Análisis de sistemas lineales.

“Método de estabilidad de Routh.”

Tarea Nº9.

Profesor: Erick Salas Chaverri.

Integrante:

Allan Chavarría Araya.

¿Qué es el método de Routh?

Al Aplicar el criterio de estabilidad de Routh, podremos saber si un sistema de regulación es estable sin necesidad de resolver la ecuación característica, es decir sin tener que calcular los polos de la ecuación polinómica sea del grado que sea. Lo que simplifica significativamente los cálculos, ya que el criterio de estabilidad de Routh indica si hay o no raíces positiva o con parte real positiva en una ecuación, sin tener que resolverla.

Para que un sistema sea estable la ecuación característica debe cumplir las siguientes premisas:

1. El polinomio en s de la ecuación característica, se escribe ordenado.

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n - 1 s^1 + a_n s^0$$

El polinomio debe ser completo (todos los coeficientes tienen que ser distintos de cero, an ≠ 0)

2. Si alguno de los coeficientes es nulo o negativo y hay coeficientes positivos, el sistema no es estable

3. Si todos los coeficientes son positivos, con ellos se construye la tabla de Routh, como se indica. Debe tener tantas filas como el número de términos del polinomio de la función característica, se colocan en filas y columnas como sigue: Las dos primeras filas se van llenando con los coeficientes de los monomios de la ecuación característica, alternando la primera fila con la segunda, y así sucesivamente, hasta que se terminan los coeficientes.

Para calcular coeficientes de las siguientes filas de la tabla, se sigue la siguiente pauta.

Tabla de Routh

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
s^{n} & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_i = \dfrac{a_1 a_{2i} - a_0 a_{2i+1}}{a_1} \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_i = \dfrac{b_1 a_{2i+1} - a_1 b_{i+1}}{b_1} \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots & d_i = \dfrac{c_1 b_{i+1} - b_1 c_{i+1}}{c_1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
s^{3} & v_1 & v_2 & & & & \\
s^{2} & x_1 & x_2 & & & & x_i = \dfrac{v_1 u_{i+1} - u_1 v_{i+1}}{v_1} \\
s^{1} & y_1 & & & & & y_1 = \dfrac{x_1 v_2 + v_1 x_2}{x_1} \\
s^{0} & z_1 & & & & & z_1 = x_2
\end{array}
$$

Imagen 1. Elaboración propia

De la misma forma, vamos calculando las restantes filas, c, d, e, f,... Hasta completar la tabla.

4. El sistema será estable si en la primera columna de la tabla de Routh no existen cambios de signo.

La condición necesaria para que todas las raíces tengan parte real negativa es:

- Que el polinomio esté completo en s, es decir, que todas las potencias en s, desde sn a so, deben figurar en la ecuación.
- Si algún coeficiente distinto de an, es cero, o si hay algún coeficiente negativo, hay varias raíces positivas o raíces imaginarias con parte real positiva y el sistema es inestable.

¿Procedimiento para construir una tabla?

Procedimiento en el criterio de estabilidad de Routh:

1. Escriba el polinomio en s del denominador en la forma siguiente:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

En donde los coeficientes son cantidades reales. Suponemos que 0 ≠ n a ; es decir, se elimina cualquier raíz cero.

2. Si alguno de los coeficientes es cero o negativo, ante la presencia de al menos un coeficiente positivo, hay una raíz, o raíces imaginarias o que tiene partes reales positivas. En tal caso, el sistema no es estable. La condición necesaria, pero no suficiente, para la estabilidad es que todos los coeficientes de la ecuación estén presentes y tengan signo positivo.

3. Si todos los coeficientes son positivos, ordene los coeficientes del polinomio en renglones y columnas de acuerdo con el patrón o arreglo siguiente:

$$
\begin{array}{cccccc}
s^{n} & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^{2} & e_1 & e_2 & & & \\
s^{1} & f_1 & & & & \\
s^{0} & g_1 & & & &
\end{array}
$$

Los coeficientes b1,b2,b3,…,c1,c2,c3,….,d1,d2,…, etc., se evalúan del modo siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
b_1 = \dfrac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} & c_1 = \dfrac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1} & \\
b_2 = \dfrac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} & c_2 = \dfrac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1} & d_1 = \dfrac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1} \\
b_1 = \dfrac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1} & c_3 = \dfrac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1} & d_2 = \dfrac{c_1b_3 - b_1c_3}{c_1} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

La evaluación continua hasta que todas las restantes son cero.

El criterio de estabilidad de Routh- Hurwitz plantea que el número de raíces de la ecuación con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna del arreglo.

La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación se encuentren en el semiplano izquierdo del plano s es que todos los coeficientes de la ecuación sean positivos y que todos los términos de la primera columna del arreglo tengan signo positivo.