МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ
ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Тема 1. Класифікація моделей Математичні моделі на основі марковських випадкових процесів

План лекції:
Вступ.
1. Вступ. Предмет, мета та завдання дисципліни.
2. Основні поняття математичного моделювання. Класифікація моделей.
3. Означення випадкового процесу та його характеристики.
4. Поняття марковського процесу.
5. Найпростіший потік подій.
6. Рівняння Колмогорова. Граничні ймовірності станів.
Заключення.

1. Вступ. Предмет, мета та завдання дисципліни.

Для сучасності характерним є перехід від індустріального суспільства до інформаційного. Сучасному розвитку техніки характерно: використання цифрової форми представлення усіх сигналів незалежно від форми інформації (мова, текст, зображення); використання пристроїв різних типів і поколінь; тісний зв’язок комп’ютерних технологій і технологій електрозв’язку.

В результаті інтеграції засобів зв’язку та обчислювальної техніки з’явилась інформаційна мережа – одна з найскладніших кібернетичних систем. Вона поєднує сотні мільйонів різних джерел і споживачів інформації.

Вважається, що рівень розвитку держави та її місце у світі характеризують стан інформаційно-комунікаційних технологій та систем захисту інформації.

Тому, враховуючи досвід вищих навчальних закладів розвинених держав, для підвищення конкурентної спроможності фахівців напрямку інформаційних технологій в навчальні плани підготовки включена навчальна дисципліна **Математичні методи моделювання та оптимізації процесів.**

Задачею цієї навчальної дисципліни є ознайомлення з основами теорії математичного моделювання та набуття первинних навичок їх застосування до інформаційних систем.

Це дозволить випускникам університету успішно розв'язувати задачі проектування та розвитку інфокомунікаційних систем і мереж, оптимізації виробництва зв'язку та багато інших.

<u>Література</u>

1. Математичні методи моделювання та оптимізації процесів: Конспект лекцій. – Електронний ресурс. – К.: ДУТ, 2014. – 118 с.

2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К., 4 видання, 2006р., 422с. (із застосув. комп.техн.)

3. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Беркман Л.Н. Математичне моделювання телекомунікаційних систем. – К.: Зв’язок, 2007. – 270 с.

2. Основні поняття математичного моделювання. Класифікація моделей.

Для розв'язування прикладних задач з використанням обчислювальної техніки потрібно прикладну задачу сформулювати математично, тобто для реального об'єкта, процесу або системи потрібно побудувати відповідну математичну модель.

Слово **модель** виникло від латинського modus (копія, зразок, образ). **Моделювання** – це заміна деякого об'єкта А іншим об'єктом Б, при цьому А називають *оригіналом* або *об'єктом моделювання*, а Б називають *моделлю*. Іншими словами, *модель* – це об'єкт-замінник об'єкта оригінала, який забезпечує вивчення деяких властивостей оригінала.

Метою моделювання є одержання, обробка, представлення та використання інформації стосовно об'єктів, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем.

Модель – це абстракція, яка відображає лише частину властивостей. Її можна розглядати як проекцію об'єктивної реальності. В залежності від мети можна одержати декілька проекцій реального об'єкта. Це характерно для складних систем, у яких кожна проекція визначає суть певної мети.

Моделювання широко використовується в різних галузях людської діяльності, особливо там, де потрібно приймати ефективні рішення на основі отриманої інформації, наприклад, у проектуванні, управлінні.

Класифікація моделей.

При моделюванні абсолютна подібність не має місця. Головні зусилля спрямовують на те, щоб модель достатньо добре відображала потрібні властивості об'єкта, що досліджується.

Існує декілька класифікацій моделей. Ознайомимось з однією з них.

Усі моделі можна поділити на два класи: дійсні та ідеальні. **Дійсні моделі** можна поділити на : 1) натурні; 2) фізичні; 3) евристичні; 4) математичні.

Натурні моделі – це реальні об'єкти, процеси, над якими ставляться експерименти наукові, технічні або виробничі.

Фізичні моделі – це макети, які відображають фізичні властивості оригіналів (кінематичні, динамічні, теплові, електричні, світлові моделі).

Евристичні (інтуїтивні) моделі – це різновиди математичних моделей, що побудовані на основі багаторічного особистого досвіду.

Дійсні математичні моделі – це аналогові, структурні, геометричні, графічні, цифрові та кібернетичні моделі.

Ідеальні моделі можна поділити на : наочні, знакові, математичні.

Ідеальні наочні моделі – це схеми, карти, графіки, структурні і геометричні моделі.

Знакові моделі – це символи, алфавіт, мови програмування, впорядкований або топологічний запис.

Ідеальні математичні моделі – це аналітичні, функціональні, імітаційні, комбіновані моделі.

Найбільш універсальним методом моделювання є математичне моделювання, оскільки воно більш сприятливе для використання обчислювальної техніки та існуючих пакетів програм MathCad, MathLab, Excel.

У загальному випадку математичну модель реального об’єкта, процесу або системи можна представити у вигляді системи функціоналів. Наприклад,

$$\Phi_i(X, Y, Z, t) = 0,\ \mathrm{i} = \overline{1, m}\,,$$

де X – вектор вхідних змінних, Y – вектор вихідних змінних, Z – вектор зовнішніх впливів, t – координата часу.

Математична модель є наближеним представленням реальних об’єктів, процесів або систем, які записані у математичних термінах, що зберігає істотні властивості оригіналу.

Математичні моделі у кількісній формі описують основні властивості об’єкта, його параметри, внутрішні і зовнішні зв’язки.

За принципами побудови математичні моделі поділяють на : *аналітичні, імітаційні, системні*.

В аналітичних моделях процеси функціонування реальних об’єктів, процесів або систем записуються у вигляді явних функціональних залежностей.

В залежності від математичної проблеми аналітичні моделі поділяють на такі типи:

– рівняння (алгебраїчні, трансцендентні, диференціальні, інтегральні);

– апроксимаційні задачі (інтерполяція, екстраполяція, чисельне диференціювання та інтегрування);

– задачі оптимізації;

– стохастичні проблеми.

Побудова математичної моделі сучасної технічної системи є складною проблемою. Саме тому в багатьох випадках дослідник мусить використовувати **імітаційне (машинне) моделювання**.

В імітаційному моделюванні функціонування об’єктів, процесів або систем описують набором алгоритмів. Алгоритми імітують реальні елементарні явища, що складають процес або систему із збереженням їх логічної структури і послідовності дій.

В залежності від характеру реальних процесів і систем математичні моделі можуть бути : *детерміновані* або *стохастичні*.

У детермінованих моделях вважають відсутніми випадкові впливи, змінні та математичні зв’язки можна достатньо точно визначити.

При побудові детермінованих моделей найчастіше використовують алгебраїчні або інтегральні рівняння, матричну алгебру.

Стохастичні моделі враховують випадковий характер процесів у об'єктах і системах, що досліджуються. Ці моделі описують методами теорії ймовірностей і математичної статистики.

Таким чином, математичне моделювання проводиться для дослідження процесів, що протікають в технічних або організаційних системах. Метою моделювання є визначення певних характеристик та властивостей системи для подальшого її удосконалення та оптимізації.

3. Означення випадкового процесу та його характеристики

Більшість процесів розвиваються під впливом випадкових факторів, тому вони є випадковими.

Необхідно чітко розрізняти такі поняття як детерміновані та випадкові процеси, випадкові величини та випадкові процеси.

Теорія випадкових процесів — це розділ математичної науки, який вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їхнього розвитку.

Випадковим процесом $X(t)$ називається процес, значення якого за будь-якого значення аргументу t є випадковою величиною.

Реалізацією випадкового процесу називається детермінована функція $x(t)$, на яку перетворюється випадковий процес $X(t)$ внаслідок випробування, тобто його траєкторія.

Кілька реалізацій певного випадкового процесу зображено на рис. 1. Нехай переріз цього процесу при даному t є неперервною випадковою величиною. Тоді випадковий процес $X(t)$ при даному t визначається щільністю ймовірності $\varphi(x,t)$.

Очевидно, що щільність імовірності $\varphi(x,t)$ не є вичерпним заданням випадкового процесу $X(t)$, оскільки вона не виражає залежності між його перерізами в різні моменти часу.

Випадковий процес $X(t)$ являє собою сукупність усіх перерізів за всіх можливих значень t, тому для його задання необхідно розглядати багатовимірну випадкову величину $(X(t_1), X(t_2),..., X(t_n))$, утворену з усіх перерізів цього процесу.

Таких перерізів нескінченно багато, але для задання випадкового процесу вдається обмежитись порівняльно невеликою кількістю перерізів.

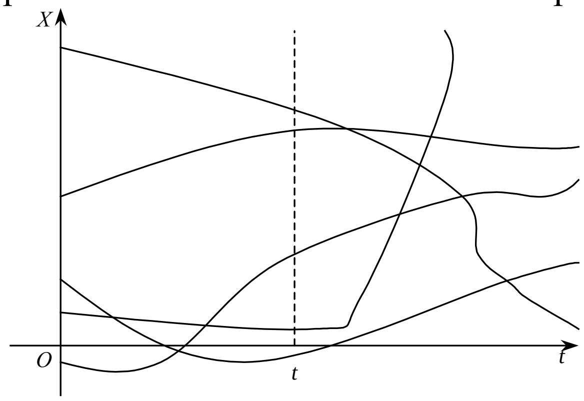

Рис. 1. Реалізації випадкового процесу

Випадковий процес має порядок n, якщо він повністю визначається щільністю спільного розподілу $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n)$ n довільних перерізів процесу, тобто щільністю n-вимірної випадкової величини $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))$, де $X(t_j)$ — переріз випадкового процесу $X(t)$ у момент часу t_j, $j = 1,2,..., n$.

Випадковий процес може бути заданий ***числовими характеристиками***.

Математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$ називається детермінована функція $a_x(t)$, яка за будь-якого значення змінної t дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу випадкового процесу $X(t)$, тобто $a_x(t) = M[X(t)]$.

Дисперсією випадкового процесу $X(t)$ називається детермінована функція $D_x(t)$, яка за будь-якого значення змінної t дорівнює дисперсії відповідного перерізу випадкового процесу $X(t)$, тобто $D_x(t) = D[X(t)]$.

Середнім квадратичним відхиленням $\sigma_x(t)$ випадкового процесу $X(t)$ називається арифметичне значення квадратного кореня з його дисперсії, тобто $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$.

Математичне сподівання випадкового процесу характеризує середню траєкторію всіх можливих його реалізацій, а його дисперсія або середнє квадратичне відхилення — розкид реалізацій відносно середньої траєкторії.

Кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$ називається детермінована функція:

$$K_x(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - a_x(t_1))(X(t_2) - a_x(t_2))]$$

двох змінних t_1 і t_2, яка для кожної пари змінних t_1 і t_2 дорівнює коваріації відповідних перерізів $X(t_1)$ і $X(t_2)$ випадкового процесу.

Кореляційна функція $K_x(t_1, t_2)$ характеризує не лише ступінь близькості лінійної залежності між двома перерізами, а й розкид цих перерізів відносно математичного сподівання $a_x(t)$.

Тому розглядається також *нормована кореляційна функція випадкового процесу.*

Нормованою кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$ називається функція

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}.$$

Приклад. Випадковий процес визначається формулою $X(t) = X\cos\omega t$, де X — випадкова величина. Знайти основні характеристики цього процесу, якщо $M(x) = a,\ D(X) = \sigma^2$.

Розв'язання. Згідно з властивостями математичного сподівання і дисперсії маємо:

$$a_x(t) = M[X(t)] = M[X\cos\omega t] = \cos\omega t M(X) = a\cos\omega t;$$

$$D_x(t) = D[X(t)] = D[X\cos\omega t] = \cos^2\omega t D(X) = a\cos^2\omega t\,.$$

Знаходимо далі кореляційну функцію

$$K_x(t_1,t_2) = M[(X\cos\omega t_1 - a\cos\omega t_1)(X\cos\omega t_2 - a\cos\omega t_2)] =$$
$$= \cos\omega t_1\cos\omega t_2\cdot M[(X-a)(X-a)] = \cos\omega t_1\cos\omega t_2\cdot D(X) =$$
$$= \sigma^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2,$$

а також нормовану кореляційну функцію

$$\rho_x(t_1,t_2) = \frac{\sigma^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2}{(\sigma\cos\omega t_1)(\sigma\cos\omega t_2)} \equiv 1.$$

Випадкові процеси можна класифікувати залежно від того, плавно чи стрибкоподібно змінюються стани системи, в якій вони відбуваються, скінченна чи нескінченна множина цих станів. Серед випадкових процесів особливе місце посідають *марковські випадкові процеси*, що становлять основу теорії масового обслуговування.

4. Поняття марковського процесу

Визначення 1. Випадковий процес називається ***марковським***, якщо для будь-якого моменту часу t_0 імовірнісні характеристики процесу в майбутньому залежать лише від його стану в даний момент t_0 і не залежать від того, коли і як система набула цього стану.

Приклад. Система θ — лічильник у таксі. Стан системи в момент t характеризується кількістю кілометрів, пройдених автомобілем до даного моменту. Нехай у момент t_0 лічильник показує S_0. Імовірність того, що в момент $t > t_0$ лічильник показуватиме ту чи іншу кількість кілометрів S_1, залежить від S_0, але не залежить від того, в які моменти часу змінювались покази лічильника до моменту t_0.

Деякі процеси можна наближено вважати марковськими.

Завдяки основній властивості марківські процеси називають процесами без післядії.

Приклад. Розглянемо приклад побудови оптимального маршруту в GPS-навігаторі під час руху в великому місті при об'їзді заторів. Будемо вважати перехрестя доріг, я яких опиняється наш автомобіль, станами системи S1, S2, S3, …для досягнення цілі функціонування системи необхідно перебратись в стан Sn. Припустимо, що ми знаходимося у стані S6. Навігатор побудував маршрут S6, S10, S14, Sn. При цьому незалежність від минулого полягає в тому, що навігатор будує маршрут тільки із стану S6 незалежно від того як ми потрапили в цей стан.

Приклад. Система θ — група шахістів. Стан системи характеризується кількістю фігур супротивника, що збереглися на дошці до моменту t_0. Імовірність того, що в момент $t > t_0$ матеріальна перевага буде на боці одного із супротивників, залежить насамперед від того, в якому стані перебуває система в даний момент t_0, а не від того, коли і в якій послідовності зникали фігури з дошки до моменту t_0.

Аналізуючи випадкові процеси з дискретними станами, зручно користуватися геометричною схемою — так званим ***графом станів***. Зазвичай стани системи зображають прямокутниками (кручежками), а можливі переходи від одного стану до іншого — стрілками, що сполучають стани.

Приклад. Побудувати граф станів такого випадкового процесу: пристрій θ утворено із двох вузлів, кожний з яких у випадковий момент часу може вийти з ладу, після чого негайно починається ремонт вузла, який триває протягом зарані не відомого випадкового часу.

Розв'язання. Можливі стани системи: θ_0 — обидва вузли справні; θ_1 — перший вузол ремонтується, а другий справний; θ_2 — другий вузол ремонтується, а перший справний; θ_3 — обидва вузли ремонтуються.

Граф системи наведено на рис. 2.

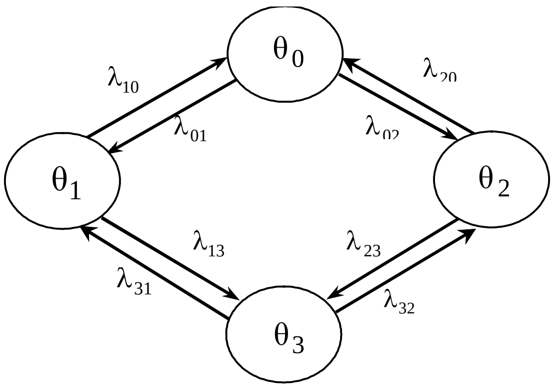

Рис. 2. Граф станів для системи з двох вузлів

Стрілка, що направлена із θ_0 до θ_1, означає перехід системи в момент відмови першого вузла; стрілка із θ_1 до θ_0 — перехід у момент закінчення ремонту цього вузла. Стрілки із θ_0 до θ_3 немає, оскільки припускається, що вузли виходять із ладу незалежно один від одного. Також припускається, що обидва вузли одночасно не можуть вийти з ладу.

Таким чином, для математичного опису деяких випадкових процесів може бути застосовано матапарат, що розроблено в теорії ймовірностей та який отримав назву марківських випадкових процесів. Даний матапарат буде розглянуто нижче.

Марківські випадкові процеси діляться **на класи за ознаками**, в залежності від того як і в які моменти система може змінювати свої стани.

Визначення 2. Випадковий процес називається процесом з дискретними станами, якщо можливі стани системи S1,S2,S3,… можна перелічити та пронумерувати, а сам процес полягає в тому, що система S стрибком (миттєво) перескакує із одного стану в інший (рис. 3).

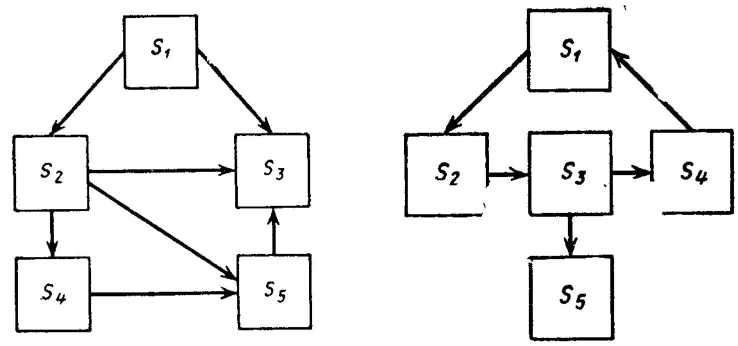

Рис. 3. Приклади графів стану для марковських процесів з дискретними станами та неперервним часом

Окрім процесів з дискретними станами існують процеси із неперервними станами. Наприклад, напруга в мережі електроживлення змінюється поступово, плавно та неперервно. Такий випадковий процес не можна представити як марковський процес з дискретними станами.

За іншою ознакою марковські процеси можна класифікувати на:

- процеси з неперервним часом (переходи із стану в стан можуть відбуватись в будь-які моменти часу);
- процеси з дискретним часом (переходи відбуваються тільки в дискретні моменти часу).

Таким чином, системи з дискретними станами та неперервним часом є найрозповсюдженими математичними моделями для опису та дослідження реальних процесів.

Для математичного опису марковського випадкового процесу з дискретними станами і неперервним часом, що відбувається в системі, необхідно розглянути одне з важливих понять теорії ймовірностей — поняття ***потоку подій***.

5. Найпростіший потік подій

Визначення 3. ***Потоком подій*** називається послідовність подій, які відбуваються одна за одною у випадкові моменти часу. Наприклад, потік заявок, що надходить до підприємства побутового обслуговування, потік викликів до телефонної станції, потік відказів (збоїв) під час роботи на ПЕОМ тощо. Середня кількість подій, які відбуваються за одиницю часу, називається ***інтенсивністю потоку***.

Потік називається ***найпростішим***, якщо він має такі властивості:

1) ***стаціонарність*** — імовірність того, що за деякий проміжок часу t відбудеться та чи інша кількість подій, залежить лише від довжини проміжку і не залежить від початку його відліку, тобто інтенсивність потоку стала;

2) ***відсутність післядії*** — імовірність настання деякої кількості подій на довільному проміжку часу не залежить від того, яка кількість подій відбулась до початку цього проміжку;

3) ***ординарність*** — імовірність настання двох і більше подій за малий проміжок часу t істотно менша за ймовірність того, що відбудеться одна подія.

Якщо потік подій найпростіший, то ймовірність того, що за проміжок часу t подія A настане m раз, визначається формулою:

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

де λ — інтенсивність потоку. Ця формула відбиває всі властивості найпростішого потоку, а отже, є його <u>математичною моделлю</u>.

Приклад. Середня кількість заявок, які надходять до комбінату побутового обслуговування за 1 год, дорівнює 4. Знайти ймовірність того, що за 3 год надійде: 1) 6 заявок; 2) менш як 6 заявок; 3) не менш як 6 заявок.

Розв'язання. Нехай подія А — «надходження однієї заявки». Потік заявок найпростіший. Тому для розв'язування задачі застосуємо наведену щойно формулу, в якій $\lambda = 4,\ t = 3,\ m = 6,\ m < 6,\ m \geq 6$. Обчислимо відповідні ймовірності.

1) $P_3(6) = \frac{12^6}{6!} e^{-12} \approx 0{,}0249;$

2) $P_3(m_3 < 6) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) + P_3(4) + P_3(5) \approx 0{,}0199;$

3) $P_3(m_3 \geq 6) = 1 - P_3(m < 6) = 1 - 0{,}0199 = 0{,}9801.$

6. Рівняння Колмогорова. Граничні ймовірності станів

Імовірністю і-го стану називається ймовірність $p_i(t)$ $(i=1,2,...,n)$ того, що в момент *t* система перебуватиме у стані θ_i $(i=1,2,...,n)$.

Очевидно, що для будь-якого моменту *t* сума ймовірностей станів дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t)=1. \tag{1}$$

Правило побудови рівнянь Колмогорова. У лівій частині кожного з рівнянь має бути похідна ймовірності *i*-го стану. У правій частині — сума добутків імовірностей усіх станів (з яких відбувається перехід до даного стану) на інтенсивності відповідних потоків подій мінус сумарна інтенсивність усіх потоків, що виводять систему із даного *i*-го стану, помножена на ймовірність цього стану.

Наприклад, для системи θ, (рис. 4), що має чотири стани θ_0; θ_1; θ_2; θ_3, система диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}
p_0' &= \lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2-(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0,\\
p_1' &= \lambda_{01}p_0+\lambda_{31}p_3-(\lambda_{10}+\lambda_{13})p_1,\\
p_2' &= \lambda_{02}p_0+\lambda_{32}p_3-(\lambda_{20}+\lambda_{23})p_2, \qquad 2)\\
p_3' &= \lambda_{13}p_1+\lambda_{23}p_2-(\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3.
\end{aligned}$$

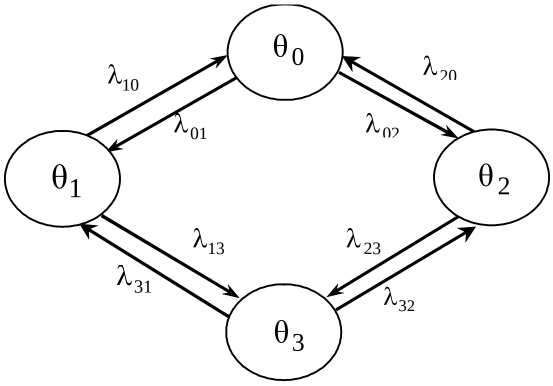

Рис. 4. Граф станів для системи з двох вузлів

В системі (2) незалежних рівнянь на одне менше від загальної кількості рівнянь. Тому для розв'язування системи необхідно додати рівняння (1) при $n = 3$.

Особливість розв'язання диференціальних рівнянь взагалі полягає в тому, що потрібно задавати так звані <u>початкові умови</u>, у даному випадку — імовірності станів системи в початковий момент $t=0$. Так, систему (2) маємо розв'язувати за умови, що в початковий момент обидва вузли справні і система перебувала у стані θ_0, тобто за початкових умов:

$$p_0(0)=1,\;\; p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=0.$$

Рівняння Колмогорова дають змогу знаходити всі ймовірності станів як **функції часу**. Особливий інтерес становить імовірності системи $p_i(t)$ $(i=1,...,n)$ у

граничному стаціонарному режимі, тобто при $t \to \infty$, які називаються ***граничними ймовірностями станів***.

В теорії випадкових процесів доведено, що коли кількість станів системи скінченна і з кожного з них можна перейти до будь-якого іншого стану, то граничні ймовірності існують.

Гранична ймовірність стану θ_i має такий смисл: вона показує середню відносну тривалість перебування системи в цьому стані. Наприклад, якщо гранична ймовірність стану θ_0 становить $p_0 = 0{,}5$, то це означає, що в середньому половину часу система перебуває у стані θ_0.

Приклад. Знайти граничні ймовірності для системи θ з попереднього прикладу, граф станів якої наведено на рис. 4. Інтенсивності переходів із стану в стан мають такі значення: $\lambda_{01} = 1,\ \lambda_{02} = 2,\ \lambda_{10} = 2,\ \lambda_{13} = 2,\ \lambda_{20} = 3,\ \lambda_{23} = 1,\ \lambda_{31} = 3,$ $\lambda_{32} = 2.$

Розв'язання. Система алгебраїчних рівнянь, що описує стаціонарний режим для даної системи, належить до виду (1):

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2; \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3; \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, дістаємо $p_0 = 0{,}4,\ \ p_1 = 0{,}2,\ \ p_2 = 0{,}27,$ $p_3 = 0{,}13.$ Отже, у граничному стаціонарному режимі система θ в середньому 40 % часу перебуватиме у стані θ_0, 20 % — у стані θ_1, 27 % — у стані θ_2, 13 % — у стані θ_3.

Приклад. Знайти прибуток від експлуатації у стаціонарному режимі системи θ, коли відомо, що за одиницю часу справна робота першого та другого вузлів приносить дохід, який становить відповідно 10 і 6 ум. од., а їх ремонт потребує витрат, що становлять відповідно 4 і 2 ум. од.

Оцінити економічну ефективність зменшення вдвічі середньої тривалості ремонту кожного з цих вузлів, якщо в такому разі доведеться вдвічі збільшити витрати на ремонт.

Розв'язання. З прикладу 1 випливає, що в середньому перший вузол справний протягом частки часу, що становить $p_0 + p_2 = 0{,}4 + 0{,}27 = 0{,}67$, а другий вузол — протягом частки $p_0 + p_1 = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$. В такому разі перший вузол перебуває в ремонті в середньому частку часу, що дорівнює $p_1 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}13 = 0{,}33$, а другий — $p_2 + p_3 = 0{,}27 + 0{,}13 = 0{,}4$. Тому середній прибуток за одиницю часу від експлуатації системи (різниця між доходом та витратами) буде таким:

$$\text{ПРИБУТОК} = 0{,}67 \cdot 10 + 0{,}60 \cdot 6 - 0{,}33 \cdot 4 - 0{,}40 \cdot 2 = 8{,}18 \text{ (ум. од)}$$

Зменшення вдвічі середнього часу ремонту кожного з вузлів згідно з $a = \sigma = 1/\lambda$ означатиме збільшення вдвічі інтенсивності потоку «закінчення ремонту» кожного вузла. Отже, у такому разі $\lambda_{10} = 4,\ \lambda_{20} = 6,\ \lambda_{31} = 6,\ \lambda_{32} = 4$ і система лінійних алгебраїчних рівнянь (1) набирає вигляду:

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2; \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3; \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, дістаємо $p_0 = 0{,}6$, $p_1 = 0{,}15$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}05$.

Оскільки $p_0 + p_2 = 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$; $p_0 + p_1 = 0{,}6 + 0{,}15 = 0{,}75$, $p_1 + p_3 = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$; $p_2 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}25$, то витрати на ремонт першого та другого вузла становитимуть відповідно 8 і 4 ум. од. Звідси маємо середній прибуток за одиницю часу:

$$(\text{ПРИБУТОК})_1 = 0{,}8 \cdot 10 + 0{,}75 \cdot 6 - 0{,}2 \cdot 8 - 0{,}25 \cdot 4 = 9{,}9 \text{ (ум. од.)}.$$

$(\text{ПРИБУТОК})_1$ більший за ПРИБУТОК (наближено на 2,7 ум. од.), тому економічна доцільність скорочення термінів ремонту вузлів очевидна.

Заключення.

Таким чином, для моделювання процесів та дослідження їх властивостей необхідно розробити відповідну математичну модель.

Більшість процесів розвиваються під впливом випадкових факторів, тому вони є випадковими.

Для математичного опису деяких випадкових процесів може бути застосовано матапарат, що розроблено в теорії ймовірностей та який отримав назву марківських випадкових процесів.

Найбільш розповсюдженими є марківські процеси з дискретними станами та неперервним часом, математичний опис яких базується на диференційних рівняннях Колмогорова. Основним припущенням застосування таких математичних моделей є те, що переходи із стану в стан складають найпростіший потік, або час перебування системи в певному стані розподілено за експоненціальним законом розподілу. В свою чергу, це дає змогу визначати інтенсивність виходу із певного стану як $\lambda_i = 1/T_i$.

Для дослідження марківських процесів необхідно рішити систему рівнянь Колмогорова та знайти імовірності перебування системи в тому чи іншому стані в залежності від часу. Разом з тим корисними є значення граничних ймовірностей станів.

Аналіз та дослідження вищезазначених параметрів дозволяють зробити практичні рекомендації по покращенню якості функціонування систем та підвищенню їх ефективності.

Завідувач кафедри вищої математики,
математичного моделювання та фізики
кандидат фізико-математичних наук, доцент І.В. Замрій

Вправи для самостійного розв’язування

1. Середня кількість літаків, які прибувають до аеропорту за 1 хв, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що до 2 хв прибуде:

1) 4 літаки;
2) менш як 4 літаки;
3) не менш як 4 літаки.

Потік прибуття літаків вважається найпростішим.

2. Середня кількість викликів, які надходять на АТС за 1 хв, дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що за 4 хв надійде:

1) 3 виклики;
2) менш як 3 виклики;
3) не менш як 3 виклики.

Потік викликів вважається найпростішим.

3. Середня кількість обривів ниток на ткацькому верстаті за хвилину становить 3. Знайти ймовірність того, що за 3 хв буде:

1) 5 обривів ниток;
2) менш як 5 обривів ниток;
3) не менш як 5 обривів ниток.

Потік подій вважається найпростішим.

4. На АТС надходить найпростіший потік викликів з інтенсивністю $\lambda = 1{,}2$ викликів за хвилину. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини:

1) не надійде жодного виклику;
2) надійде рівно один виклик;
3) надійде хоча б один виклик.

5. Побудувати граф станів такого випадкового процесу: АЗС складається з трьох колонок, кожна з яких може бути зайнятою або вільною.

6. Побудувати граф станів системи θ, що являє собою електричне коло з електричною лампочкою, яка у випадковий момент часу може бути або вимкненою, або ввімкненою, або зіпсованою.

7. Знайти граничні ймовірності для систем θ, графи яких зображено на рис. 5 і 6.

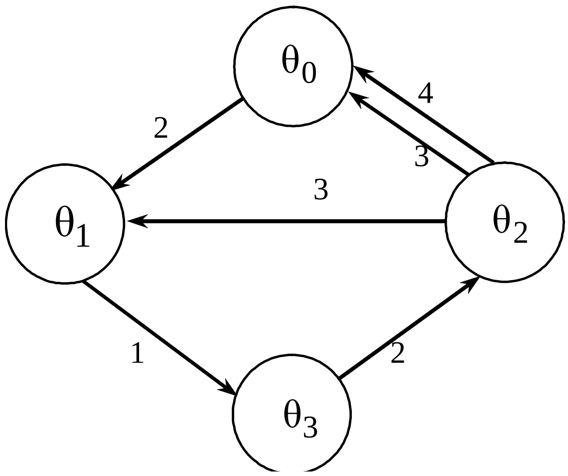

Рис. 5

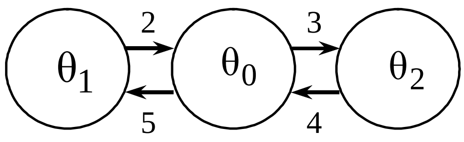

Рис. 6

8. Середня кількість заявок на таксі, що надходять на диспетчерський пункт за 1 хв, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини надійде:

1) 4 виклики;
2) принаймні один виклик;
3) не надійде жодного виклику.

9. Погода на деякому острові через певні проміжки часу стає чи дощовою (Д), чи сонячною (С). Імовірності щоденних змін задано матрицею:

$$P = \begin{array}{c} Д \\ С \end{array}\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

1) Якщо в середу погода дощова, то яка ймовірність того, що вона буде дощовою в найближчу п'ятницю?

2) Якщо в середу очікується дощова погода з імовірністю 0,3, то яка ймовірність того, що вона буде дощовою в найближчу п'ятницю?

10. Імовірності переходу за один крок у ланцюгу Маркова задано матрицею:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Потрібно: 1) знайти кількість станів; 2) побудувати граф, що відповідає матриці *P*.

11. Довести, що всі стохастичні матриці виду

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

де $0 < \alpha < 1$ мають однаковий стаціонарний розподіл.