ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФІВ

Теорія графів відноситься до скінченої геометрії.

Перша робота з теорії графів, яка належить Л.Ейлеру, з'явилася в 1736 році. Термін «граф» вперше з’явився у 1936 році в книзі видатного угорського математика Д. Кенига (Денеш Кениг – Dénes Konig (1884 1944)).

Спочатку ця теорія була пов'язана з математичними головоломками й іграми. Проте згодом теорія графів почала використовуватися в топології, алгебрі, теорії чисел. У наш час теорія графів знаходить застосування в найрізноманітніших областях науки, техніки і практичної діяльності.

Як розділ дискретної математики, теорія графів має численні застосування. Вона використовується в задачах керування виробництвом, при проектуванні електричних і комп’ютерних мереж, плануванні транспортних перевезень, побудові молекулярних схем. Застосовується теорія графів також в економіці, психології, соціології, біології.

Найбільш широке застосування методи теорії графів знаходять у програмуванні, тому що теорія графів надає дуже зручну мову для опису програмних (і багатьох інших) моделей. Струнка система спеціальних термінів і позначень теорії графів дозволяють просто і доступно описувати складні і тонкі речі. Особливо важлива наявність наочної графічної інтерпретації поняття графа. Сама назва «граф» має на увазі наявність графічної інтерпретації.

Наступні питання присвячені опису мови теорії графів.

1. Основні характеристики графів. Зображення графів

<u>Означення.</u> ***Графом (скінченим графом)*** $G=(V,\ E)$ *називається сукупність двох множин – скінченої множини* $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ *і множини* $E=\{e_i=(v_i,v_j):v_i,v_j\in V\}$ *пар елементів з* V. *Елементи множини* V *називаються* ***вершинами*** *графа, а елементи множини* E *– його* ***ребрами***.

Якщо $e_i=(v_i,v_j)$ – ребро графа G, то вершини v_i і v_j називаються кінцями ребра e_i. Про ребро e_i кажуть, що воно з'єднує вершини v_i і v_j.

<u>Приклад 1</u>. Нехай $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,

$$E=\{e_1=(v_1,v_2),e_2=(v_1,v_3),e_3=(v_2,v_3),e_4=(v_2,v_4),e_5=(v_3,v_4)\}.$$

Тоді множини V і E визначають граф $G=(V,\ E)$.

Будь-який граф $G=(V,\ E)$ визначається відношенням ***інцидентності*** між множинами вершин V і ребер E. Якщо вершина v є кінцем ребра e, то кажуть, що v інцидентна e. Відношення інцидентности є узагальненням відношення належності, воно нерефлексивне і симетричне. Зауважимо, що кожен елемент $e_i \in E$ інцидентний точно двом елементам v_i і v_j з V.

Означення. *Два ребра, інцидентні одній вершині, називаються* ***суміжними****; дві вершини, інцидентні одному ребру, також називаються* ***суміжними****.*

Часто розглядають наступні поріднені до графів об'єкти.

Означення. *Якщо елементами множини* E *є* *впорядковані пари, то граф* G *називається* ***орієнтованим*** *(або* ***орграфом****). В цьому випадку елементи множини* V *називаються* ***вузлами****, а елементи множини* E *–* ***дугами****. В орієнтованім графі перша за порядком вершина, інцидентна ребру, називається його початком, друга – його кінцем.* Орграф позначають $\vec{G} = \left(V, \vec{E}\right)$.

Приклад 2. Нехай $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$$\vec{E} = \left\{e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_3, v_1), e_3 = (v_3, v_4), e_4 = (v_2, v_3)\right\}.$$

Множини V і E визначають орграф $\vec{G} = \left(V, \vec{E}\right)$.

Означення. *Якщо елементом множини* E *є пара однакових елементів множини* V*, то такий елемент множини* E *називається* ***петлею****, а граф називається* ***графом з петлями*** *(або* ***псевдографом****).*

Означення. *Якщо* E *є не множиною, а набором, який містить декілька однакових елементів, то ці елементи називаються* ***кратними ребрами****, а граф називається* ***мультиграфом****.*

Приклад 3. Нехай $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$,

$$E = \left\{e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_2), e_3 = (v_2, v_4), e_4 = (v_4, v_5), e_5 = (v_4, v_5)\right\}.$$

Тоді $G = (V,\ E)$ – граф (мультиграф), (v_2, v_2) – петля, (v_5, v_6) – кратне ребро.

Відзначимо, що *множина* V *вершин графа не може бути порожньою*, а множина E ребер – може.

Приклад 4. Нехай $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \varnothing$. Тоді $G = (V,\ E)$ – граф.

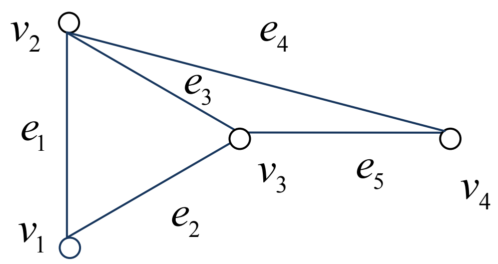
Введене поняття графа є абстрактним. Для наступних розглядів бажано мати яке-небудь наочне зображення графа. Розглянемо в евклідовому просторі фігури Γ певного вигляду. Кожна з таких фігур Γ складається з різних вершин $b_1, b_2, ..., b_n$ і кривих, кожна з яких з'єднує деякі пари вершин (b_i, b_j) (можливе виродження $b_i = b_j$). Криві можуть бути дугами кіл чи відрізками прямих. Припустимо також, що ніяка внутрішня точка кривої фігури Γ не є вершиною чи внутрішньою точкою іншої кривої.

Означення. *Фігура* Γ *називається* ***геометричним зображенням графа*** G *, якщо існує взаємно однозначна відповідність між вершинами фігури* Γ *и вершинами графа* G*, а також між кривими фігури* Γ *и ребрами графа* G *така, що якщо* $(b_i, b_j) \leftrightarrow (v_i, v_j)$, *то* $b_i \leftrightarrow v_i$, $b_j \leftrightarrow v_j$ *(відповідні криві і ребра з'єднують відповідні вершини).*

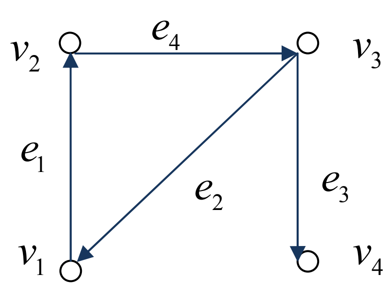
При зображенні орграфів напрямки ребер зображуються стрілками, які примикають до їх кінців. Орграф може мати петлі, кратні ребра, а також ребра, які з’єднують одні й ті самі вершини, але йдуть в протилежних напрямках.

Приклад 5. Наступні фігури є геометричним зображенням графів з прикладів 1 – 4.

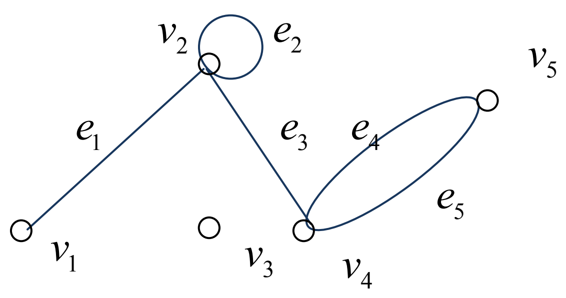
Приклад 1.



Приклад 2.



Приклад 3.



Приклад 4.

v_3 – ізольована вершина; v_1 – кінцева вершина;

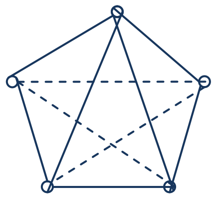
ребро (v_2, v_2) – петля, ребро (v_5, v_6) – кратне ребро.

Виникає питання, чи будь-який граф G можна зобразити в евклідовому просторі, і яка повинна бути мінімальна розмірність цього простору? Відповідь на це питання для скінчених графів дається наступною теоремою:

Теорема. ***(Про геометричне зображення скінченого графа).*** *Будь-який скінчений граф може бути зображений у 3-вимірному евклідовому просторі.*

Доведення. Нехай граф G містить n вершин і m ребер. Візьмемо довільну пряму і проведемо через неї пучок з m площин. На прямій виберемо m точок $b_1, b_2, ..., b_n$ і зіставимо їх вершинам графа G $v_1, v_2, ..., v_n$ відповідно. Кожному ребру графа G поставимо у відповідність площину з пучка. Нехай (v_i, v_j) – ребро графа G. У площині, що відповідає цьому ребру, з'єднаємо вершини b_i й b_j дугою кола. Виконаємо таку побудову для всіх ребер графа G. В результаті одержимо геометричну фігуру Γ, що, очевидно, є зображенням графа G. □

Зауваження. Теорема виявляється невірною для евклідових просторів вимірності, меншої 3. Наприклад, наступний граф не допускає зображення на площині:



Означення. *Число ребер, інцидентних вершині v, називається* ***степенем вершини*** *v і позначається $d(v)$.*

$$\forall v \in V \ \ 0 \le d(v) \le |V| - 1.$$

Означення. *Якщо степінь вершини дорівнює 0 ($d(v) = 0$), то вершина називається* ***ізольованою***. *Якщо степінь вершини дорівнює 1 ($d(v) = 1$), то вершина називається* ***кінцевою*** *або* ***висячою***. *Ребро, інцидентне кінцевій вершині, також називається* ***кінцевим***.

Означення. *В орграфі число дуг, що виходять з вершини v, називається* ***півстепенем виходу*** *(позначається $d^-(v)$), і вхідних –* ***півстепенем заходу*** *(позначається $d^+(v)$).*

Теорема **(Ейлера)**. *Сума степенів вершин графа дорівнює подвоєній кількості ребер:*

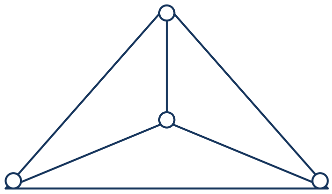
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|,$$

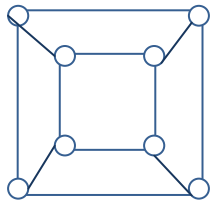
$$\sum_{v \in V} d^-(v) + \sum_{v \in V} d^+(v) = 2 \cdot |E| \text{ для орграфа.}$$

Доведення: при підрахунку суми ступенів вершин кожне ребро враховується два рази: для одного кінця ребра і для іншого. □

Означення. *Якщо степінь усіх вершин графа однакова і дорівнює числу k, то* ***граф*** *називається* ***регулярним степеня*** *k.*

Приклад 6. Регулярні графи степеня 3:





Розглянувши графи як суцільні об'єкти, визначимо тепер різні складові елементи графів.

<u>Означення.</u> ***Підграфом*** *графа* $G=(V,E)$ *називається* ***граф*** $G'=(V',E')$ *(позначається* $G'\subset G$*), всі вершині і ребра якого містяться серед вершин і ребер графа* G*, тобто* $V'\subset V$*,* $E'\subset E$*. Підграф* G' *називається* ***власним****, якщо він відрізняється від самого графа* G*, тобто* $V'\subset V$ *і* $E'\subset E$ *і* $V'\neq V$ *або* $E'\neq E$*.*G*.*

<u>Означення.</u> *Якщо* $V'=V$*, а* $E'\subset E$*, то* G' *називається* ***остовним підграфом*** *графа* G. Таким чином, остовний підграф містить всі вершини даного графа. Неважко довести, що в кожному графі обов'язково є остовний підграф.

<u>Означення.</u> *Граф називається* ***повним****, якщо для будь-якої пари вершин* v_i*,* v_j *існує ребро* (v_i,v_j)*. Повний граф має максимально можливе число ребер*.

2. Операції над графами

За допомогою різних операцій можна будувати графи з більш простих, переходити від одного графа до іншого, більш простого, розбивати граф на більш прості, у заданому класі графів переходити від одного графа до іншого і т.д.

Найбільш вживаними одномісними операціями є:

1. Операція вилучення вершини з графа G, що полягає у вилученні деякої вершини разом з інцидентнимі їй ребрами.

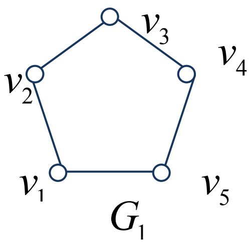
2. Операція вилучення ребра з графа $G=(V,E)$ полягає у вилученні відповідної пари з E. При цьому усі вершини зберігаються.

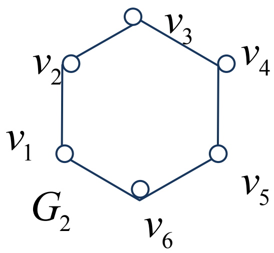
3. Операція додавання вершини до графа G. Додану вершину можна з'єднати ребрами з деякими вершинами графа G.

4. Операція додавання ребра до графа G між двома вершинами.

Вилучаючи ребро і додаючи нову вершину, що з'єднується ребром з кожною вершиною вилученого ребра, робимо операцію *підрозділу* ребра графа G.

<u>Приклад 7.</u>





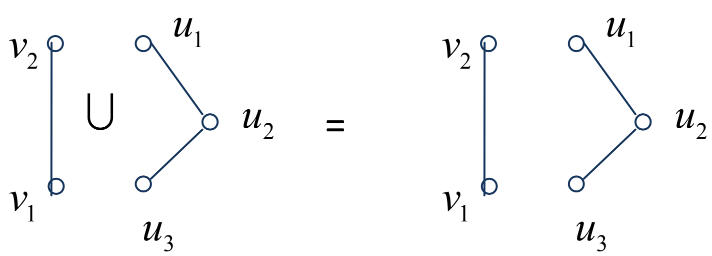
$$G_1=(V_1,E_1),\ G_2=(V_2,E_2)$$
$$V_2=V_1\cup\{v_6\},$$
$$E_2=E_1\setminus\{(v_1,v_5),(v_6,v_5)\}.$$

Означення. *Граф G_2 називається* ***підрозділом графа*** G_1**,** *якщо він може бути отриманий з G_1 шляхом застосування скінченного числа операцій підрозділу ребер.*

Найбільш уживаними 2-місними операціями над графами є об'єднання і декартовий добуток.

Означення. *Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ – два графи таких, що $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.* ***Об'єднанням графів*** *G_1 і G_2 називається граф $G = (V, E) = G_1 \cup G_2$ з множиною вершин $V = V_1 \cup V_2$ і множиною ребер $E = E_1 \cup E_2$.*

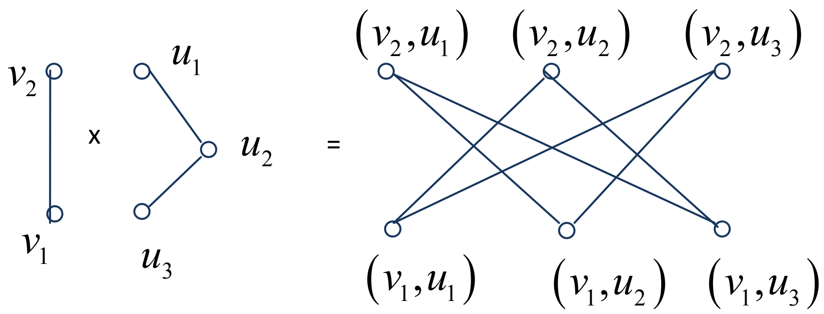
Приклад 8.



Нехай задані графи G_1 і G_2 з множинами вершин V_1 і V_2.

Означення. Декартовим добутком *графів G_1 і G_2 називається граф $G = G_1 \times G_2$, множиною вершин якого є елементи декартового добутку $V_1 \times V_2$ множин V_1* і V_2, причому дві з цих вершин (u_1, u_2) і (v_1, v_2) суміжні тоді і тільки тоді, коли або $u_1 = v_1$ і вершина u_2 суміжна з вершиною v_2, або $u_2 = v_2$ і вершина u_1 суміжна з вершиною v_1.

Приклад 9.



3. Матричні способи задання графа

Граф $G=(V,\ E)$ вважається заданим, якщо визначені множини його вершин $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ і ребер $E=\{e_1,e_2,...,e_m\}$, а також відношення інцидентності.

Для алгебраїчного задання графів використовуються матриці суміжності і матриці інцидентності.

а) Задання графа матрицею суміжності

***<u>Означення.</u>* Матрицею суміжності графа** *G називається квадратна $n\times n$ – матриця $A(G)=\left\{a_{ij},i,j=\overline{1,n}\right\}$, де*

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\ \text{ÿêù î}\ \ (v_i,v_j)\in E;\\ 0,\ \text{ÿêù î}\ \ (v_i,v_j)\notin E.\end{cases}$$

Стовпцям і рядкам матриці суміжності відповідають вершини графа. Для неорієнтованого графа a_{ij} – число ребер, іинцидентних i-й і j-й вершинам. Для орієнтованого графа a_{ij} – число ребер з початком у i-й і кінцем у j-й вершині.

<u>Приклад 10</u>. Матриці суміжності графів з прикладів 1 і 2:

Приклад 1

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

Приклад 2

$$A(\vec{G})=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

Властивості матриці суміжності:

1. Матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична (тобто $a_{ij}=a_{ji}$), а орієнтованого – не обов'язково.
2. Сума елементів i-го рядка або i-го стовпця матриці суміжності неорієнтованого графа дорівнює степені вершини v_i.
3. Сума елементів верхнього правого трикутника, розташованого над головною діагоналлю матриці суміжності неорієнтованого графа, включаючи останню, дорівнює кількості ребер графа.
4. Сума елементів i-го рядка матриці суміжності орієнтованого графа дорівнює півстепеню виходу вершини v_i.

5. Сума елементів i-го стовпця матриці суміжності орієнтованого графа дорівнює півстепеню виходу вершини v_i.
6. Сума всіх елементів матриці суміжності орієнтованого графа дорівнює кількості його ребер.

б) Задання графа матрицею інцидентності

<u>Означення.</u> ***Матрицею інцидентності*** *графа* G *називається* $m \times n$ *– матриця* $B(G) = \left\{ b_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m} \right\}$*, де*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо ребро } e_i \text{ інцидентно вершині } v_j; \\ 0, \text{ в противному випадку.} \end{cases}$$

<u>Означення</u>. ***Матрицею іинцидентності орграфа*** $\vec{G}$ *називається* $m \times n$ *– матриця* $B(\vec{G}) = \left\{ b_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m} \right\}$*, де*

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ якщо вершина } v_j \text{ - початок ребра } e_i; \\ 1, \text{ якщо вершина } v_j \text{ - кінець ребра } e_i; \\ \alpha \text{ - будь - яке число, відмінне від -1, 0, 1,} \\ \quad \text{якщо ребро } e_i \text{ - петля, а } v_j \text{ - інцидентна їй вершина;} \\ 0, \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

<u>Приклад 11.</u> Матриці інцидентності графів з прикладів 1 і 2

Приклад 1

$$B(G) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Приклад 2

$$B(\vec{G}) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Властивості матриці інцидентності:

1. У кожнім рядку матриці інцидентності неорієнтованого або орієнтованого графа тільки два елементи не дорівнюють 0 (або один, якщо ребро є петлею). (Тому такий спосіб завдання недостатньо економний.)
2. Сума елементів i-го рядка матриці інцидентності орієнтованого графа дорівнює 0.

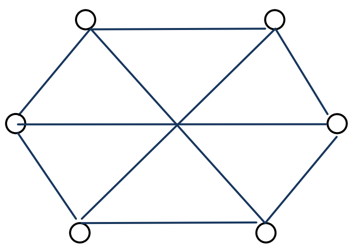
4. Ізоморфізм графів

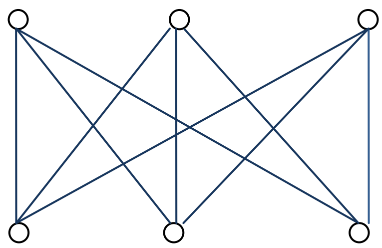
Граф може бути представлений різними способами. Він може бути визначений множинами вершин і ребер (вузлів і дуг), зображений на кресленні, заданий матрицею суміжності або матрицею інцидентності. Вид креслення залежить від ліній і взаємного розташування вершин, вид матриць залежить від нумерації вершин і ребер. Іноді не так легко зрозуміти, чи однакові графи, задані різними кресленнями чи різними матрицями.

Означення. *Графи* $G=(V,E)$ *і* $G'=(V',E')$ *називаються* ***ізоморфними****, якщо існує взаємно однозначна відповідність між множинами їхніх вершин і множинами їхніх ребер, яка зберігає відношення інцидентності (така, що відповідні ребра з'єднують відповідні вершини).*

В силу цього означення абстрактний граф і його геометричне зображення є ізоморфними графами. Отже, замість абстрактних граф можна розглядати їхні зображення. Інакше кажучи, із графами можна працювати як з геометричними об'єктами.

Приклад 12. Графи, зображені на наступних малюнках, є ізоморфними:





Як ми відзначали вище (питання 2), граф вважається цілком заданим, якщо нумерація його вершин зафіксована. Ізоморфні графи відрізняються тільки нумерацією вершин. Тому, щоб довідатися, чи задають дві різні матриці суміжності ізоморфні графи, достатньо перевірити, чи подібні ці матриці, чи ні: зробити всі можливі перестановки рядків і стовпців першої матриці. Якщо в результаті виникне матриця, яка дорівнює другий, то графи, задані цими матрицями суміжності, ізоморфні.

Матриця інцидентності графа залежить від нумерації ребер і вершин. Перехід від однієї пари нумерацій до іншої здійснюється за допомогою перестановок множин вершин і ребер. Щоб довідатися, чи задають різні матриці інцидентності ізоморфні графи, достатньо перевірити, чи існує такий перехід чи ні.

Ізоморфізм графів є відношенням еквівалентності, тобто має властивості рефлексивности, симетричності, транзитивності. Графи розглядаються з точністю до ізоморфізму, тобто розглядаються як класи еквівалентності за відношенням ізоморфізму.

Означення. *Числова характеристика, однакова для всіх ізоморфних графів, називається* ***інваріантом графа****.*

Приклад 13. Число вершин $|V|$ і число ребер $|E|$ – інваріанти графа $G=(V,E)$. Степінь регулярності також є інваріантом графа.

Зауваження. Невідомо ніякого набору інваріантів, що визначають граф з точністю до ізоморфізму.

Приклад 14. Числа вершин, ребер і число суміжних вершин для кожної вершини не визначають граф. У наступних графів зазначені інваріанти збігаються, але при цьому графи не ізоморфні. Наприклад:

Позначимо через $\gamma(m)$ максимальне число попарно неізоморфних графів (без ізольованих вершин) з m ребрами. Оцінку зверху цього числа дає наступна

Теорема. **(Оцінка числа неізоморфних графів)**

$$\gamma(m) > c_1(c_2 m)^m, \text{ де } c_1, c_2 \text{ – деякі константи.}$$

Доведення. Для доведення нам знадобляться допоміжні відомості з комбінаторики і аналізу:

1. Число комбінацій з повтореннями з n елементів по k, тобто число будь-яких підмножин з k елементів деякої заданої основної множини, яка містить n різних елементів, по скільки завгодно екземплярів кожного, знаходиться за формулою $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

2. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e \Rightarrow n! > \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Очевидно, що граф з m ребрами має не більше, ніж $2m$ вершин. Занумеруємо вершини графа натуральними числами: 1,2,3,... . Число пар вершин, які можуть поєднуватися ребрами не перебільшує величини

$$r = \bar{C}_{2m}^2 = C_{2m+2-1}^2 = C_{2m+1}^2 = \frac{(2m+1)!}{2!(2m-1)!} = \frac{(2m+1)\cdot 2m\cdot(2m-1)!}{2!(2m-1)!} = m(2m+1).$$

Оскільки $\gamma(m)$ не перебільшує максимального числа занумерованих попарно не ізоморфних графів з m ребрами, а це число не більше, ніж число комбінацій з повтореннями з r елементів по m, то

$$\gamma(m) \le \bar{C}_r^m = C_{r=m-1}^m = \frac{(r+m-1)!}{m!(r-1)!} \le \frac{(r+m-1)^m}{m!} < \frac{(2m^2+2m)^m}{\left(\dfrac{m}{e}\right)^m} =$$

$$=\left(\frac{\left(2m^2+2m\right)e}{m}\right)^m=\left(\frac{m+1}{m}\right)^m\left(2em\right)^m=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(2em\right)^m<\underbrace{e\left(2em\right)^m}_{c_1\ c_2}.\ \square$$

<u>Наслідок.</u> Максимальне число занумерованих попарно неізоморфних графів з m ребрами не перебільшує $c_1\left(c_2m\right)^m$.