МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Тема 8. Транспортна задача лінійного програмування.

План лекції:

Вступ.
1. Загальна постановка транспортної задачі
2. Математична постановка закритої транспортної задачі
3. Метод «північно-західного кута»
4. Метод потенціалів для розв'язання закритої транспортної задачі
5. Розв'язання відкритої транспортної задачі
6. Приклад розв'язання транспортної задачі

Заключення.

Література.

1. Зайченко О.Ю., Зайченко Ю.П. Дослідження операцій / Исследование операций. Збірник задач. – К.: КПІ, 2007.
2. Деміденко М.А. Математичне програмування: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2005. – 110 с.
http://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/2246

Завдання на СРС:

1. Вивчити матеріал лекції, підготуватись до практичного заняття.
2. Розібрати приклад рішення транспортної задачі (п. 6 лекції).

Вступ

Транспортна задача (задача Монжа — Канторовича) – задача про оптимальний план перевезення продуктів із пунктів відправлення до пунктів споживання. Розробка і використання оптимальних схем вантажних потоків дозволяють знизити витрати на перевезення. Коли сумарний обсяг пропозицій (вантажів, наявних в пунктах відправки) не дорівнює загальному обсягу попиту на товари (вантажі), які потрібні пунктам споживання, то транспортна задача називається незбалансованою.

Транспортна задача відноситься до задач лінійного програмування. Ця задача має лінійні цільову функцію та обмеження. Вагомий вклад в рішення задач лінійного програмування, в тому числі і транспортної задачі, вніс відомий радянський математик Л.В. Канторович, який вважається засновником теорії лінійного програмування. В 1930-х роках він розробив метод дозволяючих множників, а також запропонував метод рішення транспортної задачі.

Для рішення транспортної задачі найбільш розповсюдженими є метод північно-західного кута та метод потенціалів.

Щиро дякую Деміденку Михайлу Андрійовичу, доценту кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій Національного гірничого університету за публікацію навчального посібника [2] на основі якого підготовлено дану лекцію.

2. Математична постановка закритої транспортної задачі

Математичне формулювання транспортної задачі може бути подано у такому вигляді: нехай xij - кількість вантажу, що відправляється з i-го пункту відправлення Ai в j-й пункт призначення Bj (i=1,m; j=1,n), xij ≥ 0. Змінні xij повинні задовольняти нерівностям (2.3. –2.9.).

Будь-яку сукупність значень xij (i = 1,m; j =1,n) називають планом перевезень. План, що задовольняє умовам (2.3) - (2.9), називають припустимим. Ранг системи (2.3) - (2.8) дорівнює r = m + n - 1, тоді в ній (m + n - 1) базисних та (m-1)(n-1) вільних змінних. Тому план, у якому відмінно від нуля не більш m +n - 1 змінних, а інші рівні нулю, називають опорним.

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1; & (2.3) \\
\sum_{j=1}^{n} x_{2j} = a_2; & (2.4) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\sum_{j=1}^{n} x_{mj} = a_m; & (2.5) \\
\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = b_1; & (2.6) \\
\sum_{i=1}^{m} x_{i2} = b_2; & (2.7) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\sum_{i=1}^{m} x_{in} = b_n; & (2.8)
\end{cases}
$$

$$
Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (2.9)
$$

Оптимальний план - це такий план, що серед усіх припустимих має найменшу вартість перевезень. Пошук оптимального плану виконується за допомогою транспортної таблиці 2.1.

Вартість перевезень c_{ij} поміщають у правому верхньому куті клітин таблиці. Клітини таблиці, у яких будемо записувати відмінні від нуля перевезення x_{ij} , називаються базисними. Таких клітин не більш ніж m+n-1. Порожні клітини називаються вільними, їх не менше (m-1)(n-1).

Транспортна таблиця **Таблиця 2.1.**

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	. . .	B_n	
A_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	. . .	C_{15}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	. . .	C_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	. . .	C_{mn}	a_m
Заявки	b_1	b_2	b_3	. . .	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Усі подальші дії з розв’язання транспортної задачі будуть зводиться до перетворення транспортної табл. 2.1, тобто до двох етапів:

а) відшукування першого розв'язання методом «північно-західного кута»;

б) пошуку оптимального розв'язання задачі за допомогою методу потенціалів.

3. Метод «північно-західного кута»

Продемонструємо застосування цього методу на прикладі транспортної табл. 2.2.

Вихідна таблиця для розрахунків **Таблиця 2.2**

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	13	7	14	7	5	30
A2	11	8	12	6	8	48
A3	6	10	10	8	11	20
A4	14	8	10	10	15	30
Заявки	18	27	42	15	26	128

Почнемо заповнення транспортної таблиці з лівого верхнього («північно-західного») кута. Пункт В1 подав заявку на 18 одиниць вантажу.

Задовольнимо її із запасів А1 . Після цього в ньому ще залишиться 30 -18 = 12 одиниць вантажу. Віддамо їх пункту В2. Але заявка цього пункту ще не задоволена. Виділимо відсутні 15 одиниць із запасів пункту А2 і т.д.. Застосовуючи таку методику, заповнимо до кінця перевезеннями xij транспортну табл. 2.3.

Розв'язок методу північно-західного кута Таблиця 2.3

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	13 18	7 12	14	7	5	30
A2	11	8 15	12 33	6	8	48
A3	6	10	10 9	8 11	11	20
A4	14	8	10	10 4	15 26	30
Заявки	18	27	42	15	26	128

В отриманому опорному розв'язанні базисних клітин:

$$r = n + m - 1 = 5 + 4 - 1 = 8,$$

вільних клітин $(m - 1)(n - 1) = 3 \times 4 = 12.$

Опорний план, який дістають у результаті застосування методу «північно-західного кута», як правило, не оптимальний. Тому для відшукування оптимального розв'язання застосовується метод потенціалів.

4. Метод потенціалів для розв'язання закритої транспортної задачі

Після того як за допомогою методу «північно-західного кута» знайдений перший опорний план, виконаємо його поліпшення за допомогою методу потенціалів. Алгоритм методу показаний на рис. 2.1. Поліпшення плану перевезень у цьому методі виконується за допомогою переміщення перевезень із клітини в клітину в транспортній таблиці без порушення балансу заявок і запасів. Переміщення вантажів у таблиці виконується за замкнутим циклом.

Циклом у транспортній таблиці називаються декілька клітин, сполучених замкнутою ламаною лінією, що повертає на 90° в окремих клітинах. Цикл будують так, щоб одна його вершина була у вільній клітині, інші вершини в базисних (заповнених) клітинах.

Рис. 2.1. Схема алгоритму методу потенціалів

Існує теорема, відповідно до якої для будь-якої вільної клітини транспортної таблиці завжди існує цикл (при чому єдиний), одна з вершин якого лежить у цій зведеній клітині, а всі інші (у базисних клітинах).

У кожному циклі заміняють одну вільну змінну на базисну, тобто заповнюють одну вільну клітину й натомість звільняють одну з базисних клітин. Цикл має парне число вершин. Будемо відзначати знаком «+» ті вершини, у яких у результаті переміщення вантажів перевезення збільшуються, а знаком «-», вершини, у яких вони зменшуються.

Перенести (перекинути) якусь кількість одиниць вантажу за циклом - це значить збільшити перевезення, що стоять у позитивних вершинах циклу, на цю кількість одиниць, а перевезення, що стоять у негативних вершинах, зменшити на ту ж кількість.

При переносі будь-якої кількості одиниць за циклом рівновага між запасами й заявками не змінюється. Кількість одиниць вантажу, що можна перемістити, визначається мінімальним значенням перевезень, що стоять у негативних вершинах циклу (якщо перемістити більше число вантажу, виникають негативні перевезення).

Зміна вартості перевезень при переміщенні однієї одиниці вантажу за циклом називають ціною циклу. Визначається ціна циклу як алгебраїчна сума вартостей перевезень, що стоять у вершинах циклу, причому, вартості, що стоять у позитивних вершинах, беруться зі знаком «+», а в негативних – із знаком «-». Для поліпшення плану перевезень доцільно переміщати вантажі тільки за тими циклами, ціна яких негативна.

Метод потенціалів дозволяє автоматично виділяти цикли з негативною ціною і визначити їхні ціни. Для цього поставимо у відповідність кожному пункту відправлення (стовпчику) Ai число αi, а кожному пункту призначення (рядку Bj) – число βj. Ці числа називаються потенціалами. Визначимо значення αi та βj. Для цього складемо для базисних клітин m + n - 1 рівнянь с m + n невідомими, тобто

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, \tag{10}$$

$$i = \overline{1,m}; \qquad j = \overline{1,n}.$$

Система (10) має безкінечне число розв'язань. Тому для отримання одного з них приймемо α1 = 0. Розв'язуючи m + n - 1 рівнянь (10) методом підстановок, знаходимо інші потенціали

$$\alpha_i, \quad i = \overline{2,m}; \qquad \beta_j, \quad j = \overline{1,m}.$$

Потім для незаповнених клітин обчисляють псевдовартості за формулою

$$c'_{ij} = \alpha_i + \beta_j.$$

Для кожної незаповненої клітини ціна циклу перерахунку дорівнює різниці між вартістю сij та псевдовартістю с'ij. Наступним кроком алгоритму є перевірка опорного розв'язання на оптимальність (рис.2.1). **Якщо для небазисних клітин плану (xij =0)**

$$\alpha_i + \beta_j = c'_{ij} \le c_{ij},$$

то план є оптимальним і в ніякий спосіб поліпшений бути не може.

Це означає, що цикли з негативною вартістю відсутні. Якщо хоча б в одній вільній клітині псевдовартість більше вартості $|-c'_{ij}| > c_{ij}$, то план не є оптимальним і може бути поліпшений переносом вантажів за циклом, що відповідає даній вільній клітині.

Звичайно, для побудови циклу вибирають вільну клітину з найменшою негативною ціною $\gamma_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} = min$. Далі на цій клітині будують цикл, виконують перекидання вантажів за циклом, у результаті чого визначають новий опорний план. Якщо отриманий опорний план усе ще не оптимальний, процедура поліпшення продовжується доти, поки не буде знайдений оптимальний план (2.1).

При розв'язанні транспортної задачі може бути отримаю вироджене розв'язання, коли кількість базисних змінних менше ніж $m + n - 1$. У цьому випадку одна або декілька базисних клітин залишаться незаповненими, що утрудняє розрахунок потенціалів у розв'язку задачі. Тому для ліквідації виродження ставлять нуль у незаповнену базисну клітину (або клітини).

Вважаємо цю клітину заповненою при обчисленнях у циклі.

Розв'яжемо задачу, сформульовану в табл.2.2. У результаті застосування методу «північно-західного кута» отримано перше опорне розв'язання, що занесене в табл.2.4 для подальших розрахунків.

Перша ітерація **Таблиця 2.4.**

Пункти Відправлення	Пункти призначення					Запа-си
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	$\boxed{13}$ **18**	$\boxed{7}$ **12**	11 $\boxed{14}$	9 $\boxed{7}$	14 $\boxed{5}$	α_1=0 30
A2	14 $\boxed{11}$	$\boxed{8}$ **15**	$\boxed{12}$ **33**	10 $\boxed{6}$	15 $\boxed{8}$	α_2=1 48
A3	12 $\boxed{6}$	6 $\boxed{10}$	$\boxed{10}$ **9**	$\boxed{8}$ **11**	13 $\boxed{11}$	α_3=-1 20
A4	14 $\boxed{14}$	8 $\boxed{8}$	12 $\boxed{10}$	$\boxed{10}$ **4**	$\boxed{15}$ **26**	α_4=1 30
Заявки	18	27	42	15	26	128

$$\beta_1 = 13;\quad \beta_2 = 7;\quad \beta_3 = 11;\quad \beta_4 = 9;\quad \beta_5 = 14.$$

Значення цільової функції буде

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 1442.$$

Визначимо потенціали зрівнянь

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \beta_1 = 13; \quad && \alpha_3 + \beta_3 = 10; \\ &\alpha_1 + \beta_2 = 7; && \alpha_3 + \beta_4 = 8; \\ &\alpha_2 + \beta_2 = 8; && \alpha_4 + \beta_4 = 10; \\ &\alpha_2 + \beta_3 = 12; && \alpha_4 + \beta_5 = 15. \end{aligned}$$

Прийнявши $\alpha1$=0. Знайдемо $\alpha2$=1, $\alpha3 = -1$, $\alpha4 = 1$, $\beta1$=13; $\beta2$=7; $\beta3$=11; $\beta4$=9; $\beta5$=14.

Підрахуємо для незаповнених клітин псевдовартості за формулою

$$c'_{ij} = \alpha_i + \beta_j.$$

Результати запишемо в табл.2.4. Псевдовартості будемо заносити в лівий верхній кут незаповнених клітин.

Аналізуючи табл.2.4 дійдемо висновку, що опорне розв'язання не оптимальне і може бути поліпшено. Найменша негативна ціна

$$\gamma_{ij}\text{:}\ \gamma_{15} = c_{15} - c'_{15} = 5 - 14 = -9$$

Тому побудуємо на клитині (1.5) цикл (табл.2.4). Виконаємо переміщення вантажів за циклом, результати помістимо в табл.2.5. Подальші розрахуюся виконані в табл.2.5. - 2.10.

Друга ітерація **Таблиця 2.5**

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	13 **18**	7 **1**	11 14	0 7	5 **11**	30	$\alpha_1 = 0$
A2	14 11	8 **26**	12 **22**	10 6	15 8	48	$\alpha_2 = 1$
A3	12 6	6 10	10 **20**	-1 8	4 11	20	$\alpha_3 = -1$
A4	23 14	17 8	21 10	10 **15**	15 **15**	30	$\alpha_4 = 10$
Заявки	18	27	42	15	26	128	

$\beta_1 = 13$; $\beta_2 = 7$; $\beta_3 = 11$; $\beta_4 = 9$; $\beta_5 = 5$.

Z = 1343

Третя ітерація **Таблиця 2.6.**

Пункти відправ-лення	Пункти призначення					Запаси	
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	13 18	-4 7	0 14	0 7	5 12	30	$\alpha_1 = 0$
A2	25 11	8 **27**	12 **21**	12 6	17 8	48	$\alpha_2 = 12$
A3	23 6	6 10	10 **20**	10 8	15 11	20	$\alpha_3 = 10$
A4	23 14	6 8	10 **1**	10 **15**	15 **14**	30	$\alpha_4 = 10$
Заявки	18	27	42	15	26	128	

$\beta_1 = 13$; $\beta_2 = -4$; $\beta_3 = 0$; $\beta_4 = 0$; $\beta_5 = 5$.

Z = 1332

Четверта ітерація **Таблиця 2.7**

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запа-си	
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	13 7 **4** -	17 14	17 7	17 7 +	5 26	30	$\alpha_1 = 0$
A2	8 11	8 **27**	12 **21**	12 6	0 8	48	$\alpha_2 = -5$
A3	6 **14** +	6 10 -	10 **6**	10 8	-2 11	20	$\alpha_3 = -7$
A4	6 14	6 8	10 + **15**	- 10 **15**	-2 15	30	$\alpha_4 = -7$
Заявки	18	27	42	15	26	128	

$\beta_1 = 13$; $\beta_2 = 13$; $\beta_3 = 17$; $\beta_4 = 17$; $\beta_5 = 5$.

Z = 1094

П'ята ітерація **Таблиця 2.8**

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запа-сы	
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	3 13	7	7 14	7 4	5 26	30	$\alpha_1 = 0$
A2	8 11	8 27	12 21 -	6 12 +	8 10	48	$\alpha_2 = 5$
A3	6 18	6 10	10 2	8 10	8 11	20	$\alpha_3 = 3$
A4	9 14	6 8	10 + 19	10 - 11	8 15	30	$\alpha_4 = 3$
Заявки	18	27	42	15	26	128	

$\beta_1 = 3$; $\beta_2 = 3$; $\beta_3 = 7$; $\beta_4 = 7$; $\beta_5 = 5$.

Z = 1054.

Шоста ітерація **Таблиця 2.9**

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	9 13	9 7 +	7 4	7 -	5 26	30	$\alpha_1 = 0$
A2	17 11	8 27 -	12 10	6 11 +	4 8	48	$\alpha_2 = -1$
A3	6 18	6 10	10 2	4 8	2 11	20	$\alpha_3 = -3$
A4	6 14	6 8	10 30	4 10	2 15	30	$\alpha_4 = -3$
Заявки	18	27	42	15	26	128	

$\beta_1 = 9$; $\beta_2 = 9$; $\beta_3 = 13$; $\beta_4 = 7$; $\beta_5 = 5$.

Z = 988.

Розв'язок задачі **Таблиця 2.10**

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	
	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	7 13	7 4	11 14	5 7	5 26	30	$\alpha_1 = 0$
A2	8 11	8 23	12 10	6 15	6 8	48	$\alpha_2 = 1$
A3	6 18	6 10	10 2	4 8	4 11	20	$\alpha_3 = -1$
A4	6 14	6 8	10 30	4 10	4 15	30	$\alpha_4 = -1$
Заявки	18	27	42	15	26	128	

$\beta_1 = 7$; $\beta_2 = 7$; $\beta_3 = 11$; $\beta_4 = 5$; $\beta_5 = 5$.

Z = 980.

5. Розв'язання відкритої транспортної хадачі

Розглянемо розв'язання транспортної задачі, у якій вимоги до балансу запасів і заявок не задовольняються

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$
$$i = 1 \ldots m,$$
$$j = 1 \ldots n,$$

a_i – запаси. b_j – заявки.

Баланс може порушуватися у двох напрямках:

1. Сума запасів у пунктах відправлення перевищує суму поданих заявок (надлишок запасів).

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2. Сума поданих заявок перевищує наявні запаси (надлишок заявок).

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Проаналізуємо ці випадки.

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА З НАДЛИШКОМ ЗАПАСІВ

У пунктах $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \mathrm{A}_m$, є запаси вантажу $a_1, a_2, \ldots a_m$: пункти $B_1, B_2, \ldots B_m$ подали заявки $b_1, b_2, \ldots b_m$, причому $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Потрібно знайти такий план перевезень x_{ij}, при якому всі заявки будуть виконані, а загальна вартість перевезень буде мінімальна.

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = min$$

Очевидно, при цій постановці задачі деякі умови ТЗ перетворюються в нерівності. інші залишаються рівностями

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i; \qquad i = 1, \ldots, m; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i; \qquad j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Цю задачу можна розв'язати просто, якщо її зводити до розглянутої класичної транспортної задачі з правильним балансом.

Для цього введемо ще один, фіктивний, пункт призначення $\mathrm{B}_{\text{ф}}$ якому припишемо фіктивну заявку, рівну надлишку запасів над заявками

$$b_{\text{ф}} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

і приймемо вартості перевезень із усіх пунктів відправлення у фіктивний пункт призначення тотожними нулю.

$$\mathrm{c}_{i\text{ф}} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Таким чином, відправлення якого або кількості вантажу $x_{i\text{ф}}$ буде означати, що в пункті A_i залишилися невідправленнмн $x_{i\text{ф}}$ одиниць вантажу.

Уведенням фіктивного пункту призначення ми зрівняли баланс транспортної задачі і тепер її можна розв'язувати відомим методом потенціалів.

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА З НАДЛИШКОМ ЗАЯВОК

У пунктах $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots \mathrm{A}_m$, є запаси вантажу $a_1, a_2, \dots a_m$: пункти $B_1, B_2, \dots B_m$ подали заявки $b_1, b_2, \dots b_m$, причому $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$. Таким чином наявних запасів недостатньо для задоволення всіх заявок.

Потрібно знайти такий план перевезень x_{ij}, при якому всі заявки будуть виконані, а загальна вартість перевезень буде мінімальна

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = min$$

Очевидно, що цю задачу можна звести до звичайної транспортної задачі з правильним балансом, якщо ввести фіктивний пункт відправлення $\mathrm{A}_{\text{ф}}$ із запасом $a_{\text{ф}}$ рівним відсутньому запасу $a_{\text{ф}} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ і прийняти вартості перевезень із пункту відправлення $\mathrm{A}_{\text{ф}}$ у будь-який пункт призначення рівними нулю

$$\mathrm{c}_{\text{ф}i} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

При цьому частина заявок залишиться незадоволеною; будемо вважати, що вона як би покривається за рахунок фіктивного пункту відправлення Аф.

Таким чином, ми зводимо задачу до транспортної задачі з правильним балансом. Далі розв'язуємо цю задачу відомим методом потенціалів.

6. Приклад розв'язання транспортної задачі

Нехай необхідно розв'язати таку транспортну задачу.

ПН ПО	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	5	7	6	50
A_2	6	6	5	40
A_3	8	4	5	20
Заявки	18	21	33	

У прикладі перше базисне розв'язання знайдене методом *північно-західного* кута. Задача розв'язана методом потенціалів.

Перша ітерація **Таблиця 2.12**

ПН ПО	B1	B2	B3	Вф	Запаси	Потенціали
A1	5 5 18	7 7 21	6 6 11	1 0	50	0
A2	4 6	6 6	5 5 22	0 0 18	40	-1
A3	4 8	6 4	5 5	0 0 20	20	-1
Заявки	18	21	33	38	110	
Потенціали	5	7	6	1		

Друга ітерація **Таблиця 2.13**

ПН ПО	B1	B2	B3	Bф	Запаси	Потенціали
A1	5 5 18	7 7 21	5 6	0 0 11	50	0
A2	5 6	7 6	5 5 33	0 0 7	40	0
A3	5 8	7 4	5 5	0 0 20	20	0
Заявки	18	21	33	38	110	
Потенціа- ли	5	7	5	0		

Третя ітерація **Таблиця 2.14**

ПН ПО	B1	B2	B3	Bф	Запаси a	Потенціали
A1	5 5 18	7 7 1	5 6	0 0 31	50	0
A2	5 6	7 6	5 5 33	0 0 7	40	0
A3	2 8	4 4 20	2 5	-3 0	20	-3
Заявки	18	21	33	38	110	
Потенціали	5	7	5	0		

Розв'язок задачі **Таблиця 2.15**

ПН / ПО	В1	В2	В3	Вф	Запаси	Потенціали
А1	5 5 18	5 7	5 6	0 0 32	50	0
А2	5 6	6 6 1	5 5 33	0 0 6	40	0
А3	3 8	4 4 20	3 5	-2 0	20	-2
Заявки	18	21	33	38	110	
Потенціа-ли	5	6	5	0		

Оптимальне значення цільової функції дорівнює 335. Оптимальний план перевезень вказаний в таблиці 2.15.

Заключення

Транспортна задача є одним із різновидів задач лінійного програмування. На відміну від стандартних ЗЛП в транспортній задачі треба відшукати прямокутну матрицю невідомих X, що приводить задану лінійну цільову функцію до мінімуму. Найбільш розповсюдженим є табличний метод рішення задачі в два етапи. На першому знаходять опорне рішення на основі методу «північно-західного кута». На другому етапі виконується його доведення до оптимального за рахунок використання методу потенціалів.

Для дослідника найважливішим етапом є складання математичної моделі задачі, що вирішується. Після цього етапу можна вирішувати задачу за допомогою спеціальних пакетів прикладних програм. Одним із найпростіших пакетів для задач лінійного програмування є Excel та MathCad.

Завідувач кафедри вищої математики,
математичного моделювання та фізики
кандидат фізико-математичних наук, доцент І.В. Замрій

Додаток 1

Контрольні запитання

1. Сформулюйте загальну і математичну постановки транспортної задачі.
2. Для чого застосовується метод північно-західного кута?
3. Сформулюйте основні кроки методу потенціалів для розв’язання транспортної задачі .
4. Сформулюйте правило створення циклу переміщення перевезень із клітини в клітину в транспортній таблиці
5. Скільки циклів можна побудувати для однієї незаповненої клітинки транспортної таблиці
6. Що таке відкрита транспортна задача?

Додаток 2

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Порядок виконання роботи:
- отримати у викладача завдання по варіанту згідно номеру в списку групи.
- вивчити постановку задачі;
- розв’язати задачу відповідно до варіанта;
- проаналізувати отримане рішення й оформити звіт.

Зміст звіту
На основі виконаного індивідуального завдання підготовити письмовий звіт який має містити наступні складові:
- стислі теоретичні положення;
- формулювання математичної моделі;
- результати розв’язання задачі, подані у вигляді таблиць;
- зробити висновки по роботі.

1. Закрита транспортна задача

Для матриці вартостей, спільної для всіх варіантів виконати розрахунки відповідно до варіантів зазначених у таблиці 2.11

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 & 10 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Варіанти завдань **Таблиця 2.16**

Варіанти	A_1	A_2	A_3	A_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
1	32	51	12	55	8	21	28	45	48
2	22	46	8	74	7	13	28	48	54
3	37	74	14	25	6	14	23	38	69
4	48	42	9	51	8	16	31	55	40
5	47	62	17	24	16	33	33	51	17
6	52	50	16	32	12	18	23	31	66
7	13	50	13	74	20	17	32	44	37
8	33	38	12	67	19	19	35	61	16
9	46	46	10	48	5	22	36	46	41
10	24	47	9	70	14	13	26	32	65
11	28	54	12	56	19	9	24	50	48
12	18	42	11	79	3	20	33	48	46
13	17	50	13	70	12	22	31	39	46
14	25	45	7	73	8	19	27	34	62
15	27	45	8	70	15	16	38	44	37
16	14	48	16	72	15	19	28	50	38
17	29	54	7	60	11	14	28	42	55
18	31	68	14	37	9	14	28	28	71
19	36	61	11	42	6	22	30	68	24
20	31	67	20	32	13	9	38	41	49
21	32	31	11	76	12	20	31	32	55
22	31	39	10	70	18	19	36	47	30
23	48	49	12	41	18	14	31	56	31
24	34	38	10	68	15	17	27	28	63
25	33	52	6	59	12	16	31	32	59
26	30	39	11	70	15	15	24	47	49
27	55	55	1	39	8	31	36	45	30
28	44	81	15	10	8	17	41	34	50
29	59	38	4	49	12	29	26	45	38
30	28	34	11	77	3	14	36	70	27

2. Відкрита транспортна задача

Вартості перевезень *cij* для усіх варіантів наведені в таблиці 2.17.

Таблиця 2.17

Постачльн. / Споживач	B1	B2	B3
A1	3	9	4
A2	6	5	5
A3	7	4	6

Запаси й заявки для варіантів завдання **Таблиця 2.18**

Номер варіанту	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
1	**15**	**21**	**48**	**15**	**24**	**65**
2	**19**	**55**	**21**	**20**	**75**	**24**
3	**42**	**41**	**50**	**56**	**54**	**68**
4	**20**	**19**	**50**	**22**	**22**	**68**
5	**22**	**38**	**46**	**25**	**50**	**62**
6	**32**	**37**	**24**	**40**	**48**	**29**
7	**52**	**24**	**50**	**71**	**28**	**67**
8	**17**	**36**	**15**	**19**	**47**	**15**
9	**25**	**19**	**40**	**30**	**21**	**53**
10	**39**	**50**	**28**	**52**	**67**	**34**
11	**33**	**43**	**31**	**42**	**57**	**39**
12	**29**	**40**	**17**	**35**	**53**	**18**
13	**41**	**41**	**34**	**55**	**54**	**44**
14	**21**	**36**	**53**	**25**	**46**	**73**
15	**26**	**25**	**39**	**32**	**30**	**50**
16	**29**	**44**	**25**	**35**	**58**	**29**
17	**43**	**49**	**32**	**57**	**66**	**41**
18	**19**	**43**	**24**	**21**	**57**	**28**
19	**45**	**51**	**44**	**60**	**70**	**59**
20	**31**	**39**	**20**	**39**	**51**	**23**
21	**23**	**29**	**41**	**26**	**36**	**54**
22	**30**	**50**	**23**	**37**	**68**	**26**
23	**45**	**23**	**32**	**59**	**27**	**41**

Номер варіанту	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
24	**46**	**37**	**25**	**62**	**47**	**30**
25	**26**	**53**	**40**	**31**	**72**	**53**
26	**24**	**43**	**37**	**28**	**57**	**47**
27	**48**	**52**	**49**	**65**	**71**	**67**
28	**32**	**54**	**19**	**41**	**74**	**21**
29	**34**	**40**	**18**	**44**	**53**	**20**
30	**16**	**18**	**40**	**16**	**20**	**53**