

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ

Практичне заняття № 6

Тема. Дослідження замкнутих систем масового обслуговування

План проведення заняття

Вступ.

1. Рішення задач з використанням математичної моделі замкнутої СМО.
 2. Аналіз характеристик систем масового обслуговування.
- Заключення.

Завдання на СРС: Розв'язати задачу № 2, проаналізувати характеристики СМО, надати рекомендації щодо підвищення ефективності функціонування відділу ТЗІ.

Вступ.

Питання для перевірки готовності до заняття.

1. Дайте визначення систем масового обслуговування.
2. Які обмеження накладаються на застосування математичних моделей на основі систем масового обслуговування?
3. Яка інформація є вихідною для моделювання систем масового обслуговування?
4. Яку інформацію можна отримати в результаті моделювання систем масового обслуговування?
5. В чому відмінність СМО з відмовами та СМО з чергами?
6. В чому відмінність математичної моделі СМО з обмеженими та необмеженими чергами?
7. Які основні характеристики СМО можна обчислювати для оцінювання ефективності їх функціонування?
8. В чому особливості математичних моделей замкнутих СМО.

1. Рішення задач з використанням математичної моделі замкнутої СМО.

Замкнуті СМО – це такі СМО, в яких інтенсивність потоку заявок, що надходять, залежить від станів самої СМО.

В якості прикладу замкнутої СМО розглянемо таку систему. Інженер відділу ТЗІ або робітник-наладчик обслуговує n приладів. Кожен прилад може влюбий момент вийти з ладу і вимагати обслуговування з боку наладчика. Інтенсивність потоку несправностей кожного приладу дорівнює λ . Прилад, який вийшов з ладу, зупиняється. Якщо в цей момент робітник вільний, він береться за налагодження приладу; на це він витрачає середній час $\bar{t}_{об} = 1/\mu$, де μ - інтенсивність потоку обслуговувань (налагоджувальних).

Якщо в момент виходу приладу з ладу робітник зайнятий, прилад стає в чергу на обслуговування і чекає, доки робітник не звільниться.

Вимагається знайти імовірності станів даної системи та її характеристики:

- імовірність того, що робітник не буде зайнятим;
- імовірність наявності черги;
- середню кількість приладів, які чекають черги на ремонт і т.д.

Розглянемо сформульовану вище задачу про робітника-наладчика в межах загальної схеми марковських процесів.

Система, яка включає робітника і n приладів, має ряд станів, які ми будемо нумерувати по кількості несправних приладів (приладів, пов'язаних з обслуговуванням):

S_0 - всі прилади справні (робітник вільний),

S_1 - один прилад зайнятий, робітник зайнятий його налагодженням,

S_2 - два прилада несправні, один лагодиться, інший чекає черги,

.....

S_n - всі n приладів несправні, один лагодиться, $n-1$ стоять в черзі.

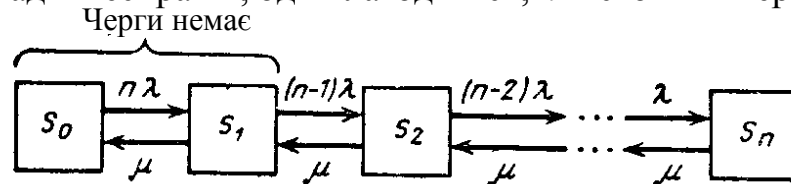


Рис. 4. Граф станів замкнутої СМО

Розв'язанням задачі про граничні імовірності станів:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{n\lambda}{\mu} p_0, \\ p_2 &= \frac{n(n-1)\lambda^2}{\mu^2} p_0, \\ &\dots \\ p_n &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1 \lambda^n}{\mu^n} p_0, \\ p_0 &= \frac{1}{1 + n(\lambda/\mu) + n(n-1)(\lambda/\mu)^2 + \dots + n(n-1)\dots 1 \cdot (\lambda/\mu)^n}. \end{aligned} \right\}$$

Використовуючи позначення $\lambda/\mu = \rho$, перепишемо ці формули у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1 + n\rho + n(n-1)\rho^2 + \dots + n(n-1)\dots 1 \cdot \rho^n}, \\ p_1 &= n\rho p_0, \\ p_2 &= n(n-1)\rho^2 p_0, \\ &\dots \\ p_n &= n(n-1)\dots 1 \rho^n p_0. \end{aligned} \right\}$$

Абсолютна пропускна здатність – середня кількість несправностей, які усуваються працівником за одиницю часу. Обчислимо цю характеристику. Робітник зайнятий налагоджуванням з імовірністю

$$P_{\text{зайн}} = 1 - p_0. \quad (3.1)$$

Якщо він зайнятий, він обслуговує μ приладів (ліквідує μ несправностей) за одиницю часу; отже, абсолютна пропускна здатність системи

$$A = (1 - p_0)\mu. \quad (3.3)$$

Відносну пропускну здатність для замкнутої СМО ми не обчислюємо, тому що кожна заявка, в решті решт, буде обслужена: $q=1$.

Імовірність того, що робітник не буде зайнятий:

$$P_{\text{вл}} = 1 - P_{\text{зайн}} = p_0. \quad (3.4)$$

Обчислимо середню кількість несправних станків $\bar{\omega}$, інакше – середню кількість приладів, пов'язаних з процесом обслуговування:

$$\bar{\omega} = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + n \cdot p_n \quad \text{або} \quad \bar{\omega} = n - \frac{1-p_0}{\rho} \quad (3.5)$$

Визначимо тепер середню кількість приладів \bar{r} , які чекають налагоджування в черзі. Будемо розмірковувати наступним чином: загальна кількість приладів W , пов'язаних з обслуговуванням, складається з кількості приладів

R , які стоять в черзі, плюс кількість приладів Ω , які безпосередньо знаходяться під обслуговуванням:

$$W = R + \Omega.$$

Кількість приладів Ω , які знаходяться під обслуговуванням, дорівнює одиниці, якщо робітник зайнятий, і нуля, якщо він вільний, тобто середнє значення Ω дорівнює імовірності того, що робітник зайнятий:

$$\bar{\omega} = 1 - p_0.$$

Віднімаючи цю величину від середньої кількості $\bar{\omega}$ приладів, пов'язаних з обслуговуванням (несправних), отримаємо середню кількість приладів, які чекають обслуговування в черзі:

$$\bar{r} = n - \frac{1-p_0}{\rho} - (1 - p_0) = n - (1 - p_0) \left(1 + \frac{1}{\rho}\right). \quad (3.6)$$

Обчислимо продуктивність групи приладів, які обслуговуються робітником.

Знаючи середню кількість несправних приладів $\bar{\omega}$ та продуктивність l справного приладу за одиницю часу, можна оцінити середню втрату L продуктивності групи приладів за одиницю часу за рахунок несправностей:

$$L = \bar{\omega}l.$$

Висновок. Таким чином, розраховані характеристики замкнутих СМО дозволяють розробити рекомендації щодо підвищення ефективності функціонування СМО.

Приклад 1. Робітник обслуговує групу з трьох приладів. Кожен прилад зупиняється в середньому 2 рази за годину. Процес налагоджування займає в робітника, в середньому 10 хвилин. Визначити характеристики замкнутої СМО: імовірність зайнятості робітника; його абсолютну пропускну здатність A ; середню кількість несправних приладів; середню відносну втрату продуктивності групи приладів за рахунок несправностей.

Розв'язання. Маємо: $n = 3$, $\lambda = 2$, $\mu = \frac{1}{t_{ог}} = \frac{1}{1/6} = 6$, $\rho = \lambda/\mu = 1/3$.

За формулами (3.1)

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3 \cdot 1/3 + 3 \cdot 2 \cdot 1/3^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1/3^3} \approx 0,346.$$

Імовірність зайнятості робітника:

$$P_{зайн} = 1 - p_0 = 0,65.$$

Абсолютна пропускну здатність робітника (середня кількість несправностей, яку він ліквідує за годину):

$$A = 0,654 \cdot 6 = 3,94.$$

Середня кількість несправних приладів знаходимо за формулою (3.5):

$$\bar{\omega} = 3 - \frac{0,654}{1/3} = 1,04.$$

Середня відносна втрата продуктивності групи приладів за рахунок несправностей $\bar{\omega}/n = 0,347$, тобто за рахунок несправностей група приладів втрачає близько 35% продуктивності.

2. Аналіз характеристик систем масового обслуговування.

Приклад 2. Два робітники обслуговують групу з шести приладів. Зупинки кожного (працюючого) прилада стаються, в середньому, через кожні півгодини. Процес налагоджування займає в робітника в середньому 10 хвилин. Визначити характеристики замкнутої СМО:

- середню кількість зайнятих робітників,
- абсолютну пропускну здатність,
- середн кількість несправних приладів.

Розв'язання. Маємо: $n = 6$, $m = 2$, $\lambda = 2$, $\mu = 1/\bar{t}_{\text{об}} = 6$, $\rho = \lambda/\mu = 1/3$. За формулами (3.7, див. Лекцію № 7)

$$p_0 = \left(1 + \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 2^3} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 2^4} \cdot \frac{1}{3^6} \right)^{-1} \\ = \frac{1}{6,549} \approx 0,153,$$

$$p_1 \approx 6/1 \cdot 1/3 \cdot 0,153 \approx 0,306.$$

Звідси середня кількість зайнятих робітників:

$$\bar{z} = 1p_1 2(1 - p_0 - p_1) = 1 \cdot 0,153 + 2 \cdot 0,154 \approx 1,235.$$

За формулою (3.9) знаходимо абсолютну пропускну здатність

$$A = 1,235 \cdot 6 = 7,41.$$

За формулою (3.10) знаходимо середню кількість несправних приладів

$$\bar{\omega} = 6 - 7,41/2 = 2,295.$$

Задача розв'язана.

Заключення

Основна відмінність замкнутих СМО полягає в тому, що заявки обумовлені самою системою. Зазвичай інтенсивність вхідного потоку заявок є обмеженою для таких систем. Розрахунок показників ефективності функціонування замкнутих систем масового обслуговування передбачає розрахунок стандартних показників: абсолютної та відносної пропускну здатності, імовірності відмови, середнього часу очікування, тощо. Значення розрахованих характеристик замкнутих СМО дозволяють розробити рекомендації щодо підвищення ефективності функціонування СМО

Завідувач кафедри вищої математики,
математичного моделювання та фізики
кандидат фізико-математичних наук, доцент

І.В. Замрій