorname{sh}(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$

$[\operatorname{sh}(\alpha)]'_{\alpha} = \operatorname{ch}(\alpha)\cdot \alpha'$

$y' = 4\operatorname{arcctg}^3(5x) \cdot \frac{-5}{1+25x^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\sqrt{x}} +$

$+ \operatorname{arcctg}^4(5x) \cdot \left(-\operatorname{sh}^{-2}\sqrt{x}\right) \cdot \operatorname{ch}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

13. $y = [\arccos(x+2)]^{\operatorname{tg}(3x)}$

$y' = e^{\operatorname{tg}(3x)\cdot\ln(\arccos(x+2))} = e^{\operatorname{tg}(3x)\cdot\ln(\arccos(x+2))} \cdot g(x) = [\arccos(x+2)]^{\operatorname{tg}(3x)} \cdot g(x)$

де $g(x) = \frac{3}{\cos^2(3x)} \cdot \ln(\arccos(x+2)) +$

$+ \operatorname{tg}(3x) \cdot \frac{1}{\arccos(x+2)} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}\right)$

Звідси

$y' = [\arccos(x+2)]^{\operatorname{tg}(3x)} \cdot \left\{ \frac{3}{\cos^2(3x)} \cdot \ln(\arccos(x+2)) +\right.$

$\left. + \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\arccos(x+2)} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}\right) \right\}$

14. $y = \dfrac{\sqrt{x+7}\cdot(x-3)^4}{(x+2)^5}$; $[abc]' = a'bc + ab'c + abc'$

Перепишемо вираз, як:

$y = (x+7)^{\frac{1}{2}}(x-3)^4\cdot(x+2)^{-5}$

$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\ln(x+7) + 4\ln(x-3) - 5\ln(x+2)$

Звідси $[\ln y]'_x = \dfrac{y'_x}{y}$ $\Rightarrow$ $\ln y(x) = f(x)$

$y'(x) = y(x)\cdot f'(x)$

$\Rightarrow y' = y\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x+7} + \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+2}\right)$

$\therefore y' = (x+7)^{\frac{1}{2}}(x-3)^4(x+2)^{-5}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+7} + \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+2}\right\}$

15. $y = [cth(3x)]^{\arcsin x}$; $cth\,\alpha = \dfrac{ch\,\alpha}{sh\,\alpha}$

$y' = [cth(3x)]^{\arcsin x}\cdot g'(x)$ $\quad [cth\,\alpha]'_\alpha = -\dfrac{\alpha'}{sh^2\alpha}$

де $g(x) = \arcsin x \cdot \ln cth(3x)$

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln cth(3x) + \arcsin x\cdot\dfrac{-3}{cth(3x)}\cdot\dfrac{1}{sh^2(3x)}$

$\therefore y' = [cth(3x)]^{\arcsin x}\cdot\left\{\dfrac{\ln cth(3x)}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\cdot\dfrac{-3}{cth(3x)}\cdot\dfrac{1}{sh^2(3x)}\right\}$

16. $y = 9\,\dfrac{arctg(x+7)}{(x-1)^2}$

$y' = 9\left\{\dfrac{1}{1+(x+7)^2}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2} + arctg(x+7)\cdot(-2(x-1)^{-3})\right\}$

11. $y=\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}\,\log_2(x-3x^2)$

$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2x-1}+(2x+1)(-2(2x-1)^{-2})\right)\log_2(x-3x^2)$

$+\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}\cdot\frac{1-6x}{\ln 2\cdot(x-3x^2)}$

12. $y=e^{-x}\sin(3x)$

$y'=-e^{-x}\cdot\sin(3x)+e^{-x}\cdot 3\cos(3x)=e^{-x}(3\cos 3x-\sin 3x)$

16. $y=tg\,x-\frac{1}{3}ctg^7(3x)$

$y'=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{7}{3}ctg^6(3x)\cdot\frac{-3}{\sin^2(3x)}$

17. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\Rightarrow y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

$[x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}]'_x=[a^{\frac{2}{3}}]'_x\Rightarrow\frac{2}{3}[x^{-\frac{1}{3}}+y'_x\,y^{-\frac{1}{3}}]=0$

$\Rightarrow y'_x=-x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=-x^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

18. $\begin{cases}x=\sin^2(2t)\\ y=t^2\ln^2 t\end{cases}\Rightarrow y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

ge $\psi'(t)=[t^2\ln^2 t]'_t=2t\ln^2 t+2\ln t\cdot t=$

$=2t\ln t(1+\ln t)$

$\varphi'(t)=[\sin^2(2t)]'_t=2\sin(2t)\cdot 2\cos(2t)=$

$=2\sin(4t)$

$\therefore\ y'_x=\frac{t\ln t(1+\ln t)}{\sin(4t)}$

Завдання 3.3.

а) $y = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$

1. ОДЗ: $x \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

2. $f(-x) = \frac{(-x-1)^2}{(-x)^2} = \frac{(x+1)^2}{x^2}$

ф-я ні парна, ні не парна.

3. ф-я перетинає вісь OX в точці $M_0(1;0)$
оскільки $f(1)=0$

для $f(x)=0$ маємо $\frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$

для $f(0)$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

4. ф-я в точці $x=0$ має розрив 2-го роду, отже $x=0$ - вертикальна асимптота.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow$ отже $y=1$ асимптота горизонтальна

Знайдемо $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x-1)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-2x+1}{x^3} = 0$.

∴ ф-я не має похилої асимптоти.

5. Похідна ф-ї:

$$y' = \left[\frac{x^2-2x+1}{x^2}\right]'_x = \left[1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right]'_x = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

тоді $\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 1$, $x \neq 0$

$+ \quad - \quad +$

$0 \quad 1 \quad x$

$\nearrow \quad \searrow$

$f(1) = 0$ - min - ф-ї

6. $y'' = -\frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4}$

Звідси $-\frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4} = 0 \Rightarrow \frac{3-2x}{x^4} = 0$

$\cup \quad \cup \quad \cap$

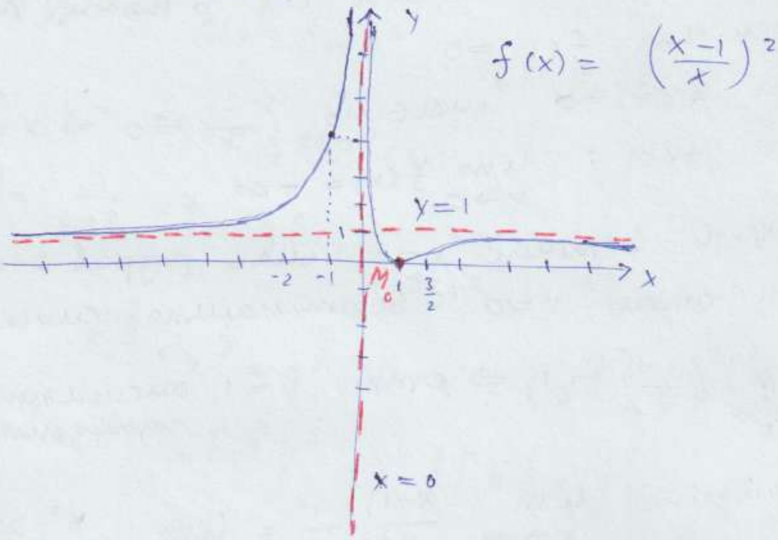
$+ \quad + \quad -$

$0 \quad \frac{3}{2} \quad x$

при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{3}{2})$ – ф-я вгнута

при $x \in (\frac{3}{2}; +\infty)$ – ф-я опукла

7. Графік ф-ї:



y	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	4	$\frac{9}{4}$
x	1	2	3	-1	-2

б) $y = x e^{-x^2}$

1. ОДЗ ; $x \in \mathbb{R}$

2. $f(-x) = (-x) e^{-(-x)^2} = -x e^{-x^2} = -f(x)$

ф-ія непарна

3. $f(0) = 0$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ф-ія перетинає вісь OX та вісь OY в точці $M_0(0;0)$

4. ф-ія не має точок розриву оскільки область допустимих значень - всі x на множині дійсних чисел.

Знайдемо асимптоти ф-ії:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Перепишемо; $x e^{-x^2} \Leftrightarrow \frac{x}{e^{x^2}}$

$$\therefore \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \overset{\text{П.Л.}}{=\!=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2x e^{x^2}} = 0$$

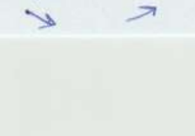
ф-ія не має похилої асимптоти, лише горизонтальну $y = 0$

5. Похідна ф-ії:

$$y' = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0$$

$$1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$



В точці $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ф-ія має лок. min.

В точці $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ф-ія має лок. max.

min: $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$

max: $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$

6. $y'' = [e^{-x^2}(1-2x^2)]'_x = -2xe^{-x^2}(1-2x^2) + e^{-x^2}(-4x) = e^{-x^2}(-2x+4x^3-4x) = 2xe^{-x^2}(2x^2-3)$

Звідси: $2xe^{-x^2}(2x^2-3) = 0$

$\cap \quad \cup \quad \cap \quad \cup$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-\sqrt{\frac{3}{2}} \quad 0 \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \quad x$

На проміжках $x \in (-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (0; \sqrt{\frac{3}{2}})$ - ф-ія опукла

На проміжках $x \in (-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty)$ - ф-ія вгнута

7. Графік ф-ї: