Розділ 2.

Завдання 2.1.

$a = 2i - 3j + k$, $b = j + 4k$, $c = 5i + 2j - 3k$

а) $\vec{a} \times 3\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 12 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 180 - 15 - 48 =$

$= -261$

б) $3\vec{a} \times 2\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -9 & 3 \\ 10 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 54i + 30j + 24k + 90k + 36j - 12i =$

$= 42i + 66j + 114k = 6(7i + 11j + 19k)$

Звідси $|3\vec{a} \times 2\vec{c}| = \underbrace{\sqrt{42^2 + 66^2 + 114^2}}_{= 6\sqrt{7^2 + 11^2 + 19^2}} = 18\sqrt{59}$

в) $\vec{b} \cdot (-4\vec{c}) = \underbrace{(j + 4k)}_{(0,1,4)} \cdot \underbrace{(-20i - 8j + 12k)}_{(-20,-8,12)} =$

$= 0 \cdot (-20) + 1 \cdot (-8) + 4 \cdot 12 = 40$

г) $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{c} = (5, 2, -3)$

$\frac{5}{2} \neq -\frac{2}{3} \neq -\frac{3}{1}$, отже вектори не колінеарні

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 10 - 6 - 3 = 1 \neq 0$

отже вектори не ортогональні.

9) Вектори $\vec{a}, 2\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні,

якщо $\vec{a} \times 2\vec{b} \times \vec{c} = 0$

Знайдемо $\vec{a} \times 2\vec{b} \times \vec{c}$:

$$2\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\{-6-60-5-16\} \neq 0$$

Отже вектори не компланарні.

Завдання 2.2.

$a = (5, 4, 1)$, $b = (-3, 5, 2)$, $c = (2, -1, 3)$, $d = (7, 23, 4)$

Обчислимо $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 75 + 16 + 3 - \cancel{10} + \cancel{10} + 36 = 130 \neq 0$

Отже вектори утв. базис, тоді

$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, або:

$$\begin{cases} 5\alpha - 3\beta + 2\gamma = 7 \\ 4\alpha + 5\beta - \gamma = 23 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 4 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за допомогою метода Крамера:

$$\Delta = 130, \quad \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 23 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 390$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 4 & 23 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 260$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 4 & 5 & 23 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -130$$

Звідси: $\alpha = \dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta} = 3$

$\beta = \dfrac{\Delta_\beta}{\Delta} = 2$

$\gamma = \dfrac{\Delta_\gamma}{\Delta} = -1$

$\therefore \quad \vec{d} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (7, 23, 4)$

Завдання 2.5

$A_1(2;5;-3)$, $A_2(-7;8;0)$, $A_3(4;-2;5)$, $A_4(6;3;-1)$

а) A_1A_2:

$$\frac{x-2}{-7-2} = \frac{y-5}{8-5} = \frac{z-(-3)}{0-(-3)} \Leftrightarrow -\frac{x-2}{9} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+3}{3}$$

б) $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z+3 \\ -9 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Завдання 2.9.

а) $b=15$, $F(-10, 0)$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – канонічне р-ння еліпса

$c=-10 \Rightarrow b^2+c^2=a^2$

Звідси $15^2+(-10)^2=a^2 \Rightarrow a=5\sqrt{13}$

∴ маємо: $\frac{x^2}{25\cdot 13}+\frac{y^2}{225}=1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{325}+\frac{y^2}{225}=1$ – кан. рівняння еліпса

б) $a=13$, $\varepsilon=\frac{14}{13}$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – канонічне р-ння гіперболи

$c^2=a^2+b^2$; $\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$

$\varepsilon=\frac{c}{a} \Rightarrow \varepsilon=\frac{14}{13}=\sqrt{1+\frac{b^2}{169}} \Rightarrow b=3\sqrt{3}$

Звідси маємо:

$\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{27}=1$

б) $y^2 = 2px$ – канонічне р-ння параболи

$D: x = -\frac{p}{2}$, оскільки за умовою

$D: x = -4$ маємо: $p = 8$

$\therefore \ y^2 = 16x$