Лабораторна робота 1 Варіант 18

Завдання 1.

Оскільки порядок розкладу предметів має значення, отримуємо $A_{10}^{3} = 720$

В-дь: 720

Завдання 2.

Всього маємо $C_{80}^{3} C_{3}^{1} = 246\,480$ способів

В-дь: 246 480

Завдання 3.

$$\frac{101! + 99!}{99!} = 101 \cdot 100 + 1 = 10101$$

В-дь: 10101

Завдання 4.

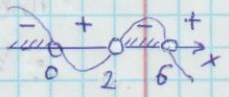
$$\frac{A_{x+4}^{4}}{(x+2)!} < \frac{15}{(x-1)!} \iff \frac{(x+4)!}{x!(x+2)!} < \frac{15}{(x-1)!}, \quad x \geq 1$$

Оскільки $(x-1)!$ завжди більше нуля при $x \in N$ маємо:

$$\frac{(x+4)!\,(x-1)!}{x!\,(x+2)!} < 15$$

Звідси: $\frac{(x+4)(x+3)}{x} - \frac{15x}{x} < 0$

$$\frac{x^2 - 8x + 12}{x} < 0 \Rightarrow \frac{(x-6)(x-2)}{x} < 0$$




$x \in (-\infty; 0) \cup (2; 6)$

Оскільки $x \geq 1$ маємо:

$$\begin{cases} x \in [1; +\infty) \\ x \in (-\infty; 0) \cup (2; 6) \end{cases} \Rightarrow x \in (2; 6)$$

В-дь: $x = 3, 4, 5$ – для $x \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$

Примітка: $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = (s-1)!$

Тоді наприклад $\Gamma(\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$

Гамма функція невизначена лише при

$s = \{0, -1, -2, \dots\}$

Інтеграл Гауса: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Може бути взятим через подвійний інтеграл, а також вираженій через Гамма ф-ю

$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \Rightarrow \Phi = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Нехай $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \therefore I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$

$dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$ – перехід у полярну систему координат

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Звідси $I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Повернемося до заміни $\Phi = 2I = \sqrt{\pi}$

$\therefore 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{dx^2}{2x} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}+1-1} dt = \Gamma(\frac{1}{2}$

Завдання 5.

В-дь: $5! = 120$

Завдання 6.

$A_{10}^6 \;:\; \frac{10^6}{A_{10}^6} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 15{,}12$

В-дь: 151200 шансів і відповідно становить 15,12%

Завдання 7.

$C_{10}^2 + C_{10}^3 + \ldots + C_{10}^{10} = \sum_{m=2}^{10} C_{10}^m = 2^{10} - 10 - 1 = 1013$

За біноміальною теоремою $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$

В-дь: 1013

Завдання 8.

$P(A) = \frac{m}{n} \Rightarrow m = C_3^1 C_7^2,\ n = C_{10}^3$

$\therefore P(A) = \frac{C_3^1 C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{40} = 0{,}525$

В-дь: $P(A) = \frac{21}{40} = 0{,}525$

Завдання 9.

$P(A) = \frac{1}{C_{10}^1 C_9^1} = \frac{1}{90} \approx 0{,}01$

В-дь: $P(A) = \frac{1}{90} \approx 0{,}01$

Завдання 10.

а) $P(A) = \frac{10}{10^6} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5} = 0{,}00001$

б) $P(A) = \frac{A_{10}^6}{10^6} = 0,1512$

в) $m = 10 \cdot 9 \cdot 8$

$\Rightarrow P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^6} = 0,00072$

В-96: а) 0,00001; б) 0,1512; в) 0,00072

Завдання 11.

$x^2 + px + q = 0$

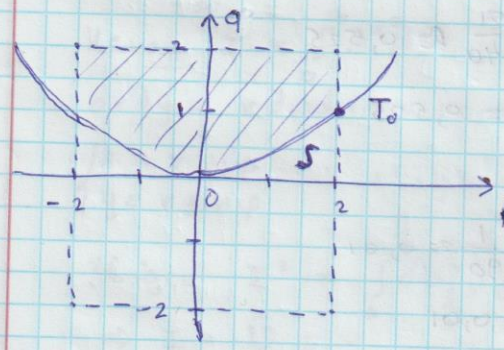
$\Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$

$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \Rightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

$\Rightarrow \frac{p^2}{4} - q < 0 \Rightarrow p^2 - 4q < 0$

$\begin{cases} p^2 - 4q < 0 \\ |p| \le 2, \ |q| \le 2 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{p^2}{4}$

Графік




$P(A) = \frac{M(m)}{M(n)}$

де $M(n) = 4^2 = 16$ од.

$T_0(2; 1)$

$M(m) = 2 \cdot 4 - 2S = 8 - 2S$

$2S = 2\int_0^2 \frac{p^2}{4} dp = \frac{p^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$ $\rightarrow M(m) = \frac{20}{3}$

$\therefore P(A) = \frac{\frac{20}{3}}{16} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12} \approx 0,416$

В-96: $P(A) = 0,416$

Лабораторна робота 2 Варіант 18

Завдання 1.

Обчислити: $\frac{2A_{28}^{9} + C_{18}^{7}}{P_{16}} + A_{25}^{9}$

В-96: $\approx 741354768800$

Завдання 2.

$P(A) = \frac{C_1^1 C_4^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}$

В-96: $P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$

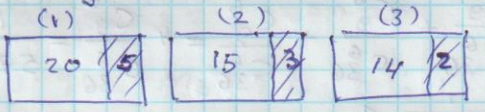
Завдання 3.

$p = 0,3$ , $q = 0,7$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,7^3 = 0,657$

В-96: $P(A) = 0,657$

Завдання 4.




$P(A_1) = \frac{20}{25}$ ; $P(A_2) = \frac{15}{18}$ ; $P(A_3) = \frac{14}{16}$.

$P(A) = \frac{1}{3}\left(\frac{20}{25} + \frac{15}{18} + \frac{14}{16}\right) = \frac{301}{360} \approx 0,8361$

В-96: $P(A) = \frac{301}{360} \approx 0,8361$

Завдання 5.

(0,8) I : $p = 0{,}99$, $q = 0{,}01$

(0,2) II : $p = 0{,}96$, $q = 0{,}04$

1) $P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}99 + 0{,}2 \cdot 0{,}96 = 0{,}984$

2) $P(\bar{A}) = 0{,}8 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}04 = 0{,}016$

3) а) $P_{\bar{A}}(B_1) = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}01}{0{,}016} = 0{,}5$

б) $P_{\bar{A}}(B_2) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}04}{0{,}016} = 0{,}5$

В-96: 1) 0,984 ; 2) 0,016 ; 3) а) 0,5 ; б) 0,5.

Завдання 6.

$P_1 = 0{,}06$

$P_2 = 0{,}08 \Rightarrow P(A) = 0{,}06 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}2 = 0{,}00096$

$P_3 = 0{,}12$ — ймов. того, що усі три блоки припинять роботу

В-96: $P(A) = 0{,}00096$

Завдання 7.

$m = C_9^6$, $n = C_{36}^6$

$$P(A) = \frac{C_9^6}{C_{36}^6} + \frac{C_9^6}{C_{36}^6} + \frac{C_9^6}{C_{36}^6} + \frac{C_9^6}{C_{36}^6} = 4\,\frac{C_9^6}{C_{36}^6} = \frac{1}{5797}$$

В-96: $P(A) = \frac{1}{5797} \approx 0{,}0002$

Завдання 8.

$$\begin{cases} P_1 = 0{,}4 \\ P_2 = 0{,}5 \\ P_3 = 0{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 0{,}6 \\ q_2 = 0{,}5 \\ q_3 = 0{,}4 \end{cases} \quad P(A) = P_1 q_2 q_3 + q_1 P_2 q_3 \therefore P(A) = 0{,}2$$

В-96: $P(A) = 0{,}2$

Завдання 9.

| N1 | N2 | N3 |
|---|---|---|
| 10 | 8 | 12 |

$p = 0{,}52$ , $q = 0{,}48$

$P(A) = 1 - \frac{1}{30}(10 \cdot 0{,}48 + 8 \cdot 0{,}48 + 12 \cdot 0{,}48) = 0{,}52$

В-96: $P(A) = 0{,}52$

Завдання 10.

$$P(A) = \frac{1}{3}\left(\frac{C_{7000}^{200}}{C_{7000}^{200}} + \frac{C_{6999}^{200}}{C_{7000}^{200}} + \frac{C_{6998}^{200}}{C_{7000}^{200}}\right)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{6800}{7000} + \frac{6800}{7000} \cdot \frac{6799}{6999}\right) \approx 0{,}9717$$

В-96: $P(A) \approx 0{,}9717$

Лабораторна робота 3 Варіант 18

Завдання 1.

$$P_8^5 = C_8^5 0{,}6^5 0{,}4^3 = 0{,}278692$$

В-96: $P(A) = 0{,}2787$

Завдання 2.

В-96: $m_0 = \{7, 8\}$ ; $P(A) = 0{,}1964$

Завдання 3.

$n = 10$ , $p = 0{,}6$ , $q = 0{,}4$

а) $P_{10}^5 = C_{10}^5 0{,}6^5 0{,}4^5 = 0{,}2006$

б) $P_{10}(m \leq 4) = P_{10}^0 + P_{10}^1 + \ldots + P_{10}^4 =$

$$= \sum_{m=0}^{4} C_{10}^m 0{,}6^m 0{,}4^{4-m} = 0{,}1662$$

в) $P_{10}(3 \le m \le 5) = P_{10}^3 + P_{10}^4 + P_{10}^5 = 0,3546$

В-96: а) 0,2006; б) 0,1662; в) 0,3546.

Завдання 4.

$n = 400$, $p = 0,8$, $q = 0,2$

Використаємо інтегральну теорему Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}$

$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

∴ а) $P_{400}(m \ge 300) = P_{400}(300 \le m \le 400) =$

$= \Phi(10) - \Phi(-2,5) = \frac{1}{2} + 0,4938 = 0,9938$

б) $P_{400}(m \ge 200) = P_{400}(200 \le m \le 400) =$

$= \Phi(10) - \Phi(-15) = 1$

В-96: а) 0,9938; б) 1.

Завдання 5.

$n = 200$, $p = 0,025$

а) $P_{200}(m \le 3) \approx P_1 + P_2 + P_3 + P_0$

$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $\lambda = np$

$\Rightarrow P_{200}(m \le 3) = e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!}\right) = 0,2$

в) $P_{200}(m \ge 4) = 1 - P_{200}(m < 4) = 1 - P_{200}(m \le$

$\Rightarrow P_{200}(m \le 3) = 0,265$ ∴ $P_{200}(m \ge 4) = 0,735$

б) $P_{200}^{0} \approx \frac{5^0}{0!} e^{-5} \approx 0,0067$

В-дь: а) 0,265 ; б) 0,0067 ; в) 0,735

Завдання 6.

$p = 0,3$ , $n = 12$

Використаємо формулу:

$np - q \leq m_0 \leq np + p$

$12 \cdot 0,3 - 0,7 \leq m_0 \leq 12 \cdot 0,3 + 0,3$

$2,9 \leq m_0 \leq 3,9$

$m_0 = 3$

$\therefore P_{12}^{3} = C_{12}^{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^9 = 0,2397$

В-дь: $m_0 = 3$, $P(A) = 0,2397$

Лабораторна робота 4 Варіант 18

Завдання 1.

| $x_i$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,2 | 0,15 | 0,05 |

$M(x) = \sum_{i} x_i p_i$ $D(x) = M(x^2) - M^2(x)$

$\therefore M(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 0,35$

$D(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i - 0,35^2 = 3,15 - 0,35^2 = 3,0275$

$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{3,0275} \approx 1,73997$

В-дь: $M(x) = 0,35$ ; $D(x) = 3,0275$ ; $\sigma(x) \approx 1,73997$

Завдання 2.

$k = 4$

$p = 0,3$

$\therefore$

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $P_4^0$ | $P_4^1$ | $P_4^2$ | $P_4^3$ | $P_4^4$ | 1 |

$\Rightarrow$

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | 0,2401 | 0,4116 | 0,2646 | 0,0756 | 0,0081 |

$M(X) = 1,2$

$D(X) = 0,84$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,84} \approx 0,9165$

Завдання 3.

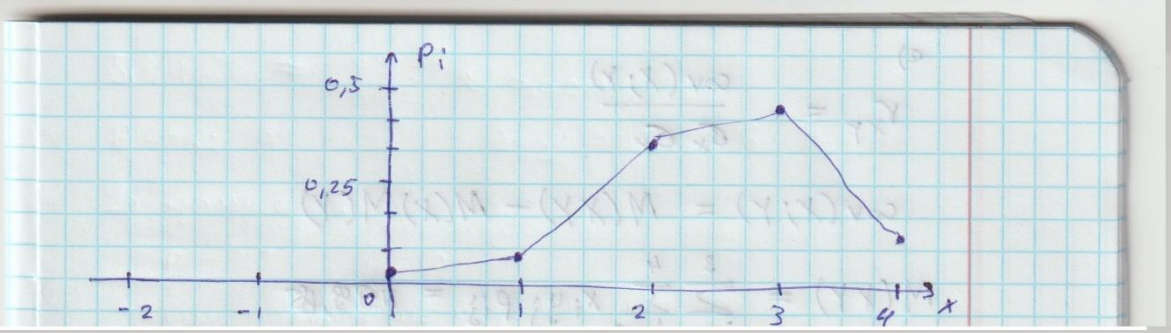
$\begin{cases} n = 12 \\ m = 8 \end{cases}$

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $\frac{1}{495}$ | $\frac{32}{495}$ | $\frac{56}{165}$ | $\frac{224}{495}$ | $\frac{14}{99}$ |

$M(X) = \frac{8}{3}$

$D(X) = \frac{256}{33} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{99}$

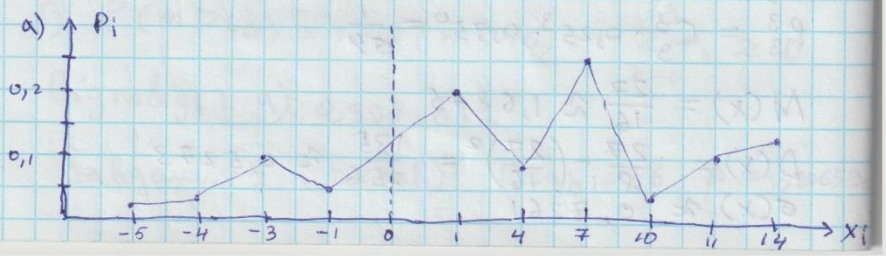
$\sigma(X) = \sqrt{\frac{64}{99}} \approx 0,804$



## Завдання 4.

| $x_i$ | -5 | -4 | -3 | -1 | 1 | 4 | 7 | 10 | 11 | 14 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,02 | 0,3 | 0,1 | 0,05 | 0,2 | 0,04 | a | 0,03 | 0,1 | 0,13 | 1 |

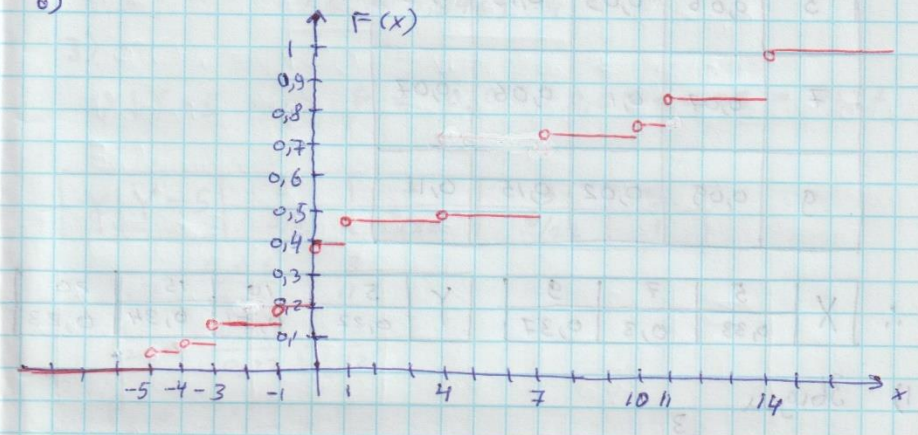
$\because \sum_i p_i = 1 \quad \therefore \quad 1 - \sum_{i \neq 7}^{10} p_i = a \Rightarrow a = 0{,}3 = p_7$



б)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -5 \\ 0{,}02, & -5 < x \le -4 \\ 0{,}5, & -4 < x \le -3 \\ 0{,}15, & -3 < x \le -1 \\ 0{,}2, & -1 < x \le 1 \\ 0{,}4, & 1 < x \le 4 \\ 0{,}44, & 4 < x \le 7 \\ 0{,}74, & 7 < x \le 10 \\ 0{,}77, & 10 < x \le 11 \\ 0{,}87, & 11 < x \le 14 \\ 1, & x > 14 \end{cases}$$

в)




г) $M_0 = 7 \quad (p_7 = 0{,}3)$

д) $M_e = X \Leftrightarrow F(X) = 0{,}5 \quad \therefore x = 10$

е) $M(x) = \sum_{i=1}^{10} x_i p_i = 5{,}11$

ж) $D(x) = M(X^2) - M^2(x) = 58{,}05 - 5{,}11^2 = 31{,}9379$

жс) $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{31{,}9379} \approx 5{,}65$

з) $A_S = \frac{M_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3}(\nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^2)$

$\nu_k = M(x^k)$

$\therefore A_S = -0{,}0262$

и) $E_S = \frac{M_4}{\sigma_4} - 3 = \frac{1}{\sigma_4}(\nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4) - 3$

$\therefore E_S = -1{,}1077$

Лабораторна робота 5 Варіант 18

| X \ Y | 9 | 14 | 19 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 0,052 | 0,098 | 0,122 | 0,058 |
| 11 | 0,078 | 0,092 | 0,068 | 0,062 |
| 13 | 0,082 | 0,028 | 0,142 | 0,118 |

1)

| X | 9 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,33 | 0,3 | 0,37 |

| Y | 9 | 11 | 19 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 0,212 | 0,218 | 0,332 | 0,238 |

$M(X) = 11,08$

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 125,56 - 11,08^2 = 2,7936$

$\sigma(X) = \sqrt{2,7936} \approx 1,67141$

$M(Y) = 16,326$

$D(Y) = 300,49 - 16,326^2 = 33,9517724$

$\sigma(Y) = \sqrt{33,9517} \approx 5,8268$

2)

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\operatorname{cov}(X;Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$$

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} x_i y_j p_{ij} = 159,8$$

$$\therefore \operatorname{cov}(X;Y) = 159,8 - 11,08 \cdot 16,326 = -21,09$$

$$\Rightarrow r_{XY} = \frac{-21,09208}{33,951724 \cdot 5,82268} \approx -0,1067$$

Оскільки $|r_{XY}| \leq 1$ величину знайдено правильно.

$X|Y=24 \Rightarrow P = 0,058 + 0,062 + 0,118 = 0,114$

| $X\|Y=24$ | 9 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{29}{57}$ | $\frac{31}{57}$ | $\frac{59}{57}$ |

$M(X|Y=24) = 24,02$

$Y|X=9 \Rightarrow P = 0,052 + 0,098 + 0,122 + 0,058 = 0,3$

| $Y\|X=9$ | 9 | 11 | 19 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | $\frac{26}{165}$ | $\frac{49}{165}$ | $\frac{81}{165}$ | $\frac{29}{165}$ |

$M(Y|X=9) = 15,93$