МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
«КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ВАДИМА ГЕТЬМАНА»

С. М. Григулич, В. П. Лісовська, О. І. Макаренко,
І. І. Пахомов, В. Д. Стасюк, Г. М. Черніс

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Збірник задач

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України

1906 КНЕУ
КИЇВ 2014

УДК 519.217.5+519.221.25
ББК 22.171я-4
Т 33

Колектив авторів
С. М. ГРИГУЛИЧ, В. П. ЛІСОВСЬКА, О. І. МАКАРЕНКО,
І. І. ПАХОМОВ, В. Д. СТАСЮК, Г. М. ЧЕРНІС

Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
Лист № 1/11-15236 від 01.10.12

Т 33 **Теорія** ймовірностей та математична статистика [Електронний ресурс] : зб. задач / [С. М. Григулич, В. П. Лісовська, О. І. Макаренко та ін.]. — К. : КНЕУ, 2014. — 277с.
ISBN 978-966-483-899-0

Збірник задач складається з двох розділів: у першому розглядаються задачі з теорії ймовірностей про випадкові події та випадкові величини, а в другому — задачі з математичної статистики.

Призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 519.217.5+519.221.25
ББК 22.171я7-4

ISBN 978-966-483-899-0

ПЕРЕДМОВА

Широке використання методів теорії ймовірностей і математичної статистики в економічній науці і практиці вимагає більш широкої та ґрунтовної підготовки спеціалістів різних галузей економіки в царині освоєння ними сучасних математичних знань. Практично всі процеси, що відбуваються в організації виробництва, фінансах, маркетингу, банківській справі, менеджменті, мають елементи невизначеності, складності, багатопричинності, тобто характеризуються випадковістю. Тому вельми важливим для керування економікою є встановлення закономірностей у випадкових явищах. Використання статистичних методів обробки даних дає змогу виявити реальні закономірності, які об'єктивно існують у масових випадкових явищах. На основі такої обробки даних можна з певною точністю робити прогноз розвитку економіки, обчислювати ризики економічної діяльності, передбачувати кризи та інші соціально-економічні явища, які мають випадковий характер.

Запропонований збірник задач «Теорія ймовірностей та математична статистика» якраз і слугує меті набуття, розширення і поглиблення математичних знань з теорії ймовірностей і математичної статистики. У ньому достатньо повно, логічно структуровано і доступно викладено теоретичний матеріал. Велика кількість класичних навчальних задач і задач економічного змісту передбачає не просто формальне вивчення і закріплення основних формул і відомостей теорії ймовірностей і математичної статистики, а й має на меті зацікавити студентів у практичному їх застосуванні. Зокрема, уміння розв'язувати задачі з обчислення біржових та інвестиційних ризиків, прогнозування курсів валют, оцінки привабливості бізнес-планів допоможе студентам у їхній дальшій діяльності.

Задачі збірника поділені відповідно до дидактичного принципу переходу від простого до більш складного. На початку кожного розділу стисло подається теоретичний матеріал, потрібний для розв'язання задач. Задачі для аудиторної й домашньої роботи покладені стимулювати самостійну роботу студента, відповіді на контрольні питання покажуть міру готовності студентів до практичних занять.

Матеріал збірника задач відповідає програмі курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика», який викладається студентам усіх економічних спеціальностей КНЕУ. Отже, збірник сприятиме набуттю студентами навичок і знань з теорії ймовірностей і математичної статистики, дальшому підвищенню фахового рівня спеціалістів у галузі економіки.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

§ 1. Алгебра подій. Простір елементарних подій

1. Алгебра подій. Подія A є ***частинним випадком*** *події B,* якщо в кожному випробуванні, в якому відбувається подія A, відбувається і подія B.

Сумою подій A та B називається така подія C (позначається: $C = A + B$ або $C = A \cup B$), яка полягає в настанні принаймні однієї з цих двох подій.

Сумою подій A_i ($i = \overline{1,n}$) називається така подія C (позначається: $C = \sum_{i=1}^{n} A_i$ або $C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$), яка полягає в настанні принаймні однієї з цих подій.

Різницею подій A та B називається така подія C (позначається $C = A - B$, *або* $C = A \setminus B$), яка полягає в настанні події A та ненастанні події B.

Добутком подій A та B називається така подія C (позначається: $C = AB$ або $A \cap B$), яка полягає в сумісному настанні подій A та B.

Добутком подій A_i ($i = \overline{1,n}$) називається така подія C (позначається: $C = \prod_{i=1}^{n} A_i$ або $C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$), яка полягає в сумісному настанні подій A_i.

2. Простір елементарних подій. Події A та B називаються ***сумісними***, якщо поява однієї не виключає появи іншої ($A \cap B \neq \varnothing$) і ***несумісними***, якщо поява однієї виключає появу іншої ($A \cap B = \varnothing$).

Випадкові події $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ утворюють ***повну групу подій***, якщо внаслідок випробування принаймні одна з них з'явиться обов'язково.

Подія $\overline{A}$ називається ***протилежною*** до події A, якщо ці дві події несумісні й утворюють повну групу подій.

Простором елементарних подій називається множина всіх елементарних рівноможливих несумісних подій — результатів випробування, що утворюють повну групу подій. Простір елементарних подій позначають літерою Ω.

Операції над подіями можна подати у вигляді діаграм, використовуючи геометричні образи, наприклад, як на рис. 1.

Діаграми Ейлера-Венна операцій над подіями

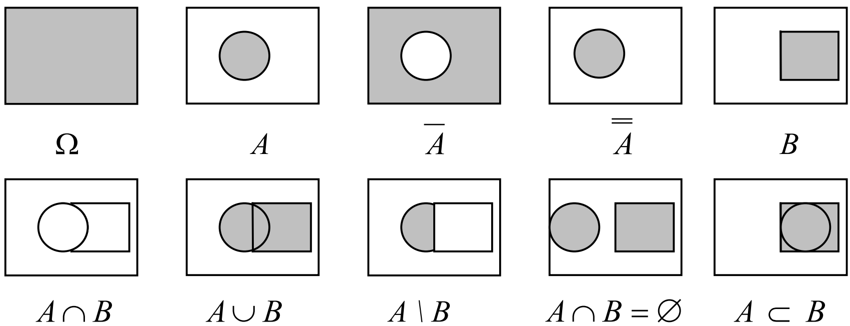


Рис. 1

Задачі

1.1. Що означають події AA та $A + A$?

1.2. Подія A — принаймні один з чотирьох виробів бракований, B — бракованих виробів серед наявних чотирьох немає. Що означають події: а) $\overline{A}$; б) $\overline{B}$; в) AB; с) $A + B$?

1.3. Чи сумісні події $A + B$ та A?

1.4. Двоє грають у шахи одну партію. Подія A — виграє перший гравець, подія B — виграє другий гравець. Яку подію потрібно додати до подій A та B, щоб ця сукупність трьох подій утворювала повну групу?

1.5. Довести тотожність $\overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{AB}$.

1.6. Використовуючи символічні позначення подій A, B, C, записати подію, яка полягає в тому, що: 1) події A і B відбулись, а подія C не відбулась; 2) відбулася лише одна подія; 3) відбулося лише дві події; 4) відбулася принаймні одна подія.

1.7. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Записати, у чому полягають події: A, B, AB, AB, $A\,B$, AB, $A + B$, $A \setminus B$, $A + B$, $\overline{A + B}$.

1.8. $\Omega = \{5, 10, 20, 40, 80, 160, 320\}$; $A = \{5, 10, 160, 320\}$; $B_1 = \{5, 10, 80, 160\}$; $B_2 = \{20, 40, 80\}$; $B_3 = \{5, 10, 20, 80, 160, 320\}$; $B_4 = \{10, 20, 40, 80, 160, 320\}$. Яка з подій B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) утворює з подією A повну групу?

1.9. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Записати у чому полягають події: A, B, AB, AB, $\overline{A}\,B$, AB, $A + B$, $A \setminus B$, $A + B$, $\overline{A + B}$.

1.10. $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.10\}$; $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B_1 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $B_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B_3 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $B_4 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Яка з подій B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) утворює з A повну групу?

1.11. Тричі підкинули монету. Записати простір елементарних подій Ω можливих результатів випробування та події: A — герб випав не менше ніж два рази, B — цифра випала принаймні один раз, C — випали лише цифри, $A \cap B \cup C$, $\overline{A \cup B} \cap C$.

1.12. Кидають два гральні кубики. Побудувати простір елементарних подій, а також записати такі події: A — на кубиках випали парні цифри, B — хоча б на одному кубику випала цифра кратна трьом, $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

1.13. У книжковій шафі стоять підручники з математики, теорії ймовірностей, статистики — не менше ніж три з кожної дисципліни. Студент навмання бере три підручники. Побудувати простір елементарних подій, а також записати такі події: A — студент узяв принаймні один підручник з математики, B — студент не взяв підручник з теорії ймовірностей, C — студент узяв два підручники зі статистики, $A \cap B \cap C$, $\overline{A} \cup \overline{B \cap C}$.

1.14. У майстерню надійшли три партії мікросхем. Події: A — у першій партії є браковані мікросхеми, B — у другій партії всі мікросхеми якісні, C — у третій партії є якісні мікросхеми. Записати, у чому полягають події: $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, AB, $\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}$, $A+B$, $\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{A+B}$, $A \cap B \cap C$, $\overline{A} \cup \overline{B \cap C}$, $A \cap B \cup C$, $\overline{A \cup B} \cap C$.

1.15. Фірма з продажу автомобілів рекламує дві нові моделі авто на радіо і телебаченні. Компанію цікавить ефективність реклами, зокрема оцінка того, що навмання вибрана людина має уявлення хоча б про одну з двох рекламованих моделей. Подія A — навмання вибрана особа чула рекламу на радіо, подія B — навмання вибрана особа знає про нові моделі автомобілів з реклами телебачення. Визначте події $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ та $\overline{A} \cup \overline{B}$.

1.16. Серед студентів першого курсу університету навмання вибирають одного. Нехай подія A полягає в тому, що вибраний студент виявився юнаком, подія B — студент не курить; подія C — студент живе в гуртожитку. Опишіть події ABC, $\overline{A}BC$, $A\overline{B}C$, $AB\overline{C}$, $\overline{A}\,\overline{B}C$, $\overline{A}B\overline{C}$, $A\overline{B}\,\overline{C}$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, $\overline{ABC}$.

1.17. Серед студентів економічного університету навмання вибирають одного. Нехай подія A полягає в тому, що вибраний студент виявився хлопцем; подія B — студент вчиться на відмінно, і подія C — студент є спортсменом. Опишіть події ABC, $\overline{ABC}$, $AB + \overline{A}C$.

1.18. Нехай події A, B, C означають відповідно складання іспиту з математичної статистики першим студентом, другим і третім. Визначте події: а) $\bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$; б) $\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$.

1.19. Два стрільці по одному разу стріляють по мішені. Подія A — другий стрілець влучив у мішень, B — у мішені одна пробоїна. Записати, у чому полягають події: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A}B$, $A\bar{B}$, $\bar{A}\,\bar{B}$, $\overline{AB}$, $A+B$, $\bar{A}+\bar{B}$, $\overline{A+B}$.

1.20. При киданні грального кубика випала певна кількість очок. Подати через елементарні події подію A, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випала парна кількість очок.

§ 2. Елементи комбінаторики

1. Основні правила комбінаторики

Правило додавання. Якщо об'єкт A можна вибрати n способами, а об'єкт B можна вибрати m способами, то один з об'єктів — або A, або B можна вибрати $n + m$ способами.

Правило справджується і для k об'єктів: якщо об'єкт A_1 можна вибрати n_1 способами, об'єкт $A_2 - n_2$ способами, $A_3 - n_3$ способами і т. ін., $A_k - n_k$ способами, то вибір одного з об'єктів A_i ($i = \overline{1,k}$): або A_1, або A_2, … або A_k можна здійснити $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i$ способами ($\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_i + \ldots + n_k$).

Правило множення. Якщо об'єкт A_1 можна вибрати n_1 способами, об'єкт $A_2 - n_2$ способами, $A_3 - n_3$ способами і т.д., $A_k - n_k$ способами, то вибір упорядкованої системи об'єктів A_i ($i = \overline{1,k}$): A_1, A_2, … A_k можна здійснити $\prod\limits_{i=1}^{k} n_i$ способами ($\prod\limits_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$).

2. Сполуки. Розглянемо множину, яка складається з n різних елементів. Кожна непорожня підмножина цієї множини називається ***сполукою***, утвореною з елементів даної множини.

Сполуки з n елементів, що відрізняються лише порядком елементів, називаються ***перестановками*** цих елементів. Кількість перестановок з n елементів позначають P_n і обчислюють за формулою

$$P_n = n!. \qquad (1.2.1)$$

Нехай у множині з n елементів є k груп різних елементів, причому i-та група ($i = \overline{1,k}$) складається з n_i однакових елементів і $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Перестановки з n елементів такої множини називають ***перестановками з повтореннями.*** Кількість перестановок з повторенням позначають $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ і знаходять за формулою

$$P_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}. \qquad (1.2.2)$$

Розміщенням з n елементів по m називають такі сполуки, які складаються з m елементів, узятих з даних n елементів ($m \le n$), і відрізняються або порядком, або принаймні одним елементом. Кількість розміщень з n елементів по m позначають A_n^m і знаходять за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}_{m \text{ множників}}. \qquad (1.2.3)$$

Розміщенням з n елементів по m ***із повторенням*** називають такі сполуки, які складаються з m елементів, узятих у такий спосіб, що кожен елемент, який уже ввійшов у сполуку, може повертатись у сукупність, з якої був вибраний. Кількість розміщень із повторенням з n елементів по m позначають $\overline{A}_n^m$ (або R_n^m) і знаходять за формулою

$$\overline{A}_n^m = n^m. \qquad (1.2.4)$$

Комбінаціями з n елементів по m називають такі сполуки, які складаються з m елементів, узятих з даних n елементів ($m \le n$), і відрізняються принаймні одним елементом, причому порядок елементів не має значення.

Кількість комбінацій з n елементів по m позначають C_n^m і знаходять за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{P_m}. \qquad (1.2.5)$$

Комбінаціями з повторенням з n елементів по m називають такі сполуки, які складаються з m не обов'язково різних елементів, що взяті з даних n і відрізняються принаймні одним елементом, причому порядок елементів не має значення.

Кількість усіх комбінацій з повторенням з n елементів по m позначають $\overline{C}_n^m$ і знаходять за формулою

$$\overline{C}_n^{\,m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \qquad (1.2.6)$$

Задачі

2.1. Обчислити: P_4, $P_{12}(2,4,6)$, A_7^2, $\overline{A}_7^2$, C_9^1, C_9^8, C_9^3, C_9^7, $\overline{C}_9^3$, $\overline{C}_3^9$, $C_9(5,4)$.

2.2. З цифр «4», «7», «9» складають числа. Скільки можна скласти: а) трицифрових чисел так, щоб жодна з цифр не повторювалась; б) трицифрових чисел; в) двоцифрових чисел так, щоб жодна з цифр не повторювалась; г) двоцифрових чисел?

2.3. Скільки різних сполук по п'ять елементів можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо в тій самій сполуці можуть бути однакові цифри?

2.4. Із цифр «0», «5», «7» складають числа. Скільки можна скласти: а) трицифрових чисел так, щоб жодна із цифр не повторювалась; б) трицифрових чисел; в) двоцифрових чисел так, щоб жодна із цифр не повторювалась; г) двоцифрових чисел?

2.5. Скількома способами можна вибрати 13 карт з колоди в 52 карти?

2.6. У продаж надійшли листівки 10 різних видів. Скількома способами можна утворити набір з 12 листівок? З 8 листівок?

2.7. Скільки існує шестизначних телефонних номерів (номер не може починатися з нуля)?

2.8. Скільки існує шестизначних номерів телефонів, що складаються з цифр 2, 3 і 4, в яких цифра 2 повторюється двічі, цифра 4 — тричі?

2.9. Скільки екзаменаційних комісій, що складаються з 7 членів, можна утворити з 14 викладачів?

2.10. Яку кількість різних натуральних чисел можна скласти з цифр 0, 2, 3, 4, щоб у кожне таке число кожна цифра входила не більше від одного разу?

2.11. Слово «інтеграл» складено з літер розрізної абетки. Навмання витягують 4 картки і складають у ряд одну за одною в порядку появи. Скільки можливих сполучень можна скласти з літер цього слова?

2.12. Скільки можливих сполучень можна скласти з літер слова «ранг»?

2.13. Шифр посвідчення водія має серію, що складається з трьох літер, і номер з шести цифр. Скільки водійських посвідчень можна утворити, використовуючи 26 літер та десять цифр, якщо: а) цифри і букви в шифрі не повторюються; б) повторюються?

2.14. Скільки різних дільників має число 2310?

2.15. Розв’язати рівняння:

а) $A_7^x = xA_7^{x-1}$; б) $C_{x+1}^{x-1} + C_x^{x-2} = 9x + 10$; в) $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$;

г) $P_{x-4} \cdot A_x^4 = 42P_{x-2}$; ґ) $C_x^{x-3} + C_x^{x-2} = 15(x-1)$; д) $C_{x+2}^4 = x^2 - 1$;

е) $\dfrac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$; є) $C_{x+3}^{x+1} = C_{x+1}^{x-1} + C_{x+1}^x + C_x^{x-2}$; ж) $C_{x+8}^{x+3} = 5 \cdot A_{x+6}^3$.

2.16. Розв’язати рівняння:

а) $12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^2$; б) $x^2 \cdot C_{x-1}^{x-4} = A_4^2 \cdot C_{x+1}^3 - x \cdot C_{x-1}^{x-4}$;

в) $5A_{4x+7}^3 = C_{4x+9}^{4(x+1)}$; г) $C_x^1 + 6 \cdot C_x^2 + 6 \cdot C_x^3 = 9x^2 - 14x$.

2.17. На складі зберігаються 10 телевізорів. Скільки існує способів розподілити їх між трьома магазинами, якщо відомо, що в перший магазин має бути доставлено 5, у другий — 2, у третій — 3 телевізори?

2.18. Скількома способами можна вибрати 8 тістечок у кондитерській, де є 6 різних видів тістечок?

2.19. Правління підприємства складається з 9 осіб. Скількома способами можна вибрати серед них: а) три особи у відрядження; б) президента, директора та комерційного директора?

2.20. Збори, на яких присутні 20 осіб, обирають двох делегатів на дві конференції. Якою кількістю способів це можна зробити? Скількома способами можна відібрати двох кандидатів на одну конференцію?

2.21. Директор розглядає кандидатури п’яти осіб, які подали заяви про прийняття на роботу. Усі п’ятеро мають однакові професійні характеристики. На інтерв’ю з них будуть запрошені лише троє. Порядок запрошення кожного має значення, оскільки перший кандидат матиме вищий шанс бути запрошеним на роботу; другий буде запрошений, якщо першому буде відмовлено, третій буде запрошений, якщо двом попереднім кандидатам буде відмовлено. Скільки всього існує способів запрошення трьох кандидатів із шести за такого способу відбору?

2.22. Студент узяв у бібліотеці 12 книжок і спробував покласти їх у рюкзак. Однак з’ясувалося, що в ньому можуть поміститися тільки будь-які 9 книжок. Скількома способами студент може покласти будь-які 9 книжок з 12 в рюкзак?

2.23. Проект економічного розвитку певної галузі виробництва складається з 6 розділів. У його розробленні беруть участь

6 організацій. Скількома способами може бути розподілена робота: а) над усіма розділами; б) над першим, другим та третім розділами?

2.24. Чотирьох людей випадково відбирають з 10 осіб, які погодилися брати участь в інтерв'ю для з'ясування їхнього ставлення до продукції фірми з виробництва продуктів харчування. Цих 4 людей треба прикріпити до 4 інтерв'юерів. Скільки існує різних способів складання таких груп?

2.25. На залізничній станції є сім запасних колій. Скількома способами можна розставити на них чотири потяги?

2.26. У речовій лотереї розігруються 8 предметів. З урни, в якій 50 квитків, беруть 5 квитків. Скількома способами їх можна взяти так, щоб: а) рівно два з них були виграшними; б) принаймні два з них були виграшними?

2.27. З 20 робітників потрібно вибрати будь-яких 6 для роботи на будівництві. Скількома способами це можна зробити?

2.28. У ящику 20 деталей, серед яких 4 браковані. Скількома способами можна взяти: а) п'ять деталей; б) дві браковані; в) одну браковану і чотири стандартні; г) шість деталей, серед яких хоча б одна бракована; ґ) дві однакові за якістю?

2.29. За даними геологорозвідки одна з 10 ділянок землі, цілком імовірно, містить нафту. Проте компанія має кошти для буріння лише 8 свердловин. Скільки є способів вибору 8 різних ділянок у компанії?

2.30. Скількома способами з колоди (36 карт) можна взяти 4 карти, щоб серед них було: а) три пікової масті; б) дві бубнової, одна червової масті; в) дві червової масті; г) усі різної масті; ґ) хоча б дві однієї масті?

2.31. У диспетчерську таксопарку надійшли одночасно 7 замовлень з трьох готелів: два замовлення — з готелю «Київ», п'ять — з готелю «Салют» і одне — з готелю «Москва». Скільки існує різних способів розподілу 7 машин за цими замовленнями?

2.32. На книжковій полиці вміщується 10 томів енциклопедії. Скількома способами їх можна розставити так, щоб: а) томи 1 і 2 стояли поруч; б) томи 3 і 4 не стояли поруч?

2.33. На конференції мають виступити доповідачі A, B, C і D, причому B не може виступати раніше від A. Скількома способами можна встановити черговість виступів?

2.34. 8 груп навчається в 10 розміщених поряд аудиторіях. Скільки існує варіантів розміщення груп в аудиторіях, за яких: а) групи № 1 і № 2 будуть у сусідніх аудиторіях; б) групи № 5 і № 7 будуть не в сусідніх аудиторіях?

2.35. Учений бажає досліджувати ефект впливу на швидкість хімічного процесу трьох змінних: тиску, температури і типів каталізаторів. Якщо експериментатор має намір використовувати три значення температури, три значення тиску і два види каталізаторів, то скільки режимів він може реалізувати в експерименті, якщо побажає використовувати всі можливі комбінації тиску, температури і видів каталізаторів?

2.36. У другому семестрі на першому курсі вивчають 10 предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять на п'ятницю, якщо в цей день тижня має бути 4 заняття з різних предметів?

2.37. При зустрічі 4 чоловіки потиснули один одному руки. Скільки рукостискань було зроблено?

2.38. На сім заяв співробітників університету профком має три путівки на курорт «Трускавець». Скількома способами їх можна розподілити, якщо: а) усі путівки в різні санаторії; б) усі путівки в один санаторій?

2.39. Скількома способами можна розсадити 5 гостей за круглим столом?

2.40. Шість ящиків із різними матеріалами доставляють на вісім поверхів будови. Скількома способами: а) можна розподілити доставку матеріалів на поверхи; б) на восьмий поверх буде доставлено один матеріал; в) на восьмий поверх буде доставлено не менше від двох матеріалів?

2.41. У пасажирському потязі 14 вагонів. Скількома способами можна розподілити по вагонах 28 провідників, якщо за кожним вагоном закріплюються два провідники?

2.42. Четверо осіб зайшли на першому поверсі в ліфт 10-поверхового будинку. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта: а) піднявшись на потрібний для кожного поверх? б) на різних поверхах? в) на сьомому поверсі вийде один пасажир?

2.43. Ресторан системи «ОГО» пропонує меню, що складається з шести рибних і м'ясних страв, двох салатів, чотирьох напоїв і трьох десертів. Скільки різних варіантів обіду може замовити відвідувач ресторану, якщо його обід буде складатись із салату, одного напою і одного десерту та рибної або м'ясної страви?

2.44. У взводі 3 сержанти і 30 солдатів. Скількома способами можна виділити сержанта і трьох солдат для патрулювання?

2.45. Ліфт, у якому 13 пасажирів, може зупинитися на 10 поверхах. Пасажири виходять групами по 6, 4 і 3 особи. Скількома способами вони можуть вийти, якщо ліфт не повертається на поверх, де він уже був і на одному поверсі може вийти не більше від однієї групи?

2.46. Президент корпорації розглядає заяви про прийняття на роботу 10 випускників магістерського курсу. На одному з підприємств корпорації є три різні вакансії. Скількома способами президент може заповнити випускниками ці вакансії?

2.47. Скількома способами з 12 учасників змагань можна скласти: а) команду з чотирьох осіб; б) 3 групи по 4 особи?

2.48. Є 5 путівок у різні санаторії та 8 путівок на бази відпочинку. Скількома способами можна видати деякій установі 3 путівки в санаторій і 4 путівки на бази відпочинку?

2.49. Підприємство для маркування своєї продукції використовує товарний знак, що складається з чотирьох смуг, дві з яких червоного кольору, одна жовтого кольору, одна синього. Скільки різних товарних знаків може бути складено?

2.50. П'ять фірм: Фl, Ф2, Ф3, Ф4, Ф5 — пропонують свої послуги на виконання трьох різних контрактів — К1, К2 і К3. Будь-яка фірма може одержати тільки один контракт. Контракти різні, тобто якщо контракт К1 одержить фірма Ф1, то це не те саме, якщо фірма Ф1 одержить контракт К2. Скільки різних способів одержання контрактів мають фірми?

2.51. Для доступу до журналу успішності студентові потрібно набрати пароль із семи цифр. Студент не знає необхідного коду. Скільки різних комбінацій він може скласти для набору пароля, якщо: а) цифри в коді не повторюються; б) повторюються.

2.52. Слово «бізнесмен» складено з літер розрізної абетки. Навмання витягують три картки і складають у ряд одна за одною у порядку появи. Скільки таких сполучень можна утворити з літер цього слова?

2.53. Скільки різних «слів» (у тому числі беззмістовних) можна дістати, переставляючи букви у слові «математика»?

2.54. Скількома способами можна порівну роздати чотирьом гравцям 28 костей доміно?

2.55. Купуючи картку лотереї «Спортлото», гравець повинен закреслити 6 з 49 можливих чисел від 1 до 49. Якщо під час розіграшу тиражу лотереї він вгадає усі 6 чисел, то має шанс виграти значну суму грошей. Скільки можливих комбінацій можна скласти з 49 чисел по 6, якщо порядок чисел не має значення?

2.56. Скільки видів піци може приготувати кулінар, якщо в його розпорядженні крім базових компонентів є ще 5 різних продуктів: ковбаса, перець салатний, гриби, креветки, оливки?

2.57. Скількома способами можна з 12 осіб скласти чотири групи по три особи?

2.58. Скільки різних кодів з десяти позицій можна скласти з шести вертикальних і чотирьох горизонтальних штрихів, якщо на одну позицію можна розміщувати тільки один штрих?

2.59. Скількома способами можна 15 випускників розподілити по трьох районах, якщо в одному з них є 8, у другому — 5 і в третьому — 2 вакантних місця?

2.60. Скількома способами можна купити сім листівок у кіоску, де є шість різних видів листівок?

2.61. Скількома способами можна скласти розклад з 5 уроків у вівторок (усі уроки різні), якщо вивчається 12 предметів?

2.62. В аудиторії 30 студентів. Потрібно обрати старосту, його заступника та профорга. Скільки існує способів такого обрання?

2.63. В аудиторії 30 студентів. Відомо, що 5 з них відмінники, 15 — хорошисти. Скільки існує способів вибрати одного студента з відмінників або хорошистів для участі в олімпіаді з математики?

2.64. П’ять плавців беруть участь у змаганнях. Скількома способами можуть бути: а) розподілені між ними п’ять місць (жодне з місць не може бути поділене між учасниками)? б) розподілені призові місця (1, 2, 3) (жодне з місць не може бути поділене між учасниками)? в) вибрані з них три учасники запливу?

§ 3. Обчислення ймовірностей випадкових подій

1. Класичний спосіб визначення ймовірності. Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню кількості m елементарних подій, які сприяють появі події A, до загальної кількості n подій простору елементарних подій Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.3.1}$$

За цією формулою обчислюємо $P(A)$ лише тоді, коли простір Ω містить скінченну кількість n елементарних подій.

2. Геометричний спосіб визначення ймовірності. Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій, сприятливих події A, — як частину цього геометричного образу, то ймовірність появи події A визначається як відношення мір μ цих множин:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{1.3.2}$$

Задачі

3.1. Яка ймовірність, що в лютому навмання взятого високосного року буде 5 п'ятниць?

3.2. Для студентів, що йдуть на практику, надано 15 місць у Києві, 10 місць у Харкові і 5 місць у Львові Яка ймовірність того, що студенти А, Б, В попадуть на практику в одне місто?

3.3. Стрілець здійснює 4 постріли в мішень. Результати кожного пострілу (влучення чи промах) рівноможливі. Визначити ймовірність того, що влучень буде більше, ніж промахів.

3.4. У партії готової продукції з 20 виробів є 3 неякісні. Визначити ймовірність того, що при випадковому виборі 4 виробів одночасно всі вироби будуть якісні. Яка ймовірність того, що якісних і неякісних виробів буде порівну?

3.5. У партії з 20 готових виробів є 4 неякісні. Партію ділять на дві рівні частини по 10 виробів у кожній. Яка ймовірність того, що неякісні вироби теж розподіляться порівну?

3.6. З урни, що містить 3 білих і 2 чорні кульки, перекладають 2 кульки в другу урну, що містить 4 білих і 4 чорних кулі. Яка ймовірність того, що в другій урні кількість білих і чорних куль виявиться однаковою?

3.7. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Знайти ймовірності подій: A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A + B$, AB.

3.8. Яка ймовірність того, що остання цифра навмання вибраного номера виявиться рівною 3 або кратною 2?

3.9. Підкидають три монети. Які з результатів експерименту рівноможливі та які їхні ймовірності?

3.10. Підкинули три монети. Які ймовірності таких подій: A — гербів випало більше, ніж чисел, B — випало рівно два числа, C — три монети випали однаковими сторонами, D — гербів випало не більше ніж один, E — випав хоч один герб.

3.11. Кидають дві однакові монети. Яка з подій більш імовірна: A — монети випадуть однаковими сторонами; B — монети випадуть різними сторонами?

3.12. Підкидаються 2 гральні кубики. Яка ймовірність того, що сума очок буде не більша ніж 5?

3.13. Підкидаються 2 гральні кості. Яка ймовірність того, що сума випавших очок буде не менше ніж 6 і не більше ніж 10?

3.14. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність таких подій: A, B, C, D, $A + D$, AB, якщо події: A — випало число, що є дільником числа 6; B — випало не менше ніж 5 очок; C —

випало не більше ніж 5 очок; D — випало число, що є квадратом натурального числа?

3.15. Яка ймовірність того, що навмання взята пластинка гри доміно містить число очок не менше ніж 4 і не більше ніж 6?

3.16. В урні 10 кульок білого, 5 зеленого, 7 червоного кольору. З урни навмання беруть кульки. З якою ймовірністю можна взяти: а) 1 червону кульку; б) 2 білі кульки; в) 3 кульки одного кольору; г) 3 кульки різних кольорів; ґ) 4 білі й 2 зелені кульки; д) 3 кульки, серед яких принаймні 1 білого кольору?

3.17. У студентській групі 28 осіб. Серед них 20 студентів старші від 19 років і 8 студентів старші від 22 років. Способом жеребкування розігрується запрошення на концерт. Чому дорівнює ймовірність того, що квиток дістанеться студенту старшому від 19 або старшому від 22 років?

3.18. Журі конкурсу визначило 10 претендентів, однаково гідних першої премії. Серед них виявилося 5 наукових співробітників, 2 студенти, 3 робітники. Яка ймовірність того, що в результаті жеребкування премія буде видана або вченому, або робітникові?

3.19. Кулінар виготовив 15 салатів, причому 4 пересолив. Яка ймовірність, що з трьох випадково вибраних салатів усі виявляться непересоленими?

3.20. Чотири кульки випадковим чином можуть опинитися в одній з чотирьох лунок з однаковою ймовірністю та незалежно одна від одної. Знайти ймовірність того, що в одній лунці будуть три кульки, в другій — одна, а в двох інших лунках кульок не буде.

3.21. З урни, що містить 5 пронумерованих кульок, навмання дістають одну за одною всі кульки. Знайти ймовірність того, що всі вийняті кульки з'являться за порядком нумерації.

3.22. Урна містить 8 пронумерованих від 1 до 8 кульок. Виймають кульку, записують її номер і повертають в урну. Знайти ймовірність того, що числа будуть записані в послідовності від 1 до 8.

3.23. З цифр «4», «7», «9» навмання складають числа. Яка ймовірність того, що склали: а) трицифрове число, в якому жодна з цифр не повторюється; б) трицифрове число; в) двоцифрове число, в якому жодна з цифр не повторюється; г) двоцифрове число?

3.24. Знайдіть ймовірність того, що число, навмання вибране з чисел від 9 до 100, ділиться на 4.

3.25. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибране ціле число від 10 до 120 ділиться на 5.

3.26. Знайдіть ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадуть на різні місяці року.

3.27. Замок містить 4 диски, на кожному з яких 10 цифр. Замок відімкнеться, якщо правильно набрати код з чотирьох цифр. Яка ймовірність того, що замок відімкнуть з першої спроби?

3.28. На бочечках лото написані числа від 1 до 99. З них навмання вибирають дві. Знайти ймовірності таких подій: 1) A — на обох бочечках написано числа менші від 40; 2) B — на обох бочечках написано числа більші від 40; 3) C — на одній бочечці написано число менше від 40, а на другій більше від 40.

3.29. У пачці 100 лотерейних білетів, один з яких виграшний. Яка ймовірність виграти, якщо купили 10 білетів?

3.30. Знайти ймовірність угадування k чисел з шести виграшних у суперлото (усього 49 чисел, але виграшних — 6).

3.31. У лотереї є n білетів, серед яких m виграшних. Обчислити ймовірність виграшу для того, хто має r білетів цієї лотореї.

3.32. Для доступу до комп'ютерної мережі оператор повинен набрати пароль із 7 цифр, які він забув, але знає, що всі вони різні. Яка ймовірність набрати вірний пароль з першої спроби?

3.33. П'ять фірм: $Ф_1$, $Ф_2$, $Ф_3$, $Ф_4$, $Ф_5$ — пропонують свої послуги на виконання трьох різних замовлень: $З_1$, $З_2$, $З_3$. Будь-яка фірма може одержати лише одне замовлення. Яка ймовірність того, що фірма $Ф_5$ одержить замовлення, якщо укладення угоди однаково можливе з будь-якою з 5 фірм?

3.34. Знайти ймовірність того, що у випадковому поєднанні з 5 цифр телефонного диска всі цифри будуть кратні 3.

3.35. Три гравці грають у карти. Кожному здано по 10 карт і дві карти залишено у прикупі. Один з гравців має 6 карт бубнової масті та 4 не- бубнової. Він скидає дві небубнові карти та бере прикуп. Знайти ймовірність того, що він прикупить дві бубнові карти.

3.36. З колоди (36 карт) беруть карти. З якою ймовірністю можна взяти: а) одну чирвову карту; б) дві пікових; в) чотири карти, з яких дві бубнової, одна чирвової масті; г) чотири карти різних мастей; ґ) три карти різної масті; д) чотири карти, серед яких хоча б дві однієї масті?

3.37. З колоди карт (52 карти) виймають кілька штук. Скільки карт достатньо взяти, щоб з ймовірністю більше ніж 0,5 стверджувати, що серед них будуть 2 карти однієї масті?

3.38. Під час гри в бридж колода з 52 карт ділиться порівну між чотирма гравцями. Знайти ймовірність того, що кожен гравець одержить по одному тузу.

3.39. В екзаменаційний білет уходять 4 питання з 45, що містить програма. Студент вивчив 30 питань. Яка ймовірність того, що він буде знати всі 4 питання з навмання взятого білета?

3.40. Яка ймовірність одержати слово «міс» з літер розрізної азбуки слова «бізнесмен».

3.41. Слово «інтеграл» складається з букв розрізної азбуки. Ці букви перемішали і навмання, одна за одною, дістали 3 картки і розклали в ряд у порядку появи. Яка ймовірність того, що: а) вийшло слово «гра»; б) з відібраних карток можна скласти слово «гра»?

3.42. З букв розрізної азбуки складено слово. Потім букви слова перемішують і навмання беруть одну за одною і розкладають у ряд у порядку їх появи. Знайти ймовірність того, що буде складено початкове слово, якщо це слово: а) «книга»; б) «математика».

3.43. Словосполучення «теорія ймовірності» складено з розрізної азбуки. Зі словосполучення навмання беруть картки і викладають у ряд одну за одною в порядку їх появи. Яка ймовірність того, що буде складене слово: а) «вірно»; б) «історія»?

3.44. З 10 книг, що стоять на книжковій полиці, — 3 книги зі статистики. Знайти ймовірність того, що вони стоять поруч.

3.45. На книжковій полиці навмання розставляють 4 книги з економіки і три книги з географії. Яка ймовірність того, що книги з одного предмета стоятимуть поряд?

3.46. На книжковій полиці розставили 6 томів енциклопедії. Яка ймовірність того, що: а) томи 1 і 2 розміщено поруч; б) томи 3 і 4 не поставлено поруч?

3.47. 8 осіб випадковим чином сідають за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що: а) 2 визначені особи сидітимуть поруч; б) 3 визначені особи сидітимуть поруч.

3.48. 10 осіб випадковим чином сідають за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що 4 визначені особи опиняться поруч.

3.49. 7 осіб випадковим чином сідають з одного боку прямокутного стола. Знайти ймовірність того, що: а) 2 визначені особи опиняться поруч; б) 3 визначені особи опиняться поруч.

3.50. A та B і ще 8 осіб стоять у черзі. Знайти ймовірність того, що між A та B стоять 3 особи.

3.51. У ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі увійшло 3 людини. Кожна з них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі починаючи з другого. Знайти ймовірності подій: A — усі пасажири вийдуть на четвертому поверсі; B — усі пасажири вийдуть на тому самому поверсі; C — усі пасажири вийдуть на різних поверхах.

3.52. 4 людини зайшли на першому поверсі в ліфт 10-поверхового будинку. Кожна з них з однаковою ймовірністю може вийти на довільному поверсі починаючи з другого. Знайти ймовірності подій: A — на восьмому поверсі вийде один пасажир;

B — усі пасажири вийшли на тому самому поверсі; *C* — усі пасажири вийдуть на різних поверхах.

3.53. У ліфті 7 пасажирів. Ліфт зупиняється на 10 поверхах. Яка ймовірність того, що всі пасажири вийдуть на різних поверхах?

3.54. У 3 вагони заходять 9 пасажирів. Яка ймовірність того, що: а) у перший вагон зайдуть 3 пасажири; б) у кожний вагон зайдуть по три пасажири; в) в один з вагонів зайдуть 4, у другий — 3 й у третій — 2 пасажири?

3.55. Група туристів з 15 юнаків і 5 дівчат вибирає господарську команду в складі 4 осіб. Яка ймовірність того, що в числі вибраних опиняться 2 хлопці і 2 дівчини?

3.56. Колектив хореографічної студії складається з 8 дівчат і 8 юнаків. Вибираються 9 осіб для певної композиції. Знайти ймовірність того, що серед учасників опиняться всі юнаки.

3.57. Визначаючи якість насіння, взяли на пробу 1000 насінин. З відібраних зійшло 90. Яка відносна частота появи якісного насіння?

3.58. У круг вписано квадрат. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка круга попаде в квадрат?

3.59. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана точка правильного трикутника попадає в коло, вписане в цей трикутник?

3.60. Яка ймовірність, що навмання вибрана точка правильного трикутника попаде у вписаний у трикутник квадрат?

3.61. У крузі радіуса R проведено хорду довжиною R, яка ділить круг на дві частини. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка попадає до меншої частини круга?

3.62. У крузі радіуса R навмання проведено хорду. Знайти ймовірність того, що довжина цієї хорди не більша ніж R.

3.63. Між числами -1 і 1 навмання вибирають два числа. Знайти ймовірність того, що сума квадратів цих чисел буде не більшою за одиницю.

3.64. Між числами 0 і 1 навмання вибирають два числа. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел не більша ніж 1, а модуль їх різниці не менший ніж 0,5.

3.65. Навмання вибираємо два числа x і y, такі що $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Знайти ймовірність того, що $y \le x^2$.

3.66. Парабола дотикається нижньої сторони квадрата і проходить через його вершини. Яка ймовірність того, що точка, навмання вибрана у квадраті, попаде в область, що обмежена параболою і верхньою стороною квадрата?

3.67. Дві особи домовилися зустрітись між 13-ю і 14-ю годинами. Та, що прийде перша, чекатиме на другу лише 10 хвилин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожна особа може прийти в будь-який момент часу між 13-ю і 14-ю годинами.

3.68. Робітник обслуговує 2 агрегати. Тривалі спостереження показали, що кожен з них потребує уваги робітника протягом 10 хвилин на годину. Знайти ймовірність того, що за годину якийсь один агрегат потребуватиме уваги робітника в той час, коли він обслуговує другий.

3.69. 500 фірм держали кредити в банку. Банк класифікує кожен кредит за двома характеристиками: сумою кредиту і строком кредиту (у місяцях). Відповідну класифікацію наведено в таблиці.

Строк кредиту (місяці)	Сума кредиту			
	< $ 2000	$ 2000—4999	$ 5000—7999	> $ 8000
12	30	2	0	0
24	4	20	5	0
36	1	20	86	5
42	0	31	99	37
48	0	0	110	50

Для перевірки навмання вибирається одна фірма. Яка ймовірність того, що: а) сума кредиту цієї фірми не менша ніж $ 5000, б) строк кредиту фірми більший від 2 років; в) фірма взяла кредит на суму не меншу ніж $ 2000, на 42 місяці?

3.70. Вкладники банку за сумами вкладів та віком мають такий процентний розподіл:

Вік	Сума вкладу		
	< $ 1000	$ 1000—5000	> $ 5000
До 30 років	5 %	15 %	8 %
Від 30 до 50 років	8 %	25 %	20 %
Більше від 50 років	7 %	10 %	2 %

Знайти ймовірності подій: A — у вибраного клієнта вклад більший ніж $ 5000; B — вік навмання вибраного клієнта більший від 30 років; а також подій: $A \cap B$, $A \cup B$.

3.71. У партії з N деталей є n стандартних. Навмання відібрано m деталей. Знайти ймовірність того, що серед відібраних деталей рівно k стандартних.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	15	12	13	14	12	11	10	13	10	15
n	10	9	8	11	8	8	7	9	8	8
m	7	5	5	7	5	6	5	7	6	4
k	4	4	3	5	3	2	3	4	3	3

3.72. У ящику є k чорних і n білих кульок. Навмання вибирають m кульок. Знайти ймовірність того, що серед них буде h білих кульок.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	6	4	6	7	6	4	8	6	6	6
n	5	5	7	4	5	6	6	5	8	7
m	5	4	4	4	4	4	5	5	5	4
h	3	2	4	2	3	3	2	2	4	3

3.73. Студент повинен вивчити до іспиту n питань, але вивчив лише m. На іспиті він одержав k питань. Для складання іспиту студент повинен відповісти на l питань. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	6	4	6	7	6	4	8	6	6	6
n	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
m	55	64	64	70	75	80	88	90	95	100
l	4	3	4	5	4	3	5	5	5	4

§ 4. Теореми додавання і множення ймовірностей

1. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C). \qquad (1.4.1)$$

Твердження справджується й для n подій: якщо події A_i ($i = \overline{1, n}$) попарно несумісні, то $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

2. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій. Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їхньої сумісної появи:

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC). \qquad (1.4.2)$$

3. Теорема множення ймовірностей незалежних подій. ***Подія А називається незалежною від події В***, якщо ймовірність події A не змінюється від того, чи відбулася подія B.

Теорема. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1.4.3)$$

Твердження справджується й для n подій: якщо події A_i ($i = \overline{1, n}$) попарно незалежні, то $P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Нехай подія A полягає в появі принаймні однієї з подій A_1, A_2, …, A_n, попарно незалежних у сукупності. Ймовірність події A дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей подій, протилежних подіям A_1, A_2, …, A_n:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n). \qquad (1.4.4)$$

4. Теорема множення ймовірностей залежних подій. ***Подія А називається залежною від події В***, якщо ймовірність події A змінюється залежно від того, відбулася подія B чи ні.

Ймовірність події A, яка визначена за умови, що подія B відбулася, називається ***умовною*** і позначається $P_B(A)$, або $P(A/B)$.

Теорема. Якщо події A і B залежні, то ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, тобто:

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad (1.4.5)$$

Твердження справджується й для n подій: якщо події A_i ($i = \overline{1, n}$) попарно залежні, то

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n).$$

Задачі

4.1. Підкинули дві монети**.** Розглядаються дві події: A — випав герб на першій монеті; B — випав герб на другій монеті. Знайти ймовірності подій $A + B$, AB.

4.2. Підкинули дві монети. Подія A — на першій монеті випав герб, подія B — на другій монеті випав герб. Знайти ймовірність події $C = \overline{A + B}$.

4.3. У даній місцевості середня кількість дощових днів у квітні дорівнює 10. Знайти ймовірність того, що в перші два дні квітня не дощитиме.

4.4. Два гравці по черзі підкидають монету. Виграє той, у кого першим випаде герб. Знайти ймовірність виграшу для кожного з гравців.

4.5. Імовірність дожити людині до 20 років дорівнює 0,98, дожити до 60 років — 0,59. Яка ймовірність дожити до 60 років людині 20-річного віку?

4.6. Гральний кубик кидають доти, доки з'явиться шістка. Знайти ймовірність того, що вона вперше з'явиться при третьому підкиданні.

4.7. Протягом кількох років спостереження показали, що з 10000 дітей, які досягли 10-річного віку, до 40 років доживають 9050 осіб, а до 70 років — 2680. Знайти ймовірність дожити до 70 років людині 40-річного віку.

4.8. З урни, в якій лежать 12 білих і 8 червоних кульок, беруть послідовно дві кульки. Відомо, що перша кулька виявилась білою. Яка ймовірність того, що друга кулька виявиться: а) білою; б) червоною?

4.9. Нацбанк випустив дві облігації. Імовірність того, що облігація A підвищиться в ціні завтра, дорівнює 0,2. Імовірність того, що обидві облігації A і B завтра підвищаться в ціні, дорівнює 0,11. Припустимо, що ви знаєте, що A завтра підвищиться в ціні, тоді чому дорівнює ймовірність того, що і B підвищиться в ціні?

4.10. З урни, в якій лежать 8 білих і 4 червоних кульки, беруть послідовно три кульки. Яка ймовірність того, що друга кулька виявиться: а) білою; б) червоною? Яка ймовірність того, що третя виявиться: в) білою; г) червоною?

4.11. З групи студентів, у якій 16 юнаків і 12 дівчат, до ради студентського товариства обираються дві людини. Яка ймовірність того, що серед обраних буде хоча б один юнак?

4.12. В одному ящику 5 білих та 10 червоних кульок, у другому 10 білих та 5 червоних кульок. З кожного ящика навмання беруть по одній кульці. Знайти ймовірність того, що буде вийнято одну білу кульку.

4.13. В урні є 10 куль, з яких 4 — білі, 6 — чорні. Навмання витягнули 3 кулі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з куль біла.

4.14. В урні 4 білі та 3 чорні кульки. Два гравці по черзі виймають по одній кульці, не повертаючи їх до урни. Виграє той, хто першим витягне білу кульку. Знайти ймовірність подій: A — виграє перший гравець; B — виграє другий гравець.

4.15. Наведені далі дані являють собою вік і стать 20 менеджерів середньої ланки в компанії, що обслуговує форуми, конференції тощо: 49 М, 27 М, 63 Ж, 33 Ж, 29 Ж, 45 М, 46 М, 30 Ж, 39 М, 42 М, 30 Ж, 48 М, 35 Ж, 32 Ж, 37 Ж, 48 Ж, 50 М, 48 М, 48 Ж, 61 М. Начальник відділу повинен вибрати навмання одного співробітника для обслуговування засідання оргкомітету. Чому дорівнює ймовірність того, що буде вибрана жінка або співробітник 50 років і старший або жінка у віці від 50 років і старша? Чому дорівнює ймовірність того, що вибраний менеджер буде молодший за 40 років?

4.16. У скриньці 20 білих, 8 чорних і 12 червоних куль. Навмання виймають 2 кулі. Яка ймовірність того, що вийняті кулі різного кольору, якщо відомо, що не виймуть червону кулю?

4.17. У лотереї є 10000 білетів. У таблиці подано розподіл виграшів:

Розмір виграшу (грн)	500	50	20	10	0
Кількість білетів	3	15	50	100	9832

Учасник лотереї придбав один білет. Знайти: а) ймовірність виграшу; б) ймовірність виграшу не менше ніж 50 грн; в) ймовірність виграшу більше 10 грн.

4.18. У настільній грі забивають у лунку кулі. Імовірність того, що з 4 куль заб'ють у лунку принаймні одну, дорівнює 0,9919. Яка ймовірність забити в лунку кожну окремо взяту кулю?

4.19. 60 % випускників фінансово-економічного факультету захищають магістерську дисертацію на відмінно. Імовірність того, що випускник захистить дисертацію на відмінно і дістане запрошення на роботу в комерційний банк, дорівнює 0,3. Припустимо, що студент захистив дисертацію. Чому дорівнює ймовірність того, що випускник дістане запрошення на роботу в банк, якщо він захистив дисертацію на відмінно?

4.20. З урни, в якій лежать 4 зелені і 8 червоних кульок, беруть послідовно без повернення три кульки. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: а) A — перша та третя кульки будуть червоні, друга — зелена; б) B — перша та третя кульки будуть зелені, друга — червона.

4.21. У ході дослідження споживчого ринку людей опитували про сорт хліба, який вони зазвичай вживають. Якщо відомо, що 44 % населення використовує сорт A, а 9 % — сорт B, то чому дорівнює ймовірність того, що випадково вибрана людина буде вживати один із цих сортів? (Ми припускаємо, що в даний момент людина використовує тільки один сорт хліба).

4.22. У коробці 9 нових тенісних м'ячів. Для гри навмання беруть три м'ячі і після гри повертають їх у коробку. Знайти ймовірність того, що після трьох ігор у коробці не залишиться нових м'ячів.

4.23. Гральний кубик кидають тричі. Визначити ймовірність того, що принаймні один раз з'явиться 5 очок.

4.24. З колоди карт (36 шт.) виймають дві карти. Одну з них дивляться, вона виявилася дамою. Після цього дві вийняті карти перетасовують і навмання беруть одну з них. Знайти ймовірність того, що це туз.

4.25. У фірмі 650 працівників; 480 з них мають вищу освіту, а 502 — середню спеціальну освіту, 369 співробітників мають і вищу, і середню спеціальну освіту. Чому дорівнює ймовірність того, що випадково вибраний працівник має або середню спеціальну, або вищу освіту, або й те, й інше?

4.26. Навмання називають одне з чисел від 100 до 999. Яка ймовірність того, що в цьому числі принаймні дві цифри однакові?

4.27. Екзаменаційні роботи абітурієнтів зашифровані цілими числами від 1 до 90 включно. Яка ймовірність того, що номер навмання взятої роботи кратний 10 або 13?

4.28. Маємо 10 квитків вартістю по 10 грн, 6 квитків вартістю по 30 грн та 4 квитки вартістю по 50 грн. Навмання беремо три квитки. Знайти ймовірності таких подій: A — принаймні два з них мають однакову вартість; B — три навмання взяті квитки коштують 70 грн.

4.29. Імовірність того, що покупець, який збирається придбати мобільний телефон і стартовий пакет, придбає тільки телефон, дорівнює 0,25. Імовірність, що покупець купить тільки стартовий пакет, дорівнює 0,3. Імовірність того, що буде куплено і телефон, і стартовий пакет, дорівнює 0,05. Чому дорівнює ймовірність того, що буде куплений або телефон, або стартовий пакет, або телефон і стартовий пакет разом?

4.30. Студент забув останню цифру телефонного номера і набирає її навмання. Яка ймовірність того, що йому доведеться набрати номер не більше від трьох разів?

4.31. Автомат виготовляє деталі, що використовуються в комп'ютерах. У будь-який момент часу автомат може бути в одному й тільки одному з трьох станів: працює з увімкненим блоком автоматичного контролю; працює без контролю і вимкнений. Інженер з контролю якості з досвіду знає, що ймовірність того, що блок контролю відімкнеться в будь-який момент часу, дорівнює 0,025, а ймовірність того, що автомат повністю відімкнеться, дорівнює 0,015. Коли в автоматі вимикається блок контролю або він повністю зупиняється, то викликають механіка ремонтної служби. Чому дорівнює ймовірність того, що в даний момент має бути викликаний механік?

4.32. З двох гармат зроблено по одному пострілу. Імовірність влучення з першої гармати — 0,9, з другої — 0,6. Знайти ймовірність: а) одного влучення; б) принаймні одного влучення.

4.33. Два стрільці влучають у ціль з імовірностями 0,7 та 0,8 відповідно. Кожен з них робить один постріл. Яка ймовірність того, що: а) обидва влучать; б) жоден не влучить; в) принаймні один влучить; г) лише один влучить у ціль?

4.34. Два спортсмени двічі стріляють кожний по своїй мішені. Імовірності влучення при одному пострілі для першого $p_1 = 0,8$; для другого $p_1 = 0,9$. Виграє той, у мішені якого більше пробоїн. Знайти ймовірність того, що виграє перший спортсмен.

4.35. В автопробігу беруть участь 3 автомобілі. Перший може зійти з маршруту з імовірністю 0,15; другий — з імовірністю 0,08, а третій — з імовірністю 0,1. Визначте ймовірність того, що до фінішу дістануться: а) тільки один автомобіль; б) два автомобілі; в) принаймні два автомобілі.

4.36. Імовірність принаймні одного влучення в ціль при трьох пострілах дорівнює $\frac{7}{8}$. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі.

4.37. Для того щоб збити літак, достатньо влучити у обидва його двигуни або в кабіну пілота. Ймовірність влучити в кожний двигун $p_1 = 0,4$; у кабіну — $p_2 = 0,4$. Знайти ймовірність того, що літак буде збито.

4.38 У великому універмазі встановлено приховану відеокамеру для підрахунку кількості покупців, що входять. Коли два покупці входять до магазину разом, і один іде попереду іншого, то перший з них буде врахований електронним пристроєм з ймовірністю 0,98, другий — з імовірністю 0,94, а обидва — з ймовірністю 0,93. Чому дорівнює ймовірність того, що пристрій зіскануе принаймні одного з двох покупців, які входять разом?

4.39. У барабані револьвера вісім гнізд, у трьох з яких є патрони, а п'ять порожні. Дехто обертає барабан та тисне на спусковий гачок. Дослід повторюється двічі. Знайти ймовірності таких подій: A — не буде жодного пострілу; B — буде два постріли; C — буде один постріл.

4.40. Модельєр, який розробляє нову колекцію одягу до весняного сезону, створює моделі трьох видів у зеленій, чорній і червоній колірній гамі. Імовірність того, що зелений колір буде в моді навесні, модельєр оцінює як 0,3, що чорний — як 0,2, а ймовірність того, що буде модний червоний колір, — як 0,25. Припускаючи, що кольори вибираються незалежно один від одного, оцініть імовірність того, що колірне рішення колекції буде модним хоча б за одним з вибраних кольорів.

4.41. Слово «переправа» складається з букв розрізної азбуки. Картки перемішали і навмання, одна за одною, дістали 4 картки. Яка ймовірність того, що вийшло слово «вепр»?

4.42. Велика туристична компанія продає тури для відпочинку за кордоном. Компанія має список клієнтів у трьох регіонах, створений на її власній системі кодів, і розсилає їм поштою каталог літніх турів. Менеджер компанії вважає, що ймовірність того, що компанія не одержить відгуку на розіслані пропозиції з кожного регіону, дорівнює 0,3. Чому в цьому разі дорівнює ймовірність того, що компанія одержить відповідь хоча б з одного регіону?

4.43. З букв розрізної азбуки складено слово. Потім букви слова перемішуються і навмання беруться одна за одною. Знайти ймовірність того, що буде складено початкове слово, якщо це слово а) «книга»; б) «математика».

4.44. Словосполучення «теорія ймовірностей» складено з букв розрізної азбуки. Зі словосполучення навмання беруть сім карток і складають одна за одною в ряд. Яка ймовірність того, що буде складене слово «історія»?

4.45. Імовірність, що судноплавна компанія одержить дозвіл на захід у певний порт призначення, залежить від того, чи буде ухвалений необхідний для цього закон. Компанія оцінює ймовірність того, що відбудуться обидві події (ухвалений відповідний закон і одержаний дозвіл на захід у порт), як 0,65, а ймовірність того, що необхідний закон буде ухвалений, як 0,85. Припустимо, що компанія одержала відомості, що закон ухвалений. Чому дорівнює ймовірність того, що дозвіл на захід у порт призначення буде отримано?

4.46. За круглий стіл сіли 12 осіб, серед них 2 друга. Яка ймовірність того, що друзі: а) сидять поруч; б) не сидять поруч?

4.47. Консалтингова фірма може одержати запрошення від двох міжнародних корпорацій для виконання двох робіт. Керівництво фірми оцінює ймовірність одержання замовлення від корпорації A (подія A) — як 0,55. Також, на думку керівників фірми, у разі якщо фірма укладе договір з корпорацією A, то з ймовірністю в 0,93 компанія B (подія B) також дасть фірмі консультаційну роботу. З якою ймовірністю компанія одержить обидва замовлення?

4.48. Знайти ймовірність того, що навмання вибрані чотири точки круга попадають у правильний трикутник, вписаний у круг.

4.49. Яка ймовірність, що навмання вибрані дві точки правильного трикутника попадуть у квадрат, вписаний у трикутник?

4.50. Відділ маркетингу фірми проводить опитування для з'ясування думок споживачів про якість кави. Відомо, що в місцевості, де проводяться дослідження, 40 % населення є споживачами цього напою і можуть дати йому кваліфіковану оцінку. Компанія випадковим чином відбирає 10 осіб з усього населення. Чому дорівнює ймовірність того, що принаймні одна особа з них може кваліфіковано оцінити продукт?

4.51. На цукровому заводі один із цехів виробляє згущене молоко у жерстяних банках. Контроль якості виявив, що одна з кожних ста банок деформована. Якщо випадковим чином узяти три банки, то чому дорівнює ймовірність того, що принаймні одна з них буде деформована?

4.52. У лотереї випущено 100000 квитків і встановлено 100 виграшів по 20 тис. грн, 1000 по 10 тис. грн, 5000 — по 2,5 тис. грн, 10000 — по 500 грн. Яка ймовірність того, що, придбавши один квиток, можна виграти не менше ніж 2,5 тис. грн?

4.53. У лотереї 2000 квитків, з них на 4 квитки припадають виграші по 250 грн, на 10 квитків — по 100 грн, на 20 квитків — по 50 грн, на 50 квитків — по 10 грн. Решта — квитки без виграшу. Яка ймовірність виграти не менше ніж 50 грн, якщо купити один квиток?

4.54. У лотереї на кожні 1000 квитків 24 грошових і 10 речових виграшів. Придбано 2 квитки. Яка ймовірність придбання: а) принаймні одного виграшного квитка; б) одного квитка грошового виграшу і одного квитка речового виграшу?

4.55. Імовірність того, що до весни ціни на споживчі товари зростуть, дорівнює 0,8; ймовірність того, що до весни підвищиться ціна на електроенергію, дорівнює 0,2, а ймовірність одночасного зростання цін на споживчі товари й електроенергію — 0,06. Чи є ціни на споживчі товари й електроенергію незалежними одна від одної? Поясніть відповідь.

4.56. 1 % деталей, що виготовляють на заводі, — браковані. Серед якісних деталей 60 % — вищого ґатунку. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь із загальної маси деталей є вищого ґатунку?

4.57. На підприємстві брак становить у середньому 2 % від загальної кількості товарної продукції. Серед стандартної продукції перший сорт становить 95 %. Яка ймовірність того, що навмання взята одиниця продукції виявиться першосортною, якщо її взято: а) з виробів, що пройшли перевірку; б) із загальної маси виготовленої продукції?

4.58. Службовець кредитного відділу банку знає, що 15 % фірм, що брали кредит у банку, збанкрутували і не повернуть кредити принаймні протягом п'яти років. Він також знає, що збанкрутували 20 % кредитованих банком фірм. Якщо один із клієнтів банку збанкрутував, то чому дорівнює ймовірність того, що він виявиться не в змозі повернути борг банку?

4.59. Приватний підприємець компанії, що спеціалізується на прямому продажу, пропонує перехожим зубну пасту. З попереднього досвіду йому відомо, що в середньому один з 60 перехожих, яким він пропонує пасту, купує її. Протягом години він запропонував пасту 10 перехожим. Чому дорівнює ймовірність того, що він продасть їм хоча б одну упаковку пасти?

4.60. Завод випускає певного виду вироби, кожний з яких може мати дефект. Після виготовлення виріб послідовно оглядають три контролери. Оглядаючи виріб з дефектом, перший контролер знайде дефект з ймовірністю 0,95, другий — з ймовірністю 0,88, третій — з ймовірністю 0,75. У разі виявлення дефекту виріб бракується. Знайти ймовірності подій: A — виріб з дефектом буде забраковано; B — виріб дефектом буде забраковано другим контролером.

4.61. Припустимо, що 85 % людей, які цікавляться можливими інвестиціями в будівельну компанію, не купують акції, а 33 % не купують облігації. Також відомо, що 28 % зацікавлених у можливих інвестиціях припиняють купівлю цінних паперів — як акцій, так і облігацій. Якщо хтось цікавиться справами компанії, то чому дорівнює ймовірність, що він купуватиме або облігації, або акції, або і те, і те?

4.62. Магазин приймає партію з 10 телевізорів для продажу в тому разі, коли при перевірці двох з них, узятих навмання, обидва будуть якісними. Яка ймовірність того, що партія, в якій 4 неякісних апарати, буде прийнята?

4.63. Фінансовий аналітик припускає, що за зниження норми відсотка за певний період імовірність того, що ринок акцій буде зростати в цей самий час, дорівнює 0,85. Аналітик також вважає, що норма відсотка може знизитися за цей самий період з імовірністю 0,3. Використовуючи одержану інформацію, визначте ймовірність того, що ринок акцій зростатиме, а норма відсотка спадатиме протягом обговорюваного періоду.

4.64. Для ринкового дослідження необхідно провести інтерв'ю з людьми, які добираються на роботу громадським транспортом. У районі, де проводиться дослідження, 85 % людей їдуть на роботу громадським транспортом. Якщо три людини згодні дати інтерв'ю, то чому дорівнює ймовірність того, що принаймні одна з них добирається на роботу громадським транспортом?

4.65. Телефонна компанія організовує рекламу супутникового зв'язку. Один з рекламних роликів компанії являє собою сюжет, у якому бізнесмен телефонує в Ужгород, а потрапляє в Уругвай. Подібні ситуації часто трапляються. Припустимо, що в середньому в одному зі 100 набирань номера абонентом супутникового зв'язку відбувається помилкове з'єднання. Чому дорівнює ймовірність хоча б одного помилкового з'єднання при 5 дзвінках супутникового зв'язку? Передбачається, що всі п'ять набирань номерів незалежні.

4.66. Робітник обслуговує три верстати-автомати, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший верстат потребує уваги робітника, дорівнює 0,9, для другого та третього верстатів ці ймовірності дорівнюють відповідно 0,85 і 0,9. Яка ймовірність того, що протягом години уваги робітника потребуватимуть: а) два верстати; б) принаймні один верстат?

4.67. Аудиторська фірма розміщує рекламу в журналі «Комерсант». За оцінками фірми 60 % людей, які читають журнал, є потенційними клієнтами фірми. Вибіркове опитування читачів журналу показало також, що 25 % людей, які читають журнал, пам'ятають про рекламу фірми, вміщену в кінці журналу. Оцініть, чому дорівнює відсоток людей, які є потенційними клієнтами фірми і які можуть згадати її рекламу?

4.68. Відділ технічного контролю заводу перевіряє половину виробів деякої партії. Вироби партії беруть навмання і вважають всю партію придатною, якщо серед перевірених виробів буде не більше від одного бракованого. Яка ймовірність того, що партія з 20 виробів, у якій є 2 браковані, буде визнана придатною?

4.69. У майстерні є три верстати. За зміну з ладу може вийти не більше одного верстата. Перший виходить із ладу з імовірністю 0,15; другий — з імовірністю 0,05; третій — з імовірністю 0,1. Знайти ймовірність того, що за зміну жоден верстат не вийде з ладу.

4.70. Імовірність того, що в наступному періоді реалізація нових квартир зросте за зниження більше ніж на 0,5 % процентних ставок на житло, дорівнює 0,92. Імовірність того, що процентні ставки знизяться більше ніж на 0,5 % протягом того самого періоду, дорівнює 0,25. Чому дорівнює ймовірність того, що за період, що нас цікавить, процентні ставки знизяться, а реалізація нових квартир зросте?

4.71. Майстер обслуговує 5 верстатів. 20 % робочого часу він проводить біля першого верстата, 10 % — біля другого, 15 % — біля третього, 25 % — біля четвертого, 30 % — біля п'ятого. Знайти ймовірність того, що в навмання вибраний момент часу майстер перебуває: а) біля другого або четвертого верстата; б) біля першого або другого, або третього верстата; в) не біля п'ятого верстата.

4.72. Пасажир вирушає на роботу з деякої трамвайної зупинки, через яку проходять трамваї маршрутів № 1 і № 2 до місця його роботи, а всього через дану зупинку проходять 3 маршрути. З 20 трамваїв, які курсують через цю зупинку, є 7 трамваїв маршруту № 1 і 6 трамваїв маршруту № 2. Знайти ймовірність того, що першим прийде трамвай, відповідний необхідному маршруту, якщо з трамвайного депо ще не прийшов жоден трамвай.

4.73. Для збільшення надійності системи деякі з її приладів дублюються (рис. 2). Знайти надійність системи, якщо ймовірності надійної роботи приладів відповідно: $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}9$.

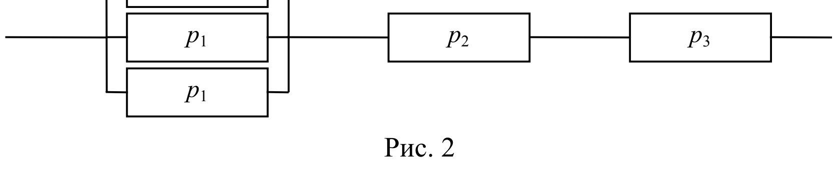


Рис. 2

4.74. Для збільшення надійності системи деякі з її блоків дублюються (рис. 3). Знайти надійність системи, якщо ймовірності надійної роботи блоків відповідно: $p_1 = 0{,}78$; $p_2 = 0{,}99$; $p_3 = 0{,}59$.

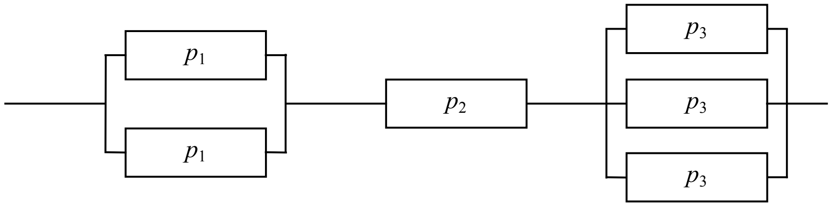


Рис. 3

4.75. Для збільшення надійності системи деякі з її приладів дублюються (рис. 4). Знайти надійність системи, якщо ймовірності надійної роботи приладів відповідно: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}6$; $p_3 = 0{,}9$.

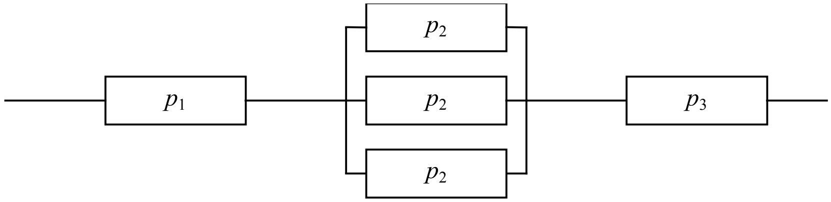


Рис. 4

4.76. Для збільшення надійності системи деякі з її приладів дублюються (рис. 5). Знайти надійність системи, якщо ймовірності надійної роботи приладів відповідно: $p_1 = 0{,}82$; $p_2 = p_3 = 0{,}71$.

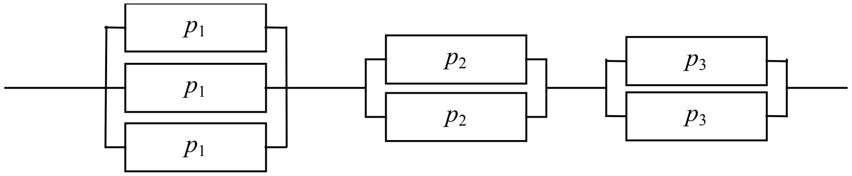


Рис. 5

4.77. Для збільшення надійності системи деякі з її приладів дублюються (рис. 6). Знайти надійність системи, якщо ймовірності надійної роботи приладів відповідно: $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}9$.

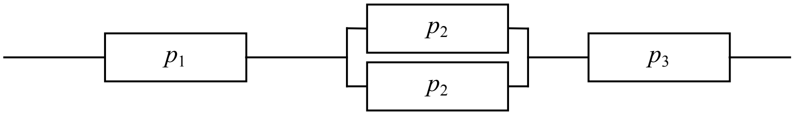


Рис. 6

4.78. Агрегат складається з n блоків. Імовірність безвідмовної роботи протягом часу T першого його блоку дорівнює p_1, другого — p_2 і т. д. Блоки відмовляють незалежно один від одного. Після відмови будь-якого блоку агрегат не працює. Знайти ймовірність того, що агрегат відмовить у роботі за час T.

4.79. Німецька фірма, що виробляє автомобілі, цікавиться українським ринком. Для вивчення смаків потенційних покупців проводиться опитування, в якому з'ясовуються найбільш бажані характеристики автомобіля. Припустимо, що результати опитування показали: 45 % потенційних покупців в основному оцінюють автомобіль за його технічним характеристиками, 40 % — за його дизайном, 25 % вважають однаково важливим і те, і те. Спираючись на цю інформацію, дайте відповідь, чи є два види переваг потенційних покупців незалежними один від одного? Поясніть.

4.80. Прилад складається з n блоків; відмова в роботі одного блока означає відмову роботи приладу в цілому. Блоки виходять з ладу незалежно один від одного. Надійність (імовірність безвідмовної роботи) кожного блоку дорівнює p. Знайти надійність P приладу в цілому. Якою має бути надійність p_0 кожного блоку для забезпечення заданої надійності P_0 системи?

4.81. Імовірність для компанії, що будує готелі, виграти тендер у місті A дорівнює 0,4, імовірність виграти його в місті B дорівнює 0,3. Чому дорівнює ймовірність того, що компанія одержить контракт хоча б в одному місті?

4.82. Завідувач рекламного відділу журналу оцінює ймовірність того, що передплатник журналу прочитає деяку рекламу, як 0,4, а ймовірність того, що він купить рекламований товар, як 0,01. За цими прогнозами знайти ймовірність того, що передплатник за рекламним повідомленням придбає товар.

4.83. 45 % населення деякої області охоплене комерційним телебаченням, що рекламує товари. 34 % населення охоплене радіорекламою. Також відомо, що 10 % населення слухає і радіо-, і телерекламу. Якщо випадково вибрати особу, що живе в цій області, то чому дорівнюватиме ймовірність того, що вона знайома принаймні з одним видом реклами?

4.84. Страхова компанія встановила, що в середньому один вексель із 1000 не підлягає оплаті, при цьому цей вексель обов’язково прострочений. Установлено також, що один вексель зі 100, що підлягають оплаті, прострочений. Компанія одержує прострочений вексель. Яка ймовірність того, що він підлягає оплаті?

4.85. Одна з найскладніших проблем у сфері прямого продажу — відмова від спілкування або недовіра до пропозиції партнерства. Припустимо, що дослідник ринку з імовірністю в 0,54 вірить, що респондент погодиться на спілкування. Він також вважає, що ймовірність того, що ця сама людина погодиться на партнерство, дорівнює 0,8. Маючи такі дані, оцініть відсоток укладених угод.

4.86. У компанії працюють 200 службовців. Розподіл їх за віком, освітою та строком роботи в компанії наведено в таблиці:

Вік	Менше ніж 5 років у компанії		Більше ніж 5 років у компанії	
	вища освіта	середня освіта	вища освіта	середня освіта
30	40	5	50	5
> 30	50	25	15	10

Навмання вибирають одного службовця. Яка ймовірність того, що: а) вибрана особа має вищу освіту; б) якщо вибрана особа працює в компанії більше ніж 5 років, то її вік більший за 30 років?

Нехай *A* та *B* такі події: *A* — навмання вибрана особа має вищу освіту, *B* — вибрана навмання особа старша за 30 років. Чи будуть події *A* та *B* незалежними?

4.87. Фірма, що ремонтує побутову електротехніку, проаналізувавши причини поломок, дійшла висновку про такий процентний розподіл кількості поломок за їх типами:

Момент поломки	Тип поломки, %		
	електрична	механічна	зовнішня
Протягом гарантійного строку	10	25	17
Після гарантійного строку	15	30	3

Нехай *A* та *B* такі події: *A* — навмання вибраний прилад має електричний тип поломки, *B* — навмання вибраний прилад вийшов з ладу після гарантійного строку. Чи будуть події *A* та *B* незалежними?

4.88. Ймовірність того, що потрібна для складання деталь є в першому, другому, третьому або четвертому ящиках, відповідно дорівнює: p_1, p_2, p_3, p_4. Знайти ймовірність того, що деталь міститься у двох ящиках.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0,2	0,3	0,3	0,8	0,2	0,7	0,5	0,9	0,6	0,7
p_2	0,4	0,5	0,4	0,1	0,5	0,5	0,4	0,1	0,2	0,2
p_3	0,7	0,6	0,5	0,4	0,6	0,6	0,7	0,2	0,7	0,4
p_4	0,5	0,2	0,8	0,5	0,8	0,8	0,9	0,5	0,4	0,6

4.89. Три гравці грають в дартс. Імовірність влучення в «яблучко» для першого гравця — p_1, для другого гравця — p_2, для третього гравця — p_3. Знайти ймовірність того, що в «яблучко» влучить: 1) принаймні один з гравців; 2) три гравці; 3) тільки один з гравців; 4) тільки два гравці.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0,8	0,6	0,7	0,5	0,6	0,5	0,5	0,8	0,9	0,6
p_2	0,7	0,8	0,9	0,9	0,75	0,6	0,7	0,6	0,4	0,5
p_3	0,9	0,7	0,6	0,7	0,9	0,9	0,8	0,5	0,7	0,7

4.90. Секрет збільшення частки певного товару на ринку полягає в залученні нових споживачів та їх збереженні. Збереження нових споживачів товару називається «brand loyalty» (прихильність споживача до даної марки або різновиду товару), і це одна з найбільш відповідальних галузей ринкових досліджень. Виробники нового сорту парфумів знають, що ймовірність того, що споживачі одразу сприймуть новий продукт, і створення «brand loyalty» вимагатиме принаймні шести місяців, дорівнює 0,02. Виробник також знає, що ймовірність того, що випадково підібраний споживач сприйме новий сорт, дорівнює 0,15. Припустимо, що споживач тільки що змінив марку товару. Чому дорівнює ймовірність того, що він збереже свої переваги протягом шести місяців?

4.91. Інвестиційний аналітик збирає дані про акції і зазначає, чи виплачувалися за ними дивіденди і чи збільшувалися акції в ціні за період часу, що його цікавить. Зібрані дані подані в таблиці:

	Ціна збільшилася	Ціна не збільшилася	Разом
Дивіденди сплачувались	24	58	82
Дивіденди не сплачувались	86	32	118
Разом	110	90	200

1. Якщо акція вибрана аналітиком випадково з набору в 200 акцій, то чому дорівнює ймовірність того, що вона одна з тих акцій, які збільшились у ціні?

2. Якщо акція вибрана випадково, то чому дорівнює ймовірність того, що за нею виплачені дивіденди?

3. Якщо акція вибрана випадково, то чому дорівнює ймовірність того, що вона виросла в ціні й за нею виплачені дивіденди?

4. Якщо акція вибрана випадково, то чому дорівнює ймовірність того, що за нею не виплачені дивіденди і вона не виросла в ціні?

5. Знаючи, що акція виросла в ціні, оцініть імовірність того, що за нею також виплачені дивіденди.

6. Якщо за акції не виплачені дивіденди, то оцініть імовірність того, що вона виросла в ціні.

7. Чому дорівнює ймовірність того, що випадково вибрана акція протягом періоду, який цікавить аналітика, погіршила всі показники?

8. Оцініть імовірність того, що випадково вибрана акція або виросла в ціні, або за нею були виплачені дивіденди, або і те, і те разом.

4.92. При страхуванні життя для розрахунків використовуються таблиці, які дають середній розподіл числа осіб, які дожили до певного віку:

Вік	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Число	1000	961	897	823	728	538	380	140	13

(Із 1000 дітей, які досягли 10-річного віку, до 90 років доживають 13.) Нехай на даний момент у деякій сім'ї чоловікові 40 років, а жінці 30. Знайти ймовірність того, що: а) обоє будуть живі через 40 років; б) хоча б один з них буде живий через 50 років.

4.93. Два мисливці стріляють у вовка, при цьому кожен робить по одному пострілу. Ймовірність влучення для першого — 0,7, а для другого — 0,8. Яка ймовірність влучення у вовка принаймні одним з мисливців? Як зміниться результат, якщо мисливці зроблять по 2 постріли?

4.94. Ймовірність влучення в рухому мішень дорівнює 0,05. Скільки пострілів необхідно зробити, щоб з імовірністю не меншою ніж 0,75 мати принаймні одне влучення?

4.95. Мисливець стріляє тричі по цілі, яка віддаляється. Ймовірність влучення в ціль при першому пострілі дорівнює 0,8, при другому — 0,7, при третьому — 0,6. Знайти ймовірність того, що мисливець: 1) усі три рази схибить; 2) влучить принаймні один раз; 3) влучить 2 рази.

4.96. Брак у продукції заводу через дефект *A* становить 6 %. У продукції, вільній від дефекту *A*, дефект *B* зустрічається у 2 % випадків. Серед бракованої продукції 40 % має дефект *B*. Знайти ймовірність зустріти дефект *B* у всій продукції, яка ще не перевірялася.

4.97. Брак у продукції заводу через дефект *A* становить 5 %, при цьому серед забракованої за ознакою *A* продукції в 10 % випадків зустрічається дефект *B*, а в продукції, вільній від дефекту *A*, дефект *B* зустрічається в 1 % випадків. Знайти ймовірність того, що дефекту *B* немає в усій виготовленій продукції.

§ 5. Формула повної ймовірності. Формули Байєса

1. Формула повної ймовірності

Нехай події $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що називаються гіпотезами, несумісні і утворюють повну групу.

Теорема. Якщо подія *A* може відбутися лише за умови настання однієї із подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, які утворюють повну групу несумісних подій ($P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$), то справедлива формула

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A), \qquad (1.5.1)$$

де $P(H_i)$ — імовірності гіпотез H_i, $P_{H_i}(A)$ — умовні ймовірності настання події *A*, тобто ймовірності події *A* за умови, що подія H_i відбулася.

2. Формули Байєса

Подія *A* може відбутися одночасно з деякою із подій H_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), що утворюють повну групу. Нехай відомі ймовірності подій H_i ($P(H_i)$) та умовні ймовірності $P_{H_i}(A)$. Нехай також відомо, що подія *A* відбулася. Оскільки подія *A* відбувається тільки разом з деякою з подій H_i, то ймовірності гіпотез H_i повинні змінитися. Для їх знаходження (переоцінки) застосовують ***формули Байєса***:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)}; \; i = \overline{1,n}. \qquad (1.5.2)$$

Задачі

5.1. Деталі для обробки надходять з 2 заготівельних цехів: із першого цеху — 70 %, з другого — 30 %, причому продукція 1-го цеху має 1 % браку, а продукція 2-го цеху — 2 % браку. Яка ймовірність того, що випадково взята деталь буде без дефектів?

5.2. Маємо дві урни з білими та чорними кульками. Ймовірність витягнути навмання з першої урни білу кульку 0,7, а з другої — 0,5. Навмання вибирають одну з урн і дістають навмання одну кульку. Знайти ймовірність того, що: а) кулька виявиться білою; б) якщо взяли білу кульку, то її дістали саме з 1-ї урни.

5.3. В урну, що містить 3 кульки, покладена біла кулька, після чого з неї навмання беруть одну кульку. Знайдіть імовірність того, що кулька виявиться білою, якщо всі варіанти розподілу трьох кульок рівноможливі.

5.4. З урни, яка містить 3 білі та 2 чорні кульки, перекладено дві кульки до урни, яка містить 4 білі та 4 чорні кульки. Яка ймовірність того, що з другої урни після такого перекладання буде взято білу кульку?

5.5. З урни, яка містить 5 білих та 2 чорні кульки, перекладено одну кульку в урну, яка містить 4 білих та 6 чорних кульок, з якої потім навмання перекладено дві кульки до урни, яка містить 4 білі та 4 чорні кульки. Яка ймовірність того, з останньої урни після такого перекладання буде взято білу кульку?

5.6. Серед студентів економічного університету за результатами сесії 40 % першокурсників мають тільки добрі і відмінні оцінки, серед другокурсників таких студентів 45 %, на третьому і четвертому курсах їх 50 % і 55 % відповідно. За даними деканатів відомо, що на першому курсі 20 % студентів здали сесію тільки на відмінні оцінки, на другому — 30 %, на третьому — 35 %, на четвертому — 40 % відмінників. Навмання викликаний студент виявився відмінником. Чому дорівнює ймовірність того, що він (або вона) третьокурсник?

5.7. У двох корзинах баскетбольні та волейбольні м’ячі, причому в першій — 8 баскетбольних і 2 волейбольних, у другій — 6 баскетбольних і 3 волейбольних. З навмання вибраної корзини взяли м’яч. Яка ймовірність того, що: а) взяли волейбольний м’яч; б) м’яч, який виявився баскетбольним, взяли з першої корзини?

5.8. З числа авіаліній деякого аеропорту 60 % — місцеві, 30 % — по СНД і 10 % — у далеке зарубіжжя. Серед пасажирів місцевих авіаліній 50 % подорожують у справах, пов’язаних з бізнесом, на лініях СНД таких пасажирів 60 %, на міжнародних — 90 %. Із прибулих в аеропорт пасажирів випадково вибирається один. Чому дорівнює ймовірність того, що він: а) бізнесмен; б) прибув з країн СНД у справах бізнесу; в) прилетів місцевим рейсом у справах бізнесу; г) прибулий міжнародним рейсом бізнесмен.

5.9. Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення першого — 0,8, другого — 0,4. Відомо, що є одне влучення. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив перший стрілець.

5.10. Перший стрілець влучає в мішень з імовірністю 0,6, другий — з імовірністю 0,5, а третій — з імовірністю 0,4. Стрільці виконали залп по мішені. Відомо, що є два влучення. Що більш імовірно: третій стрілець влучив у мішень чи ні?

5.11. Імовірність того, що новий товар матиме попит на ринку, якщо конкурент не випустить у продаж аналогічний продукт, дорівнює 0,70. Імовірність того, що товар матиме попит за наявності на ринку конкурентного товару, дорівнює 0,45. Імовірність того, що фірма-конкурент випустить аналогічний товар на ринок протягом періоду, що нас цікавить, дорівнює 0,38. Чому дорівнює ймовірність того, що новий товар матиме успіх?

5.12. Прилади одного найменування виготовляються двома заводами; перший завод постачає $\frac{2}{3}$ усіх виробів, другий — $\frac{1}{3}$. Надійність (імовірність безвідмовної роботи) приладу, виготовленого першим заводом, дорівнює 0,98; другого — 0,88. Знайти надійність навмання взятого приладу.

5.13. Серед n екзаменаційних білетів m «щасливих». Студенти підходять за білетом один за одним. У кого більша ймовірність взяти «щасливий» білет: у того, хто підійшов першим, чи в того, хто підійшов другим?

5.14. На виробництві хімічних добрив установлена система звукової аварійної сигналізації. Коли виникає аварійна ситуація, звуковий сигнал спрацьовує з імовірністю 0,95. Звуковий сигнал може спрацювати випадково й без аварійної ситуації з імовірністю 0,01. Реальна ймовірність аварійної ситуації дорівнює 0,005. Припустимо, що звуковий сигнал спрацював. Чому дорівнює ймовірність реальної аварійної ситуації?

5.15. У першому ящику 10 стандартних і 2 браковані деталі, у другому відповідно — 12 і 3, у третьому — 14 і 1. Для контролю з навмання вибраного ящика взяли деталь. Яка ймовірність того, що: а) взяли стандартну деталь; б) деталь, яка виявилась бракованою, взяли з третього ящика?

5.16. Директор підприємства має 2 списки з прізвищами претендентів на роботу. У першому списку — прізвища 5 жінок і 2 чоловіків. У другому списку — прізвища 2 жінок і 6 чоловіків. Прізвище одного з претендентів випадково переноситься з першого списку до другого. Потім прізвище одного з претендентів випадково вибирається з другого списку. Якщо припустити, що це прізвище належить чоловікові, чому дорівнює ймовірність того, що з першого списку було перенесене прізвище жінки?

5.17. Є дві партії виробів: перша партія складається з 12 виробів, серед яких 2 бракованих; друга — з 16 виробів, серед яких 3 бракованих. З першої партії навмання беруть 5 виробів, а з другої 4 вироби. Ці 9 виробів перемішують. З нової партії беруть навмання один виріб. Знайти ймовірність того, що: а) виріб є дефектним; б) виріб, який виявився якісним, був з першої партії.

5.18. Є дві партії виробів: перша партія складається з N виробів, серед яких n бракованих; друга — з M виробів, серед яких m бракованих. З першої партії навмання беруть K виробів, а з другої L виробів. Ці $K + L$ виробів перемішують. З нової партії беруть навмання один виріб. Знайти ймовірність того, що: а) виріб є дефектним; б) виріб, який виявився якісним, був з першої партії.

5.19. Є три партії виробів: перша партія складається з 20 виробів, серед яких 4 бракованих; друга — з 25 виробів, серед яких 2 бракованих; третя — із 40, серед яких 5 бракованих. З першої партії навмання беруть 7 виробів, з другої — 8 виробів, а з третьої — 15 виробів. Ці 30 виробів перемішують. З нової партії беруть навмання один виріб. Знайти ймовірність того, що: а) виріб є якісним; б) виріб, який виявився бракованим, був із третьої партії.

5.20. У корпорації обговорюється маркетинг нового продукту, що випускається на ринок. Виконавчий директор корпорації бажав би, щоб новий товар перевершував за своїми характеристиками відповідні товари фірм-конкурентів. Спираючись на попередні оцінки експертів, він оцінює ймовірність більш високої конкурентоспроможності нового товару порівняно з аналогічними як 0,5, однаковим — як 0,4, а ймовірність того, що новий товар буде гіршим за якістю, — як 0,1. Опитування ринку показало, що новий товар більш високої якості і конкурентоспроможний. З попереднього досвіду проведення таких опитувань випливає, що якщо товар справді конкурентоспроможний, то передбачення такого самого висновку має ймовірність, що дорівнює 0,7. Якщо товар такий самий, як інші аналогічні, то ймовірність того, що опитування зазначить його перевагу, дорівнює 0,4. І якщо товар нижчої якості, то ймовірність того, що опитування засвідчить, що товар більш високоякісний, дорівнює 0,3. З урахуванням результату опитування оцініть імовірність того, що товар справді конкурентноспроможний.

5.21. До крамниці надходить товарна продукція лише трьох заводів. Обсяги продукції першого, другого та третього заводів відповідно відносяться як 2:5:3. Частка браку на першому заводі 2 %, на другому — 5 %, на третьому — 4 %. Яка ймовірність того, що: а) куплений у крамниці товар виявився бракованим; б) куплений товар, який виявився якісним, виготовили на другому заводі? Які рекомендації можна дати покупцеві цієї крамниці?

5.22. Тест на можливість рідкісного вірусного захворювання дає такі результати: а) якщо перевіряється хворий, то тест дасть позитивний результат з імовірністю 0,98; б) якщо перевіряється не хворий, то тест може дати позитивний результат з ймовірністю 0,14.

Оскільки захворювання рідкісне, то до нього схильне тільки 0,05 % населення. Припустимо, що деякій випадково вибраній людині зроблений аналіз і одержано позитивний результат. Чому дорівнює ймовірність того, що людина справді хвора?

5.23. Імовірність того, що на контроль надходить дефектний виріб, дорівнює 0,11. Контролер бракує дефектний виріб з імовірністю 0,9, помилково бракує стандартний виріб з імовірністю 0,1. Знайти ймовірність того, що: а) виріб буде забраковано; б) виріб, який забракували, виявився якісним.

5.24. Перед тим як почати просування нового товару по всій країні, компанії-виробники часто перевіряють його на вибірці потенційних покупців. Методи проведення вибіркових процедур уже перевірені і мають певний ступінь надійності. Для деякого товару відомо, що перевірка вкаже на можливий його успіх на ринку з імовірністю 0,75, якщо товар справді вдалий; перевірка може також показати можливість успіху товару, в разі якщо він невдалий, з імовірністю 0,15. З минулого досвіду відомо, що новий товар є вдалим з імовірністю 0,6. Якщо новий товар пройшов вибіркову перевірку і її результати показали можливість успіху, то чому дорівнює ймовірність того, що це справді так?

5.25. Кількість вантажівок на трасі — 20 %, а легкових автомобілів — 80 %. Імовірність того, що вантажівка зайде на АЗС, дорівнює 0,4, а легкова — 0,5. До АЗС заїхала машина. Яка ймовірність того, що вона легкова?

5.26. Нафтовидобувна компанія проводить дослідження для визначення ймовірності наявності нафти на місці передбачуваного буріння свердловини. Виходячи з результатів попередніх досліджень нафторозвідники вважають, що ймовірність наявності промислових запасів нафти на ділянці, що перевіряється, дорівнює 0,6. На завершальному етапі розвідки проводиться сейсмічний тест, який має певну міру надійності: якщо на ділянці, яка перевіряється, є нафта, то тест вкаже на неї в 85 % випадків; якщо нафти немає, то в 10 % випадків тест може помилково вказати на її наявність. Сейсмічний тест вказав на наявність нафти. Чому дорівнює ймовірність того, що промислові запаси нафти на цій ділянці існують реально?

5.27. На рис. 7 зображено схему доріг. Туристи вийшли з пункту *O* до пункту *A*, вибираючи навмання одну дорогу з усіх можливих:

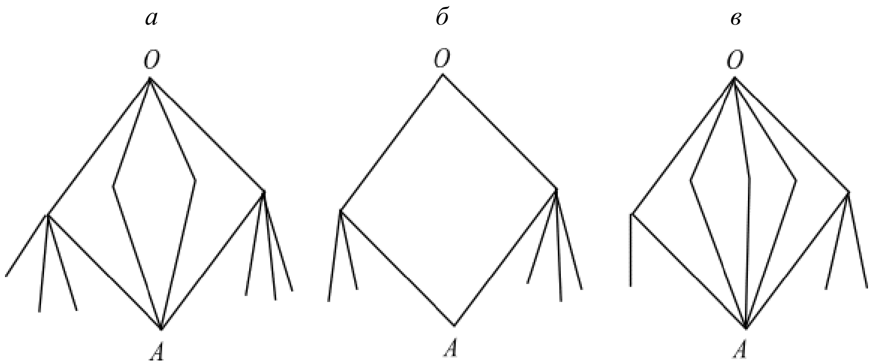


Рис. 7

Яка ймовірність того, що вони потраплять у пункт *A*?

5.28. На полиці стоять 18 подарункових наборів «Новорічний» та 12 подарункових наборів «Святковий». У наборі «Новорічний» 60 цукерок, 20 з яких шоколадні, у наборі «Святковий» 50 цукерок, 20 з яких шоколадні. З довільно взятого набору навмання взяли цукерку, яка виявилася шоколадною. Яка ймовірність того, що її взяли з набору «Святковий»?

5.29. Дослідженнями психологів установлено, що чоловіки і жінки по-різному реагують на деякі життєві ситуації. Результати досліджень показали, що 70 % жінок позитивно реагують на ці ситуації, тим часом як 40 % чоловіків реагують на них негативно. 15 жінок і 5 чоловіків заповнили анкету, в якій відобразили своє ставлення до пропонованих ситуацій. Випадково витягнута анкета містить негативну реакцію. Чому дорівнює ймовірність того, що її заповнював чоловік?

5.30. Пасажир може придбати квиток в одній з трьох кас. Імовірності звернення в кожну з кас залежать від їх місцезнаходження і дорівнюють відповідно p_1, p_2, p_3. Імовірності того, що до моменту приходу пасажира квитки в касах будуть продані, дорівнюють відповідно P_1, P_2, P_3. Пасажир придбав квиток. Знайти ймовірність того, що це відбулось у першій касі.

5.31. Судноплавна компанія, що організовує середземноморські круїзи, протягом літнього сезону проводить кілька круїзів. Оскільки в цьому виді бізнесу дуже висока конкуренція, то важливо, щоб усі каюти зафрахтованого під круїзи корабля були цілком зайняті туристами; тоді компанія одержить прибуток. Експерт з туризму, найнятий компанією, передбачає, що ймовірність того, що корабель буде заповнений протягом сезону, дорівнює 0,90, якщо долар не подорожчає стосовно до гривні, і з імовірністю 0,75, якщо долар подорожчає. За оцінками економістів, імовірність того, що протягом сезону долар подорожчає стосовно до гривні, дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність того, що квитки на всі круїзи будуть продані?

5.32. На радіолокаційний пристрій з імовірністю p надходить шум, що містить корисний сигнал, а з імовірністю $1-p$ — тільки шум. Якщо з шумом надійде корисний сигнал, то пристрій зареєструє наявність сигналу з імовірністю p_1, якщо надходить тільки шум — з імовірністю p_2. Відомо, що пристрій зареєстрував якийсь шум. Знайти ймовірність того, що в його складі є корисний сигнал.

5.33. У торговельній мережі 50 % продукції рекламується. Ймовірність продажу одиниці рекламованої продукції дорівнює 0,8, для нерекламованої одиниці продукції ймовірність реалізації — 0,6. Скільки відсотків продукції може бути реалізовано?

5.34. Експортери збираються укласти контракт на постачання зерна в одну з європейських країн. Якщо їх основний конкурент не стане одночасно претендувати на укладення контракту з цією країною, то ймовірність одержання контракту оцінюється в 0,45; в іншому разі — в 0,25. За оцінками експертів компанії ймовірність того, що конкурент висуне свої пропозиції щодо укладення контракту, дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність укладення контракту?

5.35. Економіст-аналітик умовно поділяє економічну ситуацію в країні на «хорошу», «посередню» і «погану» і оцінює їх імовірності для даного моменту часу як 0,15, 0,7 і 0,15 відповідно. Деякий індекс економічного стану зростає з імовірністю 0,6, коли ситуація «добра»; з імовірністю 0,3, коли ситуація «посередня», і з імовірністю 0,1, коли ситуація «погана». Нехай у даний момент індекс економічного стану змінився. Чому дорівнює ймовірність того, що економіка країни на стадії піднесення?

5.36. На фінансовий ринок надходить у середньому 60 % «хороших» та 40 % «нехороших» цінних паперів. Інвестиційні аналітики розробили систему оцінки паперів, яка визнає 95 % «хороших» паперів такими ж, але й 15 % з «нехороших» визнає «хорошими». Обчислити ймовірність придбання на цьому ринку «хорошого» цінного папера. Чи ефективна система оцінювання цінних паперів на цьому ринку?

5.37. У разі злиття акціонерного капіталу двох фірм аналітики фірми, яка одержує контрольний пакет акцій, вважають, що операція принесе успіх з імовірністю, яка дорівнює 0,65, якщо голова ради директорів компанії, що поглинається, вийде у відставку, а якщо він відмовиться йти у відставку, то ймовірність успіху дорівнює 0,3. Передбачається, що ймовірність виходу у відставку голови становить 0,7. Чому дорівнює ймовірність успіху угоди?

5.38. На підприємстві виготовляють автозапчастини: перша лінія виробляє k %, друга — m %, а третя — f % усіх запчастин. Брак в їхній продукції становить відповідно a %, b %, c %. Знайти ймовірність того, що випадково вибрана автозапчастина буде бракованою.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	30	40	30	20	60	40	25	50	45	30
m	50	10	30	30	10	35	45	35	20	35
f	20	50	40	50	30	25	30	15	35	35
a	1	2	2	1	4	2	1	4	2	1
b	2	1	1	2	1	3	2	2	1	1
c	3	4	3	4	3	1	1	1	3	3

5.39. Для складання заліку студент повинен відповісти на одне питання з трьох розділів теорії ймовірностей і математичної статистики, причому є a питань з першого розділу, b питань з другого розділу і c питань з третього розділу. Студент вивчив k питань першого розділу, m питань другого розділу і l питань третього розділу. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	32	42	34	25	36	24	25	35	45	30
b	25	20	30	32	21	35	25	23	22	33
c	20	15	20	22	30	25	32	25	15	25
k	31	32	32	21	24	20	24	24	32	28
m	22	15	21	28	21	31	22	22	21	32
l	13	14	13	14	23	11	31	21	13	13

5.40. У міську спеціалізовану лікарню поступає у середньому a % хворих з різними формами інфекції, b % — з захворюваннями серцево-судинної системи та c % — з захворюваннями нервової системи. Ймовірність повного одужання хворого на інфекційні захворювання дорівнює p_1, на захворювання серцево-судинної системи — p_2 та на захворювання нервової системи — p_3 Хворий, який поступив до лікарні, одужав. Знайти ймовірність того, що цей хворий мав: а) інфекційне захворювання; б) захворювання серцево-судинної системи; в) захворювання нервової системи.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0,90	0,95	0,85	0,96	0,88	0,92	0,89	0,93	0,94	0,91
p_2	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6	0,4	0,5	0,6	0,6
p_3	0,2	0,5	0,4	0,5	0,3	0,2	0,3	0,1	0,3	0,3
a	80	82	84	86	78	76	74	84	72	81
b	15	11	10	12	15	13	12	12	19	12
c	5	7	6	2	7	11	14	4	9	7

5.41. У середньому з кожних n клієнтів відділення банку m обслуговуються першим оператором, а інші — другим. Імовірність того, що клієнт буде повністю обслугований першим оператором — p, а другим — q. Будь-який клієнт пройшов обслуговування. Знайти ймовірність повного обслуговування клієнта: а) першим оператором; б) другим оператором.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	90	95	85	96	88	92	89	93	94	91
n	50	51	55	59	60	61	45	57	63	65
p	0,90	0,89	0,91	0,87	0,92	0,86	0,93	0,85	0,94	0,84
q	0,80	0,82	0,84	0,86	0,78	0,76	0,74	0,84	0,72	0,81

§ 6. Повторні незалежні випробування

1. Формула Бернуллі. Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія A може відбутися з тією самою ймовірністю $P(A) = p$. Якщо ймовірність появи події A у кожному випробуванні не залежить від того, відбулася ця подія в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються ***незалежними випробуваннями за схемою Бернуллі.***

Ймовірність того, що подія A відбудеться m разів у n незалежних випробуваннях, позначається $P_n(m)$ і обчислюється за ***формулою Бернуллі***

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{1.6.1}$$

де $q = 1 - p$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$.

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія A з'явиться принаймні один раз, обчислюється так:

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n. \tag{1.6.2}$$

2. Найімовірніша частота. Частота m_0 настання події A в n незалежних випробуваннях називається ***найімовірнішою частотою*** появи цієї події, якщо їй відповідає найбільша ймовірність $P_n(m_0)$. Найімовірніша частота m_0 появи події визначається з нерівності

$$np - q \le m_0 \le np + p. \tag{1.6.3}$$

3. Локальна теорема Муавра — Лапласа. Якщо кількість випробувань досить велика, то $P_n(m)$ обчислюють за наближеною формулою Муавра — Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ де } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \tag{1.6.4}$$

а $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — функція Гаусса.

4. Інтегральна теорема Муавра — Лапласа. Імовірність того, що подія A відбудеться від m_1 до m_2 разів при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з імовірністю p, обчислюється за формулою

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (1.6.5)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функція Лапласа.

5. Формула Пуассона. У разі малоймовірних подій (якщо $0 < p < 0{,}1$, а n велике), використовують ***формулу Пуассона***

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \ a = np. \qquad (1.6.6)$$

6. Ймовірність відхилення відносної частоти від імовірності появи події в одному випробуванні. Ймовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищує ε, визначається за формулою

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right|\right) \le \varepsilon \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (1.6.7)$$

Задачі

6.1. Гральний кубик кидають 20 разів. Яка ймовірність того, що 5 очок випаде чотири рази? Більше від чотирьох разів?

6.2. Гральний кубик кинули 10 разів. Знайти ймовірність того, що кількість очок, кратна трьом випаде: а) три рази; б) не менше від трьох разів; в) не більше від трьох разів.

6.3. Вироби містять 3 % браку. Знайти ймовірність того, що серед десяти виробів: а) не буде жодного бракованого; б) будуть два бракованих.

6.4. Ймовірність появи деякої події в одному випробуванні 0,8. Яка ймовірність того, що при 8 випробуваннях подія відбудеться: а) 5 разів; б) 0 разів; в) 8 разів; г) не менше від 4 разів; ґ) більше від 2 разів; д) не менше від 2, але менше від 5 разів; е) принаймні один раз.

6.5. Ймовірність настання події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що у 8 випробуваннях ця подія відбудеться принаймні двічі.

6.6. Здійснено п’ять незалежних випробувань, кожне з яких полягає в одночасному підкиданні двох монет. Знайти ймовірність того, що в трьох випробуваннях випало по два герби.

6.7. Ймовірність виграшу по одному лотерейному білету дорівнює 0,1. Яка ймовірність, маючи 5 білетів, виграти: а) за двома білетами; б) за трьома білетами? Яка ймовірність не виграти за двома білетами з 5?

6.8. Очікується прибуття 3 суден з бананами. Досвід показує, що в 1 % випадків вантаж бананів псується під час доставки. Знайти ймовірність того, що прийдуть із зіпсованим вантажем: а) одне судно; б) два; в) усі три; г) жодного.

6.9. Ймовірність того, що електрична лампа залишиться справною після 1000 год роботи, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з трьох ламп залишиться справною після 1000 год роботи.

6.10. Подія *B* настає тоді, коли подія *A* настане не менше ніж три рази. Знайти ймовірність настання події *B*, якщо ймовірність настання події *A* при одному випробуванні дорівнює 0,3 і здійснюється 7 незалежних випробувань.

6.11. Що більш імовірно: виграти у рівносильного партнера: а) три партії з чотирьох чи п’ять з восьми; б) не менше від трьох партій з чотирьох чи не менше від п’яти з восьми?

6.12. Ймовірність появи деякої події в одному випробуванні 0,7. Яка ймовірність того, що при 120 випробуваннях подія відбудеться: а) 10 разів; б) 0 разів; в) 84 рази; г) не менше ніж 100 разів; ґ) не більше ніж 20 разів; д) від 80 до 100 разів.

6.13. Відомо, що з числа телеглядачів, які дивляться певну програму, 70 % дивляться і рекламний блок. Групи, що складаються з трьох навмання вибраних телеглядачів, опитують щодо змісту рекламного блоку. Визначте ймовірності кількості осіб і найімовірнішу кількість осіб у групі, які дивляться рекламний блок.

6.14. На складі є товари двох видів, причому товарів другого виду вдвічі більше, ніж першого. Знайти ймовірність того, що: а) серед восьми навмання взятих товарів три виявляться першого виду; б) серед п’яти взятих навмання товарів принаймні один виявиться другого виду.

6.15. У біноміальному експерименті з $n = 300$ і $p = 0{,}5$ знайти ймовірність того, що ймовірність частки успіхів більша ніж 60 %.

6.16. Знайти ймовірність того, що при підкиданні грального кубика 7 разів число 6 випаде хоча б при одному підкиданні.

6.17. Ймовірність влучення стрільця в «десятку» дорівнює 0,6. Чому дорівнює ймовірність того, що при 10 пострілах стрілець влучить у «десятку»: а) 4 рази; б) 0 разів; в) 10 разів; г) не менше ніж 5 разів; ґ) не більше ніж 8 разів; д) від 6 до 8 разів; е) принаймні один раз?

6.18. Ймовірність того, що подія відбудеться принаймні один раз у двох незалежних випробуваннях, дорівнює 0,51. Знайти ймовірність появи події в одному випробуванні.

6.19. Ймовірність виграшу на кожний білет лотереї дорівнює 0,02. Скільки лотерейних білетів потрібно придбати, щоб з імовірністю не меншою ніж 0,9 виграти хоч по одному з них?

6.20. Урна містить 9 білих і одну чорну кулю. Знайти ймовірність того, що при 10 вийманнях з поверненням буде витягнута принаймні одна чорна куля. Скільки разів треба виймати по одній кулі з поверненням, щоб імовірність появи хоча б одної чорної кулі була не менша ніж 0,9?

6.21. Ймовірність влучення в «десятку» при одному пострілі дорівнює $p = 0{,}7$. Скільки пострілів треба зробити, щоб з імовірністю не меншою від 0,95 влучити в «десятку» принаймні один раз?

6.22. З урни, яка містить 20 білих і 2 чорні кулі, n разів виймають по одній кулі з поверненням. Знайти найменше значення n, для якого ймовірність витягнути хоча б одну чорну кулю буде більша ніж 0,5.

6.23. Менеджер ресторану з досвіду знає, що 75 % людей, які зробили попереднє замовлення на вечір, прийдуть у ресторан повечеряти. В один з вечорів менеджер вирішив прийняти 20 замовлень, хоч у ресторані було лише 15 вільних столиків. Чому дорівнює ймовірність того, що понад 15 відвідувачів прийдуть на замовлені місця?

6.24. Ймовірність неточного складання приладу дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 500 приладів виявляться точно складеними від 400 до 430.

6.25. Завод виготовляє вироби, кожний з яких з імовірністю r (незалежно від інших) може бути з дефектом. Під час огляду дефект, якщо він є, виявляється з імовірністю p. Для контролю продукції заводу вибирають n виробів. Знайти ймовірності таких подій: A — у жодному з виробів дефект не буде виявлено; B — серед n рівно у двох буде виявлено дефект; C — серед n виробів менше ніж у двох буде виявлено дефект.

6.26. Автопідприємство обслуговує 12 крамниць. Кожна з крамниць щодня подає замовлення на обслуговування з імовірністю 0,8. Знайдіть найімовірнішу кількість замовлень, які щодня можуть надходити на автопідприємство, та ймовірність надходження такої кількості замовлень.

6.27. На автобазі є 12 автомобілів. Ймовірність виходу на лінію кожного з них дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що наступного дня автобаза спрацює нормально, якщо для цього потрібно мати на лінії не менше ніж 8 автомобілів.

6.28. Знайти ймовірність того, що в родині, в якій є 6 дітей, не менше від двох дівчаток (імовірність народження хлопчика — 0,515).

6.29. Ймовірність появи події A в кожному з 40 незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти найімовірнішу частоту появи події A у 40 незалежних повторних випробуваннях.

6.30. Цінний папір може здорожчати на 1 % протягом кожного наступного місяця з імовірністю 0,6 і здешевіти на 1 % з імовірністю 0,4. Протягом скількох місяців наступного року найімовірніше подорожчання цінного папера? Знайти найімовірнішу ціну в кінці року, якщо на даний момент цінний папір має ціну 100 грн.

6.31. Ймовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,95. Скільки деталей має бути в партії, щоб найімовірніша кількість стандартних деталей у ній дорівнювала 400?

6.32. Ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань дорівнює 0,8. Скільки таких випробувань потрібно виконати, щоб найімовірніша частота появи події A в цих випробуваннях дорівнювала 30?

6.33. Через затори на міських дорогах пасажири запізнюються на потяг у середньому 2 особи на 100 потенційних пасажирів. Знайдіть найімовірнішу кількість пасажирів із 972, які можуть запізнитися на потяг.

6.34. Ймовірність влучення стрільця в ціль в кожному з 10 пострілів дорівнює 0,8. Знайти найімовірнішу частоту влучень при 10 пострілах.

6.35. Скільки потрібно взяти деталей, щоб найімовірніша кількість придатних дорівнювала 50, якщо ймовірність браку при виготовленні деталей становить 0,02?

6.36. Ймовірність появи бракованої деталі серед n деталей дорівнює 0,1. Скільки потрібно взяти деталей, щоб найімовірніша частота появи бракованої деталі дорівнювала 7?

6.37. Ймовірність своєчасного погашення кредиту протягом місяця певною особою дорівнює 0,9. Знайти найімовірнішу кількість місяців своєчасного погашення кредиту цією особою протягом року.

6.38. Ймовірність неповернення наданого кредитною спілкою кредиту — q. При якому q вигідніше надати 2 кредити, ніж 4, якщо спілка успішно працюватиме лише в разі повернення не менше від половини кредитів?

6.39. Імовірність хоч одного виграшу при придбанні двох лотерейних білетів дорівнює 0,1164. Знайти ймовірність виграшу на один лотерейний білет.

6.40. Ймовірність влучення в рухливу мішень при одному пострілі дорівнює 0,05. Скільки необхідно здійснити пострілів, щоб з імовірністю не меншою від 0,75 мати принаймні одне влучення?

6.41. На факультеті навчається 1095 студентів. Імовірність дня народження для кожного студента в даний день дорівнює 1/365. Знайти:

а) найімовірнішу кількість студентів, що народилися 1 січня;

б) імовірність того, що 1 січня народилися рівно 3 студенти;

в) імовірність того, що знайдуться принаймні 3 студенти, які народилися 1 січня.

6.42. Монету підкидають 100 разів. Знайти ймовірність того, що: а) герб випаде 50 разів; б) герб випаде на 10 разів більше, ніж цифра.

6.43. Стандартних деталей автомат виготовляє у 19 разів більше, ніж нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед вибраних навмання 200 деталей буде: а) 185 стандартних; б) від 185 до 195 стандартних.

6.44. Ймовірність виготовлення бракованої деталі 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 100 деталей бракованих буде: а) 0; б) 10; в) не менше ніж 10; г) 20; ґ) від 18 до 30; д) 80; е) від 80 до 100.

6.45. Ймовірність влучення в ціль 0,85. Знайти ймовірність того, що при 120 пострілах влучень буде: а) 0; б) 100; в) не менше ніж 80; г) не більше ніж 90; ґ) від 80 до 90.

6.46. Ювіляр замовив святковий банкет у ресторані і розіслав 40 запрошень. Він вважає, що ймовірність того, що кожен з гостей відгукнеться на запрошення, дорівнює 0,9. Чому дорівнює ймовірність того, що не менше ніж 35 запрошених прийдуть на банкет?

6.47. Імовірність присутності студента на лекції 0,75. Знайти ймовірність того, що з 80 студентів на лекції буде: а) 70; б) не менше ніж 50; в) більше ніж 75; г) від 50 до 70.

6.48. Центр соціологічних експертиз проводить опитування виборців деякого округу з метою прогнозування результатів майбутніх виборів. В окрузі з чисельністю виборців до 100 тис. 30 % — пенсіонери, і вони будуть голосувати за кандидата А, який у своїй програмі пропонує низку пенсійних пільг. Для опитування навмання відібрали 500 осіб. Знайти ймовірність того, що серед них буде 150 пенсіонерів.

6.49. Ймовірність появи деякої події в одному випробуванні 0,004. Яка ймовірність того, що при 1000 випробуваннях подія відбудеться: а) 5 разів; б) 0 разів; в) 10 разів; г) менше ніж 5 разів; ґ) не більше ніж 3 рази; д) від 3 до 5 разів.

6.50. Серед насіння пшениці 0,6 % насіння бур'янів. Навмання вибирають 1000 насінин. Яка ймовірність виявити серед них: а) не менше від 3 насінин бур'янів; б) не менше від 16 насінин бур'янів; в) рівно 6 насінин бур'янів?

6.51. Книга на 500 сторінок містить 10 помилок. Знайти ймовірність того, що на випадково вибраній сторінці виявиться: а) одна помилка; б) не менше ніж одна помилка.

6.52. Знайти ймовірність того, що серед 200 людей виявляться 4 дальтоніки, якщо дальтоніки становлять у середньому 1 %.

6.53. Ймовірність смерті на 21-му році життя дорівнює 0,006. Застрахована група в 1000 осіб у віці 20 років. Яка ймовірність того, що протягом року помруть 5 застрахованих?

6.54. Знайти ймовірність того, що серед 200 виробів виявиться більше ніж три бракованих, якщо в середньому браковані вироби становлять 1 % від загальної кількості.

6.55. Імовірність того, що виріб не витримає контролю, дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що з 5000 виробів принаймні два не витримають контролю.

6.56. Ймовірність пошкодження виробу під час транспортування дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що під час транспортування 2000 виробів буде пошкоджено: а) 0; б) 5; в) не менше ніж 6; г) не більше ніж 7; ґ) від 3 до 5.

6.57. Під час приймального контролю партії з 1000 виробів здійснюється вибірка 50 шт. без повернення. Знайти ймовірність того, що в цій вибірці не виявиться бракованих виробів, якщо в усій партії їх є 4 шт. Порівняти точне значення цієї ймовірності з наближеним, знайденим за формулою Пуассона.

6.58. Банк видав клієнтам 5000 платіжних карток. За оцінкою експертів у середньому 0,02 % карток будуть заблоковані в процесі користування. Знайти ймовірність того, що в процесі користування буде заблоковано не менше від 3 карток.

6.59. Прилад складається з 500 елементів, які працюють незалежно. Ймовірність відмови будь-якого елемента за деякий час дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за цей час відмовить наступна кількість елементів: а) 3; б) 7; в) не менше від 4; г) не більше від 5; ґ) від 5 до 7.

6.60. Відомо, що ймовірність виготовлення бракованого свердла дорівнює 0,02. Виготовлені свердла складають у коробки по

100 шт.: 1) знайти ймовірність того, що: а) у коробці не виявиться бракованих свердел; б) кількість бракованих свердел у коробці не перевищуватиме двох; 2) яку найменшу кількість свердел треба класти в коробку, щоб з імовірністю, не меншою від 0,9 у ній було не менше ніж 100 якісних?

6.61. Ймовірність появи події в кожному з 500 незалежних випробувань дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхиляється від теоретичної ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,05.

6.62. Ймовірність появи успіху в кожному з 400 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти таке додатне число ε, щоб з імовірністю 0,9876 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи успіху від його ймовірності 0,8 не перевищувала ε.

6.63. Скільки потрібно зробити випробувань з киданням монети, щоб з імовірністю 0,92 можна було очікувати відхилення відносної частоти випадання «герба» від теоретичної ймовірності p за абсолютною величиною менше ніж 0,01?

6.64. Визначити ймовірність того, що у вибірці зі 100 одиниць відносна частота $W(A)$ є меншою ніж 0,75, якщо $p(A) = 0{,}8$.

6.65. Імовірність появи «успіху» в кожному зі 100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти таке додатне число ε, щоб з імовірністю 0,7777 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи успіху від його ймовірності 0,7 не перевищила ε.

6.66. Майстерня з гарантійного ремонту побутової техніки обслуговує 2000 абонентів. Імовірність звернення абонента протягом гарантійного строку до майстерні дорівнює 0,3. З ймовірністю 0,9973 знайти межі, в яких перебуватиме кількість абонентів, що звернулися в майстерню протягом гарантійного строку.

6.67. Скільки потрібно зробити дослідів з киданням грального кубика, щоб з імовірністю 0,98 можна було очікувати відхилення відносної частоти випадання шістки від теоретичної ймовірності за абсолютною величиною менше ніж 0,02?

6.68. Виробник аспірину стверджує, що частка людей, які страждають від головного болю і відчувають полегшення лише після 2 пігулок аспірину, становить 53 %. Яка ймовірність того, що у випадковій вибірці 400 людей, які страждають від головного болю, менше від 50 % відчують полегшення? Якщо лише 50 % людей у вибірці фактично відчувають полегшення, то що можна сказати про заяву виробника?

6.69. Візуальне спостереження штучного супутника Землі можливе в даному пункті з імовірністю $p = 0{,}1$ (немає хмарності) щоразу, коли він пролітає над цим пунктом. Скільки разів має пролетіти супутник над пунктом спостереження, щоб з імовірністю не меншою від 0,997 (тобто практично вірогідно) його можна було спостерігати не менше від п'яти разів?

6.70. За умовою попередньої задачі робиться 100 спроб спостерігати супутник. Знайти практично вірогідний (з імовірністю 0,997) діапазон кількості вдалих спостережень.

6.71. Імовірність успіху в кожному з випробувань дорівнює 0,9. Скільки треба здійснити випробувань, щоб з імовірністю 0,98 можна було очікувати не менше ніж 150 успіхів?

6.72. Для космічного корабля ймовірність зіткнення протягом однієї години з метеоритом, маса якого не менша від M_0, дорівнює 0,001. Знайти практично вірогідні межі кількості зіткнень з такими метеоритами протягом трьох місяців польоту з 1 червня по 31 серпня, якщо ймовірність практичної вірогідності береться в цьому разі рівною 0,9995.

6.73. У ставок було випущено 100 мічених риб. Невдовзі після цього зі ставка було виловлено 400 риб, серед яких виявилось 5 мічених. Оцінити загальну кількість риб у ставку з імовірністю: а) 0,9; б) 0,6.

6.74. Французький учений Бюфон підкидав монету 4040 разів, і при цьому герб випав 2048 разів. Знайти ймовірність того, що в разі повторення цього досліду відносна частота появи герба відхилиться від імовірності $p = 0{,}5$ за модулем не більше, ніж у досліді Бюфона.

6.75. В урні містяться білі і чорні кулі у відношенні 4:1. Знайти найменшу кількість виймань куль (з поверненням), за якої з імовірністю 0,95 можна очікувати, що модуль відхилення відносної частоти появи білих куль від імовірності буде не більший ніж 0,01.

6.76. Відділ технічного контролю перевіряє 475 виробів. Імовірність того, що виріб бракований, дорівнює 0,05. Знайти з імовірністю 0,95 межі, між якими міститься кількість бракованих виробів серед перевірених.

6.77. Гральний кубик підкинули 1000 разів. Знайти з імовірністю 0,95 межі, між якими міститься кількість випадань четвірки.

6.78. Імовірність появи події A в кожному з 3 незалежних випробувань різна й дорівнює: $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}6$; $p_3 = 0{,}7$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробувань подія A з'явиться: а) один раз; б) два; в) три; г) жодного разу.

6.79. Імовірність виконання 10 рієлторських операцій у кожному з 4 сезонів року різна й дорівнює: $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}4$; $p_4 = 0{,}7$. Знайти ймовірність того, що така кількість операцій протягом року буде виконана: а) один раз; б) два; в) три; г) чотири; ґ) жодного разу.

6.80. Страхова компанія застрахувала на один рік 4000 осіб 20-річного віку. Страховий внесок кожного — 15 грн. У разі смерті застрахованого спадкоємцям виплачують 1200 грн. Яка ймовірність того, що страхова компанія на кінець року збанкрутує, якщо ймовірність смерті на 21-му році життя для кожного дорівнює 0,006?

6.81. Розв'яжіть попередню задачу для 1000 застрахованих осіб.

6.82. Монету кидають n разів. Яка ймовірність того, що m разів вона упаде гербом угору?

Варіант	n	m
1	5	4
2	6	4
3	7	3
4	8	4
5	9	5

Варіант	n	m
6	8	5
7	7	5
8	6	3
9	9	4
10	5	3

6.83. Контрольний тест складається з n питань. На кожне питання пропонуються 4 варіанти відповіді, серед яких лише одна правильна. Знайти ймовірність складання тесту для непідготовленого студента, якщо для успішного складання тесту необхідно дати відповідь більше ніж на m питань.

Варіант	n	m
1	5	3
2	6	4
3	7	4
4	8	5
5	9	5

Варіант	n	m
6	8	6
7	7	5
8	6	3
9	9	6
10	5	4

6.84. Ймовірність випуску бракованого виробу дорівнює p. Знайти ймовірність того, що серед n виготовлених виробів буде рівно k виробів без браку.

Варіант	*p*	*n*	*k*
1	0,20	100	80
2	0,30	150	120
3	0,40	200	180
4	0,15	250	220
5	0,25	300	280
6	0,35	350	320
7	0,12	400	380
8	0,22	450	420
9	0,32	500	480
10	0,17	550	520

6.85. Ймовірність появи події у кожному з n незалежних випробувань дорівнює p. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) рівно k_1 разів; б) не менше ніж k_1 і не більше ніж k_2 разів; в) не менше ніж k_1 разів; г) не більше ніж k_2 разів.

Варіант	*n*	*p*	k_1	k_2
1	1200	0,90	600	1000
2	1150	0,85	650	950
3	1100	0,80	650	700
4	1050	0,75	600	650
5	1000	0,70	550	650
6	950	0,90	850	900
7	900	0,95	800	850
8	850	0,80	760	800
9	800	0,85	670	720
10	750	0,70	540	600

6.86. У магазин відправлено n виробів. Імовірність того, що виріб буде зіпсовано під час транспортування, дорівнює p. Знайти ймовірність того, що в магазин привезуть рівно k зіпсованих виробів.

Варіант	*n*	*k*	*p*
1	1200	2	0,001
2	1300	3	0,002
3	1400	4	0,003
4	1500	2	0,004
5	1600	3	0,005

Варіант	*n*	*k*	*p*
6	1100	4	0,005
7	1000	2	0,004
8	900	3	0,003
9	800	4	0,002
10	700	2	0,001

§ 7. Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин

1. Закон розподілу випадкової величини. ***Випадкова величина*** X — це змінна величина, яка в результаті експерименту залежно від випадку набуває одного зі своїх можливих значень (якого саме — заздалегідь невідомо).

Законом розподілу випадкової величини називається співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм імовірностями.

Найпростішою формою подання закону розподілу ***дискретної випадкової величини*** **є ряд розподілу** — прямокутна таблиця, першим рядком якої є можливі значення x_i, другим — відповідні їм імовірності $p_i = P(X = x_i)$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n	$\sum$
p_i	p_1	p_2	…	p_n	1

Функцією розподілу (інтегральною функцією розподілу) $F(x)$ випадкової величини X називається ймовірність того, що випадкова величина X набуде значень менших від дійсного числа x, тобто $F(x) = P(X < x)$, $x \in R$.

Ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення з проміжку $[\alpha; \beta)$, дорівнює приросту функції $F(x)$ на цьому проміжку, тобто для довільних α і β

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (1.7.1)$$

Перша похідна функції розподілу $F'(x)$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей*** (диференціальною функцією розподілу) і позначається $f(x)$:

$$f(x) = F'(x). \qquad (1.7.2)$$

Щільність розподілу є основним способом задавання неперервної випадкової величини.

Властивості $f(x)$:

1. $f(x) \geq 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (умова нормування). (1.7.3)

3. $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. (1.7.4)

Якщо відома щільність розподілу $f(x)$, то функцію розподілу знаходимо за формулою

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt. \quad F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x). \qquad (1.7.5)$$

2. Числові характеристики випадкової величини. ***Математичним сподіванням*** (центром розподілу) $M(X)$ випадкової величини X називають її теоретичне середнє значення.

Для дискретних випадкових величин

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (1.7.6)$$

Для неперервних випадкових величин

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \qquad (1.7.7)$$

Зрозуміло, що відповідні ряд (1.7.6) та інтеграл (1.7.7) мають збігатися.

Властивості математичного сподівання:

1. $M(C) = C$, де C — константа.
2. $M(CX) = CM(X)$.
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$ для будь-яких X і Y.
4. $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, якщо X і Y — незалежні випадкові величини, тобто закони їх розподілу не змінюються від того, яких значень набуде та чи інша випадкова величина.

Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення її від математичного сподівання. Дисперсія є характеристикою розсіювання значень величини X навколо центру розподілу $M(X)$. Дисперсію визначають за однією з формул:

$$D(X) = M(X - MX)^2 \text{ або } D(X) = M(X^2) - M^2(X). \qquad (1.7.8)$$

Основні властивості дисперсії:

1. $D(C) = 0$.
2. $D(CX) = C^2D(X)$.
3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, якщо випадкові величини незалежні.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ дорівнює квадратному кореню з дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{1.7.9}$$

Середнє квадратичне відхилення також є мірою розсіювання навколо $M(X)$.

Поняття $\sigma(X)$ введено для того, щоб розмірність міри розсіювання збігалась із розмірністю $M(X)$.

Початковий, центральний і абсолютний початковий моменти порядку k величини X визначають відповідно за такими формулами:

$$\upsilon_k = M(X^k),\ \mu_k = M\left(X - MX\right)^k,\ \alpha_k = M(|X|^k),\ k = 1, 2, \ldots \tag{1.7.10}$$

$$\upsilon_1 = M(X),\ \upsilon_2 = M(X^2),\ \upsilon_3 = M(X^3),\ \upsilon_4 = M(X^4). \tag{1.7.11}$$

Між початковими та центральними моментами існують залежності:

$$\mu_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1^2 = D(X); \tag{1.7.12}$$

$$\mu_3 = \upsilon_3 - 3\upsilon_1\upsilon_2 + 2\upsilon_1^3; \tag{1.7.13}$$

$$\mu_4 = \upsilon_4 - 4\upsilon_1\upsilon_3 + 6\upsilon_1^2\upsilon_2 - 3\upsilon_1^4. \tag{1.7.14}$$

Ці формули зручно використовувати дл розрахунків центральних моментів, оскільки початкові моменти знайти простіше.

Медіаною неперервної випадкової величини називають таке її значення M_e, для якого однаково ймовірно — випадкова величина X менша чи більша від цього значення. Отже,

$$P(X > M_e) = P(X < M_e) = \frac{1}{2}.$$

Медіана (M_e) ***неперервної випадкової величини*** — це таке її значення, яке є коренем рівняння

$$F(x) = 0{,}5. \tag{1.7.15}$$

Мода дискретної випадкової величини M_o — це таке її значення, імовірність якого найбільша.

Мода неперервної випадкової величини — це таке її значення, за якого щільність розподілу набуває найбільшого значення.

Асиметрія A_S характеризує симетрію закону розподілу випадкової величини відносно його центру. Коефіцієнт асиметрії визначається за формулою:

$$A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{1.7.16}$$

Ексцес E_S характеризує «гостровершинність» графіка щільності розподілу випадкової величини. Обчислюється за формулою

$$E_S = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{1.7.17}$$

Задачі

7.1. Кількість телефонних дзвінків, що надходять щохвилини в довідкове бюро від абонентів між полуднем і годиною дня в будь-який день тижня, є випадковою величиною X, закон розподілу якої

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Потрібно: а) переконатися, що задано ряд розподілу; б) знайти функцію розподілу випадкової величини X; в) використовуючи $F(X)$, визначити ймовірність того, що між 12 год 34 хв і 12 год 35 хв у довідкове бюро надійде більше від одного дзвінка.

7.2. Кількість помилок на сторінку, що їх робить деяка друкарка, є випадкова величина X, визначена в такий спосіб:

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	0,1	0,1	0,30	0,20	0,20	0,06	0,04

Потрібно: а) переконатися, що задано ряд розподілу; б) знайти функцію розподілу випадкової величини X; в) використовуючи $F(x)$, визначити ймовірність того, що друкарка зробить більше від двох помилок на сторінку; г) визначити ймовірність того, що вона зробить не більше ніж 4 помилки на сторінку.

7.3. Задано ряд розподілу випадкової величини X. Обчислити параметр p, $P(-3 < X < 2)$, моду, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію, ексцес. Побудувати многокутник розподілу. Записати функцію розподілу і побудувати її графік:

а)

x_i	– 4	– 1	0	1	2	4
p_i	0,1	p	0,1	0,3	0,05	0,05

б)

x_i	– 5	– 3	2	4	6	7
p_i	$2p$	p	$3p$	p	p	$2p$

в)

x_i	– 0,4	– 0,1	0	0,01	0,02	0,4
p_i	0,4	p	$2p$	p	0,05	0,05

г)

x_i	– 4	– 1	0	1	2	4
p_i	$0{,}p$	p	$0{,}1p$	$0{,}3p$	$0{,}05p$	$0{,}05p$

7.4. Задано ряд розподілу випадкової величини X. Обчислити параметр p, $P(-3 < X < 2)$, моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію, ексцес. Побудувати многокутник розподілу. Записати функцію розподілу і побудувати її графік:

x_i	a	b	c	d	m	n
p_i	p	$2p$	p	kp	$3p$	$4p$

Варіант	a	b	c	d	m	n	k
1	– 2	0	1	2	4	6	1
2	– 5	– 3	0	1	4	6	2
3	– 10	– 8	– 6	0	2	3	3
4	– 3	– 2	– 1	1	2	3	4
5	– 4	– 3	– 1	0	4	8	5

7.5. Є три способи контролю кондиційності партії виробів. При використанні кожного способу кількість помилково визнаних кондиційними некондиційних виробів є випадковою величиною. Позначимо ці величини для кожного способу відповідно X, Y, Z.

x_i	0	1	3	4
p_i	0,5	0,4	0,05	0,05

y_i	0	1	2	3
p_i	0,7	0,1	0,1	0,1

z_i	0	1	2	3	4
p_i	0,8	0,05	0,05	0,05	0,05

Який спосіб контролю є більш раціональним?

7.6. За заданою функцією розподілу ймовірностей записати ряд розподілу випадкової величини X. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le -6,\\ 0{,}2, & \text{якщо } -6<x\le -4,\\ 0{,}6, & \text{якщо } -4<x\le 0,\\ 0{,}8, & \text{якщо } 0<x\le 4,\\ 1, & \text{якщо } x>4;\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le -5,\\ 0{,}1, & \text{якщо } -5<x\le -3,\\ 0{,}5, & \text{якщо } -3<x\le 5,\\ 0{,}9, & \text{якщо } 5<x\le 8,\\ 1, & \text{якщо } x>8;\end{cases}$

в) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0,\\ 0{,}22, & \text{якщо } 0<x\le 4,\\ 0{,}36, & \text{якщо } 4<x\le 10,\\ 0{,}8, & \text{якщо } 10<x\le 14,\\ 1, & \text{якщо } x>14;\end{cases}$ г) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 2,\\ 0{,}3, & \text{якщо } 2<x\le 8,\\ 0{,}45, & \text{якщо } 8<x\le 11,\\ 0{,}7, & \text{якщо } 11<x\le 12,\\ 1, & \text{якщо } x>12.\end{cases}$

7.7. За заданою функцією розподілу ймовірностей записати ряд розподілу випадкової величини X. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x \le d,\\ 0,a, & \text{якщо } d < x \le m,\\ 0,b, & \text{якщо } m < x \le n,\\ 0,c, & \text{якщо } n < x \le r,\\ 1, & \text{якщо } x > r.\end{cases}$$

Варіант	*a*	*b*	*c*	*d*	*m*	*n*	*r*
1	4	5	6	2	4	5	7
2	3	6	8	– 4	0	4	5
3	2	5	9	2	4	5	9
4	3	5	7	– 2	– 1	0	2
5	1	2	5	0	3	4	7

7.8. У лотереї на 100 квитків розігруються дві речі, вартість яких 210 і 60 умов. грош. од. Скласти закон розподілу суми виграшу для особи, яка має: а) один квиток; б) два квитки. Вартість квитка — 3 умов. од. Переконайтесь у справедливості властивості про математичне сподівання суми випадкових величин.

7.9. Відсоток людей, що купили новий засіб від головного болю після того, як побачили його рекламу на телебаченні, є випадкова величина, задана таблицею:

x_i	0	10	20	30	40	50
p_i	0,1	0,2	0,35	0,2	0,1	0,05

Потрібно: а) переконатися, що задано ряд розподілу; б) знайти функцію розподілу; в) визначити ймовірність того, що більше ніж 20 % людей відгукнуться на рекламу.

7.10. Задано щільність розподілу випадкової величини X:

$$\text{а) } f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x \le 0;\\ ax^2, & \text{якщо } 0 < x \le 2;\\ 0, & \text{якщо } x > 2;\end{cases} \quad \text{б) } f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x \le 0;\\ ax^3, & \text{якщо } 0 < x \le 3;\\ 0, & \text{якщо } x > 3;\end{cases}$$

в) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0;\\ 2ae^{-6x}, & \text{якщо } x\ge 0;\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0;\\ 5e^{-ax}, & \text{якщо } x\ge 0;\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 2;\\ a, \text{ якщо } 2<x\le 10;\\ 0, \text{ якщо } x>10;\end{cases}$ д) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \frac{1}{6}a, & \text{якщо } 0<x\le 18;\\ 0, & \text{якщо } x>18;\end{cases}$

е) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 1;\\ a(x^2-x), & \text{якщо } 1<x\le 2;\\ 0, & \text{якщо } x>2;\end{cases}$

є) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le -1;\\ a(6x-x^2+7), & \text{якщо } -1<x\le 3;\\ 0, & \text{якщо } x>3;\end{cases}$

ж) $f(x)=\dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-1)^2}{50}}$; з) $f(x)=\dfrac{1}{7\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x+6)^2}{2a}}$.

Обчислити: 1) параметр a; 2) $P(-3<X<5)$; 3) $P(5)$; 4) моду; 5) медіану; 6) математичне сподівання; 7) дисперсію; 8) середнє квадратичне відхилення; 9) асиметрію; 10) ексцес; 11) побудувати графік щільності розподілу; 12) записати функцію розподілу і побудувати її графік.

7.11. Задано функцію щільності ймовірностей

$$f(x)=\frac{a}{16+25x^2}, \quad -\infty<x<\infty. \text{ Знайти } a.$$

7.12. Задано функцію розподілу випадкової величини X:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ ax+c, & \text{якщо } 0<x\le 1;\\ 1, & \text{якщо } x>1;\end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1; \\ ax^2+c, & \text{якщо } 1 < x \le 6; \\ 1, & \text{якщо } x > 6; \end{cases}$

в) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ ax^3+c, & \text{якщо } 0 < x \le 4; \\ 1, & \text{якщо } x > 4; \end{cases}$

г) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ -a\sqrt{x}, & \text{якщо } 0 < x \le 9; \\ 1, & \text{якщо } x > 9; \end{cases}$

г) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1; \\ \dfrac{x-a}{b}, & \text{якщо } 1 < x \le 3; \\ 1, & \text{якщо } x > 3; \end{cases}$

д) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 6; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } 6 < x \le 10; \\ 1, & \text{якщо } x > 10; \end{cases}$

е) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \sin ax+c, & \text{якщо } 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & \text{якщо } x > \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

є) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -0{,}5; \\ a \arcsin x+c, & \text{якщо } -0{,}5 < x \le 0{,}5; \\ 1, & \text{якщо } x > 0{,}5. \end{cases}$

Обчислити: 1) невідомі параметри; 2) $P(-1 < X < 4)$; 3) $P(7)$; 4) моду; 5) медіану; 6) математичне сподівання; 7) дисперсію;

8) середнє квадратичне відхилення; 9) асиметрію, 10) ексцес; 11) побудувати графік функції розподілу; 12) записати щільність розподілу та побудувати її графік.

7.13. Випадкова величина X розподілена за законом, графіком щільності якого є ламана ABC, де $A(1;0)$; $B(2;a)$; $C(3;0)$. Записати щільність розподілу, функцію розподілу випадкової величини X. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7.14. Випадкова величина X розподілена за законом, графіком щільності якого є ламана $ABCD$, де $A(-a;0)$; $B(0;a)$; $C(2a;2a)$; $D\left(\frac{5}{2}a;0\right)$. Записати щільність розподілу та функцію розподілу випадкової величини X. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7.15. Дехто грає в кості до першого виграшу, який настає при випаданні шести очок. Скласти закон розподілу кількості підкидань.

7.16. Дехто грає в кості до першого виграшу, який настає при випаданні шести очок, але не більше від п’яти разів. Скласти закон розподілу кількості підкидань.

7.17. У лотереї розігрується один виграш на 5000 грн, два виграші по 1000 грн, і 10 виграшів по 100 грн на кожні 100 білетів лотереї. Побудувати закон розподілу величини виграшу на один білет, якщо вартість білета дорівнює 80 грн. Зобразити графічно цей закон. Знайти математичне сподівання та дисперсію величини виграшу.

7.18. За умовою попередньої задачі знайти закон розподілу суми виграшу на два білети без урахування їхньої вартості.

7.19. Стрілець веде стрільбу по цілі. Ймовірність влучення в ціль дорівнює 0,2 і при влученні стрілець одержує 50 очок. Побудувати закон розподілу кількості очок, одержаних стрільцем за три постріли, і зобразити його графічно.

7.20. Побудувати закон розподілу кількості очок, вибитих стрільцем при чотирьох пострілах, якщо ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,3, і за кожне влучення стрілець одержує 5 очок, а за кожний промах з нього знімається 2 очка.

7.21. Проводиться підкидання двох гральних кубиків. При випаданні різної кількості очок виграш дорівнює різниці кількості очок, а при випаданні однакової кількості очок програш дорівнює сумі кількості очок. Визначити математичне сподівання виграшу.

7.22. Згідно зі статистичними таблицями смертності ймовірність того, що 25-річна людина проживе ще рік, дорівнює 0,992, а ймовірність, що вона помре наступного року, дорівнює 0,008.

Страхова компанія пропонує такій людині застрахувати своє життя на один рік на суму 1000 грн. Страховий внесок становить 10 грн. Який прибуток при цьому матиме компанія?

7.23. *Задача про однорукого бандита.* Гральний автомат має два віконця, в кожному з яких може з`явитись одна з трьох картинок, на яких зображені дзвіночки, яблука і вишні. Автомат налаштований так, що картинки у віконцях з'являються незалежно одна від одної. Після запуску автомата в кожному віконці з'являється одна картинка з імовірністю:

Дзвіночки	Яблука	Вишні
0,4	0,1	0,5

Для запуску потрібно опустити в автомат 50 коп. Після запуску може з`явитися будь-яка комбінація двох картинок. Гравець одержить виграш у разі появи:

двох яблук	5 грн
двох дзвіночків	1 грн
двох вишень	0,5 грн

і нічого не одержує в інших випадках. Знайти математичне сподівання чистого виграшу для гравця, який заплатив 50 коп. за право почати гру.

7.24. Підприємство одержує прибуток від виробництва продукції A — 5 одиниць, продукції B — 4 одиниці і має збитки від виробництва продукції C в розмірі 3 одиниці. Частка продукції A, B і C відповідно дорівнює 0,3; 0,5; 0,2. Знайти середній прибуток для цього підприємства.

§ 8. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

1. Біноміальний закон розподілу. Закон розподілу випадкової величини X — кількості успіхів при n випробуваннях, у кожному з яких подія A може відбутися з тією самою ймовірністю p, називають ***біноміальним законом розподілу,*** або ***біноміальним розподілом***.

Ймовірність того, що в n випробуваннях подія A відбудеться m разів, обчислюється за формулою Бернуллі

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},\ m = \overline{0, n}. \qquad (1.8.1)$$

Біноміальний закон розподілу має такі числові характеристики:

$$M(X) = np,$$
$$D(X) = npq,$$
$$\sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

2. Геометричний закон розподілу. Нехай маємо послідовність незалежних випробувань за схемою Бернуллі зі сталою ймовірністю $p = P(A)$ появи події A в кожному випробуванні, $P(\overline{A}) = q$, ($q = 1 - p$). Розглянемо тепер випадкову величину X — ***кількість проведених випробувань до першої появи події A*** (до першого «успіху»). Ця величина може набувати значень 1, 2, 3, …, m, …, імовірності яких обчислюються за формулою

$$P(X = m) = q^{m-1}p = (1 - p)^{m-1}p. \qquad (1.8.2)$$

Закон розподілу (1.8.2) називається геометричним законом розподілу.

Числові характеристики геометричного закону розподілу:

$$M(X) = \frac{1}{p};\ D(X) = \frac{q}{p^2};\ \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

3. Закон розподілу Пуассона. Розподіл імовірностей дискретної випадкової величини X, яка в біноміальних випробуваннях набуває значень 0, 1, 2, …, m, … з імовірностями

$$P(X = m) = \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \qquad (1.8.3)$$

де $a = np$, називається **законом розподілу Пуассона.**

Числові характеристики закону розподілу Пуассона:

$$M(X) = D(X) = a,\ A_S = \frac{1}{\sqrt{a}},\ E_S = \frac{1}{a} - 3.$$

4. Гіпергеометричний закон розподілу. Розглянемо безповторну вибірку обсягу k з генеральної сукупності, що містить N елементів, серед яких ознака A зустрічається n разів. Позначимо: подія A — відібраний елемент, наділений ознакою A.

Оскільки відібраний елемент назад не повертається, то послідовний відбір k елементів рівносильний одночасному відбору k елементів з генеральної сукупності.

Імовірність появи події A m разів ($X = m$) при k випробуваннях

$$P(X = m) = \frac{C_n^m C_{N-n}^{k-m}}{C_N^k},\ m \le n,\ m \le k. \qquad (1.8.4)$$

Закон розподілу (1.8.4) називається гіпергеометричним законом розподілу.

Числові характеристики гіпергеометричного закону розподілу:

$$M(X) = \frac{nk}{N},\quad D(X) = \frac{nk(N-n)(N-k)}{N^2(N-1)}.$$

Задачі

8.1. Гральний кубик кинуто 10 разів. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X — кількості шісток, що випали в цьому досліді.

8.2. Проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких $P(A) = p = \text{const}$. Потрібно:

а) побудувати закон розподілу величини X_1 — кількості появ події A, якщо:

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	5	6	7	5	6	7	5	6	7	5
$p(A)$	0	0,5	0,2	0,1	0,7	0,6	0,4	0,3	0,5	0,8

б) побудувати закон розподілу величини X_2 — кількості випробувань до першої появи події A;

в) побудувати закон розподілу величини X_3 — кількості випробувань до першої непояви події A;

г) графічно зобразити розподіл величин X_1, X_2, X_3.

8.3. Ймовірність придбання неякісної пари взуття дорівнює 0,14. Придбано 8 пар взуття. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X — кількості пар неякісного взуття.

8.4. Проводяться незалежні випробування з однаковою ймовірністю появи події A в кожному. Знайти цю ймовірність, якщо дисперсія числа появи події в трьох незалежних випробуваннях дорівнює 0,72.

8.5. Відмова у виконанні певної операції для кожної фінансової установи дорівнює 0,9. Знайти середню кількість відмов та дисперсію відмов у десяти фінансових установах.

8.6. Ймовірність того, що навмання взята особа курить, дорівнює 0,41. Довільно взято 9 осіб. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X — кількості осіб, що не курять, серед 9 вибраних.

8.7. Випробування полягає в підкиданні 5 гральних кубиків. Проводиться 20 таких випробувань. Знайти математичне сподівання величини X — кількості таких випробувань, в кожному з яких на 2 кубиках з'явиться по 6 очок.

8.8. Дієта, що включає підвищену дозу вітаміну С, була розроблена для перевірки твердження, що вона може ефективно запобігати простудним захворюванням в зимову пору року. Спостерігалося 10 навмання вибраних пацієнтів, які додержуються запропонованої дієти протягом року. 8 з них пережили зиму без застуди. З даних медичної статистики відомо, що ймовірність пережити зиму без застуди, не вживаючи додаткових доз вітаміну С, дорівнює 0,5. Чому дорівнює ймовірність того, що 8 або більше осіб переживуть зиму без застуди, припускаючи, що вживання підвищених доз вітаміну С неефективне?

8.9. Величина X розподілена за законом Пуассона з $M(X) = 3$. Побудувати многокутник розподілу, функцію розподілу $F(x)$. Знайти: а) $P(X < M(X))$; б) $P(X > 0)$.

8.10. Прибуття відвідувачів у банк підпорядковане закону Пуассона. Дайте відповіді на такі запитання, припускаючи, що в середньому в банк кожні три хвилини входить один відвідувач: 1. Чому дорівнює ймовірність того, що протягом 1 хвилини в банк увійде один відвідувач? 2. Чому дорівнює ймовірність того, що принаймні три відвідувачі ввійдуть у банк протягом однієї хвилини?

8.11. Протягом семестру викладачі проводять консультації з питань, що залишилися незрозумілими для студентів. Викладач, який проводить консультації зі статистики, зауважив, що в середньому вісім студентів відвідують його за годину консультаційного часу, хоча точна кількість студентів, які відвідують консультацію в певний день, у призначений час — випадкова величина. Використовуючи розподіл Пуассона, дайте відповідь на такі питання: 1. Яка ймовірність того, що точно вісім студентів відвідають протягом певної години консультацію зі статистики? 2. Яка ймовірність того, що троє студентів прийдуть на консультацію протягом певної півгодини?

8.12. Ймовірність того, що грошовий приймач автомата при подачі грошей спрацює правильно, дорівнює 0,97. Скласти закон розподілу величини X — кількості подачі грошей в автомат: а) до першої правильної роботи автомата; б) до першої неправильної роботи автомата.

8.13. Знайти математичне сподівання кількості лотерейних білетів, на які випадуть виграші, якщо придбано 20 білетів і ймовірність виграшу за одним білетом дорівнює 0,05.

8.14. Група із 7 спортсменів прибула на спортивні змагання з різних видів спорту. Ймовірність кожному посісти призове місце дорівнює 0,1. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X — кількості спортсменів, які посіли призові місця.

8.15. Знайти дисперсію успіху при 20 випробуваннях, якщо ймовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

8.16. Стрілець стріляє в мішень, допоки влучить. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,7. Знайти середню кількість вдалих пострілів та дисперсію кількості пострілів.

8.17. Підприємство підготувало для реалізації 9 партій продукції. Ймовірність того, що партія якісна, дорівнює 0,95. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X — кількості якісних партій із 9.

8.18. У партії з 50 виробів є 5 бракованих виробів. Здійснюється безповторна вибірка 6 виробів. Побудувати закон розподілу величини X — кількості бракованих виробів серед відібраних. Знайти $M(X)$ та $D(X)$.

8.19. У біноміальному випробуванні $n = 15$, $p = 0{,}5$. Знайти $P(X \leq 2)$ та $P(X \geq 13)$. Пояснити результат.

8.20. В урні містяться одна біла та 2 червоні кулі однакові в усьому, крім кольору. З урни навмання беруть 3 кулі так, що перед вибором наступної кулі попередня повертається в урну (вибірка з поверненням). Знайти закон розподілу величини X — кількості білих куль у вибірці.

8.21. У біноміальному випробуванні з 3 експериментів імовірність 2 успіхів у 12 разів більша ймовірності 3 неуспіхів. Знайти ймовірність успіху в одному випробуванні.

8.22. Імовірність одержання щомісячної премії для кожного із 10 працівників дорівнює 0,45. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X — кількості щомісячно премійованих працівників фірми.

8.23. У брокерській конторі стимулюється прибутковість торгівлі преміюванням співробітників. Згідно з цим співробітник, який не досяг прибутку більш як за три дні протягом двох тижнів

(10 робочих днів), втрачає свою премію за цей період. Імовірність невиконання співробітником денної норми прибутку дорівнює 0,15. Скільки премій у середньому втратять 100 співробітників за 50-тижневий період?

8.24. Імовірність пройти перевірку фірми без штрафних санкцій дорівнює 0,3. Відбудеться 5 перевірок. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X — кількості перевірок без штрафних санкцій.

8.25. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X — кількості випадань «герба» при 5 киданнях монети. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8.26. Страховий агент планує відвідати за день п'ять клієнтів і сподівається, що ймовірність продати страховий поліс кожному з них дорівнює 0,4. 1. Скласти біноміальний закон розподілу кількості проданих страхових полісів, якщо: $n = 5$ і $p = 0{,}4$. 2. Побудувати графік функції розподілу. 3. Чому дорівнює ймовірність того, що кількість випадків продажу буде між 2 і 4 (включаючи 2 і 4)? 4. Знайдіть очікувану кількість проданих страхових полісів і середнє квадратичне відхилення кількості випадків продажу. 5. Чому дорівнює ймовірність принаймні одного випадку продажу?

8.27. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X — кількості влучень у ціль двома стрільцями, які роблять по одному пострілу, якщо ймовірності влучення для кожного з них дорівнюють відповідно 0,85 і 0,90. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8.28. Автоматична лінія за відповідного настроювання може випускати бракований виріб з імовірністю $p = 0{,}06$. Переналагодження лінії відбувається після виготовлення першого ж бракованого виробу. Знайти середню кількість усіх виробів, вироблених між двома переналагодженнями.

8.29. Знайти математичне сподівання та дисперсію кількості виробів, виготовлених на автоматичній лінії за відповідного настроювання за період між двома переналагодженнями, якщо за нормального настроювання ймовірність виготовлення бракованого виробу дорівнює 0,06, а переналагодження здійснюється після виготовлення 3-го бракованого виробу.

8.30. У безпрограшній лотереї є m_1 виграшів вартістю k_1, m_2 — вартістю k_2, …, m_n — вартістю k_n Усього в лотереї N білетів. Яку вартість білета потрібно встановити, щоб математичне сподівання виграшу на один білет дорівнювало половині його вартості?

8.31. Розв'язати попередню задачу за умов: $m_1 = 10$, $k_1 = 5$; $m_2 = 15$, $k_2 = 10$; $m_3 = 20$, $k_3 = 30$; $m_4 = 25$, $k_4 = 50$; $m_5 = 10$, $k_5 = 75$; $m_6 = 10$, $k_6 = 80$; $m_7 = 5$, $k_7 = 100$; $m_8 = 5$, $k_8 = 150$.

8.32. Імовірність влучення під час одного пострілу — 0,8. Постріли виконуються до першого влучення. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості пострілів за наявності 5 патронів. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб імовірність принаймні одного влучення була не менша ніж 0,99?

8.33. Партія з 50 виробів містить 4 бракованих. Навмання відбирають 3 вироби. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості бракованих виробів серед трьох узятих. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8.34. У грошовій лотереї розігруються 1000 білетів. Розігруються: один виграш у 100 грн, 10 — по 50 грн, 20 — по 10 грн, 30 — по 5 грн. Випадковою величиною X є вартість можливого виграшу власника одного лотерейного білета. Скласти закон розподілу випадкової величини X. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8.35. Пристрій складається з п'яти елементів, що працюють незалежно. Імовірність відмови кожного елемента однакова й дорівнює 0,3. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості елементів, що працюють. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8.36. Продавець ювелірного магазину помітив, що ймовірність продажу прикраси в разі одиничного контакту з покупцем приблизно дорівнює 0,03. Протягом робочого дня до продавця звернулися 100 відвідувачів його відділу. Чому дорівнює ймовірність того, що він продав принаймні один виріб?

8.37. У фірмі немає в середньому 5 % деталей, поданих у каталозі. Надійшло замовлення на 8 деталей. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості наявних у фірмі деталей з 8 замовлених за каталогом. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8.38. Екзаменаційний тест має 15 питань, на кожне з яких є 5 можливих відповідей, і лише одна з них правильна. Припустимо, що студент, який складає іспит, не знає відповідей на питання. Чому дорівнює ймовірність правильно вгадати відповіді принаймні на 10 питань?

8.39. Є n лампочок, кожна з яких з імовірністю 0,2 має дефект. Лампочку вкручують у патрон і подають напругу, після чого бракована лампочка зразу ж перегорає і замінюється іншою. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості використаних лампочок. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Виконати для: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$; г) $n = 6$.

8.40. Деякий технологічний процес допускає 5 % нестандартних виробів. Для перевірки якості виготовлення виробів контролер бере з партії не більше від 4 виробів. У разі виявлення нестандартного виробу вся партія затримується. Скласти закон розподілу кількості перевірених контролером виробів. Знайти середнє значення кількості виробів, які може перевірити контролер до затримки партії.

8.41. Потік викликів, що надходять на телефонну станцію, має пуассонівський розподіл. Середня кількість (математичне сподівання) викликів за годину дорівнює 30. Знайти ймовірність того, що за хвилину відбудеться не менше від двох викликів.

8.42. В урні N куль, серед яких n білих, решта — чорні. Навмання беруть m куль. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X — кількості білих куль серед m навмання взятих. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант	1	2	3	4	5
N	12	24	50	30	10
n	8	10	40	20	6
m	3	4	3	4	3

8.43. Імовірність того, що футболіст реалізує шанс забити гол, дорівнює p. Футболіст бив по воротах n разів. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної величини X — кількості реалізованих ударів. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант	1	2	3	4	5
n	4	6	5	4	5
p	0,8	0,6	0,9	0,25	0,75

8.44. Ймовірність підвищення курсу акцій n-го підприємства — p_n. Випадкова величина X — кількість підприємств, курс акцій яких підвищився. Знайти закон розподілу випадкової величини X, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$.

Варіант	1	2	3	4	5
p_1	0,4	—	0,5	0,4	0,25
p_2	0,8	0,6	0,9	0,25	0,7
p_3	0,1	0,3	0,2	0,1	0,9
p_4	—	0,8	—	0,2	0,8

8.45. Для виготовлення деталі використовують n заготовок. Якщо з заготовки не виготовили придатну деталь, то використовують наступну заготовку. Знайти закон розподілу величини X — кількості використаних заготовок для виготовлення придатної деталі, якщо ймовірність її виготовлення з однієї заготовки дорівнює p. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант	1	2	3	4	5
n	4	6	5	4	5
p	0,8	0,6	0,9	0,25	0,75

8.46. В урні N куль, серед яких n білих, решта — чорні. З урни навмання беруть по одній кулі, поки візьмуть білу. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X — кількості взятих куль. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант	1	2	3	4	5
N	12	24	50	30	10
n	4	3	4	4	3

8.47. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для величини X — кількості появи події A при n випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в одному випробуванні — p. Знайти ймовірність появи події A при n випробуваннях: а) m разів; б) менше ніж b разів; в) не менше ніж c разів; г) не більше ніж d, але не менше ніж r разів. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант	n	p	m	b	c	d	r
1	4000	0,001	6	2	4	5	7
2	3000	0,002	8	4	3	4	5
3	2000	0,005	9	2	4	5	9
4	2000	0,003	7	2	3	0	4
5	8000	0,001	5	4	4	4	7

§ 9. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин (НВВ)

1. Рівномірний закон розподілу НВВ. Неперервна випадкова величина X називається розподіленою ***рівномірно*** на відрізку $[a; b]$, де a і b — дійсні числа, якщо кожному значенню випадкової величини X на цьому відрізку відповідає та сама щільність імовірностей, а поза відрізком — щільність дорівнює нулю, тобто

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases} \tag{1.9.1}$$

Функція розподілу рівномірного закону розподілу $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases} \tag{1.9.2}$$

Числові характеристики рівномірного закону розподілу:

$$M(X)=\frac{b+a}{2},\qquad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\qquad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

2. Показниковий (експоненціальний) закон розподілу. Неперервна випадкова величина X (невід'ємна) називається ***розподіленою за показниковим (експоненціальним) законом*** з параметром λ, якщо її щільність ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x\ge 0,\end{cases} \tag{1.9.3}$$

де $\lambda=\text{const}>0$.

Функція розподілу показникового закону розподілу $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases} \tag{1.9.4}$$

Числові характеристики показникового закону розподілу:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \qquad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

3. Нормальний закон розподілу. ***Нормально розподіленою випадковою величиною*** називається неперервна випадкова величина, щільність розподілу якої має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.9.5}$$

де a і σ — параметри нормального розподілу.

Числові характеристики нормального закону розподілу:

$$M(X)=a,\ D(X)=\sigma^2,\ \sigma(X)=\sigma,\ \mathrm{As}=0,\ \mathrm{Es}=0.$$

Ймовірність попадання ВВ на інтервал $(\alpha;\beta)$ обчислюється за формулою

$$\mathrm{P}(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{1.9.6}$$

Ймовірність відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання обчислюється за формулою

$$\mathrm{P}\left(|X-a|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{1.9.7}$$

Задачі

9.1. Випадкова величина рівномірно розподілена на інтервалі $[a; b]$. Записати щільність розподілу, функцію розподілу і побудувати їхні графіки. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант	1	2	3	4	5
$[a; b]$	[6; 10]	[–5; 0]	[4; 20]	[–10,2; –4]	[4,5; 8]

9.2. Ціна поділки вимірювального приладу дорівнює 0,5 од. Показання округлюються до ближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що під час знімання показань буде зроблено похибку, яка перевищує 0,01 од.

9.3. Власник антикварного аукціону вважає, що пропозиція ціни за певну картину буде рівномірно розподіленою випадковою величиною в інтервалі від 100 тис. до 500 тис. грн. Потрібно: а) знайти диференціальну функцію (щільність розподілу); б) визначити ймовірність того, що картина буде продана за ціну, меншу ніж 200 тис. грн; в) знайти ймовірність того, що ціна картини буде вища від 450 тис. грн.

9.4. У будівлі обласної адміністрації випадковий час очікування ліфта рівномірно розподілений у діапазоні від 0 до 2 хвилин. 1. Запишіть функцію розподілу $F(x)$ для цього рівномірного розподілу? 2. Чому дорівнює ймовірність очікування ліфта більше ніж 0,5 хвилини? 3. Чому дорівнює ймовірність того, що ліфт прибуде протягом перших 45 секунд? 4. Чому дорівнює ймовірність того, що очікування ліфта буде в діапазоні від 30 до 50 секунд?

9.5. Щільність розподілу випадкової величини розподілена за показниковим законом з параметром λ:

Варіант	1	2	3	4	5
λ	0,8	2,1	3	4	1,5

Записати щільність розподілу, функцію розподілу та побудувати їхні графіки. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

9.6. Знайти ймовірність того, що нормована нормально розподілена випадкова величина набуває значень між –1,5 і 2.

9.7. Знайти ймовірність того, що нормована нормально розподілена випадкова величина набуває значень між 2 і 3.

9.8. Знайти ймовірність того, що нормована нормально розподілена випадкова величина набуває значень менших за 1,5.

9.9. Знайти ймовірність того, що нормована нормально розподілена випадкова величина набуває значень більших ніж –1,25.

9.10. Наскільки ймовірно, що нормована нормально розподілена випадкова величина набуває значень: а) менших ніж –4; б) більших за 4?

9.11. Нехай X — нормована нормально розподілена випадкова величина. Знайти ймовірності: а) $P(X < 1{,}2)$; б) $P(X \geq 2{,}1)$; в) $P(-1{,}3 < X < 2{,}6)$; г) $P(-1{,}6 < X < 1{,}6)$.

9.12. Нехай X — нормована нормально розподілена випадкова величина. Знайти таке значення x, для якого $P(-x < X < x) = 0{,}8836$.

9.13. Нехай X — нормована нормально розподілена випадкова величина. Знайти таке значення x, для якого: а) $P(X < x) = 0{,}881$; б) $P(X < x) = 0{,}156$.

9.14. Нехай X — нормована нормально розподілена випадкова величина. Знайти таке значення x, для якого: а) $P(x < X) = 0{,}209$; б) $P(x < X) = 0{,}9192$.

9.15. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення цієї величини відповідно дорівнюють 25 і 15. Знайти ймовірність того, що X набуде таких значень: а) X належать інтервалу (10; 40); б) X більше ніж 40; в) X менше ніж 10.

9.16. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом розподілу, що має числові характеристики: $M(X) = b$, $D(X) = c$.

Варіант	1	2	3	4	5
a	2	5	0	4	5
b	8	6	9	25	7
c	16	4	25	1	9
d	7	10	8	12	8

Записати щільність розподілу, функцію розподілу, побудувати їхні графіки. Знайти $P(a < X < d)$.

9.17. Для нормально розподіленої випадкової величини з $a = -25$ і $\sigma = 15$ знайти ймовірність того, що значення випадкової величини буде додатне.

9.18. Нехай X — нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $M(X) = 4{,}5$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 2{,}4$. Знайдіть таке значення x для якого: а) $P(X < x) = 0{,}9032$; б) $P(X < x) = 0{,}1151$.

9.19. Нехай X — нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $M(X) = 10{,}2$ і дисперсією $D(X) = 6{,}25$. Знайти таке значення x, для якого: а) $P(x < X) = 0{,}2743$; б) $P(x < X) = 0{,}7257$.

9.20. Нехай X — нормально розподілена випадкова величина $N(8;2)$. Знайти таке значення x, для якого: а) $P(6 < X < x) = 0{,}8054$; б) $P(x < X < 9) = 0{,}5074$.

9.21. Нехай X — нормально розподілена випадкова величина $N(12;3)$. Знайти такі значення x_1 та x_2, симетричні відносно $x = 12$, для яких $P(x_1 < X < x_2) = 0{,}823$.

9.22. Верстат-автомат штампує деталі. Контрольована випадкова величина X — довжина деталі, що виготовляється, коливається в межах від 35 до 65 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде: а) більша від 60 мм; б) менша від 45 мм.

9.23. Електронна лампа працює справно протягом випадкового часу T, розподіленого за показниковим законом:

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{якщо } t<0;\\ \lambda e^{-\lambda t}, & \text{якщо } t\geq 0.\end{cases}$$

Після того як лампа вийде з ладу, її замінюють іншою. Знайти ймовірність того, що за час t: а) лампу не доведеться замінювати; б) лампу доведеться замінити рівно три рази; в) лампу доведеться замінити не менше від трьох разів.

9.24. Термін служби батарейок для слухових апаратів приблизно підпорядковується експоненціальному закону з $\lambda = 1/60$. Яка частка батарей має термін служби більше ніж 120 днів?

9.25. Під час роботи деякого приладу у випадкові моменти часу виникають несправності. Час T роботи приладу від його ввімкнення до його вимкнення розподілений за показниковим законом:

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{якщо } t<0;\\ \lambda e^{-\lambda t}, & \text{якщо } t\geq 0.\end{cases}$$

При виникненні несправності вона миттєво виявляється, і прилад ремонтується. Ремонт триває час t, після чого прилад знову починає використовуватись. Знайти щільність розподілу, функцію розподілу проміжку часу T між двома сусідніми несправностями. Обчислити $M(T)$, $D(T)$, $\sigma(T)$.

9.26. На перехресті доріг рух регулюється автоматичним світлофором, що включає зелене світло через кожні 40 секунд. Час стоянки біля цього світлофора автомобіля, що зупинився на червоне світло, є випадкова величина, розподілена рівномірно на інтервалі (0; 40) секунд. Знайти середній час стоянки і середнє квадратичне відхилення.

9.27. Кількість палива, яке продається протягом дня на станції автозаправки, рівномірно розподілена між мінімальним значенням у 2000 декалітрів та максимальним — 5000 декалітрів. 1. Знайти ймовірність того, що денний продаж попаде в інтервал між 2500 та 3000 декалітрами. 2. Яка ймовірність того, що сервісна станція щодня реалізує як мінімум 4000 декалітрів? 3. Яка ймовірність того, що станція щодня реалізує точно 2500 декалітрів?

9.28. Кількість часу, яка потрібна студентові для того, щоб закінчити модуль зі статистики, — рівномірно розподілена між 30 та 60 хвилинами. Навмання вибирають студента. Знайти ймовірність таких подій: 1. Студентові потрібно більше ніж 55 хвилин, для того щоб завершити модульний контроль. 2. Для того щоб завершити роботу, студентові потрібно від 30 до 40 хвилин. 3. Студент завершить роботу точно за 37,23 хвилини.

9.29. Температура вимірюється термометром із ціною поділки в 1°. Відлік проводиться з точністю до одного градуса. Величина помилки вимірювання X є випадкова величина, рівномірно розподілена у діапазоні (–0,5°; 0,5°). Знайти середню помилку вимірювання, а також стандартне (середнє квадратичне) відхилення.

9.30. Тижневий обсяг реалізації продукції металургійного комбінату рівномірно розподіляється між 110 та 175 метричними тоннами. 1. Обчисліть ймовірність того, що завод наступного тижня реалізує більше ніж 150 метричних тонн. 2. Знайдіть ймовірність того, що обсяг реалізованої продукції припадатиме на інтервал між 120 — 160 метричними тоннами. 3. Менеджери з продажу вважають тиждень «невдалим», якщо рівень продажу припадає на інтервал нижче від 20 % цього розподілу. Яким має бути обсяг продажу в метричних тоннах, щоб визнати тиждень як «невдалий».

9.31. У будівлі адміністрації міста випадковий час очікування ліфта рівномірно розподілений у межах від 0 до 5 хв. Знайти: 1) функцію розподілу $F(x)$ для цього розподілу; 2) ймовірність очікування ліфта більше ніж 3 хв; 3) ймовірність того, що ліфт з'явиться протягом 45 с; 4) ймовірність того, що час очікування ліфта буде в межах від 1 до 3 хв.

9.32. Задано математичне сподівання $a = 10$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma = 4$ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти: а) $P(6 < X < 16)$; б) $P(|X - a| < 10)$.

9.33. Вага кавуна, вирощеного на Київщині, — нормально розподілена випадкова величина з невідомим математичним сподіванням і дисперсією, рівною 1,6. Агрономи знають, що 80 % кавунів важать менше ніж 4,5 кг. Знайти очікувану вагу випадково вибраного кавуна, вирощеного на Київщині.

9.34. Для нормально розподіленої ВВ X з $M(X) = 20600$ і $\sigma = 450$ знайти таку точку x в розподілі, що $P(X < x) = 0{,}025$.

9.35. Випадкове відхилення розміру деталі від номінального — нормально розподілена випадкова величина з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ Придатними є ті деталі, для яких відхилення знаходиться в межах від –1 до 1 мм. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь — придатна.

9.36. Фірма, що продає товари за каталогом, щотижня одержує поштою замовлення. Кількість цих замовлень є нормально розподіленою випадковою величиною із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 12$ і невідомим математичним сподіванням a. У 90 % випадків кількість щотижневих замовлень перевищує 800. Знайти середню кількість замовлень, що їх фірма одержує за тиждень.

9.37. Тривалість дзвінків в зарубіжжя, які здійснюють робітники компанії, нормально розподіляється із середнім значенням 6,3 хв і стандартним відхиленням 1,6 хв. 1. Знайти ймовірність того, що дзвінок триватиме від 5 до 10 хв. 2. Знайти ймовірність того, що дзвінок триватиме більше ніж 7 хв. 3. Знайти ймовірність того, що дзвінок триватиме менше ніж 4 хв. 4. Скільки тривають 10 % найдовших дзвінків?

9.38. Вага товарів, які розміщені в контейнері певного розміру, — нормально розподілена випадкова величина. Відомо, що у 65 % контейнерів вага товарів менша ніж 4,9 тонни і у 25 % — менша ніж 4,2 тонни. Знайти середню вагу товарів у контейнері та її стандартне (середньоквадратичне) відхилення.

9.39. Туристичне агентство «За трьома морями» створює веб-сайт і завантажує відео із запропонованими турами. Кількість людей, які заходять на сайт за день, розподіляється згідно з нормальним законом із середньою кількістю 10000 осіб і стандартним відхиленням 2400 осіб. 1. Яка ймовірність того, що за один день відео подивляться більше ніж 12000 осіб? 2. Яка ймовірність того, що за один день відео подивляться менше ніж 9000 осіб?

9.40. Припустимо, що протягом року ціни на акції певної компанії підпорядковувалися нормальному закону розподілу з математичним сподіванням, рівним 48 умов. грош. од., і стандартним відхиленням, що дорівнює 6 умов. грош. од. Чому дорівнює ймовірність того, що у випадково вибраний день обговорюваного періоду ціна за акцію була: більша від 60 умов. грош. од.? Нижча ніж 60 за акцію? Вища ніж 40 за акцію? Між 40 і 50 за акцію?

9.41. Зріст дітей 2-річного віку нормально розподілений із середнім значенням 76,8 см і стандартним відхиленням 3,6 см. Педіатри вважають, що дитина має негаразди зі здоров'ям, якщо вона знаходиться у вищій чи нижчій від 5 % межі. 1. Визначте верхню та нижню межу росту дітей, які можуть мати проблеми. 2. Знайдіть імовірність того, що дитина буде вища за 86,4 см. 3. Знайдіть імовірність того, що дитина буде нижча за 84 см. 4. Знайдіть імовірність того, що зріст дитини буде в інтервалі від 72 до 79,2 см.

9.42. Денний видобуток вугілля в деякій шахті розподілений за нормальним законом з математичним очікуванням 785 т і стандартним відхиленням 60 т. Знайдіть імовірність того, що принаймні 800 т будуть здобуті в заданий день. Визначте відсоток робочих днів, в які буде видобуто від 750 т до 850 т вугілля. Знайдіть імовірність того, що в даний день видобуток вугілля впаде нижче від 665 т.

9.43. Студенти університету в середньому витрачають на сон 7,2 год. за добу зі стандартним відхиленням 40 хв. 1. Якщо кількість часу, що витрачається на сон, розподіляється згідно з нормальним законом, то яка частина студентів витрачає на сон більше ніж 8 год.? 2. Яка кількість годин, що витрачаються на сон, перевищується у 25 % студентів.

9.44. Згідно з нормальним законом розподілу середня кількість годин, присвячена щотижня студентами-відмінниками на вивчення теорії ймовірностей, дорівнює 7,5 год. зі стандартним відхиленням 2,1 год. 1. Яка частина студентів-відмінників витрачає на підготовку більше ніж 10 год. за тиждень? 2. Знайдіть імовірність того, що відмінник витратить від 7 до 9 год. на навчання. 3. Яка частина студентів-відмінників витрачає менш ніж 3 год. на навчання? 4. Визначте межу часу, нижче від якої займаються 5 % відмінників.

9.45. Середня кількість сторінок, яка друкується картриджем лазерного принтеру, дорівнює 11500 зі стандартним відхиленням 800 сторінок. Установили новий картридж. 1. Знайдіть імовірність того, що принтер надрукує 12000 сторінок до того, як його замінять. 2. Яка ймовірність того, що принтер надрукує менше ніж 10000 сторінок? 3. Виробник бажає надавати покупцеві інформацію щодо мінімальної кількості сторінок, які будуть надруковані. Якою має бути ця кількість, якщо продавець бажає бути правдивим у 99 % випадків?

9.46. Відсоток, що нараховується на борги за кредитними картками, є зазвичай досить великим. Саме тому власники карток намагаються сплачувати борги за кредитами протягом 24 днів до нарахування відсотків, але це не завжди є можливим. Кількість відсотків, що сплачуються власниками карток «Visa» розподіляється згідно з нормальним законом розподілу із середнім значенням 27 дол. США зі стандартним відхиленням 7 дол. США. 1. Яка частина власників карток сплачує більше ніж 30 дол. США на місяць? 2. Яка частина власників карток сплачує більше ніж 40 дол. США на місяць? 3. Яка частина власників карток сплачує менше ніж 15 дол. США на місяць? 4. Яка сума сплати відсотків на місяць перевищується лише у 20 % власників карток?

9.47. «Mensa» — це найбільша, найстаріша та найвідоміша організація для людей з найвищим коефіцієнтом інтелекту (IQ). Для того щоб потрапити до неї, треба скласти тест ліпше, ніж 98 % людей (потрапити в найвищі 2 %). Відомо, що тест IQ нормально розподілений із середнім значенням 100 балів та стандартним відхиленням 16. Знайдіть мінімальний необхідний результат тесту IQ, щоб потрапити до організації «Mensa».

9.48. Виробництво складного медичного препарату підпорядковано показниковому закону із середнім значенням 6 кг/год. Яка ймовірність того, що процес потребуватиме більше ніж 15 хв. для виробництва наступного кілограма ліків?

9.49. Кожна вантажівка, яка перетинає кордон, має бути перевірена митною службою. Час перевірки розподілений згідно з показниковим законом з середнім значенням 10 хв. Яка ймовірність того, що вантажівка потребуватиме більше ніж 15 хв. для перевірки?

9.50. Програміст використовує експоненціальний розподіл для оцінки надійності своїх програм. Знайшовши 10 помилок, він переконався, що час (у днях) до знаходження такої помилки підпорядковується експоненціальному розподілу з $M(X) = 0{,}25$. Знайдіть середній час, затрачений для знаходження першої помилки, і визначте ймовірність того, що для знаходження першої помилки знадобиться більше ніж 5 днів, а також імовірність того, що для знаходження одинадцятої помилки буде потрібно від 3 до 10 днів.

9.51. Менеджер автозаправки зробив обстеження і встановив, що кількість часу, яка необхідна для того, щоб водій заправив власну машину, розподіляється згідно з показниковим законом із середнім значенням 7,5 хв. Яка ймовірність того, що машина буде заправлена менше ніж за 5 хв.?

9.52. Час, проведений біля банкомату, змінюється згідно з показниковим законом із середнім значенням 125 с. Яка частина клієнтів банку потребує більше ніж 3 хв. на використання банкомату?

9.53. Менеджер супермаркету визначив, що час, необхідний касиру для обслуговування покупця, розподіляється згідно з показниковим законом із середнім значенням 6 хв. Якій частині покупців необхідно більше ніж 10 хв., щоб розрахуватися?

9.54. Кандидат на виборах сподівається, що 25 % виборців у певній області підтримують його виборчу платформу. З числа виборців даної області навмання вибрано 75 осіб. Оцінити ймовірність того, що фактична частка виборців, що підтримують кандидата, серед 75 відрізняється від сподіваної частки більше ніж на 0,09.

9.55. Термін служби жорсткого диска комп'ютера — ВВ, що розподілена за показниковим законом з $M(X) = 10000$ год. Знайти частку жорстких дисків, термін служби яких перевищує 15000 год.

9.56. Припускаємо, що протягом року ціна акції деякої компанії є ВВ, що розподілена за нормальним законом з $M(X) = 50$ у.о. та $\sigma = 6$. Знайти ймовірність того, що у випадково вибраний день періоду, який розглядається, ціна за акцію буде: а) більша від 58 у.о. за акцію; б) менша від 58 у.о. за акцію; в) більша від 42 у.о. за акцію; г) між 42 і 52 у.о. за акцію.

§ 10. Функції випадкового аргументу

1. Математичне сподівання та дисперсія функції випадкового аргументу. Нехай задано закон розподілу випадкової величини X, а випадкова величина Y є функцією від випадкового аргументу X, тобто $Y = \varphi(X)$. Для обчислення числових характеристик функції випадкового аргументу не обов'язково знати закон її розподілу, для цього достатньо знати лише закон розподілу аргументу.

Якщо X — дискретна випадкова величина, закон розподілу якої

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

,

то математичне сподівання та дисперсію випадкової величини Y можна знайти за формулами:

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i \; ; \qquad (1.10.1)$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi(x_i) - M(Y)\right)^2 p_i \qquad (1.10.2)$$

або

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i))^2 p_i - M(Y))^2 \, . \qquad (1.10.3)$$

Якщо X — неперервна випадкова величина, щільність розподілу якої $f(x)$, то математичне сподівання та дисперсію випадкової величини Y можна знайти за формулами:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \; ; \qquad (1.10.4)$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - M(Y))^2 f(x) dx \; ; \qquad (1.10.5)$$

або

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi(x))^2 f(x)dx-(M(Y))^2 . \qquad (1.10.6)$$

2. Закон розподілу функції дискретного випадкового аргументу. Нехай задано ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

.

Для того щоб знайти закон розподілу випадкової величини $Y=\varphi(X)$, треба обчислити значення $y_i=\varphi(x_i)$, упорядкувати значення $\varphi(x_i)$ за зростанням і, якщо серед них є однакові, записати їх один раз, додавши їхні ймовірності.

3. Закон розподілу функції неперервного випадкового аргументу. Нехай X— неперервна на інтервалі $(a; b)$ випадкова величина, щільність розподілу якої $f(x)$, а випадкова величина Y зв`язана з нею функціональною залежністю $Y=\varphi(X)$. Якщо функція $y=\varphi(X)$ монотонна та диференційовна на $(a; b)$, то щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини Y знаходять за формулою

$$g(y)=f(\psi(y))\,|\,\psi'(y)\,|. \qquad (1.10.7)$$

$$y\in(\varphi(a);\varphi(b)).$$

Якщо $y=\varphi(X)$ в інтервалі $(a; b)$ можливих значень випадкової величини X — немонотонна диференційовна функція, то розбиваємо цей інтервал на k частинних інтервалів, у кожному з яких функція $y=\varphi(x)$ монотонна, і на кожному інтервалі монотонності знаходимо обернені функції $x=\psi_i(y)$.

Щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини Y знаходять за формулою

$$g(y)=\sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y))\,|\,\psi_i'(y)\,|. \qquad (1.10.8)$$

$$y\in(\varphi(a);\varphi(b)).$$

Задачі

10.1. Задано закон розподілу випадкової величини X:

x_i	–2	1	2	3	5
p_i	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

.

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y = X^2 - 4$.

10.2. Задано закон розподілу випадкової величини X:

x_i	–3,5	–1,7	2,6	3,9	6,8	8,1
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

.

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $Y = 4X - 5$.

10.3. Задано закон розподілу випадкової величини X:

x_i	$-\pi/2$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/2$
p_i	0,1	0,2	0,1	0,3	0,3

.

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $Y = \sin X$.

10.4. Задано закон розподілу випадкової величини X:

x_i	$-\pi/2$	$-\pi/3$	0	$\pi/3$	$\pi/2$
p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

.

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $Y = 2\cos X + 1$.

10.5. Задано закон розподілу випадкової величини X:

x_i	0,1	1	10	100	1000
p_i	0,1	0,1	0,4	0,3	0,1

.

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y = 0{,}5\lg X - 1$.

10.6. Задано закон розподілу випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \frac{1}{24}(3x^2-1), & 1<x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y = X^3$.

10.7. Випадкова величина X розподілена за законом, щільність якого

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ a(2x-3), & 1<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Знайти a, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини $Y=\sqrt{X}$.

10.8. Випадкова величина X розподілена за показниковим законом

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 4e^{-4x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання випадкової величини $Y = 2X - 3$.

10.9. Ребро куба виміряно наближено. Розглядаючи ребро куба як випадкову величину X, рівномірно розподілену в інтервалі (a; b), знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини Y — об'єму куба.

10.10. Дискретна випадкова величина X має ряд розподілу

x_i	–2	–1	1	2	4
p_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

.

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^2 - 4$.

10.11. Дискретна випадкова величина X має ряд розподілу

x_i	–3	–2	–1	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

.

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = 2X^2 - 10$.

10.12. Задано закон розподілу випадкової величини X:

x_i	$-\pi/2$	$-\pi/3$	0	$\pi/3$	$\pi/2$
p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

.

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = 2\cos x$.

10.13. Дискретна випадкова величина X має ряд розподілу

x_i	0	$\pi/6$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π
p_i	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

.

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = 4\sin X + 1$.

10.14. Випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = \sin X$.

10.15. Випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = 4\operatorname{tg} X$.

10.16. Випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $(0;\ 2\pi)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = \cos X$.

10.17. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-3)^2}{2}}, \ -\infty < x < +\infty .$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = 4X$.

10.18. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < x < +\infty .$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = \dfrac{1}{X}$.

10.19. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, \ -\infty < x < +\infty .$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

10.20. Випадкова величина X розподілена за показниковим законом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 3e^{-3x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = e^X$. Обчислити її математичне сподівання та дисперсію.

10.21. Випадкова величина X розподілена за показниковим законом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = e^{-X}$. Обчислити її математичне сподівання та дисперсію.

10.22. Випадкова величина X розподілена за законом, щільність якого

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ ax^2, & 1 < x \leq 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти a та щільність розподілу випадкової величини $Y = \sqrt{X} - 1$. Обчислити її математичне сподівання та дисперсію.

10.23. Випадкова величина X розподілена за законом, щільність якого

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ a\sqrt{x}, & 1 < x \leq 9; \\ 0, & x > 9. \end{cases}$$

Знайти a та щільність розподілу випадкової величини $Y = X^2$. Обчислити її математичне сподівання та дисперсію.

10.24. Похибки при вимірюванні радіуса кола розподілені за нормальним законом з параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Знайти закон розподілу похибки при обчисленні довжини кола.

§ 11. Системи випадкових величин

1. Системи випадкових величин та закони їх розподілу. ***Системою випадкових величин*** (***або випадковою точкою***) називають сукупність випадкових величин, що розглядаються разом.

Законом розподілу системи двох випадкових величин (***X***, ***Y***) називають співвідношення між усіма можливими значеннями (X, Y) та відповідними їм імовірностями. Система випадкових величин називається ***дискретною***, якщо її компоненти є дискретними випадковими величинами, і ***неперервною***, якщо її компоненти є неперервними випадковими величинами.

Функцією розподілу двовимірної випадкової величини (***X***, ***Y***) називається функція $F(x, y)$, яка для будь-яких дійсних значень x та y дорівнює ймовірності сумісного настання двох подій: $(X < x)$ та $(Y < y)$, тобто

$$F(x, y) = P(X < x;\ Y < y). \tag{1.11.1}$$

Аналогічно визначають функцію розподілу системи n випадкових величин

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \\ = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, X_3 < x_3, \ldots, X_n < x_n). \tag{1.11.2}$$

За відомою функцією розподілу $F(x, y)$ можна знайти ймовірність попадання випадкової точки (x, y) у прямокутник $ABCD$:

$$P(x_1 \le X \le x_2;\ y_1 \le Y \le y_2) = F(x_2, y_2) + \\ + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1). \tag{1.11.3}$$

2. Числові характеристики системи випадкових величин. Для системи дискретних випадкових величин $(X; Y)$ точка з координатами $(M(X); M(Y))$ — це точка, навколо якої групуються випадкові точки $(X; Y)$, тому вона називається ***центром розподілу*** (***або центром розсіювання***). Для знаходження координат центру розподілу (розсіювання) використовують формули:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}\ ;\ M(Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_j p_{ij}\,. \tag{1.11.4}$$

Дисперсію одновимірного випадкового вектора X, яка визначає розсіювання в напрямі Ox, знаходимо за формулою

$$D(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_{ij} \qquad (1.11.5)$$

за означенням дисперсії або за більш зручною для обчислення формулою

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X),$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i^2 p_{ij}\,, \qquad (1.11.6)$$

Середнє квадратичне відхилення в напрямі Ox знаходимо за формулою

$$\sigma_X=\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,. \qquad (1.11.7)$$

Дисперсію одновимірної випадкової величини Y, яка означає розсіювання в напрямі Oy, знаходимо за формулою

$$D(Y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(y_j-M(Y))^2 p_{ij}\,,$$

або

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)\,; \qquad (1.11.8)$$

$$M(Y^2)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_j^2 p_{ij}\,,$$

$\sigma_Y=\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}$ — середнє квадратичне відхилення в напрямі Oy.

Початковим моментом порядку (k, r) системи двох випадкових величин (X, Y) називається величина

$$\nu_{k,r}=M(X^k\cdot Y^r)\,. \qquad (1.11.9)$$

Якщо $k=1,\ r=0$, маємо $\nu_{1,0}=M(X)$; якщо $k=0,\ r=1$, маємо $\nu_{0,1}=M(Y)$.

Центральним моментом порядку (k, r) називається величина

$$\mu_{k,r}=M((X-M(X))^k\cdot(Y-M(Y))^r)\,. \qquad (1.11.10)$$

Якщо $k=2,\ r=0,$ маємо $\mu_{2,0}=M(X-M(X))^2=D(X)$; якщо $k=0,\ r=2$, маємо $\mu_{0,2}=M(Y-M(Y))^2=D(Y)$.

Кореляційним моментом (або коваріацією) двох випадкових величин X і Y називають математичне сподівання добутку відхилень цих випадкових величин від їх математичних сподівань:

$$K_{XY}=M\left[\left(X-M\left(X\right)\right)\cdot\left(X-M\left(Y\right)\right)\right]=M\left(XY\right)-M\left(X\right)M\left(Y\right). \quad (1.11.11)$$

У теорії двовимірних величин K_{XY} відіграє важливу роль, оскільки він характеризує наявність залежності випадкових величин системи, а також, деякою мірою, їх розсіювання відносно відповідних математичних сподівань.

Для дискретних випадкових величин:

$$K_{XY}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i-M\left(X\right)\right)\left(y_j-M\left(Y\right)\right)p_{ij}, \qquad (1.11.12)$$

або

$$K_{XY}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j p_{ij}-M(X)M(Y). \qquad (1.11.13)$$

Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $K_{XY}=0$.

Дисперсія суми (різниці) двох випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій плюс (мінус) подвоєна коваріація цих випадкових величин:

$$D\left(X\pm Y\right)=D(X)+D(Y)\pm 2K_{XY}. \qquad (1.11.14)$$

Коефіцієнт кореляції двох випадкових величин X і Y є відношенням коваріаці до добутку їх середніх квадратичних відхилень:

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{D\left(X\right)}\sqrt{D\left(Y\right)}}. \qquad (1.11.15)$$

r_{XY} характеризує ступінь лінійної залежності між X і Y.

Властивості r_{XY}:

1. $|r_{XY}|\le 1$, $-1\le r_{XY}\le 1$.

2. Якщо X і Y незалежні, то $r_{XY}=0$.

3. Якщо X і Y зв'язані лінійною функціональною залежністю ($Y=aX+b$, $a\neq 0$), то $|r_{XY}|=1$.

4. Якщо $|r_{XY}|=1$, то випадкові величини X і Y зв'язані лінійною функціональною залежністю: (якщо $r=1$ — пряма, а якщо $r=-1$ — обернена залежність).

Випадкові величини X і Y називаються ***некорельованими***, якщо $|r_{XY}|=0$ або $K_{XY}=0$. Незалежні величини завжди є некорельованими.

Якщо дві випадкові величини X і Y корельовані ($r_{XY} \neq 0$; $K_{XY} \neq 0$), то вони завжди залежні.

Якщо $r_{XY} = 0$ або $K_{XY} = 0$, то це не означає їх незалежність. Це означає відсутність лінійної залежності між випадковими величинами, але інший вид залежності може бути. Із незалежності величин випливає їх некорельованість, але з некорельованості не випливає їх незалежність.

Для системи випадкових величин (X_1, X_2, …, X_n) числові характеристики задаються вектором математичних сподівань $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. $a_i = M(X_i)$ і кореляційною матрицею

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.11.16)$$

де елементи головної діагоналі $K_{ij} = \sigma^2(X_i) = D(X_i),\ i = \overline{1, n}$ та $K_{ij} = K_{X_i Y_j} = K_{ji}$.

Якщо кожен елемент цієї матриці поділимо на добуток $\sigma_{X_i}\sigma_{Y_j}$, дістанемо матрицю, складену з коефіцієнтів кореляції, або нормовану кореляційну матрицю:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.11.17)$$

Обидві матриці симетричні, тому часто записують тільки елементи, розташовані на головній діагоналі та над нею.

Кореляційні моменти і дисперсії системи двох випадкових величин задаються кореляційною матрицею $\begin{pmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} D(X) & K_{XY} \\ & D(Y) \end{pmatrix}$.

3. Умовні закони розподілу. ***Умовним законом розподілу*** випадкової величини, що входить до системи (X, Y), називається закон розподілу, який знайдено за умови, що інша випадкова величина набула певного значення.

Для системи двох дискретних випадкових величин умовні закони розподілу задають формулами:

$$P(y_j/x_i) = P\left(Y = y_j / X = x_i\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_i\right)}{P\left(X = x_i\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{x_i}},$$
$$i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}. \quad (1.11.18)$$

Це умовна ймовірність того, що випадкова величина Y набуде значення y_j за умови, що $X = x_i$.

Аналогічно:

$$P(x_i/y_j) = P\left(X = x_i / Y = y_j\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_i\right)}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{p_{ij}}{p_{y_j}},$$
$$i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\,. \quad (1.11.19)$$

Це умовна ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення x_i за умови, що $Y = y_j$.

Важливою характеристикою умовного розподілу є умовне математичне сподівання.

Умовним математичним сподіванням однієї з випадкових величин, які складають систему, називається її математичне сподівання, обчислене за умови, що інша випадкова величина набула певного значення. Позначається $M(Y/X = x)$ або $M(X/Y = y)$ і обчислюється за умовним законом розподілу:

$$M(Y/x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j P(y_j/x_i);\ M(X/y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i P(x_i/y_j)\,. \quad (1.11.20)$$

Умовне математичне сподівання $M(Y/x) = \varphi(x)$ називають ***функцією регресії***, або просто ***регресією***, випадкової величини Y до X.

Умовне математичне сподівання $M(X/y) = \varphi(y)$ називають ***функцією регресії***, або просто ***регресією***, випадкової величини X *до* Y.

Графіки цих функцій називають ***лініями регресії*** X до Y (або X на Y); Y до X (або Y на X).

Задачі

11.1. Передаються два SMS-повідомлення, кожне з яких незалежно одне від одного може бути не одержане. Ймовірність того, що перше повідомлення не буде одержане, дорівнює 0,1, а друге — 0,2. Визначити систему двох випадкових величин (X, Y):

$X = 1$, якщо перше SMS-повідомлення одержане,

$X = 0$, якщо перше SMS-повідомлення не одержане,
$Y = 1$, якщо друге SMS-повідомлення одержане,
$Y = 0$, якщо друге SMS-повідомлення не одержане.

Знайти закон сумісного розподілу системи (X, Y); $F(x)$; $F(y)$; $F(x; y)$.

11.2. Із чотирьох студентів університету, два з яких навчаються на обліково-економічному факультеті, один – на фінансовому та один – на факультеті МЕіМ, банк бере на роботу лише двох. Ймовірність працевлаштування для кожного студента вважається однаковою. Випадкова величина X — кількість вибраних студентів з фінансового факультету, Y — кількість вибраних студентів з факультету МЕіМ. Скласти закон розподілу системи (X, Y); знайти закони розподілу X та Y; $F(x)$; $F(y)$; $F(x; y)$. Чи залежні величини X та Y?

11.3. Фармацевтична компанія розробила три нові препарати. За результатами фінансово-економічного аналізу прибуток компанії гарантує масовий випуск хоча б двох із трьох нових препаратів. Масовий випуск кожного препарату гарантує прибуток лише з імовірністю 0,8. Ймовірність запуску в масове виробництво для кожного препарату вважаємо рівною 0,4. X — загальна кількість препаратів, які допущені до масового виробництва, Y — стан прибутковості компанії ($Y = 0$, якщо компанія не одержала прибутку; $Y = 1$, якщо прибуток одержано). Потрібно: а) скласти закон розподілу (X, Y); б) знайти $F(x, y)$; в) обчислити $M(X)$, $M(Y)$, K_{XY}, r_{XY}. Записати кореляційну матрицю; г) обчислити ймовірність події $P(0 \le X \le 2; 0 \le Y < 1)$; дати тлумачення цієї ймовірності.

11.4. Фірма пропонує три варіанти проекту двом будівельним організаціям. Закон розподілу системи (X, Y) задано таблицею:

$X=x_i$	$Y=y_j$	
	1	2
1	0,2	0,1
2	0,3	0,2
3	0,1	0,1

тут X — номер проекту; Y — номер організації; p_{ij} — імовірність прийняття j-ю організацією i-го проекту.

Знайти закони розподілу X і Y та пояснити їх імовірнісне значення. Обчислити r_{XY} та пояснити результат обчислення.

11.5. Система двох дискретних випадкових величин (X, Y) задана законом розподілу у вигляді таблиці, поданої далі. Потрібно: а) обчислити a; б) для кожної випадкової величини X та Y, які утворюють систему, знайти безумовний закон розподілу, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, одновимірну функцію розподілу та її графік; в) побудувати двовимірну функцію розподілу $F(x, y)$, обчислити ймовірність події $P(x_1 \le X \le x_2; y_2 \le Y \le y_3)$; г) записати кореляційну матрицю, обчислити коефіцієнт кореляції системи; д) побудувати умовні закони розподілу та обчислити умовні математичні сподівання $M(Y/X = x_1)$ та $M(X/Y = y_2)$.

	x_i	y_j		
В1		2	2,4	3,6
	–0,2	0,2	0,1	a
	0	0,25	0,07	0,3

	x_i	y_j		
В6		–0,5	1,4	2,6
	–0,7	0,1	0,12	a
	0	0,24	0,2	0,12

	x_i	y_j		
В2		–1,3	0,3	2,4
	0	0,27	a	0,23
	0,7	0,1	0,1	0,21

	x_i	y_j		
В7		–0,3	0	2,4
	0,1	0,22	a	0,1
	1	0,26	0,14	0,12

	x_i	y_j		
В3		0,3	1,5	2,3
	0	0,1	0,2	a
	0,4	0,25	0,2	0,13

	x_i	y_j		
В8		–0,3	1,2	2
	0	0,14	0,16	0,2
	0,4	0,22	0,24	a

	x_i	y_j		
В4		–2,3	–0,5	1,2
	–0,6	a	0,26	0,2
	0	0,12	0,12	0,15

	x_i	y_j		
В9		–2,6	–1	2
	–0,2	0,16	0,2	0,1
	0	a	0,2	0,22

	x_i	y_j		
В5		–0,3	0	0,7
	–0,2	0,28	0,22	0,12
	0,5	0,1	0,03	a

	x_i	y_j		
В10		0	0,4	1,3
	–0,4	0,24	0,22	0,1
	1,1	a	0,18	0,1

11.6. Визначити щільність розподілу ймовірностей системи двох додатних випадкових величин (X, Y) за заданою функцією розподілу:

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-5x}\right)\left(1-e^{-3y}\right); & (x,y)\in\Omega,\ \ \Omega=\{x\geq 0; y\geq 0\};\\ 0; & (x,y)\notin\Omega\end{cases}$$

11.7. Двовимірна щільність має вигляд:

$$f(x,y)=\begin{cases}a,\ \text{при}\ (x;y)\in D,\\ 0,\ \text{при}\ (x;y)\notin D,\end{cases}$$

$$D=\{(x,y)/-3<x\leq 5;\quad -2<y\leq 7\}.$$

Обчислити сталу a.

11.8. Закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) задано щільністю ймовірностей:

$$f(x,y)=\begin{cases}0; & x\leq 3, & y\leq 5;\\ a; & 3<x\leq 7, & 5<y\leq 18;\\ 0; & x>7, & y>18.\end{cases}$$

Знайти a та $F(x;y)$ і обчислити $P(5\leq X\leq 7;\ 6\leq Y<11)$.

11.9. Закон розподілу двох неперервних випадкових величин (X, Y) задано щільністю розподілу ймовірностей

$$f(x,y)=\begin{cases}a(x+3y), & (x,y)\in\Omega=\begin{cases}0\leq x\leq 2,\\ x\leq y\leq 2,\end{cases}\\ 0; & (x,y)\notin\Omega.\end{cases}$$

Знайти a.

11.10. Система випадкових величин (X, Y) рівномірно розподілена в області D (рис. 8). Знайти закони розподілу величин, які входять в систему: $f_1(x)$ та $f_2(y)$.

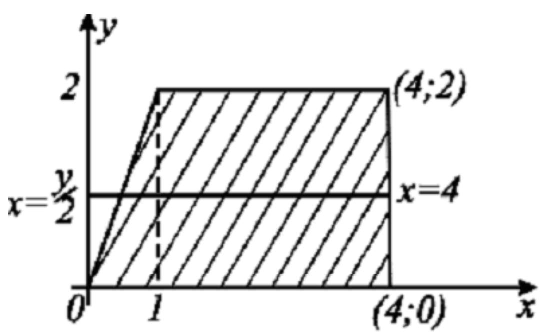


Рис. 8

11.11. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини $F(x,y)$:

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y, & (x,y)\in\Omega,\ \ \Omega=\{x\ge 0; y\ge 0\},\\ 0, & (x,y)\notin\Omega.\end{cases}$$

Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у прямокутник, обмежений лініями $x = 0$; $x=\frac{\pi}{4}$; $y=\frac{\pi}{6}$; $y=\frac{\pi}{3}$.

11.12. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини $F(x,y)$:

$$F(x;y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & (x,y)\in\Omega;\ \ \Omega=\{x\ge 0; y\ge 0\};\\ 0, & (x,y)\notin\Omega.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей і перевірити виконання умови нормування.

11.13. Щільність розподілу ймовірностей системи випадкових величин задана виразом $f(x,y) = a\cdot\cos(x-y)$, якщо $(x,y)\in\Omega$; $f(x,y) = 0$, якщо $(x,y)\notin\Omega$, де $\Omega=\{0\le x\le \pi/2;\ 0\le y\le \pi/2\}$. Визначити a і K_{XY}.

11.14. Система випадкових величин (X, Y) має щільність ймовірностей

$$f(x,y)=\frac{a}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)},\ \text{якщо}\ (X,Y)\in\Omega,$$

де $\Omega=\{-\infty<x<\infty; -\infty<y<\infty\}$. Знайти a і $F(x, y)$, r_{XY}.

11.15. За заданою функцією розподілу ймовірностей $F(x,y) = (1-e^{-4x})(1-e^{-5x})$, $x\ge 0$, $y\ge 0$. Знайти $f(x, y)$ і r_{XY}.

11.16. За заданою функцією розподілу ймовірностей системи (X, Y):

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le -6, & y\le 2;\\ \dfrac{x+6}{8}, & -6<x\le 2, & y>4;\\ \dfrac{(x+6)(y+2)}{48}, & -6<x\le 2, & -2<y\le 4;\\ \dfrac{y+2}{6}, & x>2, & -2<y\le 4;\\ 1, & x>2, & y>4.\end{cases}$$

Знайти K_{XY}. Обчислити $P(-2 < X < 1; -1 < Y < 3)$.

11.17. Двовимірна випадкова величина (X, Y) задана щільністю сумісного розподілу:

$$f(x,y)=\begin{cases} Cxy, & \text{якщо } (x,y)\in D;\\ 0, & \text{якщо } (x,y)\notin D, \end{cases}$$

де D — область на площині $\begin{cases} y>-x,\\ y<2,\\ x<0. \end{cases}$

Знайти безумовний та умовний розподіл для X. Показати, що випадкові величини X і Y залежні.

11.18. Задано $f(x,y)=ae^{-x^2+xy-y^2}$, $(x,y)\in R^2$. Знайти a, $M(X/y)$, $M(Y/x)$.

§ 12. Граничні теореми теорії ймовірностей

1. Перша форма нерівності Чебишова. Якщо випадкова величина X набуває тільки невід'ємних значень і має скінченне математичне сподівання, то

$$P(X>\alpha)\le\frac{M(X)}{\alpha}. \qquad (1.12.1)$$

2. Друга форма нерівності Чебишова. Якщо випадкова величина X має скінченні математичне сподівання та дисперсію, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (1.12.2)$$

3. Теорема Чебишова. Якщо послідовність попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ має скінченні математичні сподівання та рівномірно обмежені дисперсії $D(X_i) \le C$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (1.12.3)$$

З теореми Чебишова випливає, що середнє арифметичне випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ за достатньо великого n буде з імовірністю, близькою до 1, як завгодно мало відрізнятися від середнього арифметичного їхніх математичних сподівань, тобто середнє арифметичне випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ за достатньо великого n поводить себе, майже як стала величина.

4. Теорема Чебишова (частинний випадок). Якщо послідовність попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,$ які мають однакові математичні сподівання $M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n) = \ldots = a$ та дисперсії $D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_n) = \ldots = D$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D}{n\varepsilon^2}. \qquad (1.12.4)$$

5. Теорема Бернуллі. Проводяться незалежні випробування, у кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p. Нехай у n випробуваннях подія A відбулась m разів. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (1.12.5)$$

Ця нерівність дає оцінку ймовірності відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ від теоретичної ймовірності появи події у кожному випробуванні в умовах схеми Бернуллі.

6. Теорема Пуассона. Проводяться незалежні випробування, у кожному з яких подія A з'являється з різними ймовірностями p_i, $i = \overline{1,n}$. Нехай у n випробуваннях подія A відбулась m разів. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i}{n^2\varepsilon^2}. \qquad (1.12.6)$$

7. Центральна гранична теорема для однаково розподілених випадкових величин. Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — незалежні випадкові величини, внесок кожної з яких в загальну їх суму незначний та які мають той самий закон розподілу зі скінченною дисперсією, то за необмеженого зростання n закон розподілу суми $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ необмежено наближається до нормального.

8. Інтегральна теорема Лапласа. Наслідком центральної граничної теореми є інтегральна теорема Лапласа. Нехай проведено n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p. Тоді для великих значень n імовірність появи події A від m_1 до m_2 разів обчислюється за формулою

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_n(m_1; m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (1.12.7)$$

З інтегральної теореми Лапласа випливає, що відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ появи події A від її ймовірності p обчислюється за формулою

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (1.12.8)$$

Задачі

12.1. Випадкова величина X має обмежені $M(X)$ та $D(X) = \sigma^2$. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 4\sigma$.

12.2. Дано: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 0{,}9$ і $D(X) = 0{,}009$. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити значення ε.

12.3. Імовірність появи випадкової події в кожному зі 100 експериментів дорівнює 0,8. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 10$.

12.4. Середня річна кількість опадів у даній місцевості дорівнює 40 см. Використавши нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що в цій місцевості випаде за рік більше ніж 150 см опадів.

12.5. Середній урожай пшениці в агропромисловому господарстві становив 22 ц/га. Яка ймовірність того, що з навмання взятого гектара одержано врожай більший за 25 ц/га?

12.6. Середня щоденна витрата води в населеному пункті становить 80000 л. Оцінити ймовірність того, що певного дня у цьому населеному пункті витрата води не буде перевищувати 120000 л.

12.7. Середня річна кількість дощових днів у Київській області дорівнює 30. Оцінити за допомогою нерівності Чебишова ймовірність того, що протягом року в цій місцевості буде менше від 50 дощових днів.

12.8. Середня вага картоплини сорту «Слов'яночка» дорівнює 300 г. Застосовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що навмання взята картоплина важить не більше 800 г.

12.9. Середні щоденні витрати сім'ї на харчування — 240 грн. Оцінити ймовірність того, що певного дня ці витрати не вийдуть за межі 220—260 грн, якщо їхня дисперсія дорівнює 40 грн.

12.10. У результаті аналізу діяльності певної фірми встановлено, що середньомісячні витрати на рекламу становлять 30000 грн за стандартного (середнього квадратичного) відхилення 4700 грн. Оцінити ймовірність того, що наступного місяця витрати на рекламу не вийдуть за межі 28000—32000 грн.

12.11. Щоденний середній виторг крамниці — 45 тис. грн. Тривалі спостереження показують, що стандартне (середнє квадратичне) відхилення щоденного виторгу дорівнює 1200 грн. Оцінити ймовірність того, що певного дня виторг крамниці буде: 1) від 40 тис. грн до 50 тис. грн; 2) від 43 тис. грн до 47 тис. грн.

12.12. Мережа складається з 20 паралельно з'єднаних електричних ламп. Ймовірність того, що за час T лампа буде ввімкнена, дорівнює 0,8. За нерівністю Чебишова оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю увімкнених ламп і середньою кількістю ввімкнених за час T ламп буде: 1) менша від 4; 2) не менша від 2.

12.13. Ймовірність проростання насіння перцю дорівнює 0,7. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що з 600 посіяних городником насінин перцю зійде від 400 до 440 насінин.

12.14. Імовірність появи випадкової події в кожному з 400 випробувань дорівнює 0,5. Оцінити ймовірність того, що в цих незалежних випробуваннях подія відбудеться від 180 до 220 разів: 1) за допомогою нерівності Чебишова; 2) за допомогою інтегральної теореми Лапласа.

12.15. На упаковці локшини «Екстра» надруковано, що її маса 1000 г ± 1,5 %. Товариство споживачів провело зважування контрольної партії з 20 упаковок. Виявилось, що одна упаковка має вагу 994 г, дві упаковки по 996 г, шість упаковок по 999 г, дев'ять упаковок по 1000 г та дві упаковки по 1010 г. За допомогою нерівності Чебишова оцінити, чи варто довіряти зазначеному на упаковці напису?

12.16. Верстат-автомат штампує заглушки для дюймових труб. Діаметр заглушки є випадковою величиною. При його вимірюванні у 2 випадках діаметр заглушки виявився рівним 25,55 мм, у 5 випадках — 25,58 мм, у 7 випадках діаметр виявився рівним

25,6 мм, у 4 випадках — 25,63 мм, а у 2 випадках — 25,64 мм. Знайти нижню межу ймовірності того, що діаметр деталі буде: 1) між 25,52 мм і 25,68 мм; 2) між 25,55 мм і 25,70 мм.

12.17. Дисперсія кожної з 3000 незалежних випадкових величин не більша від 6. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середньої арифметичної цих випадкових величин від середньої їх математичних сподівань не перевищить 0,3.

12.18. Дисперсія випадкової величини X дорівнює 4. За результатами 200 незалежних дослідів обчислена середня арифметична $\bar{x}$, якою замінили невідоме значення $M(X) = a$. Яке найменше значення ймовірності того, що ця заміна призведе до помилки менше ніж 0,5?

12.19. З якою надійністю середнє арифметичне результатів вимірювань певної величини відповідає істинному її значенню, якщо було здійснено 500 вимірювань з точністю 0,1, і при цьому дисперсії випадкових величин — результатів вимірювання — не перевищують 0,3?

12.20. Скільки вимірювань величини треба провести, щоб середнє арифметичне їхніх результатів відрізнялось від істинного значення не більше ніж на 0,05 з надійністю 90 %, якщо дисперсії результатів вимірювань не перевищують 0,2?

12.21. Середнє квадратичне відхилення кожної з 2134 незалежних випадкових величин не більше від 4. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середньої арифметичної цих випадкових величин від середньої їх математичних сподівань не перевищить 0,5.

12.22. Для визначення середньої врожайності на площі 12000 га взято навмання по одному гектару від кожної ділянки площею 50 га. Визначити ймовірність того, що середня вибіркова врожайність буде відрізнятися від справжньої середньої на всій площі не більше ніж на 0,5 ц, якщо дисперсія врожайності на окремих ділянках (по 50 га) не перевищує 2 ц.

12.23. Визначтити з ймовірністю (надійністю) не меншою від 0,95, яким буде відхилення вибіркової середньої врожайності від середньої врожайності на всій площі, що становить 8000 га, якщо з кожної ділянки площею 100 га навмання було взято по одному гектару, а максимальна дисперсія на окремих ділянках не перевищує 1 ц.

12.24. До порту надійшли 180 контейнерів, у кожному з яких ящики з бананами. Для визначення середньої ваги ящика бананів з партії було взято по одному ящику з кожного контейнера. За умови, що середнє квадратичне відхилення ваги ящика в кожному контейнері не перевищує 0,3 кг, визначте з надійністю 0,95 відхилення середньої ваги ящика у вибірці від середньої його ваги в усій партії.

12.25. На складі зберігаються яблука, мандарини та банани в ящиках масою 10 кг, 12 кг, 15 кг та 20 кг. Маса ящика яблук — випадкова величина X_1, закон розподілу якої

X_1	10	15	20
p	0,1	0,3	0,6

Маса ящика мандаринів — випадкова величина X_2, закон розподілу якої

X_2	10	12	15	20
p	0,2	0,4	0,1	0,3

Маса ящика бананів — випадкова величина X_3, закон розподілу якої

X_3	15	20
p	0,3	0,7

До вантажівки завантажили 100 навмання вибраних ящиків яблук, 200 ящиків мандаринів та 150 ящиків бананів. Оцінити ймовірність того, що середня маса ящика у вантажівці відрізняється від середньої маси ящика на складі не більше ніж: а) на 1 кг; б) на 0,5 кг.

12.26. Використовуючи теорему Бернуллі, оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи стандартної деталі від імовірності її появи 0,95 не більше ніж на величину $\varepsilon = 0{,}02$ при контролі 600 деталей.

12.27. Ймовірність виграшу на кожний лотерейний білет дорівнює 0,2. Придбано 100 білетів. Яка ймовірність того, що відносна частота виграшних білетів є в межах [0,1; 0,3]? Розв’яжіть задачу: 1) за допомогою теореми Бернуллі; 2) за допомогою інтегральної теореми Лапласа.

12.28. Цех виготовляє 90 % виробів першого сорту. Яка ймовірність того, що серед навмання взятих 200 виробів буде від 170 до 190 виробів першого сорту? Розв’яжіть задачу: 1) за теоремою Бернуллі; 2) за інтегральною теоремою Лапласа.

12.29. Ймовірність народження хлопчика 0,512. Оцінити за допомогою теореми Бернуллі ймовірність того, що з 1000 новонароджених буде від 482 до 542 хлопчиків.

12.30. Підлягають дослідженню 400 проб руди. Імовірність промислового вмісту металу в кожній пробі для всіх проб однакова і дорівнює 0,3. Використовуючи теорему Бернуллі, оцінити ймовірність того, що кількість проб із промисловим вмістом металу буде між 100 і 140.

12.31. Серед продукції, яку виробляє підприємство, у середньому 90 % першого сорту. За допомогою теореми Бернуллі з імовірністю не меншою ніж 0,9 визначте межі, в яких має бути відносна частота першосортної продукції в партії з 1000 одиниць. У яких межах є обсяг першосортної продукції у цій партії?

12.32. Імовірність того, що платіжний термінал спрацьовує при подачі купюри, дорівнює 0,995. За допомогою теореми Бернуллі визначити відхилення відносної частоти числа випадків, коли термінал спрацьовує, від їх імовірності при подачі 1000 купюр, якщо результат необхідно гарантувати з ймовірністю не меншою ніж 0,95. Визначити також межі, в яких знаходиться число випадків правильної роботи термінала.

12.33. Імовірність виготовлення майстром стандартної деталі дорівнює 0,98. Користуючись теоремою Бернуллі, обчислити, скільки деталей потрібно виготовити, щоб з імовірністю не меншою від 0,9 відносна частота виготовлення стандартної деталі відхилялась від її ймовірності на величину не більшу від 0,05.

12.34. Скільки разів треба підкинути монету, щоб з імовірністю не меншою ніж 0,95 відносна частота появи герба відхилялась від імовірності його появи на величину не більшу ніж 0,05? Розв'яжіть задачу: 1) за теоремою Бернуллі; 2) за інтегральною теоремою Лапласа.

12.35. Скільки разів треба підкинути правильний гральний кубик, щоб з імовірністю не меншою ніж 0,95 відносна частота появи шести очок відхилялась від імовірності її появи на величину не більшу ніж 0,1? Розв'яжіть задачу: 1) за теоремою Бернуллі; 2) за інтегральною теоремою Лапласа.

12.36. Скільки разів треба підкинути неправильний гральний кубик, щоб з імовірністю не меншою ніж 0,95 відносна частота появи шести очок відхилялась від імовірності її появи на величину не більшу ніж 0,1? Розв'яжіть задачу за теоремою Бернуллі.

12.37. У цеху працюють 10 верстатів-автоматів, які виробляють однотипні деталі. Два з них дають по 3 % браку кожний, три — по 2 % браку і п'ять — по 1 % браку кожний. Кожний верстат за зміну виготовив 200 деталей. За теоремою Пуассона оцінити ймовірність того, що відносна частота виготовлених за зміну бракованих деталей відрізняється від середньої ймовірності їхньої появи менше ніж на 0,01.

12.38. Ймовірність влучення в рухому ціль при одному пострілі першим мисливцем дорівнює 0,15; другим — 0,1; третім — 0,05. Перший мисливець зробив чотири постріли по цілі, другий — шість, третій — сім. За теоремою Пуассона оцінити ймовірність того, що відносна частота влучень відрізняється від їхньої середньої ймовірності менше ніж на 0,1.

12.39. Однотипні деталі виготовляються на двох верстатах. Продуктивність першого вдвічі менша продуктивності другого. Серед продукції першого верстата 5 % бракованої, другого — 2 % бракованої. За зміну виготовлено 3000 деталей. За теоремою Пуассона з імовірністю не меншою ніж 0,95 оцінити кількість бракованих деталей, вироблених за зміну двома верстатами.

12.40. При відливанні заготовок, з яких потім виготовляють деталі, одержують у середньому 20 % браку. Скільки необхідно відлити заготовок, щоб з ймовірністю не меншою ніж 0,95 серед них було не менш як 50 бездефектних?

12.41. Верстат виготовляє за зміну 800 деталей, з яких у середньому 2 % браковані. Знайти ймовірність того, що за зміну буде виготовлено не менше ніж 775 якісних деталей.

12.42. У банкомат завантажено 65000 гривень. Суми, взяті з банкомату клієнтами є випадковими величинами з математичним сподіванням 300 грн та середнім квадратичним відхиленням 120 грн. Знайти ймовірність того, що грошей у банкоматі вистачить для обслуговування 200 клієнтів.

12.43. Потяг складається з 60 вагонів. Маса кожного з них — випадкова величина з математичним сподіванням 42 т та дисперсією 16 т. Локомотив може вести потяг масою не більше ніж 2600 т. Знайти ймовірність того, що одного локомотива недостатньо для перевезення потяга.

12.44. Верстат виготовляє за зміну 1000 деталей, з яких у середньому 5 % бракованих. На скільки деталей має бути розрахований бункер для якісних виробів, щоб імовірність його переповнення не перевищувала 0,001?

12.45. Кожна з 120 незалежних випадкових величин X_i рівномірно розподілена на відрізку [0; 1]. Записати наближений закон розподілу випадкової величини $X = \sum_{i=1}^{120} X_i$.

12.46. Кожна з 80 незалежних випадкових величин X_i розподілена за показниковим законом, щільність розподілу якого

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 4e^{-4x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Записати наближений закон розподілу випадкової величини

$$Y = \sum_{i=1}^{80} X_i \ .$$

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

§ 1. Статистичний розподіл, емпірична функція, полігон, гістограма

Уся статистична сукупність елементів, яку треба вивчити, називається ***генеральною сукупністю***.

Досліджувану величину генеральної сукупності будемо позначати ***X***.

Та частина об'єктів, яка відібрана для безпосереднього вивчення із генеральної сукупності, називається ***вибірковою сукупністю*** (або просто вибіркою). Кількість елементів у генеральній чи вибірковій сукупності називають їх ***обсягами***, які будемо позначати ***N*** та ***n*** відповідно.

Значення ***X***, які попали у вибірку, називаються ***варіантами***. Їх позначимо $\boldsymbol{x_i}$ $i=\overline{1,n}$.

Вибірки бувають повторними та безповторними.

Вибірка називається ***повторною***, якщо перед вибором наступного елемента попередній повертається в генеральну сукупність.

Вибірка називається ***безповторною***, якщо перед вибором наступного елемента попередній не повертається в генеральну сукупність.

Розмах вибірки знаходять за формулою

$$R = x_{\max} - x_{\min}\,, \tag{2.1.1}$$

де $x_{\max} = \max\{x_1, x_2, \dots x_n\}$; $x_{\min} = \min\{x_1, x_2, \dots x_n\}$.

Варіаційним рядом називається вибірка, елементи (варіанти) якої розташовані у порядку зростання.

Якщо елемент x_i зустрічається n_i разів, тоді число n_i називається ***частотою*** елемента x_i, а відношення $W_i = \dfrac{n_i}{n}$ називається ***відносною частотою*** елемента x_i.

Статистичним рядом називається послідовність пар (x_i, n_i), де x_i подано за зростанням значень.

У разі коли обсяг вибірки великий, статистичні дані записують у вигляді ***інтервального статистичного ряду***.

Для побудови інтервального статистичного ряду множину значень варіант розбивають на інтервали $[a_i;\ a_{i+1})$, тобто проводять їх групування. ***Кількість інтервалів k*** рекомендується розраховувати за формулою Стерджерса:

$$k = 1 + 3{,}322 \lg n . \qquad (2.1.2)$$

Довжину інтервалу, яку позначають літерою h (або Δ), найчастіше беруть однаковою. Підраховуючи кількість значень варіант, що потрапили в інтервал $[a_i; a_{i+1})$, дістають відповідні інтервалам частоти n_i для $i = \overline{1,k}$.

Якщо значення ознаки змінюється рівномірно, то виділяють рівні інтервали груп. Їх визначають за формулою

$$h = \frac{R}{k}. \qquad (2.1.3)$$

Як правило, статистичний ряд записується у вигляді таблиці, перший рядок якої містить варіанти x_i, а другий — відповідні їм частоти n_i (табл. 1.1):

Таблиця 1.1

Варіанти x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частоти n_i (відносні частоти w_i)	n_1 (w_1)	n_2 (w_2)	…	n_k (w_k)

Інтервальний статистичний ряд у загальному вигляді можна подати таблицею (табл. 1.2):

Таблиця 1.2

Інтервали $[a_i; a_{i+1})$	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	…	$[a_{k-1}; a_k)$
Частоти n_i (відносні частоти w_i)	n_1 (w_1)	n_2 (w_2)	…	n_k (w_k)

Для статистичних рядів мають виконуватися умови:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n ; \ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1 .$$

Для наочності використовують графічне зображення статистичних рядів у вигляді полігону частот (відносних частот) та, виключно у випадку інтервального ряду, гістограми частот (відносних частот).

Полігоном частот (***відносних частот***) називається ламана лінія, що сполучає прямолінійними відрізками точки з координатами $(x_i; n_i)$ або $(x_i; w_i)$ для $i = \overline{1,k}$ у разі дискретного статистичного ряду; (c_i; n_i) або (c_i; w_i) у разі інтервального ряду, де c_i — середина і-того інтервалу, $c_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$.

***Гістограмою частот* (*або просто гістограмою*)** називають ступінчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною $h = x_{i+1} - x_i$, а висоти дорівнюють відповідному значенню частоти n_i, поділеному на h $\left(\dfrac{n_i}{h}\right)$.

Гістограмою відносних частот називається ступінчаста фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною $h = x_{i+1} - x_i$, а висоти дорівнюють відношенню відносної частоти W_i до h $\left(\dfrac{W_i}{h}\right)$.

За статистичним рядом можна встановити емпіричну функцію розподілу випадкової величини X.

Емпіричною функцією розподілу називається функція, яка дорівнює відношенню числа n_x варіант менших ніж x до обсягу вибірки n:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}. \tag{2.1.4}$$

Емпірична функція розподілу неспадна, а її графік має ступінчастий вигляд. Її називають комулятою і зображають ламаною, такою що проходить через точки $(a_i;\ F_n(a_i))$, де $i = \overline{1,k}$.

Задачі

1.1. За даними наведених далі вибірок побудувати варіаційні ряди, статистичні ряди, полігони частот та полігони відносних частот, емпіричні функції та їх графіки: а) 4, 6, 7, 7, 6, 4, 3, 4, 6, 7, 3, 7, 4, 6, 7; б) 3, 5, 10, 5, 8, 5, 3, 10, 12, 12, 12, 12, 8, 8, 10, 10, 8, 10, 10, 12, 12, 12, 10, 12.

1.2. За даними наведених далі вибірок побудувати інтервальні статистичні ряди, гістограми частот та гістограми відносних частот, емпіричні функції та їх графіки: а) 4, 6, 7, 7, 6, 4, 3, 4, 6, 7, 3, 10, 11, 2, 12, 5, 5, 8, 6, 7; б) 3, 5, 10, 5, 18, 25, 20, 21, 12, 14, 22, 23, 8, 8, 15, 9, 18, 23, 10, 12, 11, 12, 18, 3, 5, 10, 5, 8, 5, 3, 10, 9, 17, 8, 11, 8, 18, 10, 12, 7, 26, 21, 12, 14, 11, 17, 15, 6, 8, 10, 9, 4, 5, 10, 12.

1.3. У навмання вибраних пунктах обміну валюти було зафіксовано дані про курс продажу долара та одержано таку вибірку:

8.2 8.1 8.0 8.0 8.0 8.0 8.0 8.1 8.2 8.2
8.0 8.0 7.9 8.1 8.0 8.0 7.9 8.0 8.0 8.0

На основі наведених вибіркових даних запишіть варіаційний ряд, статистичний ряд, побудуйте полігон частот, запишіть емпіричну функцію та побудуйте її графік.

1.4. За даними, наведеними далі в таблиці, побудуйте полігони розподілів: 1) оплата праці; 2) соціальні трансферти; 3) доходи від власності та підприємницької діяльності; 4) витрати на купівлю товарів та послуг; 5) витрати на оплату обов'язкових платежів та внесків; 6) нагромадження заощаджень у вкладах та цінних паперах; 7) купівля валюти. Зробіть відповідні висновки.

	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Грошові доходи — усього у тому числі	100	100	100	100	100	100	100
1) оплата праці	77,4	74,1	59,7	69,9	58,0	46,4	39,3
2) соціальні трансферти	15,7	13,0	15,5	14,0	17,2	17,4	16,7
3) доходи від власності та підприємницької діяльності	6,9	12,9	24,8	16,1	24,8	36,2	44,0
Грошові витрати — усього, у тому числі	99,1	95,0	90,2	86,4	90,7	95,5	96,5
4) витрати на купівлю товарів та послуг	84,3	75,3	62,3	72,9	68,9	64,5	70,5
5) витрати на оплату обов'язкових платежів та внесків	12,1	12,2	8,3	8,2	7,6	6,8	6,7
6) нагромадження заощаджень у вкладах та цінних паперах	2,7	7,5	19,6	4,8	6,2	6,5	5,0
7) купівля валюти	—	—	—	0,5	8,0	17,7	14,3

1.5. Відомі дані про безаварійну роботу автоматизованого комплексу (у місяцях):

0,000	0,000	0,002	0,006	0,023	0,084	0,382	0,810	0,003	0,864
1,033	0,912	0,093	0,324	0,194	0,522	2,336	0,057	0,654	0,250
0,877	0,276	0,037	0,537	0,183	1,306	0,752	0,198	1,623	0,875
0,185	0,274	0,613	0,356	0,645	0,676	1,079	0,500	0,902	0,191
0,250	0,348	0,320	0,182	0,458	0,936	1,204	0,576	0,303	0,522

На основі наведених вибіркових даних записати інтервальний статистичний ряд, побудувати гістограму відносних частот, записати емпіричну функцію та побудувати її графік.

1.6. Відомі дані про інтервал часу між появою покупців у касовому залі деякого магазину:

0,002	1,004	0,007	0,612	0,091	1,692	1,527	0,908	2,590	1,292
4,134	3,647	0,374	2,150	0,778	5,223	3,344	2,001	3,492	4,011
3,507	0,838	0,148	0,618	0,704	1,853	3,007	0,653	3,600	1,653
0,738	1,069	2,453	1,447	2,614	3,742	4,314	1,211	1,949	5,001
1,000	0,007	1,272	0,312	1,832	2,604	2,267	0,045	4,450	2,001

На основі наведених вибіркових даних записати інтервальний статистичний ряд, побудувати гістограму відносних частот, записати емпіричну функцію та побудувати її графік.

1.7. У таблиці наведено значення прибутку 50 фірм, що належать одній корпорації (у 1000 умов. од.):

4,744	9,127	7,201	8,650	11,534	9,013	10,390	9,268	7,354	10,255
6,232	6,739	6,088	8,671	15,103	9,124	11,902	10,216	10,954	11,470
7,351	9,832	7,126	9,715	10,744	10,687	10,582	12,271	11,047	13,190
5,536	8,917	9,823	8,383	14,212	15,031	13,001	11,089	12,091	10,321
9,766	5,854	2,917	6,379	6,748	7,024	11,587	11,101	10,954	10,387

На основі наведених вибіркових даних записати інтервальний статистичний ряд, побудувати гістограму відносних частот, записати емпіричну функцію та побудувати її графік.

1.8. Відомі дані про річний обсяг виробництва (тис. т) підприємств цементної промисловості:

11,240	18,545	17,750	22,560	18,355	20,424	20,650	10,780	15,590
13,720	28,505	23,170	20,360	22,450	21,590	14,565	24,295	25,140
27,655	17,786	27,045	28,650	18,670	31,445	18,540	15,598	19,720
15,230	21,240	19,535	12,934	18,195	19,074	17,037	19,610	20,970
22,075	15,090	20,754	10,195	13,580	21,490	13,987	22,645	21,218

На основі наведених вибіркових даних записати інтервальний статистичний ряд, побудувати гістограму відносних частот, записати емпіричну функцію та побудувати її графік.

1.9. Відомі дані про розмір вкладів у банку:

Розмір вкладу (тис. грн)	10—30	31—50	51—70	71—90	91—110	111—130
Кількість вкладників	1	3	10	30	60	7

Побудувати гістограму відносних частот, записати емпіричну функцію та побудувати її графік.

1.10. Інтервал між потягами в метро — 3 хв. У таблиці подано час очікування пасажирами потягу:

0,787	1,004	0,941	0,612	1,200	1,692	1,354	0,908	1,245	1,292
0,617	0,828	1,413	1,030	1,459	2,483	2,769	1,563	2,661	1,635
1,654	0,838	1,143	0,618	2,317	1,853	1,555	0,653	1,922	1,653
1,747	2,677	0,341	2,952	0,545	1,297	1,981	0,214	2,452	2,087
0,001	0,007	0,025	0,312	1,068	2,604	0,014	0,045	2,340	2,001

На основі наведених вибіркових даних записати інтервальний статистичний ряд, побудувати гістограму відносних частот, записати емпіричну функцію та побудувати її графік.

§ 2. Числові характеристики статистичного розподілу вибірки

1. Середні вибіркові характеристики.

Вибірковою середньою (або середньою арифметичною) $\overline{x_B}$ будемо називати середнє арифметичне значення ознаки вибіркової сукупності.

Якщо всі значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ознаки вибірки різні, то

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \tag{2.2.1}$$

Якщо ж значення ознаки $x_1, x_2, \ldots, x_k$ мають відповідно частоти $n_1, n_2, \ldots, n_k$ причому, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, то

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i, \qquad (2.2.2)$$

За інтервального статистичного розподілу вибіркової сукупності вибіркову середню знаходять за формулою

$$\overline{x_B} = \frac{x_1^* n_1 + x_2^* n_2 + ... + x_k^* n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i, \qquad (2.2.3)$$

де $x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*$ — середини відповідно першого, другого, … , k-го інтервалів, n_1, n_2, …, n_k — їхні частоти, причому $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Якщо при заміні індивідуальних значень ознаки на середню величину необхідно залишити незмінним їх добуток (а не суму, як у випадку вибіркової середньої), слід застосовувати ***середню геометричну***:

$$\overline{x}_{\text{геом}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}, \qquad (2.2.4)$$

де n — обсяг вибірки.

У разі коли значення ознаки x_1, x_2, … , x_k мають відповідно частоти n_1, n_2, … , n_k причому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, знаходять середню геометричну зважену:

$$\overline{x}_{\text{геом}} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot ... \cdot x_k^{n_k}}. \qquad (2.2.5)$$

Середня геометрична найбільш широко застосовується для знаходження середніх темпів зростання.

У разі коли дані про темпи зростання подані у вигляді динамічного ряду, формула середньої геометричної набуває вигляду:

$$\overline{t} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}, \qquad (2.2.6)$$

де y_1, y_2, … , y_n — значення ознаки динамічного ряду, $\overline{t}$ — середній темп зростання розглядуваної ознаки.

У разі коли інформації про частоти для окремих значень варіант немає, а відомі лише добутки $x_i n_i$, застосовується ***середня гармонійна*** зважена:

$$\bar{x}_{\text{гарм}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{w_i}{x_i}} = \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_k}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \ldots + \frac{w_k}{x_k}}, \tag{2.2.7}$$

де $x_i n_i = w_i$.

Модою (M_o) називають значення ознаки, що зустрічається найчастіше в даній сукупності. Вона використовується у випадках, коли потрібно охарактеризувати величину ознаки, яка зустрічається найчастіше.

Для інтервального статистичного ряду

$$M_o = x_i + h\frac{n_{M_o} - n_{M_o - 1}}{2n_{M_o} - n_{M_o - 1} - n_{M_o + 1}}, \tag{2.2.8}$$

тут x_i — початок модального інтервалу, тобто такого, що містить моду (має найбільшу частоту); n_{M_o} — частота модального інтервалу; $n_{M_o - 1}$ — частота домодального інтервалу; $n_{M_o + 1}$ — частота післямодального інтервалу; h — довжина модального інтервалу.

Медіаною (M_e) називається таке значення ознаки, яке ділить варіаційний ряд на дві рівні частини за кількістю спостережуваних значень. Якщо обсяг вибірки n — число непарне, то медіаною є член варіаційного ряду з номером $\frac{n+1}{2}$. У разі коли n парне, медіана дорівнює середньому арифметичному $x_{\frac{n}{2}}$ та $x_{\frac{n}{2}+1}$ елементів ряду, тобто $M_e = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$.

Для інтервального статистичного ряду

$$M_e = x_i + h\frac{0{,}5n - S_{M_e - 1}}{n_{M_e}}; \tag{2.2.9}$$

$$F^*(x_i) < \frac{1}{2} \quad i \quad F^*(x_{i+1}) > \frac{1}{2},$$

де x_i — початок медіанного інтервалу (тобто такого, що містить медіану); n_{M_e} — частота медіанного інтервалу; $S_{M_e - 1}$ — накопичена частота інтервалів, що передують медіанному; h — довжина медіанного інтервалу.

Квантиль — це таке значення ознаки, яке ділить ряд у заданій пропорції. Тобто p-квантилем (або квантилем порядку p) статистичного розподілу є число x_p, нижче від якого у варіаційному ряді розміщена p-та частина всіх спостережуваних значень. Залежно від кількості частин, на які вони розбивають сукупність, можна виділити такі види квантилів: квартилі, децилі, процентилі.

Квартилі Q_1, Q_2, Q_3 ділять варіаційний ряд на 4 рівних частини за кількістю спостережуваних значень ознаки. Тобто Q_1 — це 0,25-квантиль, його називають нижнім (або першим) квартилем; Q_2 — 0,5-квантиль (медіана, або другий квартиль); Q_3 — 0,75-квантиль (верхній, або третій квартиль).

Децилі D_1, D_2, … D_9, ділять варіаційний ряд на 10 рівних частин.

Процентилі (або перцентилі) P_1, P_2, … P_{99}, ділять варіаційний ряд на 100 рівних частин.

Обчислюється p-квантиль за таким правилом. Якщо np не є цілим числом, то p-квантилем буде член варіаційного ряду з номером int $(np + 1)$

[int (a)– ціла частина числа a]. Якщо ж np — ціле, то p-квантилем буде середнє арифметичне елементів ряду x_{np} та x_{np+1}. У цьому разі p-квантиль не збігається з жодним членом даного варіаційного ряду, він є півсумою двох з них.

2. Характеристики розсіювання.

Вибірковою дисперсією (D_B) називається середнє арифметичне квадратів відхилень вибіркових значень x_i від вибіркової середньої $\overline{x_B}$.

Якщо всі варіанти $x_1, x_2, \ldots, x_n$ різні, то

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_B})^2 . \qquad (2.2.10)$$

У разі коли варіанти $x_1, x_2, \ldots, x_k$ мають частоти відповідно n_1, $n_2, \ldots, n_k$, причому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$,

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_B})^2 n_i . \qquad (2.2.11)$$

Для вибіркових даних, поданих інтервальним статистичним рядом, вибіркову дисперсію знаходять за формулою

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i^* - \overline{x_B})^2 n_i, \qquad (2.2.12)$$

де $x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*$ — середини відповідних інтервалів, n_1, n_2, … , n_k — їхні частоти, причому $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Вибіркову дисперсію обчислюють за формулою

$$D_B = \overline{x_B^2} - (\overline{x_B})^2, \qquad (2.2.13)$$

де $\overline{x_B^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i}{n}$.

Середнє квадратичне відхилення вибірки (σ_B) дорівнює квадратному кореню з вибіркової дисперсії, тобто

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}\ . \qquad (2.2.14)$$

Виправленою вибірковою дисперсією називається величина

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_B})^2 n_i\ . \qquad (2.2.15)$$

Виправленим середньоквадратичним відхиленням називається величина

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_B\ . \qquad (2.2.16)$$

Якщо всі значення ознаки сукупності розбиті на s груп, що не перетинаються, то для вивчення варіації використовуються три види дисперсії: загальна (D_B), внутрішньогрупова ($D_{\text{вн}}$) та міжгрупова (D_M).

Груповою дисперсію $D_{j\text{в}}$ називається дисперсія значень ознаки, які належать групі відносно групової середньої:

$$D_{j\text{в}} = \frac{1}{N_j}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_{j\text{в}}})^2 n_i\ ,\ j = \overline{1, s}. \qquad (2.2.17)$$

де j — номер групи, $\overline{x_{j\text{в}}}$ — її вибіркова середня, k_j — кількість варіант у j-й групі, n_i — частота значення x_i, $N_j = \sum_{i=1}^{k_j} n_i$ — обсяг групи з номером j.

Внутрішньогруповою дисперсією називається середнє арифметичне значення групових дисперсій, зважене за обсягами груп:

$$D_{\text{вн}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s} D_{j\text{в}} N_j \ , \qquad (2.2.18)$$

де $n = \sum_{j=1}^{k} N_j$ — обсяг сукупності.

Міжгруповою дисперсією називається дисперсія групових середніх відносно загальної вибіркової середньої

$$D_M = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s} (\overline{x_{j\text{в}}} - \overline{x_{\text{в}}})^2 N_j \ . \qquad (2.2.19)$$

Загальна дисперсія дорівнює сумі внутрішньогрупової та міжгрупової дисперсій, тобто

$$D_B = D_{\text{вн}} + D_M \ . \qquad (2.2.20)$$

Емпіричним коефіцієнтом детермінації називається число

$$\eta^2 = \frac{D_M}{D_{\text{в}}} \ . \qquad (2.2.21)$$

Для порівняння варіації ознак а також для характеристики однорідності сукупності використовується відносна міра розсіювання — ***коефіцієнт варіації***

$$V = \frac{\sigma_B}{\overline{\overline{x_B}}} \cdot 100\,\% \ . \qquad (2.2.22)$$

Сукупність вважається однорідною, якщо її коефіцієнт варіації не перевищує 33 %.

3. Емпіричні моменти.

Початковим емпіричним моментом порядку k називається

$$\widetilde{v}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \ . \qquad (2.2.23)$$

У разі коли значення ознаки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ мають частоти відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_m$, причому $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, то

$$\widetilde{v}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^k n_i \ . \qquad (2.2.24)$$

Центральним емпіричним моментом порядку k називається

$$\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_B})^k . \qquad (2.2.25)$$

Якщо дані подані дискретним статистичним рядом, в якому кожній варіанті x_i відповідає частота n_i, причому $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, тоді

$$\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_B})^k n_i . \qquad (2.2.26)$$

Початкові та центральні емпіричні моменти пов'язані такими співвідношеннями:

$$\tilde{\mu}_2 = \tilde{v}_2 - \tilde{v}_1^2 , \qquad (2.2.27)$$

$$\tilde{\mu}_3 = \tilde{v}_3 - 3\tilde{v}_1\tilde{v}_2 + 2\tilde{v}_1^3 , \qquad (2.2.28)$$

$$\tilde{\mu}_4 = \tilde{v}_4 - 4\tilde{v}_1\tilde{v}_3 + 6\tilde{v}_1^2\tilde{v}_2 - 3\tilde{v}_1^4 . \qquad (2.2.29)$$

4. Характеристики форми: асиметрія, ексцес.
Коефіцієнтом асиметрії називається число

$$A_s = \frac{\tilde{\mu}_3}{\sigma_B^3} . \qquad (2.2.30)$$

Коефіцієнтом асиметрії за Пірсоном називається число

$$A_{S_П} = \frac{\overline{x_B} - M_o}{\sigma_B} . \qquad (2.2.31)$$

Одною з відносних мір асиметрії є величина:

$$A_{S_Q} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1} . \qquad (2.2.32)$$

Значення показника асиметрії, визначене таким способом, лежить у межах від –1 до 1.

Для симетричних (або близьких до симетричних) одномодальних розподілів можна знайти показник, який характеризує гостровершинність даного розподілу порівняно з нормальним, що має такі самі характеристики (середню та стандартне відхилення). Він називається ***ексцесом***

$$E_S^* = \frac{\tilde{\mu}_4}{\sigma_B^4} - 3 . \qquad (2.2.33)$$

Задачі

2.1. Обчисліть перший, другий і третій квартилі такої вибірки: 10, 5, 8, 2, 9, 4, 5, 4, 7, 8, 4, 7, 3, 5.

Обчисліть міжквартильний розмах. Побудуйте статистичний ряд розподілу.

2.2. Знайдіть третій і восьмий децилі (30-й і 80-й процентилі) такої вибірки: 20, 26, 23, 29, 24, 31, 15, 22, 31, 30.

2.3. Одержано дані про оцінки з математичної статистики за шкалою ECTS групи студентів коледжу: 80, 65, 81, 20, 94, 41, 35, 64, 72, 82, 64, 75, 30, 50, 100, 14, 64, 60.

Потрібно: а) обчислити перший, другий і третій квартилі та інтерквартильний розмах; б) знайти середній бал за групою; в) зробити висновок про симетрію статистичного розподілу, не використовуючи емпіричні моменти.

2.4. Знайдіть третій і дев'ятий децилі (30-й і 90-й процентилі) такої вибірки: 20, 26, 23, 29, 25, 32, 15, 25, 31, 40.

2.5. Кількість пасажирів компанії «Аеросвіт» одного з рейсів між Києвом та Москвою за 30 днів квітня поточного року становила: 110, 125, 122, 118, 122, 100, 120, 162, 125, 128, 121, 129, 130, 131, 127, 119, 111, 124, 110, 126, 134, 124, 128, 123, 128, 128, 132, 136, 134, 121.

Потрібно: а) знайти нижній, середній і верхній квартилі вибірки, 10-й і 65-й процентилі; б) знайти середню кількість пасажирів у рейсі.

2.6. Наведені дані показують річний приріст ціни (у %) на 15 різних акцій: 2,2; –0,5; 11,2; 12,0; 12,0; 8,1; 14,7; 9,8; 10,0; –1,4; 3,8; 12,5; 16,2; 18,1; 0,0.

Потрібно: а) знайти медіану, перший і третій квартилі, 55-й і 80-й процентилі; б) обчислити показники варіації: інтерквартильний та інтердецильний розмахи.

2.7. Уряд країни оголосив конкурс для закордонних інвесторів на будівництво нового стадіону. У відповідь було одержано такі пропозиції ціни (млн євро): 80,0; 73,0; 62,8; 73,5; 81,1; 76,4; 87,2; 75,0; 91,0; 66,0.

Знайдіть: а) медіану та інтерквартильний розмах; б) середню запропоновану ціну та її середнє квадратичне відхилення.

2.8. Знайдіть 3-й і 6-й децилі вибірки: 8, 5, 21, 10, 2, 4, 27, 13, 14, 18, 17, 19, 17, 12, 7.

2.9. Обчисліть міжквартильний розмах для таких даних: 13, 9, 28, 16, 15, 24, 21, 19, 12, 11, 22, 31, 29, 23, 20.

2.10. Знайдіть перший, другий і третій квартилі вибірки, а також міжквартильний розмах: 14,7; 10,5; 17,7; 15,3; 15,9; 12,2; 10,0; 13,9; 14,1; 18,5; 13,9; 15,1; 14,7; 11,0; 13,1.

2.11. Обчисліть 3-й і 6-й децилі таких даних: 8, 5, 21, 10, 2, 4, 27, 30,4, 18, 17, 29, 18, 12, 7

2.12. Обчисліть середнє та дисперсію даних: а) 9, 3, 7, 4, 1, 7, 5, 4; б) 4, 5, 3, 6, 5, 6, 5, 6.

2.13. Обчисліть середні характеристики (середню вибіркову та медіану) і показники варіації (розмах, середнє лінійне відхилення, середнє квадратичне відхилення) для вибірок: а) 12, 6, 22, 31, 23, 13, 15, 17, 21, 18, 19, 29, 21, 11, 18; б) 0, –5, –3, 6, 4, –4, 1, –5, 0, 3, –5, 2.

Запишіть емпіричні функції розподілу для кожної з вибірок та побудуйте їхні графіки.

2.14. Не виконуючи обчислень, вкажіть, яка вибірка має найбільшу кількість варіації, а яка найменшу: а) 17, 29, 12, 16, 11; б) 22, 18, 23, 20, 17; в) 24, 37, 6, 39, 29.

2.15. Запишіть вибірку з семи чисел, середнє якої дорівнює 5 і середнє квадратичне відхилення якої дорівнює 0.

2.16. Наведіть приклад вибірки обсягом $n = 10$, середня вибіркова якої дорівнює 4, а середнє квадратичне відхилення –0.

2.17. За поданими даними побудуйте дискретний статистичний ряд, обчисліть середню вибіркову та дисперсію: а) 9, 3, 7, 4, 1, 7, 5, 4, 2, 2, 10, 1; б) 4, 5, 3, 6, 5, 6, 5, 6, 3, 5, 6, 4.

Порівняйте варіативність значень ознаки першої та другої вибірок.

2.18. Обчисліть асиметрію та ексцес для таких даних: 13, 9, 28, 16, 15, 24, 21, 19, 12, 11, 22, 31, 29, 23, 20.

2.19. Маємо дані про кількість днів перебування на лікарняному за минулий рік співробітників фірми: 5, 7, 0, 3, 15, 5, 5, 9, 3, 8, 30, 5, 12, 0, 12, 21.

Обчисліть середню, моду, медіану. Які висновки можна зробити, проаналізувавши одержані характеристики?

2.20. Наведені дані показують річний приріст ціни на 12 різних акцій: 11,2; 12; 12; 8,1; 14,7; 9,8; 10; –1,4; 3,8; 12,5; 16,2; 18,1.

Знайдіть медіану, перший і третій квартилі, 55-й і 85-й процентилі для цих даних, а також медіану для інтервального варіаційного ряду, побудованого без коригування меж першого й останнього інтервалів.

2.21. Було одержано дані про щоденний прибуток (тис. грн) від однієї зали ресторану «Дніпро» протягом трьох тижнів: 5,2; 4,9; 6,0; 4,8; 5,9; 8,2; 7,0; 6,4; 5,9; 6,5; 7,4; 6,1; 9,1; 8,9; 5,3; 6,2; 6,1; 7,4; 9,0; 9,8; 7,0.

Потрібно: а) побудувати інтервальний ряд розподілу прибутку за даний період; б) знайти характеристики центральної тенденції (середню вибіркову, моду, медіану) за інтервальним рядом; в) знайти показники варіації (середнє квадратичне відхилення та міжквартильний розмах); г) проаналізувати, наскільки залежить варіація величини щоденного прибутку від того, чи є день вихідним (подані дані було одержано починаючи з понеділка першого тижня спостережень і закінчуючи неділею третього).

2.22. При вибірковому обстеженні були одержані дані про кількісний склад сімей 30 службовців: 4, 5, 7, 1, 5, 2, 5, 4, 3, 2, 4, 3, 6, 1, 2, 4, 4, 3, 1, 6, 5, 8, 4, 5, 4, 2, 3, 3, 6, 1.

Визначте моду, медіану та 85-й процентиль кількості членів сімей у обстеженій групі службовців.

2.23. Маємо дані про річний відсоток продажу автомобілів імпортного виробництва у загальному обсязі продажу в Україні з 2000 р. до 2010 року (дані умовні): 60,0; 68,5; 59,3; 70,3; 65,0; 74,6; 60,3; 52,8; 64,6; 68,9; 69,3.

Знайдіть середню вибіркову, медіану, середнє квадратичне відхилення вибірки та коефіцієнт варіації.

2.24. Побудуйте інтервальний ряд розподілу часу (год), який щодня затрачався секретарем фірми на міжнародні телефонні переговори, за даними, одержаними в результаті спостережень протягом місяця: 1,67; 3,30; 2,90; 5,50; 4,50; 2,80; 3,00; 4,11; 3,20; 1,55; 2,00; 0,50; 2,23; 3,10; 3,60; 2,90; 1,00; 5,40; 2,34; 1,87; 4,10; 3,80; 5,00; 5,10; 3,92; 2,62; 3,72; 2,25; 1,90; 0,64.

Знайдіть за побудованим інтервальним рядом: а) середню вибіркову, медіану, моду; б) дисперсію і середнє квадратичне відхилення; в) інтерквартильний та інтердецильний розмахи.

2.25. Наведені дані показують щомісячний рівень безробіття по Україні (у % до населення працездатного віку) за 2008 рік[1]: 2,4; 2,4; 2,3; 2,2; 2,0; 1,9; 1,8; 1,8; 1,8; 1,9; 2,3; 3,0.

Потрібно: а) знайти середній рівень безробіття у 2008 р.; б) знайти розмах та середнє квадратичне відхилення наведених даних.

2.26. За даними Держкомстату України склад сімей, які одержували субсидії для відшкодування витрат на оплату житлово-комунальних послуг за кількістю членів у м. Києві у лютому 2011 р. подано в таблиці[2]:

Кількість членів сім'ї	1	2	3	4	5
Число сімей	20345	5578	1672	546	155

[1] Джерело: Держкомстат України, 1998–2011 рр. — http://www.ukrstat.gov.ua/
[2] Там само.

Побудуйте емпіричну функцію розподілу. Обчисліть середню кількість членів сімей, які одержують субсидії, та коефіцієнт варіації і коефіцієнт асиметрії.

2.27. Маємо дані про максимум добової температури (у градусах за Цельсієм) у Києві протягом липня: 30; 29; 31; 34; 32; 28; 28; 27; 30; 31; 27; 24; 25; 25; 29; 30; 31; 35; 34; 32; 29; 27; 27; 28; 30; 30; 32; 25; 28; 27.

Потрібно: а) побудувати дискретний статистичний ряд; б) побудувати полігон частот та відносних частот розподілу; в) знайти середньодобову максимальну температуру за липень у місті Києві, квартилі, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

2.28. Маємо дані про вік відібраних навмання 20 жінок — учасниць олімпійських ігор: 25; 19; 20; 19; 22; 18; 20; 27; 18; 21; 20; 20; 21; 19; 19; 20; 22; 21; 34; 20.

Потрібно: а) побудувати за наведеними даними дискретний статистичний ряд; б) обчислити середню вибіркову та виправлену дисперсію даної вибірки; в) на основі аналізу значень числових вибіркових характеристик зробити висновок про близькість розподілу віку учасниць олімпійських ігор до нормального.

2.29. Двадцяти підліткам, відібраним навмання, показали блок телевізійної комерційної реклами про нові види жувальної гумки і попросили оцінити рекламу в балах від 0 до 100. Результати оцінки дали такі бали: 79, 75, 65, 86, 98, 61, 53, 70, 90, 82, 56, 82, 65, 70, 90, 75, 77, 75, 95, 75.

Потрібно: а) знайти вибіркову середню, медіану і моду, дисперсію і середнє квадратичне відхилення вибіркового рейтингу; б) побудувати інтервальний статистичний ряд без коригування меж першого і останнього інтервалів та обчислити вибіркову середню, медіану і моду, дисперсію і середнє квадратичне відхилення вибіркового рейтингу.

2.30. За даними Держкомстату України розподіл прямих інвестицій в Україну за основними країнами-інвесторами на 1 січня 2011 року (у млн дол.) становив:

Кіпр	9914,6
Німеччина	7076,9
Нідерланди	4707,8
Російська Федерація	3402,8
Австрія	2658,2
Франція	2367,1

Сполучене Королівство	2298,8
Швеція	1729,9
Віргінські острови, Британські	1460,8
США	1192,4

Побудуйте емпіричну функцію розподілу та її графік, обчисліть середнє значення прямих інвестицій, коефіцієнт варіації та коефіцієнт асиметрії.

2.31. Вибірку склали з відповідей 10 осіб на запитання про кількість годин, які вони затрачали на Internet у минулому місяці: 0, 7, 12, 5, 33, 14, 8, 0, 9, 22;

Потрібно: а) знайти середню кількість часу, затраченого цими особами на Internet; б) знайти медіану і моду.

2.32. Протягом місяця (30 днів) фіксували щоденну потребу (у тоннах) у бензині марки А-95 на автозаправках компанії «ОГО» і одержали такі дані: 12,8; 13,4; 15,1; 14,1; 12,4; 13,8; 15,1; 12,4; 12,4; 14,1; 13,4; 14,1; 13,8; 12,8; 12,8; 13,8; 13,8; 12,9; 12,7; 11,2; 11,4; 11,3; 11,1; 12,8; 13,4; 15,1; 14,1; 14,1; 13,8; 14,1.

Потрібно: а) побудувати інтервальний ряд, гістограму частот та відносних частот; б) за інтервальним рядом знайти 10, 20 і 60-й процентилі; в) знайти нижній, середній і верхній квантилі та інтерквартильний розмах; г) обчислити розмах варіації.

2.33. Одержано згруповані дані про денну виручку в магазині електротоварів:

Ціна одиниці проданого товару, грн	до 500	500–1000	1000–2000	2000–3000	3000–5000	понад 5000
Кількість проданих товарів, од.	2	6	14	10	3	1

За даним інтервальним рядом: а) побудуйте гістограму відносних частот; б) знайдіть модальне значення ціни одиниці товару; в) знайдіть медіану та інтерквартильний розмах; г) на основі знайдених числових характеристик зробіть висновок про симетрію розподілу. Чи підтверджує одержаний результат гістограма?

2.34. Одержано згруповані дані про денну виручку в магазині електротоварів (тис. грн):

Сума продажу	Кількість продажу
0–200	2
200–400	5
400–600	10
600–800	12
800–1000	8
1000–1200	4

Знайдіть середню арифметичну, дисперсію, середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації. Визначте моду, медіану даного інтервального варіаційного ряду. Розрахуйте відносні частоти. Накресліть гістограму відносних частот.

2.35. При вибірковому обстеженні 50 членів сімей робітників і службовців одержані дані про кількісний склад сім'ї: 7, 8, 9, 1, 5, 7, 5, 6, 8, 2, 4, 3, 6, 8, 0, 8, 9, 0, 1, 8, 5, 8, 5, 8, 6, 9, 6, 3, 6, 8, 9, 4, 8, 9, 7, 5, 7, 8, 6, 5, 7, 5, 6, 6, 7, 3, 4, 6, 5, 4.

Визначте моду, медіану, 85-й процентиль та коефіцієнт варіації в обстеженій групі членів сімей робітників і службовців.

2.36. За даними Державного комітету статистики України щомісячний вилов риби у тис. т з лютого 2010 р. до лютого 2011 р. в Україні становив: 16,8; 18,6; 16,0; 9,6; 18,4; 19,5; 17,2; 20,1; 24,1; 20,0; 23,2; 14,2; 13,5.

Обчисліть середньомісячний вилов риби, моду, медіану та коефіцієнт варіації.

2.37. Вибірку з 350 українських сімей опитали про кількість грошей, яку вони витрачають щороку на овочі і фрукти:

Витрати	8000	8500	9000	9500	10000	11000	12000
Кількість сімей	20	35	54	80	83	61	17

Обчисліть середнє вибірки, моду, медіану та коефіцієнт варіації. Інтерпретуйте результати.

2.38. Абонент «Київстар» щомісяця витрачав такі суми грошей (грн) на послуги зв'язку протягом року: 42,19; 38,45; 40,56; 25,29; 28,33; 33,15; 35,15; 45,77; 44,11; 29,30; 34,88; 25,38.

Знайти середньомісячний платіж абонента за послуги зв'язку за вказаний період та середнє квадратичне відхилення щомісячного платежу.

2.39. Абонент АТС одержав за 12 місяців рахунки за міжміські переговори: 42,19; 38,45; 40,56; 25,29; 28,33; 33,15; 35,15; 45,77; 44,11; 29,30; 34,88; 30,38.

Знайти середній річний платіж абонента за міжміські переговори.

2.40. Кількість днів хвороби через ГРВІ за минулий рік була зафіксована для 15 співробітників: 5, 7, 0, 3, 15, 6, 5, 9, 3, 8, 10, 5, 2, 0, 12.

Обчисліть середнє, моду, медіану. Які висновки можна зробити, проаналізувавши одержані дані?

2.41. Кількість особистих селянських господарств у регіонах України на 1 січня 2011 р. становила (тис.): 43,2; 323,6; 160,6; 193,4; 115,4; 202,2; 234,4; 138,0; 267,7; 261,5; 138,2; 56,0; 302,4; 84,3; 188,0; 226,3; 190,9; 148,8; 198,2; 154,2; 92,0; 231,9; 231,9; 183,6; 173,6.

Побудуйте інтервальний статистичний ряд, розбиваючи вибірку на п'ять інтервалів. Побудуйте гістограму, емпіричну функцію розподілу та її графік. Обчисліть середню кількість особистих селянських господарств у регіоні, моду, медіану та коефіцієнт варіації.

2.42. Вибраних навмання 12 бігунів попросили повідомити про кількість кілометрів, які вони пробігли за останній тиждень: 5,5; 7,2; 1,6; 22,0; 8,7; 2,8; 5,3; 3,4; 12,5; 18,6; 8,3; 6,6.

Потрібно: а) обчислити середнє вибірки і медіану; б) знайти показники варіації — середнє квадратичне відхилення та інтерквантильний розмах.

2.43. У відділі жіночого взуття універмагу протягом дня були продані черевики таких розмірів: 34, 35, 38, 36, 38, 36, 36, 37, 39, 39, 38, 40, 37, 35, 37, 37, 36, 36.

Складіть за цими даними варіаційний ряд. Побудуйте полігон розподілу. Знайдіть медіану, моду, середню арифметичну і коефіцієнт варіації.

2.44. Інвестиції, які були зроблені 5 років тому, дали такі коефіцієнти окупності:

Рік	1	2	3	4	5
Окупність	–0,15	–1,2	0,15	0,18	0,5

Обчисліть середнє вибірки, медіану, середнє геометричне. Яка з характеристик точніше за все описує окупність за 5-річний період?

2.45. Побудуйте гістограму частот, знайдіть середню арифметичну і середнє квадратичне відхилення для даних про денну виручку в магазині електроніки (тис. грн):

X	0–100	100–200	200–300	300–400	400–500	500–600
m_i	4	8	10	12	7	5

2.46. У лютому 2011 р. в областях України, містах Київ та Севастополь була така кількість автозаправних станцій: 367, 304, 159, 416, 645, 206, 250, 305, 193, 387, 245, 319, 381, 229, 381, 279, 168, 147, 182, 481, 232, 218, 233, 175, 154, 278, 79.

Складіть інтервальний статистичний ряд, розбиваючи статистичні дані на п'ять інтервалів. Побудуйте гістограму частот, емпіричну функцію розподілу та її графік. Обчисліть середню кількість АЗС в адміністративній одиниці, моду, медіану та коефіцієнт варіації.

2.47. Побудуйте гістограму частот, знайдіть середню заробітну плату працівників одного з цехів промислового підприємства (грн):

Інтервали заробітної плати	1500–2000	2000–2500	2500–3000	3000–3500	3500–4000	4000–4500
Кількість працівників	8	15	24	20	13	6

Знайдіть середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

2.48. Дано розподіл робітників підприємства за заробітною платою в розрізі цехів:

Заробітна плата (грн)	1700–2300	2300–2900	2900–3500	3500–4100	4100–4700	4700–5300
Цех 1	2	9	19	6	4	—
Цех 2	1	6	8	14	16	5
Цех 3	—	3	9	16	18	14

Потрібно: а) обчислити середні заробітні плати робітників у кожному цеху і на підприємстві; б) обчислити дисперсії за цехами (групові дисперсії) і за підприємством (загальну дисперсію); в) обчислити внутрішньогрупову та міжгрупову дисперсії і коефіцієнт детермінації. Зробіть висновки.

2.49. Маємо дані про вік та стаж роботи навмання відібраних 15 працівників підприємства:

Вік, років	25	30	29	45	40	41	34	35	48	22	34	39	41	50	23
Стаж, років	6	10	9	23	22	20	12	12	27	1	13	20	19	27	1

Визначте, за якою ознакою вибірка працівників підприємства є більш однорідною — за віком чи за стажем.

2.50. Є така інформація за двома акціями:

Стан економіки	Імовірність того, що стан економіки буде	Повернення за акцією А	Повернення за акцією В
Поганий	0,25	4 %	1 %
Добрий	0,35	6 %	5 %
Дуже добрий	0,4	8 %	12 %

Обчисліть середню арифметичну і дисперсію за кожною акцією. Порівняйте їхні середні арифметичні, дисперсії та коефіцієнти варіації. Якщо ви вирішите купити одну акцію, то яку з двох виберете?

2.51. Обсяг реалізованих товарів широкого вжитку у січні–грудні 2010 р. в Автономній Республіці Крим, областях України, містах Києві та Севастополі у відсотках до загального обсягу реалізованої продукції добувної та переробної промисловості у цих регіонах становить: 39,3; 71,3; 44,2; 6,7; 5,7; 42,5; 27,7; 10,8; 24,2; 35,1; 37,4; 3,2; 34,5; 40,6; 30,3; 19,6; 26,0; 27,5; 50,9; 37,5; 36,4; 39,3; 50,8; 45,2; 56,1; 45,7; 49,1.

Побудуйте інтервальний статистичний ряд, розбиваючи область реалізацій на п’ять інтервалів. Обчисліть середній відсоток обсягу реалізованих товарів широкого використання за регіоном, моду, медіану, коефіцієнт варіації, коефіцієнт асиметрії та ексцес. Зробіть висновки.

2.52. Результати опитування про рівень заробітної плати подано у вигляді інтервального ряду:

Заробітна плата (грн)	Кількість осіб
1200—2300	21
2300—3400	72
3400—4500	41
4500—5600	22
5600—6700	16
6700—7800	10
7800—8900	8
8900—10000	6
10000—11100	4

Обчисліть середнє значення заробітної плати, моду, медіану, коефіцієнт варіації, коефіцієнт асиметрії та ексцес. Яку з числових характеристик ліпше використовувати для характеристики центру розподілу?

2.53. За даними Держкомстату України з лютого 2009 р. до лютого 2011 р. за субсидіями для відшкодування витрат на оплату житлово-комунальних послуг звернулись (тис. сімей): 81,2; 88,3; 91,3; 98,1; 83,8; 50,1; 27,0; 27,6; 210,2; 340,5; 198,2; 79,3; 51,5; 49,1; 56,9; 70,6; 73,1; 32,9; 166,8; 251,1; 515,9; 557,2; 375,8; 157,4; 136,0.

Побудуйте інтервальний статистичний ряд, розбиваючи статистичні дані на 5 інтервалів. Побудуйте емпіричну функцію розподілу та її графік, намалюйте гістограму. Обчисліть середньомісячну кількість сімей, що звернулися за субсидіями, медіану та коефіцієнт варіації. Зробіть висновки.

2.54. Інженер з контролю якості продукції виявив у 10 партіях електроламп, вироблених заводом, таку кількість бракованих виробів: 3, 5, 2, 1, 0, 5, 3, 4, 5, 2.

Знайдіть середню кількість і середнє квадратичне відхилення бракованих ламп. Побудуйте графік емпіричної функції розподілу. Обчисліть коефіцієнт варіації, медіану і моду.

2.55. Щоб з’ясувати, які суми витрачають студенти другого курсу протягом дня, харчуючись у кафе університету, було проведено опитування 10 випадково відібраних студентів, яке дало такі результати (грн): 31, 18, 21, 30, 19, 15, 12, 22, 15, 17 (дані умовні).

Знайдіть середню арифметичну, медіану і середнє квадратичне відхилення ряду даних.

2.56. Чисельність великої рогатої худоби в особистих селянських господарствах у АР Крим та областях України на 1 січня 2011 р. становить (тис. голів): 20,3; 195,2; 115,9; 80,5; 36,3; 123,2; 125,9; 63,8; 164,3; 47,5; 71,5; 34,2; 211,5; 74,6; 96,6; 96,3; 122,8; 62,1; 149,1; 81,3; 60,6; 176,8; 67,9; 93,5; 82,5.

Побудуйте інтервальний статистичний ряд, розбиваючи область реалізацій на п'ять інтервалів. Побудуйте гістограму частот, емпіричну функцію розподілу та її графік. Обчисліть середню чисельність великої рогатої худоби в особистих селянських господарствах у регіоні, моду, медіану та коефіцієнт варіації.

2.57. Адміністрацію супермаркуту цікавить оптимальний рівень запасів продуктів у торговому залі, а також середньомісячний обсяг купівель товарів, які не є предметом щоденного споживання в сім'ї (наприклад, таких як червона ікра). Для з'ясування цього питання менеджер супермаркуту протягом січня реєстрував частоту купівель 130-грамових банок з ікрою і зібрав такі дані: 8, 4, 4, 9, 3, 3, 1, 2, 0, 4, 2, 3, 5, 7, 10, 6, 5, 7, 3, 2, 9, 8, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 8.

Побудуйте варіаційний ряд, визначте його числові характеристики. Які рекомендації ви дали б адміністрації супермаркету?

2.58. Обсяг реалізованої сировинної продукції у січні–грудні 2010 р. в Автономній Республіці Крим, областях України, містах Києві та Севастополі у відсотках до загального обсягу реалізованої продукції добувної та переробної промисловості у цих регіонах становить: 45,5; 21,7; 33,8; 86,7; 81,9; 46,3; 33,3; 66,2; 72,1; 55,9; 41,5; 85,6; 51,8; 34,9; 61,0; 64,0; 70,2; 44,0; 41,8; 39,4; 43,4; 46,9; 38,7; 40,2; 38,0; 36,9; 42,1.

Побудуйте інтервальний статистичний ряд, розбиваючи область реалізацій на п'ять інтервалів. Обчисліть середній відсоток обсягу реалізованої сировинної продукції загалом по Україні, моду, медіану, коефіцієнт варіації, коефіцієнт асиметрії та ексцес.

2.59. У супермаркеті було проведено контрольне зважування 100 пакетів борошна. Результати подано у вигляді інтервального статистичного ряду:

Вага пакета, гр	Кількість пакетів
990—992	4
992—994	7
994—996	12
996—998	20

Вага пакета, гр	Кількість пакетів
998—1000	28
1000—1002	17
1002—1004	8
1004—1006	2
1006—1008	2

Обчисліть середню вагу пакета борошна у вибірці, моду, медіану, коефіцієнт варіації, коефіцієнт асиметрії та ексцес. Яку з числових характеристик ліпше використовувати для характеристики центру розподілу?

2.60. Товариство захисту прав споживачів здійснило вибіркове обстеження ваги продукції, розфасованої в пакети, на яких значилася вага 800 гр і занотувало вагу 24 пакетів: 789, 792, 794, 804, 799, 793, 809, 791, 789, 793, 788, 804, 799, 795, 791, 792, 805, 798, 792, 797, 810, 799, 802, 800.

Потрібно: а) побудувати варіаційний ряд; б) знайти середню вагу пакетованої продукції; в) обчислити середнє квадратичне відхилення; г) знайти нижній, верхній та середній квартилі.

Чи є симетричним цей розподіл?

2.61. Валовий дохід 10 фермерських господарств в 2008 і 2009 рр. становив (тис. грн):

2008 р.	221	335	277	182	372	269	416	1272	95	89
2009 р.	251	340	394	259	457	507	394	1366	118	153

Знайдіть середні значення валового доходу, коефіцієнти варіації, медіани і моди в 2008 і 2009 рр. Порівняйте одержані результати.

2.62. Сума балів за шкалою ECTS, одержаних студентами трьох груп на іспиті з вищої математики, подана у вигляді інтервального ряду:

Сума балів	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
Кількість студентів	1	3	14	21	23	13

Обчисліть середню суму балів у вибірці, моду, медіану, коефіцієнт варіації, коефіцієнт асиметрії та ексцес.

2.63. Сума балів за шкалою ECTS, одержаних студентами трьох груп на іспиті з теорії ймовірностей та математичної статистики, подана у вигляді інтервального ряду:

Сума балів	6–15	15–24	24–33	33–42	42–51	51–60
Кількість студентів	1	4	11	23	21	15

Обчисліть середню суму балів у вибірці, моду, медіану, коефіцієнт варіації, коефіцієнт асиметрії та ексцес.

2.64. Одержано дані про щоденний виторг (тис. грн) у супермаркеті електроніки протягом 20 днів: 13,92; 14,24; 13,15; 20,61; 11,82; 13,24; 15,64; 18,10; 13,66; 10,14; 15,95; 17,16; 14,67; 15,06; 9,11; 18,03; 12,00; 14,35; 12,11; 10,53.

Потрібно: а) побудувати інтервальний ряд за одержаними даними; б) знайти середній щоденний виторг, його розмах, середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації; в) побудувати гістограму частот та кумуляту; г) знайти асиметрію та ексцес вибірки за інтервальним рядом.

2.65. Одержано дані про ціну 1 кг картоплі у супермаркетах та на ринках міста:

	Ціни на картоплю, грн за 1 кг
Продуктові ринки	5,9; 6,0; 6,5; 7,0; 6,4; 8,0;
Супермаркети	6,3; 6,0; 5,5; 5,8; 6,4; 7,0; 5,9; 6,3

Потрібно: а) порівняти середню ціну картоплі на ринку та в супермаркеті; б) визначити, досліджувана ознака (ціна картоплі) якої з двох вибірок є більш варіативною; в) наскільки варіація ціни на картоплю залежить від типу закладу торгівлі — ринок чи супермаркет.

2.66. Відома кількість проданих пар чоловічого та жіночого взуття різних розмірів протягом дня магазином «Кришталевий черевичок»:

	Розміри пар проданого взуття
Чоловіче	41; 42; 39; 42; 41; 40; 44; 43; 42; 41; 42; 42; 40; 42
Жіноче	39; 36; 35; 37; 37; 36; 39; 36; 38; 40; 36; 38; 37

Потрібно: а) побудувати за кожною з груп даних варіаційні ряди та знайти моду і медіану; б) знайти відносні показники квартильної варіації для обох вибірок (який висновок можна зробити, порівнявши знайдені значення?); в) побудувати полігони розподілів.

2.67. Вартість інвестиції 1000 грош. од., яку зробили 4 роки тому, стала 1200 грош. од. після першого року, 1300 грош. од. після 2-го року, 1500 грош. од. після 3-го року і 2000 грош. од. — після четвертого.

Потрібно: а) знайти річні коефіцієнти окупності; б) обчислити середнє і медіану коефіцієнтів окупності; в) обчислити середнє геометричне коефіцієнтів окупності; г) зробити висновок про найточнішу оцінку роботи інвестиції з пп. а), б), в).

2.68. За даними про вартість валової продукції й основних фондів промислового об'єднання за період з 1981 до 1985 рр. обчислити коефіцієнти варіації, медіану і моду.

	2001	2002	2003	2004	2005
Валова продукція, тис. грн	2353	2992	3178	3491	4993
Середньорічна вартість основних фондів, тис. грн	2724	3322	3716	3716	4876

2.69. Індивідуальний річний заробіток 10 членів будівельної бригади в 2009 році становив:

Прізвище, ініціали	Індивідуальний річний заробіток (грн)
Рябко В. Д.	33141,43
Коропов О. А.	52757,86
Гулько К. М.	42757,86
Щукін Г. М.	42590,00
Бреденюк А. М.	52637,86
Карасюк В. Д.	32038,57
Окунєв П. Г.	42254,29
Сом П. Х.	51930,71
Горбуша С. Т.	62038,57
Ланько Н. К.	61822,86

Знайдіть середній заробіток членів бригади і середнє квадратичне відхилення, медіану і моду.

2.70. Ви купили 6 років тому акції за ціною 12 грош. од. У кінці кожного року ціна акцій була такою:

Рік	1	2	3	4	5	6
Ціна	10	14	15	22	30	25

Потрібно: а) обчислити річні коефіцієнти окупності; б) обчислити середнє вибірки і медіану; в) обчислити середнє геометричне коефіцієнтів окупності; г) пояснити, чому ліпшою за всі інші характеристики того, що трапилось із ціною акції, є середнє геометричне.

2.71. Дані про врожайність жита на різних ділянках дослідного поля наведені в таблиці:

Урожайність, ц/га	Частина ділянки від загальної посівної площі, %
28—32	6
32—36	8
36—40	15
40—44	32
44—48	21
48—52	11
52—56	7

Знайти середню урожайність, дисперсію, коефіцієнт варіації та розмах варіації.

2.72. Щомісячний видобуток вугілля (млн т) в Україні у 2008—2010 роках становив:

Місяць	2008 р.	2009 р.	2010 р.
Січень	5,218	4,652	4,415
Лютий	4,885	4,833	4,257
Березень	5,269	5,104	4,863
Квітень	4,972	4,542	4,659
Травень	5,048	4,555	4,626
Червень	4,581	4,468	4,474

Місяць	2008 р.	2009 р.	2010 р.
Липень	4,934	4,51	4,298
Серпень	5,051	4,171	4,265
Вересень	4,792	4,179	4,153
Жовтень	5,036	4,6	4,679
Листопад	4,491	4,602	4,688
Грудень	5,098	4,6	5,067

Обчисліть середньомісячний видобуток вугілля, коефіцієнти варіації та асиметрії для кожного року та за період з 2008 до 2010 рр. Обчисліть внутрішньогрупову, міжгрупову та загальну дисперсії й емпіричний коефіцієнт детермінації.

2.73. Вибіркове обстеження 46 сімей за рівнем доходів на одного члена сім'ї (грн) подано рядом: 500, 300, 200, 100, 400, 600, 300, 700,900,100, 300, 200, 500, 600, 800, 200, 500, 200, 300, 600, 800, 300,400, 400,500, 600, 500, 400, 700, 500, 600, 400, 800,700, 400, 500, 700, 800, 500, 700,300, 400, 600, 500, 400, 600.

Потрібно: а) побудувати статистичний ряд; б) знайти моду, медіану, середній рівень доходу, коефіцієнт варіації; в) побудувати полігон та емпіричну функцію.

2.74. Під час сортовипробування кавунів було зроблено вибірку із 22 одиниць. Одержані дані про вагу наведено в таблиці:

Сорт	Вага одного кавуна, кг
«Південний цукровий»	4,5; 3,5; 4,2; 3,2; 4,0; 3,2; 3,8
«Подарунок сонця»	3,4; 4,5; 4,0; 3,8; 3,5; 3,2; 4,1; 4,6
«Вогник»	2,5; 2; 2,3; 1,5; 2,0; 2,1; 2,4

Наскільки суттєвими є відмінності у середній вазі кавунів залежно від сорту?

2.75. Побудуйте гістограму відносних частот, знайдіть середню заробітну плату співробітників одного з підрозділів університету за такими даними:

Інтервали з/п, грн	800–900	900–1000	1000–1100	1100–1200	1200–1300	1300–1400
Кількість співробітників	2	3	5	15	10	5

Знайдіть середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації.

2.76. За даними Держкомстату України про обсяги введеного в експлуатацію житла за період з 2006 до 2010 рр. (тис. $м^2$, загальної площі):

	2006	2007	2008	2009	2010
Міські поселення	6709	7737	7640	5163	6304
Сільська місцевість	1919	2507	2856	1237	3035

Обчисліть групову, внутрішньогрупову, міжгрупову дисперсії та емпіричний коефіцієнт детермінації. Перевірте правило додавання дисперсій. Зробіть висновки.

2.77. Виробництво горілки та інших міцних спиртових напоїв в Україні у 2008—2010 рр. становило (млн дкл):

Місяць	2008 р.	2009 р.	2010 р.
Січень	2,5	2,4	2,4
Лютий	2,4	2,9	2,5
Березень	2,8	3,4	3,1
Квітень	2,7	3,8	3,7
Травень	3,2	4,8	3,9
Червень	3,1	6,2	3,8
Липень	3,2	1,6	3,3
Серпень	3,3	2,1	4,9
Вересень	4,3	2,8	2,2
Жовтень	4,7	3,7	3,5
Листопад	4,6	4,2	4,3
Грудень	4,4	4,3	4,7

Обчисліть середньомісячне виробництво горілки та інших міцних спиртових напоїв, коефіцієнти варіації та асиметрії для кожного року та за період з 2008 до 2010 рр. Обчисліть внутрішньогрупову, міжгрупову та загальну дисперсії і перевірте правило додавання дисперсій. Зробіть висновки.

2.78. За даними Держкомстату України у 2009 р. в Україні вироблено, тис. шт.:

Місяць	Телевізори	Машини пральні	Холодильники
Січень	17,1	12,1	9,7
Лютий	24,2	11,9	22,2
Березень	29,6	18,6	19,7
Квітень	30,1	13,6	25,2
Травень	28,3	14,3	26,5
Червень	18,8	12,7	27,6
Липень	10,8	13,5	47,6
Серпень	10,6	10	43,7
Вересень	9,2	13,5	35
Жовтень	17,8	12,3	21,2
Листопад	15	18,3	21,7
Грудень	23,8	13,3	25,1

Обчисліть середньомісячний випуск товарів і коефіцієнт варіації за кожною групою товарів. Обчисліть внутрішньогрупову, міжгрупову та загальну дисперсії та емпіричний коефіцієнт детермінації. Зробіть висновки.

2.79. У таблиці подано розподіл заощаджень (у тис. грн) 50 клієнтів банку, які обслуговуються у двох його філіях:

	Філія 1	Філія 2
Обсяг заощаджень x_i, (тис. грн)	63698389106	63698389106
Кількість клієнтів m_i	26831	521184

Обчисліть середні арифметичні та дисперсії заощаджень у філіях, загальну середню та дисперсію заощаджень у банку.

2.80. Дано такий розподіл 1000 абонентів за споживаною кількістю електроенергії, кВт. г:

Інтервали кількості електроенергії (кВт. г)	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50
Кількість абонентів	3	13	70	190	290	230	130	62	12

Побудуйте гістограму, кумуляту й емпіричну функцію. Оцініть форму даного розподілу за допомогою коефіцієнтів асиметрії та ексцесу. Знайдіть медіану і моду.

2.81. У будівельному супермаркеті зафіксували дані про денний виторг:

Сума продажу, тис. грн	0–100	100–200	200–300	300–400	400–500	500–600
Кількість продажу	5	6	7	10	14	8

Потрібно: а) накреслити гістограму відносних частот та кумуляту; б) знайти середню величину, дисперсію та середнє квадратичне відхилення вибірки; в) знайти моду та медіану інтервального ряду; г) обчислити коефіцієнт варіації.

2.82. У таблиці наведено статистичний ряд розподілу кількості угод (X) на фондовій біржі за кожний із шести місяців:

x_i	1	2	3	4	5	6
m_i	4	6	12	16	44	18

Складіть статистичний ряд розподілу відносних частот варіант і побудуйте полігон відносних частот. Знайдіть емпіричну функцію розподілу і побудуйте її графік. Обчисліть числові характеристики даного розподілу: середню арифметичну, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнти асиметрії та ексцесу, коефіцієнт варіації.

2.83. Виробництво жирних сирів (тис. т) в Україні у 2008 — 2010 рр. становило:

Місяць	2008 р.	2009 р.	2010 р.
Січень	16,6	14,5	14,2
Лютий	17	13,8	13,3
Березень	20,8	19,7	17,2
Квітень	20,8	21,6	18,3
Травень	23,9	25	20,5
Червень	20,7	22,5	19,5
Липень	20	22,2	19,6
Серпень	19,8	21,7	19,7
Вересень	21,3	19,9	21,5
Жовтень	21,8	17,7	20,4
Листопад	17,4	14,1	15,2
Грудень	15,5	14,1	13,3

Обчисліть середньомісячне виробництво жирних сирів, моду, коефіцієнти варіації й асиметрії для кожного року та за період з 2008 до 2010 рр. Обчисліть внутрішньогрупову, міжгрупову, загальну дисперсії та емпіричний коефіцієнт детермінації. Перевірте правило додавання дисперсій. Зробіть висновки.

2.84. Кількість штатних працівників та їхня середня заробітна плата за регіонами України у лютому 2011 р. наведені в таблиці:

Область	Тис. осіб	Зарплата	Область	Тис. осіб	Зарплата
АР Крим	390,3	1989	Одеська	515,9	2121
Вінницька	305,1	1835	Полтавська	359,4	2269
Волинська	197,2	1738	Рівненська	211,7	1918
Дніпропетровська	921,3	2475	Сумська	247,7	1933
Донецька	1145,4	2726	Тернопільська	177,7	1671
Житомирська	248,8	1842	Харківська	653,3	2160
Закарпатська	196,8	1816	Херсонська	193,8	1751
Запорізька	455	2295	Хмельницька	238,9	1808
Івано-Франківська	219,7	2007	Черкаська	263,8	1905
Київська	380,6	2476	Чернівецька	139,7	1735
Кіровоградська	200,9	1858	Чернігівська	229	1736
Луганська	537,1	2413	м. Київ	1250,8	3555
Львівська	544,7	2001	м. Севастополь	83,4	2264
Миколаївська	235,2	2208			

Знайдіть середню заробітну плату та коефіцієнт варіації.

2.85. Кількість штатних працівників та їхня середня погодинна оплата за регіонами України у лютому 2011 р. наведені в таблиці:

Область	Тис. осіб	Погодинна оплата	Область	Тис. осіб	Погодинна оплата
АР Крим	390,3	13,83	Одеська	515,9	14,76
Вінницька	305,1	13,28	Полтавська	359,4	15,81
Волинська	197,2	12,31	Рівненська	211,7	13,94
Дніпропетровська	921,3	16,66	Сумська	247,7	13,67
Донецька	1145,4	18,88	Тернопільська	177,7	12,18
Житомирська	248,8	13,23	Харківська	653,3	14,84
Закарпатська	196,8	13,09	Херсонська	193,8	12,2
Запорізька	455	15,9	Хмельницька	238,9	12,85

Область	Тис. осіб	Погодинна оплата	Область	Тис. осіб	Погодинна оплата
Івано-Франківська	219,7	14,7	Черкаська	263,8	13,34
Київська	380,6	17,31	Чернівецька	139,7	12,61
Кіровоградська	200,9	13,05	Чернігівська	229	12,39
Луганська	537,1	17,07	м. Київ	1250,8	23,92
Львівська	544,7	14,46	м. Севастополь	83,4	15,24
Миколаївська	235,2	15,47			

Знайдіть середню погодинну оплату та коефіцієнт варіації.

§ 3. Точкові оцінки параметрів генеральної сукупності

1. Основні поняття і загальні вимоги

Оцінка $\widehat{\theta}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ невідомого параметра θ називається *змістовною* (*ґрунтовною, обґрунтованою, слушною, консистентною*), якщо при збільшенні обсягу вибірки *n* вона збігається за ймовірністю до оцінюваного параметра, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\widehat{\theta}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \theta\right| < \varepsilon) = 1. \qquad (2.3.1)$$

Якщо параметр $\overline{\Theta}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ векторний, то для змістовності векторної оцінки $\widehat{\Theta}(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_k)$ потрібна змістовність всіх її компонент.

Статистична оцінка називається *незміщеною*, якщо її математичне сподівання дорівнює оцінюваному параметру для будь-якого обсягу вибірки, тобто

$$M(\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \theta. \qquad (2.3.2)$$

Якщо параметр $\overline{\Theta}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ векторний, то для незміщеності векторної оцінки $\widehat{\Theta}(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_k)$ потрібна незміщеність усіх її компонент.

Якщо $M(\widehat{\theta}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)) \to \theta$ при $n \to \infty$ то оцінка $\widehat{\theta}_n$ називається *асимптотично незміщеною*.

Незміщена оцінка $\widehat{\theta}_n$ параметра θ називається *ефективною*, якщо вона має найменшу дисперсію серед усіх можливих незміщених оцінок параметра θ, одержаних за вибірками однакового обсягу n.

Нижня межа дисперсії незміщеної оцінки $\hat{\theta}$ задовольняє нерівність Рао—Крамера—Фреше

$$D(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{M\left[\left(\frac{\partial \ln \varphi(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]} = -\frac{1}{M\left(\frac{\partial^2 \ln \varphi(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right)}, \qquad (2.3.3)$$

де $\varphi(x,\theta)$ — щільність розподілу для неперервної випадкової величини X; для дискретної випадкової величини $p(x,\theta) = P(X = x, \theta)$.

Ефективність оцінки визначається співвідношенням

$$e(\hat{\theta}_n) = \frac{D\left(\hat{\theta}_n^E\right)}{D\left(\hat{\theta}_n\right)}, \qquad (2.3.4)$$

де $D\left(\hat{\theta}_n^E\right)$ та $D\left(\hat{\theta}_n\right)$ — дисперсії відповідно ефективної та даної оцінок. Чим ближче $e(\hat{\theta}_n)$ до одиниці, тим ефективніша оцінка.

Якщо $e(\hat{\theta}_n) \to 1$ при $n \to \infty$ то така оцінка називається *асимптотично ефективною*.

2. Метод моментів розрахунку точкових статистичних оцінок.

Якщо закон розподілу $f(x,\theta)$ випадкової величини X залежить від одного параметра θ, то для його знаходження треба розв'язати рівняння

$$M(X) = \bar{x}_B. \qquad (2.3.5)$$

Якщо закон розподілу $f(x,\theta_1,\theta_2)$ випадкової величини X залежить від двох параметрів, то для їх знаходження треба розв'язати одну з систем рівнянь:

$$\begin{cases} M(X) = \bar{x}_B, \\ D(X) = D_B, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} M(X) = \bar{x}_B, \\ M(X^2) = \tilde{v}_2. \end{cases} \qquad (2.3.6)$$

3. Метод максимальної правдоподібності розрахунку точкових статистичних оцінок.

Функція правдоподібності для неперервної випадкової величини, щільність розподілу якої $f(x,\theta)$ визначається рівністю

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta), \quad (2.3.7)$$

а для дискретної випадкової величини

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot p(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta), \quad (2.3.8)$$

де $p(x_i, \theta) = P(X = x_i, \theta)$.

За точкову оцінку невідомого параметра θ генеральної сукупності вибирається таке його значення $\widehat{\theta}$, при якому функція правдоподібності L набуває максимального значення. Ця оцінка, яка називається *оцінкою максимальної правдоподібності*, є розв'язком рівняння

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = 0, \quad (2.3.9)$$

при якому $\ln L$ має максимум.

Якщо закон розподілу випадкової величини залежить від двох параметрів θ_1 та θ_2, то оцінки максимальної правдоподібності для θ_1 та θ_2 дістанемо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \quad (2.3.10)$$

відносно θ_1 і θ_2 та вибравши той її розв'язок $\left(\widehat{\theta}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n); \widehat{\theta}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$ при якому $\ln L$ має максимум.

4. Вибіркова середня $\overline{x}_B$ є незміщеною змістовною оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності (генеральної середньої $\overline{x}_r$).

У разі нормально розподіленої генеральної сукупності оцінка $\overline{x}_B$ буде і ефективною.

Виправлена вибіркова дисперсія s^2 є незміщеною змістовною оцінкою дисперсії генеральної сукупності $D_г$.

Задачі

3.1. За даними вибірки x_1; x_2; …; x_n методом моментів знайти точкову оцінку параметра p біноміального розподілу

$$P_m(X = x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i},$$

де x_i — кількість появ події у i-й серії ($i = 1,2,\ldots,n$), m — кількість випробувань.

3.2. Випадкова величина X розподілена за біноміальним законом. Проведено 10 серій випробувань по 5 випробувань у кожній серії. Результати подано у вигляді статистичного ряду

x_i	0	1	2	3	4
n_i	5	2	1	1	1

Методом моментів знайти точкову оцінку параметра p.

3.3. За даними вибірки x_1; x_2; …; x_n методом моментів знайти точкову оцінку параметра p геометричного розподілу

$$P_m(X = x_i) = (1-p)^{x_i - 1} \cdot p,$$

де x_i — кількість випробувань до першої появи події, p — імовірність появи події в одному випробуванні.

3.4. Методом моментів знайти оцінку параметра p геометричного розподілу, якщо в чотирьох випробуваннях подія відбулася відповідно після двох, чотирьох, шести та восьми випробувань.

3.5. За даними вибірки x_1; x_2; …; x_n методом моментів знайти точкові оцінки параметрів нормального розподілу.

3.6. Випадкова величина X — відхилення розміру деталі від номінального, розподілена за нормальним законом з невідомими параметрами a та σ За результатами дослідження 200 виробів складено статистичний ряд

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Методом моментів знайти точкові оцінки параметрів.

3.7. За даними вибірки x_1; x_2; …; x_n методом моментів знайти точкові оцінки параметрів рівномірного розподілу, щільність якого

$$f(x)=1/(b-a), \quad (a \le x \le b).$$

3.8. Методом максимальної правдоподібності знайти точкові оцінки параметрів рівномірного на відрізку $[a, b]$ розподілу.

3.9. Випадкова величина рівномірно розподілена на відрізку $[0, b]$. Зроблено вибірку $x_1; x_2; \ldots; x_n$ Довести, що $\widehat{b} = x_{\max}$ є асимптотично незміщеною оцінкою параметра b. Знайти дисперсію оцінки $\widehat{b}$.

3.10. Знайти оцінку параметра a розподілу Пуассона $P(X=m)=\dfrac{a^m e^{-a}}{m!}$: 1) методом моментів; 2) методом максимальної правдоподібності.

3.11. Методом максимальної правдоподібності оцінити ймовірність влучення спортсменом у центр мішені, якщо в серії з 20 пострілів він влучив у центр мішені 18 разів.

3.12. Оцінити параметр θ для випадкової величини, розподіленої за законом Релея, щільність розподілу якого $f(x)=\dfrac{x}{\theta}e^{\frac{x^2}{2\theta}}, x>0$. Довести незміщеність, змістовність та ефективність оцінки.

3.13. Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[a; a+1]$, a — невідоме. За результатами вибірки $x_1; x_2; \ldots; x_n$ можна побудувати дві оцінки параметра $\widehat{a}_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\dfrac{1}{2}$ та $\widehat{a}_2=\max(x_i)-\dfrac{n}{n+1}$. Довести, що $M(\widehat{a}_1)=M(\widehat{a}_2)=a$, тобто обидві оцінки незміщені.

3.14. Оцінити параметр θ для випадкової величини, розподіленої за логарифмічно нормальним законом, щільність розподілу якого $f(x)=\dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(\ln x-\theta)^2}{2\sigma^2}}, x>0$. Значення σ відоме. Довести незміщеність, змістовність та ефективність оцінки.

3.15. Із нормально розподіленої сукупності з відомим математичним сподіванням $M(X)=a$ зроблено вибірку обсягу n. Знайти оцінку для дисперсії $D(X)$ і довести її незміщеність, змістовність та ефективність.

3.16. З сукупності, розподіленої за показниковим законом? зроблено вибірку обсягу n. Знайти оцінку для параметра λ ліквідувати її зміщеність і перевірити, чи буде одержана оцінка ефективна.

§ 4. Точність і надійність оцінки. Інтервальні оцінки

Точкова оцінка $\hat{\theta}$ параметра θ генеральної сукупності відрізняється від θ. Гранично допустима різниця $\delta > 0$ між $\hat{\theta}$ і θ, тобто $|\hat{\theta}-\theta|<\delta$, називається **точністю оцінки**. Ймовірність $P\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\delta\right)=\gamma$ називається **надійністю оцінки.** Точність і надійність оцінки взаємозв'язані: за збільшення точності (зменшення δ) надійність зменшується, і навпаки, за зменшення точності (збільшення δ) надійність збільшується.

Довірчий інтервал для математичного сподівання μ нормально розподіленої генеральної сукупності можна знайти так:

$$\overline{x_B}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{x_B}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ або } \overline{x_B}\pm t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{2.4.1}$$

де $\bar{x}_B$ — **середня вибіркова**; σ — **відоме середнє квадратичне відхилення** (генеральне), n — обсяг вибірки; t — **коефіцієнт надійності**, який ми знаходимо з рівня довіри $\gamma = 2\Phi(t)$. Рівень довіри γ встановлюємо близьким до 1. Для чотирьох часто використовуваних рівнів довіри маємо таблицю визначення t:

γ	t
0,9	1,645
0,95	1,96
0,98	2,33
0,99	2,575

При виборі коефіцієнта надійності слід пам'ятати:

1) якщо обсяг вибірки великий, то для визначення t можна завжди використовувати функцію Лапласа $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ (її ще називають гауссіаном) (табл. 2 додатків);

2) проблема визначення t постає для малих вибірок $(n \le 30)$:

а) якщо генеральна сукупність нормальна і її дисперсія відома, то коефіцієнт t знаходимо з рівняння $2\Phi(t)=\gamma$;

б) якщо генеральна сукупність нормальна, проте її дисперсія невідома, то знаходимо t із розподілу Стьюдента (табл. 6 додатків);

в) якщо генеральна сукупність не є нормальною, то для знаходження t жоден із названих способів не підходить.

Обсяг вибірки для оцінки математичного сподівання знаходимо за формулою $n = \left(\frac{t\sigma}{\delta}\right)^2$, де t — коефіцієнт надійності, σ — відоме середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності, δ — гранична межа помилки (точність), з якою ми згодні змиритися.

Довірчий інтервал для дисперсії σ^2 генеральної сукупності:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}, \tag{2.4.2}$$

де $\chi_1^2 = \chi^2_{0,5-\frac{\gamma}{2}}$ і $\chi_2^2 = \chi^2_{0,5+\frac{\gamma}{2}}$ при $n - 1$ степенях вільності розподілу χ^2.

Знаходимо χ_1^2 та χ_2^2 з таблиці розподілу χ^2 (табл. 7 додатків).

Довірчий інтервал для частки *p* ознаки генеральної сукупності знаходимо за нерівністю

$$w - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} < \rho < w + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}, \tag{2.4.3}$$

де w — частка у вибірці, t — коефіцієнт надійності, знайдений з рівняння $2\Phi(t) = \gamma$.

Задачі

4.1. З сукупності була здійснена повторна вибірка 25 зразків. Вибіркова середня $\overline{x}_B = 510$ і середнє квадратичне відхилення s = 125 зразків. Потрібно: а) оцінити з 95-відсотковою надійністю $\mu = M(X)$; б) повторити для обсягу вибірки n = 50; в) повторити для обсягу вибірки n = 100.

4.2. Середнє $\overline{x}_B = 1500$. Оцініть з 95 % довіри μ з вибірки обсягу n = 225, якщо: а) s = 300; б) s = 200; в) s = 100. Як впливає на оцінку довірчого інтервалу зменшення середнього квадратичного відхилення s?

4.3. Фахівець зі статистики здійснив вибірку з 400 спостережень і обчислив $\overline{x}_B = 700$ та s = 100. Потрібно: а) оцінити з 90 % довіри $\mu = M(X)$; б) повторити п. *а* з 95 % рівнем довіри; в) повторити п. *а* з 99 % рівнем довіри. Як впливає на оцінку μ збільшення рівня довіри?

4.4. Як зміниться довірчий інтервал для μ в 4.3, якщо з фінансових міркувань зменшити обсяг вибірки в 4 рази?

4.5. За вибіркою зі 100 одиниць визначили $\overline{x_B} = 10$ і $s = 1$. Потрібно: а) оцінити μ з 95% рівнем довіри; б) повторити п. *а* для $s = 4$; в) повторити п. *а* для $s = 10$. Як впливає на довірчий інтервал збільшення s?

4.6. Статистик обчислив за вибіркою з 51 одиниці $\overline{x_B} = 120$ і $s = 15$. Потрібно: а) оцінити μ з 95 % рівнем довіри; б) повторити п. *а* для 90 % рівня довіри; в) повторити п. *а* для 99 % рівня довіри. Як впливає на довірчий інтервал зменшення рівня довіри?

4.7. За вибіркою з 81 статистичного спостереження знайдено $\overline{x_B} = 63$ і $s = 8$. Потрібно: а) оцінити μ з 95 % рівнем довіри; б) повторити п. *а* при $n = 64$; в) повторити п. *а* при $n = 36$. Як впливає на довірчий інтервал зменшення обсягу вибірки?

4.8. Була здійснена вибірка з 8 спостережень з нормально розподіленої сукупності. Середня вибіркова і середнє квадратичне відхилення при цьому є $\overline{x_B} = 40$ і $s = 10$. Потрібно: а) оцінити μ з 95 % рівнем довіри; б) повторити п. *а*, припустивши, що відоме $\sigma_Г = 10$; в) пояснити, чому інтервальна оцінка в п. *б* вужча, ніж у п. *а*.

4.9. За даними вибірки з 5 одиниць маємо $\overline{x_B} = 175$, $s = 30$. Потрібно: а) оцінити μ з 90 % рівнем довіри; б) повторити п. *а* для $\sigma_Г = 30$; в) пояснити, чому оцінка в п. *б* вужча, ніж у п. *а*.

4.10. Після обстеження 1000 членів нормально розподіленої генеральної сукупності знайдено $\overline{x_B} = 15500$ і $s = 9950$. Потрібно: а) оцінити μ з 90 % рівнем довіри; б) повторити п. *а* для $\sigma_{\text{Г}} = 9950$; в) пояснити, чому оцінки в пп. *а* та *б* майже ідентичні.

4.11. У випадковій вибірці з 500 спостережень для нормально розподіленої сукупності знайдено $\overline{x_B} = 350$ і $s = 100$. Потрібно: а) оцінити μ — середнє значення сукупності з 95 % рівнем довіри; б) повторити п. *а* для $\sigma_{\text{Г}} = 100$; в) пояснити ідентичність оцінок у пп. *а* та *б*.

4.12. Щоб визначити, з якою сумою грошей переможці телевікторини йдуть додому, була здійснена випадкова вибірка переможців і зареєстровані їхні виграші:

13660 26650 52820 23790 6060
18960 990 8490 51480 49840
7860 25840 21060 41810 11450

Обчисліть середній виграш з 95 % рівнем довіри.

4.13. А. Визначте обсяг вибірки, необхідний для оцінки середнього сукупності з похибкою в межах одиниці з 90 %-вою довірою, якщо середнє квадратичне відхилення сукупності $\sigma_Г = 10$. Б. Припустимо, що $\overline{x_B} = 150$. Оцініть середнє сукупності з 90 %-вою довірою.

4.14. Повторіть задачу 4.13 А для $\sigma_Г = 5$; для $\sigma_Г = 20$.

4.15. На підставі двох попередніх задач опишіть, що трапляється з довірчим інтервалом, якщо: а) середнє квадратичне відхилення менше, ніж те, що використовувалось для визначення обсягу вибірки; б) середнє квадратичне відхилення більше, ніж те, що використовувалось для визначення обсягу вибірки.

4.16. А. Фахівець-практик зі статистики хотів би оцінити середнє сукупності з похибкою в межах 10 одиниць. Рівень довіри був установлений 95 % і $\sigma_Г = 200$. Визначте обсяг вибірки. Б. Припустіть, що $\overline{x_B} = 500$. Оцініть середнє сукупності з 95 %-вою довірою.

4.17. Повторіть задачу 4.16 Б після виявлення, що $\sigma_Г = 100$; після виявлення, що фактично $\sigma_Г = 400$.

4.18. Проаналізуйте результати, одержані у двох попередніх задачах — 4.16 і 4.17. Опишіть, що станеться з довірчим інтервалом, якщо: а) середнє квадратичне відхилення менше від того, що використовувалося при визначенні обсягу вибірки; б) середнє квадратичне відхилення більше від того, що використовувалося при визначенні обсягу вибірки.

4.19. Медичний статистик хоче оцінити втрату середньої ваги людей, які випробовують нову дієту. З попереднього досвіду він знає, що середнє квадратичне відхилення втрат ваги сукупності становить близько 4 кг. Наскільки велику вибірку він має зробити, щоб оцінити втрату середньої ваги з похибкою 0,8 кг з 90 %-вою довірою?

4.20. а) Визначте обсяг вибірки, необхідний для оцінки середнього сукупності з похибкою 10 одиниць, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення сукупності складає 50. Рівень довіри вважаємо рівним 90 %;

б) повторіть а), замінивши середнє квадратичне відхилення сукупності на 100;

в) повторіть а) з рівнем довіри 95 %;

г) повторіть а) змінивши похибку з 10 на 20 одиниць.

4.21. Опишіть, що трапляється з обсягом вибірки в 4.20, коли:

а) збільшується середнє квадратичне відхилення;

б) збільшується рівень довіри;

в) зростає межа похибки.

4.22. а) Фахівець зі статистики хотів би оцінити середнє сукупності з похибкою в межах 50 одиниць з 99 %-вою довірою, якщо відоме середнє квадратичне відхилення сукупності $\sigma_{\Gamma} = 250$. Який обсяг вибірки потрібно використати?

б) повторіть задачу а), узявши $\sigma_{\Gamma} = 50$;

в) повторіть а), узявши 95 % рівень довіри;

г) переробіть а), узявши похибку в межах 10 одиниць.

4.23. Опишіть, що трапляється з обсягом вибірки в задачі 4.22, якщо:

а) зменшується середнє квадратичне відхилення сукупності;

б) зменшується рівень довіри;

в) знижується межа помилки.

4.24. З вибірки обсягом 10 одиниць знайдена $\overline{x}_{\text{В}} = 13{,}2$. Чому дорівнює кількість степенів вільності для знаходження дисперсії?

4.25. Майстер заводу, який контролює розлив у пляшки безалкогольних напоїв, помітив, що кількість рідини у кожній однолітровій пляшці є нормально розподіленою випадковою величиною із середнім значенням 1,02 л і середнім квадратичним відхиленням 0,015 л.

а) Якщо покупець придбає одну пляшку, то яка ймовірність того, що пляшка містить більше ніж 1,0 л?

б) Якщо покупець придбає 4 пляшки, то яка ймовірність того, що середній вміст 4 пляшок буде більший від 1,0 л?

4.26. За статистичними даними середня родина витрачає на розваги 19,50 умов. грош. од. на тиждень із середнім квадратичним відхиленням 5,25 умов. грош. од. Чому дорівнює ймовірність того, що у випадковій вибірці обсягу n = 100 ми дістанемо вибіркову середню, що перевищує 20 умов. грош. од.?

4.27. Середня заробітна плата в місті становить 1825 умов. грош. од. Якщо проведена випадкова вибірка 1000 працюючих, то чому дорівнює ймовірність того, що вибіркова середня відхилиться від генеральної середньої більше ніж на 0,062 середнього квадратичного відхилення?

4.28. 38 % студентів університету склали іспит (за статистикою) на відмінні та добрі оцінки. Чому дорівнює ймовірність того, що у випадковій вибірці зі 100 студентів принаймні 30 виявляться з добрими і відмінними оцінками?

4.29. Пекарня щотижня продає 478 лотків батонів. Обсяг продажу (X) підпорядковується нормальному розподілу з виправленим вибірковим середнім квадратичним відхиленням s = 17.

а) Чому дорівнює ймовірність того, що значення $\overline{x}_B$ перевищить 495, якщо проведена випадкова вибірка обсягом $n = 1$?

б) Чому дорівнює ймовірність того, що значення $\overline{x}_B$ перевищить 495, якщо випадкова вибірка була обсягу $n = 4$?

в) Чому відповіді відрізняються?

4.30. На деякому машинобудівному підприємстві середня заробітна плата становить \$ 4 на день зі стандартним відхиленням $\sigma = \$\ 0{,}5$. На заводі 64 жінки. Їхня середня заробітна плата 3,9 дол. Чи резонно припустити, що жінки являють собою випадкову вибірку робітників галузі? Обчисліть імовірність дістати вибіркову середню, меншу або рівну 3,9.

4.31. Керівники вузів цікавляться, чи успішно працюють їхні випускники, з метою мати корисну інформацію для коригування професійної підготовки випускників. Декан факультету заявив, що випускники цього факультету мають після випуску зарплату 800 дол. на місяць зі стандартним відхиленням 100 дол. Почувши таке, другокурсник, який вивчив математичну статистику, вирішив перевірити, чи відповідає дійсності заява декана. Для цього він зробив вибіркове опитування 25 осіб, які здобули освіту рік тому. Він виявив, що середня платня за цією вибіркою дорівнює 750 дол. Зробіть висновки про заяву декана.

4.32. Розливна машина може регулюватися так, що різниця в обсязі рідини становить у середньому 1 мл на пляшку. Установлено, що розподіл ваги повних пляшок підкоряється закону нормального розподілу з $\sigma = 1$. Випадково відібрані 9 повних пляшок з продукції однієї розливної машини. Знайдіть імовірність того, що вибіркова середня ваги повної пляшки буде відрізнятися від генеральної середньої не більше ніж на 0,3 мл.

4.33. Опитування навмання вибраних 100 клієнтів перукарні показало, що 25 з них залишилися незадоволеними обслуговуванням. Визначте 99 %-вий довірчий інтервал для виявлення відсотка незадоволених серед усіх клієнтів перукарні.

4.34. Відомо, що дивідендний дохід прибуткових компаній є нормально розподіленим із середнім квадратичним відхиленням 2,8 %. З метою розміщення інвестицій та диверсифікації ризиків вибрані 5 компаній з дивідендними доходами: 10,3 %; 12,5 %; 8,7 %; 9,2 %; 10,1 %. Необхідно визначити 95 %-вий довірчий інтервал, у межах якого можемо сподіватися на середній дивідендний дохід. Який буде довірчий інтервал, якщо інвестицію здійснити лише в якусь одну компанію?

4.35. Вага випадково вибраних коробок з цукерками, яка фактично мала бути 400 г, записана далі: 420, 412, 400, 392, 396, 388, 404, 384.

Оцініть з 90 % довіри відхилення за вагою в усій сукупності коробок з цукерками.

4.36. Оператор телефонного зв'язку хоче оцінити середній час міжміських переговорів протягом вихідних, коли діє пільговий тариф. Випадкова вибірка з 41 дзвінка дала середню $\overline{x}_B = 14{,}5$ хв. із середнім квадратичним відхиленням $\sigma_B = 5{,}6$ хв. Побудуйте 95 %-вий і 90 %-вий довірчі інтервали для середньої тривалості переговорів у вихідні дні.

4.37. Для визначення рівня цукру в крові чоловік звернувся до 10 лабораторій і одержав такі результати: 5,3; 4,5; 5,0; 4,9; 5,6; 5,8; 6,0; 4,8; 5,7; 5,2.

Оцініть з 95 %-вою довірою рівень цукру в крові.

4.38. Виробник пальчикових батарейок бажає оцінити середню тривалість їхньої роботи. Випадкова вибірка 12 батарейок дала $\overline{x}_B = 34{,}2$ год. і $\sigma_B = 5{,}9$ год. Знайдіть 99 %-вий довірчий інтервал середньої тривалості роботи батарейок.

4.39. Служба зайнятості має намір оцінити середні оклади робітничих вакансій у певній галузі промисловості. Випадкова вибірка 61-ї вакансії дала $\overline{x}_B = 42{,}539$ грош. од. і $\sigma_B = 11{,}69$ грош. од. Побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал для середніх ставок за вакансіями в даній галузі промисловості.

4.40. Банк зацікавлений в автоматизації касових операцій у філії, що відкривається в новому регіоні. Для прийняття обґрунтованого рішення проводиться експеримент з визначення середнього обсягу трансакцій в умовних грошових одиницях на людину в день. Випадкова вибірка з 10 трансакцій, які пройшли через нові касові автомати, дала такі результати: 53, 40, 39, 10, 12, 60, 72, 65, 50, 45.

Побудуйте 95 %-вий довірчий інтервал для середнього обсягу трансакцій.

4.41. Автотранспортна компанія бажає оцінити середній час доставки вантажів зі столиці в південні регіони країни. Випадкова вибірка з 20-и партій товарів дала такі результати: $\overline{x}_B = 2{,}6$ дня, $\sigma_B = 0{,}4$ дня. Побудуйте 99 %-вий довірчий інтервал для середнього часу доставки товарів у генеральній сукупності.

4.42. Фірмовий магазин, який торгує мийними засобами, бажає оцінити обсяг щоденного продажу упаковок мила певного сорту. Випадкова вибірка продажу за 13 днів дала такі результати: 123, 110, 95, 120, 87, 89, 100, 105, 98, 88, 75, 125, 101.

Побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал обсягу щоденної реалізації упаковок мила.

4.43. Комерційний директор бажає оцінити середню суму рахунків сервісної компанії. Випадкова вибірка з 41-го рахунку дала $\overline{x}_B = 16{,}50$ умов. грош. од., $\sigma_B = 5{,}2$. Побудуйте 99 %-вий довірчий інтервал для середньої суми рахунків.

4.44. Щоб оцінити якість роботи аудиторів, податкова служба здійснила випадкову вибірку 200 декларацій і повідомила про додаткові податки на прибуток. Середнє значення додаткового прибутку у вибірці — 6001 грн із середнім квадратичним відхиленням 2864. Оцініть з 95 %-вою довірою середній додатковий прибуток від стягнення податків. Оцініть стандартне відхилення.

4.45. Картинна галерея, яка бере участь у художніх аукціонах, бажає оцінити середню вартість картин певного періоду і стилю. Експерти-мистецтвознавці провели оцінку 20 картин, відібраних випадковим чином. Вибірка дала такі результати: середня оціночна вартість однієї картини $\overline{x}_B = 5139$ умов. грош. од., виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 640$. Побудуйте 95 %-вий довірчий інтервал середньої вартості однієї картини.

4.46. Консалтинговій фірмі необхідно оцінити середній стаж роботи менеджерів у певній галузі. З цією метою була здійснена випадкова вибірка 28 менеджерів, яка дала такі результати: $\overline{x}_B = 6{,}7$ років, незміщена оцінка генеральної дисперсії дорівнює 2,4 року. Побудуйте 99 %-вий довірчий інтервал для середнього стажу роботи менеджерів певної галузі.

4.47. Менеджерові супермаркету необхідна інформація про середньоденні потреби в гречаній крупі. Випадкова вибірка дала такі результати продажу (кількість проданих кілограмових упаковок на день): 48, 59, 45, 62, 50, 68, 57, 80, 65, 58, 79, 69.

Припускаючи, що це — випадкова вибірка денної потреби, побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал для середньої кількості пакетів із гречаною крупою, яку треба завозити щодня в супермаркет.

4.48. Туристична фірма, що опановує новий вид екскурсійного обслуговування, провела опитування 120 випадково відібраних потенційних клієнтів для з'ясування їхньої зацікавленості в новому виді послуг. Результати показали, що 28 % опитаних віддали б перевагу новому виду екскурсійного обслуговування. Побудуйте 95 %-вий довірчий інтервал для частки клієнтів туристичної компанії, які можуть стати споживачами нового виду послуг.

4.49. Творці нового косметичного крему від зморшок хотіли б визначити відсоток людей певної вікової групи, яким допоможе цей крем. Для перевірки крем був розданий 68 навмання вибраним жінкам певної вікової групи. Результати перевірки показали позитивну реакцію на крем у 42 з них. Побудуйте 99 %-вий довірчий інтервал для частки жінок, які можуть бути задоволені дією нового крему від зморшок.

4.50. Авіакомпанія, що відкрила новий авіамаршрут, бажає оцінити частку пасажирів, що подорожують у бізнесових справах у цьому напрямку. Випадкова вибірка з 347 пасажирів, які користувалися цим маршрутом, визначила, що 201 з них — бізнесмени. Побудуйте 99 %-вий довірчий інтервал частки пасажирів, що подорожують у бізнесових справах.

4.51. Філія Ощадбанку має 1253 особових рахунки. Випадкова вибірка 200 з них дала середнє значення 648,32 умов. грош. од. Вибіркове середнє квадратичне відхилення дорівнює 210,00 умов. грош. од. Побудуйте 99 %-вий довірчий інтервал середньої суми грошей на рахунках даної філії.

4.52. З 4000 відвідувачів магазину була утворена вибіркова сукупність із 500 осіб. Серед них виявилося 350 осіб, які здійснили купівлю в магазині. Знайдіть імовірність того, що частка всіх відвідувачів, які зроблять купівлю в магазині, відрізняється від частки їх у вибірці не більше ніж на 0,03 (за абсолютною величиною), якщо вибірка: а) повторна; б) безповторна.

4.53. Фірма здійснює ринкові дослідження і хоче встановити рівень популярності її продукції. 80 з 400 опитаних жителів міста сказали, що знайомі з продукцією фірми. Знайдіть 90 %-ву інтервальну оцінку рівня популярності продукції фірми серед усіх жителів міста.

4.54. Опитування 300 випадково відібраних жителів міста показало, що 55 % з них задоволені діяльністю новообраного мера. Побудуйте 95 %-вий довірчий інтервал частки жителів усього міста, які також довіряють мерові.

4.55. Профспілкова організація проводить опитування робітників підприємства з метою з’ясування ставлення до структурної реорганізації, проведеної керівництвом підприємства. На підприємстві працює 1242 людини. Для інтерв’ю випадковим чином було відібрано 160 осіб, серед яких 85 зазначили, що загалом задоволені проведеними перетвореннями. Побудуйте 95 %-вий довірчий інтервал частки робітників, що оцінюють позитивно реорганізацію підприємства.

4.56. У супермаркеті за тиждень продається в середньому 1520 пластикових упаковок перепелиних яєць. Для оцінки можливої компенсації за пошкоджені яйця проводиться регулярна щотижнева випадкова вибірка 100 упаковок. Якщо у вибраній партії знайдено 12 упаковок з пошкодженими яйцями, то оцініть з імовірністю 0,95 їхню частку в партії, що складається з 1520 упаковок.

4.57. За результатами міського соціологічного опитування, для якого була складена вибірка за виборчими списками, з'ясовано, що, швидше за все, 48 % виборців збираються голосувати проти нинішнього мера міста. Припустимо, що обсяг вибірки становив 789 виборців. Побудуйте 99 %-вий довірчий інтервал для частки можливих виборців, які, швидше за все, проголосують проти нинішнього мера.

4.58. У вибірці обсягу 600 одиниць, здійсненій для визначення процента схожості зерна пшениці, встановлена частка доброякісних зерен $w = 0{,}95$. Знайти ймовірність, з якою може бути взятий у цьому разі шуканий відсоток схожості, якщо припускається похибка ±2 %.

4.59. Випадкова вибірка 225 людей, що звернулися до шлюбного агентства, показала, що 100 з них знайшли собі пару з його допомогою. Побудуйте 95 %-вий довірчий інтервал частки людей, що знайшли собі пару через шлюбне агентство.

4.60. Опитування показало, що 53 % виборців збираються підтримати на виборах до міської ради кандидата А. Для опитування було навмання взято за списками виборців 1000 осіб. Оцініть на 95 %-вому довірчому рівні частку виборців, які віддали б свої голоси за кандидата А.

4.61. Ректорат університету хотів би знати думку студентів про новий навчальний корпус. З 500 студентів, яких було опитано, 350 відповіли, що їм подобаються нові навчальні приміщення. Оцініть частку студентів, яким сподобається новий навчальний корпус. Побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал.

4.62. Менеджер банку в невеликому місті хотів би визначити частку депозитів, з яких щомісяця перераховуються платежі за рахунками. Випадкова вибірка зі 100 рахунків показала, що з 30 з них здійснюються щомісячні виплати. Побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал для оцінки генеральної частки банківських депозитів, з яких проводяться виплати.

4.63. Автоперевізник, що виконує пасажирські автобусні перевезення, має намір відкрити новий автобусний маршрут з передмістя в центральну частину міста. Серед 50 пасажирів, вибраних навмання, 18 заявили, що будуть регулярно користуватися новим автобусним маршрутом. Побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал для генеральної частки пасажирів, які будуть використовувати новий автобусний маршрут.

4.64. Аудитор, який перевіряє страхову медичну компанію, хотів би визначити частку рецептів, оплачених страховою компанією протягом останніх двох місяців. У випадковій вибірці з 200 рецептів виявилося 80, оплачених протягом найближчих двох місяців. Побудуйте 99 %-вий довірчий інтервал для оцінки кількості рецептів у генеральній сукупності, які були оплачені в найближчі 2 місяці.

4.65. Менеджер з реклами мережі підприємств швидкого харчування хотів би з'ясувати, чи знайомі школярі старших класів з комерційною рекламою підприємств, яка регулярно передається на радіо і телебаченні міста. У випадковій вибірці з 400 школярів старших класів 160 відповіли, що знайомі з рекламою швидкого харчування. Побудуйте 95 %-вий довірчий інтервал для оцінки частки старшокласників, знайомих з рекламою підприємств швидкого харчування.

4.66. Студентська рада університету хотіла б з'ясувати яка частка студентів денного відділення має доступ до роботи з персональним комп'ютером поза університетом. Випадкова вибірка 150 студентів виявила, що 105 з них мають такий доступ. Побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал для частки студентів денного відділення, що мають доступ до персонального комп'ютера поза університетом.

4.67. Рекламне агентство, яке планує розповсюджувати рекламу через місцеву радіостанцію, хотіло б оцінити середній час прослуховування передач станції. Який обсяг вибірки необхідний, якщо агентство хоче бути впевненим у результатах на 90 % з граничною помилкою ±5 хвилин? З минулого досвіду відомо, що середнє квадратичне відхилення часу прослуховування радіопередач становить 45 хвилин.

4.68. Політолог хотів би оцінити частку виборців, які проголосують за опозиційні сили на найближчих парламентських виборах. Побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал для цього прогнозу оцінки з граничною помилкою вибірки, рівною ±0,04. Який обсяг вибірки в цьому разі необхідний для опитування виборців?

4.69. Оператор кабельного телебачення хотів би мати оцінку частки глядачів, охочих купувати щотижневу програму передач його каналів. Побудуйте 95 %-вий довірчий інтервал для оцінки цієї частки з граничною помилкою оцінки вибірки ±0,05. З досвіду інших регіонів відомо, що 30 % глядачів купуватимуть програму. Який обсяг вибірки необхідний для проведення опитування потенційних споживачів щотижневої програми передач?

4.70. Аудитор випадково відбирає 50 оплачених рахунків і знаходить, що їх вибіркова середня становить 1100 грош. од. із середнім квадратичним відхиленням 287 грош. од. Побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал для середнього значення суми оплачених рахунків.

4.71. Відділ реалізації місцевої кондитерської фабрики бажає визначити кількіть продаваних коробок цукерок певного сорту в спеціальних відділах продовольчих магазинів міста. У місті 538 таких відділів. Для оцінки навмання вибрано 121 з них. Перевірка показала, що в середньому за місяць продається 1220 коробок цих цукерок із середнім квадратичним відхиленням кількості продажу — 550 коробок. Побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал кількості продаваних коробок цукерок.

4.72. Власник невеличкої хлібної крамнички помітив, що в нього щодня залишається деяка кількість непроданих булочок, і він вирішив оцінити реальну потребу в цьому сорті хліба. Протягом місяця він записував дані про кількість проданих булочок і через 30 днів установив, що в середньому за день продається 100 булочок із середнім квадратичним відхиленням в 10 булочок. Припустимо, що щоденний продаж булочок підпорядкований нормальному розподілу. Побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал для потрібної кількості булочок.

4.73. Припустимо, що власник крамниці (див. задачу 4.72) проводив спостереження протягом 60 днів і знайшов, що вибіркова середня кількість продаваних булочок дорівнює 115 із середнім квадратичним відхиленням 12. Побудуйте 90 %-вий довірчий інтервал для необхідної кількості булочок. Порівняйте одержані результати з результатами попередньої задачі. Чи можете пояснити, чому одержаний інтервал менший від попереднього?

4.74. Товариство захисту прав споживачів оцінює середні витрати бензину марки А-95 у новій моделі автомобіля. Унаслідок обмеженості часу та коштів було перевірено 25 автомобілів. Середнє квадратичне відхилення витрати бензину — 2 л на 100 км траси. Яка довжина 90 %-вого довірчого інтервалу для оцінки середніх витрат бензину?

4.75. Шестиразове зважування виробу з цінного металу дало такі результати (у грамах): 5,850; 5,861; 5,844; 5,857; 5,846; 5,825.

Припускаючи, що результати вимірювань являють собою значення ознаки X, розподіленої за нормальним законом, знайдіть: а) точкові оцінки $\overline{x}_{\Gamma}$ та σ_{Γ}; б) 99%-ий довірчий інтервал, що накриває істинну вагу виробу; в) 95 %-вий довірчий інтервал, що накриває невідоме середнє квадратичне відхилення $\sigma_Г$; г) граничну помилку вибірки, яку ми допускаємо, вважаючи істинну вагу виробу рівною (середній) $\bar{x}_B$ за довірчої ймовірності 0,98.

4.76. У магазин, що торгує емалевими фарбами для внутрішніх покриттів, почали надходити претензії від покупців, що банки з фарбою заповнені нижче від норми. Виробник фарб стверджує, що середнє квадратичне відхилення обсягу фарби у літровій банці становить 0,02 л. Випадкова вибірка 50 банок дала середнє значення обсягу 0,995 л.

а) Побудуйте 99 %-вий довірчий інтервал для середнього значення обсягу фарби в літровій банці.

б) Як ви вважаєте, ґрунтуючись на вибіркових результатах, чи повинен власник магазину подати рекламацію виробникам фарби? Чому?

в) Поясніть, чому спостережуване значення 0,98 л фарби в банці не є незвичайним, навіть якщо перебуває поза обчисленим вами довірчим інтервалом?

4.77. Інспекційна перевірка Держкомстандарту оцінює точність наповнення 2-літрових пляшок з газованим безалкогольним напоєм. Контрольна лабораторія заводу проінформувала інспекторів, що середнє квадратичне відхилення наповнення 2-літрових пляшок становить 0,05 л. Випадкова вибірка 100 2-літрових пляшок дала вибіркову середню 1,99 л. Побудуйте 95 %-вий довірчий інтервал для оцінки генерального середнього значення обсягу заповнення 2-літрових пляшок з безалкогольним напоєм. Поясніть, чому спостережуване значення 2,02 л для 2-літрової пляшки не буде незвичайним, незважаючи на те що перебуває поза довірчим інтервалом, обчисленим вами.

4.78. Новий дизайн упаковки сухих сніданків пропонується для перевірки купівельного попиту в 16 магазинах міста. Результати місячного експерименту дали такий обсяг продажу в 6000 грн із середнім квадратичним відхиленням у 720 грн. Збудуйте 99 %-вий довірчий інтервал середнього обсягу продажу нових упаковок сухих сніданків.

4.79. Побудуйте 95 %-ві довірчі інтервали для середніх двох вибірок, зроблених з нормально розподіленої генеральної сукупності:

вибірка 1: 1, 1, 1, 1, 8, 8, 8, 8;
вибірка 2: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Поясніть, чому довірчі інтервали різні, незважаючи на те, що вибіркові середні значення збігаються?

4.80. З метою визначення середньої суми вкладів у комерційному банку, що має 1000 вкладників, зроблено вибіркове обстеження (безповторний відбір) 500 вкладників, яке дало такі результати:

Сума вкладу, тис. грн	10–30	30–50	50–70	70–90	90–110	110–130
Кількість вкладів	30	40	100	200	60	70

Користуючись цими даними, знайти довірчі межі для генеральної середньої, які можна було б гарантувати з імовірністю 0,95.

4.81. Час обслуговування клієнтів, що стоять у черзі, не повинен мати великої варіації, в іншому разі черга має тенденцію до зростання. Банк регулярно перевіряє час обслуговування черги, що утворилася до касира, для визначення варіації. Випадкова вибірка 22 осіб, що стоять у черзі, дала значення виправленої дисперсії часу їх обслуговування $s^2 = 8$ (хв.)^2. Побудуйте 95 %-вий довірчий інтервал для дисперсії часу очікування в черзі до касира банку.

4.82. Випадкова вибірка 21 рахунку дала значення виправленої дисперсії $s^2 = 8$. Побудуйте 99 %-вий довірчий інтервал для дисперсії всіх рахунків.

4.83. У середньому оптовий продавець книг реалізує 1000 томів за день. Якщо щоденний продаж нормально розподілений із середнім квадратичним відхиленням 100, то яка ймовірність того, що середній обсяг продажу за п'ять днів опиниться між 900 і 1100 томами?

4.84. Менеджер магазину з досвіду знає, що 25 % відвідувачів магазину здійснюють купівлю. Припустимо, у магазин зайшли 200 відвідувачів. Яка очікувана частка відвідувачів, що зробили купівлю? Чому дорівнює дисперсія вибіркової частки? Чому дорівнює середнє квадратичне відхилення вибіркової частки? Чому дорівнює ймовірність того, що вибіркова частка опиниться між числами 0,25 і 0,30?

4.85. Операційний менеджер великого заводу хотів би оцінити середню кількість часу, яку витрачають працівники на складання нового електронного компоненту. Після спостереження за працівниками, які складають подібні пристрої, він помітив, що середнє квадратичне відхилення становить 6 хв. Наскільки велику вибірку працівників він повинен взяти, якщо бажає оцінити середній час складання з похибкою у межах 20 секунд? Візьміть рівень довіри — 99 %.

4.86. Для визначення вартості споживчого кошика проводиться вибірка родин з низьким доходом. Відомо, що середнє квадратичне відхилення витрат на харчування становить 25,75 грн на день. Економісти, які оцінюють вартість харчування, бажають побудувати 95 %-вий довірчий інтервал, в якому перебувають межі справжніх витрат на харчування, і хотіли б, щоб гранична помилка оцінки не перевищувала 3,95 грн. Знайдіть необхідний обсяг вибірки для розв'язання цього завдання.

4.87. Менеджер молодіжного бару хоче оцінити середні витрати відвідувачів на баночне пиво. З попереднього досвіду він оцінює середнє квадратичне відхилення витрат на пиво для покупця в 4 грн. Якщо менеджер хотів би бути впевненим у результаті на 90 % із граничною помилкою ±5 %, то скільки відвідувачів бару необхідно опитати для одержання такої оцінки?

4.88. Проводиться вибіркове обстеження віку читачів масових бібліотек. Є 30000 читацьких карток. Скільки карток треба взяти для обстеження, щоб з імовірністю 0,99 можна було б стверджувати, що вибіркова середня відхилиться від генеральної середньої за абсолютною величиною не більше ніж на 1 рік? За середнє квадратичне відхилення взяти 5 років.

4.89. Для нарахування абонплати оператор відстежує середню тривалість телефонної розмови. Скільки телефонних розмов має бути зафіксовано, щоб з імовірністю 0,997 можна було б стверджувати, що відхилення вибіркової середньої від генеральної середньої не перевищило 10 секунд, якщо генеральне середнє квадратичне відхилення дорівнює 2,5 хвилини?

4.90. Медичний працівник хоче дослідити кількість часу, протягом якого в пацієнтів зникає головний біль після прийому нових ліків від головного болю. Він планує використовувати статистичні моделі, щоб оцінити середнє сукупності часу, за який наставало полегшення. Він вважає, що сукупність нормально розподілена із середнім квадратичним відхиленням 20 хвилин. Наскільки велику вибірку він повинен узяти, щоб оцінити середній час із похибкою в межах 1 хвилини з 90 %-вою довірою?

4.91. Визначити чисельність вибірки при обстеженні залишків на розрахункових рахунках у клієнтів Ощадбанку з імовірністю 0,983, щоб помилка репрезентативності не перевищувала 5 тис. грн, якщо σ_r = 120 тис. грн.

4.92. Для визначення середнього віку 1000 студентів, прийнятих на перший курс університету, передбачається провести вибіркове спостереження. Помилка вибірки не повинна перевищувати 0,5 року. Пробними вибірками було встановлено, що дисперсія не перевищує 9. Скільки студентів необхідно відібрати методом випадкової вибірки, щоб результат вибіркового спостереження можна було гарантувати з імовірністю 0,9545?

4.93. Для визначення середньої ваги 1000 відпочивальників у санаторії передбачається провести вибіркові спостереження методом повторного відбору. Установлено, що дисперсія не перевищує 128. Якого обсягу має бути вибірка, щоб її результати можна було гарантувати з імовірністю 0,9545, а помилка у визначенні ваги не перевищувала 1 кг?

4.94. Рок-промоутер вирішує зареєструвати нову групу для рок-концерту. Він знає, що цю групу слухає в основному тільки молодь віком 16–20 років. Згідно зі статистичними даними в цій області близько 40 000 людей такого віку. Промоутер вирішує зробити огляд, щоб спробувати оцінити частку молоді, яка відвідає концерт. Якою великою має бути вибірка, щоб оцінити частку з похибкою в межах 0,02 за 99 % довіри?

4.95. За задачею 4.94 припустіть, що промоутер вирішив зробити вибірку $n = 600$ (з фінансових міркувань). Кожен з 600 підлітків був опитаний і дав відповідь «так» або «ні». Оцініть з 95 %-вою довірою кількість підлітків які відвідають концерт.

4.96. Ярлик на 4-літрових каністрах фарби засвідчує, що кількість фарби в каністрі достатня, щоб пофарбувати 40 м^2. Проте ця кількість є змінною. Фактично відомо, що площа покриття приблизно нормально розподілена із середнім квадратичним відхиленням 2,5 м^2. Наскільки велика має бути вибірка, щоб оцінити справжню середню площу покриття 4-літровими каністрами фарби з похибкою у межах 0,5 м^2 з 95 %-вою довірою?

4.97. Операційний менеджер заводу, що виготовляє стільникові телефони, запропонував реорганізацію виробничого процесу для більшої ефективності. Він хоче оцінити час, який буде потрібен, щоб скласти телефон, в умовах реорганізації. Він вважає, що середнє квадратичне відхилення сукупності становить 15 секунд. Наскільки велика має бути вибірка, щоб оцінити середній час складання з похибкою у межах 2 секунди з 95 %-вою довірою?

4.98. Для вивчення зайнятості в галузі, яка охоплює 1200 фірм, була здійснена випадкова вибірка з 20 фірм. За вибірковими даними виявилося, що в фірмах працюють у середньому 77,5 осіб за середнього квадратичного відхилення 20 осіб. Користуючись 95 %-вим довірчим інтервалом, оцініть:

а) середню кількість, дисперсію і середнє квадратичне відхилення працюючих у фірмі для всієї галузі в цілому;

б) загальну кількість працюючих у галузі.

4.99. Глибина моря вимірюється приладом, систематична похибка якого дорівнює 0, а випадкові похибки розподілені нормально із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 15$ м. Скільки незалежних вимірювань потрібно зробити, щоб визначити глибину з похибкою не більшою від 5 м за довірчої ймовірності 90 %?

4.100. Один з небагатьох негативних побічних ефектів відмови від куріння — збільшення ваги. Припустимо, що збільшення ваги за 12 місяців, наступних за припиненням куріння, є нормально розподілена величина із середнім квадратичним відхиленням 2,4 кг. Щоб оцінити збільшення середньої ваги, була зроблена випадкова вибірка 13 колишніх курців, і збільшення їхньої ваги записано далі. Визначте 90 %-вий довірчий інтервал оцінки збільшення середньої ваги протягом 12 місяців з моменту припинення куріння для всіх колишніх курців:

16 23 8 2 14 22 18 11 10 19 5 8 15 (кг).

4.101. Унаслідок різних можливостей продажу, досвіду і відданості справі прибутки агентів з нерухомості значно різняться. Припустимо, що у великому місті їхній річний дохід нормально розподілений із середнім квадратичним відхиленням $ 15000. Випадково вибраних 16 агентів з нерухомості просили повідомити їхній річний дохід (у тис. дол.). Відповідні дані наведені далі. Визначте 99 %-вий довірчий інтервал оцінки середнього річного доходу агентів з нерухомості у місті:

65 94 57 111 83 61 50 73 68 80 93 84 113 41 60 77

4.102. До підрозділу VIP-банкінгу комерційного банку звернувся клієнт з проханням розмістити 5 млн грн у цінні папери. При цьому з метою диверсифікації ризиків інвестиція має бути здійснена у 5 активів по 1 млн грн та забезпечити середній дохід на рівні не менше ніж 10 %. Інвестиційний аналітик знає, що для певної групи активів, з яких він вибрав 5, дохід є нормально розподіленим із середнім значенням 12,3 % та середнім квадратичним відхиленням 2,8 %.

1. Яка ймовірність того, що середній дохід буде не менший від 10 %?

2. У скільки активів необхідно здійснити інвестиції, щоб з імовірністю 0,99 можна було сподіватись на дохід не менший від 10 %?

§ 5. Перевірка статистичних гіпотез

5.1. Загальні поняття перевірки статистичних гіпотез

Означення 1. ***Статистичною гіпотезою*** називається будь-яке припущення стосовно до числового значення параметрів або вигляду невідомого закону розподілу генеральної сукупності, зроблене в результаті дослідження вибірки з цієї генеральної сукупності.

Статистичні гіпотези поділяють на ***параметричні*** та ***непараметричні.*** У ***параметричних*** статистичних гіпотезах містяться твердження про значення параметрів генеральної сукупності. Усі інші статистичні гіпотези називають ***непараметричними***.

Означення 2. Гіпотезу називають ***простою***, якщо вона містить припущення стосовно до одного й тільки одного числового значення параметра генеральної сукупності.

Означення 3. Гіпотезу називають ***складною***, якщо вона складається зі скінченної або нескінченної кількості простих гіпотез.

Розв’язання кожної задачі перевірки статистичних гіпотез завжди починається з визначення ***основної*** та ***альтернативної гіпотез.***

Означення 4. ***Основною*** (***нульовою***) ***статистичною гіпотезою*** H_0 називають висловлене припущення (твердження), яке вважають правильним, якщо не доведене інше (альтернативне).

Означення 5. ***Альтернативною*** (***конкуруючою***) ***статистичною гіпотезою*** H_1 називають твердження, яке вважається правильним, якщо нульова гіпотеза відхилена.

При перевірці статистичних гіпотез можливі два типи помилок.

Означення 6. ***Ймовірність припущення помилки першого типу*** — це ймовірність невідхилення альтернативної гіпотези за умови, що нульова гіпотеза справедлива:

$$\alpha = P\,(H_1 \,/\, H_0), \tag{2.5.1}$$

$\alpha = P$ (невідхилення H_1 / H_0 правильна).

Ймовірність не припуститися помилки першого типу називається ***рівнем надійності*** та позначається γ.

$$\gamma = 1 - \alpha = 1 - P\,(H_1 \,/\, H_0) = P\,(H_0 \,/\, H_0), \tag{2.5.2}$$

$\gamma = P$ (невідхилення H_0 / H_0 правильна).

Означення 7. ***Ймовірність припущення помилки другого типу*** — це ймовірність невідхилення хибної гіпотези H_0:

$$\beta = P\,(H_0\,/\,H_1), \qquad (2.5.3)$$

$\beta = P$ (невідхилення H_0 / H_1 правильна).

Статистичні критерії для перевірки гіпотез

Означення 8. ***Статистичним критерієм перевірки гіпотези*** (або просто критерієм) називають випадкову величину U, розподіл якої (точний або наближений) є відомим та застосовується для перевірки справедливості основної гіпотези.

Означення 9. ***Потужність критерію*** — це ймовірність відхилення хибної гіпотези H_0 або ймовірність запобігання помилці другого типу:

$$1 - \beta = P\,(H_1\,/\,H_1), \qquad (2.5.4)$$

$1 - \beta = P$ (невідхилення H_1 / H_1 правильна).

Зауваження 1. Якщо випадкова величина U розподілена за нормальним законом, то критерій позначають не літерою U, а літерою Z. Якщо статистична характеристика розподілена за законом Фішера–Снедекора, то її позначають F. У разі розподілу статистичної характеристики за законом Стьюдента її позначають T, а в разі розподілу за законом «хі-квадрат» — χ^2.

Зауваження 2. При великих обсягах вибірки ($n > 30$) закони розподілу статистичних критеріїв T, F, χ^2 наближаються до нормального розподілу.

Після визначення статистичного критерію перевірки гіпотези обчислюється спостережуване значення u^* статистичного критерію U за даними вибірки**.**

Означення 10. ***Спостережуваним значенням u^* статистичного критерію U*** називають значення відповідного критерію, обчислене за даними вибірки.

Критична область та критичні точки

Множину всіх можливих значень статистичного критерію U поділяють на дві підмножини A та $\overline{A}$, для яких виконується умова $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Означення 11. ***Областю допустимих значень*** A називають множину значень критерію, при яких основна гіпотеза H_0 не відхиляється.

Означення 12. ***Критичною областю*** $\overline{A}$ називають сукупність значень критерію, при яких основна гіпотеза H_0 відхиляється.

Означення 13. ***Критичними точками*** (межами) критерію U називають точки $u_{\text{кр}}$, які відокремлюють критичну область $\overline{A}$ від області допустимих значень A.

Якщо спостережуване (за даними вибірки) значення u^* потрапляє в критичну область $\bar{A}$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

Якщо спостережуване (за даними вибірки) значення u^* потрапляє в область допустимих значень A, то гіпотеза H_0 не відхиляється.

Порядок визначення критичних точок та критичних областей

Критичні точки — межі критичних областей знаходять із таблиць розподілу ймовірностей випадкової величини U, згідно заданого рівня значущості.

Розрізняють три види критичних областей: ***правобічна, лівобічна і двобічна.***

Означення 14. ***Правобічною критичною областю*** є критична область, яка задається нерівністю: $U > u_{\text{кр}}$.

Критичну точку $u_{\text{кр}}$ цієї області при вибраному рівні значущості визначають зі співвідношення:

$$P\,(U > u_{\text{кр}}) = \alpha. \tag{2.5.5}$$

Означення 15. ***Лівобічною критичною областю*** є критична область, яка задається нерівністю: $U > u_{\text{кр}}$.

Значення $u_{\text{кр}}$ знаходять за умовою

$$P\,(U < u_{\text{кр}}) = \alpha. \tag{2.5.6}$$

Означення 16. ***Двобічною критичною областю*** є критична область, яка задається двома нерівностями: $U < u_{\text{кр}}^{\text{лів}}$, $U > u_{\text{кр}}^{\text{пр}}$.

Критичні точки $u_{\text{кр}}^{\text{лів}}, u_{\text{кр}}^{\text{пр}}$ знаходять за умови

$$P\left(U < u_{\text{кр}}^{\text{лів}}\right) + P\left(U > u_{\text{кр}}^{\text{пр}}\right) = \alpha. \tag{2.5.7}$$

У разі коли двостороння критична область симетрична відносно нуля, то $P\left(U < u_{\text{кр}}^{\text{лів}}\right) = P\left(U > \text{u}_{\text{кр}}^{\text{пр}}\right) = \frac{\alpha}{2}$ і $u_{\text{кр}}^{\text{пр}} = -u_{\text{кр}}^{\text{лів}} = u_{\text{кр}}$,
де $u_{\text{кр}}$ визначається з умови

$$P\left(U > u_{\text{кр}}\right) = \frac{\alpha}{2}. \tag{2.5.8}$$

5.2. Перевірка вірогідності гіпотези про значення середньої генеральної сукупності, якщо дисперсія генеральної сукупності відома. Інтерпретація величини p-значення (p-value) у перевірці статистичних гіпотез.

Нехай ознака X генеральної сукупності є нормально розподіленою із генеральною середньою μ. Припустимо, що її генеральна дисперсія σ^2 — відома. При цьому генеральна середня μ — невідома, але є вагомі причини стверджувати, що її гіпотетичне значення дорівнює μ_0. Для перевірки цього твердження потрібно зробити вибірку обсягом n із даної генеральної сукупності, обчислити її середнє значення $\bar{x}_B$ та встановити, наскільки значущою (за заданим рівнем значущості α) є різниця між припущеним (гіпотетичним) значенням μ_0 та середньою вибірковою $\bar{x}_B$.

Для перевірки вірогідності гіпотези про значення середньої генеральної сукупності за відомої дисперсії вибирається критерій Z, якщо: 1) обсяг вибірки великий: n > 30 (закон розподілу генеральної сукупності X може бути довільним), 2) обсяг вибірки $n \leq 30$ (закон розподілу генеральної сукупності X обов'язково має бути нормальний).

Отже, за статистичний критерій вибрано випадкову величину

$$Z = \frac{\overline{X}_в - \mu_0}{\sigma\left(\overline{X}_в\right)} = \frac{\left(\overline{X}_в - \mu_0\right)}{\sigma(X)}\sqrt{n}, \text{ оскільки } \sigma(\overline{X}_в) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}. \quad (2.5.9)$$

Випадкова величина Z має нормований нормальний закон розподілу ймовірностей: $Z \sim N(0;1)$, оскільки $M(Z) = 0$ і $\sigma(Z) = 1$.

За наявною вибіркою обчислюється спостережуване значення z^* критерію Z:

$$z^* = \frac{\bar{x}_в - \mu_0}{\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x}_в - \mu_0}{\sigma(X)} \cdot \sqrt{n}. \quad (2.5.10)$$

Залежно від змісту альтернативної гіпотези за вибраним статистичним критерієм Z та рівнем значущості α визначаються критична область (правобічна, лівобічна або двобічна) та критичні точки розподілу.

Випадок 1. Якщо альтернативна гіпотеза має вигляд: $H_1 : \mu > \mu_0$, ***то будується правостороння критична область*** *(рис. 5.1).*

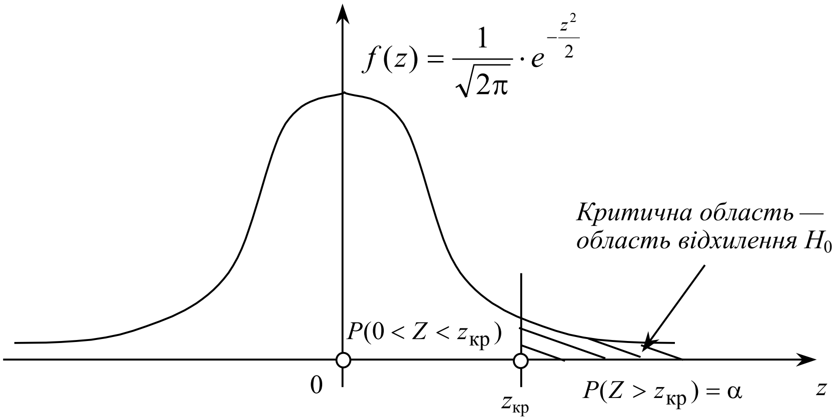


Рис. 5.1

Оскільки розподіл величини Z симетричний відносно нуля (див. рис. 5.1), то

$$P\left(0<Z<\infty\right)=\frac{1}{2}\ \text{або}\ P\left(0<Z\le z_{кр}\right)+P\left(Z>z_{кр}\right)=\frac{1}{2}. \quad (2.5.11)$$

Зважаючи на те, що для правобічної критичної області $P\left(Z>z_{кр}\right)=\alpha$, маємо:

$$P\left(0<Z\le z_{кр}\right)+\alpha=\frac{1}{2}\ \text{або}\ P\left(0<Z\le z_{кр}\right)=\frac{1-2\alpha}{2}. \quad (2.5.12)$$

Знайдемо ймовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини на проміжок (0; $z_{кр}$).

Оскільки Ф(0) = 0, маємо:

$$\Phi\left(z_{кр}\right)=\frac{1-2\alpha}{2}. \quad (2.5.13)$$

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо аргумент

$$z_{кр}=\Phi^{-1}\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right). \quad (2.5.14)$$

Випадок 2. За альтернативної гіпотези $H_1:\mu<\mu_0$ ***будується лівобічна критична область*** *(рис. 5.2).*

$z_{кр}$ знаходять з рівності $P\left(Z<z_{кр}\right)=\alpha$.

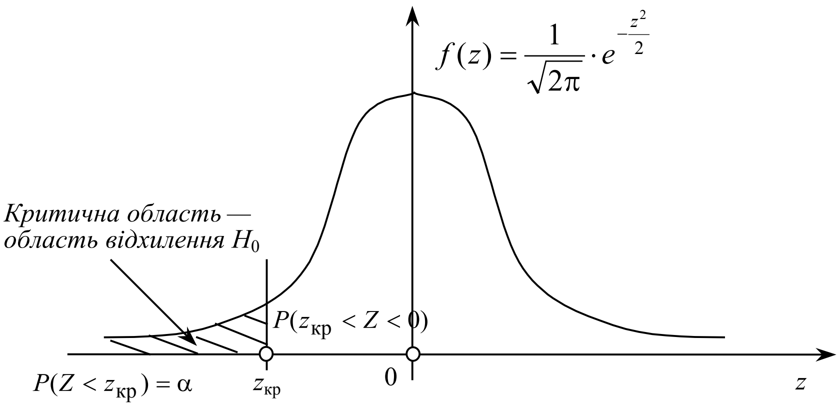


Рис. 5.2

Використовуючи рівність

$$P\left(Z<z_{кр}\right)+P\left(z_{кр}\le Z<0\right)=\frac{1}{2}, \tag{2.5.15}$$

дістаємо:

$$P\left(z_{кр}\le Z<0\right)=\frac{1-2\alpha}{2}, \tag{2.5.16}$$

або

$$\Phi\left(z_{кр}\right)=-\frac{1-2\alpha}{2}, \tag{2.5.17}$$

звідки

$$z_{кр}=\Phi^{-1}\left(-\frac{1-2\alpha}{2}\right). \tag{2.5.18}$$

Критична точка $z_{кр}$ — межа лівобічної критичної області — завжди набиратиме від'ємних значень, оскільки вона міститься ліворуч від центра розподілу (математичного сподівання) випадкової величини.

За таблицею значень функції $\Phi(z)$ знаходимо значення z_1 із рівняння $\Phi\left(z_1\right)=\frac{1-2\alpha}{2}$. Враховуючи непарність функції Лапласа, маємо $z_{кр}=-z_1$.

Випадок 3. За альтернативної гіпотези $H_1:\mu\ne\mu_0$ ***будується двобічна критична область*** *(рис. 5.3).*

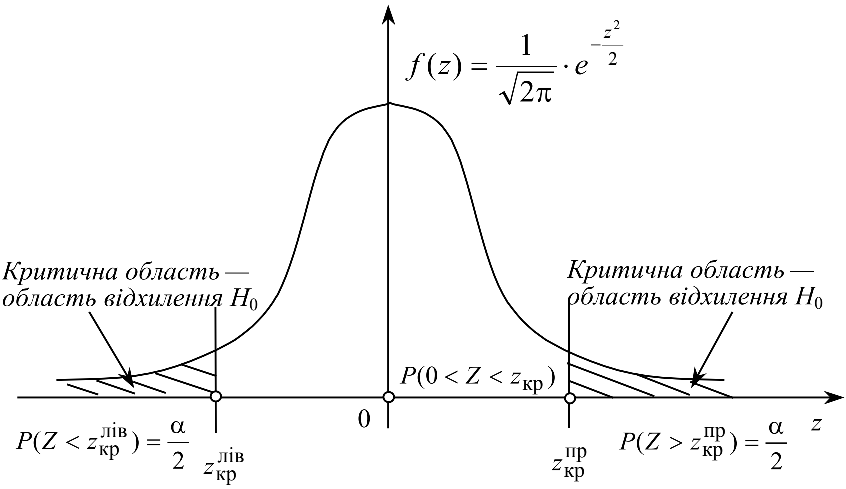


Рис. 5.3

Знаходимо дві критичні точки $z_{\text{кр}}^{\text{лів}} < z_{\text{кр}}^{\text{пр}}$ з умови:

$$P\left(Z<z_{\text{кр}}^{\text{лів}}\right)=P\left(Z>z_{\text{кр}}^{\text{пр}}\right)=\frac{\alpha}{2},\ \text{де}\ z_{\text{кр}}^{\text{пр}}=-z_{\text{кр}}^{\text{лів}}=z_{\text{кр}}. \quad (2.5.19)$$

Для знаходження значення $z_{\text{кр}}$ скористаємось рівністю

$$P\left(0<Z\le z_{кр}\right)+P\left(Z>z_{кр}\right)=\frac{1}{2}. \quad (2.5.20)$$

Ураховуючи, що $P(Z>z_{\text{кр}})=\frac{\alpha}{2}$, дістанемо

$$P\left(0<Z\le z_{\text{кр}}\right)=\frac{1-\alpha}{2}\ ,\ \text{або}\ \Phi\left(z_{\text{кр}}\right)-\Phi\left(0\right)=\frac{1-\alpha}{2}. \quad (2.5.21)$$

Відповідно,

$$\Phi\left(z_{\text{кр}}\right)=\frac{1-\alpha}{2}. \quad (2.5.22)$$

З останньої рівності та таблиці значень функції $\Phi(z)$ знаходимо

$$z_{\text{кр}}=\Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right),\ \text{де}\ z_{\text{кр}}^{\text{пр}}=-z_{\text{кр}}^{\text{лів}}=z_{\text{кр}};\ z_{\text{кр}}^{\text{пр}}=z_{\text{кр}};\ z_{\text{кр}}^{\text{лів}}=-z_{\text{кр}}. \quad (2.5.23)$$

Якщо z^* ***— спостережуване значення критерію Z — належить критичній області, то робимо висновок, що є достатньо статистичних фактів для невідхилення альтернативної гіпотези*** H_1 ***(достатньо статистичних фактів для відхилення гіпотези*** H_0***). Якщо*** z^* ***– спостережуване значення критерію Z — не належить критичній області, то робимо висновок, що статистичних фактів для підтвердження альтернативної гіпотези*** H_1 ***недостатньо (достатньо статистичних фактів для невідхилення гіпотези*** H_0***).***

Після завершення перевірки нульової гіпотези аналітик має впевнитися, що результати перевірки мали економічний сенс. Незалежно від відхилення або невідхилення нульової гіпотези за результатами її статистичної перевірки, якщо одержані висновки не мають економічного сенсу, то аналітикові може знадобитися проведення додаткових випробувань, можливо, уже з іншою нульовою гіпотезою.

Проте, пастка при перевірці гіпотези полягає в тому, що вона відповідає лише на запитання: чи буде нульова гіпотеза відхилена за даного рівня значущості?

Означення 17. ***p-значення (p-value) —*** це найменша величина рівня значущості, за якої нульова гіпотеза відхиляється для даного спостережуваного значення u^* вибраного критерію U.

5.3. Перевірка вірогідності гіпотези про значення середньої генеральної сукупності, якщо дисперсія генеральної сукупності невідома

Якщо дисперсія генеральної сукупності σ^2 невідома (наприклад, у разі малих вибірок з обсягом не більше ніж 30 елементів), то за статистичний критерій вибирають випадкову величину, яка має розподіл Стьюдента з $v = n - 1$ степенями вільності:

$$T = \frac{\overline{X}_{\text{в}} - \mu_0}{s}\sqrt{n}, \qquad (2.5.24)$$

де s — виправлене середнє квадратичне відхилення вибірки ($s = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}}$). Спостережуване значення t^* критерію T знаходять за формулою

$$t^* = \frac{\bar{x}_{\text{в}} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}\,.$$

Критична область будується залежно від вигляду альтернативної гіпотези H_1 аналогічно розглянутим раніше випадкам, коли відома дисперсія генеральної сукупності. Критичні точки $t_{\text{кр}}$ визначаються з таблиць розподілу Стьюдента (табл. 8 додатка) за відомими параметрами α і $\text{v} = n-1: t_{\text{кр}} = t(\alpha, \text{v})$.

Зауваження 3 (*до можливості застосування статистичного критерію T*)

Для перевірки вірогідності гіпотези про значення середньої генеральної сукупності за невідомої дисперсії вибирається критерій T, якщо:

1) *обсяг вибірки великий: $n > 30$ (закон розподілу генеральної сукупності X може бути довільним);*

2) *обсяг вибірки $n \le 30$ (закон розподілу генеральної сукупності X обов'язково має бути нормальним).*

Зауваження 4. За великих обсягів вибірки $n > 30$ статистичний критерій (2.5.24) наближається асимптотично до нормованого нормального закону розподілу. У цьому разі критичні точки визначаються за рівностями (2.5.11—2.5.23).

5.4. Перевірка гіпотези про значення ймовірності (частки ознаки) в генеральній сукупності

Нехай задано генеральну сукупність, для якої вивчається імовірність появи ознаки X. Припустимо, що з заданої генеральної сукупності реалізовано вибіркову сукупність обсягом n. Вважаємо, що для кожного з n випадково відібраних для вибірки елементів генеральної сукупності ймовірність появи ознаки X є однаковою, але невідомою величиною p_0. Інакше p_0 називають ***часткою ознаки X генеральної сукупності.*** За достатньо великим обсягом вибірки знайдена відносна частота $w = \frac{m}{n}$ (появи) ознаки X у вибірки, яка інакше називається ***часткою ознаки вибіркової сукупності***. За заданого рівня значущості α потрібно перевірити вірогідність нульової гіпотези $H_0: p = p_0$ про рівність спостережуваного значення відносної частоти $w = \frac{m}{n}$ (появи) ознаки X у вибірковій сукупності гіпотетичному значенню ймовірності p_0 появи ознаки X у генеральній сукупності.

Розглянемо випадкову величину $W = \dfrac{M^*}{n}$, яка має біноміальний розподіл, де M^* — теоретична частота ознаки. Для великих n ($n > 30$) можна наближено вважати нормальним закон розподілу величини W з математичним сподіванням $M(W) = p_0$, дисперсією $D(W) = \dfrac{p_0 q_0}{n}$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(W) = \sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}$, де $q_0 = 1 - p_0$.

За статистичний критерій візьмемо випадкову величину Z, яка за умови вірогідності гіпотези H_0 має нормований нормальний закон розподілу:

$$Z = \frac{W - M^*(W)}{\sigma(W)} = \frac{\dfrac{M^*}{n} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}. \tag{2.5.25}$$

Для обчислення спостережуваного значення критерію z^* у формулу (2.5.25) підставляємо замість $W = \dfrac{M^*}{n}$ числове значення цієї випадкової величини $w = \dfrac{m}{n}$, обчислене за результатами обробки вибірки:

$$z^* = \frac{m/n - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}.$$

Критична область будується залежно від змісту альтернативної гіпотези H_1 аналогічно випадку перевірки гіпотези про значення генеральної середньої випадкової величини, що має нормальний закон розподілу.

5.5. Порівняння дисперсій двох нормально розподілених сукупностей

Необхідність перевірки гіпотези про порівняння двох дисперсій виникає досить часто, оскільки дисперсія характеризує такі важливі показники, як точність приладів технологічних вимірювань, точність методів досліджень, ризик інвестицій тощо. Зрозуміло, що найбільшу точність технологічних вимірювань має той прилад, який забезпечує найменше розсіювання результатів вимірювань, тобто має найменшу дисперсію. За статистичний критерій вибирається випадкова величина: $F = \dfrac{s_б^2}{s_м^2}$.

Випадкова величина F за умови справедливості нульової гіпотези має розподіл Фішера—Снедекора із $v_1 = n_б - 1$, $v_2 = n_м - 1$ степенями вільності, де $n_б$ — обсяг вибірки, за якою була обчислена більша вибіркова дисперсія $s_б^2$, а $n_м$ — обсяг вибірки, за якою була обчислена менша вибіркова дисперсія $s_м^2$. Нагадаємо, що розподіл Фішера—Снедекора залежить тільки від кількості степенів вільності і не є симетричним.

Щільність імовірностей розподілу Фішера—Снедекора

$$g(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\frac{v_2}{2}} (f)^{\frac{v_2}{2}-1}\left(1 + \frac{v_2}{v_1} f\right)^{-\frac{v_1+v_2}{2}}, \ f \geq 0$$

ненулева лише на додатній півосі, тобто $0 \leq f < \infty$.

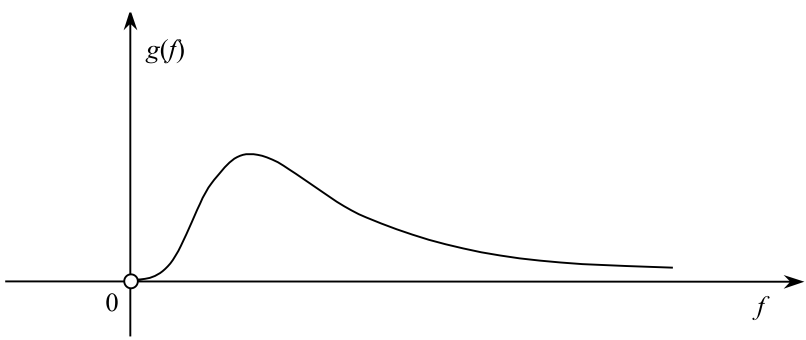


Рис. 5.4

Залежно від вигляду альтернативної гіпотези H_1 будується критична область.

Для перевірки з заданим рівнем значущості α нульової гіпотези H_0: $D(X_1) = D(X_2)$ (або $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$) про рівність дисперсій двох нормально розподілених генеральних сукупностей за альтернативної гіпотези H_1: $D(X_1) > D(X_2)$ знаходять спостережуване значення f^* критерію $F = \frac{s_б^2}{s_м^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ як відношення більшої до меншої вибіркової дисперсії: $f^* = \frac{s_б^2}{s_м^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$.

Будується правобічна критична область. Критична точка — межа правобічної критичної області, визначається з таблиці розподілу Фішера—Снедекора (табл. 9 додатка) за відповідними значеннями рівня значущості α та кількості степенів вільності, а саме fкр = F (α, $v_1 = n_б - 1$, $v_2 = n_м - 1$). Якщо спостережуване значення критерію є в критичній області $f^* > f_{кр}$, то робимо висновок про достатність статистичних фактів для відхилення нульової гіпотези $H_0 : D(X_1) = D(X_2)$ на користь альтернативної $H_1 : D(X_1) > D(X_2)$.

5.6. Перевірка статистичної гіпотези про рівність виправленої вибіркової дисперсії гіпотетичному значенню дисперсії генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом

Гіпотетичне (передбачуване) значення σ_0^2 дисперсії генеральної сукупності σ^2 частіше встановлюється теоретично або на основі попередніх досліджень. Для перевірки цього значення із генеральної сукупності робиться вибірка обсягом n, обчислюється її виправлена дисперсія s^2 і, використовуючи значення виправленої дисперсії s^2, з заданим рівнем значущості α перевіряють нульову гіпотезу про рівність дисперсії генеральної сукупності σ^2 встановленому гіпотетичному значенню σ_0^2. Відомо, що виправлена дисперсія s^2 є незміщеною точковою оцінкою генеральної дисперсії $(M(s^2) = D(X))$, тому нульову гіпотезу можна записати так: H_0: $M(s^2) = \sigma_0^2$. Потрібно перевірити, чи дорівнює математичне сподівання виправленої вибіркової дисперсії гіпотетичному значенню генеральної дисперсії. Перевірка показує, значущою чи ні є різниця між виправленою вибірковою дисперсією та гіпотетичним значенням генеральної дисперсії. Перевірка гіпотез даного типу на практиці необхідна для перевірки точності приладу, методу дослідження тощо. Наприклад, якщо відомо, що σ_0^2 допустима характеристика відхилення контролюючого розміру деталі, виготовленої верстатом-автоматом, а за результатом дослідження вибірки ми дістали значення характеристики розсіювання значно більше від допустимого, то робимо висновок про необхідність налагодження верстата-автомата.

За критерій перевірки нульової гіпотези вибираємо випадкову величину $(n-1)\ \dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$. Вона є випадковою, оскільки s^2 набуває випадкових для різних вибірок наперед невідомих значень і за умови вірогідності нульової гіпотези має розподіл χ^2 з $(n-1)$ степенями вільності. Отже:

$$\chi^2 = (n-1)\ \frac{s^2}{\sigma_0^2}.$$

Критична область будується залежно від вигляду альтернативної гіпотези.

Зауваження 5. Якщо за умовою задачі відома вибіркова дисперсія, то за статистичний критерій перевірки нульової гіпотези вибираємо випадкову величину: $\chi^2 = \dfrac{nD_\text{в}}{\sigma_0^2}$.

Зауваження 6. Якщо кількість степенів вільності більша за 30, то критичну точку можна знайти наближено, використовуючи рівність Уілсона—Гілферті:

$$\chi^2_\text{кр} = (\alpha, \nu) = \nu\left(1 - \frac{2}{9\nu} + Z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right)3,$$

де Z_α знаходяться з табл. 2 додатка з рівності: $\Phi(Z_\alpha) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$.

5.7. Перевірка гіпотези про рівність середніх двох генеральних сукупностей (незалежні вибірки)

Порівняння середніх двох сукупностей має важливе практичне значення. Часто середні результати однієї серії експериментів відрізняються від іншої. Виникає питання: чи можна пояснити різницю середніх випадковими помилками експерименту або ця різниця викликана деякими закономірностями? У промисловості задача порівняння середніх часто виникає при вибірковому контролі якості однакових виробів, що виготовлені на різних підприємствах або на одному підприємстві за різних технологічних режимів, у фінансовому аналізі — при порівнянні рівня дохідності різних активів тощо.

Випадок 1. Дисперсії генеральних сукупностей відомі.

Нехай генеральні сукупності, ознаки яких X_1 і X_2 розподілені нормально, є незалежними одна від одної, а саме $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Середні значення генеральних сукупностей (їхні математичні сподівання) існують $M(X_1) = \mu_1$, $M(X_2) = \mu_2$, проте нам невідомі. Дисперсії генеральних сукупностей $D(X_1) = \sigma_1^2$ та $D(X_2) = \sigma_2^2$ — відомі.

Потрібно за обчисленими вибірковими середніми $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ із заданим рівнем значущості α перевірити вірогідність нульової гіпотези про рівність генеральних середніх цих сукупностей, тобто $H_0 : M(X_1) = M(X_2)$.

За статистичний критерій вибираємо випадкову величину Z, яка за умови справедливості гіпотези H_0 має нормований нормальний розподіл:

$$Z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - M\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)}{\sigma\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)} = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}, \quad (2.5.26)$$

$M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$. Залежно від формулювання альтернативної гіпотези H_1 будуються правобічна, двобічна чи лівобічна критичні області. Критичні точки знаходять за таблицею значень функції Лапласа за заданого рівня значущості.

Випадок 2. Дисперсії генеральних сукупностей невідомі, але однакові

Нехай ознаки двох генеральних сукупностей X_1 і X_2 є незалежними та розподілені нормально, а саме $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Середні значення генеральних сукупностей (їхні математичні сподівання) існують $M(X_1) = \mu_1$, $M(X_2) = \mu_2$, проте нам невідомі.

Дисперсії генеральних сукупностей $D(X_1) = \sigma_1^2$ та $D(X_2) = \sigma_2^2$ — також невідомі.

Якщо за умовою задачі припущення про рівність дисперсій генеральних сукупностей зробити не можна, потрібно обов’язково перевірити можливість цього факту, використовуючи критерій Фішера—Снедекора (п. 5.5) про рівність генеральних дисперсій.

Припустимо, що невідомі дисперсії генеральних сукупностей однакові, тобто $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. За невідому величину σ^2 можна вибрати її оцінку — виправлену дисперсію першої або другої вибірки ($s_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot \sigma_{1\,\text{виб}}^2$ або $s_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} \cdot \sigma_{2\,\text{виб}}^2$). Але ліпшою оцінкою для σ^2 буде дисперсія «змішаної» сукупності обсягу $n_1 + n_2$, яку позначимо через s^2 та будемо знаходити за формулою

$$s^2 = \frac{n_1 \cdot \sigma_{1\,виб}^2 + n_2 \cdot \sigma_{2\,виб}^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Звертаємо увагу на те, що кількість степенів вільності $\nu = n_1 + n_2 - 2$ на два менша від загальної кількості спостережень $n_1 + n_2$, оскільки два степеня вільності зникають при визначенні середніх $\overline{x}_1$ та $\overline{x}_2$ за вибірковими даними.

Доведено, що в разі справедливості нульової гіпотези про рівність генеральних середніх статистичний критерій

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - M(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}},$$

є випадковою величиною, що має розподіл Стьюдента з кількістю степенів вільності $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

Далі перевірку проводять за відомою схемою з використанням таблиць розподілу Стьюдента.

Випадок 3. Дисперсії генеральних сукупностей невідомі та різні.

Якщо дисперсії генеральних сукупностей невідомі та не можна припустити, що вони однакові, за критерій вибирається випадкова величина, яка за умови справедливості гіпотези H_0 має розподіл Стьюдента:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - M(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}},$$

де $s_1^2 = \dfrac{n_1}{n_1 - 1} \cdot \sigma^2_{1\,\text{виб}}$, $s = \dfrac{n_2}{n_2 - 1} \cdot \sigma^2_{2\,\text{виб}}$ — виправлені вибіркові дисперсії, але відповідна кількість степенів вільності k обчислюється наближено за формулою, яку наводимо без доведення:

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2 / n_1 \right)^2}{n_1} + \dfrac{\left(s_2^2 / n_2 \right)^2}{n_2}}.$$

Зауваження 7. (до випадків 2 та 3). Нагадуємо, що за великих обсягів вибірки (більших ніж 30) розподіл Стьюдента асимптотично наближається до нормального, тому критичні точки визначаються за таблицею значень функції Лапласа.

Зауваження 8. Для всіх випадків перевірки гіпотез про порівняння середніх генеральних сукупностей ми можемо побудувати нульову гіпотезу так, що різниця між середніми величинами двох генеральних сукупностей буде деяким числом відмінним від нуля. Наприклад, $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 10$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 10$.

5.8. Перевірка гіпотези про рівність середніх двох нормально розподілених генеральних сукупностей (залежні вибірки)

Необхідно за рівнем значущості α перевірити нульову гіпотезу: H_0: $M(\overline{X}_1) = M(\overline{X}_2)$ про рівність генеральних середніх при невідомих дисперсіях за альтернативної гіпотези H_1: $M(\overline{X}_1) \neq$ $\neq M(\overline{X}_2)$ за двома залежними вибірками однакового розміру. Зведемо цю задачу порівняння двох середніх до задачі порівняння однієї вибіркової середньої $\overline{d}$ з гіпотетичним значенням генеральної середньої μ_{d_0}, розв'язаної в пункті 5.3 із застосуванням як статистичного критерію випадкової величини $T = \dfrac{\overline{X}_\text{в} - \mu_0}{s} \sqrt{n}$, що за умови справедливості гіпотези H_0 має розподіл Стьюдента з $\nu = n - 1$ степенями вільності, де $s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_в}$ — виправлене середньоквадратичне відхилення вибірки.

Для цього розглянемо випадкові величини: різниці $D_i = X_{1i} - X_{2i}$ та їх середню

$$\overline{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{\sum \left(X_{1i} - X_{2i}\right)}{n} = \frac{\sum X_{1i}}{n} - \frac{\sum X_{2i}}{n} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 .$$

Якщо справедливою є нульова гіпотеза $H_0 : M(\overline{X}_1) = M(\overline{X}_2)$, або $M(\overline{X}_1) - M(\overline{X}_2) = 0$, то $M(\overline{D}) = M(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = M(\overline{X}_1) - M(\overline{X}_2) = 0$. Отже, нульову гіпотезу можна записати як $H_0 : M(\overline{D}) = 0$ за альтернативної гіпотези $H_1 : M(\overline{D}) \neq 0$.

Відповідні вибірки з генеральних сукупностей X_1 та X_2 : x_{1i} $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ та x_{2i} $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ — залежні, як зазначалось раніше. Позначимо через $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ різниці двох спостережень для кожної з пар. Зауважимо, що треба розрізняти випадкові різниці $D_i = X_{1i} - X_{2i}$ та $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ — невипадкові різниці, які спостерігаємо за результатами заданих вибіркових даних. Позначимо середню вибіркову $\overline{d} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{n}$ —

$\overline{d}$ — середнє значення різниць спостережень для кожної з пар вибірки, де n — кількість таких пар.

Виправлену вибіркову дисперсію позначимо s_d^2 і знайдемо за формулою

$$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} d_1^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} d_i\right]^2}{n} \right].$$

Тоді $\sqrt{s_d^2} = s_d$ — виправлене стандартне відхилення вибірки. Воно дозволяє обчислити стандартне відхилення (середню помилку) середнього значення різниць парних спостережень за формулою $s_{\overline{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}}$.

Нехай μ_d — генеральна середня різниць парних спостережень. Сформулюємо можливі гіпотези стосовно до значення μ_d, якщо μ_{d_0} — гіпотетичне значення генеральної середньої різниць парних спостережень:

$H_0 : \mu_d = \mu_{d_0}$, за альтернативної гіпотези $H_1 : \mu_d \neq \mu_{d_0}$;

$H_0 : \mu_d \leq \mu_{d_0}$ за альтернативної гіпотези $H_1 : \mu_d > \mu_{d_0}$;

$H_0 : \mu_d \geq \mu_{d_0}$ за альтернативної гіпотези $H_1 : \mu_d < \mu_{d_0}$.

У процесі розв'язання практичних задач частіше перевіряється гіпотеза $H_0 : \mu_d = 0$, а альтернативною є гіпотеза $H_1 : \mu_d \neq 0$.

Отже, для побудови критерію підставляємо $\overline{X}_{\text{в}} = \overline{d}$, $\mu_0 = \mu_{d_0}$, $s = s_d$ у формулу $T = \frac{\overline{X}_{\text{в}} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$. Дістанемо випадкову величину, яка за умови справедливості гіпотези H_0 має розподіл Стьюдента:

$$T = \frac{\overline{d} - \mu_{d_0}}{s_d} \cdot \sqrt{n}\,.$$

Далі нульова гіпотеза перевіряється за відомою схемою з використанням таблиць розподілу Стьюдента для даного рівня значущості α та відповідної кількості степенів вільності $\nu = n - 1$, де n — кількість пар вибіркових спостережень.

Ще раз зауважимо, що перевірка гіпотези про порівняння середніх двох нормально розподілених генеральних сукупностей у разі залежних вибірок зводиться до дослідження середнього значення різниць $\overline{d}$ між значеннями у парах спостережень, оскільки спостережувані значення двох вибірок попарно взаємозв'язані.

5.9. Перевірка статистичної гіпотези про рівність часток ознаки у двох сукупностях

Задача про порівняння часток ознаки у двох генеральних сукупностях досить часто зустрічається на практиці. Наприклад, вибіркова частка ознаки однієї сукупності відмінна від вибіркової частки цієї самої ознаки в іншій сукупності. Чи свідчить це про те, що частки ознаки двох генеральних сукупностей є справді різними, або одержана розбіжність часток ознаки двох генеральних сукупностей є випадковою?

Позначимо $w_1 = \frac{m_1}{n_1}$ та $w_2 = \frac{m_2}{n_2}$ відносні частоти появи події A в першій та другій вибіркових сукупностях (інакше їх називають частками ознаки вибіркових сукупностей).

Зауважимо, що до проведення випробувань значення відносних частот W_1 та W_2 нам невідомі, тому розглядаємо їх як випадкові величини $W_1 = \frac{M_1}{n_1}$ та $W_2 = \frac{M_2}{n_2}$, тимчасом як $w_1 = \frac{m_1}{n_1}$ та $w_2 = \frac{m_2}{n_2}$ не є випадковими величинами, оскільки їхні значення одержані в результаті обробки вибіркових даних (після проведення незалежних випробувань).

Отже, за статистичний критерій перевірки нульової гіпотези вибираємо випадкову величину Z, яка за умови вірогідності гіпотези H_0 має наближено нормальний закон розподілу, причому $M(Z) = 0$; $D(Z) = 1$.

$$Z = \frac{(w_1 - w_2) - (p_1 - p_2)}{\sigma(W_1 - W_2)} = \frac{(w_1 - w_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{p \cdot (1 - p) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}. \quad (2.5.27)$$

За невідоме значення ймовірності p у формулі (2.5.27) беремо її найліпшу оцінку, що дорівнює вибірковій частці ознаки, якщо дві вибірки об'єднати в одну, тобто $p = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$.

Спостережуване значення критерію знаходимо за формулою (2.5.27), підставляючи результати, одержані з вибіркових сукупностей:

$$Z = \frac{(w_1 - w_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{p \cdot (1 - p) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \text{ де } w_1 = \frac{m_1}{n_1} \text{ та } w_2 = \frac{m_2}{n_2}.$$

Вибір критичної області здійснюється згідно з методикою, розглянутою раніше для випадкової величини, розподіленої нормально. Критичні точки — межі критичної області — знаходять за таблицями значень функції Лапласа.

5.10. Перевірка правильності непараметричних гіпотез

Важливою задачею математичної статистики є встановлення теоретичного закону розподілу: перевірка гіпотези щодо припущеного невідомого закону розподілу в генеральній сукупності.

Для розв'язання цієї задачі потрібно визначити вид та параметри закону розподілу.

Припущення про вид закону розподілу (нормальний, Пуассона, біноміальний тощо) висувається на підставі деяких формальних властивостей статистичного розподілу:

➢ Графічного зображення емпіричного розподілу (гістограми частот або полігону вибірки). Нехай гістограма має вигляд, зображений на рис. 5.5. Якщо з'єднати кривою середини прямокутників, то дістанемо лінію, схожу на графік щільності нормального розподілу. Тому можемо припустити, що ознака генеральної сукупності розподілена за нормальним законом.

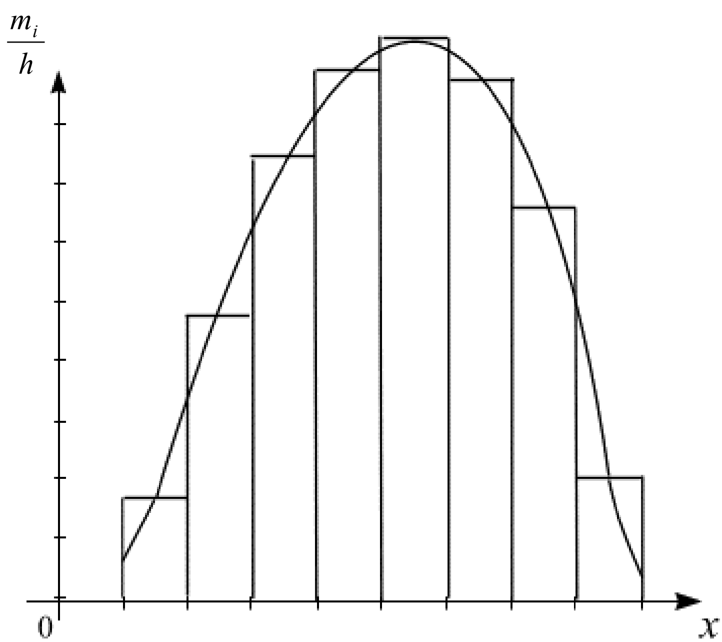


Рис. 5.5

Якщо гістограма має вигляд, зображений на рис. 5.6, то маємо підстави вважати, що ознака розподілена за показниковим законом, тому що лінія, яка з'єднує середини прямокутників, подібна до графіка щільності показникового закону.

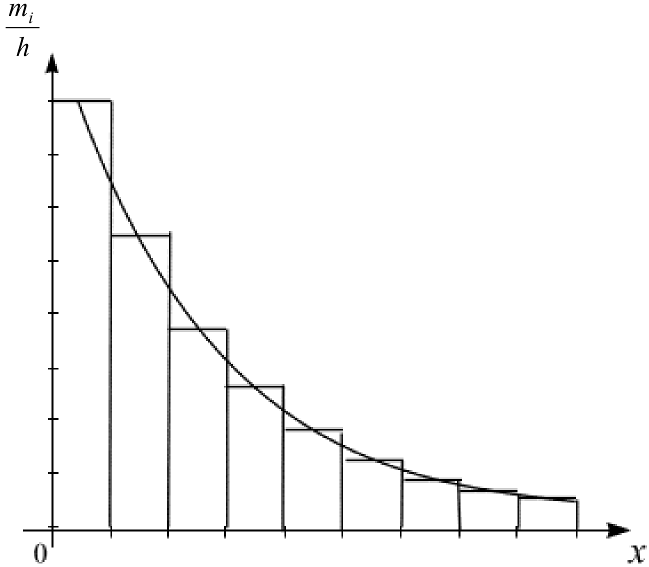


Рис. 5.6

Якщо гістограма має вигляд, зображений на рис. 5.7, то можемо висунути гіпотезу про рівномірний закон розподілу сукупності.

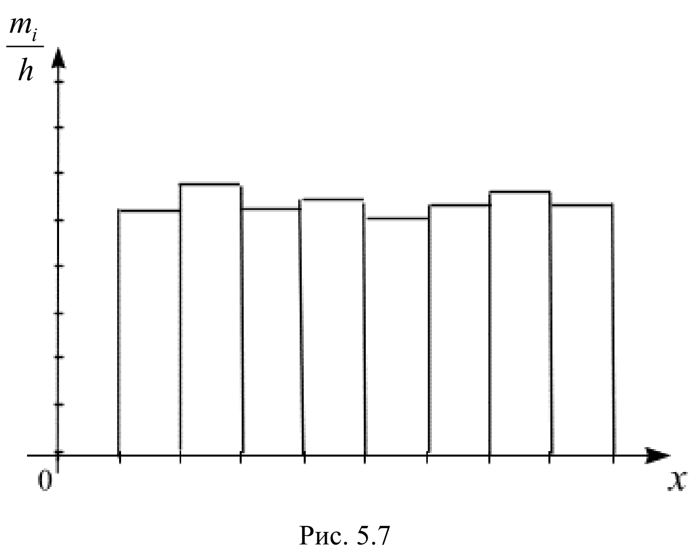


Рис. 5.7

➢ Виконання умов центральної граничної теореми (це свідчить про нормальний закон розподілу випадкової величини).

➢ Досвід аналогічних попередніх досліджень.

➢ Якщо $A_s = 0$ і $E_s = 0$, то це свідчить про нормальний закон розподілу.

➢ $\overline{x_B} = \overline{\sigma_B}$ — це ознака показникового розподілу.

Параметри розподілу, як правило, невідомі, тому їх замінюють найліпшими їхніми оцінками за вибіркою. Як би добре не був підібраний теоретичний закон розподілу, між теоретичним і емпіричним законами можливі розбіжності. Закономірно, що виникає питання: ці розбіжності пояснюються тільки випадковими обставинами, що пов’язані з обмеженою кількістю спостережень, чи вони є суттєвими і пов’язані з тим, що невдало підібрано теоретичний закон? Щоб розв’язати цю задачу про перевірку правильності вибору виду розподілу, узгодженості дійсного теоретичного розподілу з емпіричним застосовують спеціально підібрану випадкову величину — так званий ***критерій узгодження*** (критерій згоди).

Існують різні критерії, які не потребують знання значень параметрів генеральної сукупності. Вони називаються ***непараметричними критеріями***.

Основна перевага непараметричних критеріїв полягає в тому, що вони не вимагають виконання припущення про те, що вибірка витягнута з нормально розподіленої сукупності. Крім того, вони простіші в розрахунках, легше інтерпретуються й підходять для широкого кола розподілів генеральної сукупності. Недолік же їхній полягає в тому, що вони не використовують усю інформацію й менш ефективні, ніж параметричні, тобто непараметричні критерії в порівнянні з параметричними мають трохи меншу потужність, але цей недолік компенсується більш простою побудовою вибіркових статистик.

З усієї множини критеріїв згоди, що використовуються для перевірки гіпотез стосовно до розподілів, частіше від інших (є найбільш поширеним) застосовується критерій χ^2 Пірсона, який є найбільш потужним критерієм.

5.10.1. Критерій χ^2 Пірсона

Критерій Пірсона забезпечує мінімальну ймовірність похибки другого роду порівняно з іншими критеріями згоди.

Критерій ґрунтується на порівнянні теоретичних та емпіричних частот:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

Тут n — обсяг вибірки, n_i — емпіричні частоти, одержані за результатами вибірки, p_i — імовірності $P(x_{i-1} < X < x_i),\ i = \overline{1, l}$, потрапляння випадкової величини на інтервал $(x_{i-1}; x_i)$, які обчислені для закону розподілу, що перевіряється; n_i' — теоретичні частоти.

Для нормального закону розподілу теоретичні частоти обчислюються за формулами:

$$n_i' = np_i = \frac{nh}{\sigma_B} \varphi\left(\frac{x_i - \overline{x_B}}{\sigma_B}\right),$$

де h — це відстань між точковими варіантами x_i;

$$n_i' = np_i = n\left(\Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}_B}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \overline{x}_B}{\sigma_B}\right)\right) —$$

— для інтервальної вибірки.

Для експоненційного закону розподілу теоретичні частоти обчислюються за формулою

$$n_i' = np_i = n\left(e^{-\frac{x_i}{\overline{x}_B}} - e^{-\frac{x_{i-1}}{\overline{x}_B}}\right).$$

Якщо треба перевірити гіпотезу H_0 про те, що сукупність розподілена за законом Пуассона, то теоретичні частоти обчислюються за формулою

$$n_m' = np_m = nP(X = m) = \frac{n\overline{x}_B^{\,m}}{m!} e^{-\overline{x}_B}.$$

Для знаходження ймовірностей $P(X = m)$ може бути використана таблиця ймовірностей розподілу Пуассона. Якщо для обчисленого значення $\overline{x}_B$ імовірності $P(X = m)$ нетабульовані, то для полегшення обчислень можна застосувати рекурентну формулу

$$P(X = m + 1) = \frac{\overline{x}_B}{m + 1} P(X = m);\ \ P(X = 0) = e^{-\overline{x}_B}.$$

Якщо $n \to \infty$, то незалежно від закону розподілу ознаки генеральної сукупності вибіркова функція має розподіл χ^2 з $k = l - r - 1$ степенями вільності. Тут l кількість інтервалів, r — кількість параметрів закону розподілу, оцінки яких знайдені за вибірковими даними.

Критерій узгодження χ^2 Пірсона можна використовувати, якщо обсяг вибірки достатньо великий (порядку кількох сотень). Іноді його використовують при $n \geq 50$. Крім того, частоти у кожному інтервалі повинні бути не менші від п’яти. Якщо в деяких інтервалах частоти менші за п’ять, то необхідно об’єднати кілька сусідніх інтервалів.

Задачі

5.1. Які з наведених тверджень правильні, а які — ні? Чому?

А) Зменшення ймовірності α помилки 1-го типу приводить до збільшення ймовірності помилки 2-го типу.

Б) Сума ймовірностей α і β завжди дорівнює одиниці.

В) Зі зменшенням імовірності α область прийняття нульової гіпотези збільшується.

Г) Значення критерію, знайдені на основі різних вибірок з однієї генеральної сукупності, визначають різні p-значення.

У завданнях 5.2—5.4 визначити основну та альтернативну гіпотези, пояснити, у чому полягають помилки 1-го і 2-го типів та якими є наслідки їх здійснення.

5.2. Визначення безпечності та ефективності нових ліків є у сфері відповідальності уряду. Існує два можливих рішення: або схвалити використання ліків, або не схвалити.

5.3. Ви маєте дві можливості для інвестицій. Перша — дуже ризикована, але потенціальний прибуток великий, друга — безпечна, але можливості доходу вельми обмежені. На основі перевірки гіпотез слід вибрати одну з них.

5.4. Ви — пілот великого авіалайнера і відчуваєте запах диму в кабіні. Найближчий аеропорт — у 5 хвилинах польоту. Чи необхідно негайно вести літак на посадку?

5.5. Керівництво комерційного банку повинно вирішити, чи надавати кредит певній компанії на розвиток нової технологічної лінії. Визначимо нульову гіпотезу як повернення компанією боргу банку вчасно в установлений у договорі термін.

А) Опишіть чотири можливих результати, які можуть бути одержані в разі відхилення нульової гіпотези та в разі браку підстав для її відхилення.

Б) Поясніть, яка з помилок — першого чи другого типів — має більш серйозні наслідки.

5.6. Відомо, що дисперсія генеральної сукупності $\sigma^2 = 100$. Було здійснено вибірку з цієї сукупності обсягом 40 одиниць; значення її середньої арифметичної дорівнює 35. Чи є підстави відхилити H_0: $\mu = 30$ за конкуруючої гіпотези $H_1 : \mu \neq 30$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$?

5.7. Розв'язати задачу 5.6 для випадку, коли конкуруюча гіпотеза H_1: $\mu > 30$. Чи зміниться зроблений висновок у разі збільшення рівня значущості до $\alpha = 0{,}1$?

У завданнях 5.8—5.10 установіть критичну область із вказаним рівнем значущості, визначте p-значення, інтерпретуйте одержані результати, зобразивши графічно розподіл вибраної статистичної характеристики.

5.8. H_0: $\mu = 1000$, H_1: $\mu \neq 1000$, $\sigma = 200$, $n = 100$, $\overline{x}_{\text{в}} = 980$, $\alpha = 0{,}1$.

5.9. Нехай відомо, що закон розподілу генеральної сукупності нормальний. H_0: $\mu = 50$, H_1: $\mu > 50$, $\sigma = 5$, $n = 9$, $\overline{x}_{\text{в}} = 51$, $\alpha = 0{,}03$.

5.10. H_0: $\mu = 15$, H_1: $\mu < 15$, $\sigma = 2$, $n = 75$, $\overline{x}_{\text{в}} = 14{,}3$, $\alpha = 0{,}05$.

5.11. Сформульовано такі гіпотези про величину генеральної середньої: H_0: $\mu = 50$, H_1: $\mu > 50$.

Знайдіть p-значення, якщо результати вибіркового спостереження при $n = 50$: $\overline{x}_{\text{в}} = 14{,}3$, $s = 5$. Як зміниться знайдене p-значення, якщо обсяг вибірки взяти рівним 100?

5.12. Сформульовано гіпотези H_0: $\mu = 200$, H_1: $\mu < 200$ і відомо, що $\sigma = 50$. За результатами вибіркового обстеження при $n = 40$ знайдено середню арифметичну: $\overline{x}_{\text{в}} = 190$.

А) Знайдіть p-значення та інтерпретуйте його.

Б) Повторіть розрахунки для $\sigma = 30$ та $\sigma = 20$.

В) Поясніть, як зміниться спостережуване значення критерію і p-значення зі зменшенням стандартного відхилення.

5.13. Сформульовано такі гіпотези про величину генеральної середньої нормально розподіленої сукупності: H_0: $\mu = 20$, H_1: $\mu \neq 20$.

Знайдіть p-значення для випадків, коли за результатами вибірки обсягом $n = 100$ знайдені вибіркова дисперсія $\sigma^2_{\text{в}} = 25$ і вибіркова середня: а) $\overline{x}_{\text{в}} = 21$; б) $\overline{x}_{\text{в}} = 21{,}8$; в) $\overline{x}_{\text{в}} = 23$. Поясніть на основі одержаних результатів, як змінюється p-значення в разі віддалення вибіркової середньої від гіпотетичного значення $\mu = \mu_0 = 20$.

5.14. Сформульовано гіпотези $H_0 : \mu \geq 45$, $H_1 : \mu < 45$. З генеральної сукупності було зроблено вибірку обсягом $n = 50$ та знайдено $\bar{x}_в = 43{,}7$ і $\sigma_в = 3{,}9$.

1. Використовуючи p-значення зробити висновок про те, чи є достатньо підстав для відхилення нульової гіпотези з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$.

2. Зробити висновки на основі лише знайденого p-значення, не використовуючи наперед заданого рівня значущості α.

3. Інтерпретувати p-значення, зобразивши графічно розподіл тестової статистики.

5.15. Виробники нового виду ліків стверджують, що вони знімають головний біль та знижують температуру менше ніж за 30 хвилин. Випадкова вибірка 70 хворих показала, що нові ліки знімають симптоми застуди за 34 хвилини за середнього квадратичного відхилення 10,2 хвилини. Перевірте з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ справедливість твердження виробників ліків на основі статистичних даних.

5.16. Вибраних навмання 18 молодих повнолітніх чоловіків (20—30 років) було опитано про кількість часу (у хвилинах), який кожен з них витрачає на перегляд спортивних передач щодня. Відповіді респондентів наведені далі. Перевірте з 5 %-вим рівнем значущості, чи існує достатньо статистичних доказів для висновку, що середня кількість часу щоденного перегляду по телебаченню спортивних програм молодими повнолітніми чоловіками перевищує 50 хвилин (час щоденного перегляду спортивних програм молодими чоловіками розподілений за нормальним законом):

50 48 65 74 66 37 45 68 64
65 58 55 52 63 59 57 74 65

5.17. Компанія, що здійснює міжміські пасажирські перевезення, вирішила закупити партію нових автобусів. Придбання нових автобусів принесе компанії суттєву вигоду лише в тому разі, якщо витрата палива на 100 км траси на нових автобусах не перевищить 19,5 л. Компанія-продавець надала покупцеві автобус на 8 тижнів (48 робочих днів) для перевірки реальної витрати палива. Результати щоденних прогонів показали, що середня витрата палива на 100 км шляху становила 19,8 л за виправленого середнього квадратичного відхилення 1,6 л. Чи варто автотранспортній компанії купувати нові автобуси? (Перевірте гіпотезу з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$.)

5.18. Інженер з контролю якості перевіряє середній час горіння нового виду електроламп. Для перевірки навмання було відібрано 50 ламп, середній час горіння яких виявився 1026 годин. Середнє квадратичне відхилення часу горіння для генеральної сукупності відоме і дорівнює 95 годин. Використовуючи рівень значущості $\alpha = 0{,}05$, перевірте гіпотезу про те, що час горіння ламп не перевищує 1000 годин.

5.19. Використовуючи дані задачі 5.18 перевірте гіпотезу про те, що середній час горіння ламп дорівнює 1050 годин, якщо інженер з контролю якості не має інформації про генеральну дисперсію і використовує вибіркове середнє квадратичне відхилення, що дорівнює 100 годин.

5.20. За умов, сформульованих в задачі 5.19, припустимо, що інженеру з контролю якості відомо, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, і він користується даними вибірки лише 26 ламп. Чи зміняться висновки, зроблені в результаті розв'язання задачі 5.19? Поясніть чому.

5.21. Багато гірськолижних курортів у Карпатах прогнозують свої прибутки, припускаючи, що в середньому карпатський лижник відвідує гірськолижний центр 4 рази на рік. Для з'ясування аргументованості цього припущення була здійснена випадкова вибірка 65 лижників, і кожен був опитаний про кількість відвідувань гірськолижного центру минулого року. За даними спостережень було знайдено середню вибіркову, яка становила 4,84 раза. Відомо, що генеральне стандартне відхилення дорівнює 2. Чи можна зробити висновок за 10 %-вого рівня значущості, що припущення хибне?

5.22. З нормально розподіленої сукупності з $\mu = 17$ було зроблено вибірку обсягом $n = 12$. Знайти значення k, для якого виконується рівність

$$P\left(\left|\frac{\overline{x}_{\text{в}} - 17}{s/\sqrt{12}}\right| \geq k\right) = 0{,}05\,.$$

5.23. Нехай μ — середній результат зі стрибків у довжину серед юнаків старших класів (у метрах). Використовуючи результати 15 спостережень, перевірити гіпотезу H_0: $\mu = 3{,}0$, якщо відомо, що

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 48,\ \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 204$$

(результати стрибків у довжину серед юнаків старших класів розподілені за нормальним законом).

5.24. А) Нехай гіпотезу H_0: $\mu = \mu_0$ було відхилено з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ за альтернативної гіпотези H_1: $\mu \neq \mu_0$. Чи обов'язково H_0 буде відхилено з рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$?

Б) Нехай гіпотезу H_0: $\mu = \mu_0$ було відхилено з рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$ за альтернативною гіпотези H_1: $\mu \neq \mu_0$. Чи обов'язково H_0 буде відхилено з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$?

5.25. Нехай гіпотезу H_0: $\mu = \mu_0$ було відхилено на користь альтернативної H_1: $\mu > \mu_0$ з певним рівнем значущості α. Чи обов'язково буде відхилено H_0 за конкуруючої гіпотези H_1: $\mu \neq \mu_0$ з таким самим рівнем значущості?

5.26. З нормально розподіленої сукупності з $\sigma = 6$ було зроблено вибірку обсягом $n = 16$. Для перевірки гіпотези H_0: $\mu = 30$ за альтернативної гіпотези H_1: $\mu \neq 30$ експериментатор визначив критичну область для $\overline{x}_{\text{в}}$ у такий спосіб: $R \setminus (29; 31)$.

1. Який рівень значущості він використовував?

2. Чому вибір експериментатора не є достатньо добрим?

3. Якою є критична область для $\overline{x}_{\text{в}}$ за певного фіксованого рівня значущості α?

5.27. Нехай з генеральної сукупності було здійснено вибірку обсягом $n = 49$ для перевірки гіпотези H_0: $\mu = 20$ за альтернативної H_1: $\mu > 20$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$. Знайти ймовірність помилки другого типу та потужність критерію при $\mu = 21$, якщо відомо, що генеральна сукупність розподілена нормально з $\sigma = 3{,}5$.

5.28. Розв'язати задачу 5.27 для випадку, коли перевіряється гіпотеза H_0: $\mu = 20$ за альтернативної H_1: $\mu > 20$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}07$. Повторити розрахунки для випадку, коли $\alpha = 0{,}1$. Як впливає збільшення рівня значущості на ймовірність помилки другого типу та потужність критерію? Підтвердити зроблений висновок, зобразивши розподіли тестових статистик графічно.

5.29. Розв'язати задачу 5.27 для випадку, коли обсяг вибірки $n = 64$. Повторити розрахунки для випадку, коли $n = 100$. Як впливає збільшення обсягу вибірки на ймовірність помилки другого типу та потужність критерію? Підтвердити зроблений висновок, зобразивши розподіли тестових статистик графічно.

5.30. Розв'язати задачу 5.27 для випадків, коли: а) $\sigma = 3{,}8$; б) $\sigma = 4$.

Як впливає збільшення стандартного відхилення генеральної сукупності на ймовірність помилки другого типу та потужність критерію? Підтвердити зроблений висновок, зобразивши розподіли тестових статистик графічно.

5.31. Припустимо, що експериментатор повинен перевірити гіпотезу H_0: $\mu = 10$ за альтернативної гіпотези H_1: $\mu \neq 10$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$, і при цьому потужність критерію має дорівнювати 0,6, коли $\mu = 10{,}3$. Який для цього потрібно взяти обсяг вибірки, якщо генеральна сукупність розподілена нормально з $\sigma = 1{,}2$?

5.32. Для перевірки знань учнів старших класів було розроблено тестові завдання з математичних дисциплін, що містять 150 питань. За результатами вибірки обсягом $n = 22$ виявилось, що в середньому один учень відповів правильно на 99 питань. Відомо, що генеральна сукупність, з якої зроблено вибірку, розподілена за нормальним законом з $\sigma = 15$.

А) Перевірити гіпотезу H_0: $\mu = 95$ за альтернативної H_1: $\mu \neq 95$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}06$.

Б) Знайти потужність критерію при $\mu = 90$.

5.33. Нехай перевіряється гіпотеза H_0: $\mu = 200$ за альтернативної H_1: $\mu < 200$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ на основі 25 спостережень. Яка ймовірність, що процедура перевірки гіпотези «розпізнає» істинність альтернативної гіпотези при $\mu = 170$, якщо відомо, що генеральна сукупність розподілена нормально з $\sigma = 50$?

5.34. Припустимо, що перевіряється гіпотеза H_0: $\mu = 23$ за альтернативної H_1: $\mu < 23$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}1$ на основі n спостережень, узятих з нормально розподіленої сукупності з $\sigma = 4{,}8$. Яким має бути найменший обсяг вибірки, щоб потужність тесту була не меншою ніж 0,75 при $\mu = 21$.

5.35. На основі вибірки обсягом $n = 36$ з нормально розподіленої генеральної сукупності з $\sigma = 12$ перевіряється гіпотеза H_0: $\mu = 45$ за альтернативної H_1: $\mu > 45$. Чому дорівнює рівень значущості α, якщо відомо, що потужність критерію $1 - \beta = 0{,}8$ при $\mu = 48$?

5.36. Побудуйте криву функції потужності критерію, якщо перевіряється гіпотеза H_0: $\mu = 40$ за альтернативної H_1: $\mu \neq 40$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ на основі вибірки обсягом $n = 16$ з нормально розподіленої генеральної сукупності, якщо відоме її стандартне відхилення $\sigma = 2$.

5.37. Перевірка, проведена в супермаркеті, показала, що середня вага 140 навмання відібраних 900-грамових пакетів із гречаною крупою становила 896 г із середнім квадратичним відхиленням 5 г. Чи можна з рівнем значущості $\alpha = 0{,}07$ стверджувати, що середня вага пакетів з крупою менша за 900 г, або виявлена різниця у вазі є випадковою?

5.38. Інвестиційний фонд оголосив, що середній річний дохід за акціями підприємств машинобудівної галузі становив 14,5 %.

Інвестор, бажаючи перевірити, чи відповідає ця заява дійсності, зробив випадкову вибірку 45 акцій цієї галузі. За одержаними даними було знайдено середній річний дохід та середньоквадратичне відхилення: $\overline{x}_{в} = 12{,}8$ %, $\sigma_{в} = 3{,}2$ %. Чи має інвестор достатньо підстав для того, щоб спростувати заяву інвестиційного фонду? Узяти рівень значущості $\alpha = 0{,}04$.

5.39. Навчання було здійснено вибірку обсягом $n = 25$ з нормально розподіленої сукупності. Вибіркові середня та середньоквадратичне відхилення становили $\overline{x}_{в} = 34$ і $\sigma_{в} = 3$. За допомогою p-значення визначте, чи є достатньо доказів з 5 %-вим рівнем значущості для висновку, що середнє генеральної сукупності не дорівнює 36. Повторіть розрахунки для випадків, якщо: а) $n = 15$; б) $n = 5$. Поясніть, як змінюється p-значення за зменшення обсягу вибірки.

5.40. Служба кур'єрської доставки в рекламі повідомляє, що середній час доставки по місту працівниками служби не перевищує 3 годин. Для перевірки даної інформації було здійснено випадкову вибірку 12 замовлень по місту. Час (год), затрачений кур'єрами на доставку, наведений далі. Чи існує достатньо доказів з 5 %-вим рівнем значущості для спростування заяви кур'єрської служби?

3,60 3,35 2,75 2,65 2,60 2,96
1,95 3,82 2,95 2,84 4,25 3,45

Вважати, що час доставки розподілений за нормальним законом.

5.41. Середня денна виручка невеликої продуктової крамниці дорівнює 4500 грн. Її менеджер розширив асортимент та провів певну реконструкцію крамниці і хоче перевірити, чи вплинули ці зміни на розмір денної виручки. Для цього було здійснено випадкову вибірку 14 днів, середня виручка за якими становила 5019 грн, а виправлене стандартне відхилення $s = 650$ грн. Використовуючи рівень значущості $\alpha = 0{,}05$, перевірте, чи справді відмінності істотні? Вважається, що щоденна виручка розподілена за нормальним законом.

5.42. Відомо, що місячна заробітна плата робітника у промисловості розподілена за нормальним законом із середньою — 2747 грн та стандартним відхиленням $\sigma = 665$ грн. Якщо підприємство в цій галузі наймає 20 робітників і платить їм у середньому 2200 грн на місяць, то чи можна звинуватити його керівництво в зменшенні зарплат? Перевірте гіпотезу з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$.

5.43. Тривалий час автоматична лінія з фасування пакетів з рисом забезпечувала нормальний розподіл ваги фасованих пакетів із середньою вагою 1000 г і стандартним відхиленням $\sigma = 3$ г. Перед плановим профілактичним ремонтом для з'ясування можливих порушень у роботі лінії було здійснено вибірку 25 пакетів, середня вага яких виявилась рівною 1002 г. Чи є підстави припускати, що сталися збої в роботі лінії і спостерігається стійка перевитрата сировини? Перевірте гіпотезу з рівнем значущості $\alpha = 0{,}03$.

5.44. Керівництво компанії вирішило перевірити, скільки часу працівники затрачають щодня на читання електронної пошти. Для цього було здійснено випадкову вибірку 15 працівників та зафіксовано кількість затраченого ними часу (хв) протягом дня на перевірку електронної пошти:

33; 28; 58; 90; 15; 73; 85; 111; 75; 56; 62; 45; 68; 77; 62.

Чи можна зробити висновок на підставі цих даних, що середня кількість часу, затрачена працівниками компанії на роботу з електронною поштою, перевищує 60 хв? Розв'яжіть задачу за припущення, що генеральна сукупність розподілена нормально за розглядуваною ознакою. Для перевірки гіпотези використайте p-значення.

5.45. Виробник деякого виду продукції стверджує, що принаймні 97 % випущеної ним продукції не має дефектів. Випадкова вибірка 200 виробів показала, що 192 з них не мають дефектів. Перевірте справедливість твердження виробника продукції з рівнем значущості $\alpha = 0{,}09$.

5.46. Відомо, що новому сорту прального порошку віддає перевагу 15 % споживачів. Компанія, що випускає даний вид прального порошку, провела рекламу серед споживачів мікрорайону. Для перевірки гіпотези про те, що завдяки рекламі попит на новий пральний порошок збільшився, було здійснено вибірку обсягом 300 споживачів. Вона показала, що 66 з них віддали перевагу новому сорту.

А) Перевірте з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ висунуту компанією гіпотезу.

Б) Перевірте гіпотезу, використовуючи лише p-значення.

В) Інтерпретуйте знайдене p-значення, зобразивши графічно розподіл тестової статистики.

5.47. Нехай перевіряється гіпотеза H_0: $p = 0{,}2$ за альтернативної H_1: $p \neq 0{,}2$, де p — імовірність успіху в одному випробуванні. Для цього було проведено 150 спостережень, у 24 % з яких було зафіксовано появу успіху.

А) Знайдіть p-значення та інтерпретуйте його.

Б) Повторіть розрахунки для $n = 250$ та $n = 400$.

В) Поясніть, як зміниться спостережуване значення критерію і p-значення зі збільшенням обсягу вибірки.

5.48. Нехай перевіряється гіпотеза H_0: $p = 0{,}55$ за альтернативної H_1: $p > 0{,}55$. Якщо було проведено 300 спостережень, якою має бути мінімальна кількість настання успіхів для того, щоб H_0 було відхилено з рівнем значущості $\alpha = 0{,}12$?

5.49. Студентам вищого навчального закладу для вивчення курсу бізнес-статистики було запропоновано новий підручник. Після завершення курсу 100 навмання вибраних студентів попросили оцінити книгу, запропонувавши такі можливі варіанти відповіді: «чудово» (1), «добре» (2), «адекватно» (3), «погано» (4). Було одержано такі результати: відповідь 1 дали 55 респондентів, 2 — 23 респонденти, 3 — 14 респондентів, 4 — решта.

А) Чи дозволяють ці дані зробити висновок з 10 %-вим рівнем значущості, що більш ніж 60 % усіх студентів оцінили книгу як чудову?

Б) З рівнем значущості $\alpha = 0{,}07$ перевірити гіпотезу про те, що підручник оцінили як поганий менше ніж 5 % респондентів.

5.50. Рекламна компанія стверджує, що 80 % магазинів, які використовують її рекламу, збільшили рівень продажу. За результатами випадкової вибірки 50 магазинів, які користуються послугами рекламної компанії, було виявлено, що у 38 з них рівень продажу зріс.

А) Чи є достатньо статистичних доказів для того, щоб спростувати тезу рекламної компанії з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$?

Б) Знайти ймовірність помилки другого роду та потужність критерію при $p = 0{,}75$.

Для розв’язання задач 5.51—5.53 варто скористатися програмним забезпеченням. Наприклад, можна застосувати статистичну функцію MS Excel БИНОМРАСП.

5.51. Аналітик з інвестицій великої компанії стверджує, що 85 % акцій, які було заплановано придбати, зросли в ціні. Випадкова вибірка 19 акцій виявила, що 14 з них подорожчали. Перевірте справедливість твердження аналітика з рівнем значущості $\alpha = 0{,}1$.

5.52. Нехай перевіряється гіпотеза H_0: $p = 0{,}6$ за альтернативної H_1: $p > 0{,}6$. Якщо було проведено 8 спостережень, то якою має бути мінімальна кількість настання успіхів для того, щоб H_0 було відхилено з рівнем значущості $\alpha = 0{,}11$?

5.53. Припустимо, що перевіряється гіпотеза H_0: $p = 0{,}9$ за альтернативної H_1: $p < 0{,}9$ на основі вибірки обсягом $n = 10$. Який рівень значущості використовується, коли область відхилення нульової гіпотези задається так: $\{k \mid k \leq 5\}$?

5.54. З нормально розподіленої сукупності було здійснено випадкову вибірку обсягом $n = 20$. За її результатами було обчислено виправлену вибіркову дисперсію $s^2 = 120$.

А) Перевірте з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ гіпотезу про те, що дисперсія генеральної сукупності дорівнює 150.

Б) Повторіть розрахунки для випадків, коли обсяги вибірок $n = 35$ та $n = 50$.

В) Поясніть, як змінюється χ^2-статистика за збільшення обсягу вибірки. Чи змінився висновок, зроблений при розв'язанні п. *А*?

5.55. За результатами багатьох років викладання математичної статистики відомо, що стандартне відхилення в оцінках студентів на фінальному іспиті становить $\sigma = 16$. Чи достатньо доказів з 10 %-вим рівнем значущості для висновку про те, що відхилення скоротилося після внесення змін у систему оцінювання, якщо оцінки студентів на іспиті розподілені нормально? Випадкова вибірка оцінок за останній іспит після того, як було внесено зміни в систему оцінювання:

57 92 99 73 62 64 75 70 88 60.

5.56. Партія виробів приймається, якщо дисперсія контрольованого розміру не перевищує 0,15. За вибіркою $n = 20$ виробів було обчислено виправлену дисперсію: $s^2 = 0{,}2$. Чи можна прийняти партію з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$, якщо відомо, що розмір виробу розподілений нормально? Який висновок можна зробити на основі лише *p*-значення, не використовуючи рівень значущості α?

5.57. Відомо, що автомат фасує цукор у пакети по 5 кг зі стандартним відхиленням $\sigma = 0{,}1$. За результатами вибіркового обстеження ($n = 30$) було одержано такі результати: $\sum_{i=1}^{30} x_i = 149{,}6$ та $\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 746{,}7$.

Чи є підстави вважати, що стандартне відхилення ваги пакета збільшилося? Перевірте гіпотезу з рівнем значущості $\alpha = 0{,}1$ за припущення, що вага пакетів розподілена нормально.

5.58. З нормально розподіленої сукупності було здійснено вибірку обсягом $n = 17$ і за її результатами знайдено виправлену дисперсію $s^2 = 43{,}5$. З рівнем значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірте гіпотезу H_0: $\sigma^2 = 45{,}7$ за альтернативної: а) H_1: $\sigma^2 \neq 45{,}7$; б) H_1: $\sigma^2 < 45{,}7$.

5.59. З нормально розподіленої сукупності було здійснено вибірку обсягом $n = 20$:

x_i	12	12,5	14	15	15,5
n_i	2	5	8	4	1

З рівнем значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірте гіпотезу H_0: $\sigma^2 = 0{,}75$ за альтернативної: а) H_1: $\sigma^2 \neq 0{,}75$; б) H_1: $\sigma^2 > 0{,}75$.

Чи змінився висновок щодо невідхилення нульової гіпотези за зміни альтернативної з двобічної на однобічну?

5.60. Агент з нерухомості припускає, що стандартне відхилення нормально розподіленої сукупності цін на однокімнатні квартири в деякому мікрорайоні міста не перевищує \$ 6000. Здійснивши випадкову вибірку обсягом 28 квартир, він побачив, що вибіркове виправлене стандартне відхилення цін дорівнює \$ 5040. Чи достатньо статистичних доказів для того, щоб підтвердити припущення агента? Для перевірки гіпотези використати p-значення.

5.61. З рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірте гіпотезу про середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої сукупності, якщо:

$$H_0 : \sigma \geq 15{,}7;\; H_1 : \sigma < 15{,}7;\; \sum_{i=1}^{16}\left(x_i - \overline{x}_{\text{в}}\right)^2 = 3520\,.$$

5.62. За результатами двох незалежних вибірок обсягами $n_1 = 21$ та $n_2 = 16$, зроблених з нормально розподілених сукупностей, було знайдено виправлені дисперсії: $s_1^2 = 4{,}63$ та $s_2^2 = 1{,}89$. З рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ за альтернативної: а) $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; б) $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Якщо нульову гіпотезу було відхилено на користь альтернативної з п. *а*, то чи обов'язково її буде відхилено на користь альтернативної з п. *б*? А навпаки? Поясніть, використовуючи графічне зображення тестової статистики.

5.63. Біржовий маклер досліджує можливості двох інвестицій. За п'ять років спостережень середній щорічний прибуток з першої інвестиції становив 13,4 %, з другої за десять років спостережень — 13,5 %. Вибіркові дисперсії щорічних прибутків від двох інвестицій виявились відповідно рівними $(5{,}25)^2$ % і $(4{,}68)^2$ %. Чи є підстави стверджувати з рівнем значущості $\alpha = 0{,}1$, що ризики можливих інвестицій різні? Припускається, що щорічні прибутки від інвестицій розподілені нормально.

5.64. Для порівняння рівня підготовки студентів двох навчальних закладів одного профілю серед 20 випускників першого вишу та 27 другого було проведено тестування, що містило 70 питань. Середня кількість правильних відповідей, даних випускниками першого вузу, — 57, другого — 61. При цьому вибіркові дисперсії відповідно становили $\sigma_{\text{в}1}^2 = 11{,}28$ та $\sigma_{\text{в}2}^2 = 8{,}71$. З рівнем значущості $\alpha = 0{,}2$ перевірте гіпотезу про те, що варіація правильних відповідей на тестові питання випускниками двох вишів однакова. Припускається, що розглядувані сукупності за даною ознакою розподілені нормально.

5.65. Клієнт вивчає пропозиції різних банків для визначення найбільш привабливих умов для вкладення певної суми грошей. Середні відсотки за депозитом становили відповідно: при вкладі на 6 місяців — 6,7 % за випадковою вибіркою обсягом $n_1 = 9$ банків, на 12 місяців — 7,2 % за вибіркою обсягом $n_2 = 12$ банків. Середньоквадратичне відхилення в разі 6-місячного депозитного вкладу виявилось 0,88 %, 12-місячного — 1,19 %. Чи є суттєва різниця у варіації відсотків за депозитами? Перевірте гіпотезу з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$. Припускається, що відсотки за обома видами депозитів розподілені нормально.

5.66. З рівнем значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірте гіпотезу $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, за альтернативної $H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$, якщо незалежні вибірки, одержані з двох нормально розподілених генеральних сукупностей, такі:

x_i	13,2	12,8	14,7	14,1	11,9	13,0	12,2	12,5	12,0
y_i	4,6	7,8	6,1	4,8	5,2	7,1	6,7		

5.67. За умов, сформульованих у задачі 5.66, знайти *р*-значення та інтерпретувати його, зобразивши графічно розподіл тестової статистики.

5.68. Середній річний дохід за акціями металургійної промисловості на основі вибірки обсягом $n_1 = 12$ становив $\overline{x}_{\text{в}1} = 8{,}7\ \%$, виправлене стандартне відхилення — $s_1^2 = 9{,}7$. За акціями машинобудівної та легкої промисловості ці самі характеристики відповідно становили: $\overline{x}_{\text{в}2} = 12{,}7\ \%$, $s_2^2 = 16{,}8$ при та $\overline{x}_{\text{в}3} = 7{,}5\ \%$, $s_3^2 = 5{,}8$ при $n_3 = 15$. Чи можна з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ стверджувати, що легка промисловість є менш ризикованою, ніж металургійна та машинобудівна, з погляду прибутку від інвестицій?

Припускається, що середньорічний дохід від акцій усіх трьох видів промисловості розподілений нормально.

5.69. Відділ маркетингу автотранспортного підприємства, яке здійснює міжміські перевезення, провів обстеження вартості певного виду палива на АЗС. Результати показали, що середня ціна одного літра палива на 20 АЗС, що продають імпортні нафтопродукти, становила 10,1 грн за літр, тоді як на 25 АЗС, що торгують українськими нафтопродуктами, вона виявилась рівною 9,48 грн за літр. Виправлені дисперсії відповідно становили $s_1^2 = 0{,}35$ та $s_2^2 = 0{,}28$. Перевірте з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ гіпотезу про те, що середня ціна 1 л палива на заправках, які продають імпортні нафтопродукти, не вища за ціну цього самого палива на заправках, які торгують вітчизняними нафтопродуктами. Вважати, що обидві сукупності розподілені нормально за розглядуваною ознакою.

5.70. Незалежні вибірки з двох нормально розподілених сукупностей дали такі результати:

Вибірка i	Обсяг	$\overline{x}_{\text{в}i}$	$\overline{\sigma}_{\text{в}i}$
1	45	12	4,77
2	59	13,5	5,2

Чи можна зробити висновок, що генеральна середня другої сукупності перевищує генеральну середню першої не більш ніж на одиницю? Перевірте гіпотезу з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$.

5.71. Наведені дані було одержано за результатами двох незалежних вибірок, узятих з нормально розподілених сукупностей, дисперсії яких рівні і становлять 1,5:

Вибірка 1: 12; 14; 13; 11; 12.

Вибірка 2: 13, 18; 16; 15; 14.

Використовуючи p-значення, перевірте гіпотезу про рівність середніх двох генеральних сукупностей.

5.72. Знайдіть спостережуване значення критерію та p-значення у випадках перевірки таких гіпотез:

а) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \le 20$, H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 20$, $n_1 = 45$, $n_2 = 68$, $\overline{x}_{\text{в}1} = 104$, $\overline{x}_{\text{в}2} = 80$, $s_1 = 12{,}1$, $s_2 = 10$;

б) H_0: $\mu_1 = \mu_2$, H_1: $\mu_1 \ne \mu_2$, $\overline{x}_{\text{в}1} = 13{,}4$, $\overline{x}_{\text{в}2} = 12{,}8$, $\sigma_1 = 2{,}5$, $\sigma_2 = 3{,}2$;

в) H_0: $\mu_1 - \mu_2 \ge 100$, H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 100$, $n_1 = 250$, $n_2 = 250$, $\overline{x}_{\text{в}1} = 380$, $\overline{x}_{\text{в}2} = 285$, $s_1 = 115$, $s_2 = 50$.

5.73. Нехай з двох генеральних сукупностей було здійснено незалежні вибірки обсягами $n_1 = 42$ та $n_2 = 68$ для перевірки гіпотези H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 5$ за альтернативної H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 5$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$. Знайти ймовірність помилки другого типу та потужність критерію при $\mu_1 - \mu_2 = 6{,}8$, якщо відомо, що дисперсії генеральних сукупностей дорівнюють відповідно $\sigma_1^2 = 8{,}4$ та $\sigma_2^2 = 11{,}9$.

5.74. Припустимо, що перевіряється гіпотеза H_0: $\mu_1 = \mu_2$ за альтернативної H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ на основі вибірок обсягами відповідно 14 та 17. Знайти найменше можливе значення $\left|\overline{x}_{в1} - \overline{x}_{в2}\right|$, за якого нульову гіпотезу буде відхилено, якщо відомо, що генеральні сукупності розподілені нормально з рівними дисперсіями і $s_p = 4{,}9$.

5.75. Нехай перевіряється гіпотеза H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$ за альтернативної H_1: $\mu_1 > \mu_2$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$. Яким має бути найменше значення різниці $\overline{x}_{в1} - \overline{x}_{в2}$ для того, щоб нульову гіпотезу було відхилено? Відомо, що генеральні сукупності розподілені нормально з рівними дисперсіями, $s_p = 27{,}4$, $n_1 = 7$ та $n_2 = 11$.

5.76. Менеджер з реклами хотів би з'ясувати, чи вплинула реклама на збут продукції компанії, що виготовляє швидкі сніданки. З цією метою було здійснено вибірку 20 однотипних магазинів, 9 з яких почали продавати лише рекламовані вівсяні пластівці і 11 — аналогічні зразки товару, що не були рекламовані. Через тиждень він одержав такі результати:

Рекламований товар, к-сть упаковок	Нерекламований товар, к-сть упаковок
$\overline{x}_{в1} = 85{,}7$ $s_1 = 12{,}5$	$\overline{x}_{в2} = 69{,}2$ $s_2 = 10{,}1$

Перевірте з 5 %-вим рівнем значущості, чи збільшився збут вівсяних пластівців після рекламування.

5.77. Оператор автоматизованого виробництва деякого виду продукції вважає, що перший автомат працює повільніше, ніж другий. Для того щоб перевірити істинність цього припущення, оператор зафіксував час виготовлення 10 випадково вибраних одиниць продукції, зроблених першим автоматом та 10 — другим. Результати (у хв) виявилися такі:

Автомат 1: 12,3; 15,6; 10,7; 11,6; 10,5; 12,4; 13,0; 11,2; 12,0; 10,9.

Автомат 2: 11,8; 14,1; 12,8; 13,1; 13,5; 12,2; 10,9; 13,1; 12,5; 11,4.

Відомо, що час виготовлення однієї одиниці продукції кожним з автоматів розподілений за нормальним законом з різними дисперсіями. Перевірте з рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$ припущення оператора.

5.78. Розв'яжіть задачу 5.77 за припущення, що дисперсії генеральних сукупностей рівні. Знайдіть *p*-значення та інтерпретуйте його.

5.79. Наведена інформація була одержана за результатами двох незалежних вибірок, узятих з нормальних розподілених генеральних сукупностей з невідомими, але рівними дисперсіями:

x_i	13	12	16	14	11	13	15	16	14	12

y_i	14	17	16	19	15	12				

Перевірте з 1 %-вим рівнем значущості гіпотезу про те, що генеральна середня першої сукупності не менша за середню другої.

5.80. Використовуючи *p*-значення, розв'яжіть задачу 5.79, якщо відомо, що $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 3{,}92$. Зобразіть графічно розподіл тестової статистики та інтерпретуйте одержаний результат.

5.81. Перевірте з 5 %-вим рівнем значущості гіпотезу про те, що середня заробітна плата (за певний період) робітника промисловості не вища, ніж заробітна плата працівника освіти, якщо відомо:

Заробітна плата в промисловій галузі в розрахунку на одного працівника, грн	Заробітна плата в освітній галузі в розрахунку на одного працівника, грн
$\bar{x}_{в1} = 2780{,}5$ $s_1 = 413{,}6$ $n_1 = 75$	$\bar{x}_{в2} = 1986{,}7$ $s_2 = 387{,}6$ $n_2 = 52$

5.82. За результатами вибірок обсягами $n_1 = 40$ та $n_2 = 54$ було знайдено середню вагу одиниці продукції, виготовленої відповідно першим та другим автоматами, та її стандартне відхилення. Вони становили відповідно: $\bar{x}_{в1} = 165$ г, $\sigma_{в1} = 7{,}9$ г, $\bar{x}_{в2} = 173$ г, $\sigma_{в2} = 9{,}4$ г. З рівнем значущості $\alpha = 0{,}02$ перевірте гіпотезу про те, що середня вага виготовлених двома автоматами виробів однакова.

5.83. Розв'яжіть задачу 5.82 за припущення, що відомі генеральні дисперсії: $\sigma_1^2 = 68{,}7$, $\sigma_2^2 = 92{,}4$. Використайте *p*-значення та порівняйте одержані результати.

5.84. Менеджер мережі ресторанів швидкого харчування хоче дізнатися, чи є різниця в щоденних виторгах двох ресторанів мережі, що розташовані в різних мікрорайонах міста. Для цього протягом 10 навмання вибраних днів спостерігались обсяги продажу (у тис. грн) у кожному з ресторанів:

Ресторан 1	6,2	6,7	12,0	7,1	8,5	11,4	9,0	10,8	7,4	7,9
Ресторан 2	8,1	7,9	10,6	8,5	7,4	12,2	7,3	9,1	9,0	8,2

Використовуючи рівень значущості $\alpha = 0{,}05$, визначте, чи є суттєва різниця в обсягах щоденного продажу двох розглядуваних ресторанів швидкого харчування. Вважається, що щоденний виторг ресторанів розподілений нормально.

5.85. Для того щоб перевірити, чи посприяла реклама зростанню попиту на продукцію, менеджер компанії з виробництва мийних засобів здійснив вибірку 9 однотипних магазинів. Він зафіксував кількість одиниць проданого товару протягом одного дня до та після рекламування:

Магазин	1	2	3	4	5	6	7	8	9
До	28	19	26	31	24	21	27	33	18
Після	31	25	22	24	30	24	26	21	15

Використовуючи *p*-значення, з'ясуйте, чи вплинула реклама на попит на даний товар. Яке припущення має передувати дослідженню для того, щоб висновки були обґрунтованими?

5.86. Дієтолог хоче перевірити, чи впливає певна дієта на вагу людини. Для цього він відібрав 10 людей і зафіксував їхню вагу до і після застосування дієти:

Пацієнт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
До	88	79	68	93	91	74	78	73	75	69
Після	80	73	65	86	85	71	75	69	70	66

Перевірте з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ гіпотезу про те, що запропонована дієта дозволяє в середньому зменшити вагу не менш ніж на 5 кг. Припускається, що обидві сукупності розподілені нормально за розглядуваною ознакою.

5.87. На курсах з вивчення англійської мови проводиться тестування випускників для визначення ефективності навчання. Навмання було вибрано 26 випускників та зафіксовано різницю кількості помилок d_i, допущених у тестовому випробуванні до відвідування курсів та після нього. Одержано такі результати:

$$\sum_{i=1}^{26} d_i = 105, \ \sum_{i=1}^{26} d_i^2 = 2120.$$

З'ясуйте, чи є суттєвою різниця помилок, допущених до навчання та після нього, якщо закони розподілу обох генеральних сукупностей нормальні. Для розв'язання задачі використайте p-значення.

5.88. Було проведено експериментальну перевірку для з'ясування можливих побічних ефектів від застосування нових ліків від алергії. У ході експерименту ліки вживали 2000 чоловіків та 1000 жінок. Результати виявили, що 25 чоловіків і 18 жінок відчули побічні ефекти під час вживання нового засобу. Чи можна на підставі експерименту стверджувати, що побічний ефект від вживання нових ліків більшою мірою виявляється в жінок, ніж у чоловіків? Перевірити гіпотезу з рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$.

5.89. Перевіряється ймовірність виготовлення браку двома автоматами. У партії з 300 деталей, виготовлених першим автоматом, виявилось 7 бракованих, з 90 деталей з другого автомата — 3 бракованих. Чи є достатньо підстав для висновку, що ймовірності виготовлення бракованої деталі першим та другим автоматами різні? Для розв'язання задачі використайте p-значення.

5.90. Статистичне бюро перевіряє припущення про те, що частка домогосподарств з більше ніж п'ятьма членами сім'ї в районі 1 більша, ніж у районі 2. Для цього було здійснено вибірку 100 домогосподарств району 1 та 100 — району 2. У першому випадку домогосподарств з більше ніж п'ятьма членами сім'ї виявилось 29, у другому — 19. З рівнем значущості $\alpha = 0{,}1$ перевірте, чи достатньо доказів для визнання істинним припущення бюро.

5.91. Нехай перевіряється нульова гіпотеза $H_0\colon p_1 = p_2$ за альтернативної $H_1\colon p_1 \neq p_2$ на основі двох незалежних серій 100 та 200 випробувань Бернуллі. Якщо кількість «успіхів» у першому випадку виявилась рівною 67, у другому — 145, то яким є спостережуване значення критерію та, відповідно, p-значення? Як зміниться тестова статистика та p-значення у разі зміни частки «успіхів» у кількості випробувань на частку «невдач» у першій та другій серіях випробувань, тобто при перевірці гіпотези H_0: $q_1 = q_2$ за альтернативної H_1: $q_1 \neq q_2$?

5.92. Розв'яжіть задачу 5.91 за умови, що альтернативна гіпотеза є однобічною, тобто H_1: $p_1 < p_2$. Як змінилося p-значення у разі зміни альтернативної гіпотези?

5.93. Використовуючи знайдені p-значення у задачах 5.91 та 5.92, скажіть, чи можна не відхилити з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ нульову гіпотезу в разі двобічної та однобічної альтернативних гіпотез.

5.94. Компанія з виробництва соків та фруктових пюре має два заводи, один з яких побудований недавно. Відділ контролю якості повинен перевірити, чи насправді частка бракованої продукції на новому заводі істотно відрізняється від частки браку на старому. Для перевірки навмання взяли по 50 одиниць продукції з кожного заводу. У таблиці подано вибіркові дані, одержані з кожного заводу.

Завод	Частка бракованої продукції у вибірці	Обсяг вибірки
Старий	$w_1 = 0{,}12$	$n_1 = 50$
Новий	$w_2 = 0{,}06$	$n_2 = 50$

Перевірте висунуту гіпотезу з рівнем значущості: а) $\alpha = 0{,}02$, б) $\alpha = 0{,}1$.

Чи змінився зроблений висновок за збільшення рівня значущості?

§ 6. Парна лінійна регресія

Виходячи із сутності кореляційної залежності між двома змінними величинами, яка полягає в залежності умовного математичного сподівання однієї з них від значень, яких набирає інша, цю залежність можна записати у вигляді:

$$M_x(Y) = \varphi(x)\text{, або } M_y(X) = \psi(y). \qquad (2.6.1)$$

Перше з рівнянь — рівняння регресії Y на X, друге — X на Y.

Статистичні зв'язки між двома змінними базуються на основі регресійного й кореляційного аналізів. Головною метою першого з них є вивчення й установлення форми залежності між змінними [залежності (2.6.1)], другого — виявлення зв'язку між випадковими величинами й оцінювання тісноти цього зв'язку.

У практиці статистики для побудови залежностей (2.6.1) маємо вибірки пар значень (x_i; y_i), обмеженого обсягу n, але закони розподілу двовимірної випадкової величини (X; Y) невідомі. Тому надалі розглядатимемо співвідношення (2.6.1) як оцінні, побудовані за вибірковими даними (x_i; y_i) рівняння регресії.

Як правило, для побудови вибіркових ліній регресії Y на X використовується метод найменших квадратів, за реалізації якого вибирається співвідношення вигляду:

$$y_x = \varphi(x, b_0, b_1, \ldots, b_k), \qquad (2.6.2)$$

де y_x — умовна середня змінної Y, якщо змінна X набуває фіксованого значення $X = x$ а $b_0, b_1, \ldots, b_k$ — параметри, які визначають функцію φ. Аналогічно можна розглядати вибіркове рівняння регресії X на Y:

$$x_y = \psi\left(y, c_o, c_1, c_2, \ldots, c_k\right). \qquad (2.6.3)$$

Сутність параметрів $c_0, c_1, \ldots, c_k$, як і для (2.6.2).

Надалі для реалізації методу найменших квадратів (МНК) для побудови рівнянь регресії (ліній регресії) будуть використовуватися вибіркові аналоги початкових і центральних моментів випадкової величини (див. § 2).

У рівнянні (2.6.2) обмежимося лінійною моделлю залежності

$$y = b_0 + b_1 x + \varepsilon, \qquad (2.6.4)$$

де параметри b_0, b_1 знаходять із системи рівнянь МНК:

$$b_1\overline{x} + b_0 = \overline{y}, \quad b_1\overline{x^2} + b_0\overline{x} = \overline{xy}, \qquad (2.6.5)$$

де $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{l} x_i n_i$; $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{m} y_j n_j$; $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{j=1}^{m} x_i y_j n_{ij}$; $\overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^2 n_i$;

$n = \sum\limits_{i=1}^{l} n_i = \sum\limits_{j=1}^{m} n_j$, n_{ij} — відповідні частоти пар значень ($x_i y_i$).

У формулі (2.6.4) ε — випадкова величина, яка розподілена нормально і має математичне сподівання $M(\varepsilon) = 0$ та дисперсію $D(\varepsilon) = \sigma^2$, і враховує те, що значення ($x_i y_i$) можуть не потрапляти на лінію регресії (2.6.4).

Зважаючи на формули для обчислення вибіркового кореляційного моменту $\rho_{XY} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}$ і вибіркового коефіцієнта кореляції $r_{\text{В}} = \dfrac{\rho_{XY}}{S_x S_y}$, рівняння регресії (2.6.4) без урахування добавки ε можна записати у вигляді:

$$y-\bar{y}=r_b\frac{s_Y}{s_X}(x-\bar{x}), \tag{2.6.6}$$

де $r_b\dfrac{s_Y}{s_X}$ — вибірковий коефіцієнт регресії, який показує, на скільки одиниць у середньому зміниться Y, якщо змінна X збільшиться на одиницю. Аналогічно,

$$x-\bar{x}=r_b\frac{s_X}{s_Y}(y-\bar{y}) \tag{2.6.7}$$

— рівняння регресії X на Y. Слід зауважити, що вибірковий коефіцієнт кореляції r_b характеризує тісноту лінійного зв'язку випадкових величин X і Y; чим ближче $|r_b|$ до одиниці, тим ближче зв'язок до лінійного.

Для оцінки коефіцієнта кореляції генеральної сукупності ρ використовують вибірковий коефіцієнт кореляції r_b.

Так, для гіпотез H_0: $\rho = 0$; H_1: $\rho \neq 0$ будуємо випадкову величину

$$t=\frac{r_b\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_b^2}}, \tag{2.6.8}$$

яка розподілена за законом Стьюдента з $k = n - 2$ степенями вільності. Гіпотеза H_0 відкидається, якщо $|t| < t_{kp}(1-\alpha,k)$, де $t_{kp}(1-\alpha,k)$ — табличне значення критерію Стьюдента для α — рівня значущості й k — кількості степенів вільності.

Якщо коефіцієнт кореляції r_b значущий (H_0 відхиляється), то з огляду на (2.6.5) коефіцієнт регресії $b_1 = r_b\dfrac{s_Y}{s_X}$ також значущий. Тоді для оцінки β_1 — коефіцієнта регресії генеральної сукупності — можна побудувати довірчий інтервал

$$b_1-t_{kp}(1-\alpha,k)\frac{s_Y\sqrt{1-r_b^2}}{s_X\sqrt{k}}<\beta_1<b_1+t_{kp}(1-\alpha,k)\frac{s_Y\sqrt{1-r_b^2}}{s_X\sqrt{k}}, \tag{2.6.9}$$

де $k = n - 2$ — кількість степенів вільності, $t_{kp}(1-\alpha,k)$ — табличне значення розподілу Стьюдента.

Важливими характеристиками кореляційного аналізу вважається також кореляційне відношення, яке обчислюється за формулою

$$\eta_{XY} = \sqrt{\frac{D_m}{s_Y^2}},$$

де $D_m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l}\left(\bar{y}_j - \bar{y}\right)^2 n_j$ — міжгрупова дисперсія; $\bar{y}_j$ — середнє j-ї групи; $\bar{y}$ — загальна середня; l — кількість груп та коефіцієнт детермінації

$$R = \sqrt{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2}{s_Y}} = |r|,$$

де m — кількість значень y; r — коефіцієнт кореляції; $\bar{y}_i$ — середні розрахункові значення $y(x_i)$ з рівняння регресії (6.2.4).

Емпіричне кореляційне відношення y на $x(\eta_{XY})$ характеризує частку впливу на змінну Y змінності X щодо неврахованих факторів; коефіцієнт детермінації R^2 (для парної лінійної регресії він дорівнює r^2) показує частку змінності Y, викликану змінністю X. Чим ближче R^2 до одиниці, тим рівняння регресії (2.6.4) ліпше описує лінійну залежність.

Значущість кореляційного відношення генеральної сукупності (H_0: $\eta = 0$ — відхиляється) оцінюють за допомогою розподілу Фішера—Снедекера: якщо $F > F_{kp}$, то η суттєво відрізняється від нуля. Тут

$$F = \frac{\eta_{XY}^2 (n - m)}{(1 - \text{t}_{xy}^2)(m - 1)}, \qquad (2.6.10)$$

де m — кількість інтервалів, сформованих за груповими ознаками; $F_{kp}(\alpha, k_1, k_2)$ — табличне значення критерію Фішера—Снедекера для рівня значущості α, $k_1 = m - 1$, $k_2 = n - m$ — степенів вільності. Коефіцієнт детермінації генеральної сукупності значущий, якщо $F > F_{kp}(\alpha, k_1, k_2)$, де $F = \frac{R^2(n-2)}{1 - R^2}$; $k_1 = 1, k_2 = n - 2$.

Задачі

6.1. Установити наявність зв'язку між X і Y та обчислити коефіцієнт кореляції за кореляційними таблицями:

а)

X	Y			
	1	2	3	5
1	2	5	3	1
2	2	5	3	1
4	2	5	3	1

б)

X	Y				
	1	2	4	6	7
1	1	2		1	
2		1	3	1	
3			4	1	2
4			1		2

6.2. Продавець меблів вивчав залежність між витратами на рекламу (у тисячах гривень) та продажем меблів (x млн) за 12 місяців. Одержані дані подані в таблиці:

Витрати	23	46	60	54	28	33	25	31	36	88	90	99
Продаж	9,6	11,3	12,8	9,8	8,9	12,5	12	11,4	12,6	13,7	14,4	15,9

А) Накресліть та проаналізуйте діаграму залежності на предмет існування лінійного зв'язку.

Б) Побудуйте рівняння регресії.

В) Знайдіть різниці $y_i - y$ за рівнянням регресії.

Г) Оцініть квадрати різниць $y_i - y(x_i)$.

6.3. Щоб установити вплив рівня відсотків іпотечного кредитування (X) на кількість (Y) розпочатого будівництва котеджів, економіст зібрав дані за 10 років середнього рівня відсотків і кількості котеджів, будівництво яких почалось у відповідному році. Дані — у таблиці:

Рівень відсотків	8,5	7,8	7,6	7,5	8,0	8,4	8,8	8,9	8,5	8,0
Кількість котеджів	115	111	185	201	206	167	156	117	133	150

А) Побудуйте лінію регресії.

Б) Поясніть зміст коефіцієнтів лінії регресії.

В) Покажіть, що $\sum_{i=1}^{0}\left(y_i - y(x_i)\right) \approx 0$ (з точністю до округлення).

6.4. Досліджуючи залежність між кількістю годин у тиждень (X), проведених біля телевізора дітьми від 10 до 15 років, і зайвою вагою (Y) (надлишок ваги від норми), лікарі одержали такі дані:

Кількість годин	42	34	25	35	37	38	31	33	19	29	38	28	29	36	18
Зайва вага	18	6	0	–1	13	14	7	7	–9	8	8	5	3	14	–7

Примітка. Від'ємні значення означають менше від норми.

а) побудуйте діаграму залежності між змінними;

б) запишіть рівняння регресії;

в) поясніть характер і тісноту лінійного зв'язку, знайшовши відповідні параметри.

6.5. Вологість вихідної суміші продуктів (X) випливає на щільність кінцевого продукту (Y). Вологість суміші вибиралась, а щільність кінцевого продукту вимірювалась. Були одержані такі дані:

Вологість суміші	4,7	5	5,2	5,2	5,9	4,7	5,9	5,2	5,3
Щільність суміші	3	3	4	5	10	2	10	3	7

а) побудуйте модель лінійної парної регресії;

б) знайдіть $r_в$, установіть для рівня значущості $\gamma = 0,95$ довірчий інтервал для ρ;

в) установіть для $\alpha = 0,05$ довірчий інтервал для β_1.

6.6. Вартість експлуатації транспортних літаків (Y) зростає з віком літаків (X). Зібрано такі дані:

Вік літака	4,5	4,5	4,5	4,0	4,0	4,0	5,0	5,0
6-місячна вартість експлуатації	619	1049	1033	495	723	681	890	1522

Вік літака	5,0	5,5	0,5	0,5	6,0	6,0	1,0	1,0	1,0
6-місячна вартість експлуатації	1194	987	163	182	764	1373	978	466	549

а) знайдіть параметри моделі $y = b_1x + b_0$;

б) обчисліть $r_в$, поясніть зміст, знайдіть довірчі інтервал для ρ, ($\alpha = 0,05$);

в) знайдіть довірчий інтервал для β_1, ($\alpha = 0,05$).

6.7. У таблиці подано розподіл 100 га орної землі за кількістю X внесених добрив на 1 га (ц/га) та врожайністю Y (ц/га):

Y	X					
	29–31	31–33	33–35	35–37	37–39	39–41
0–10	7	2	1			
10–20	1	7	5	1		
20–30		1	4	15	3	
30–40			1	10	12	1
40–50				8	15	6

а) знайти коефіцієнт лінійної кореляції між X та Y і скласти рівняння ліній регресії Y на X та X на Y. Зробити відповідні висновки;

б) оцінити рівні значущості для β_1, ρ, побудувати довірчі інтервали;

в) знайти кореляційне відношення η_{XY}, R^2.

6.8. Виробник спеціальних інструментів хоче прогнозувати середні щоденні витрати електроенергії у вартісному вимірі (деякі робочі місця потребують, щоб були ввімкнені додаткові яскраві лампи). Він контролює щоденні витрати електроенергії й кількість виготовлених за день інструментів. Ці дані такі:

День	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X — кількість інструментів	7	3	2	5	8	11	5	15	3	6
Y — вартість електроенергії, грн	23,80	11,89	15,98	26,11	31,79	39,93	12,27	40,06	21,38	18,65

а) оцініть вигляд кореляційної залежності;

б) якщо вона лінійна, знайдіть параметри;

в) обчисліть коефіцієнт кореляції. Про що свідчить цей коефіцієнт?

г) знайдіть кореляційне відношення η_{XY} і R^2. Про що вони свідчать?

д) знайдіть довірчі інтервали для ρ і β_1; (α = 0,05).

6.9. Продавець хоче оцінити щомісячні фіксовані і змінні витрати на збут. Як перший крок він зібрав дані за минулі 8 місяців. Повні витрати (X) на збут і повний продаж (Y) були записані і зведені в таблицю:

X	20	40	60	50	50	55	60	70
Y	14	16	18	17	18	18	18	20

а) обчисліть коваріацію і коефіцієнт кореляції та опишіть, що ці статистики характеризують;

б) побудуйте лінію залежності між X та Y та знайдіть фіксовані та змінні витрати;

в) знайдіть довірчі інтервали для ρ і β_1; (α = 0,05).

6.10. Щоб проаналізувати залежність між екзаменаційною оцінкою за курс та затраченим на його вивчення часом, студент узяв випадкову вибірку 10 студентів, які складали даний курс, і опитав їх щодо оцінки (X) та затраченого на вивчення часу (Y). Ці дані зафіксовані в таблиці:

X	77	63	79	86	51	78	83	90	65	47
Y	40	42	37	47	25	44	41	48	35	28

а) обчисліть коваріацію;

б) обчисліть коефіцієнт кореляції;

в) обчисліть коефіцієнт детермінації;

г) за методом найменших квадратів знайдіть емпіричну функцію $y = f(x)$;

д) Зробіть висновки на підставі одержаних у пп. *а–г* результатів про залежність між оцінкою та затраченим часом.

6.11. Інтернет зростає швидко разом з кількістю регулярних користувачів. Проте люди, яким за 50 років, Інтернет використовують відносно рідко. Щоб вивчити цей процес, була здійснена вибірка 250 чоловіків і жінок, яким за 50 років і які використали Інтернет принаймні один раз за місяць. Кількість годин було записано:

X (час, год)	7	8	9	10	11	12
Y (осіб)	10	12	15	20	23	28
X (час, год)	13	14	15	16	17	18
Y (осіб)	35	30	28	28	16	8

а) обчисліть середнє і медіану цих даних;

б) обчисліть дисперсію і середнє квадратичне відхилення;

в) про що ви дізналися з одержаних статистик?

г) розташуйте на площині xOy координати (XY), зробіть припущення щодо форми зв'язку;

д) побудуйте рівняння регресії;

е) знайдіть довірчі інтервали для ρ, β_1, η_{XY}, R^2 ($\alpha = 0{,}05$).

6.12. Рівень безробіття — важливий показник економічного стану країни. Рівень безробіття вимірюється як відсоток людей, котрі шукають роботу і не мають робочих місць. Інший спосіб вимірювання цього економічного показника — обчислити норму зайнятості, яка є відсотком зайнятих дорослих. Далі наведені рівні безробіття y (%) і норми зайнятості x 19 країн:

Австралія	6,7	70,7
Австрія	3,6	74,8
Бельгія	6,6	59,9
Канада	7,2	72,0
Данія	4,3	77,0
Фінляндія	9,1	68,1
Франція	8,6	63,1
Німеччина	7,9	69,0
Угорщина	5,8	55,4
Ірландія	3,8	67,3
Японія	5,0	74,3
Нідерланди	2,4	65,4
Нова Зеландія	5,3	62,3
Польща	18,2	53,5
Португалія	4,1	72,2
Іспанія	13,0	57,5
Швеція	5,1	73,0
Великобританія	5,0	72,2
США	4,8	73,1

Обчисліть коефіцієнт детермінації та опишіть, про що дізнались із цієї статистики.

А) Складіть рівняння лінії регресії.

Б) Обчисліть коефіцієнти кореляції і детермінації. Про що вони свідчать?

В) Знайдіть довірчі інтервали для ρ, β_1, R^2, η_{XY} ($\alpha = 0{,}1$).

6.13. Річна продуктивність праці в розрахунку на одного робітника та енергооснащеність на підприємствах однієї галузі відображені в таблиці:

Продуктивність y, тис. грн/люд.	6,7	6,9	7,2	7,3	8,4	8,8	9,1
Енергооснащеність x, квт/люд.	2,8	2,2	3,0	3,5	3,2	3,7	4
Продуктивність y, тис. грн/люд.	9,8	10,6	10,7	11,1	11,8	12,1	12,4
Енергооснащеність x, квт/люд.	4,8	6,0	5,4	5,2	5,4	6,0	9,0

а) складіть рівняння прямої лінії регресії;

б) на скільки в середньому зміниться продуктивність праці, якщо енергооснащеність збільшиться на 1 квт/люд.?

в) знайдіть коефіцієнти кореляції та детермінації, поясніть їхній зміст;

г) обчисліть кореляційне відношення η_{XY} та побудуйте для нього довірчий інтервал ($\alpha = 0{,}05$).

6.14. За даними таблиці

Y	X							
	65	95	125	155	185	215	n_Y	$\overline{x}_Y$
30	5	—	—	—	—	—	5	65
40	4	12	—	—	—	—	16	87,5
50	—	8	5	4	—	—	17	101,18
60	—	1	5	7	2	—	15	145
70	—	—	—	—	1	1	2	200
n_X	9	21	10	11	3	1	$n = 55$	
$\overline{y}_X$	34,44	44,76	55	56,36	63,33	70		

Дайте відповіді на пп. *а*, *б*, *в*, *г* попередньої задачі.

6.15. Для даних залежності врожайності зернових Y культур від якості ґрунту X поданих у таблиці

№ з/п	Урожайність Y, ц/га	Якість ґрунту X, балів
1	28,0	79
2	21,0	70
3	27,6	80
4	16,2	71
5	29,7	77
6	26,8	77
7	30,3	84
8	15,7	66
9	25,5	74
10	15,8	67

а) побудувати графік кореляційної залежності і визначити форму зв'язку; б) знайти параметри рівняння регресії і коефіцієнт кореляції, оцінити тісноту зв'язку; в) побудувати довірчі інтервали для β_1 і ρ; ($\alpha = 0{,}05$); г) знайти кореляційне відношення η_{XY} та R^2, пояснити їх зміст; ґ) оцінити значущість η_{XY} та R^2 ($\alpha = 0{,}05$).

6.16. За даними таблиці

Y	X			
	10	20	30	n_Y
15	4	28	6	38
25	6	—	6	12
n_X	10	28	12	$n = 50$
$\overline{y}_X$	21	15	20	

а) знайти рівняння лінійної парної регресії; б) оцінити довірчі інтервали $\alpha = 0{,}05$ коефіцієнта β_1, та коефіцієнта регресії r; в) знайти η_{XY} та R^2. Пояснити зміст, установити значущість, побудувати довірчі інтервали.

6.17. За даними таблиці

Y	X					
	5	10	15	20	n_Y	$\overline{x}_Y$
10	2	—	—	—	2	5
20	5	4	1	—	10	8
30	3	8	6	3	20	12,25
40	—	3	6	6	15	16
50	—	—	2	1	3	16,67
n_X	10	15	15	10	$n = 50$	
$\overline{y}_X$	21	29,33	36	38		

знайти: а) вибірковий коефіцієнт регресії; б) вибіркові рівняння регресії Y на X і X на Y; в) довірчі інтервали для r і b_1, $\alpha = 0{,}05$; г) оцінити η_{XY} та R^2 зі значущістю $\alpha = 0{,}05$, побудувати довірчі інтервали.

ВІДПОВІДІ

РОЗДІЛ 1

До § 1

1.1. Обидві події рівносильні події А. **1.2.** а) серед 4 виробів немає жодного бракованого, тобто $\overline{A} = B$. б) $\overline{B} = A$; в) $AB = \varnothing$; г) $A + B -$ є чотири вироби невідомої якості. **1.3.** Несумісні. **1.4.** Подію C — нічия.

1.5. $\overline{A}B + A\overline{B} - \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A}B + \left(A + \overline{A}\right)\overline{B} = \overline{A}B + \Omega\overline{B} = (\Omega - A)B + \Omega\overline{B} =$
$= \Omega\left(B + \overline{B}\right) - AB = \Omega - AB = \overline{AB}$

1.6. 1) $AB\overline{C}$. 2) $\overline{\mathrm{A}}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C = D_1$.
3) $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC = D_2$. 4) $D_1 + D_2 + ABC = \Omega - \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

1.7. $\overline{A} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $\overline{B} = \{1, 2, 8, 9, 10\}$, $\overline{A}B = \{5, 6, 7\}$, $A\overline{B} = \{1, 2\}$, $\overline{A}\,\overline{B} = \{8, 9, 10\}$, $\overline{AB} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, , А +В = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, $A \setminus B = \{1, 2\} = A\overline{B}$, $\overline{A} + \overline{B} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $\overline{A + B} = \{8, 9, 10\} = \overline{A}\,\overline{B}$. **1.8.** B_2. **1.10.** B_4.

1.11. $\omega_1 = (\Gamma; \Gamma; \Gamma)$, $\omega_2 = (\overline{\Gamma}; \Gamma; \Gamma)$, $\omega_3 = (\Gamma; \overline{\Gamma}; \Gamma)$, $\omega_4 = (\Gamma; \Gamma; \overline{\Gamma})$, $\omega_5 = (\overline{\Gamma}; \overline{\Gamma}; \Gamma)$, $\omega_6 = (\overline{\Gamma}; \Gamma; \overline{\Gamma})$, $\omega_7 = (\Gamma; \overline{\Gamma}; \overline{\Gamma})$, $\omega_8 = (\overline{r}; \overline{r}; \overline{r})$ (тут: Γ — герб, $\overline{\Gamma}$ — цифра). $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$; $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4,\}$; $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$; $C = \{\omega_8\}$; $A \cap B \cup C = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$; $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} \cap C = \varnothing$.

1.12.

	1	2	3	4	5	6
1	1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2	2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3	3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4	4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5	5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6	6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

$A = \{(2; 2), (2; 4), (2; 6), (4; 2), (4; 4), (4; 6), (6; 6), (6; 4), (6; 6)\}$.
$B = \{(1; 3), (1; 6), (2; 3), (2; 6), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 3),$
$(4; 6), (5; 3), (5; 6), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)\}$.

$A\cap B=\{(2;6),(4;6),(6;2),(6;4),(6;6)\}.$

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{(1;1),(1;2),(1;4),(1;5),(2;1),(2;5),(4;1),(4;5),(5;1),(5;2),(5;4),(5;5)\}.$

1.13. Позначимо: М — підручник з математики, Т — підручник з теорії ймовірностей, С — підручник зі статистики

Ω	A	B	C
$\omega_1=(M;M;M)$	+	+	–
$\omega_2=(T;T;T)$	–	–	–
$\omega_3=(C;C;C)$	–	+	–
$\omega_4=(M;M;C)$	+	+	–
$\omega_5=(M;M;T)$	+	–	–
$\omega_6=(C;C;M)$	+	+	+
$\omega_7=(C;C;T)$	–	–	+
$\omega_8=(T;T;C)$	–	–	–
$\omega_9=(T;T;M)$	+	–	–
$\omega_{10}=(M;T;C)$	+	–	–

$\overline{A}\cup\overline{B\cap C}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}=\Omega-\{\omega_6\}.$

$A\cap\ B\cap C=\{\omega_6\}$ — студент узяв два підручники зі статистики та один підручник з математики.

1.14. Позначимо: б — браковані мікросхеми, я — якісні мікросхеми.

Партії			Простір ел-х подій
I	II	III	
б	б	б	ω_1
б	б	я	ω_2
б	я	б	ω_3
я	б	б	ω_4
б	я	я	ω_5
я	б	я	ω_6
я	я	б	ω_7
я	я	я	ω_8

Події : $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_5\}$; $\overline{A}=\{\omega_4,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}$;
$B=\{\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_8\}$; $\overline{B}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$;
$C=\{\omega_2,\omega_5,\omega_6,\omega_8\}$; $\overline{C}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_4,\omega_7\}$;

$\overline{A}B=\{\omega_7,\omega_8\}$ — або всі партії якісні, або брак є лише в третій (III) партії; $A\overline{B}=\{\omega_1,\omega_2\}$; $AB=\{\omega_3,\omega_5\}$; $\overline{A}\overline{B}=\{\omega_4,\omega_6\}$; $\overline{AB}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}$; $A+B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_8\}$; $\overline{A}+\overline{B}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}$; $\overline{A+B}=\{\omega_4,\omega_6\}$; $A\bigcap B\bigcap C=\{\omega_5\}$; $\overline{A}\bigcup\overline{B\bigcap C}=\{\omega_4,\omega_6,\omega_7\}$; $A\bigcap B\bigcup C=\{\omega_2,\omega_3,\omega_5,\omega_6,\omega_7\}$; $\overline{A\bigcup B}\bigcap C=\{\omega_6\}$.

1.15. Подія $A\bigcap B$ — намання вибрана особа чула про нові моделі автомобілів на радіо і бачила рекламу на телебаченні; подія $A\bigcup B$ — навмання вибрана особа або чула про нові моделі лише на радіо, або бачила лише рекламу на телебаченні, або ознайомлена з рекламою і на радіо, і на телебаченні; подія $\overline{A}\bigcap\overline{B}$ — навмання вибрана особа не ознайомлена з рекламою; подія $\overline{A}\bigcup\overline{B}$ — навмання вибрана особа або не чула рекламу на радіо, або не бачила на телебаченні, або взагалі і не чула, і не бачила цієї реклами. **1.16.**

Студент			Ω
юнак	курить	живе в гуртожитку	
+	+	+	ω_1
+	+	–	ω_2
+	–	+	ω_3
–	+	+	ω_4
+	–	–	ω_5
–	+	–	ω_6
–	–	+	ω_7
–	–	–	ω_8

Події: $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_5\}$; $\overline{A}=\{\omega_4,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}$;
$B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$; $\overline{B}=\{\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_8\}$;
$C=\{\omega_1,\omega_3,\omega_4,\omega_7\}$; $\overline{C}=\{\omega_2,\omega_5,\omega_6,\omega_8\}$;

$ABC = \{\omega_1\}$ — студент-юнак курить і живе в гуртожитку;
$\overline{A}BC = \{\omega_4\}$ — студентка-дівчина курить і живе в гуртожитку;
$A\overline{B}C = \{\omega_3\}$ — студент-юнак не курить і живе в гуртожитку;
$AB\overline{C} = \{\omega_2\}$ — студент-юнак курить і не живе в гуртожитку;
$\overline{A}\overline{B}C = \{\omega_7\}$ — студентка-дівчина не курить і живе в гуртожитку;
$A\overline{B}C = \{\omega_6\}$ — студентка-дівчина курить і не живе в гуртожитку;
$\overline{ABC} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\} = \Omega - \{\omega_1\}$.

1.17.

Студент-хлопець	Студент-відмінник	Студент-спортсмен	Ω
+	+	+	ω_1
+	+	–	ω_2
+	–	+	ω_3
–	+	+	ω_4
+	–	–	ω_5
–	+	–	ω_6
–	–	+	ω_7
–	–	–	ω_8

$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$; $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_6\}$; $C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_7\}$;

$ABC = \{\omega_1\}$ — навмання вибраний студент є хлопцем, що вчиться на «відмінно» і є спортсменом.

$\overline{ABC} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\} = \Omega - \omega_1$.

$AB + \overline{A}C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_7\}$ — вибраний студент є хлопцем-відмінником або це студентка-спортсменка.

1.19. Позначимо: «+» — влучення; «–» — промах.

Стрільці		Ω
I	II	
+	+	ω1
+	–	ω2
–	+	ω3
–	–	ω4

Події: $A = \{\omega_1, \omega_3\}$; $B = \{\omega_2, \omega_3\}$;

$\overline{A}=\{\omega_2,\omega_4\}$ — влучив 1-й або обидва промахнулися;
$\overline{B}=\{\omega_1,\omega_4\}$ — обидва влучили або промахнулися;
$\overline{A}B=\{\omega_2\}$ — влучив 1-й , а 2-й — ні;
$A\overline{B}=\{\omega_1\}$ — обидва влучили;
$\overline{AB}=\{\omega_4\}$ — обидва промахнулися;
$\overline{AB}=\Omega-\{\omega_3\}$ — або обидва влучили, або промахнулися, або влучив лише перший; $A+B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ — влучив принаймні один;
$\overline{A}+\overline{B}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}=\overline{AB}$; $\overline{A+B}=\{\omega_4\}=\overline{A}\,\overline{B}$.

1.20. ω_1— випало на верхній грані 1 очко;
ω_2 — випало на верхній грані 2 очка;
ω_3 — випало на верхній грані 3 очка;
ω_4 — випало на верхній грані 4 очка;
ω_5 — випало на верхній грані 5 очок;
ω_6 — випало на верхній грані 6 очок;
$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$.

До § 2

2.1. $P_4=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$; $P_{12}(2,4,6)=13860$; $A_7^2=42$; $\overline{\mathrm{A}_7^2}=49$; $C_9^3=84$; $\overline{C}_9^3=165$; $C_9(5;4)=126$. **2.2.** а) 6; б) 27; в) 6; г) 9. **2.3.** 100000. **2.4.** а) 4; б) 18; в) 4; г) 6. **2.5.** 635 013 559 600. **2.6**. 293 930; C_{17}^8. **2.7.** 900000. **2.8.** 60. **2.9.** 3432. **2.10.** 48. **2.11.** 1680. **2.12.** 24. **2.13.** а) 4638000; б) 17760000. **2.14**. 32. **2.15.** а) 4; б) 10; в) 6 та 11; г) 7; ґ) 9; д) 4; е) 8; є) 4; ж) 17. **2.16.** а) 8; б) 6; в) 4; г) 7. **2.17.** 2520. **2.18.** 1287. **2.19.** а) 84; б) 504. **2.20.** 380 і 190. **2.21.** 10. **2.22.** 220. **2.23.** а) 720; б) 120. **2.24** 5040. **2.25.** 35. **2.26.** а) 321440; б) 372652. **2.27.** 38760. **2.28.** а) 15504; б) 6; в) 7280; г) 30752; ґ) 126. **2.29.** 45. **2.30.** а) 2268; б) 5832; в) 12636; г) 6561; ґ) 52344. **2.31.** 315. **2.32.** а) 725760; б) 2903040. **2.33**. 12. **2.34.** а) 362880; б) 1451520. **2.35.** 18. **2.36.** 5040. **2.37.** 6. **2.38.** а) 210; б) 35. **2.39.** 120. **2.40.** а) 8^6; б) 100842; в) 43653. **2.41.** 5292. **2.42.** а) 6561; б) 3024; в) 8^3. **2.43.** 144. **2.44.** 12180. **2.45.** 43243200. **2.46.** 720. **2.47.** а) 495; б) 34650. **2.48.** 700. **2.49.** 12. **2.50.** 60. **2.51.** а) 604800; б) $10000000=10^7$. **2.52.** 504. **2.53.** 151200. **2.54.** $\dfrac{28!}{(7!)^4}$. **2.55.** 13983816. **2.56.** 32. **2.57.** 369600. **2.58.** 17280.

2.59. 135135. **2.60.** 792. **2.61.** 95040. **2.62.** 24360. **2.63.** 20. **2.64.** а) 120; б) 60; в) 10.

До § 3

3.1. $1/7$. **3.2.** $117/812$. **3.3.** 0,25. **3.4.** $28/57$; $8/95$. **3.5.** $135/323$. **3.6.** 0,6. **3.7.** $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$; $P(\overline{A}) = 0{,}6$; $P(\overline{B}) = 0{,}5$; $P(A + B) = 0{,}7$; $P(AB) = 0{,}2$. **3.8.** 0,4. **3.9.** Подія А — випадуть 3 герби і подія В — випадуть 3 цифри $P(A) = P(B) = 1/8$. Події С — випаде 2 герби і одна цифра та D — випаде 1 герб та 2 цифри рівноможливі і $P(C) = P(D) = 3/8$. **3.10.** $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{3}{8}$; $P(C) = \frac{1}{4}$; $P(D) = \frac{1}{2}$; $P(E) = \frac{7}{8}$. **3.11.** $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, A і B рівноможливі. **3.12.** $5/18$. **3.13.** $23/36$. **3.14.** $P(A) = 2/3$; $P(B) = 1/3$; $P(C) = 5/6$; $P(D) = \frac{1}{3}$. **3.15.** $5/14$. **3.16.** а) 7/22; б) 15/77; в) 3/28; г) 5/22; ґ) $\approx 0{,}28$; д) $\approx 0{,}857$. **3.17.** 5/7. **3.18.** 0,8. **3.19.** $\approx 0{,}36$. **3.20.** 1/64. **3.21.** 1/120. **3.22.** $(1/8)^8$. **3.23.** а) 2/13; б) 9/13; в) 2/13; г) 3/13. **3.24.** 0,25. **3.25.** $\approx 0{,}21$. **3.26.** $\approx 54 \cdot 10^{-6}$. **3.27.** 0,0001. **3.28.** $P(A) \approx 0{,}15$; $P(B) \approx 0{,}35$; $P(C) \approx 0{,}47$. **3.29.** 0,1. **3.30.** $\dfrac{C_6^k \cdot C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6}$. **3.31.** $1-\left(1-\dfrac{m}{n}\right)^r$. **3.32.** $\left(1/604800\right) \approx 17 \cdot 10^{-7}$. **3.33.** 0,6. **3.34.** $\approx 0{,}008$. **3.35.** $1/231$. **3.36.** а) $\frac{1}{4}$; б) $2/35$; в) $\approx 0{,}99$; г) $\approx 0{,}1$; ґ) $\approx 0{,}9$. **3.37.** Не менше від трьох. **3.38.** $\approx 0{,}105$. **3.39.** $\approx 0{,}184$. **3.40.** $1/504$. **3.41.** а) 0,003; б) $\approx 0{,}107$. **3.42.** а) $1/120$; б) $\approx 7 \cdot 10^{-6}$. **3.43.** а) $\approx 24 \cdot 10^{-6}$; б) $\approx 7 \cdot 10^{-7}$. **3.44.** $\approx 0{,}07$. **3.45.** $\approx 0{,}057$. **3.46.** а) $1/3$; б) $2/3$. **3.47.** а) $2/7$; б) $1/7$. **3.48.** $\approx 0{,}048$. **3.49.** а) $2/7$; б) $1/7$. **3.50.** $2/15$. **3.51.** $P(A) = 1/216$; $P(B) = 1/36$; $P(C) = 5/9$. **3.52.** $P(A) \approx 0{,}312$; $P(B) \approx 0{,}0024$; $P(C) \approx 0{,}461$. **3.53.** $\approx 0{,}06$. **3.54.** а) $\approx 0{,}273$; б) 0,0854; в) $\approx 0{,}064$. **3.55.** $\approx 0{,}024$. **3.56.** $\approx 0{,}0007$. **3.57.** 0,09. **3.58.** 0,637. **3.59.** $\approx 0{,}604$. **3.60.** $\approx 0{,}5$. **3.61.** 0,029. **3.62.** $\approx 0{,}134$. **3.63.** $\approx 0{,}785$. **3.64.** 0,125.

3.65. $\frac{1}{3}$. **3.66.** $\frac{2}{3}$. **3.67.** $\approx 0{,}306$. **3.68.** $\approx 0{,}306$. **3.69.** а) 0,78; б) 0,878. **3.70.** $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}72$; $P(A \cap B) = 0{,}22$; $P(A \cup B) = 0{,}8$.

До § 4

4.1. $P(A + B) = 0{,}75$; $P(AB) = 0{,}25$. **4.2.** $P\left(\overline{A+B}\right) = 0{,}25$. **4.3.** $\approx 0{,}4368$. **4.4.** $P_1 = \frac{2}{3}$; $P_2 = \frac{1}{3}$. **4.5.** $\approx 0{,}602$. **4.6.** $\approx 0{,}116$. **4.7.** $\approx 0{,}296$. **4.8.** а) $\frac{11}{19}$; б) $\frac{8}{19}$. **4.9.** $\frac{11}{20}$. **4.10.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{3}$. **4.11.** $\approx 0{,}83$. **4.12.** $\frac{5}{9}$. **4.13.** $\frac{5}{6}$. **4.14.** $P(A) = \frac{24}{35}$; $P(B) = \frac{11}{35}$. **4.15.** $\approx 0{,}5912$; 0,45. **4.16.** $\approx 0{,}205$. **4.17.** а) 0,0168; б) 0,0018; в) 0,0068. **4.18.** 0,3. **4.19.** 0,5. **4.20.** $P(A) = \frac{28}{165}$; $P(B) = \frac{4}{55}$. **4.21.** $\approx 0{,}53$. **4.22.** $\approx 0{,}0028$. **4.23.** $\frac{91}{216}$. **4.24.** $\approx 0{,}013$. **4.25.** $\approx 0{,}9431$. **4.26.** $\approx 0{,}28$. **4.27.** $\frac{1}{6}$. **4.28.** $P(A) = \frac{15}{19}$; $P(B) = \frac{11}{38}$. **4.29.** 0,23. **4.30.** $\frac{3}{10}$. **4.31.** 0,04. **4.32.** а) 0,42; б) 0,96. **4.33.** а) 0,56; б) 0,06; в) 0,94; г)0,38. **4.34.** 0,1248. **4.35.** а) 0,0314; б) 0,2636; в) 0,9674. **4.36.** 0,5. **4.37.** 0,664. **4.38.** 0,99. **4.39.** $P(A) = \frac{25}{64}$; $P(B) = \frac{6}{64}$; $P(C) = \frac{33}{64}$. **4.40.** 0,42. **4.41.** $\approx 0{,}0026$. **4.42.** 0,973. **4.43.** а) $\approx 0{,}008$; б) $\approx 0{,}000006$. **4.44.** $\approx 15 \cdot 10{-}8$. **4.45.** $\approx 0{,}7647$. **4.46.** а) 0,182; б) 0,818. **4.47.** 0,5115. **4.48.** $\approx 0{,}029$. **4.49.** $\approx 0{,}32$. **4.50.** $\approx 0{,}994$. **4.51.** $\approx 0{,}0297$. **4.52.** $\approx 0{,}061$. **4.53.** $\approx 0{,}017$. **4.54.** а) $\approx 0{,}067$; б) $\approx$ 0,00048. **4.55.** Залежні, бо $0{,}06 \neq 0{,}8 \cdot 0{,}2$. **4.56.** 0,594. **4.57.** а) 0,931; б) 0,95. **4.58.** 0,75. **4.59.** $\approx 0{,}155$. **4.60.** $P(A) = 0{,}373$; $P(B) = 0{,}114$. **4.61.** 0,13. **4.62.** $\frac{1}{3}$. **4.63.** 0,255. **4.64.** 0,996625. **4.65.** $\approx 0{,}049$. **4.66.** а) 0,2745; б) 0,9985. **4.67.** 0,15. **4.67.** $\approx 0{,}76$. **4.68.** 0,7. **4.70.** $\approx 0{,}23$. **4.71.** а) 0,35; б) 0,45; в) 0,7. **4.72.** 0,65. **4.73.** $\approx 0{,}6739$. **4.74.** $\approx 0{,}8772$. **4.75.** 0,67392. **4.76.** 0,83398. **4.77.** 0,5184. **4.78.** $1 - p_1 p_2 \ldots p_n$. **4.79.** $0{,}25 \neq 0{,}45 \cdot 0{,}4 \to$ залежні. **4.80.** $P = p^n$; $p_0 = \sqrt[n]{P_0}$. **4.81.** 0,58. **4.82.** 0,004. **4.83.** 0,69.

4.84. $\approx 0{,}91$. **4.85.** 43,2 %. **4.86.** а) 0,775; б) 0,125; $P(A)=0{,}775$; $P_B(A)=0{,}325$; $P(A)\neq P_B(A)\Rightarrow$ A та B — залежні. **4.87.** $P(A)=0{,}25$; $P(B)=0{,}48$; $P(AB)=0{,}15$; $P(A)\cdot P(B)\neq P(AB)\Rightarrow$ A та B — залежні. **4.90.** $\approx 0{,}13$. **4.91.** а) $\frac{11}{20}$; б) $\frac{41}{100}$; в) $\frac{3}{25}$; г) $\frac{4}{25}$; ґ) $\frac{12}{55}$; д) $\frac{43}{59}$; е) $\frac{4}{25}$; є) $\frac{21}{25}$. **4.92.** а) $\approx 0{,}072$; б) $\approx 0{,}522$. **4.93.** 0,94; 0,9964. **4.94.** 28. **4.95.** 1) 0,024; 2) 0,976; 3) 0,452. **4.96.** 0,03152. **4.97.** 0,9855.

До § 5

5.1. 0,987. **5.2.** а) 0,6; б) 0,58. **5.3.** 0,625. **5.4.** 0,52. **5.5.** 0,486. **5.6.** 0,2869. **5.7.** а) $\approx 0{,}267$; б) $\approx 0{,}545$. **5.8.** а) 0,57; б) $\approx 0{,}316$; в) $\approx 0{,}526$; г) $\approx 0{,}158$. **5.9.** 0,857. **5.10.** Більше ймовірно ($\approx 0{,}53$), що третій влучив. **5.11.** $\approx 0{,}605$. **5.12.** $\approx 0{,}947$. **5.13.** Однакова — $\frac{m}{n}$. **5.14.** 0,3231. **5.15.** а) 0,85; б) 0,154. **5.16.** $\approx 0{,}68$. **5.17.** а) 0,1759; б) 0,26. **5.18.** $\frac{1}{K+L}\left(\frac{Kn}{N}+\frac{Lm}{M}\right)$. **5.19.** 0,4789. **5.20.** $\approx 0{,}6481$. **5.21.** а) 0,041; б) 0,425. **5.22.** 0,00348. **5.23.** а) 0,188; б) 0,473. **5.24.** $\approx 0{,}88$. **5.25.** $\approx 0{,}83$. **5.26.** $\approx 0{,}9273$. **5.27.** а) $5/8$; б) $7/24$; в) $23/30$. **5.28.** $2/7$. **5.29.** $4/13$. **5.30.** $\frac{p_1(1-P_1)}{\sum_{i=1}^{3} p_i(1-P_i)}$. **5.31.** 0,84. **5.32.** $\frac{pp_1}{pp_1+(1-p)p_2}$. **5.33.** 70 %. **5.34.** 0,37. **5.35.** $\approx 0{,}2857$. **5.37.** 0,63. **5.38.** 0,545.

До § 6

6.1. $P_{20}(4)\approx 0{,}22098$; $P_{20}(5;20)\approx 0{,}1587$. **6.2.** а) $\approx 0{,}2601$; б) $\approx 0{,}7009$; в) $\approx 0{,}5593$. **6.3.** а) $\approx 0{,}7374$; б) 0,0317. **6.4.** а) $\approx 0{,}147$; б) $256\cdot 10^{-8}$; в) 0,168; г) 0,9896; ґ) 0,9988; д) $\approx 0{,}056$; е) 0,999997. **6.5.** $\approx 0{,}9176$. **6.6.** $\approx 0{,}0879$. **6.7.** а) 0,0729; б) 0,0081; в) 0,0081. **6.8.** а) 0,029403; б) 0,000297; в) 10^{-6}; г) 0,970299. **6.9.** $\approx 0{,}488$. **6.10.** $\approx 0{,}3529$. **6.11.** а) три з чотирьох; б) не менше від 3 із 4. **6.12.** а) 0; б) 0; в) 0,0795; г) 0,0007; ґ) 0; д) 0,7874. **6.13.** $P_3(0)=0{,}027$; $P_3(1)=0{,}189$; $P_3(2)=0{,}441$; $P_3(3)=0{,}343$, $m_0=2$. **6.14.** а) 0,2731; б) 0,9959. **6.15.** $\approx 0{,}0003$. **6.16.** $\approx 0{,}721$. **6.17.** а) 0,1115; б) 0,0001; в) 0,006; г) 0,834; ґ) 0,954; д) 0,4723; е) 0,9999. **6.18.** 0,3.

6.19. ≥ 114. **6.20.** $p \approx 1$; $n \geq 1$. **6.21.** $n \geq 3$. **6.22.** $n \geq 8$. **6.23.** $\approx 0{,}2966$. **6.24**. $\approx 0{,}4996$. **6.25.** $P(A) = (1 - rp)^n$; $P(B) = \frac{n(n-1)}{2}(rp)^2(1 - rp)^{n-2}$; $P(C) = (1 - rp)^{n-1}(1 + nrp - rp)$. **6.26.** $m_0 = 9$; $P_{12}(9) \approx 0{,}2362$. **6.27.** $\approx 0{,}1486$. **6.28.** $\approx 0{,}8759$. **6.29.** $m_0 = 8$. **6.30.** $m_0 = 7$ міс; 101,95 грн. **6.31.** $n = 421$. **6.32.** $n = 37$. **6.33.** $m_0 = 19$. **6.34.** $m_0 = 8$. **6.35.** $n = 51$. **6.36.** $69 \leq n \leq 79$. **6.37.** $m_0 = 11$. **6.38.** $\frac{1}{3} < q < 1$. **6.39.** 0,06. **6.40.** $n \geq 28$. **6.41.** а) 3; б) 0,2306. **6.42.** а) 0,0798; б) 0,0484. **6.43.** а) $\approx 0{,}348$; б) $\approx 0{,}8948$. **6.44.** а) 0; б) 0,004; в) 0,9938; г) 0,99725; ґ) 0,6853; д) 0; е) 0. **6.45.** а) 0; б) 0,0896; в) 1; г) 0,0011; ґ) 0,0011. **6.46.** 0,6845. **6.47.** а) 0,0036; б) 0,9951; в) 0,0001; г) 0,9902. **6.48.** $\approx 0{,}0389$. **6.49.** а) 0,15629; б) 0,01832; в) 0,00529; г) 0,62885; ґ) 0,43348; д) 0,54703. **6.50.** а) 0,93803; б) 0,0005; в) 0,16062. **6.51.** а) $\approx 0{,}002$; б) 0,996. **6.52.** 0,00005. **6.53.** 0,16062. **6.54.** $\approx 0{,}1388$. **6.55.** $\approx 0{,}95957$. **6.56.** а) 0,13534; б) 0,03609; в) 0,01656; г) 0,9989; ґ) 0,30676. **6.57.** $\approx 0{,}8146291$; за формулою Пуассона 0,81873. **6.58.** 0,0803. **6.59.** а) 0,06131; б) 0,00007; в) 0,01899; г) 0,9994; ґ) 0,00234. **6.60.** 1) а) $\approx 0{,}1025$; б) $\approx 0{,}6089$. 2) 101. **6.61.** 0,9744. **6.62.** 0,05. **6.63.** не менше ніж 77. **6.64.** 0,2112. **6.65.** $\varepsilon = 0{,}056$. **6.66.** $538 \leq m \leq 662$. **6.67.** ≥ 1886. **6.68.** 0,2302. **6.69.** 127. **6.70.** $1 \leq n \leq 19$. **6.71.** 158. **6.72.** $0 \leq n \leq 8$. **6.73.** а) $6974 \leq n \leq 9419$; б) $7359 < n < 8697$. **6.74.** 0,6212. **6.75.** 6147. **6.76.** $15 \leq m \leq 34$. **6.77.** $144 \leq m \leq 190$. **6.78.** а) 0,29; б) 0,44; в) 0,21; г) 0,06. **6.79.** а) 0,144; б) 0,37; в) 0,356; г) 0,112; ґ) 0,018. **6.80.** 0. **6.81.** 0,00883.

До § 7

7.1. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0{,}1, & 0 < x \leq 1; \\ 0{,}3, & 1 < x \leq 2; \\ 0{,}6, & 2 < x \leq 3; \\ 0{,}8, & 3 < x \leq 4; \\ 0{,}9, & 4 < x \leq 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$ $P(x > 1) = 0{,}7$.

7.2. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}1, & 0<x\le 1;\\ 0{,}2, & 1<x\le 2;\\ 0{,}5, & 2<x\le 3;\\ 0{,}7, & 3<x\le 4;\\ 0{,}9, & 4<x\le 5;\\ 0{,}96, & 5<x\le 6;\\ 1, & x>5.\end{cases}$ $P(X\ge 3)=0{,}5;$ $P(X\le 4)=0{,}9.$

7.3. а) $p = 0{,}4$; $P(-3 < X < 2) = 0{,}8$; $M_0 = -1$; $M(X) = -0{,}2$; $D(X) = 3{,}26$; $\sigma \approx 1{,}81$; $A_s = -0{,}16$; $E_s = -0{,}61$;

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ 0{,}1, & -4<x\le -1;\\ 0{,}5, & -1<x\le 0;\\ 0{,}6, & 0<x\le 1;\\ 0{,}9, & 1<x\le 2;\\ 0{,}95, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

7.4. $P(-3<X<2)=\frac{1}{3};$ $M(X)=3\frac{1}{12};$ $D(X) = 7{,}1$; $\sigma(X) \approx 2{,}65$; $A_s = -0{,}27$; $E_s = 0{,}56$;

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{1}{12}, & -2<x\le 0;\\ \frac{1}{4}, & 0<x\le 1;\\ \frac{1}{3}, & 1<x\le 2;\\ \frac{5}{12}, & 2<x\le 4;\\ \frac{2}{3}, & 4<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

7.5. 2-й спосіб. **7.6.** а)

x	– 6	– 4	0	4
p_i	0,2	0,4	0,2	0,2

$M(X) = –2$; $D(X) = 12{,}8$; $\sigma \approx 3{,}58$.
7.7.

x	2	4	5	7
p	0,4	0,1	0,1	0,4

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0{,}4, & 2 < x \le 4; \\ 0{,}5, & 4 < x \le 5; \\ 0{,}6, & 5 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

$M(X) = 4{,}5$; $D(X) = 5{,}05$; $\sigma(X) \approx 2{,}24$.

7.8. к = 1;

0	60	210	270
0,98	0,01	0,01	0

к = 2

0	60	210	270
0,9604	0,0196	0,0196	0,0004

$M_1(X) = 2{,}7$; $M_2(X) = 5{,}4$.

7.9. $$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}1, & 0 < x \le 10; \\ 0{,}3, & 10 < x \le 20; \\ 0{,}65, & 20 < x \le 30; \\ 0{,}85, & 30 < x \le 40; \\ 0{,}95, & 40 < x \le 50; \\ 1, & x > 50. \end{cases} \quad P(X > 30) = 0{,}35.$$

7.10. а) $a=\frac{3}{8}$; $P(-3<X<5)=1$; $P(5)=0$; $M_0=2$; $M_e=\sqrt[3]{4}$; $M(X)=1{,}5$; $D(X)=0{,}15$; $\sigma\approx 0{,}387$; $A_s=-0{,}86$; $E_s=-0{,}095$;

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x^3}{8}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

в) $a=3$; $P(-3<X<5)=\frac{e^{30}-1}{e^{30}}$; $P(5)=0$; $M_0=0$; $M_e=\log_2 e^6$; $M(X)=\frac{1}{6}$; $D(X)=\frac{1}{36}$; $\sigma\approx\frac{1}{6}$;

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-6x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

г) $a=5$; $P(-3<X<5)\approx 1$; $P(5)=0$; $M_0=0$; $M_e=\frac{\ln 2}{5}$; $M(X)=\frac{1}{5}$; $D(X)=\frac{1}{25}$; $\sigma\approx\frac{1}{5}$;

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-5x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

г) $a=\frac{1}{8}$; $P(-3<X<5)=\frac{3}{8}$; $P(5)=0$; $M_e=6$; $M(X)=6$; $D(X)=5\frac{1}{3}$; $\sigma\approx 2{,}33$;

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \frac{x-2}{8}, & 2<x\le 10;\\ 1, & x>10.\end{cases}$$

д) $a=\frac{1}{3}$; $P(-3<X<5)=\frac{5}{18}$; $P(5)=0$; розподіл антимодальний; $M_e=9$; $M(X)=9$; $D(X)=27$; $\sigma\approx 3\sqrt{3}$; $A_s=0$;

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x}{18}, & 0\le x\le 18;\\ 1, & x>18.\end{cases}$$

е) $a=\dfrac{6}{5}$; $P(-3<X<5)=1$; $P(5)=0$; $M_0=2$; $M_e\approx 1{,}7$; $M(X)=1{,}7$; $D(X)=0{,}05$; $\sigma\approx 0{,}224$;

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{1}{15}\left(2x^3-3x^2+1\right), & 1<x\le 2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

є) $a=\dfrac{3}{128}$; $P(-3<X<5)=1$; $P(5)=0$; $M_0=3$; $M_e\approx 1{,}5$; $M(X)=0{,}59$; $D(X)=0{,}5167$; $\sigma\approx 0{,}72$;

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{1}{128}\left(9x^2-x^3+21x+11\right), & -1<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

ж) $a=5$; $P(-3<X<5)=0{,}5762$; $P(5)=0$; $M_0=1$; $M_e=1$; $M(X)=1$; $D(X)=25$; $\sigma\approx 5$; $A_s=0$; $E_s=0$;

$$F(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(x-1)^2}{50}}dx.$$

з) $a=49$; $P(-3<X<5)=0{,}2754$; $P(5)=0$; $M_0=-\,6$; $M_e=-\,6$; $M(X)=-\,6$; $D(X)=49$; $\sigma\approx 7$; $A_s=0$; $E_s=0$;

$$F(x)=\frac{1}{7\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(x+6)^2}{98}}dx.$$

7.11. $a=\dfrac{20}{\pi}$. **7.12.** 1) $a=1$; $c=0$; 2) $P(-1<X<4)=1$; 3) $P(7)=0$; 4) *розподіл антимодальний*; 5) $M_e=0{,}5$; 6) $M(X)=0{,}5$; 7) $D(X)=\dfrac{1}{12}$; 8) $\sigma=0{,}289$; 9) $A_s=0$; 10) $E_s=-1{,}1(9)$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1, & 0<x<1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

7.13. $a = 1$; $M(X) = 2$; $D(X) = 0{,}25$; $\sigma(X) = 0{,}5$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ x-1, & 1<x\le 2;\\ 3-x, & 2<x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{(x-1)^2}{2}, & 1<x\le 2;\\ \dfrac{-x^2+6x-8}{2}, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

7.14. $a = 0{,}5$; $M(X) = 5{,}3$; $D(X) = 0{,}16$; $\sigma(X) = 0{,}4$;

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -0{,}5;\\ x+0{,}5, & -0{,}5<x\le 0;\\ 0{,}5(x+1), & 0<x\le 1;\\ 5-4x, & 1<x\le 1{,}25;\\ 0, & x>1{,}25.\end{cases}$$

7.15.

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3$

7.16.

x_i	1	2	3	4	5	0
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$\left(\frac{5}{6}\right)^5$

7.17.

x_i	–80	20	920	4920
p_i	0,87	0,10	0,02	0,01

$M(X) = 0$, $D = 264600$.

7.18.

x_i	6000	5100	5000	2000	1100	1000	200	100	0
p_i	0,0004	0,0020	0,0174	0,0004	0,0040	0,0348	0,0100	0,1740	0,7540

7.19.

x_i	0	50	100	150
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

7.20.

x_i	–8	–1	6	13	20
p_i	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

7.21. $M(X) = 3{,}1$. **7.22.** 2 грн. **7.23.** $M(X) = 0{,}335$. Втратить до 1 грн — 0,165 грн. **7.24.** 2,9 од.

До § 8

8.1.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$	$10\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{9}$	$45\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{8}$	$120\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{7}$	$210\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{6}$

5	6	7	8	9	10
$252\left(\frac{1}{6}\right)^{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{5}$	$210\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{4}$	$120\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{7}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$	$45\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{8}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2}$	$10\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{9}\cdot\frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

8.2. Вар. 3 $n = 5$; $p(A) = 0{,}1$; $q(A) = 0{,}9$.

a

0	1	2	3	4	5
$(0{,}9)^5$	$5\cdot 0{,}1\cdot(0{,}9)^4$	$10\cdot(0{,}1)^2\cdot(0{,}9)^3$	$10\cdot(0{,}1)^3\cdot(0{,}9)^2$	$5\cdot(0{,}1)^4\cdot 0{,}9$	$(0{,}1)^5$

б

1	2	3	4	5	0
0,1	$0{,}1 \cdot 0{,}9$	$0{,}1 \cdot 0{,}9^2$	$0{,}1 \cdot (0{,}9)^3$	$0{,}1 \cdot (0{,}9)^4$	$(0{,}9)^5$

в

1	2	3	4	5	0
0,9	$0{,}9 \cdot 0{,}1$	$0{,}9 \cdot (0{,}1)^2$	$0{,}9 \cdot (0{,}1)^3$	$0{,}9 \cdot (0{,}1)^4$	$(0{,}1)^5$

8.3. $P(m = 0) = (0{,}86)^8$; $P(m = 1) = 8 \cdot 0{,}14 \cdot (0{,}81)^7$; $P(m = 2) = 28 \cdot (0{,}14)^2(0{,}86)^6$; $P(m = 3) = 56 \cdot (0{,}14)^3(0{,}86)^5$; $P(m = 4) = 70 \cdot (0{,}14)^4(0{,}86)^4$; $P(m = 5) = 56 \cdot (0{,}14)^5(0{,}86)^3$; $P(m = 6) = 28 \cdot (0{,}14)^6(0{,}86)^2$; $P(m = 7) = 8 \cdot (0{,}14)^7 0{,}86$; $P(m = 8) = (0{,}14)^8$. **8.4.** $p = 0{,}6$ або $p = 0{,}4$. **8.5.** $M(X) = 9$, $D(X) = 0{,}9$. **8.6.** $p(A) = 0{,}59$; $q(A) = 0{,}41$.

0	1	2	3
$(0{,}41)^9$	$9 \cdot (0{,}41)^8\, 0{,}59$	$45\, (0{,}41)^7\, (0{,}59)^2$	$84\, (0{,}41)^6\, (0{,}59)^3$

8.7. $M(X) \approx 6{,}432$. **8.8.** $P_{10}(m \geq 8) \approx 0{,}055$. **8.9.** а) $P(X < 3) = 0{,}42319$; б) $P(X > 0) = 0{,}95021$. **8.10.** $\lambda = \frac{1}{3}$ $\mathrm{P_t}(m) = \frac{(\lambda\, \mathrm{t})^m e^{-\lambda t}}{m!}$; $t = 1$; $m = 1$; $p_1(1) = 0{,}222$; 2) $P_1(m \geq 3) = 1 - P_1(0) - P_1(1) - P_1(2) = 1 - 0{,}9963 \approx 0{,}0037$.

8.11. $\lambda = 8$; $P(8) = \frac{8^8 \cdot e^{-8}}{8!} \approx 0{,}1396$; $P(3) = \frac{(4)^3 \cdot e^{-4}}{3!} \approx 0{,}1954$.
8.12. а) $0{,}03^{i-1} \cdot 0{,}97$, $i = 1,2, \ldots$; б) $0{,}97^{i-1} \cdot 0{,}03$, $i = 1,2, \ldots$. **8.13.** $M(X) = 1$. **8.14.**

0	1	2	3	4	5	6	7
0,4782969	0,3720087	0,1240029	0,0229635	0,0025515	0,0001701	0,0000063	0,0000001

8.15. $D(X) = 3{,}2$. **8.16.** $M(X) = 1\frac{3}{7}$; $D(X) = \frac{30}{49}$. **8.17.**

0	1	2	3	4
$0{,}0019531 \cdot 10^{-9}$	$0{,}00333972 \cdot 10^{-7}$	0,000000025	0,0000001	0,0000315

5	6	7	8	9
0,0006093	0,0077184	0,01628503	0,298539	0,6302491

8.18. Гіпергеометричний розподіл; $M(X) = 0{,}599988$; $D(X) = 0{,}4849$; $p = 0{,}5$. **8.19.** $P(X \le 2)$ $P(X \ge 13)$. **8.20.**

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

8.21. $p = \frac{2}{3}$. **8.22.**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,0025	0,0207	0,0763	0,1665	0,2384	0,2340	0,1596	0,0746	0,0229	0,0042	0,0003

8.23. 125. **8.24.**

0	1	2	3	4	5
0,16807	0,36015	0,3087	0,1323	0,02835	0,00243

8.25. $M(X) = 2{,}5$; $D(X) = 1{,}25$; $\sigma(X) = 1{,}118$. **8.26.** 1) $n = 5$; $p = 0{,}4$.

0	1	2	3	4	5
0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

3) $P(2 \le X \le 4) = 0{,}6528$; 4) $M(X) = np = 5 \cdot 0.4 = 2$; $D(X) = npq = 1{,}2$; 5) $P(m \ge 1) = 1 - q^5 = 0{,}98976$. **8.27.**

x_i	0	1	2
p_i	0,015	0,22	0,765

$M(X) = 1{,}75$; $D(X) = 0{,}2175$; $\sigma(X) = 0{,}466$.

8.30. $2\frac{\sum m_i k_i}{\sum m_i}$; **8.31.** 87.

8.32.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,8	0,16	0,032	0,0064	0,0016

$M(X) = 1{,}25$; $D(X) = 0{,}3125$; $\sigma(X) = 0{,}559$; $n \geq 3$.

8.33.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,778688	0,203136	0,017664	0,000512

$M(X) = 0{,}24$; $D(X) = 0{,}21$; $\sigma(X) = 0{,}46$.

8.34.

x_i	0	5	10	50	100
p_i	0,939	0,030	0,020	0,010	0,001

$M(X) = 0{,}95$; $D(X) = 43{,}6$; $\sigma \approx 6{,}6$.

8.35. $M(X) = 1{,}5$; $D(X) = 1{,}05$; $\sigma(X) \approx 0{,}025$. **8.36.** $1 - 0{,}97^{100} \approx \approx 0{,}9524$. **8.37.** $M(X) = 7{,}6$; $D(X) = 0{,}38$; $\sigma(X) \approx 0{,}62$. **8.38.** $n = 15$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $P_{15}(m \geq 10) \approx 0{,}0001$.

8.39.

x_i	1	2	3
p_i	0,8	0,16	0,04

$M(X) = 1{,}24$; $D(X) = 0{,}2624$; $\sigma = 0{,}151225$.

8.40.

1	2	3	4
0,05	0,0475	0,045125	0,857375

8.41. $P(m \geq 2) = 0{,}0902$. **8.42.** Гіпергеометричний розподіл **8.43.** Біноміальний розподіл. **8.44.** Біноміальний розподіл. **8.45.** Геометричний розподіл. **8.46.** Геометричний розподіл**.** **8.47.** Застосувати розподіл Пуассона.

До § 9

9.2. 0,96.

9.3. а) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 100,\\ \dfrac{1}{400}, & 100<x\le 500,\\ 0, & x>500.\end{cases}$ б) $P(X<200)=\int\limits_{100}^{200}\dfrac{dx}{400}=\dfrac{1}{4}$;

в) $P(X>450)=\dfrac{1}{8}$. **9.4.** 1) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$ 2) $P(X>0{,}5)=\dfrac{3}{4}$.

3) $P\left(X<\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{8}$. 4) $P(30<X<50)=\dfrac{1}{6}$. **9.5.** $\lambda = 0{,}8$;

$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0{,}8e^{-0{,}8x}, & x\ge 0;\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-0{,}8x}, & x\ge 0;\end{cases}$ $M(X)=\dfrac{1}{0{,}8}=\dfrac{5}{4}$;

$D(X)=\dfrac{1}{0{,}64}=\dfrac{25}{16}$; $\sigma(X)=\dfrac{5}{4}$.

9.6. $N(0,1)$; $\Phi(2)+\Phi(1{,}5)=0{,}91044$. **9.7.** $\Phi(3)-\Phi(2)=0{,}0226$. **9.8.** $\Phi(1{,}5)+\Phi(\infty)=0{,}43319+0{,}5=0{,}93319$. **9.9.** $\Phi(\infty)+\Phi(1{,}25)=0{,}5+0{,}39435=0{,}89435$. **9.10.** $1-P(|X|<4)=1-2\cdot 0{,}4999=0{,}0002$. **9.11.** а) 0,88493; б) 0,018; в) 0,89854; г) 0,8904; **9.12.** 1,57. **9.13.** а) 1,18; б) –1,01; **9.14.** а) –0,81; б) 1,4. **9.15.** а) 0,6827; б) 0,1586; в) 0,1586. **9.16.** $b=8$; $c=16$; $P(2<X<7)=0{,}3345$. **9.17.** 0,03836; **9.18.** а) $x=7{,}62$; б) $x=1{,}62$. **9.19.** $x=11{,}7$; $x=8{,}7$. **9.20.** а) $x=11{,}6$; б) 6,2. **9.21.** $x_1=7{,}95$; $x_2=10{,}05$. **9.22.** а) $P(X>60)=0{,}0242$; б) $P(X<45)=0{,}1577$. **9.23.** а) $R^{-\lambda T}$; б) 0; в) $1-e^{-3\lambda}$.

9.24. $F(t)=1-e^{-\frac{1}{60}t}$; $F(120)=1-e^{-\frac{120}{60}}=1-e^{-\frac{1}{2}}\approx 0{,}3935$.

9.25. $M(T)=T$; $D(T)=T^2$; $\sigma(T)=T$; $f(t)=\dfrac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$, $t\ge 0$;

$F(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}$, $t\ge 0$. **9.26.** $M(X)=20$ с; $\sigma(X)=0{,}1925$.

9.27. 1) $P(2550\le X\le 3000)=\dfrac{1}{6}$; 2) $P(X>4000)=\dfrac{1}{3}$;

3) $P(X=2500)=0$.

9.28. 1) $P(55 < X \le 60) = \frac{1}{6}$; 2) $P(30 \le X \le 40) = \frac{1}{3}$; 3) $P(X = 37{,}33) = 0$. **9.29.** $M(X) = 0$; $\sigma(X) = 0{,}2887$.

9.30. 1) $P(150 < X \le 175) = \frac{5}{13}$; 2) $P(120 \le \mathrm{X} \le 160) = \frac{8}{13}$; 3) 123 T.

9.31. 1) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{x}{5}, & 0 < x \le 5; \\ & x > 5. \end{cases}$ 2) $P(3 < X < 5) = \frac{2}{5}$;

3) $P\left(0 < X < \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{20}$; 4) $P(1 < X < 3) = \frac{2}{5}$.

9.32. 1) $P(6 < X < 16) = 0{,}7745$; 2) $P(|X - a| < 10) = 0{,}9876$. **9.33.** 5,720 кг. **9.34.** $x_0 = 19718$. **9.35**. 0,6826. **9.36.** 784. **9.37.** 1) $P(5 < X < 10) = 0{,}7806$; 2) $P(X > 7) = 0{,}33$; 3) $P(X < 7) = 0{,}0749$; 4) $X > 8{,}35$. **9.38.** $M(X) = 5{,}829$; $\sigma(X) = 2{,}4138$. **9.39.** 1) $P(X > 12000) = 0{,}2033$; 2) $P(X < 9000) = 0{,}3372$. **9.40.** 0,02275; 0,97725; 0,5375. **9.41.** 1) 67,08; 86,52; 2)0,0038; 3) 0,9772; 4) 0,6568. **9.42.** 0,40129; ≈ 58 %; 0,02275. **9.43.** 1) 11,5 %; 2) 7,65 год. **9.44.** 1) 69 %; ≈ 11,6 %; 2) $P(7 \le X \le 9) = 0{,}3559$; 3) 1,6; 4) 5,56; 3,8 год. **9.45.** 1) 0,2643; 2) 0,0301; 3) 13364; 9693. **9.46.** 1) ≈ 16 %; 33,36 %; 2) ≈ 19 %; 33,14 %; 3) ≈ 4 %; 4,36 %; 4) ≈ 33. **9.47.** 132,96. **9.48.** $e^{-\frac{1}{24}}$. **9.49.** $e^{-\frac{3}{2}}$. **9.50**. 4 дні; 0,8825; 0,149. **9.51**. 0,488. **9.52**. 23 %.

До § 10

10.1. $M(Y) = 3{,}3$; $D(Y) = 41{,}61$. **10.2.** $M(Y) = 4{,}44$; $D(Y) = 199{,}81$; $\sigma(Y) = 14{,}14$. **10.3.** $M(Y) = 0{,}25$; $D(Y) = 0{,}4625$; $\sigma(Y) = 0{,}68$. **10.4.** $M(Y) = 2{,}1$; $D(Y) = 0{,}69$; $\sigma(Y) = 0{,}83$. **10.5.** $M(Y) = -0{,}4$; $D(Y) = 0{,}29$. **10.6.** $M(Y) = 14{,}333$; $D(Y) = 54{,}905$. **10.7.** $a = \frac{1}{6}$; $M(Y) = 1{,}8$; $D(Y) = 0{,}01$; $\sigma(Y) = 0{,}1$. **10.8.** $M(X) = -2{,}5$.

10.9. $M(Y) = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{4}$; $D(Y) = \frac{b^7 - a^7}{7(b-a)} - \left(\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{4}\right)^2$.

10.10.

y_i	–3	0	12
p_i	0,4	0,5	0,1

10.11.

y_i	–8	–2	8
p_i	0,5	0,3	0,2

10.12.

y_i	0	1	2
p_i	0,3	0,3	0,4

10.13.

y_i	1	3	5
p_i	0,3	0,4	0,3

10.14. $g(y)=\begin{cases}0, & y\le -1;\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1;\\ 0, & y\ge 1.\end{cases}$

10.15. $g(y)=\dfrac{4}{\pi(16+y^2)},\ -\infty<y<+\infty$.

10.16. $g(y)=\begin{cases}0, & y\le -1;\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1;\\ 0, & y\ge 1.\end{cases}$

10.17. $g(y)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-12)^2}{32}},\ -\infty<y<+\infty$.

10.18. $g(y)=\dfrac{1}{\sigma y^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2y^2}},\ y\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

10.19. $g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<y<+\infty,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

10.20. $g(y)=\begin{cases}0, & y\le 1;\\ \dfrac{3}{y^4}, & 1<y<+\infty;\end{cases}$ $M(Y)=1{,}5$; $D(Y)=0{,}75$.

10.21. $g(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ 1, & 0<y\le 1;\\ 0, & y>1;\end{cases}$ $M(Y)=0{,}5$; $D(Y)=\dfrac{1}{12}$.

10.22. $a=\dfrac{1}{21}$; $g(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \dfrac{2}{21}(y+1)^5, & 0<y\le 1;\\ 0, & y>1;\end{cases}$ $M(Y)=\dfrac{107}{147}$; $D(Y)=0{,}05$.

10.23. $a=\dfrac{3}{52}$; $g(y)=\begin{cases}0, & y\le 1;\\ \dfrac{3}{104\sqrt[4]{y}}, & 1<y\le 81;\\ 0, & y>81;\end{cases}$ $M(Y)=36{,}03$.

10.24. $g(y)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8\pi^2}}$, $-\infty<y<+\infty$.

До § 11

11.1.

y	x		
	0	1	p_y
0	0,02	0,18	0,2
1	0,08	0,72	0,8
p_x	0,1	0,9	1

$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}1, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ $F(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ 0{,}2, & 0<y\le 1;\\ 1, & y>1.\end{cases}$

$F(x,y)$	$x \le 0$	$0 < x \le 1$	$x > 1$
$y \le 0$	0	0	0
$0 < y \le 1$	0	0,02	0,2
$y > 1$	0	0,1	1

11.2. 1)

Y	X	
	0	1
0	1/6	1/3
1	1/3	1/6

2)

X	0	1
p_x	1/2	½

3)

Y	0	1
p_y	1/2	½

4) $K_{XY} = \frac{1}{12}$, залежні.

11.3. а)

Y	X				
	0	1	2	3	p_y
0	0,216	0,0864	0	0	0,30224
1	0	0,3456	0,288	0,064	0,6976
p_x	0,216	0,432	0,288	0,064	1

б) $M(X) = 1,2$; $M(Y) = 0,6976$; $r_{XY} = 0$; г) 0,936.

11.4.

X	1	2	3
p_x	0,3	0,5	0,2

Y	1	2
p_y	0,6	0,4

$r_{XY} = 0,11662$.

11.6. $15\cdot e^{-3y-5x}$. **11.7.** $\frac{1}{72}$. **11.8.** $\frac{1}{52}$. **11.9.** $a=\frac{3}{28}$.

11.10. $f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin D\\ \frac{1}{7}, & (x,y)\in D\end{cases}$; $f_1(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{2x}{7}, & 0<x\le 1;\\ \frac{2}{7}, & 1<x\le 4;\\ 0, & x>4\end{cases}$.

$$f_2(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \frac{4}{7}-\frac{y}{14}, & 0<y\le 2;\\ 0, & y>2\end{cases}.$$

11.11. $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$. **11.12.** $f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin\Omega;\\ 3^{-x-y}\cdot\ln^2 3, & (x,y)\in\Omega.\end{cases}$

11.13. $a=\frac{1}{2}$; $K_{XY}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}-1$.

11.14. $a=20$; $F(x,y)=\frac{20}{\pi^2}\left(arctg\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\left(arctg\frac{y}{5}+\frac{\pi}{2}\right)$; $r_{XY}=0$.

11.15. $f(x,y)=20\cdot e^{-4x-5y}$; $r_{XY}=0$.

11.16. $K_{XY}=0$; $P(-2<x<1;\quad -1<y<3)=\frac{1}{4}$.

11.17. $f_1(x)=\frac{x\left(x^2-4\right)}{4}$; $f_2(y)=\frac{y^3}{4}$; $f\left(X/Y\right)=-\frac{2x}{y^2}$;

$f_1(x)\ne f\left(X/Y\right)$ — X та Y залежні.

11.13. $a=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$; $M\left(X/Y\right)=\frac{y\sqrt{3}}{4\pi}$; $M\left(Y/X\right)=\frac{y\sqrt{3}}{4\pi}$.

До § 12

12.1. $P\left(\left|X-M(X)\right|<4\sigma\right)\geq\frac{15}{16}$. **12.2.** $\varepsilon\geq 0{,}3$.

12.3. $P\left(\left|X-M(X)\right|<10\right)\geq 0{,}84$. **12.4.** $P\leq 0{,}2667$. **12.5.** $P\leq 0{,}88$. **12.6.** $P\geq 0{,}3333$. **12.7.** $P\geq 0{,}4$. **12.8.** $P\geq 0{,}625$. **12.9.** $P\geq 0{,}9$. **12.10.** $P\geq 0{,}9925$. **12.11.** 1) $P\geq 0{,}9424$; 2) $P\geq 0{,}64$. **12.12.** 1) $P\geq 0{,}8$; 2) $P\leq 0{,}8$. **12.13.** $P>0{,}685$. **12.14.** 1) $P\geq 0{,}75$; 2) $P=0{,}9544$. **12.15.** $P\geq 0{,}9391$. **12.16.** 1) $P\geq 0{,}8922$; 2) $P\geq 0{,}724$. **12.17.** $P\geq 0{,}9778$. **12.18.** $P\geq 0{,}92$. **12.19.** $P\geq 0{,}94$. **12.20.** $n\geq 800$. **12.21.** $P\geq 0{,}97$. **12.22.** $P\geq 0{,}9667$. **12.23.** $P\geq 0{,}95$. **12.24.** $P\geq 0{,}95$. **12.25.** а) $P\geq 0{,}9653$; б) $P\geq 0{,}8612$. **12.26.** $P\geq 0{,}8021$. **12.27.** 1) $P\geq 0{,}84$; 2) $P=0{,}9876$. **12.28.** 1) $P\geq 0{,}82$; 2) $P=0{,}9818$. **12.29.** $P\geq 0{,}7224$. **12.30.** $P\geq 0{,}79$.

12.31. $0{,}87<\frac{m}{n}<0{,}93$; $870<m<930$. **12.32.** $0{,}985<\frac{m}{n}\leq 1$; $986<m\leq 1000$. **12.33.** $n\geq 79$. **12.34.** 1) $n\geq 2000$; 2) $n\geq 385$. **12.35.** 1) $n\geq 278$; 2) $n\geq 54$. **12.36.** $n\geq 500$. **12.37.** $P\geq 0{,}91675$. **12.38.** $P\geq 0{,}5216$. **12.39.** $49\leq m\leq 131$. **12.40.** $n\geq 70$. **12.41.** 0,9884. **12.42.** 0,9984. **12.43.** 0,0049. **12.44.** $n\geq 972$.

12.45. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{20\pi}}e^{-\frac{(x-60)^2}{20}}, -\infty<x<+\infty$.

12.46. $f(y)=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-\frac{(y-20)^2}{10}}, -\infty<y<+\infty$.

РОЗДІЛ 2

До § 1

1.1. Варіаційний ряд: 7,9; 7,9; 8,0; 8,0; 8,0; 8,0; 8,0; 8,0; 8,0; 8,0; 8,0; 8,0; 8,0; 8,0; 8,1; 8,1; 8,1; 8,2; 8,2; 8,2.

Статистичний ряд:

x_i	7,9	8,0	8,1	8,2
n_i	2	12	3	3

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x \le 7{,}9;\\ 0{,}1, & 7{,}9 < x \le 8{,}0;\\ 0{,}7, & 8{,}0 < x \le 8{,}1;\\ 0{,}85, & 8{,}1 < x \le 8{,}2;\\ 1, & x > 8{,}2.\end{cases}$$

1.9.

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x \le 10;\\ \dfrac{1}{111}, & 10 < x \le 30;\\ \dfrac{4}{111}, & 30 < x \le 50;\\ \dfrac{14}{111}, & 50 < x \le 70;\\ \dfrac{44}{111}, & 70 < x \le 90;\\ \dfrac{104}{111}, & 70 < x \le 90;\\ 1, & x > 90.\end{cases}$$

До § 2

2.1. $Q_1 = 4$, $Q_2 = 5$, $Q_3 = 8$, $\Delta Q = 4$. **2.2.** $D_3 = 22{,}5$; $D_8 = 30{,}5$. **2.3.** а) $Q_1 = 41$, $Q_2 = M_e = 64$, $Q_3 = 80$, $\Delta Q = 39$; б) $\bar{x}_в = 60{,}61$; в) $A_s = -0{,}18$, розподілу властива невелика лівобічна асиметрія. **2.4.** $D_3 = 24$; $D_9 = 36$. **2.5.** а) $Q_1 = 121$, $Q_2 = M_e = 125$, $Q_3 = 129$, $P_{10} = 110{,}5$, $P_{65} = 128$; б) $\bar{x}_в = 125$. **2.6.** а) $M_e = 10$, $Q_1 = 2{,}2$, $Q_3 = 12{,}5$, $P_{55} = 11{,}2$, $P_{80} = 13{,}6$; б) $\Delta Q = 10{,}3$, $\Delta D = 16{,}7$. **2.7.** а) $M_e = 75{,}7$, $\Delta Q = 8{,}1$; б) $\bar{x}_в = 76{,}6$, $\sigma_в = 8{,}24$. **2.8.** $D_3 = 8$; $D_6 = 15{,}5$. **2.9.** $Q_1 = 13$, $Q_2 = 20$, $Q_3 = 24$, $\Delta Q = 11$. **2.10.** $Q_1 = 12{,}2$; $Q_2 = M_e = 14{,}1$; $Q_3 = 15{,}3$; $\Delta Q = 3{,}1$. **2.11.** $D_3 = 7$; $D_6 = 17{,}5$. **2.12.** а) $\bar{x}_B = 5$, $D_B = 5{,}75$; б) $\bar{x}_B = 5$, $D_B = 1$. **2.13.** а) $\bar{x}_в = 18{,}4$, $M_e = 18$, $R = 25$, $\bar{l} = 4{,}96$, $\sigma_в = 6{,}385$; б) $\bar{x}_в = -0{,}5$, $M_e = 0$, $R = 11$, $\bar{l} = 3{,}25$, $\sigma_в = 3{,}685$. **2.14.** Найбільшу а); найменшу б). **2.15.** 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5. **2.16.** 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4. **2.17.** а) $\bar{x}_в = 4{,}58$, $D_в = 8{,}58$, $V = 64$ %; б) $\bar{x}_в = 4{,}83$, $D_в = 1{,}14$, $V = 22$ %. **2.18.** $A_s = 0{,}11$; $E_s = -1{,}07$. **2.19.** $\bar{x}_в = 8{,}75$; $M_o = 5$; $M_e = 6$. **2.20.** $Q_1 = 8{,}95$; $Q_2 = M_e = 11{,}6$; $Q_3 = 13{,}6$; $P_{55} = 12$; $P_{85} = 16{,}2$; $M_e = 11{,}275$. **2.21.** а) $k = 5$, $h = 1$; б) $\bar{x}_в = 6{,}97$, $M_o = 6{,}3$, $M_e = 6{,}61$; в) $\sigma_в = 1{,}356$, $\Delta Q = 1{,}78$; г) $D_{вн} = 1{,}104$, $D_м = 0{,}923$, $\eta^2 = 0{,}455$. **2.22.** $M_o = 4$, $M_e = 4$; $P_{85} = 6$. **2.23.** $\bar{x}_в = 64{,}87$; $M_e = 65$; $\sigma_в = 5{,}99$; $V = 9{,}23$ %. **2.24.** $k = 5$; $h = 1$; а) $\bar{x}_в = 3{,}067$, $M_e = 3$, $M_o = 2{,}929$; б) $D_в = 1{,}527$, $\sigma_в = 1{,}236$; в) $\Delta Q = 2{,}021$, $\Delta D = 3{,}4$. **2.25.** а) $\bar{x}_в = 2{,}15$; б) $R = 1{,}2$; $\sigma_в = 0{,}343$. **2.26.** $\bar{x}_в = 1{,}395$; $V = 52{,}61$ %; $A_s^* = 2{,}1277$. **2.27.** в) $\bar{x}_в = 29{,}17$, $Q_1 = 27$, $Q_2 = M_e = 29$, $Q_3 = 31$, $D_в = 7{,}539$, $\sigma_в = 2{,}746$. **2.28.** б) $\bar{x}_в = 21{,}25$; $S^2 = 13{,}78$; в) $A_s = 2{,}31$; $E_s = 5{,}19$, $A_s / \sigma_{A_s} > 3$, $E_s / \sigma_{E_s} > 3$, розподіл віку учасниць не є близьким до нормального. **2.29.** а) $\bar{x}_в = 75{,}95$; $M_e = 75$; $D_B = 144{,}5475$; $\sigma_B = 12{,}0228$; б) $\bar{x}_в = 75{,}95$; $M_e = 75{,}5$; $M_o = 74{,}6$; $D_B = 141{,}5475$; $\sigma_B = 11{,}8974$. **2.30.** $\bar{x}_B = 3680{,}93$; $V = 72{,}46$ %; $A_s^* = 1{,}2792$. **2.31.** $\bar{x}_B = 11$; $M_e = 8{,}5$; $M_o = 0$. **2.32.** а) $k = 5$; $h = 0{,}8$; б) $P_{10} = 11{,}7$, $P_{20} = 12{,}43$.; в) $Q_1 = 12{,}74$, $Q_2 = M_e = 13{,}41$, $Q_3 = 13{,}97$, $\Delta Q = 1{,}23$; г) $R = 4$. **2.33.** б) $M_o = 1333{,}3$; в) $M_e = 1714{,}3$; $\Delta Q = 1428{,}6$; г) $A_{s_Q} = 0{,}1$, незначна правобічна асиметрія. **2.34.** $\bar{x}_B = 651{,}2195$;

$D_B = 67864{,}3664$; $\sigma_B = 260{,}5079$; $V = 40$ %; $M_o = 666{,}6667$; $M_e = 658{,}3333$. **2.35.** $M_o = 8$; $M_e = 6$; $V = 40{,}65$ %; $P_{85} = 8$. **2.36.** $\overline{x}_B = 17{,}7846$; $M_o = 24{,}1$; $M_e = 18{,}4$; $V = 21{,}28$ %. **2.37.** $\overline{x}_B = 9738{,}57$; $M_o = 10000$; $M_e = 9500$; $V = 10{,}09$ %. **2.38.** $\overline{x}_B = 35{,}21$; $\sigma_B = 6{,}83$. **2.39.** $\overline{x}_B = 35{,}63$. **2.40.** $M_o = 5$; $M_e = 5$.

2.41. $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 43{,}2; \\ 0{,}16, & x = 99{,}28; \\ 0{,}36, & x = 155{,}36; \\ 0{,}68, & x = 211{,}44; \\ 0{,}88, & x = 267{,}52; \\ 1, & x \ge 323{,}6; \end{cases}$ $\overline{x} = 178{,}9136$; $\sigma = 68{,}9944$;

$V = 38{,}56$ %; $M_o = 183{,}4$; $M_e = 179{,}895$.

2.42. а) $\overline{x}_в = 8{,}54$, $M_e = 6{,}9$; б) $\sigma_в = 6{,}83$, $\Delta Q = 6{,}25$. **2.43.** $\overline{x}_B = 36{,}89$; $M_o = 36$; $M_e = 36{,}5$; $V = 4{,}13$ %. **2.44.** $\overline{x} = -0{,}104$, $M_o = 1333{,}3$; в) $M_e = 0{,}15$; $\overline{x}_{геом} = 0{,}3$. **2.45.** $\overline{x}_B = 304{,}3478$; $\sigma_B = 144{,}0207$. **2.46.** $\overline{x}_B = 265{,}5704$; $M_o = 243{,}6545$; $M_e = 253{,}5167$; $V = 41{,}35$ %. **2.47.** $\overline{x}_B = 2941{,}86$; $\sigma_B = 682{,}71$; $V = 23{,}21$ %. **2.48.** а) $\overline{x}_1 = 3215$; $\overline{x}_2 = 3836$; $x_3 = 4110$; $\overline{x} = 3780$; б) $D_1 = 350775$; $D_2 = 553104$; $D_3 = 473900$; $D = 497200$; в) $D_M = 129732$; $D_{вн} = 467468$; $\eta^2 = 0{,}2172$. **2.49.** $V_1 = 23{,}7$ %; $V_2 = 55{,}8$ %, більш однорідною вибірка є за віком працівників. **2.50.** Акція A: $\overline{x}_B = 6{,}3$ %; $D = 2{,}51$; $V = 25{,}15$ %. Акція B: $\overline{x}_B = 6{,}8$ %; $D = 29{,}36$; $V = 66{,}36$ %. **2.51.** $\overline{x}_B = 34{,}7278$; $M_o = 38{,}612$; $M_e = 35{,}7367$; $\sigma_в = 14{,}8447$; $V = 42{,}75$ %; $A_S^* = -0{,}1433$; $E_S^* = -0{,}8306$. **2.52.** $\overline{x}_B = 4258$; $M_o = 2984{,}15$; $M_e = 3587{,}8$; $V = 49{,}64$ %; $A_S^* = 1{,}185$; $E_S^* = 0{,}759$. **2.53.** $\overline{x}_B = 164{,}852$; $M_e = 115{,}367$; $V = 79{,}3$ %. **2.54.** $\overline{x}_B = 3$; $\sigma_B = 1{,}6733$; $V = 55{,}78$ %; $M_o = 5$; $M_e = 3$. **2.55.** $\sigma_B = 5{,}9498$; $M_e = 18{,}5$.

2.56. $F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 20{,}3;\\ 0{,}16, & x=58{,}54;\\ 0{,}64, & x=96{,}78;\\ 0{,}80, & x=135{,}02;\\ 0{,}88, & x=173{,}26;\\ 1, & x\ge 211{,}5;\end{cases}$ $\quad \overline{x} = 97{,}5448$; $\quad \sigma = 46{,}0407$;

$V = 47{,}2$ %; $M_o = 77{,}66$; $M_e = 85{,}6267$.

2.57. $M_o = 4$; $M_e = 4$; $\overline{x}_B = 4{,}3871$; $D_B = 7{,}6566$; $\sigma = 2{,}7671$; $V = 63{,}07$ %. **2.58.** $\overline{x}_B = 49{,}8667$; $M_o = 40{,}9174$; $M_e = 44{,}45$; $V = 31{,}73$ %; $A_S^* = 0{,}6573$; $E_S^* = -0{,}7950$. **2.59.** $\overline{x}_B = 998{,}32$; $M_o = 998{,}8421$; $M_e = 998{,}5$; $V = 0{,}34$ %; $A_S^* = -0{,}0126$; $E_S^* = 0{,}0294$. **2.60.** б) $\overline{x}_B = 796{,}5833$; в) $\sigma_B = 6{,}1163$; г) $Q_1 = 792$, $Q_2 = 796$, $Q_3 = 801$; $\mathrm{As}_Q = 0{,}11$. **2.61.** 2008 р. $\overline{x}_B = 352{,}8$; $M_o = 1272$; $M_e = 273$; $V = 91{,}63$ %; 2009 р. $\overline{x}_B = 423{,}9$; $M_o = 1366$; $M_e = 367$; $V = 79{,}25$ %. **2.62.** $\overline{x}_B = 40{,}62$; $M_o = 43{,}5$; $M_e = 41{,}3571$; $V = 25{,}71$ %; $A_S^* = -0{,}3938$; $E_S^* = -0{,}3224$. **2.63.** $\overline{x}_B = 40{,}98$; $M_o = 40{,}7143$; $M_e = 41{,}413$; $V = 26{,}08$ %; $A_S^* = -0{,}4461$; $E_S^* = -0{,}2716$. **2.64.** а) $k = 5$; $h = 2{,}3$; б) $\overline{x}_B = 14{,}055$, $\sigma_в = 2{,}442$, $V = 17{,}38$ %; в) $\mathrm{As} = 0{,}231$, $\mathrm{Ex} = -0{,}488$. **2.65.** а) $\overline{x}_{в1} = 6{,}63$, $\overline{x}_{в2} = 6{,}15$; б) $V_1 > V_2$, $V_1 = 10{,}68$ %, $V_2 = 6{,}95$ %; в) $D_{вн} = 0{,}3195$, $D_м = 0{,}0572$, $\eta^2 = 0{,}1518$. **2.66.** а) $M_{o1} = 42$, $M_{e1} = 42$, $M_{o2} = 36$, $M_{e2} = 37$. б) $V_{Q1} = 1{,}2$ %, $V_{Q2} = 2{,}7$ %. **2.67.** а) $k_1 = \frac{12}{10}$; $k_2 = \frac{13}{12}$; $k_3 = \frac{15}{13}$; $k_4 = \frac{20}{15}$; б) $k = 1{,}1926$. $M_e = 1{,}1186$;

в) $\overline{k}_{\text{геом}} = \sqrt[4]{2} = 47297$; **2.68.** 1) $M_o = 4993$; $M_e = 3178$; $V = 25{,}82$ %; 2) $M_o = 4876$; $M_e = 3716$; $V = 19{,}17$ %. **2.69.** $\overline{x}_B = 47397$; $\sigma_B = 10046{,}99$; $M_o = 62038{,}57$; $M_e = 47344{,}29$. **2.70.** а) $k_1 = \frac{10}{12}$; $k_2 = \frac{14}{10}$; $k_3 = \frac{15}{14}$; $k_4 = \frac{22}{15}$; $k_5 = \frac{30}{22}$; $k_6 = \frac{25}{30}$; б) $\overline{x}_B = 19{,}3333$;

Me = 18,5; в) $\bar{k}_{\text{геом}} = \sqrt[6]{\frac{25}{12}} = 1{,}1301$. **2.71.** $\bar{x}_B = 42{,}6$; $D_B = 36{,}28$; $V = 14{,}14$ %; $R = 28$. **2.72.** 2008 р.: $\bar{x} = 4{,}9479$; $M_o = 5{,}269$; 2009 р.: $\bar{x} = 4{,}568$; $M_o = 5{,}104$; $\sigma = 0{,}24$; $V = 5{,}25$ %; $A_S^* = 0{,}3055$. 2010 р.: $\bar{x} = 4{,}537$; $M_o = 5{,}067$; $\sigma = 0{,}2628$; $V = 5{,}79$ %; $A_S^* = 0{,}3578$. 2008–2010 рр.: $\bar{x} = 4{,}6843$; $M_o = 5{,}067$; $\sigma = 0{,}3062$; $V = 6{,}54$ %; $A_S^* = 0{,}0658$; $D_{вн} = 0{,}0589$; $D_м = 0{,}0349$; $D_B = 0{,}0938$; $\eta^2 = 0{,}3723$. **2.73.** $\bar{x}_B = 484{,}7826$; $M_o = 500$; $M_e = 500$; $V = 40{,}57$ %. **2.74.** $D_{вн} = 0{,}18$; $D_м = 0{,}644$; $\eta^2 = 0{,}7816$. **2.75.** $\bar{x}_B = 1157{,}5$; $V = 10{,}99$ %. **2.76.** $D_1 = 895534{,}64$; $D_2 = 433351{,}36$; $D_{вн} = 664443$; $D_м = 4839560{,}01$; $D_B = 5504003{,}01$; $\eta^2 = 0{,}8793$. **2.77.** 2008 р.: $\bar{x} = 3{,}4333$; $M_o = 4{,}7$; $\sigma = 0{,}8045$; $A_S^* = 0{,}4073$. 2009 р.: $\bar{x} = 3{,}5167$; $M_o = 6{,}2$; $\sigma = 1{,}2205$; $V = 34{,}71$ %; $A_S^* = 0{,}4758$. 2010 р.: $\bar{x} = 3{,}525$; $M_o = 4{,}9$; $\sigma = 0{,}8378$; $V = 23{,}77$ %; $A_S^* = -0{,}0211$. 2008–2010 рр.: $\bar{x} = 3{,}4917$; $M_o = 6{,}2$; $\sigma = 0{,}9736$; $V = 27{,}88$ %; $A_S^* = 0{,}035613$; $D_{вн} = 0{,}9463$; $D_м = 0{,}0017$; $D_B = 0{,}9480$; $\eta^2 = 0{,}0018$. **2.78.** $\bar{x}_1 = 19{,}6083$; $V_1 = 36{,}74$ %; $\bar{x}_2 = 13{,}6750$; $V_2 = 17{,}44$ %; $\bar{x}_3 = 27{,}1$; $V_3 = 37{,}08$ %; $\bar{x}_B = 20{,}1278$; $V = 27{,}88$ %; $D_{вн} = 52{,}8553$; $D_M = 30{,}1733$; $D_B = 83{,}0287$; $\eta^2 = 0{,}3634$. **2.79.** Перша філія: $\bar{x}_{B_1} = 78{,}85$; $D_{B_1} = 113{,}4275$. Друга філія: $\bar{x}_{B_2} = 84{,}3$; $D_{B_2} = 159{,}7067$; $\bar{x}_B = 81{,}58$; $D_B = 146{,}1636$. **2.80.** $A_S^* = 0{,}1057$; $E_S^* = -0{,}1296$; $M_o = 28{,}125$; $M_e = 28{,}8621$. **2.81.** $\bar{x}_B = 342$; $D_B = 24336$; $\sigma_B = 156$; $M_o = 440$; $M_e = 370$; $V = 45{,}61$ %. **2.82.** $\bar{x}_B = 4{,}44$; $\sigma_B = 1{,}2986$; $A_S^* = -0{,}9640$; $E_S^* = 0{,}2910$; $\eta^2 = 29{,}25$ %. **2.83.** 2008 р.: $\bar{x} = 19{,}6333$; $M_o = 23{,}9$; $\sigma = 2{,}3788$; $V = 12{,}12$ %; $A_S^* = -0{,}1920$. 2009 р.: $\bar{x} = 18{,}9$; $M_o = 25$; $\sigma = 1{,}7718$; $V = 19{,}96$ %; $A_S^* = -0{,}1367$. 2010 р.: $\bar{x} = 17{,}725$; $M_o = 21{,}5$; $\sigma = 2{,}8613$; $V = 16{,}14$ %; $A_S^* = -0{,}4232$. 2008–2010 рр.: $\bar{x} = 18{,}7528$; $M_o = 25$; $\sigma = 3{,}1584$; $V = 16{,}84$ %; $A_S^* = -0{,}2565$; $D_{вн} = 9{,}3575$; $D_м = 0{,}6178$; $D_B = 9{,}9753$; $\eta^2 = 0{,}0619$. **2.84.** $\bar{x} = 2338{,}47$; $V = 22{,}89$ %. **2.85.** $\bar{x} = 16{,}25$; $V = 20{,}85$ %.

До § 3

3.1. $\widehat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{mn} = \dfrac{\overline{x}_B}{m}$. **3.2.** $\widehat{p} = 0{,}22$. **3.3.** $\widehat{p} = \dfrac{1}{\overline{x}_B}$. **3.4.** $\widehat{p} = 0{,}2$. **3.5.** $\widehat{a} = \overline{x}_B$; $\widehat{\sigma} = \sqrt{D_B}$. **3.6.** $\widehat{a} = 1{,}26$; $\widehat{\sigma} = 0{,}5$. **3.7.** $\widehat{a} = \overline{x} - \sigma\sqrt{3}$; $\widehat{b} = \overline{x} + \sigma\sqrt{3}$. **3.8.** $\widehat{a} = x_{\min}$; $\widehat{b} = x_{\max}$. **3.9.** $M(\widehat{b}) = \dfrac{n}{n+1} b$; $D(\widehat{b}) = \dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)} b^2$. **3.10.** $\widehat{a} = \overline{x}_B$. **3.11.** $\widehat{p} = 0{,}9$.

3.12. $\widehat{\theta} = \dfrac{1}{2n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, $D(\widehat{\theta}) = \dfrac{\theta^2}{n}$. **3.14.** $\widehat{\theta} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$, $D(\widehat{\theta}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

3.15. $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^2$. **3.16.** $\widehat{a} = \dfrac{2}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \dfrac{1}{\overline{x}_B}$, незміщена оцінка $\widehat{a}^* = \dfrac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ ефективність оцінки $e = \dfrac{n-2}{n}$, оцінка є асимптотично ефективною.

До § 4

4.1. а) $510 \pm 51{,}6$; б) $510 \pm 34{,}648$; в) $510 \pm 24{,}5$; г) оцінка стає точнішою. **4.2.** а) $1500 \pm 39{,}2$; б) $1500 \pm 26{,}13$; в) $1500 \pm 13{,}06$; г) оцінка стає точнішою. **4.3.** а) $700 \pm 8{,}225$; б) $700 \pm 9{,}8$; в) $700 \pm 12{,}875$; г) оцінка стає менш точною. **4.4.** Збільшиться в 2 рази. **4.5.** а) $10 \pm 0{,}196$; б) $10 \pm 0{,}784$; в) $10 \pm 1{,}96$; г) інтервал ширшає. **4.6.** а) $120 \pm 4{,}117$; б) $120 \pm 3{,}455$; в) $120 \pm 5{,}407$; г) інтервал звужується. **4.7.** а) $63 \pm 1{,}742$; б) $63 \pm 1{,}96$; г) $63 \pm 2{,}613$; г) інтервал ширшає. **4.8.** а) (31,637; 48,362); б) (33,070; 46,930). **4.9.** 1) (152,405; 197,595); 2) (157,444; 192,556). **4.10.** 1) (14983,983; 16016,017); 2) (14983,969; 16016,031). **4.13.** а) 271; б) (149,0007; 150,9993). **4.20.** а) 68; б) 271; в) 97; г) 17. **4.21.** а) зростає; б) зростає; в) зменшується. **4.24.** а) 9; б) 107. **4.25.** а) 0,9082; б) 0,68034. **4.26.** 0,1717.

4.27. 0,05. **4.28.** 0,9505. **4.29.** а) 0,1587; б) 0,02275. **4.30.** 0,0548. **4.31.** $P(X > 750) = 0,6915$. **4.32.** 0,6318. **4.33.** (0,1377; 0,3623). **4.34.** (7,706; 12614). **4.35.** $\approx 7,57$ грамів. **4.36.** (12,7355; 16,2355); (13,0434; 15,9567). **4.37.** 5,28 ± 0,35. **4.38.** (30,144; 38,2559). **4.39.** (40,0564; 45,0216). **4.40.** (29,8828; 59,3167). **4.41.** (2,3376; 2,8624). **4.42.** (93,7594; 108,7021). **4.43.** (14,3829; 18,6171). **4.44.** (5604; 6398). **4.45.** (4839,9035; 5438,0965). **4.46.** (5,4436; 7,9564). **4.47.** (55,8368; 67,4966). **4.48.** (0,1997; 0,3603). **4.49.** (0,4619; 0,7523). **4.50.** (0,5755; 0,5792). **4.51.** (613,2674; 683,4446). **4.52.** а) 0,8822; б) 0,8557. **4.53.** (0,1671; 0,2329). **4.54.** (0,4936; 0,6064). **4.55.** (0,4591; 0,6034). **4.56.** (0,0584; 0,1816). **4.57.** (0,462; 0,498). **4.58.** 0,9756. **4.59.** (0,3751; 0,5049). **4.60.** (0,4991; 0,5609). **4.61.** (0,6663; 0,7337). **4.62.** (0,2246; 0,3754). **4.63.** (0,2483; 0,4717). **4.64.** (0,3108; 0,4892). **4.65.** (0,352; 0,448). **4.66.** (0,6384; 0,7615). **4.67.** 219. **4.68.** (0,5004; 0,5399), $n \approx 423$. **4.69.** (0,3; 0,4), $n \approx 351$. **4.70.** (1033,232; 1166,768). **4.71.** (1147,286; 1292,714). **4.72.** (96,212; 103,788), $\approx$ (96; 104). **4.73.** (112,43; 117,57), $\approx$ (112; 118). **4.74.** 0,01396. **4.75.** а) $\bar{x}_г \approx 5,8472$, $\sigma_г \approx 0,0126$; б) (5,8265; 5,8679); в) (0,007898; 0,030997); г) 0,0173. **4.76.** (0,988; 1,002). **4.77.** (1,9802; 1,9998). **4.78.** (1062,8264; 1337,1036). **4.79.** (1,378; 7,6220); (2,4562; 6,5438). **4.80.** (74,901; 79,499). **4.81.** (4,4562; 14,4828). **4.82.** (0,8411; 1,9914). **4.83.** 0,975. **4.84.** 0,25; 0,000937; 0,0306186; 0,4484. **4.85.** $n = 2149$. **4.86.** 164. **4.87.** 17319. **4.88.** 166. **4.89.** 1985. **4.90.** $n = 1083$. **4.91.** 3346. **4.92.** а) 144; б) 126. **4.93.** 512. **4.94.** $n = 4145$. **4.95.** (18400; 21600). **4.96.** $n = 97$. **4.97.** $n = 217$. **4.98.** а) 77,5; (243,2009; 897,5177); (15,5949; 29,9586); б) 23. **4.99.** $n = 25$. **4.100.** (12,059; 14,249). **4.102.** а) 0,9664; б) не менше ніж в 10.

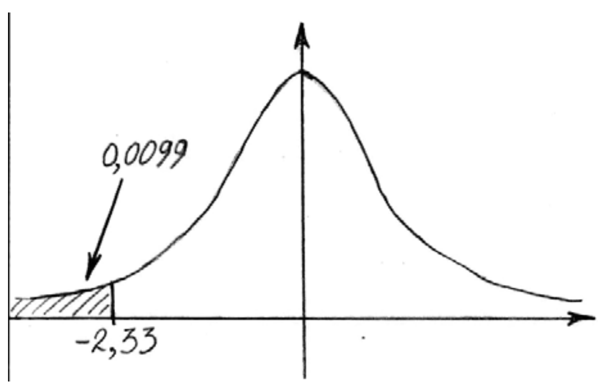
До § 5

5.1. А. Так; Б. Ні; В. Так; Г. Ні. **5.2.** H_0: ліки небезпечні; H_1: ліки безпечні; α — імовірність, що небезпечні ліки вважатимуться безпечними; β — імовірність, що ліки є безпечними, але вважатимуть небезпечними. **5.3.** H_0: слід вибрати другу можливість для одержання максимального прибутку; H_1: слід вибрати першу; α — імовірність, що перша можливість буде помилково визнана безпечною; β — імовірність, що перша можливість буде безпечною, але при цьому буде вибрано другу можливість для інвестицій. **5.4.** H_0: літак горить; H_1: літак не горить; α — імовірність, що пілот не посадить літак за умови, що він горить; β — імовірність, що літак не горить, а пілот прийме рішення посадити літак. **5.5.** H_0: повернення боргу вчасно; H_1: неповернення боргу вчасно;

А. H_0 буде відхилено: 1) якщо вона правильна: компанія зможе повернути борг вчасно, але банк відмовить їй у наданні кредиту; 2) якщо вірна H_1: компанія не зможе повернути вчасно борг, банк відмовить у наданні кредиту.

Б. H_0 буде не відхилена: 1) якщо правильна H_0: банк дасть кредит і компанія його вчасно поверне; 2) якщо правильна H_1: банк дасть кредит компанії, але вона вчасно його не поверне.

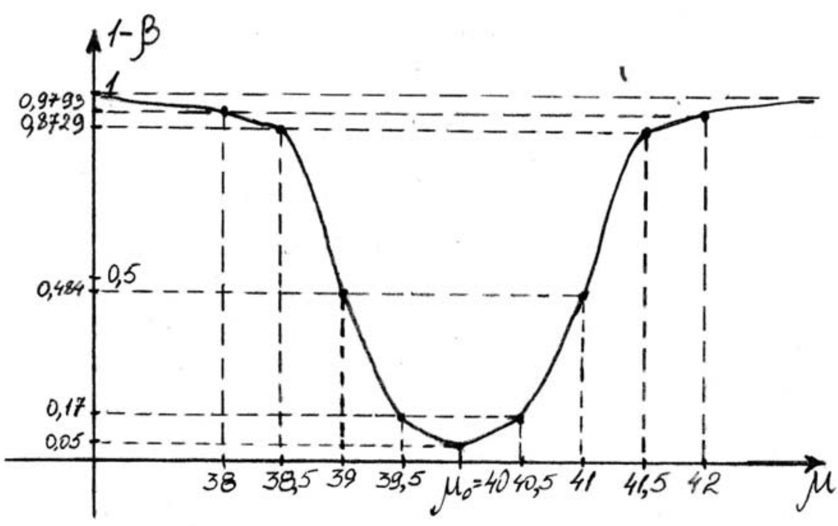
5.6. H_0 відхиляється на користь H_1. **5.7.** H_0 відхиляється; за збільшення рівня значущості до $\alpha = 0{,}1$ висновок не зміниться. **5.8.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.9.** $0{,}2743 > 0{,}03$, немає підстав відхиляти H_0. **5.10.** $0{,}0012 < 0{,}05$, H_0 відхиляється. **5.11.** Зі збільшенням обсягу вибірки p-значення зменшується. **5.12.** В спостережуване значення критерію віддаляється від «0», p-значення зменшується зі зменшенням σ. **5.13.** З віддаленням $\overline{x}_B$ від μ_0 p-значення зменшується. **5.14.** 1. p-значення $< \alpha \rightarrow H_0$ відхиляється. 2. Оскільки p-значення $< 0{,}01$, то є достатньо статистичних доказів для відхилення H_0. в)



5.15. H_0 відхиляється на користь H_1. **5.16.** Є достатньо доказів з рівнем значущості для висновку про те, що середня кількість часу перевищує 50 хв. **5.17.** Немає достатньо переконливих доказів для того, щоб відмовитись від купівлі нових автобусів. **5.18.** H_0 відхиляється. **5.19.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.20.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.21.** H_0 відхиляється; припущення хибне. **5.22.** $k = 2{,}2$. **5.23.** Немає підстав відхилити H_0. **5.24.** А. Ні; Б. Так. **5.25.** Ні. **5.26.** 1. $\alpha = 0{,}5028$; 2. Висока ймовірність помилки 1-го типу;

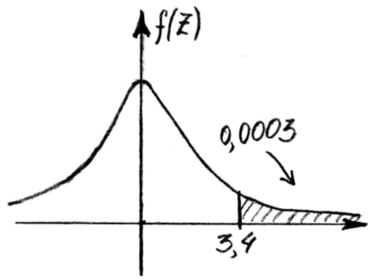
3. $\left[\begin{array}{l} \bar{x}_B > 30 + \Phi^{-1}\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)\cdot\dfrac{3}{2}, \\ \bar{x}_B < 30 - \Phi^{-1}\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)\cdot\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

5.27. H_0 не відхиляється при $1-\beta = 1-0{,}3594 = 0{,}6406$. **5.28.** а) H_0 не відхиляється при б) H_0 не відхиляється при $\bar{x}_B < 20{,}64$; $1-\beta = 0{,}7642$. При збільшенні рівня значущості ймовірність помилки 2-го типу зменшується, потужність критерію збільшується. **5.29.** а) H_0 не відхиляється при $\bar{x}_B < 20{,}72$; $1-\beta = 0{,}7389$. б) H_0 не відхиляється при $\bar{x}_B < 20{,}5775$; $1-\beta = 0{,}8869$. Збільшення обсягу вибірки призводить до зменшення ймовірності помилки 2-го типу та до збільшення потужності критерію. **5.30.** а) H_0 не відхиляється при $\bar{x}_B < 20{,}9$; $1-\beta = 0{,}5714$. б) H_0 не відхиляється при $\bar{x}_B < 20{,}94$; $1-\beta = 54{,}38$. При збільшенні стандартного відхилення ймовірність помилки 2-го типу збільшується, потужність критерію зменшується. **5.31.** $n = 58$. **5.32.** А. Немає підстав для відхилення H_0; Б. $1-\beta = 0{,}3786$. **5.33.** H_0 не відхиляється при $\bar{x}_B > 183{,}55$; $1-\beta = 0{,}9131$. **5.34.** $n = 22$. **5.35.** $\alpha = 0{,}2546$. **5.36.**

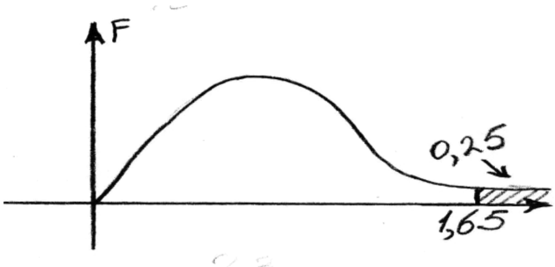


5.37. H_0 відхиляється на користь H_1. Одержана різниця у вазі не є випадковою. **5.38.** H_0 відхиляється на користь H_1. Так, має. **5.39.** H_0 відхиляється. а); H_0 відхиляється. б) $n = 5$. Немає підстав відхиляти H_0. У разі зменшення обсягу вибірки значення збільшується. **5.40.** Немає підстав для відхилення H_0; немає підстав для спростування заяви служби. **5.41.** H_0 відхиляється на користь H_1; відмінності істотні. **5.42.** H_0 відхиляється на користь H_1; так, можна. **5.43.** H_0 відхиляється на користь H_1; є достатньо підстав для припинення. **5.44**. Немає підстав для відхилення H_0; ні, не можна. **5.45.** Немає підстав для відхилення H_0. Немає підстав для спростування твердження виробника. **5.46.** А. Достатньо доказів для підтвердження справедливого припущення компанії; Б. p-значення = 0,0003. H_0 відхиляється;

В.



5.47. А. Немає підстав для відхилення H_0. Б. $n = 250$, p-значення = 0,1142. В. $n = 400$, p-значення = 0,0456. За збільшення n спостережуване значення критерію збільшуюється. p-значення відповідно зменшується. **5.48.** $m = 4175$. **5.49.** А. Так. Б. H_0 не відхиляється. **5.50.** а) немає підстав для відхилення H_0. б) H_0 не відхиляється при $W > 0{,}707$; $1 - \beta = 0{,}242$. **5.51.** Немає підстав для спростування твердження аналітика. **5.52.** $m_0 = 7$. **5.53.** $\alpha = 0{,}001635$. **5.54.** А. Немає підстав для відхилення H_0. Б. Немає підстав для відхилення H_0. В. Значення статистики χ^2 збільшується зі збільшенням об'єму вибірки; висновок не змінився. **5.55.** Немає. **5.56.** H_0 не відхиляється, висновок не змінився. **5.57.** Так. **5.58**. а) Немає підстав для відхилення H_0. б) Немає підстав для відхилення H_0. **5.59.** а) Немає підстав для відхилення H_0. б) Змінився. **5.60.** Немає доказів для підтвердження припущення агента. **5.61.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.62.** а) Немає підстав для відхилення H_0. б) так; ні. **5.63.** Немає підстав для відхилення H_0. Ні, не достатньо статистичних доказів. **5.64.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.65.** Суттєвої різниці у варіаціях немає. **5.66.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.67.** p-значення = 0,25. df: $v_1 = 6$, $v_2 = 8$.



5.68. а) немає підстав для відхилення H_0; б) легка промисловість менш ризикована, ніж машинобудівна, і не є менш ризикованою, ніж металургійна. **5.69.** 1) H_0 не відхиляється; 2) H_0 відхиляється. **5.70.** Так. **5.71.** Достатньо статистичних доказів для відхилення H_0 на користь H_1. **5.72.** а) p-значення = 0,0351; б) p-значення = 0,3954; в) p-значення = 0,2643. **5.73.** H_0 не відхиляється при $\bar{x}_{B_1} - \bar{x}_{B_2} <$ $< 6{,}426$; $1 - \beta = 0{,}7291$. **5.74.** $|t_{сп}| = 0{,}616$. **5.75.** $|t_{сп}| = 34{,}18$. **5.76.** 1) H_0 не відхиляється; 2) H_0 відхиляється. **5.77.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.78.** Немає підстав для відхилення H_0. p-значення > 0,1. **5.79.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.80.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.81.** H_0 відхиляється. **5.82.** H_0 відхиляється. **5.83.** H_0 відхиляється. **5.84.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.85.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.86.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.87.** Різниця помилок є суттєвою. **5.88.** Ні, не можна. **5.89.** Немає підстав для відхилення H_0. **5.90.** Так. **5.91.** $Z_{сп}$ змінить знак, p-значення не зміниться. **5.92.** p-значення зменшилось удвічі. **5.93.** У задачі 5.91 p-значення > α; немає підстав для відхилення H_0; у задачі 5.92 p-значення > α; аналогічно. **5.94.** а) немає підстав для відхилення H_0; б) висновок не змінився.

До § 6

6.1. а) зв'язку немає, $r = 0$; б) зв'язок існує.
6.5. а) $y = 5x - 21{,}35$; в) $2{,}984 \le \beta_1 \le 7{,}016$.
6.6. а) $y = -131{,}717x + 323{,}68$.
6.7. $y = 0{,}17x - 30{,}72$; $x = 4{,}06y - 115{,}47$; $r_b \approx 0{,}83$.
6.8. б) $y = 2{,}25x + 9{,}57$; в) $r_b = 0{,}8705$.
6.13. а) $y = 1{,}017x + 4{,}829$; б) на 1,017 тис. грн/люд.; в) $r = 0{,}9$.
6.14. а) 0,825; б) $y = 0{,}23x + 21{,}78$; $x = 29{,}2y - 27{,}25$;
г) $\eta_{yx} = 0{,}859$; $\eta_{xy} = 0{,}875$.
6.15. б) $r = 0{,}9229$; $y = 0{,}9286x - 45{,}52$. **6.16.** в) $\eta_{yx} = 0{,}64$.
6.17. $r_b = 0{,}636$; $y = 1{,}17x + 16{,}78$; $x = 0{,}345y + 1{,}67$;
г) $\eta_{yx} = 0{,}656$; $\eta_{xy} = 0{,}651$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гмурман В. Б.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для студ. вузов / В. Б. Гмурман. — М. : Высш. шк., 1979. — 400 с.
2. Теорія ймовірностей для економістів : навч. посіб. / [С. М. Григулич, В. П. Лісовська, О. І. Макаренко та ін.]. — К. : КНЕУ, 2010. — 330 с.
3. *Жлуктенко В. І.* Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. метод. посіб. : у 2 ч. — Ч. II. Математична статистика / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. — К. : КНЕУ, 2001. — 336 с.
4. *Крыньський Х. Э.* Математика для экономистов / Х. Э. Крыньський. — М. : Статистика, 1970.
5. Математична статистика : навч. посіб. / М. А. Мартиненко, О. М. Нещадим, О. І. Радзієвська, В. М. Сафонов. — К. : Четверта хвиля, 2005. — 208 с.
6. *Ниворожкина Л. И.* Математическая статистика с элементами теории вероятностей в задачах с решениями : учеб. пособие / Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова. — М. : МарТ, 2005. — 608 с.
7. *Мостеллер Ф.* Вероятность / Ф. Мостеллер. Р. Рурке, Дж. Томас. — М. : Мир, 1969.
8. Статистика : підручник / за ред. А. В. Головача. — К. : Вища шк., 1993.
9. Статистика підприємництва : навч. посіб. / П. Г. Вашків, П. І. Пастер, В. П. Сторожук, Є. І. Ткач ; за ред. П. Г. Вашківа, В. П. Сторожука. — К. : Слобожанщина, 1999. — 600 с.
10. Статистика : підручник. — 2-ге вид., перероб. і доп. / за ред. С. С. Герасименка. — К., 2000. — 467 с.
11. Теорія статистики : навч. посіб. / П. Г. Вашків, П. І. Пастер, В. П. Сторожук, Є. І. Ткач. — К. : Либідь, 2001. — 320 с.
12. *Штангрет А. М.* Статистика : навч. посіб. / А. М. Штангрет, О. І. Копилюк. — К., 2005. — 229 с.
13. Теорія ймовірностей і математична статистика для менеджерів : навч. посіб. / [Т. М. Ковальчук, В. А. Ковальчук, Є. К. Бабець та ін.]. — К. : Професіонал, 2006. — 256 с.
14. *Єріна А. М.* Статистика : підручник / А. М. Єріна, З. О. Пальян. — К. : КНЕУ, 2010. — 351 с.

ДОДАТКИ

Таблиця 1

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ГАУССА $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107

Закінчення табл. 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Таблиця 2

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830

Закінчення табл. 2

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Таблиця 3

ЙМОВІРНОСТІ $P_n\left(X=m\right)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$, $m=0,1,2,\ldots$ **РОЗПОДІЛУ ПУАССОНА**

m	***a***								
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

m	***a***									
	1	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**
0	0,3679	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496
1	0,3679	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842
2	0,1839	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700
3	0,0613	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710
4	0,0153	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812
5	0,0031	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309
6	0,0005	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098
7	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027
8				0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006
9								0,0001	0,0001	0,0001

m	***a***									
	2	**2,1**	**2,2**	**2,3**	**2,4**	**2,5**	**2,6**	**2,7**	**2,8**	**2,9**
0	0,1353	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550
1	0,2707	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596
2	0,2707	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314
3	0,1804	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237
4	0,0902	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622
5	0,0361	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940
6	0,0120	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455
7	0,0034	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188
8	0,0009	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068
9	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022
10		0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
11							0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

Продовження табл. 3

m	*a*								
	3	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0003
1	0,1494	0,1057	0,0733	0,0500	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0027
2	0,2240	0,1850	0,1465	0,1125	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0107
3	0,2240	0,2158	0,1954	0,1687	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0286
4	0,1680	0,1888	0,1954	0,1898	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0573
5	0,1008	0,1322	0,1563	0,1708	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0916
6	0,0504	0,0771	0,1042	0,1281	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,1221
7	0,0216	0,0385	0,0595	0,0824	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1396
8	0,0081	0,0169	0,0298	0,0463	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1396
9	0,0027	0,0066	0,0132	0,0232	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1241
10	0,0008	0,0023	0,0053	0,0104	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,0993
11	0,0002	0,0007	0,0019	0,0043	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0722
12	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0481
13		0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0296
14			0,0001	0,0002	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0169
15				0,0001	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0090
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0045
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0021
18							0,0002	0,0009	0,0009
19							0,0001	0,0004	0,0004
20								0,0002	0,0002
21								0,0001	0,0001

m	*a*										
	10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0023	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0076	0,0037	0,0018	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0189	0,0102	0,0053	0,0027	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
5	0,0378	0,0224	0,0127	0,0070	0,0037	0,0019	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001
6	0,0631	0,0411	0,0255	0,0152	0,0087	0,0048	0,0026	0,0014	0,0007	0,0004	0,0002
7	0,0901	0,0646	0,0437	0,0281	0,0174	0,0104	0,0060	0,0034	0,0019	0,0010	0,0005
8	0,1126	0,0888	0,0655	0,0457	0,0304	0,0194	0,0120	0,0072	0,0042	0,0024	0,0013
9	0,1251	0,1085	0,0874	0,0661	0,0473	0,0324	0,0213	0,0135	0,0083	0,0050	0,0029
10	0,1251	0,1194	0,1048	0,0859	0,0663	0,0486	0,0341	0,0230	0,0150	0,0095	0,0058
11	0,1137	0,1194	0,1144	0,1015	0,0844	0,0663	0,0496	0,0355	0,0245	0,0164	0,0106

Закінчення табл. 3

m	***a***										
	10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
12	0,0948	0,1094	0,1144	0,1099	0,0984	0,0829	0,0661	0,0504	0,0368	0,0259	0,0176
13	0,0729	0,0926	0,1056	0,1099	0,1060	0,0956	0,0814	0,0658	0,0509	0,0378	0,0271
14	0,0521	0,0728	0,0905	0,1021	0,1060	0,1024	0,0930	0,0800	0,0655	0,0514	0,0387
15	0,0347	0,0534	0,0724	0,0885	0,0989	0,1024	0,0992	0,0906	0,0786	0,0650	0,0516
16	0,0217	0,0367	0,0543	0,0719	0,0866	0,0960	0,0992	0,0963	0,0884	0,0772	0,0646
17	0,0128	0,0237	0,0383	0,0550	0,0713	0,0847	0,0934	0,0963	0,0936	0,0863	0,0760
18	0,0071	0,0145	0,0255	0,0397	0,0554	0,0706	0,0830	0,0909	0,0936	0,0911	0,0844
19	0,0037	0,0084	0,0161	0,0272	0,0409	0,0557	0,0699	0,0814	0,0887	0,0911	0,0888
20	0,0019	0,0046	0,0097	0,0177	0,0286	0,0418	0,0559	0,0692	0,0798	0,0866	0,0888
21	0,0009	0,0024	0,0055	0,0109	0,0191	0,0299	0,0426	0,0560	0,0684	0,0783	0,0846
22	0,0004	0,0012	0,0030	0,0065	0,0121	0,0204	0,0310	0,0433	0,0560	0,0676	0,0769
23	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0074	0,0133	0,0216	0,0320	0,0438	0,0559	0,0669
24	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020	0,0043	0,0083	0,0144	0,0226	0,0328	0,0442	0,0557
25		0,0001	0,0004	0,0010	0,0024	0,0050	0,0092	0,0154	0,0237	0,0336	0,0446
26			0,0002	0,0005	0,0013	0,0029	0,0057	0,0101	0,0164	0,0246	0,0343
27			0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0034	0,0063	0,0109	0,0173	0,0254
28				0,0001	0,0003	0,0009	0,0019	0,0038	0,0070	0,0117	0,0181
29				0,0001	0,0002	0,0004	0,0011	0,0023	0,0044	0,0077	0,0125
30					0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0026	0,0049	0,0083
31						0,0001	0,0003	0,0007	0,0015	0,0030	0,0054
32						0,0001	0,0001	0,0004	0,0009	0,0018	0,0034
33							0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,0020
34								0,0001	0,0002	0,0006	0,0012
35									0,0001	0,0003	0,0007
36									0,0001	0,0002	0,0004
37										0,0001	0,0002
38											0,0001
39											0,0001

Таблиця 4

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ e^{-x}

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139
0,1	0,9048	0,8958	0,8869	0,8781	0,8694	0,8607	0,8521	0,8437	0,8353	0,8270
0,2	0,8187	0,8106	0,8025	0,7945	0,7866	0,7788	0,7711	0,7634	0,7558	0,7483
0,3	0,7408	0,7334	0,7261	0,7189	0,7118	0,7047	0,6977	0,6907	0,6839	0,6771
0,4	0,6703	0,6637	0,6570	0,6505	0,6440	0,6376	0,6313	0,6250	0,6188	0,6126
0,5	0,6065	0,6005	0,5945	0,5886	0,5827	0,5769	0,5712	0,5655	0,5599	0,5543
0,6	0,5488	0,5434	0,5379	0,5326	0,5273	0,5220	0,5169	0,5117	0,5066	0,5016
0,7	0,4966	0,4916	0,4868	0,4819	0,4771	0,4724	0,4677	0,4630	0,4584	0,4538
0,8	0,4493	0,4449	0,4404	0,4360	0,4317	0,4274	0,4232	0,4190	0,4148	0,4107
0,9	0,4066	0,4025	0,3985	0,3946	0,3906	0,3867	0,3829	0,3791	0,3753	0,3716
1,0	0,3679	0,3642	0,3606	0,3570	0,3535	0,3499	0,3465	0,3430	0,3396	0,3362
1,1	0,3329	0,3296	0,3263	0,3230	0,3198	0,3166	0,3135	0,3104	0,3073	0,3042
1,2	0,3012	0,2982	0,2952	0,2923	0,2894	0,2865	0,2837	0,2808	0,2780	0,2753
1,3	0,2725	0,2698	0,2671	0,2645	0,2618	0,2592	0,2567	0,2541	0,2516	0,2491
1,4	0,2466	0,2441	0,2417	0,2393	0,2369	0,2346	0,2322	0,2299	0,2276	0,2254
1,5	0,2231	0,2209	0,2187	0,2165	0,2144	0,2122	0,2101	0,2080	0,2060	0,2039
1,6	0,2019	0,1999	0,1979	0,1959	0,1940	0,1920	0,1901	0,1882	0,1864	0,1845
1,7	0,1827	0,1809	0,1791	0,1773	0,1755	0,1738	0,1720	0,1703	0,1686	0,1670
1,8	0,1653	0,1637	0,1620	0,1604	0,1588	0,1572	0,1557	0,1541	0,1526	0,1511
1,9	0,1496	0,1481	0,1466	0,1451	0,1437	0,1423	0,1409	0,1395	0,1381	0,1367
2,0	0,1353	0,1340	0,1327	0,1313	0,1300	0,1287	0,1275	0,1262	0,1249	0,1237
2,1	0,1225	0,1212	0,1200	0,1188	0,1177	0,1165	0,1153	0,1142	0,1130	0,1119
2,2	0,1108	0,1097	0,1086	0,1075	0,1065	0,1054	0,1044	0,1033	0,1023	0,1013
2,3	0,1003	0,0993	0,0983	0,0973	0,0963	0,0954	0,0944	0,0935	0,0926	0,0916
2,4	0,0907	0,0898	0,0889	0,0880	0,0872	0,0863	0,0854	0,0846	0,0837	0,0829
2,5	0,0821	0,0813	0,0805	0,0797	0,0789	0,0781	0,0773	0,0765	0,0758	0,0750
2,6	0,0743	0,0735	0,0728	0,0721	0,0714	0,0707	0,0699	0,0693	0,0686	0,0679
2,7	0,0672	0,0665	0,0659	0,0652	0,0646	0,0639	0,0633	0,0627	0,0620	0,0614
2,8	0,0608	0,0602	0,0596	0,0590	0,0584	0,0578	0,0573	0,0567	0,0561	0,0556
2,9	0,0550	0,0545	0,0539	0,0534	0,0529	0,0523	0,0518	0,0513	0,0508	0,0503
3,0	0,0498	0,0493	0,0488	0,0483	0,0478	0,0474	0,0469	0,0464	0,0460	0,0455

Закінчення табл. 4

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	0,0450	0,0446	0,0442	0,0437	0,0433	0,0429	0,0424	0,0420	0,0416	0,0412
3,2	0,0408	0,0404	0,0400	0,0396	0,0392	0,0388	0,0384	0,0380	0,0376	0,0373
3,3	0,0369	0,0365	0,0362	0,0358	0,0354	0,0351	0,0347	0,0344	0,0340	0,0337
3,4	0,0334	0,0330	0,0327	0,0324	0,0321	0,0317	0,0314	0,0311	0,0308	0,0305
3,5	0,0302	0,0299	0,0296	0,0293	0,0290	0,0287	0,0284	0,0282	0,0279	0,0276
3,6	0,0273	0,0271	0,0268	0,0265	0,0263	0,0260	0,0257	0,0255	0,0252	0,0250
3,7	0,0247	0,0245	0,0242	0,0240	0,0238	0,0235	0,0233	0,0231	0,0228	0,0226
3,8	0,0224	0,0221	0,0219	0,0217	0,0215	0,0213	0,0211	0,0209	0,0207	0,0204
3,9	0,0202	0,0200	0,0198	0,0196	0,0194	0,0193	0,0191	0,0189	0,0187	0,0185
4,0	0,0183	0,0181	0,0180	0,0178	0,0176	0,0174	0,0172	0,0171	0,0169	0,0167
4,1	0,0166	0,0164	0,0162	0,0161	0,0159	0,0158	0,0156	0,0155	0,0153	0,0151
4,2	0,0150	0,0148	0,0147	0,0146	0,0144	0,0143	0,0141	0,0140	0,0138	0,0137
4,3	0,0136	0,0134	0,0133	0,0132	0,0130	0,0129	0,0128	0,0127	0,0125	0,0124
4,4	0,0123	0,0122	0,0120	0,0119	0,0118	0,0117	0,0116	0,0114	0,0113	0,0112
4,5	0,0111	0,0110	0,0109	0,0108	0,0107	0,0106	0,0105	0,0104	0,0103	0,0102
4,6	0,0101	0,0100	0,0099	0,0098	0,0097	0,0096	0,0095	0,0094	0,0093	0,0092
4,7	0,0091	0,0090	0,0089	0,0088	0,0087	0,0087	0,0086	0,0085	0,0084	0,0083
4,8	0,0082	0,0081	0,0081	0,0080	0,0079	0,0078	0,0078	0,0077	0,0076	0,0075
4,9	0,0074	0,0074	0,0073	0,0072	0,0072	0,0071	0,0070	0,0069	0,0069	0,0068

Таблиця 5

ЙМОВІРНОСТІ БІНОМІАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$

n	m	p										
		0,05	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**
2	**0**	0,903	0,810	0,640	0,490	0,360	0,250	0,160	0,090	0,040	0,010	0,003
	1	0,095	0,180	0,320	0,420	0,480	0,500	0,480	0,420	0,320	0,180	0,095
	2	0,003	0,010	0,040	0,090	0,160	0,250	0,360	0,490	0,640	0,810	0,903
3	**0**	0,857	0,729	0,512	0,343	0,216	0,125	0,064	0,027	0,008	0,001	0+
	1	0,135	0,243	0,384	0,441	0,432	0,375	0,288	0,189	0,096	0,027	0,007
	2	0,007	0,027	0,096	0,189	0,288	0,375	0,432	0,441	0,384	0,243	0,135
	3	0+	0,001	0,008	0,027	0,064	0,125	0,216	0,343	0,512	0,729	0,857
4	**0**	0,815	0,656	0,410	0,240	0,130	0,063	0,026	0,008	0,002	0+	0+
	1	0,171	0,292	0,410	0,412	0,346	0,250	0,154	0,076	0,026	0,004	0+

n	**m**	**p**										
		0,05	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**
4	**2**	0,014	0,049	0,154	0,265	0,346	0,375	0,346	0,265	0,154	0,049	0,014
	3	0+	0,004	0,026	0,076	0,154	0,250	0,346	0,412	0,410	0,292	0,171
	4	0+	0+	0,002	0,008	0,026	0,063	0,130	0,240	0,410	0,656	0,815
5	**0**	0,774	0,590	0,328	0,168	0,078	0,031	0,010	0,002	0+	0+	0+
	1	0,204	0,328	0,410	0,360	0,259	0,156	0,077	0,028	0,006	0+	0+
	2	0,021	0,073	0,205	0,309	0,346	0,313	0,230	0,132	0,051	0,008	0,001
	3	0,001	0,008	0,051	0,132	0,230	0,313	0,346	0,309	0,205	0,073	0,021
	4	0+	0+	0,006	0,028	0,077	0,156	0,259	0,360	0,410	0,328	0,204
	5	0+	0+	0+	0,002	0,010	0,031	0,078	0,168	0,328	0,590	0,774
6	**0**	0,735	0,531	0,262	0,118	0,047	0,016	0,004	0,001	0+	0+	0+
	1	0,232	0,354	0,393	0,303	0,187	0,094	0,037	0,010	0,002	0+	0+
	2	0,031	0,098	0,246	0,324	0,311	0,234	0,138	0,060	0,015	0,001	0+
	3	0,002	0,015	0,082	0,185	0,276	0,313	0,276	0,185	0,082	0,015	0,002
	4	0+	0,001	0,015	0,060	0,138	0,234	0,311	0,324	0,246	0,098	0,031
	5	0+	0+	0,002	0,010	0,037	0,094	0,187	0,303	0,393	0,354	0,232
	6	0+	0+	0+	0,001	0,004	0,016	0,047	0,118	0,262	0,531	0,735
7	**0**	0,698	0,478	0,210	0,082	0,028	0,008	0,002	0+	0+	0+	0+
	1	0,257	0,372	0,367	0,247	0,131	0,055	0,017	0,004	0+	0+	0+
	2	0,041	0,124	0,275	0,318	0,261	0,164	0,077	0,025	0,004	0+	0+
	3	0,004	0,023	0,115	0,227	0,290	0,273	0,194	0,097	0,029	0,003	0+
	4	0+	0,003	0,029	0,097	0,194	0,273	0,290	0,227	0,115	0,023	0,004
	5	0+	0+	0,004	0,025	0,077	0,164	0,261	0,318	0,275	0,124	0,041
	6	0+	0+	0+	0,004	0,017	0,055	0,131	0,247	0,367	0,372	0,257
	7	0+	0+	0+	0+	0,002	0,008	0,028	0,082	0,210	0,478	0,698
8	**0**	0,663	0,430	0,168	0,058	0,017	0,004	0,001	0+	0+	0+	0+
	1	0,279	0,383	0,336	0,198	0,090	0,031	0,008	0,001	0+	0+	0+
	2	0,051	0,149	0,294	0,296	0,209	0,109	0,041	0,010	0,001	0+	0+
	3	0,005	0,033	0,147	0,254	0,279	0,219	0,124	0,047	0,009	0+	0+
	4	0+	0,005	0,046	0,136	0,232	0,273	0,232	0,136	0,046	0,005	0+
	5	0+	0+	0,009	0,047	0,124	0,219	0,279	0,254	0,147	0,033	0,005
	6	0+	0+	0,001	0,010	0,041	0,109	0,209	0,296	0,294	0,149	0,051
	7	0+	0+	0+	0,001	0,008	0,031	0,090	0,198	0,336	0,383	0,279
	8	0+	0+	0+	0+	0,001	0,004	0,017	0,058	0,168	0,430	0,663

Продовження табл. 5

n	**m**	***p***										
		0,05	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**
9	**0**	0,630	0,387	0,134	0,040	0,010	0,002	0+	0+	0+	0+	0+
	1	0,299	0,387	0,302	0,156	0,060	0,018	0,004	0+	0+	0+	0+
	2	0,063	0,172	0,302	0,267	0,161	0,070	0,021	0,004	0+	0+	0+
	3	0,008	0,045	0,176	0,267	0,251	0,164	0,074	0,021	0,003	0+	0+
	4	0,001	0,007	0,066	0,172	0,251	0,246	0,167	0,074	0,017	0,001	0+
	5	0+	0,001	0,017	0,074	0,167	0,246	0,251	0,172	0,066	0,007	0,001
	6	0+	0+	0,003	0,021	0,074	0,164	0,251	0,267	0,176	0,045	0,008
	7	0+	0+	0+	0,004	0,021	0,070	0,161	0,267	0,302	0,172	0,063
	8	0+	0+	0+	0+	0,004	0,018	0,060	0,156	0,302	0,387	0,299
	9	0+	0+	0+	0+	0+	0,002	0,010	0,040	0,134	0,387	0,630
10	**0**	0,599	0,349	0,107	0,028	0,006	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	1	0,315	0,387	0,268	0,121	0,040	0,010	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
	2	0,075	0,194	0,302	0,233	0,121	0,044	0,011	0,001	0,000	0,000	0,000
	3	0,010	0,057	0,201	0,267	0,215	0,117	0,042	0,009	0,001	0,000	0,000
	4	0,001	0,011	0,088	0,200	0,251	0,205	0,111	0,037	0,006	0,000	0,000
	5	0+	0,001	0,026	0,103	0,201	0,246	0,201	0,103	0,026	0,001	0,000
	6	0+	0+	0,006	0,037	0,111	0,205	0,251	0,200	0,088	0,011	0,001
	7	0+	0+	0,001	0,009	0,042	0,117	0,215	0,267	0,201	0,057	0,010
	8	0+	0+	0+	0,001	0,011	0,044	0,121	0,233	0,302	0,194	0,075
	9	0+	0+	0+	0+	0,002	0,010	0,040	0,121	0,268	0,387	0,315
	10	0+	0+	0+	0+	0+	0,001	0,006	0,028	0,107	0,349	0,599
11	**0**	0,569	0,314	0,086	0,020	0,004	0+	0+	0+	0+	0+	0+
	1	0,329	0,384	0,236	0,093	0,027	0,005	0,001	0+	0+	0+	0+
	2	0,087	0,213	0,295	0,200	0,089	0,027	0,005	0,001	0+	0+	0+
	3	0,014	0,071	0,221	0,257	0,177	0,081	0,023	0,004	0+	0+	0+
	4	0,001	0,016	0,111	0,220	0,236	0,161	0,070	0,017	0,002	0+	0+
	5	0+	0,002	0,039	0,132	0,221	0,226	0,147	0,057	0,010	0+	0+
	6	0+	0+	0,010	0,057	0,147	0,226	0,221	0,132	0,039	0,002	0+
	7	0+	0+	0,002	0,017	0,070	0,161	0,236	0,220	0,111	0,016	0,001
	8	0+	0+	0+	0,004	0,023	0,081	0,177	0,257	0,221	0,071	0,014

Закінчення табл. 5

n	**m**	**p**										
		0,05	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**
	9	0+	0+	0+	0,001	0,005	0,027	0,089	0,200	0,295	0,213	0,087
	10	0+	0+	0+	0+	0,001	0,005	0,027	0,093	0,236	0,384	0,329
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0,004	0,020	0,086	0,314	0,569
12	**0**	0,540	0,282	0,069	0,014	0,002	0+	0+	0+	0+	0+	0+
	1	0,341	0,377	0,206	0,071	0,017	0,003	0+	0+	0+	0+	0+
	2	0,099	0,230	0,283	0,168	0,064	0,016	0,002	0+	0+	0+	0+
	3	0,017	0,085	0,236	0,240	0,142	0,054	0,012	0,001	0+	0+	0+
	4	0,002	0,021	0,133	0,231	0,213	0,121	0,042	0,008	0,001	0+	0+
	5	0+	0,004	0,053	0,158	0,227	0,193	0,101	0,029	0,003	0+	0+
	6	0+	0+	0,016	0,079	0,177	0,226	0,177	0,079	0,016	0+	0+
	7	0+	0+	0,003	0,029	0,101	0,193	0,227	0,158	0,053	0,004	0+
	8	0+	0+	0,001	0,008	0,042	0,121	0,213	0,231	0,133	0,021	0,002
	9	0+	0+	0+	0,001	0,012	0,054	0,142	0,240	0,236	0,085	0,017
	10	0+	0+	0+	0+	0,002	0,016	0,064	0,168	0,283	0,230	0,099
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0,003	0,017	0,071	0,206	0,377	0,341
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0,002	0,014	0,069	0,282	0,540

Таблиця 6

ЗНАЧЕННЯ $t_{\gamma,\nu} = t(\gamma,\nu)$, ЩО ВИЗНАЧАЮТЬСЯ РІВНІСТЮ: $2\int\limits_0^t f(x)dx = \gamma$,
де $f(x)$ — щільність розподілу стьюдента з ν степенями вільності

ν	**γ**						
	0,75	**0,8**	**0,85**	**0,9**	**0,95**	**0,99**	**0,999**
1	2,414	3,078	4,165	6,314	12,706	63,657	636,619
2	1,604	1,886	2,282	2,920	4,303	9,925	31,599
3	1,423	1,638	1,924	2,353	3,182	5,841	12,924
4	1,344	1,533	1,778	2,132	2,776	4,604	8,610
5	1,301	1,476	1,699	2,015	2,571	4,032	6,869
6	1,273	1,440	1,650	1,943	2,447	3,707	5,959
7	1,254	1,415	1,617	1,895	2,365	3,499	5,408

Закінчення табл. 6

ν	γ						
	0,75	**0,8**	**0,85**	**0,9**	**0,95**	**0,99**	**0,999**
8	1,240	1,397	1,592	1,860	2,306	3,355	5,041
9	1,230	1,383	1,574	1,833	2,262	3,250	4,781
10	1,221	1,372	1,559	1,812	2,228	3,169	4,587
11	1,214	1,363	1,548	1,796	2,201	3,106	4,437
12	1,209	1,356	1,538	1,782	2,179	3,055	4,318
13	1,204	1,350	1,530	1,771	2,160	3,012	4,221
14	1,200	1,345	1,523	1,761	2,145	2,977	4,140
15	1,197	1,341	1,517	1,753	2,131	2,947	4,073
16	1,194	1,337	1,512	1,746	2,120	2,921	4,015
17	1,191	1,333	1,508	1,740	2,110	2,898	3,965
18	1,189	1,330	1,504	1,734	2,101	2,878	3,922
19	1,187	1,328	1,500	1,729	2,093	2,861	3,883
20	1,185	1,325	1,497	1,725	2,086	2,845	3,850
21	1,183	1,323	1,494	1,721	2,080	2,831	3,819
22	1,182	1,321	1,492	1,717	2,074	2,819	3,792
23	1,180	1,319	1,489	1,714	2,069	2,807	3,768
24	1,179	1,318	1,487	1,711	2,064	2,797	3,745
25	1,178	1,316	1,485	1,708	2,060	2,787	3,725
26	1,177	1,315	1,483	1,706	2,056	2,779	3,707
27	1,176	1,314	1,482	1,703	2,052	2,771	3,690
28	1,175	1,313	1,480	1,701	2,048	2,763	3,674
29	1,174	1,311	1,479	1,699	2,045	2,756	3,659
30	1,173	1,310	1,477	1,697	2,042	2,750	3,646

Таблиця 7

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ χ^2

ν	**α**											
	0,001	**0,005**	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**	**0,999**
1	10,828	7,879	6,635	5,024	3,841	2,706	0,016	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000
2	13,816	10,597	9,210	7,378	5,991	4,605	0,211	0,103	0,051	0,020	0,010	0,002
3	16,266	12,838	11,345	9,348	7,815	6,251	0,584	0,352	0,216	0,115	0,072	0,024
4	18,467	14,860	13,277	11,143	9,488	7,779	1,064	0,711	0,484	0,297	0,207	0,091
5	20,515	16,750	15,086	12,833	11,070	9,236	1,610	1,145	0,831	0,554	0,412	0,210
6	22,458	18,548	16,812	14,449	12,592	10,645	2,204	1,635	1,237	0,872	0,676	0,381
7	24,322	20,278	18,475	16,013	14,067	12,017	2,833	2,167	1,690	1,239	0,989	0,598
8	26,124	21,955	20,090	17,535	15,507	13,362	3,490	2,733	2,180	1,646	1,344	0,857
9	27,877	23,589	21,666	19,023	16,919	14,684	4,168	3,325	2,700	2,088	1,735	1,152
10	29,588	25,188	23,209	20,483	18,307	15,987	4,865	3,940	3,247	2,558	2,156	1,479
11	31,264	26,757	24,725	21,920	19,675	17,275	5,578	4,575	3,816	3,053	2,603	1,834
12	32,909	28,300	26,217	23,337	21,026	18,549	6,304	5,226	4,404	3,571	3,074	2,214
13	34,528	29,819	27,688	24,736	22,362	19,812	7,042	5,892	5,009	4,107	3,565	2,617
14	36,123	31,319	29,141	26,119	23,685	21,064	7,790	6,571	5,629	4,660	4,075	3,041
15	37,697	32,801	30,578	27,488	24,996	22,307	8,547	7,261	6,262	5,229	4,601	3,483
16	39,252	34,267	32,000	28,845	26,296	23,542	9,312	7,962	6,908	5,812	5,142	3,942
17	40,790	35,718	33,409	30,191	27,587	24,769	10,085	8,672	7,564	6,408	5,697	4,416
18	42,312	37,156	34,805	31,526	28,869	25,989	10,865	9,390	8,231	7,015	6,265	4,905
19	43,820	38,582	36,191	32,852	30,144	27,204	11,651	10,117	8,907	7,633	6,844	5,407
20	45,315	39,997	37,566	34,170	31,410	28,412	12,443	10,851	9,591	8,260	7,434	5,921
21	46,797	41,401	38,932	35,479	32,671	29,615	13,240	11,591	10,283	8,897	8,034	6,447
22	48,268	42,796	40,289	36,781	33,924	30,813	14,041	12,338	10,982	9,542	8,643	6,983
23	49,728	44,181	41,638	38,076	35,172	32,007	14,848	13,091	11,689	10,196	9,260	7,529
24	51,179	45,559	42,980	39,364	36,415	33,196	15,659	13,848	12,401	10,856	9,886	8,085
25	52,620	46,928	44,314	40,646	37,652	34,382	16,473	14,611	13,120	11,524	10,520	8,649
26	54,052	48,290	45,642	41,923	38,885	35,563	17,292	15,379	13,844	12,198	11,160	9,222
27	55,476	49,645	46,963	43,195	40,113	36,741	18,114	16,151	14,573	12,879	11,808	9,803
28	56,892	50,993	48,278	44,461	41,337	37,916	18,939	16,928	15,308	13,565	12,461	10,391
29	58,301	52,336	49,588	45,722	42,557	39,087	19,768	17,708	16,047	14,256	13,121	10,986
30	59,703	53,672	50,892	46,979	43,773	40,256	20,599	18,493	16,791	14,953	13,787	11,588
31	61,098	55,003	52,191	48,232	44,985	41,422	21,434	19,281	17,539	15,655	14,458	12,196
32	62,487	56,328	53,486	49,480	46,194	42,585	22,271	20,072	18,291	16,362	15,134	12,811
33	63,870	57,648	54,776	50,725	47,400	43,745	23,110	20,867	19,047	17,074	15,815	13,431
34	65,247	58,964	56,061	51,966	48,602	44,903	23,952	21,664	19,806	17,789	16,501	14,057

Закінчення табл. 7

ν	α											
	0,001	**0,005**	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**	**0,999**
35	66,619	60,275	57,342	53,203	49,802	46,059	24,797	22,465	20,569	18,509	17,192	14,688
36	67,985	61,581	58,619	54,437	50,998	47,212	25,643	23,269	21,336	19,233	17,887	15,324
37	69,346	62,883	59,893	55,668	52,192	48,363	26,492	24,075	22,106	19,960	18,586	15,965
38	70,703	64,181	61,162	56,896	53,384	49,513	27,343	24,884	22,878	20,691	19,289	16,611
39	72,055	65,476	62,428	58,120	54,572	50,660	28,196	25,695	23,654	21,426	19,996	17,262
40	73,402	66,766	63,691	59,342	55,758	51,805	29,051	26,509	24,433	22,164	20,707	17,916
41	74,745	68,053	64,950	60,561	56,942	52,949	29,907	27,326	25,215	22,906	21,421	18,575
42	76,084	69,336	66,206	61,777	58,124	54,090	30,765	28,144	25,999	23,650	22,138	19,239
43	77,419	70,616	67,459	62,990	59,304	55,230	31,625	28,965	26,785	24,398	22,859	19,906
44	78,750	71,893	68,710	64,201	60,481	56,369	32,487	29,787	27,575	25,148	23,584	20,576
45	80,077	73,166	69,957	65,410	61,656	57,505	33,350	30,612	28,366	25,901	24,311	21,251
46	81,400	74,437	71,201	66,617	62,830	58,641	34,215	31,439	29,160	26,657	25,041	21,929
47	82,720	75,704	72,443	67,821	64,001	59,774	35,081	32,268	29,956	27,416	25,775	22,610
48	84,037	76,969	73,683	69,023	65,171	60,907	35,949	33,098	30,755	28,177	26,511	23,295
49	85,351	78,231	74,919	70,222	66,339	62,038	36,818	33,930	31,555	28,941	27,249	23,983
50	86,661	79,490	76,154	71,420	67,505	63,167	37,689	34,764	32,357	29,707	27,991	24,674
51	87,968	80,747	77,386	72,616	68,669	64,295	38,560	35,600	33,162	30,475	28,735	25,368
52	89,272	82,001	78,616	73,810	69,832	65,422	39,433	36,437	33,968	31,246	29,481	26,065
53	90,573	83,253	79,843	75,002	70,993	66,548	40,308	37,276	34,776	32,018	30,230	26,765
54	91,872	84,502	81,069	76,192	72,153	67,673	41,183	38,116	35,586	32,793	30,981	27,468
55	93,168	85,749	82,292	77,380	73,311	68,796	42,060	38,958	36,398	33,570	31,735	28,173
56	94,461	86,994	83,513	78,567	74,468	69,919	42,937	39,801	37,212	34,350	32,490	28,881
57	95,751	88,236	84,733	79,752	75,624	71,040	43,816	40,646	38,027	35,131	33,248	29,592
58	97,039	89,477	85,950	80,936	76,778	72,160	44,696	41,492	38,844	35,913	34,008	30,305
59	98,324	90,715	87,166	82,117	77,931	73,279	45,577	42,339	39,662	36,698	34,770	31,020
60	99,607	91,952	88,379	83,298	79,082	74,397	46,459	43,188	40,482	37,485	35,534	31,738
65	105,99	98,11	94,42	89,18	84,82	79,97	50,88	47,45	44,60	41,44	39,38	35,36
70	112,32	104,21	100,43	95,02	90,53	85,53	55,33	51,74	48,76	45,44	43,28	39,04
75	118,60	110,29	106,39	100,84	96,22	91,06	59,79	56,05	52,94	49,48	47,21	42,76
80	124,84	116,32	112,33	106,63	101,88	96,58	64,28	60,39	57,15	53,54	51,17	46,52
85	131,04	122,32	118,24	112,39	107,52	102,08	68,78	64,75	61,39	57,63	55,17	50,32
90	137,21	128,30	124,12	118,14	113,15	107,57	73,29	69,13	65,65	61,75	59,20	54,16
95	143,34	134,25	129,97	123,86	118,75	113,04	77,82	73,52	69,92	65,90	63,25	58,02
100	149,45	140,17	135,81	129,56	124,34	118,50	82,36	77,93	74,22	70,06	67,33	61,92

Таблиця 8

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ СТЬЮДЕНТА

ν	**α**					
	0,001	**0,005**	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**
1	318,309	63,657	31,821	12,706	6,314	3,078
2	22,327	9,925	6,965	4,303	2,920	1,886
3	10,215	5,841	4,541	3,182	2,353	1,638
4	7,173	4,604	3,747	2,776	2,132	1,533
5	5,893	4,032	3,365	2,571	2,015	1,476
6	5,208	3,707	3,143	2,447	1,943	1,440
7	4,785	3,499	2,998	2,365	1,895	1,415
8	4,501	3,355	2,896	2,306	1,860	1,397
9	4,297	3,250	2,821	2,262	1,833	1,383
10	4,144	3,169	2,764	2,228	1,812	1,372
11	4,025	3,106	2,718	2,201	1,796	1,363
12	3,930	3,055	2,681	2,179	1,782	1,356
13	3,852	3,012	2,650	2,160	1,771	1,350
14	3,787	2,977	2,624	2,145	1,761	1,345
15	3,733	2,947	2,602	2,131	1,753	1,341
16	3,686	2,921	2,583	2,120	1,746	1,337
17	3,646	2,898	2,567	2,110	1,740	1,333
18	3,610	2,878	2,552	2,101	1,734	1,330
19	3,579	2,861	2,539	2,093	1,729	1,328
20	3,552	2,845	2,528	2,086	1,725	1,325
21	3,527	2,831	2,518	2,080	1,721	1,323
22	3,505	2,819	2,508	2,074	1,717	1,321
23	3,485	2,807	2,500	2,069	1,714	1,319
24	3,467	2,797	2,492	2,064	1,711	1,318
25	3,450	2,787	2,485	2,060	1,708	1,316
26	3,435	2,779	2,479	2,056	1,706	1,315
27	3,421	2,771	2,473	2,052	1,703	1,314
28	3,408	2,763	2,467	2,048	1,701	1,313
29	3,396	2,756	2,462	2,045	1,699	1,311
30	3,385	2,750	2,457	2,042	1,697	1,310
40	3,307	2,704	2,423	2,021	1,684	1,303
50	3,261	2,678	2,403	2,009	1,676	1,299
60	3,232	2,660	2,390	2,000	1,671	1,296
120	3,160	2,617	2,358	1,980	1,658	1,289
∞	3,090	2,576	2,326	1,960	1,645	1,282

Таблиця 9

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ ФІШЕРА—СНЕДЕКОРА $F(\nu_1, \nu_2)$
(ν_1 — кількість степенів вільності чисельника, ν_2 — кількість степенів вільності знаменника)

Рівень значущості 0,01																			
ν_2	ν_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57

Продовження табл. 9

Рівень значущості 0,01																			
ν_2	ν_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

Рівень значущості 0,025

ν_2	ν_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28	968,63	976,71	984,87	993,10	997,25	1001	1006	1010	1014	1018
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,41	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00

Продовження табл. 9

Рівень значущості 0,025																			
ν_2	ν_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04	1,97
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95	1,88
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93	1,85
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91	1,83
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89	1,81
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,94	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,31
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00

Рівень значущості 0,05																			
ν_2	ν_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36

6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62

Закінчення табл. 9

Рівень значущості 0,05																			
ν_2	ν_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Рівень значущості 0,1																			
ν_2	ν_1																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06	63,33
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48	9,49
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14	5,13
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78	3,76
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12	3,10
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74	2,72
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49	2,47
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32	2,29
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18	2,16
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08	2,06
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00	1,97
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93	1,90
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88	1,85

14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83	1,80
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79	1,76
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67	1,63
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64	1,61
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,87	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,84	1,80	1,74	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59	1,55
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57	1,53
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54	1,50
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53	1,49
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52	1,48
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55	1,51	1,47
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50	1,46
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42	1,38
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35	1,29
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26	1,19
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,24	1,17	1,00

Таблиця 10

ЗНАЧЕННЯ $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162

Таблиця 11

КРИТИЧНІ ТОЧКИ λ_α РОЗПОДІЛУ КОЛМОГОРОВА: $P(\lambda > \lambda_\alpha) = \alpha$.

α	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
λ_α	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

Таблиця 12

КРИТИЧНІ ТОЧКИ R_α КРИТЕРІЮ ЗНАКІВ: $P(r > R_\alpha) = \alpha$.

n	**α**			**n**	**α**			**n**	**α**		
	0,01	**0,025**	**0,05**		**0,01**	**0,025**	**0,05**		**0,01**	**0,025**	**0,05**
5			0	**34**	9	10	11	**63**	21	23	24
6		0	0	**35**	10	11	12	**64**	22	23	24
7	0	0	0	**36**	10	11	12	**65**	22	24	25
8	0	0	1	**37**	10	12	13	**66**	23	24	25
9	0	1	1	**38**	11	12	13	**67**	23	25	26
10	0	1	1	**39**	11	12	13	**68**	23	25	26
11	1	1	2	**40**	12	13	14	**69**	24	25	27
12	1	2	2	**41**	12	13	14	**70**	24	26	27
13	1	2	3	**42**	13	14	15	**71**	25	26	28
14	2	2	3	**43**	13	14	15	**72**	25	27	28
15	2	3	3	**44**	13	15	16	**73**	26	27	28
16	2	3	4	**45**	14	15	16	**74**	26	28	29
17	3	4	4	**46**	14	15	16	**75**	26	28	29
18	3	4	5	**47**	15	16	17	**76**	27	28	30
19	4	4	5	**48**	15	16	17	**77**	27	29	30
20	4	5	5	**49**	15	17	18	**78**	28	29	31
21	4	5	6	**50**	16	17	18	**79**	28	30	31
22	5	5	6	**51**	16	18	19	**80**	29	30	32
23	5	6	7	**52**	17	18	19	**81**	29	31	32
24	5	6	7	**53**	17	18	20	**82**	30	31	33
25	6	7	7	**54**	18	19	20	**83**	30	32	33
26	6	7	8	**55**	18	19	20	**84**	30	32	33
27	7	7	8	**56**	18	20	21	**85**	31	32	34
28	7	8	9	**57**	19	20	21	**86**	31	33	34
29	7	8	9	**58**	19	21	22	**87**	32	33	35
30	8	9	10	**59**	20	21	22	**88**	32	34	35
31	8	9	10	**60**	20	21	23	**89**	33	34	36
32	8	9	10	**61**	20	22	23	**90**	33	35	36
33	9	10	11	**62**	21	22	24	**91**	33	35	37

ЗМІСТ

Передмова 3

РОЗДІЛ 1. **ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ** 4

§ 1. Алгебра подій. Простір елементарних подій 4
§ 2. Елементи комбінаторики 7
§ 3. Обчислення ймовірностей випадкових подій 14
§ 4. Теореми додавання і множення ймовірностей 22
§ 5. Формула повної ймовірності. Формули Байєса 37
§ 6. Повторні незалежні випробування 46
§ 7. Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин. 57
§ 8. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин 67
§ 9. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин (НВВ) 76
§ 10. Функції випадкового аргументу. 85
§ 11. Системи випадкових величин 91
§ 12. Граничні теореми теорії ймовірностей 100

РОЗДІЛ 2. **МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА** 109

§ 1. Статистичний розподіл, емпірична функція, полігон, гістограма 109
§ 2. Числові характеристики статистичного розподілу вибірки 114
§ 3. Точкові оцінки параметрів генеральної сукупності . . . 141
§ 4. Точність і надійність оцінки. Інтервальні оцінки . . . 146
§ 5. Перевірка статистичних гіпотез. 163
§ 6. Парна лінійна регресія 203

Відповіді 215
Література 251
Додатки 252

Навчальне видання

ГРИГУЛИЧ Світлана Миколаївна
ЛІСОВСЬКА Валентина Петрівна
МАКАРЕНКО Олександр Іванович та ін.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Збірник задач

Редактор *О. Шерстюк*
Коректор *Ю. Пригорницький*
Верстка *Н. Пінчук*

Підп. до друку 04.06.14. Формат 60×84/16. Папір офсет. № 1.
Гарнітура Тип Таймс. Друк офсетний. Ум.-друк. арк. 16,27.
Обл.-вид. арк. 18,52. Зам. 11-4337.

Державний вищий навчальний заклад
«Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»
03680, м. Київ, проспект Перемоги, 54/1
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, № 235 від 07.11.2000)
Тел./факс (044) 537-61-41; тел. (044) 537-61-44
E-mail: publish@kneu.kiev.ua