Гапей М.Ю. ПД-21

Тема роботи: **«Функціональні ряди та ряди Фур'є»**

Мета роботи: навчитись розкладати функції в ряд Тейлора та в ряд Фур'є, використовуючи програму Maxima.

Варіант 5

Завдання 1. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n+1)^4}{(n+2)\cdot\left(x^2+3x+3\right)^n}.$$

Завдання 2. Знайти перші 6 доданків ряду Тейлора для функції f(x) = $\frac{e^x-2}{x^2+1}$ в точці x_0 = 1. Записати частинну суму $S_6(x)$. Побудувати графіки функцій f(x) та $S_6(x)$ в околі точці x_0 в одній системі координат.

Завдання 3. Розкласти функцію f(x) = $\frac{x+1}{x^2+1}$ в околі точці x_0 = -1 в ряд Тейлора.

Завдання 4. Розкласти в ряд Фур'є функцію f(x) = x^2-x+1 на інтервалі $(-2;\, 2)$.

1. Знайти загальні вирази для коефіцієнтів a_0, a_n, b_n.в явному вигляді.
2. Знайти числові значення коефіцієнтів a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5.

Завдання 1. Розв'язок:

Застосуємо ознаку Даламбера.

```
(%i1) a(n,x):=3^n·(n+1)^4/((n+2)·(x^2+3·x+3)^n);
```

(%o1) $a(n,x) := \frac{3^n\,(n+1)^4}{(n+2)\,(x^2+3x+3)^n}$

```
(%i2) dalamb: a(n+1,x)/a(n,x);
```

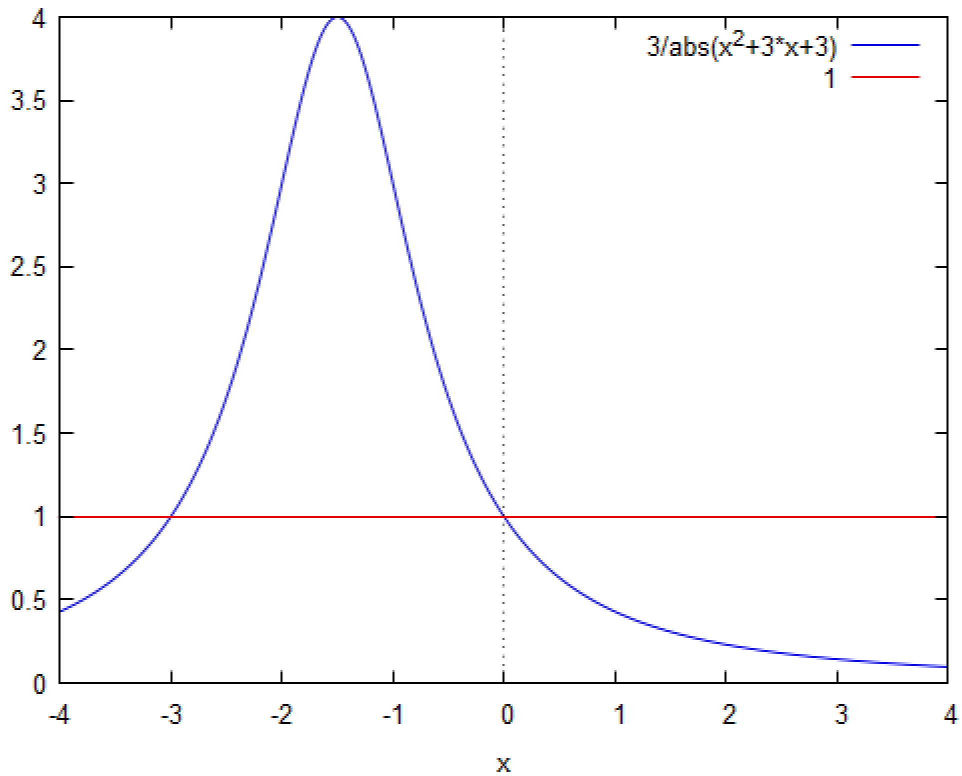
(dalamb) $\frac{3\,(n+2)^5}{(n+1)^4\,(n+3)\,(x^2+3x+3)}$

```
(%i4) lim: limit(dalamb,n,inf);
```

(lim) $\frac{3}{x^2+3x+3}$

Графічно розв'яжемо нерівність abs(3/(x^2+3x+3)<1

```
(%i8) wxplot2d([abs(lim),1],[x,−4,4]);
```



З графіка видно, що розв'язком буде область (-inf; 3) U (0;+inf).
Дослідимо ряд на кінцях інтервалів:

(%i9) a(n,−3);

(%o9) $\dfrac{(n+1)^4}{n+2}$

(%i10) a(n,0);

(%o10) $\dfrac{(n+1)^4}{n+2}$

Очевидно, що в точках x={0, 3} ряд розбігається, тому
остаточно, область збіжності ряду має вигляд: (-inf; 3) U (0;+inf).

Завдання 2. Розв'язок:

Задаємо функцію *f*

(%i4) f:(exp(x)−2)/(x^2+1);

(f) $\dfrac{\%e^x-2}{x^2+1}$

та точку x_0

(%i5) x0: 1;

(x0) 1

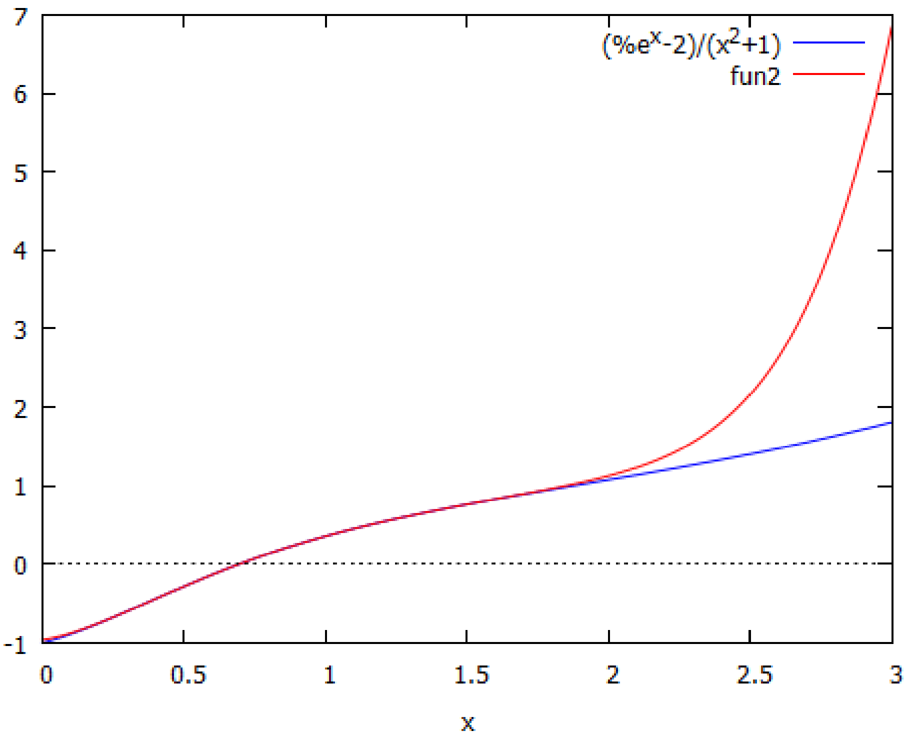
Знаходимо суму перших шести членів розкладу в ряд Тейлора в околі точки x_0

(%i9) s: taylor(f,x,x0,6);

$$\text{(s)}\quad \frac{\%e-2}{2}+(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{\%e\,(x-1)^3}{12}-\frac{(\%e-4)\,(x-1)^4}{16}+\frac{(\%e-10)\,(x-1)^5}{40}+\frac{(\%e+18)\,(x-1)^6}{144}+...$$

Будуємо графіки функції f та частинної суми перших шести членів розкладу в ряд Тейлора в околі точки x_0

(%i16) plot2d([f,s],[x,0,3,1.5])$;



Завдання 3. Розв'язок:

Задаємо функцію *f*

(%i36) f: (x+1)/(x^2+1);

$$\text{(f)}\quad \frac{x+1}{x^2+1}$$

та точку x_0

(%i37) x0:−1;

(x0) −1

Виводимо десять перших членів розкладу в ряд Тейлора

(%i45) taylor(f,x,x0,10);

$$\text{(\%o45)/T/}\quad \frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x+1)^3}{4}-\frac{(x+1)^5}{8}-\frac{(x+1)^6}{8}-\frac{(x+1)^7}{16}+\frac{(x+1)^9}{32}+\frac{(x+1)^{10}}{32}+...$$

Завдання 4. Розв'язок:

Задаємо функцію *f*

(%i1) f: x^2−x+1;

$$\text{(f)}\quad x^2-x+1$$

та половину періоду розкладу в ряд Фур'є

(%i2) p: 1;

(p) 1

Завантажуємо пакет fourie

(%i3) load(fourie)$

Та знаходимо коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є

(%i20) fourier(f,x,p);

(%t20) $a_0=\frac{4}{3}$

(%t21) $a_n=\frac{4\sin(\pi n)}{\pi n}-\frac{4\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3}+\frac{4\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}$

(%t22) $b_n=\frac{2\cos(\pi n)}{\pi n}-\frac{2\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2}$

(%o22) [%t20,%t21,%t22]

Спрощуємо результат

(%i23) foursimp(%);

(%t23) $a_0=\frac{2^2}{3}$

(%t24) $a_n=\frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

(%t25) $b_n=\frac{2(-1)^n}{\pi n}$

(%o25) [%t23,%t24,%t25]

Знаходимо п'ять перших коефіцієнтів розкладу

(%i26) create_list(ev(%t24,n=i),i,1,5);

(%o26) $[a_1=-\frac{4}{\pi^2}, a_2=\frac{1}{\pi^2}, a_3=-\frac{4}{9\pi^2}, a_4=\frac{1}{4\pi^2}, a_5=-\frac{4}{25\pi^2}]$

(%i27) create_list(ev(%t25,n=i),i,1,5);

(%o27) $[b_1=-\frac{2}{\pi}, b_2=\frac{1}{\pi}, b_3=-\frac{2}{3\pi}, b_4=\frac{1}{2\pi}, b_5=-\frac{2}{5\pi}]$

Висновок: навчився розкладати функції в ряд Тейлора та в ряд Фур'є, використовуючи програму Maxima.